Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông – PTIT

Khoa Công nghệ Thông tin 1

Toán rời rạc 2

Discrete mathematics 2

Bài 7: Bài toán luồng cực đại trong mạng

Maximum Flow Problem

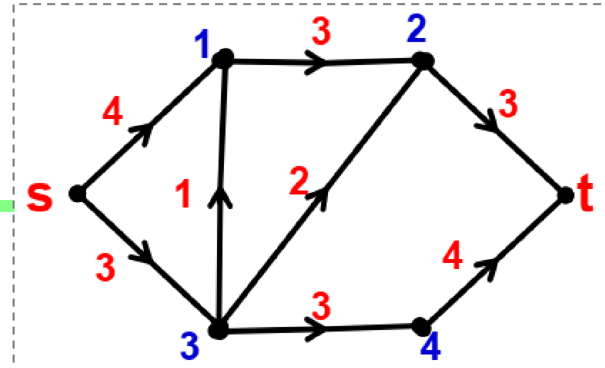
TS. Nguyễn Tất Thắng

2/9/2022

Nội dung Bài 7

1. Phát biểu bài toán
2. Thuật toán Ford-Fulkerson

Mạng - Network



Định nghĩa 1:

Mạng là đồ thị có hướng $G = < V, E >$ trong đó:

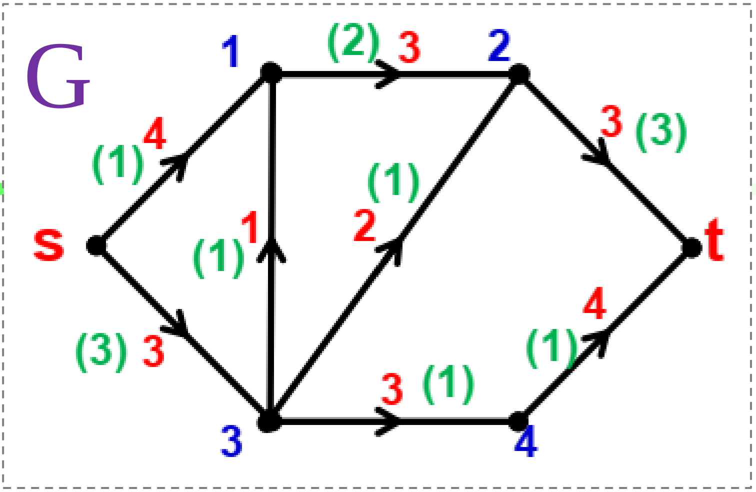
- Có duy nhất 1 đỉnh s không có cung đi vào - điểm phát;
- Có duy nhất 1 đỉnh t không có cung đi ra - điểm thu.
- Mỗi cung e = $(u, v) \in E$ được gán một số thực không âm c(e) = $c(u, v)$ gọi là khả năng thông qua hay băng thông - capacity của cung.
- Quy ước: Nếu không có cung e = (u, v) thì khả năng thông qua c(e) = 0.
- Ví dụ: đồ thị có hướng trong hình vẽ là 1 mạng – network.

Luồng trong mạng

Định nghĩa 2:
Cho mạng $G = < V, E >$, ta gọi luồng f trong mạng G là ánh xạ $f: E \rightarrow R+$ gán cho mỗi cung $e = (u, v) \in E$ một số thực $f(e) = f(u, v)$, gọi là luồng trên cung e, thỏa mãn các điều kiện:

1. $f(e)$ không vượt khả năng thông qua c(e): $f(e) \leq c(e)$.
2. Điều kiện cân bằng luồng trên mỗi đỉnh: Tổng luồng trên các cung đi vào đỉnh v bằng tổng luồng trên các cung đi ra khỏi đỉnh v với mọi $v \neq s, t$:
   $\sum_{u \in \Gamma^-(v)} f(u, v) = \sum_{u \in \Gamma^+(v)} f(v, u)$,
   $\Gamma^-(v) = \{u \in V: (u, v) \in E\}$, $\Gamma^+(v) = \{u \in V: (v, u) \in E\}$
3. Ta gọi giá trị của luồng f là số:
   $val(f) = \sum_{u \in \Gamma^+(s)} f(s, u) = \sum_{u \in \Gamma^-(t)} f(u, t)$

Luồng trong mạng



Ví dụ:

- Cho mạng - network G;
- Điểm nguồn - sourse: s;
- Điểm thu - sink: t;
- Khả năng thông qua c(e):
  c(s, 1) = 4; c(s, 3) = 3; c(1, 2) = 3; c(2, t) = 3;
  c(3, 1) = 1; c(3, 2) = 2; c(3, 4) = 3; c(4, t) = 4.
- Luồng của các cạnh: f(s, 1) = 1; f(s, 3) = 3; f(1, 2) = 2;
  f(2, t) = 3; f(3, 1) = 1; f(3, 2) = 1; f(3, 4) = 1; f(4, t) = 1;
- Luồng trong mạng: $val(f) = 4$.

Bài toán luồng cực đại trong mạng

- Phát biểu bài toán:
  Cho mạng $G = < V, E >$, hãy tìm luồng f^* trong mạng với giá trị luồng $val(f^*)$ lớn nhất.
- Ví dụ:
  - Xét đồ thị có hướng mô tả hệ thống ống dẫn dầu.
  - Các ống dẫn dầu tương ứng với các cung của đồ thị.
  - Điểm phát là tàu chở dầu, điểm thu là bể chứa dầu.
  - Điểm nối giữa các ống ứng với các đỉnh của đồ thị.
  - Khả năng thông qua của các cung tương ứng với tiết diện các ống.
  - Cần tìm luồng dầu lớn nhất có thể bơm từ tàu chở dầu vào bể chứa?

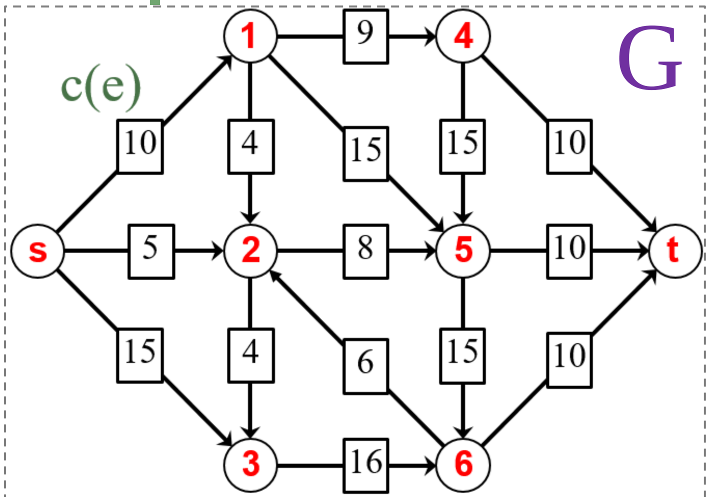
Nội dung Bài 7

1. Phát biểu bài toán
2. Thuật toán Ford-Fulkerson

Lát cắt - Cut

- Định nghĩa 3:
  Lát cắt (X, X^*) là một cách phân hoạch tập đỉnh V của mạng thành 2 tập X và X^*, trong đó $s \in X$ và $t \in X^*$.
  - Khả năng thông qua của lát cắt (X, X^*) được định nghĩa:
    $$c(X, X^*) = \sum_{v \in X, w \in X^*} c(v, w)$$
  - Lát cắt với khả năng thông qua nhỏ nhất được gọi là lát cắt hẹp nhất.
- Bổ đề 1:
  Giá trị của mọi luồng f trong mạng luôn nhỏ hơn hoặc bằng khả năng thông qua của lát cắt (X, X^*) bất kỳ trong mạng: $val(f) \le c(X, X^*)$.
  - Hệ quả: Giá trị của luồng cực đại trong mạng không vượt quá khả năng thông qua của lát cắt hẹp nhất trong mạng.

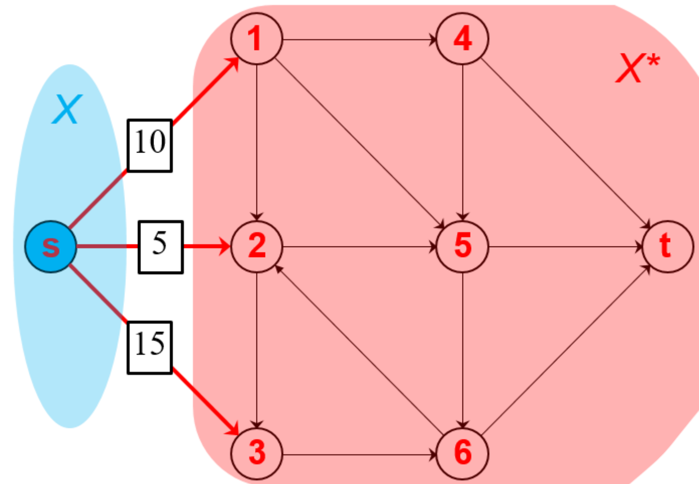
Ví dụ lát cắt



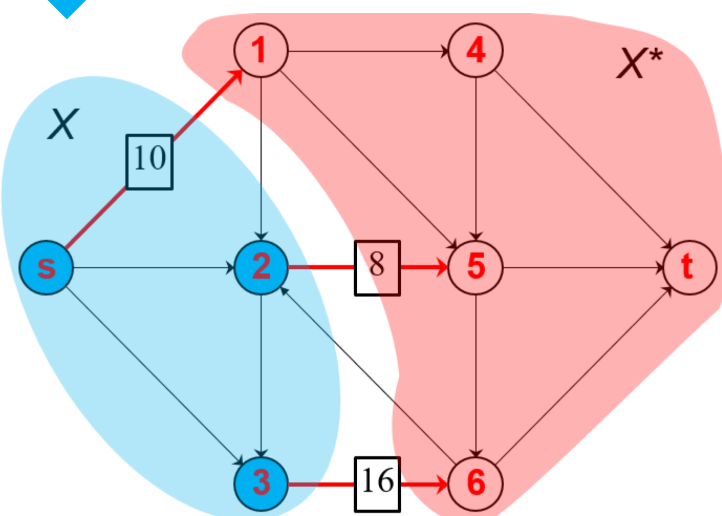
$X_1 = \{s\}$

$X_1^* = V \setminus X_1$

$c(X_1, X_1^*) = 30$



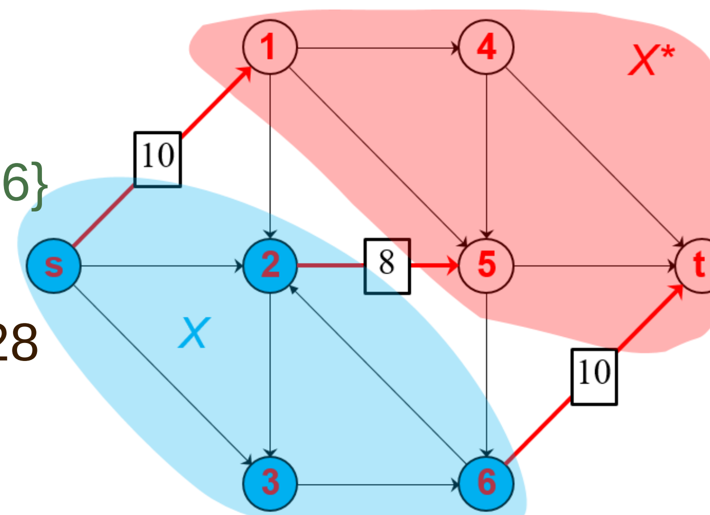
$X_2 = \{s, 2, 3\}$; $X_2^* = V \setminus X_2$; $c(X_2, X_2^*) = 34$



$X_3 = \{s, 2, 3, 6\}$

$X_3^* = V \setminus X_3$

$c(X_3, X_3^*) = 28$

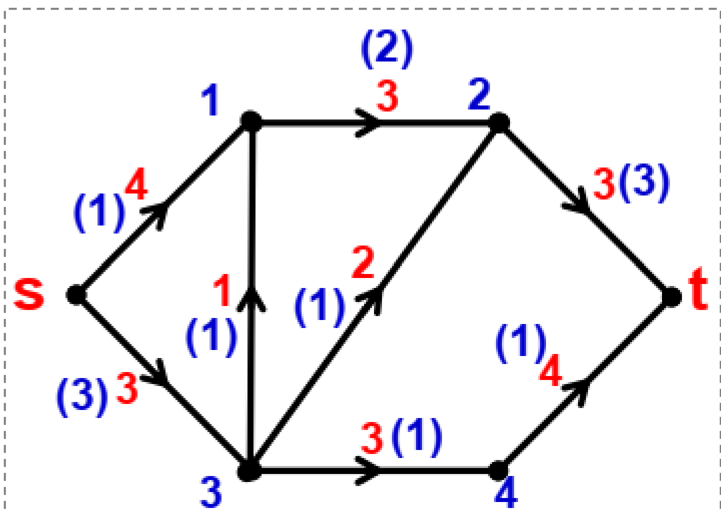


Đồ thị tăng luồng – Residual network

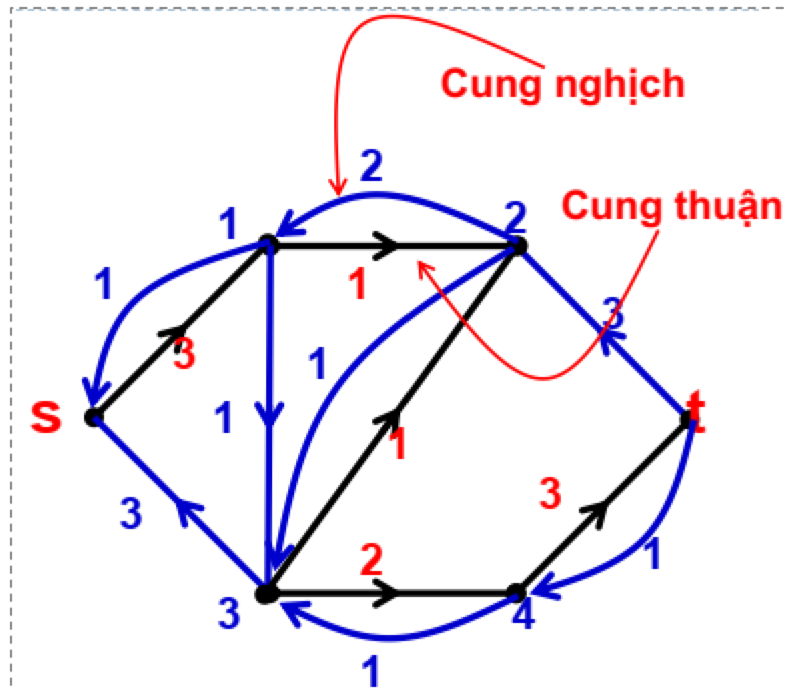
- Giả sử f là một luồng trong mạng $G = < V, E >$. Từ mạng G, xây dựng đồ thị có trọng số $G_f = < V, E_f >$, với tập các cung E_f và trọng số trên các cung được xác định như sau:
  - Nếu $e = (v, w) \in E$ với $f(v, w) = 0$, thì $(v, w) \in E_f$ với trọng số c(v, w).
  - Nếu $e = (v, w) \in E$ với $f(v, w) = c(v, w)$, thì $(w, v) \in E_f$ với trọng số c(v, w).
  - Nếu $e = (v, w) \in E$ với $0 < f(v, w) < c(v, w)$, thì $(v, w) \in E_f$ với trọng số $c(v, w) - f(v, w)$ và $(w, v) \in E_f$ với trọng số $f(v, w)$.
- Các cung của G_f đồng thời là cung của G được gọi là cung thuận, các cung còn lại được gọi là cung nghịch. Đồ thị G_f được gọi là đồ thị tăng luồng.

Ví dụ đồ thị tăng luồng

- Ví dụ với mạng G với luồng f như sau ta sẽ xác định được đồ thị tăng luồng tương ứng:



Mạng G và luồng f



Đồ thị tăng luồng G_f

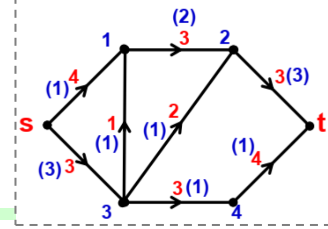
Tăng luồng theo đường đi

- Xét $P = (s = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k = t)$ là một đường đi từ s đến t trên đồ thị tăng luồng G_f.
  - Gọi δ là giá trị nhỏ nhất của các trọng số của các cung trên đường đi P
  - Xây dựng luồng f' trên mạng G theo quy tắc sau:

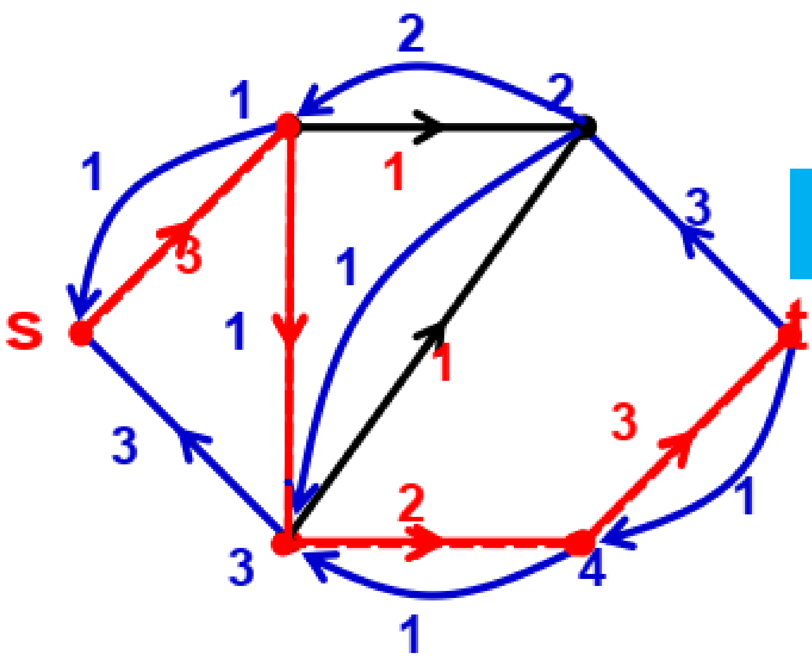
$$f'(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + \delta & \text{, nếu } (u,v) \in P \text{ là cung thuận} \\ f(u,v) - \delta & \text{, nếu } (u,v) \in P \text{ là cung nghịch} \\ f(u,v) & \text{, nếu } (u,v) \notin P \end{cases}$$

  - Ta có: f' là luồng trong mạng và val(f') = $val(f) + \delta$.
  - Thủ tục biến đổi luồng như trên là tăng luồng dọc theo đường P.

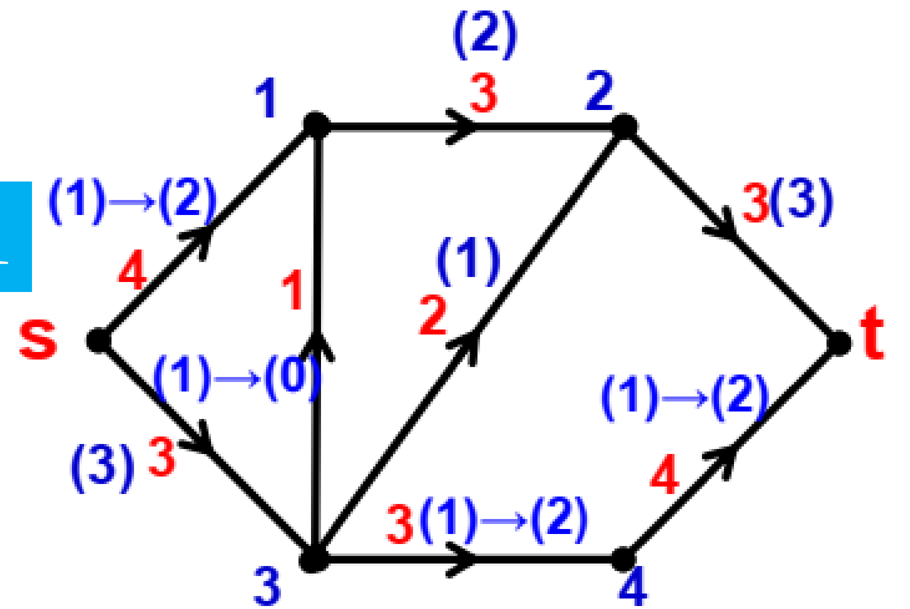
Ví dụ tăng luồng theo đường đi



- Xây dựng đồ thị tăng luồng theo đường đi:
  s – 1 – 3 – 4 – t:



$\delta = 1$

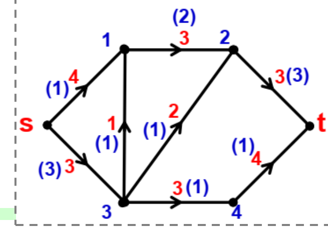


Đồ thị tăng luồng G_f và đường tăng luồng

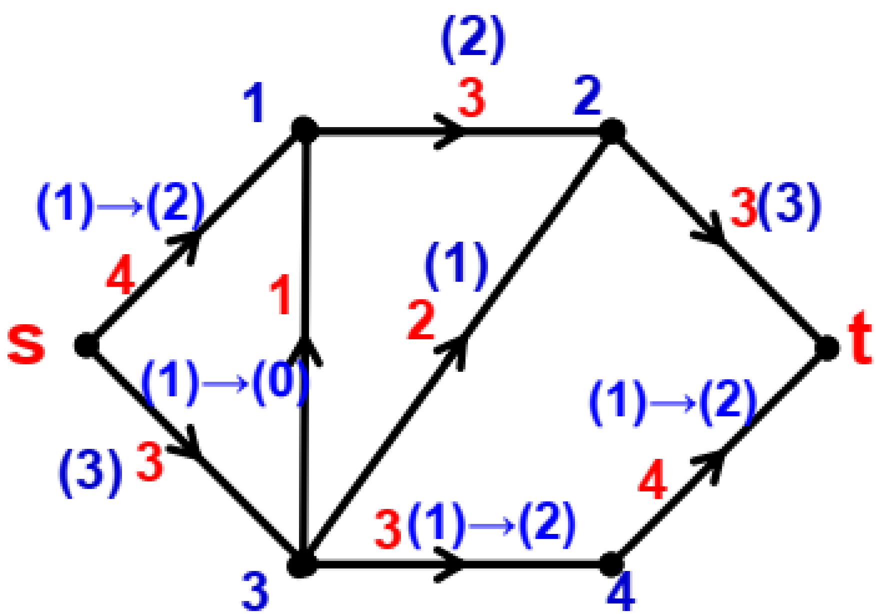
Mạng G và luồng mới f'

$Val(f') = 5$

Ví dụ tăng luồng theo đường đi



- Xây dựng đồ thị tăng luồng $G_{f'}$:



Mạng G và luồng mới f'

$$Val(f') = 5$$

Đường tăng luồng - Augmenting path

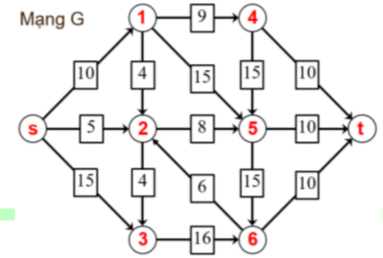
- Định nghĩa 4:
  Đường tăng luồng f là đường đi bất kỳ từ s đến t trong đồ thị tăng luồng G_f.
- Định lý 1:
  Các mệnh đề sau là tương đương:
  - f là luồng cực đại (trong mạng G).
  - Không tìm được đường tăng luồng f (trong đồ thị tăng luồng G_f).
  - $val(f) = c(X, X^*)$ với một lát cắt (X, X^*) nào đó (trong mạng G).

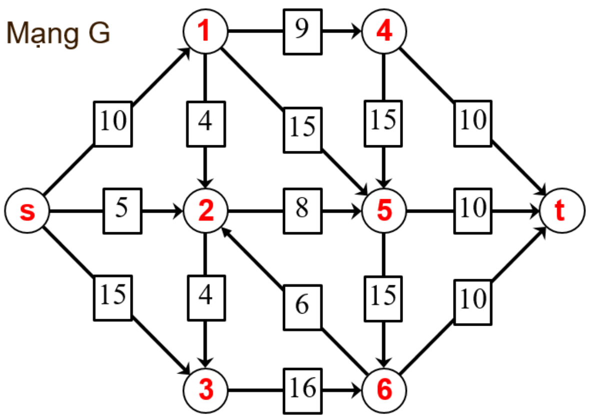
Thuật toán Ford-Fulkerson

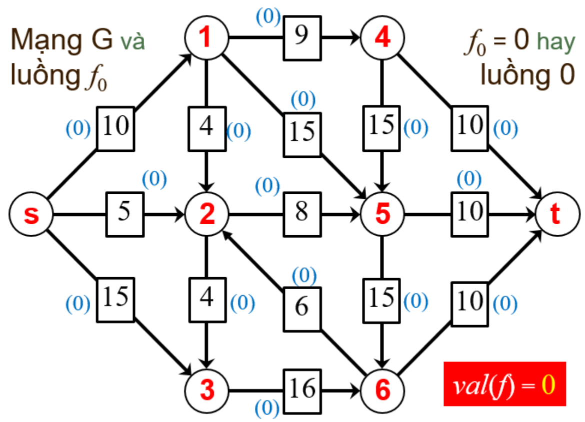
1. Bắt đầu từ một luồng f bất kỳ - ví dụ luồng 0, xây dựng đồ thị tăng luồng G_f.
2. Từ G_f, tìm đường tăng luồng P.
3. Nếu không có đường tăng luồng nào thì kết thúc; nếu có đường tăng luồng P thì xây dựng luồng mới f' và quay lại bước 1 cho đến khi không tìm thêm được đường tăng luồng mới

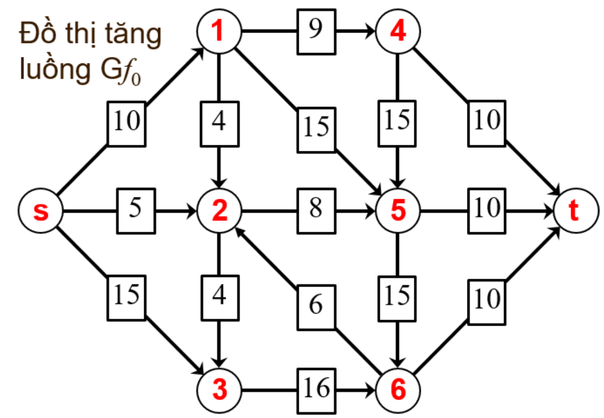
Để tìm đường tăng luồng trong G_f có thể sử dụng thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng – BFS (hoặc theo chiều sâu – DFS) bắt đầu từ đỉnh s.

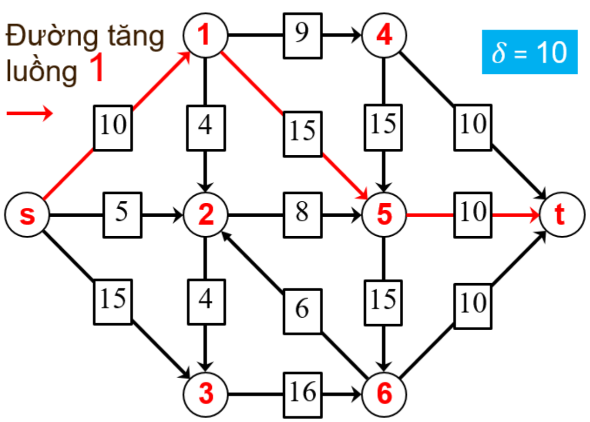
Ví dụ minh họa thuật toán (1/3)

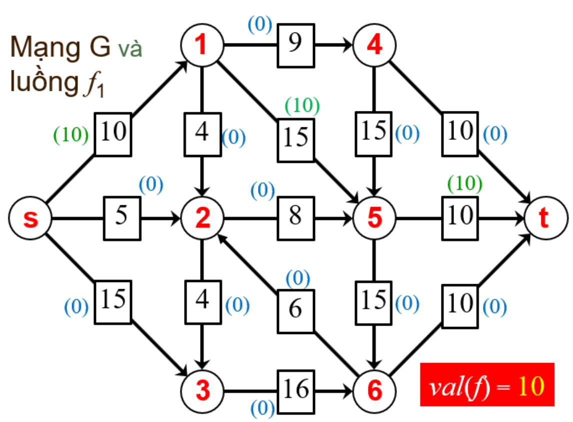


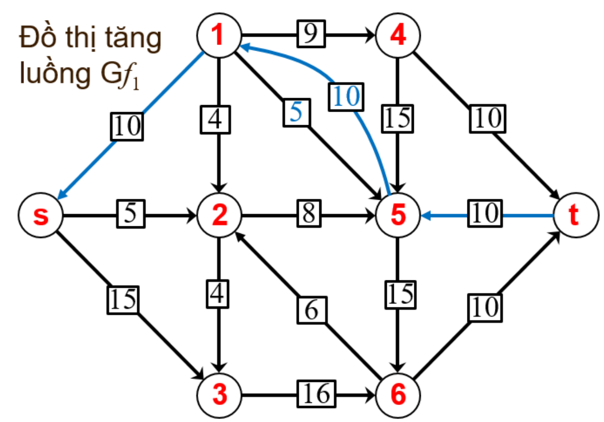




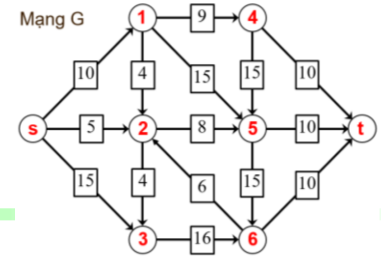


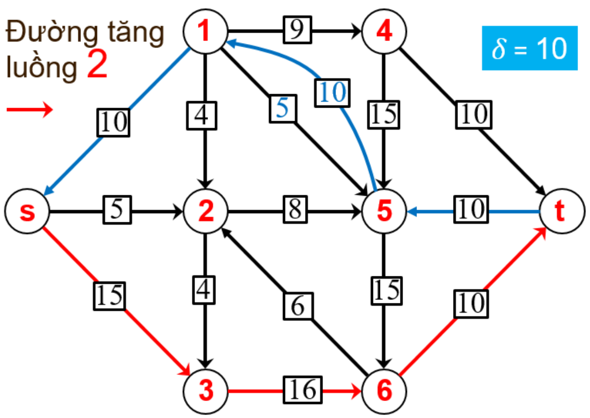


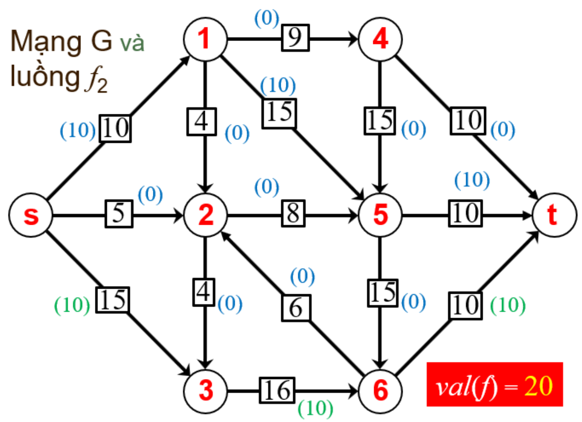


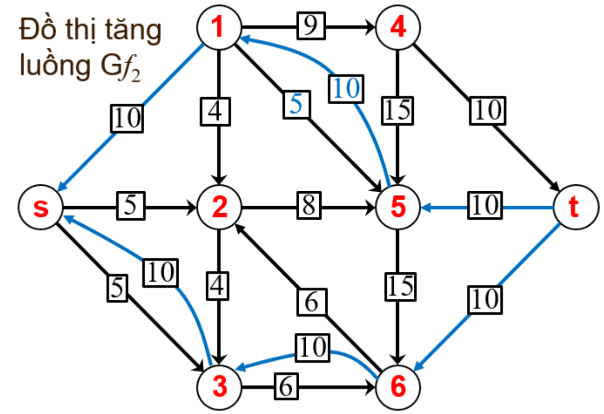


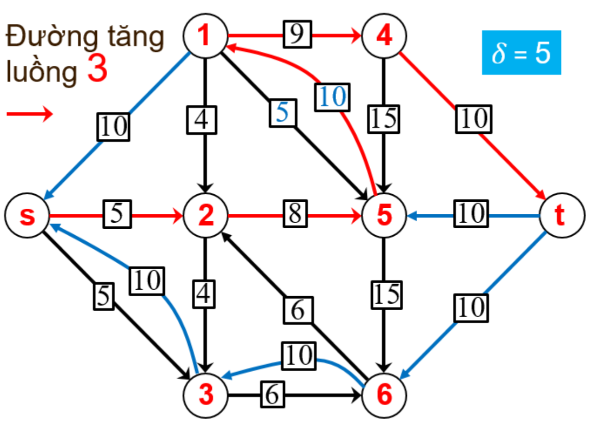
Ví dụ minh họa thuật toán (2/3)

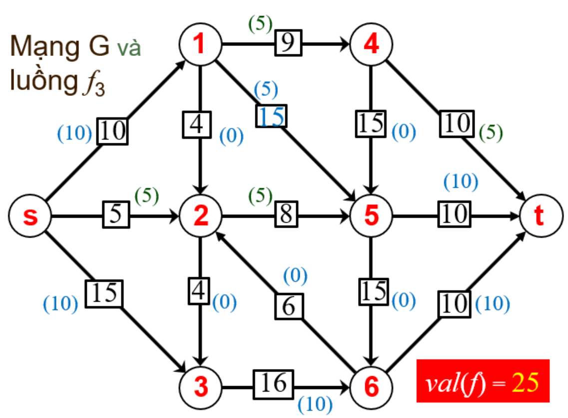


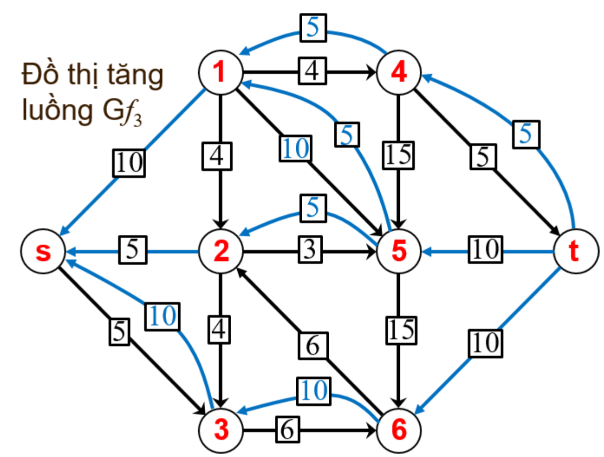




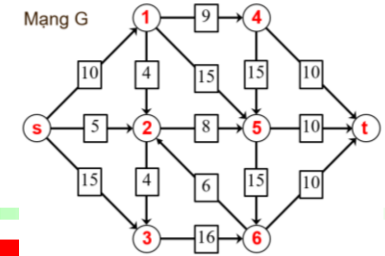




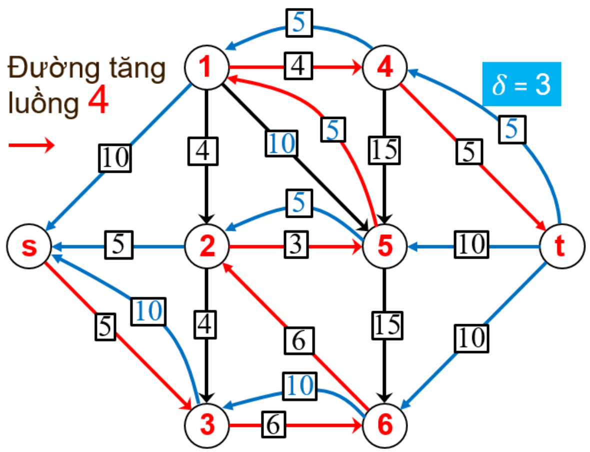


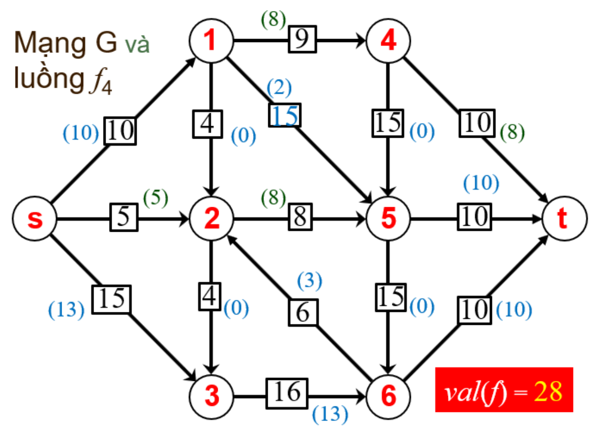


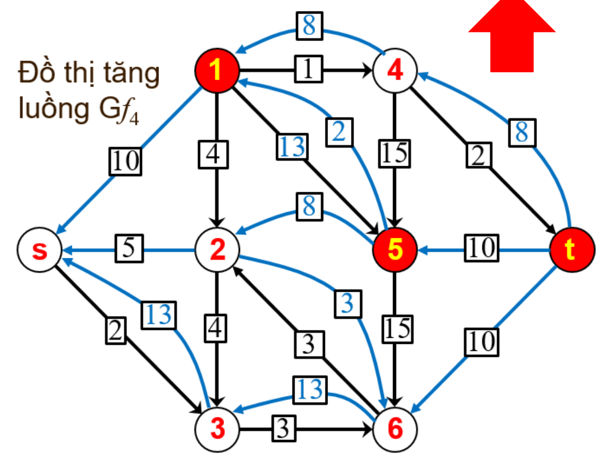
Ví dụ minh họa thuật toán (3/3)

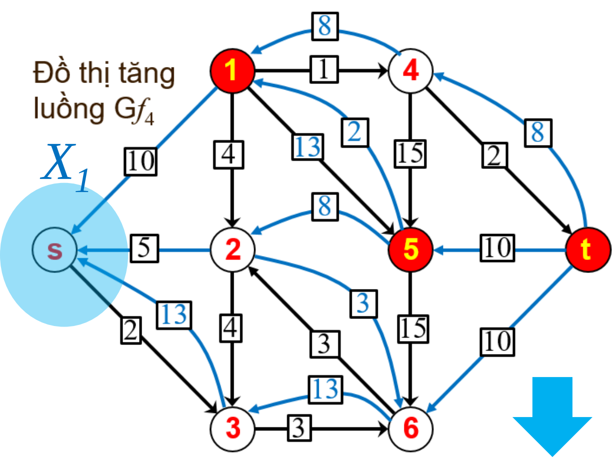


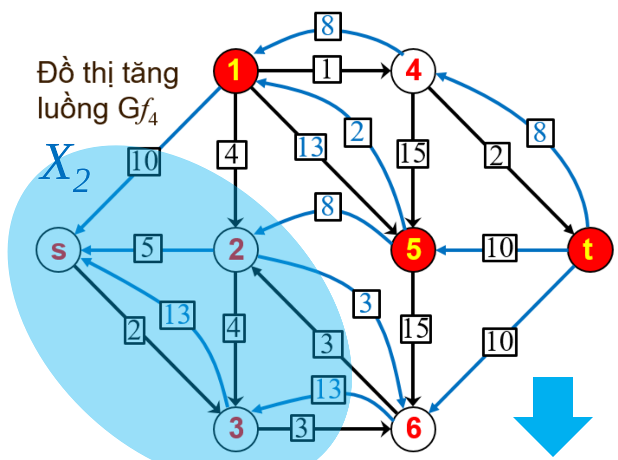
Không thể tìm được đường đi từ S → t

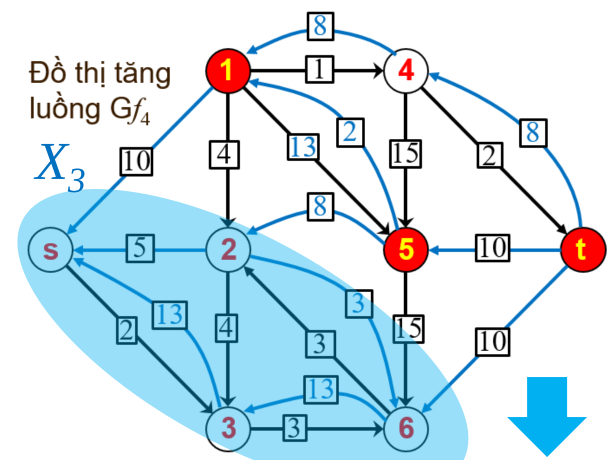






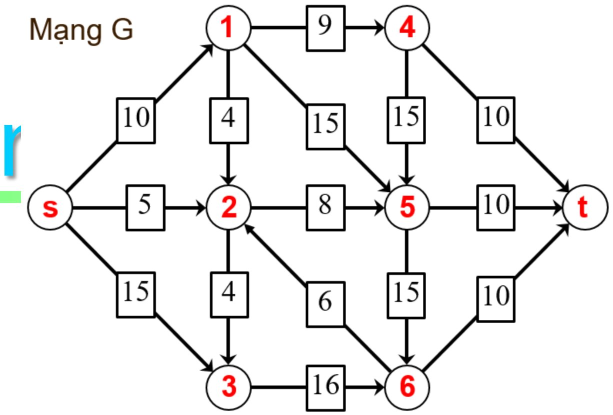






$$val(f) = f(X_1, X_1^*) = f(X_2, X_2^*) = f(X_3, X_3^*) = 28$$

Ví dụ minh họa thuật toán




```
So dinh cua do thi: 8
Ma tran trong so:
   0    10     5    15     0     0     0     0
   0     0     4     0     9    15     0     0
   0     0     0     4     0     8     6     0
   0     0     0     0     0     0    16     0
   0     0     0     0     0    15     0    10
   0     0     0     0     0     0    15    10
   0     0     6     0     0     0     0    10
   0     0     0     0     0     0     0     0
Thong luong cuc dai qua mang = 28
```

Một số kết quả lý thuyết

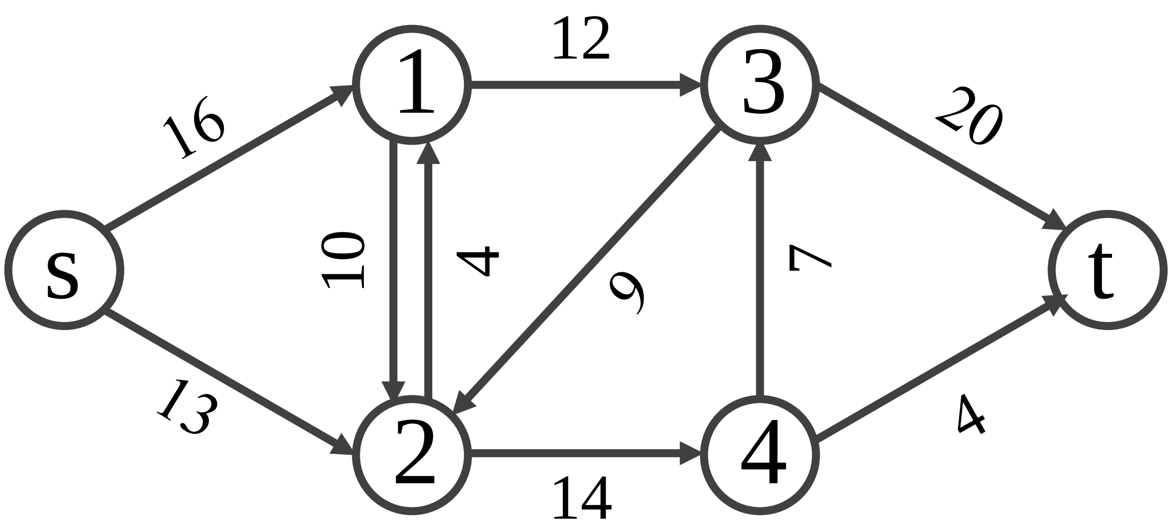
- Định lý 2:
  Luồng cực đại trong mạng bằng khả năng thông qua của lát cắt hẹp nhất;
  Max flow – Min cut theorem.
- Định lý 3:
  Nếu tất cả các khả năng thông qua là các số nguyên thì luôn tìm được luồng cực đại với luồng trên các cung là các số nguyên.

Tóm tắt

- Một số khái niệm quan trọng
- Phát biểu bài toán
- Thuật toán Ford-Fulkerson

Bài tập 1

- Áp dụng thuật toán Ford-Fulkerson tìm luồng cực đại trong mạng sau (với khả năng thông qua c(e) được cho kèm theo mỗi cạnh như trên mạng), trình bày kết quả trên đồ thị cho từng bước.



Bài tập

- Cài đặt các thuật toán đã học dựa theo hướng dẫn trong giáo trình;
- Làm Bài tập 1 trong slide bài giảng (download theo link đã được cung cấp).

Kết thúc Bài 7

- Câu hỏi và thảo luận?