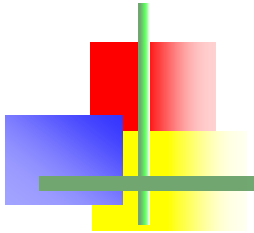




Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông – PTIT

*Khoa Công nghệ Thông tin 1*



# Toán rời rạc 2

Discrete mathematics 2

## Bài 2: Biểu diễn đồ thị trên máy tính Representing Graphs

*TS. Nguyễn Tất Thắng*

2/8/2022



## Nội dung Bài 2

1. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề.
2. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận liên thuộc.
3. Biểu diễn đồ thị bằng danh sách cạnh.
4. Biểu diễn đồ thị bằng danh sách kề.



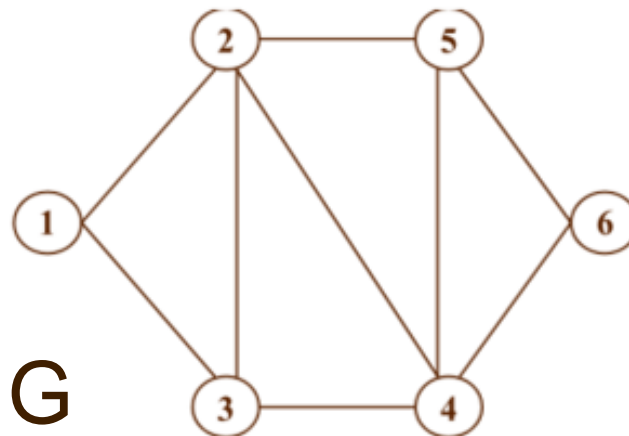
# Ma trận kề của đồ thị vô hướng (1/2)

Xét đồ thị vô hướng  $G = \langle V, E \rangle$  với:

- Tập đỉnh  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ ;
- Tập cạnh  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ;

□ Ta gọi ma trận kề của đồ thị  $G$  là ma trận  $n \times n$  có các phần tử  $= 1$  hoặc  $0$  theo qui ước như sau:

$A = \{a_{ij} : a_{ij} = 1 \text{ nếu } (i, j) \in E; a_{ij} = 0 \text{ nếu } (i, j) \notin E; i, j = 1, 2, \dots, n\}.$



(Phương ND, 2013)



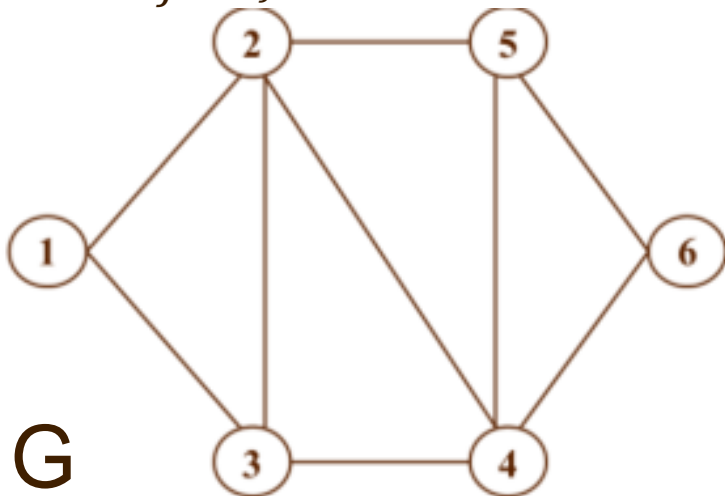
# Ma trận kề của đồ thị vô hướng (2/2)

Xét đồ thị vô hướng  $G = \langle V, E \rangle$  với:

- Tập đỉnh  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ ;
- Tập cạnh  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ;

□ Ta gọi ma trận kề của đồ thị  $G$  là ma trận  $n \times n$  có các phần tử  $= 1$  hoặc  $0$  theo quy ước như sau:

$A = \{a_{ij} : a_{ij} = 1 \text{ nếu } (i, j) \in E; a_{ij} = 0 \text{ nếu } (i, j) \notin E; i, j = 1, 2, \dots, n\}.$



Ma  
trận  
kề

6 x 6

0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	1	0



# Tính chất của ma trận kề

□ Với đồ thị vô hướng,  $A = \{a_{ij}\}$ , ta có các tính chất:

- Đối xứng qua đường chéo chính.
- Tổng các phần tử của ma trận = hai lần số cạnh:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} = 2|E|$$

- Tổng các phần tử của hàng  $u$  = bậc của đỉnh  $u$ :

$$\sum_{j=1}^n a_{uj} = \deg(u)$$

- Tổng các phần tử của cột  $u$  = bậc của đỉnh  $u$ :

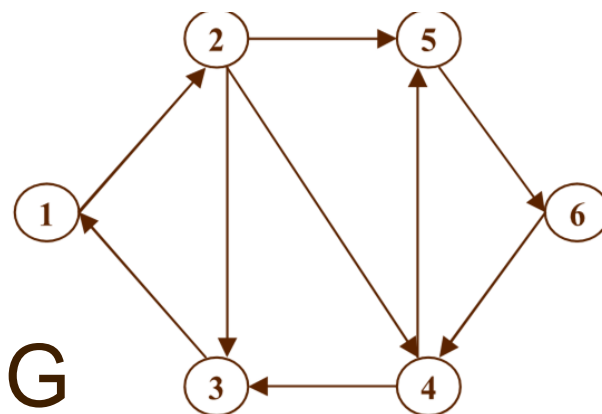
$$\sum_{i=1}^n a_{iu} = \deg(u)$$

- Nếu ký hiệu  $a_{ij}^p$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) là các phần tử của ma trận  $A^p = A.A...A$  (nhân  $p$  lần), ta có:  $a_{ij}^p$  = số đường đi khác nhau từ đỉnh  $i$  đến đỉnh  $j$  qua  $p - 1$  đỉnh trung gian.



# Ma trận kề của đồ thị có hướng (1/2)

- Định nghĩa hoàn toàn tương tự với ma trận kề của đồ thị vô hướng.
  - Cần lưu ý tới hướng của cạnh;
  - Ma trận kề của đồ thị có hướng là không đối xứng.

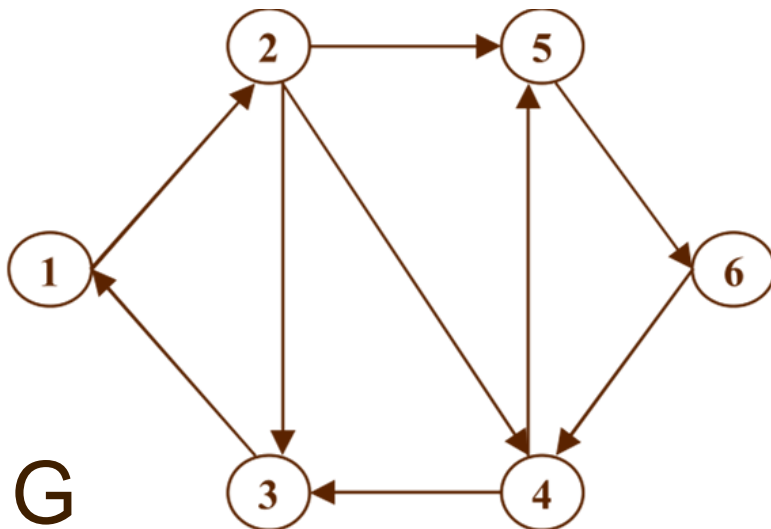


(Phương ND, 2013)



# Ma trận kề của đồ thị có hướng (2/2)

- Định nghĩa hoàn toàn tương tự với ma trận kề của đồ thị vô hướng.
  - Cần lưu ý tới hướng của cạnh;
  - Ma trận kề của đồ thị có hướng là không đối xứng.



Ma  
trận  
kề  
**6 x 6**

0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0

(Phương ND, 2013)



# Tính chất của ma trận kề đồ thị có hướng

□ Với đồ thị có hướng,  $A = \{a_{ij}\}$ , ta có các tính chất:

- Tổng các phần tử của ma trận = số cạnh:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} = |E|$$

- Tổng các phần tử của hàng  $u$  = bán bậc ra của đỉnh  $u$

$$\sum_{j=1}^n a_{uj} = \deg^+(u)$$

- Tổng các phần tử của cột  $u$  = bán bậc vào của đỉnh  $u$

$$\sum_{i=1}^n a_{iu} = \deg^-(u)$$

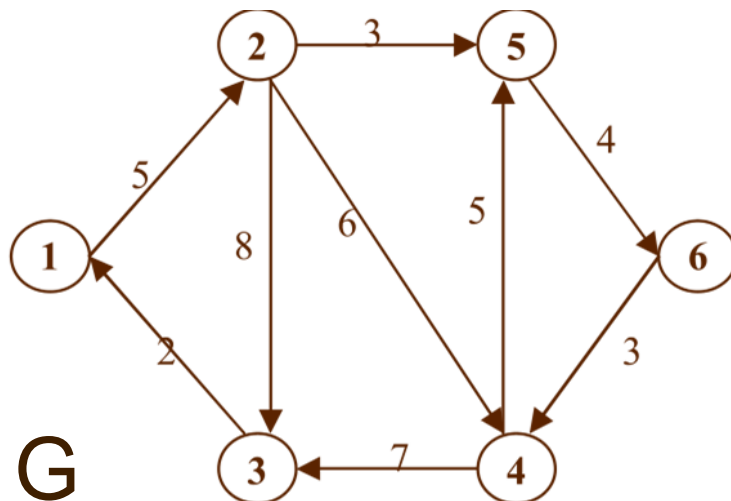
- Nếu ký hiệu  $a_{ij}^p$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) là các phần tử của ma trận  $A^p = A.A...A$  ( $p$  lần), khi đó:  $a_{ij}^p$  = số đường đi khác nhau từ đỉnh  $i$  đến đỉnh  $j$  qua  $p - 1$  đỉnh trung gian.





# Ma trận trọng số

- Mỗi cạnh  $e = (u, v)$  của đồ thị được gán một giá trị  $c(e) = c(u, v)$  gọi là trọng số của cạnh  $e$ .
  - Đồ thị trong trường hợp như vậy gọi là đồ thị trọng số.
  - Từ đó ma trận trọng số sẽ có dạng:  $C = C[i, j]$  với  $C[i, j] = C(i, j)$  nếu  $(i, j) \in E$  và  $C[i, j] = \theta$  nếu  $(i, j) \notin E$ .  $\theta$  nhận các giá trị:  $0, \infty, -\infty$  tùy theo thuật toán.



Ma  
trận  
trọng  
số  
**6 x 6**

$\infty$	5	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$\infty$	$\infty$	8	6	3	$\infty$
2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$\infty$	$\infty$	7	$\infty$	5	$\infty$
$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4
$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	$\infty$	$\infty$



# Ưu & nhược điểm của ma trận kề

## □ Ưu điểm:

- Đơn giản, dễ cài đặt trên máy tính
  - Sử dụng một mảng hai chiều để biểu diễn ma trận kề
- Dễ dàng kiểm tra hai đỉnh  $u, v$  có kề với nhau hay không
  - Đúng một phép so sánh ( $a[u][v] \neq 0$ ?)

## □ Nhược điểm:

- Lãng phí bộ nhớ: bất kể số cạnh nhiều hay ít ta cần  $n^2$  đơn vị bộ nhớ để biểu diễn
- Khó biểu diễn được với các đồ thị có số đỉnh lớn
- Để xem xét đỉnh  $u$  có những đỉnh kề nào cần mất  $n$  phép so sánh kể cả đỉnh  $u$  là đỉnh cô lập hoặc đỉnh treo



# Định dạng lưu trữ ma trận kề

Dòng đầu tiên: số đỉnh của đồ thị

$n$  dòng kế tiếp: thông tin ma trận kề của đồ thị

- 2 phần tử khác nhau của ma trận kề được viết cách nhau một vài khoảng trống

n	10									
n	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0
	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1
	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1
	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0



## Nội dung Bài 2

---

1. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề.
2. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận liên thuộc.
3. Biểu diễn đồ thị bằng danh sách cạnh.
4. Biểu diễn đồ thị bằng danh sách kề.



# Ma trận liên thuộc: đồ thị vô hướng (1/2)

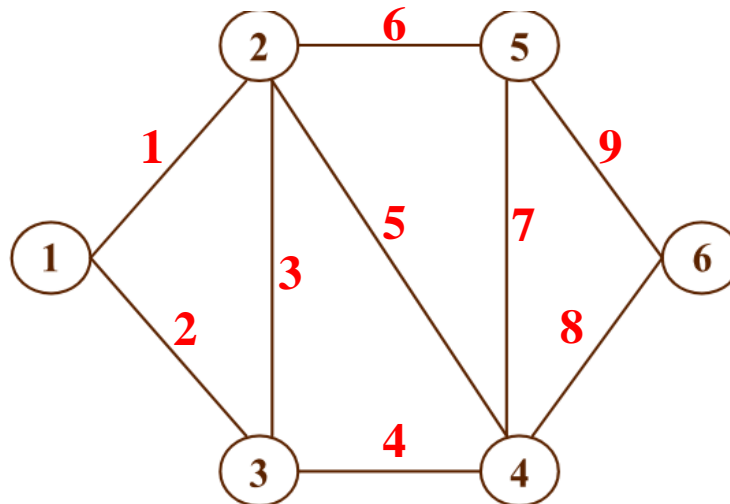
Xét đồ thị **vô hướng**:  $G = (V, E)$ ,

với  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$

- **Ma trận liên thuộc** đỉnh-cạnh của  $G$  là ma trận cỡ  $n \times m$  có các phần tử  $a_{ij}$  được xây dựng như sau:

$a_{ij} = 1$ , nếu đỉnh  $i$  liên thuộc với cạnh  $j$

0, nếu đỉnh  $i$  không liên thuộc với cạnh  $j$





## Ma trận liên thuộc: đồ thị vô hướng (2/2)

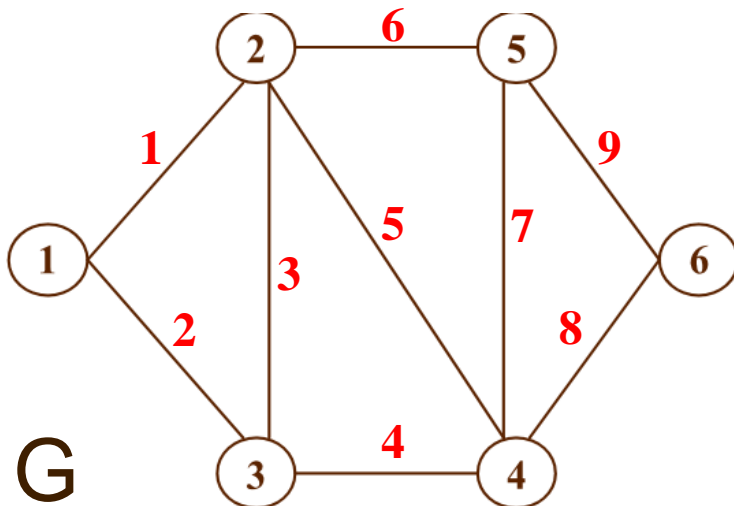
Xét đồ thị **vô hướng**:  $G = (V, E)$ ,

với  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$

- Ma trận liên thuộc đỉnh-cạnh của  $G$  là ma trận cỡ  $n \times m$  có các phần tử  $a_{ij}$  được xây dựng như sau:

$a_{ij} = 1$ , nếu đỉnh  $i$  liên thuộc với cạnh  $j$

0, nếu đỉnh  $i$  không liên thuộc với cạnh  $j$



Ma  
trận  
liên  
thuộc  
 $6 \times 9$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	0	1	1	0	0	0
3	0	1	1	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	1	0	1	1	0
5	0	0	0	0	0	1	1	0	1
6	0	0	0	0	0	0	0	1	1



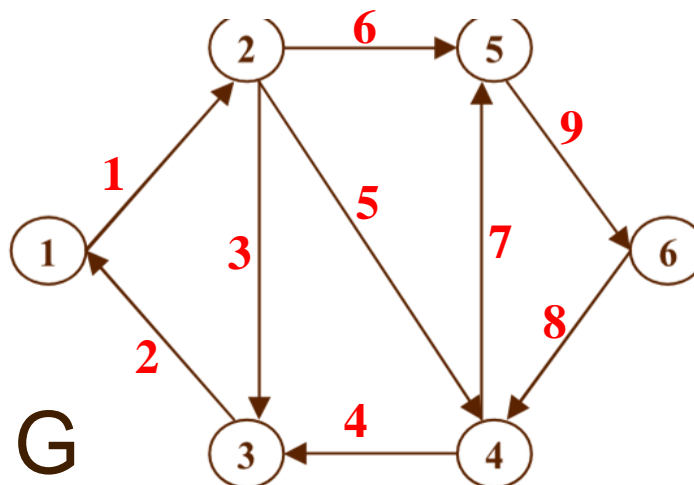
# Ma trận liên thuộc: đồ thị có hướng (1/2)

Xét đồ thị **có hướng**:  $G = (V, E)$ ,

với  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$

- **Ma trận liên thuộc** đỉnh-cung của  $G$  là ma trận cỡ  $n \times m$  có các phần tử  $a_{ij}$  được xây dựng như sau:

$a_{ij} =$  1, nếu đỉnh  $i$  là đỉnh đầu của cung  $e_j$   
-1, nếu đỉnh  $i$  là đỉnh cuối của cung  $e_j$   
0, nếu đỉnh  $i$  không là đầu mút của cung  $e_j$





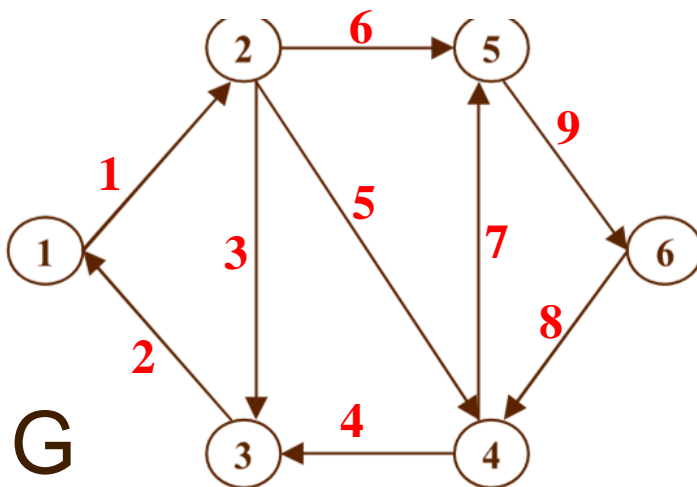
# Ma trận liên thuộc: đồ thị có hướng (1/2)

Xét đồ thị có hướng:  $G = (V, E)$ ,

với  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$

- Ma trận liên thuộc đỉnh-cung của  $G$  là ma trận cỡ  $n \times m$  có các phần tử  $a_{ij}$  được xây dựng như sau:

$a_{ij} =$  1, nếu đỉnh  $i$  là đỉnh đầu của cung  $e_j$   
 -1, nếu đỉnh  $i$  là đỉnh cuối của cung  $e_j$   
 0, nếu đỉnh  $i$  không là đầu mút của cung  $e_j$



Ma  
trận  
liên  
thuộc  
 $6 \times 9$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
2	-1	0	1	0	1	1	0	0	0
3	0	1	-1	-1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	-1	0	1	-1	0
5	0	0	0	0	0	-1	-1	0	1
6	0	0	0	0	0	0	0	1	-1





## Nội dung Bài 2

---

1. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề.
2. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận liên thuộc.
3. Biểu diễn đồ thị bằng danh sách cạnh.
4. Biểu diễn đồ thị bằng danh sách kề.



# Danh sách cạnh - danh sách cung

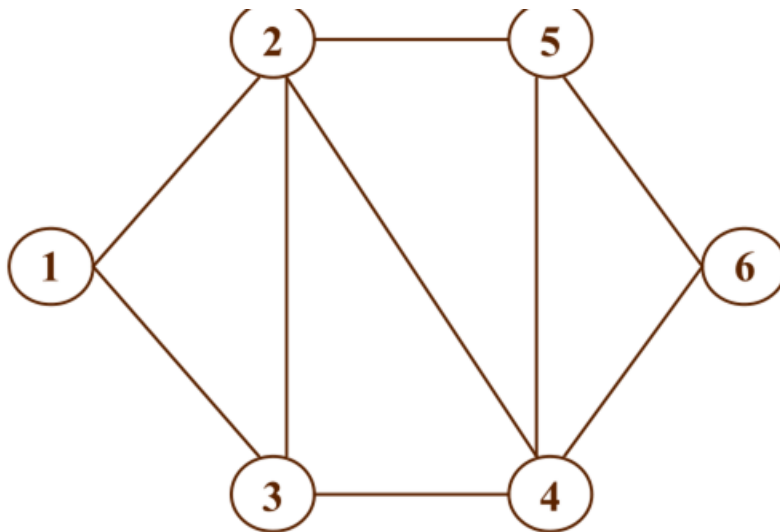
Trong trường hợp đồ thị thưa hay  $m \leq 6n$ , ta thường biểu diễn đồ thị dưới dạng danh sách cạnh (cung) như sau:

- Ta lưu trữ danh sách tất cả các cạnh (cung) của đồ thị vô hướng (có hướng). Mỗi cạnh (cung)  $e(x, y)$  được tương ứng với 2 biến đầu[e], cuối[e].
- Như vậy, để lưu trữ đồ thị, ta cần  $2m$  đơn vị bộ nhớ.
- **Nhược điểm:** để nhận biết những đỉnh nào kề với đỉnh nào chúng ta cần  $m$  phép so sánh trong khi duyệt qua tất cả  $m$  cạnh (cung) của đồ thị.
- Nếu là đồ thị có trọng số, ta cần thêm  $m$  đơn vị bộ nhớ để lưu trữ trọng số của các cạnh



# Danh sách cạnh: đồ thị vô hướng

- Chỉ cần liệt kê cạnh  $(u, v)$ , **không** cần liệt kê cạnh  $(v, u)$
- Nên liệt kê các cạnh theo thứ tự tăng dần của đỉnh đầu mỗi cạnh
- Số cạnh có giá trị  $u$  (phải hoặc trái) của danh sách cạnh là bậc của đỉnh  $u$



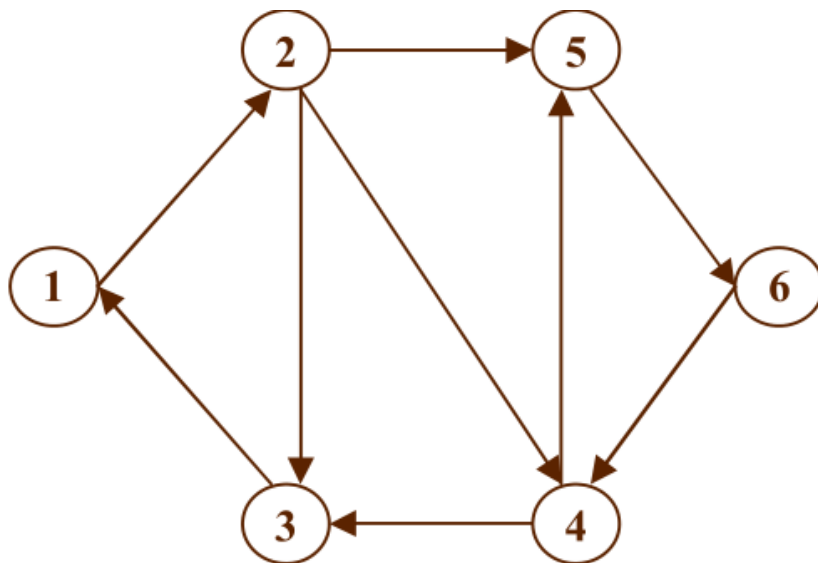
(Phương ND, 2013)

<u>Đỉnh đầu</u>	<u>Đỉnh cuối</u>
1	2
1	3
2	3
2	4
2	5
3	4
4	5
4	6
5	6



# Danh sách cạnh: đồ thị có hướng

- Mỗi cạnh là bộ có tính đến thứ tự các đỉnh
- Đỉnh đầu không nhất thiết phải nhỏ hơn đỉnh cuối mỗi cạnh
- Số cạnh có giá trị  $u$  thuộc về trái là  $deg+(u)$
- Số cạnh có giá trị  $u$  thuộc về phải là  $deg-(u)$



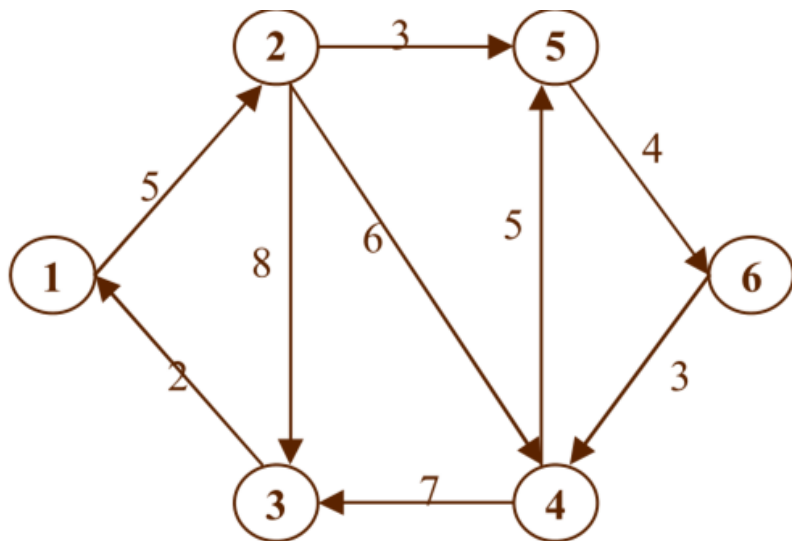
(Phương ND, 2013)

<u>Đỉnh đầu</u>	<u>Đỉnh Cuối</u>
1	2
2	3
2	4
2	5
3	1
4	3
4	5
4	6
5	4
6	4



# Danh sách cạnh: đồ thị trọng số

- Bổ sung thêm cột trọng số của mỗi cạnh vào danh sách cạnh (cung)



(Phương ND, 2013)

<u>Đỉnh đầu</u>	<u>Đỉnh Cuối</u>	<u>Trọng Số</u>
1	2	5
2	3	8
2	4	6
2	5	3
3	1	2
4	3	7
4	5	5
5	6	4
6	4	3



# Ưu & nhược điểm của danh sách cạnh

## □ Ưu điểm:

- Trong trường hợp đồ thị thưa hay  $m < 6n$ , biểu diễn bằng danh sách cạnh tiết kiệm được không gian nhớ.
- Thuận lợi cho một số thuật toán chỉ quan tâm đến các cạnh của đồ thị.

## □ Nhược điểm:

- Khi cần duyệt các đỉnh kề với đỉnh  $u$  bắt buộc phải duyệt tất cả các cạnh của đồ thị:
  - Làm cho thuật toán có chi phí tính toán cao.



# Định dạng lưu trữ danh sách cạnh

Dòng đầu tiên ghi lại số **n**, **m**:  
số đỉnh và số cạnh của đồ thị.

- Hai số được viết cách nhau một vài khoảng trống.

**m** dòng kế tiếp, mỗi dòng ghi lại 1 cạnh của đồ thị.

- Đỉnh đầu và đỉnh cuối mỗi cạnh được viết cách nhau một vài khoảng trống.

n, m		6	9	
m	1	2	5	
	2	3	8	
	2	4	6	
	2	5	3	
	3	1	2	
	4	3	7	
	4	5	5	
	5	6	4	
	6	4	3	

(Phương ND, 2013)



# Danh sách cạnh: cấu trúc dữ liệu

*//Định nghĩa một cạnh của đồ thị*

```
typedef struct {  
    int dau;  
    int cuoi;  
    int trong_so;  
} Edge;
```

*//Danh sách các cạnh được biểu diễn trong mảng G*

```
Edge G[MAX];
```





## Nội dung Bài 2

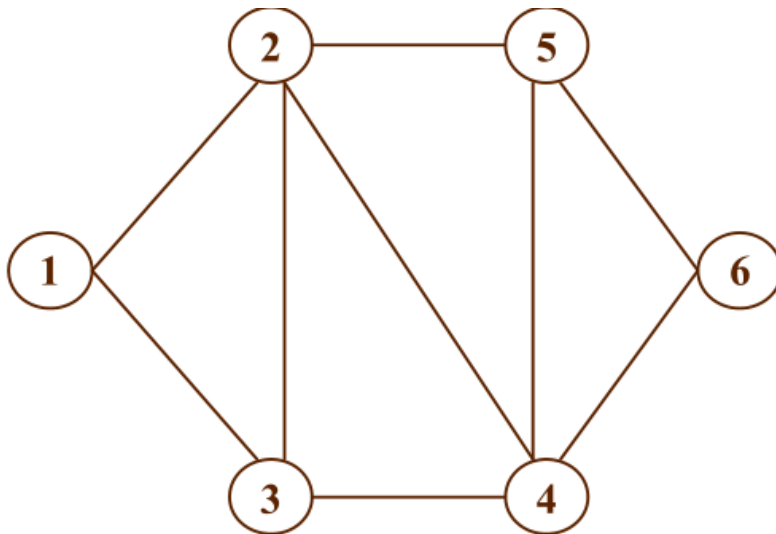
1. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề.
2. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận liên thuộc.
3. Biểu diễn đồ thị bằng danh sách cạnh.
4. Biểu diễn đồ thị bằng danh sách kề.



# Danh sách kề

Với mỗi đỉnh  $u$  của đồ thị chúng ta lưu trữ danh sách các đỉnh kề với nó mà ta ký hiệu là  $Ke(u)$

$$Ke(u) = \{ v \in V : (u, v) \in E \}$$



$$Ke(1) = \{ 2, 3 \}.$$

$$Ke(2) = \{ 1, 3, 4, 5 \}.$$

$$Ke(3) = \{ 1, 2, 4 \}.$$

$$Ke(4) = \{ 2, 3, 5, 6 \}.$$

$$Ke(5) = \{ 2, 4, 6 \}.$$

$$Ke(6) = \{ 4, 5 \}.$$

(Phương ND, 2013)



# Ưu & nhược điểm của danh sách kề

## □ Ưu điểm:

- Dễ dàng duyệt tất cả các đỉnh của một danh sách kề;
- Dễ dàng duyệt các cạnh của đồ thị trong mỗi danh sách kề;
- Tối ưu về phương pháp biểu diễn.

## □ Nhược điểm:

- Khó khăn cho người đọc có kỹ năng lập trình yếu.

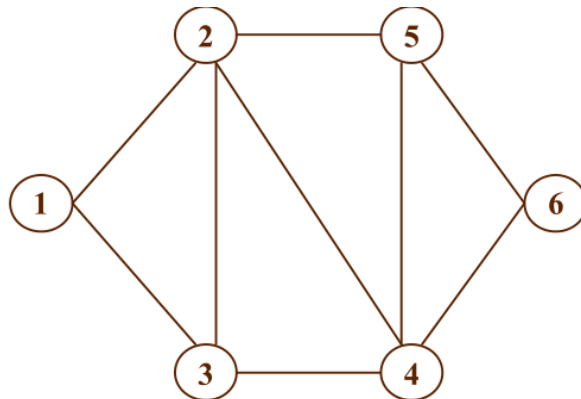


# Biểu diễn danh sách kề dùng mảng

Mảng được chia thành  $n$  đoạn như sau:

- Đoạn thứ  $i$  của mảng là danh sách kề của đỉnh thứ  $i \in V$ .
- Để biết một đoạn thuộc mảng bắt đầu từ phần tử nào đến phần tử nào ta dùng một mảng khác dùng để lưu trữ vị trí các phần tử bắt đầu và kết thúc của đoạn.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A[i]=?	2	3	1	3	4	5	1	2	4	2	3	5	6	2	4	6	4	5
	Đoạn 1		Đoạn 2			Đoạn 3			Đoạn 4				Đoạn 5			Đoạn 6		



$$\text{Ke}(1) = \{ 2, 3 \}.$$

$$\text{Ke}(2) = \{ 1, 3, 4, 5 \}.$$

$$\text{Ke}(3) = \{ 1, 2, 4 \}.$$

$$\text{Ke}(4) = \{ 2, 3, 5, 6 \}.$$

$$\text{Ke}(5) = \{ 2, 4, 6 \}.$$

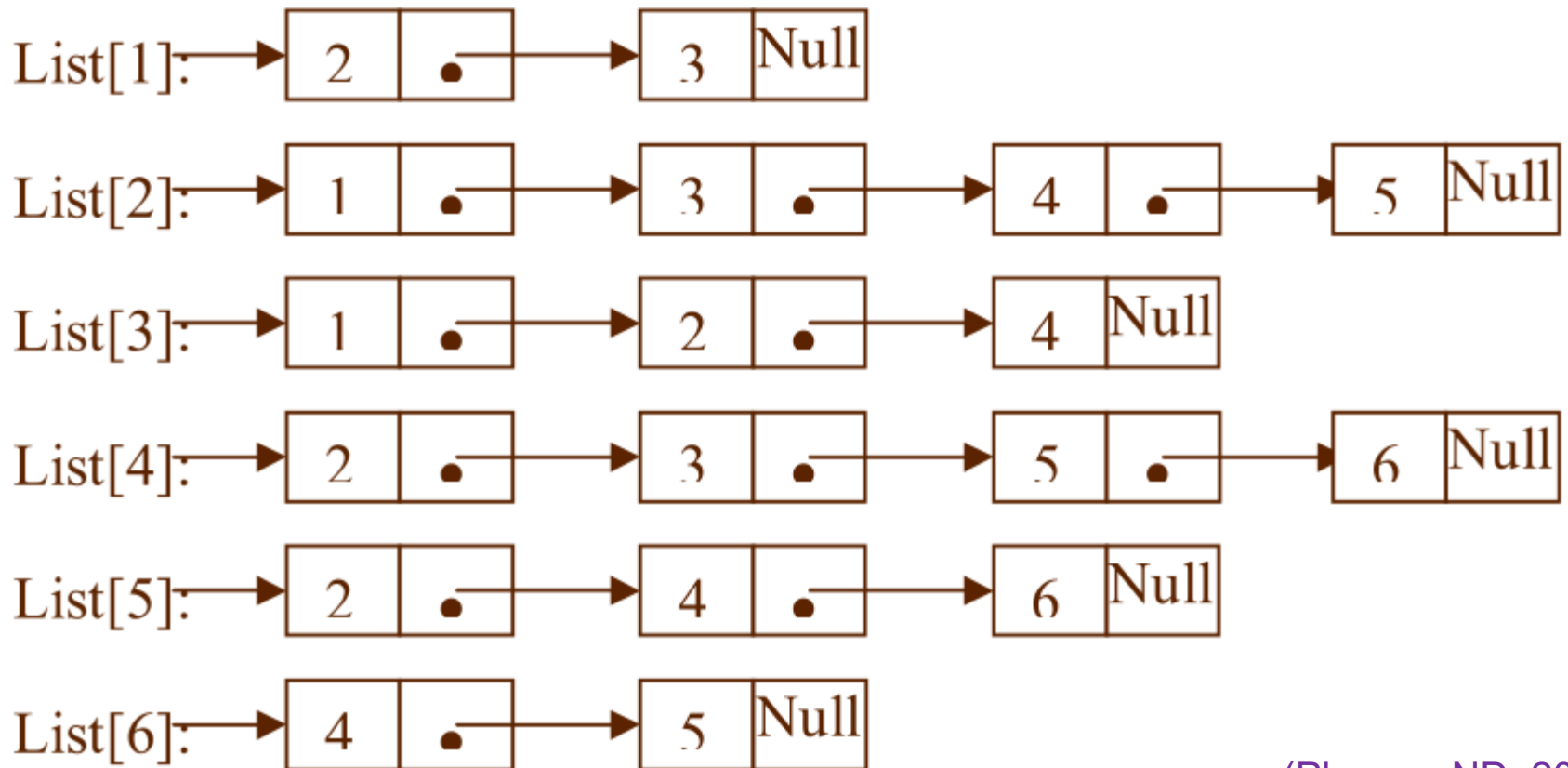
$$\text{Ke}(6) = \{ 4, 5 \}.$$

(Phương ND, 2013)



## Biểu diễn danh sách kề dùng danh sách liên kết

Với mỗi đỉnh  $u \in V$ , ta biểu diễn danh sách kề của đỉnh bằng một danh sách liên kết  $List(u)$



(Phường ND, 2013)



# Định dạng lưu trữ danh sách kề

Dòng đầu tiên: ghi lại số đỉnh của đồ thị.

**n** dòng kế tiếp: ghi lại danh sách kề của đỉnh tương ứng theo khuôn dạng:

- Phần tử đầu tiên là vị trí kết thúc của đoạn, tiếp đến là danh sách các đỉnh của danh sách kề.
- Các phần tử được ghi cách nhau một vài khoảng trống.

<b>n</b>	6					
	2	2	3			
	6	1	3	4	5	
<b>n</b>	9	1	2	4		
	13	2	3	5	6	
	16	2	4	6		
	18	4	5			

(Phương ND, 2013)



# Bài tập

- ❑ Làm các bài tập trong slide bài giảng (download theo link đã được cung cấp);
- ❑ Làm các bài tập 1 – 10, Bài tập Chương 2 trong giáo trình.



# Bài tập 1

Trong một buổi gặp mặt, một số khách mời bắt tay với một số khách mời khác.

Chứng minh rằng tổng số lượt bắt tay của tất cả các khách mời là số chẵn.





## Bài tập 2

---

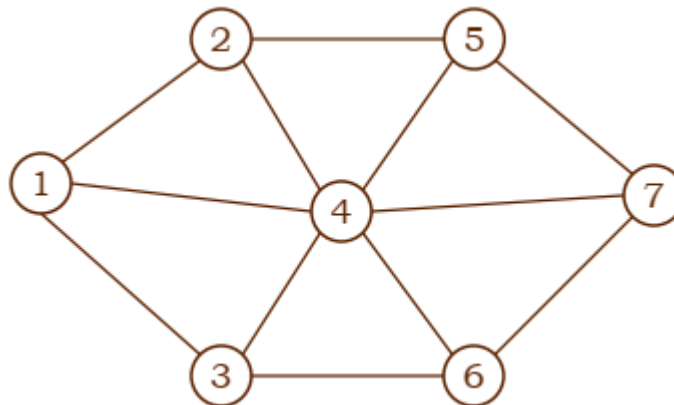
Một đơn đồ thị vô hướng với  $n$  đỉnh có nhiều nhất là bao nhiêu cạnh?



## Bài tập 3

Hãy biểu diễn đồ thị vô hướng dưới đây dưới dạng:

- 1) Ma trận kề
- 2) Danh sách cạnh
- 3) Danh sách kề

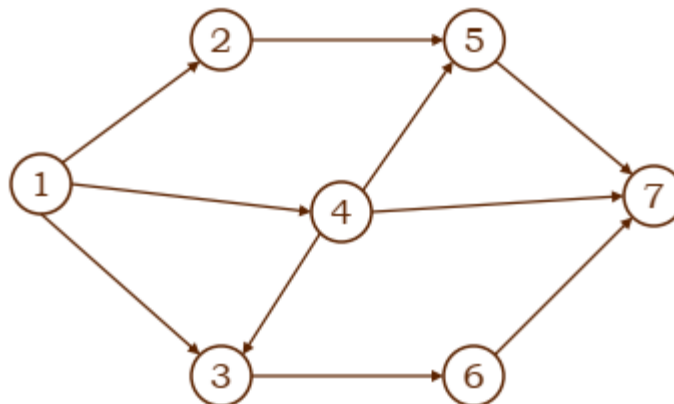




## Bài tập 4

Hãy biểu diễn đồ thị có hướng dưới đây dưới dạng:

- 1) Ma trận kề
- 2) Danh sách cạnh
- 3) Danh sách kề

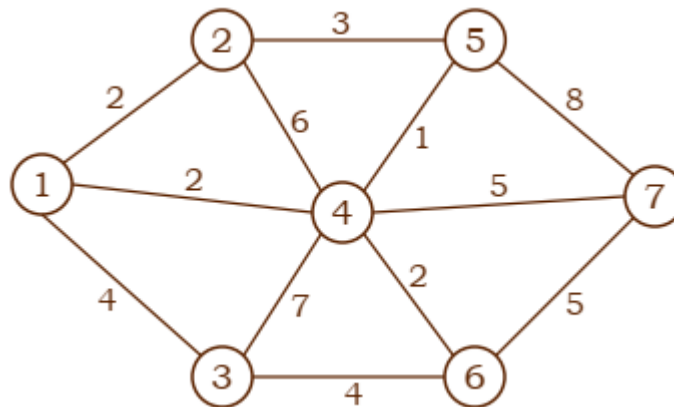




## Bài tập 5

Hãy biểu diễn đồ thị trọng số dưới đây dưới dạng:

- 1) Ma trận trọng số
- 2) Danh sách cạnh





## Kết thúc Bài 2

---

- ☐ Câu hỏi và thảo luận?