

クリギングとその地理的応用

高 阪 宏 行

Kriging and its Geographic Applications

Hiroyuki KOHSAKA

(Received November 1, 1998)

This paper discusses Kriging as one of spatial interpolation methods in Environmental Science. Spatial interpolation methods are classified into two types: discrete and continuous models. In the discrete models such as the generation of Thiessen polygon, it is assumed that all of main variations occur at the boundary. The continuous models assume that spatial variation can be described by a smooth curve defined mathematically. The continuous models are also classified into global and local interpolation methods. While all data are used for the global interpolation such as trend surface model and Fourier analysis, only neighboring data around an estimated point are used for the local interpolation like spline and moving average methods.

Kriging is one of local interpolation method in the continuous models. When the distribution of soil, geology, or environmental pollution is surveyed, it is usually found that there are local concentrations. To describe such spatial anomaly, the theory of regionalized variables has been constructed in the probabilistic framework. The difference point of Kriging from normal moving average is that Kriging uses variogram calculated from observed data as an weight. This paper illustrates spatial interpolation and the abstraction of spatial components as some geographic applications of Kriging.

1. 空間的補間法

ある地域において、1つの属性が点データとして取得できたとしよう。そのとき、データの無い地点でその属性値を推定する方法を考えてみよう。観測を行った地域内でデータの無い地点の属性値を推定する方法は、空間的補間、または、内挿 (spatial interpolation)、観測を行った地域の外でのデータ推定法は空間的補外、または、外挿 (spatial extrapolation) と呼ばれている。

空間的補間法は、属性が空間的にどのように分布するかに従って、離散空間での変動モデルと連続空間での変動モデルに分けられる (パーロー, 1990)。離散モデルでは、“重要な変動はすべて境界で起こる”と仮定しており、主題図を描くときに用いられ

る境界線の描画法やティーセンポリゴンの生成法が挙げられる。連続モデルでは、“空間的変動を数学的に定義できる滑らかな曲面で記述できる”と仮定する。この連続モデルは、さらに、すべての地点データからモデルを構築する全域的補間法と、推定地点の周辺のデータのみを利用する局地的補間法に分けられる。全域的補間法は、地域の広い範囲の空間変動をモデル化する手法で、傾向面モデルやフーリエ級数などがある。局地的補間法は近隣地点のデータのみを使った当てはめ法で、他地点における補間値に影響を与えず、局地的異常値に対応できる。この手法としては、スプライン (kohsaka, 1992) や移動平均、そして本稿で取り上げるクリギングがある。

日本大学文理学部地理学科：
〒156-8550 世田谷区桜上水 3-25-40

Department of Geography, College of Humanities and Sciences,
Nihon University: 3-25-40 Sakurajousui, Setagaya-ku Tokyo
156-8550 Japan

2. 地域化変数とバリオグラム

現象の空間的分布を研究した結果、ある現象ではその空間的変動が不規則すぎて滑らかな数学関数ではモデル化できず、むしろ確率論的な方法を用いた方がよく記載できることが明らかになった。例えば、土壌や地質、環境汚染などの分布を調べると、局地的集中がしばしば認められるであろう。このような急激な空間変動を把握するため、現象を単純な確定的関数で記述するのではなく、確率論的枠組みの中で取り扱う“地域化変数の理論 (theory of regionalized variables)” が成立した (Matheron, 1970)。

地域化変数

多くの科学分野では、データは多変量の時空間データを取る。すなわち、現象はある時点においてある地点に対し、いくつかの側面から観測される。しかしながらここでは、1つの変数を取り上げ、空間的側面に注目し、時間的側面は考慮しない。いま、地点のインデックスを $\alpha = 1, 2, 3, \dots, n$ で示そう。地点が3つの空間座標 $(x_\alpha^1, x_\alpha^2, x_\alpha^3)$ で表現できるとすると、地点はこれらのベクトル \mathbf{x}_α で示される。すると、 n 個の地点からの観測値は、

$$z(\mathbf{x}_\alpha) \quad \alpha = 1, \dots, n$$

で表される。

以上では、調査地点を設けその属性の出現値を観測した。しかし、ある地域 D において調査地点を無限に落とすことができる。そこで、地点のインデックス α をやめることで、次のような“地域化変数”を定義できる (Wackernagel, 1995, p.26):

$$z(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in D \quad (1)$$

データセット $\{z(\mathbf{x}_\alpha), \alpha = 1, \dots, n\}$ は、地域化変数の値の集合である。

確率変数と確率関数

データセット内の各値は、地域で観測された値、すなわち、地域化値 (regionalized value) である。この地域化値は、ある確率的メカニズムの中から生まれたと考えることで、確率変数が導入される。すなわち、標本値 $z(\mathbf{x}_\alpha)$ は確率変数 $Z(\mathbf{x}_\alpha)$ から導き

出されたものであると考えるのである (大文字 ‘ Z ’ は確率変数を示し、小文字 ‘ z ’ はその実現を表していることに注意せよ)。この確率変数は、地域内の各地点に対し異なる特性を先験的に有している。

地域内のすべての地点における地域化値を考察するとき、それに関連した関数 $z(\mathbf{x})$ は地域化変数であった。この関数は全体として、無限組の確率変数 (各地点に対し1つの確率変数) から導き出されたものとして見なされ、確率関数 $Z(\mathbf{x})$ と呼ぶことができる (地域化変数 $z(\mathbf{x})$ は確率関数 $Z(\mathbf{x})$ の1つの実現である)。

図1はデータを2つの異なった視点から見ることによって、確率関数がどのように組み立てられるかを示している。第一の側面は、データ値が物理的環境 (空間) から発生しており、地域内のそれらの地点に依存していることを表している。すなわち、データ値は“地域化されている (regionalized)”のである。第二の側面は、地域化されたデータ値の発生メカニズムと関わり、確定的関数ではなく、確率的メカニズムの結果として見なされるという点にある。地域化 (regionalization) と確率化の2側面を統合することによって、確率関数の概念は成立するのである。

地域化変数理論とバリオグラム

地域化変数の理論では、変数の空間的変動が、3

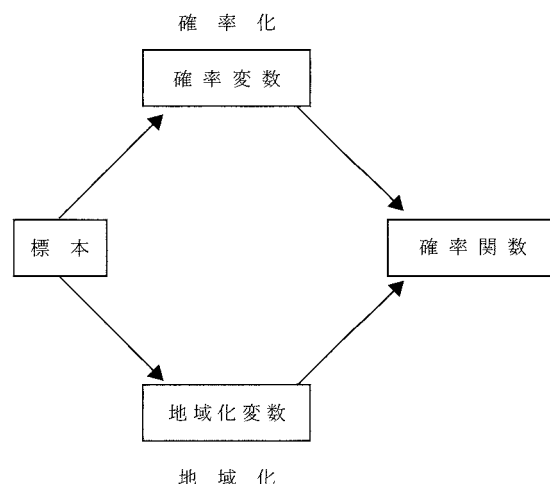


図1 地域化変数と確率関数

つの成分の和で表現できると仮定する：

$$Z(\mathbf{x}) = m(\mathbf{x}) + \varepsilon'(\mathbf{x}) + \varepsilon'' \quad (2)$$

$m(\mathbf{x})$ は \mathbf{x} における構造成分を記述する関数、 $\varepsilon'(\mathbf{x})$ は空間的に相関している確率成分、 ε'' はノイズ（残留誤差項）である（バーロー、1990、182-183）。

地域化変数の理論では、これらの成分の形式と大きさを考察する。第1のステップは構造成分を決めることで、最も単純なケースとしては、地域における平均値を用いる場合である。すると、図2に示されるような距離ベクトル \mathbf{h} だけ離れた2地点 \mathbf{x} と $\mathbf{x} + \mathbf{h}$ 間の差の平均は0になる。

$$E[Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{x})] = 0 \quad (3)$$

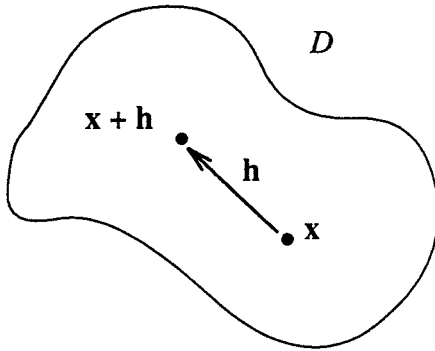
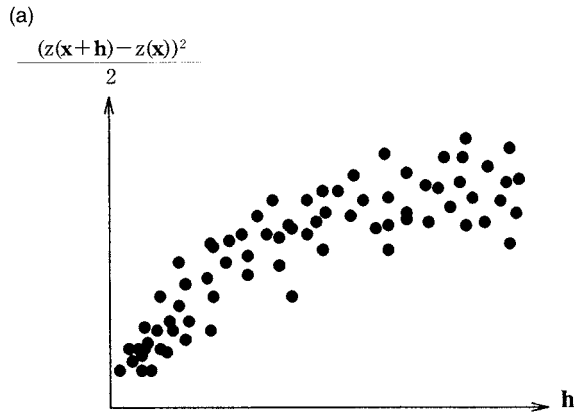


図2 地域 D において距離ベクトル \mathbf{h} だけ離れた2地点 \mathbf{x} と $\mathbf{x} + \mathbf{h}$



さらに、差の2乗の平均（すなわち分散）は次のように地点間の距離 \mathbf{h} にのみ依存すると仮定する：

$$\begin{aligned} E\{[Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{x})]^2\} \\ = E\{[\varepsilon'(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \varepsilon'(\mathbf{x})]^2\} \\ = 2\gamma(\mathbf{h}) \end{aligned} \quad (4)$$

$\gamma(\mathbf{h})$ は共分散関数であり、バリオグラム (variogram) あるいはセミバリアンス (semivariance) と呼ばれ、理論的に次式で示される：

$$\gamma(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} E\{[Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{x})]^2\} \quad (5)$$

もし、観測データに対しこの仮定が成立するならば、バリオグラムは観測データから次のように推定できる：

$$\gamma^*(\mathbf{h}) = \frac{1}{2n} \sum \{z(\mathbf{x}_i + \mathbf{h}) - z(\mathbf{x}_i)\}^2 \quad (6)$$

横軸に距離 \mathbf{h} を、縦軸に $\gamma^*(\mathbf{h})$ を取ったグラフ上に、図3aのように観測値から得られたこれらの値をプロットすると、バリオグラム雲が得られる。バリオグラム雲の分布傾向は、距離が長くなるにつれて観測値の相違度を示すバリオグラムも大きくなる。しかしながら、ある値以上の距離になると、バリオグラムは変化せず一定になる。このようなバリオグラム雲に対し実験と理論の2つのバリオグラムが当てはめられる。実験的バリオグラムとは、図3bに示すように、距離をいくつかのクラスに分け、各クラスの共分散の平均を求めることで示すことが

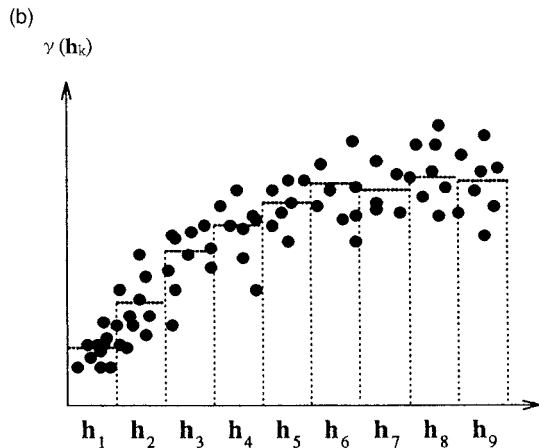


図3 (a) バリオグラム雲：空間的隔たり \mathbf{h} に対する相違度 γ^* がプロットされている
(b) 実験的バリオグラム：距離クラス \mathbf{h}_k ごとに相違度 γ^* の平均が示されている

できる。理論的バリオグラムとは、バリオグラム雲に対し、さまざまな理論的な分布モデルを当てはめることで求められる。図4では、ナゲット効果と、球形 (spherical)、指数、ガウスの各モデルを示している (Goovaerts, 1997, 88-90)。

これら4つのモデルは、しばしば利用される基本的モデルであり、次のように定式化できる：

ナゲット効果モデル

$$g(\mathbf{h}) = \begin{cases} 0 & \mathbf{h} = 0 \text{ のとき} \\ 1 & \text{その他のとき} \end{cases} \quad (7)$$

球形モデル (レンジは a)

$$g(\mathbf{h}) = \text{Sph}\left(\frac{\mathbf{h}}{a}\right) = \begin{cases} 1.5 \times \left(\frac{\mathbf{h}}{a}\right) - 0.5 \times \left(\frac{\mathbf{h}}{a}\right)^3 & \mathbf{h} \leq a \\ 1 & \text{その他のとき} \end{cases} \quad (8)$$

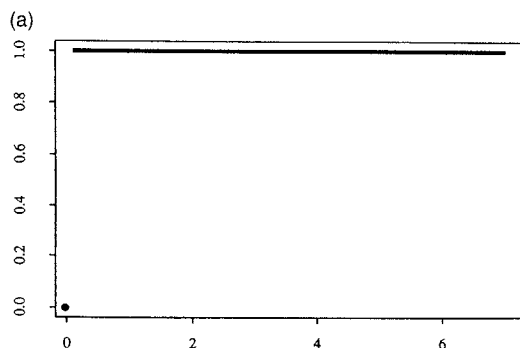
指数モデル (レンジは a)

$$g(\mathbf{h}) = 1 - \exp\left(-\frac{\mathbf{h}}{a}\right) \quad (9)$$

ガウスモデル (レンジは a)

$$g(\mathbf{h}) = 1 - \exp\left(-\frac{\mathbf{h}^2}{a^2}\right) \quad (10)$$

これらの曲線は変数の空間的分布に対し重要な特徴を明らかにする。第1は、バリオグラムが上昇を続ける空間的ラグであり、レンジと呼ばれる (図4参照)。これは変数が空間的に依存する範囲を表し、たとえば、重み付き移動平均で使うウィンドウの大きさを決めるのに役立つ。第2は、バリオグラムが水平になった部分で、シル (sill) として知られ、



データ全体の分散に近くなってくる。これは、このレンジ内での空間的ラグをもったデータの間には空間的依存性がないことを暗示している。

これらのモデルを利用すると、バリオグラムは $\gamma(\mathbf{h}) = b_0 + b_1 \times g(\mathbf{h})$ で示される。ただし、 b_0 はナゲット分散、 $b_0 + b_1$ はシルに等しい。クリギングにおける重みは、次節に示すように、このバリオグラムに当てはめられた数学モデルに基づき求められる。

3. クリギング

ある地域において、 n 個の地点 \mathbf{x}_α , $\alpha = 1, \dots, n$ に対し、変数 Z の観測値、 $Z(\mathbf{x}_1), \dots, Z(\mathbf{x}_n)$ があるとしよう。問題は、図5に示すように、観測値のない地点 \mathbf{x}_0 における変数 Z の推定値 $Z^*(\mathbf{x}_0)$ を求めることである。この問題は、1節で示したように、空間的補間法で解決でき、傾向面分析、スプライン、移動平均などさまざまな方法が開発されてきた。本節では、空間的自己共分散を用いた方法を示す。この方法は、採鉱技師 D. G. Krige にちなんで、クリギング (kriging) と呼ばれている (Wackernagel, 1995, p.19)。

クリギングでは、 $Z(\mathbf{x}_0)$ に対する推定値を求めるのに、その周囲の n 個の観測値の重み付き移動平均を利用する。すなわち、

$$Z^*(\mathbf{x}_0) = \sum \omega_\alpha Z(\mathbf{x}_\alpha) \quad (11)$$

である。ただし、 $\{\omega_\alpha\}$ は重みで、その合計は1になる。クリギングが通常の重み付き移動平均法と異なるのは、重みに観測値から得られたバリオグラムを利用する点にある。

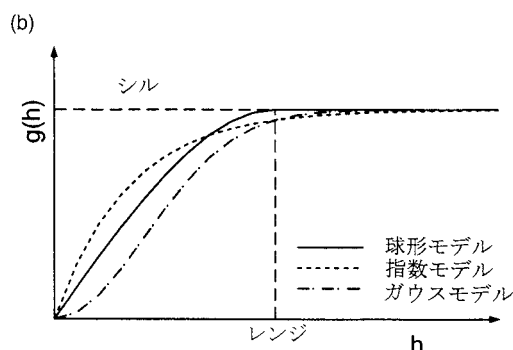


図4 共分散関数モデル：(a) ナゲット効果モデルと (b) 球形、指数、ガウスの各モデル

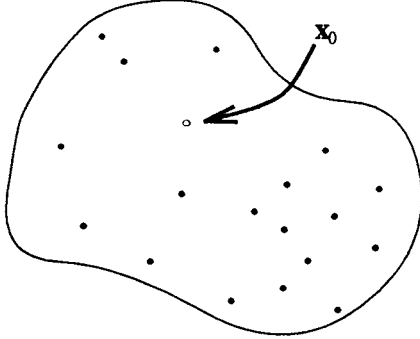


図5 地域Dにおけるデータ観測地点（黒丸）とデータ推定地点（白丸）

常クリギング (ordinary kriging) は、クリギングの中で最も広く利用されている方法である。以下では、特に断らない限り、常クリギングをクリギングと呼ぶ。

クリギングでは、推定誤差の平均と分散がどのようなかを見てみよう。推定誤差とは、次のように \mathbf{x}_0 における推定値と真の値との差である：

$$Z^*(\mathbf{x}_0) - Z(\mathbf{x}_0) \quad (12)$$

すると、推定誤差の平均は、

$$\begin{aligned} E[Z^*(\mathbf{x}_0) - Z(\mathbf{x}_0)] \\ &= E[\sum \omega_\alpha Z(\mathbf{x}_\alpha) - Z(\mathbf{x}_0) \sum \omega_\alpha] \\ &= \sum \omega_\alpha E[Z(\mathbf{x}_\alpha) - Z(\mathbf{x}_0)] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

となり、推定誤差は不偏 (unbiased) であることがわかる。この不偏性は重みの総和 $\sum \omega_\alpha = 1$ に基づく。

推定誤差の分散は、

$$\sigma_E^2 = E\{[Z^*(\mathbf{x}_0) - Z(\mathbf{x}_0)]^2\} \quad (14)$$

で示される。クリギングでは重みに関する制約があることから、バリオグラムを利用することが認められている。バリオグラムによって推定誤差の分散を表現すると、

$$\begin{aligned} \sigma_E^2 = & -\gamma(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0) - \sum \sum \omega_\alpha \omega_\beta (\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta) + \\ & + 2 \sum \omega_\alpha \gamma(\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_0) \end{aligned} \quad (15)$$

となる。

“最良”の重みを求めるために、推定誤差の分散をできる限り小さくする方法をとる。ラグランジュ法を用いると、目的関数は次のようになる (Wackernagel, 1995, p.71)：

$$\phi(\omega_\alpha, \mu) = \sigma_E^2 - 2\mu(\sum \omega_\alpha - 1) \quad (16)$$

ただし、 μ はラグランジュ係数である。目的関数を最小化するために、この偏導関数をゼロとおく：

$$\begin{aligned} \partial \phi(\omega_\alpha, \mu) / \partial \omega_\alpha &= 0 \quad \alpha = 1, \dots, n \\ \partial \phi(\omega_\alpha, \mu) / \partial \mu &= 0 \end{aligned}$$

すると、 $n+1$ 個の線形方程式体系が得られる (Davis, 1986, 383-405)。

これはクリギングに対する方程式体系と呼ばれ、

$$\begin{bmatrix} \gamma(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1) & \dots & \gamma(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_n) & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \gamma(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_1) & \dots & \gamma(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_n) & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \omega_n \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ \vdots \\ \gamma(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

左辺はデータ地点間のバリオグラム (相違度) を示し、右辺はデータ地点と推定地点間のバリオグラムを表している。これらの2つの値は、前項で示されたバリオグラムに当てはめられた数理モデルから得られる。この方程式体系に対する解は、重みのベクトル $\{\omega_\alpha\}$ である。

もし、 \mathbf{x}_0 がデータ地点の1つであるならば、方程式体系の右辺は、左辺の行列の1つの列に等しくなる。その結果、その列に対する重みは1になり、残りのすべての重みは0となる。このようにクリギングは、データ地点では観測値に等しい値を利用する。

以上のように、クリギング推定では、推定誤差の分散を最小にするような重みを求め、推定値はその重みを使って移動平均で算出される (式11を参照)。クリギングは、推定誤差の分散が観測値それ自身ではなく、バリオグラムと観測地点の空間的分布とに基づいている点に特徴がある (Haining, 1990, 186-187)。

4. クリギングの応用

図6は、フランスのロアール川周辺の35km × 25kmの地域における土壌サンプルから観測された砒素量の分布を示している（Wackernagel, 1995）。大きな円ほど、土壌内の砒素の集積量が多いことを示している。クリギングの応用例としては、① 空間的補間、② 空間成分の抽出、③ 平滑化が知られている。以下では、これらの応用例を示すが、いずれもこの分布図を基にしている。

空間的補間

空間的補間に対する方法は、逆距離補間（inverse distance interpolation）などさまざまな方法が開発されてきた。クリギングは、不規則空間データを用いて規則的グリッド上のデータ値を推定するための補間方法として利用されてきた。前掲の図5に示すように、 \mathbf{x}_0 をグリッド上の地点と考え、コンピュータを使いそこでの値をクリギングで推定して、格子データを得る。

上記の砒素量の分布（図6参照）に対し、500mグリッドを設定し、各グリッド地点に対し、50の最近傍サンプルに基づいた移動近傍を使って、常ク

リギングを実行した。図7aは、その結果をラスター表現したものである。砒素の量が多いほど陰影が濃くなっている。

図7bは、砒素データに対するクリギングの標準偏差をラスター表現で示している。この地図から、各地点における推定の精度を見ることができる。白い地点は、データのサンプルがあった地点で、クリギングの誤差はゼロである。陰影が濃くなるほど、推定誤差が大きくなる。

地域化変数の線形モデル

地域的現象は、しばしば異なったスケールで作用する複数の独立した現象が重なり合ったものとして出現する。地域化変数の線形モデルは、ある現象を表現する確率関数を、異なったパリオグラム（共分散関数）をもついくつかの無相関の確率関数へと分解する。本節では、クリギングによって、これらの空間成分を推定することが可能であることを示す。

実験的パリオグラムにおいて、複数のシルが識別されたとき、地域化変数の線形モデルが当てはめられる。地域化変数 $Z(\mathbf{x})$ が2次定常¹⁾ 確率関数であり、地域化変数の線形モデルと関連付けられるとしよう。すると、 $Z(\mathbf{x})$ はさまざまなスケールの空間

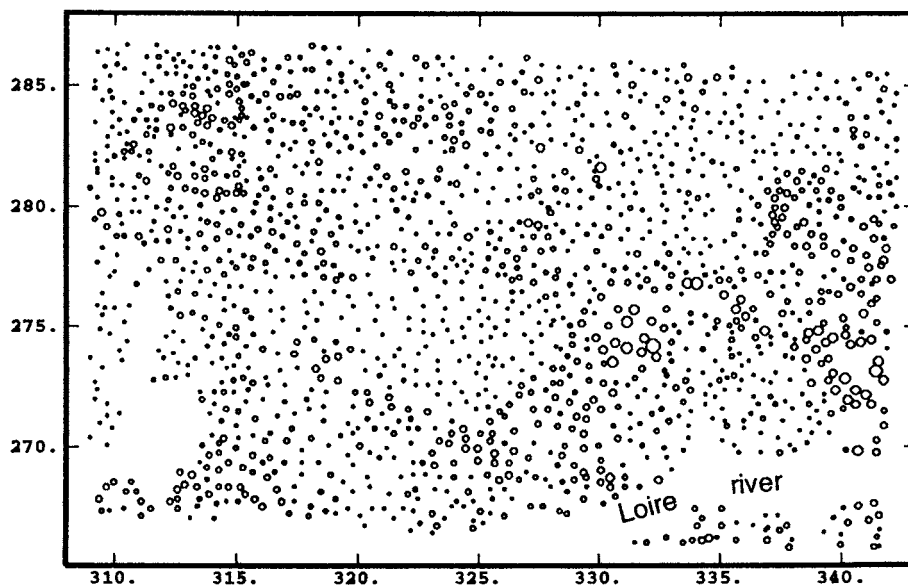
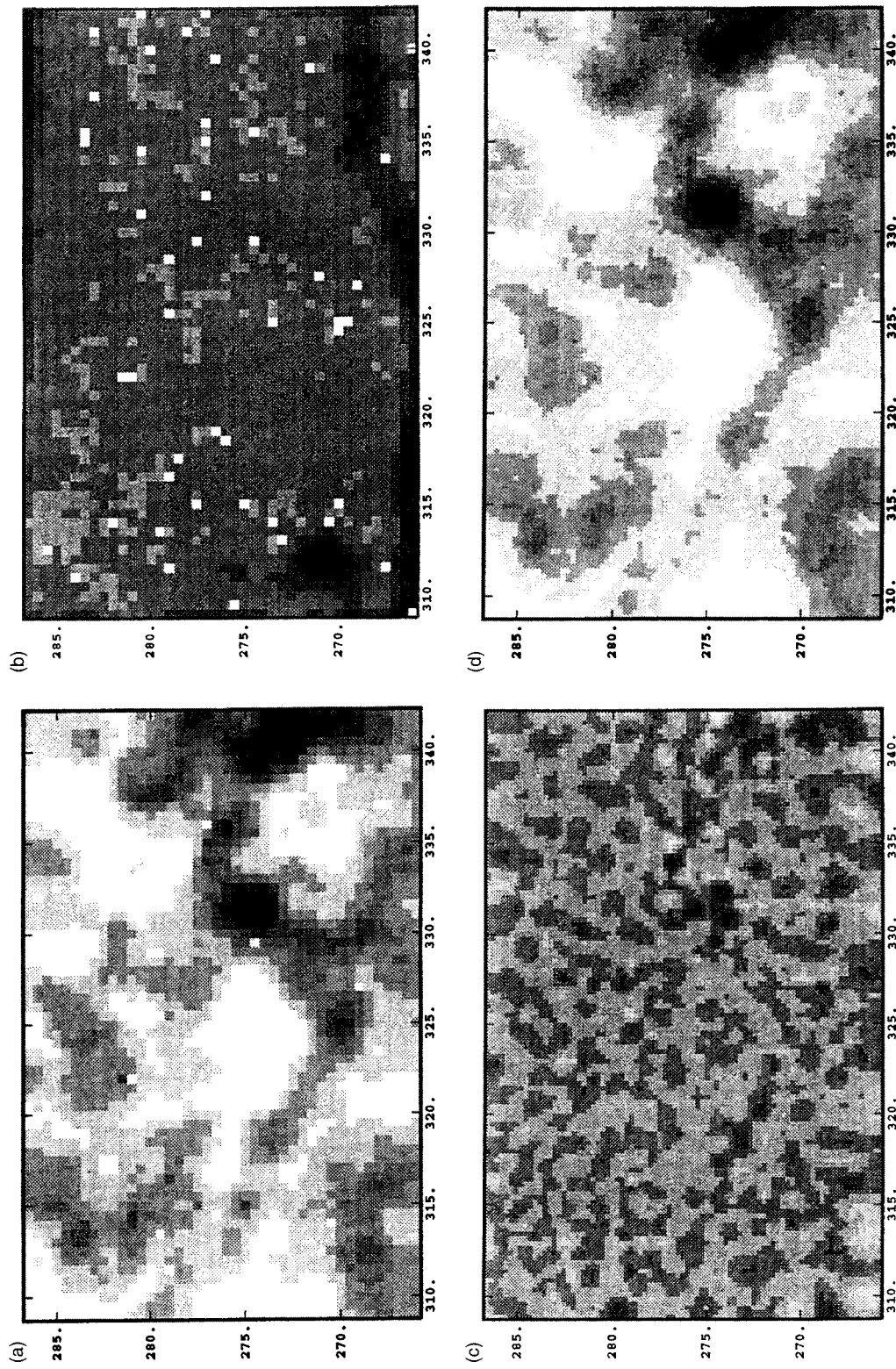


図6 フランスのロアール川周辺の35km × 25kmの研究地域における土壌中の砒素量の分布
出典：Wackernagel, 1995



出典：Wackernagel, 1995

図 7 (a) クリギングによる砒素量分布のラスター表現：グリッドの大きさは0.5km × 0.5km で砒素量に応じ陰影は濃くなる

(b) クリギングの標準偏差のラスター表現：推定精度を表している

(c) 短レンジ (3.5km) と関連した成分の地図

(d) 長レンジ (6.5km) と関連した成分の地図

成分を示す無相関ゼロ平均の2次定常確率変数 $Z_u(\mathbf{x})$ と、 $Z(\mathbf{x})$ の平均を表す平滑関数 $m_l(\mathbf{x})$ との和として次のように表される：

$$Z(\mathbf{x}) = Z_0(\mathbf{x}) + \cdots + Z_u(\mathbf{x}) + \cdots + Z_s(\mathbf{x}) + m_l(\mathbf{x}) \quad (18)$$

これは、局地定常地域化モデル (locally stationary regionalization model) と呼ばれている。

すると、バリオグラムは、次のような係数 b_u をもった $S+1$ 個の単バリオグラムの和で成り立っている：

$$\gamma(\mathbf{h}) = \sum \gamma_u(\mathbf{h}) = \sum b_u g_u(\mathbf{h}) \quad (19)$$

ただし、 $g_u(\mathbf{h})$ は正規化バリオグラムである。 b_u , $u = 0, \cdots, S$, は、実験的バリオグラムで観察された複数のシルである。

空間成分の抽出

土壌の汚染をモニタリングするとき、汚染物質が強く集中した地区を検出することが目的となる。空間的異常 (spatial anomaly) とは、汚染水準が高く空間的に広がった状態であり、それが検出されねばならない。空間的異常は、1つのサンプル地点で検出される場合と、複数の隣接するサンプル地点で検

出される場合がある。これらの空間的異常は2つの異なった無相関の空間過程によって発生していると考えられる。1地点での異常によってナゲット効果が生じ、複数の隣接地点での異常は短レンジ成分をもたらす。さらに、長レンジ成分は背景をなす全体的変動を説明する。

図8は、図6で示した砒素値データ $Z(\mathbf{x})$ に対し、(+印で) 実験的バリオグラムを示している。さらに、理論的バリオグラムは、ナゲット効果と3.5km および6.5km のレンジをもつ2つの球形モデルとの和で構成されている。すなわち、

$$\gamma(\mathbf{h}) = b_0 \text{nug}(\mathbf{h}) + b_1 \text{sph}(\mathbf{h}, 3.5\text{km}) + b_2 \text{sph}(\mathbf{h}, 6.5\text{km})$$

となる。

これに対応した地域化変数の線形モデルは、3つの2次定常成分と局地的平均から成り立っている。

$$Z(\mathbf{x}) = Z_0(\mathbf{x}) + Z_1(\mathbf{x}) + Z_2(\mathbf{x}) + m_l(\mathbf{x})$$

図7cは、砒素値の短レンジ成分のクリギング地図を表している。前掲の図6に示された砒素値データ $Z(\mathbf{x})$ の大きな値が、3.5km という短レンジ成分 $Z_1(\mathbf{x})$ の地図では黒く現れていることが注目される。また、データの無い地域で行われた補外がどん

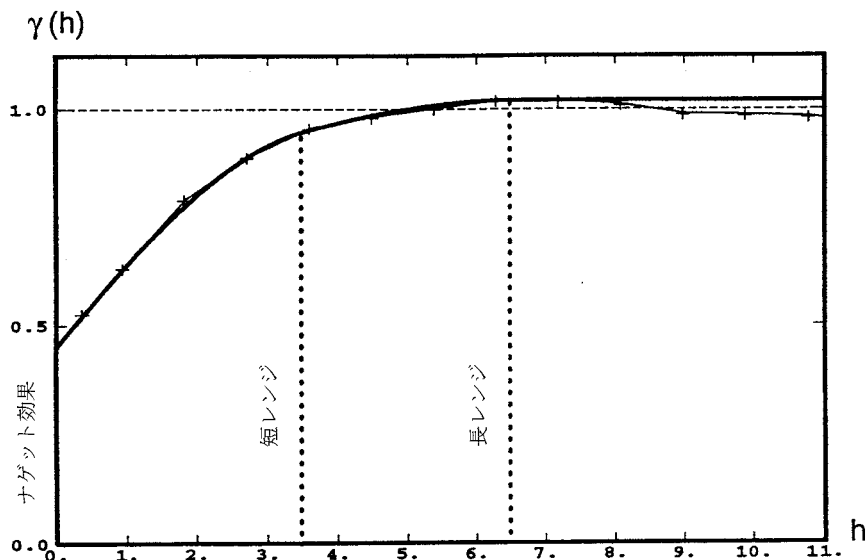


図8 土壌中の砒素量のバリオグラム：ナゲット効果と3.5km および6.5km のレンジをもつ2つの球形モデルとで構成された地域化変数の線形モデルに当てはめられた
出典：Wackernagel, 1995

な結果を生んでいるかを見ることも興味深い。

図7dは、長レンジ成分と局地的平均を合わせた地図を示している。長レンジ成分 $Z_2(\mathbf{x})$ と局地的平均 m_l の同時抽出は、ナゲット効果 $Z_0(\mathbf{x})$ と短レンジ成分 $Z_1(\mathbf{x})$ を砒素値データ $Z(\mathbf{x})$ から差し引いたものである。この地図は、通常のクリギング地図

(前掲の図7a)を補間した状態を示している。

なお本研究をまとめるに当たり、平成10年度文部省科研費特定領域研究(B)(人文社会科学の空間情報科学、領域番号：602、領域代表者：岡部篤行)の研究費の一部を使用した。

注

- 1) 確率変数が領域 D 上で定義された2次定常確率関数の小集合であるとしよう。2次定常性によって、この領域内の2地点 \mathbf{x} と $\mathbf{x} + \mathbf{h}$ を結ぶベクトル \mathbf{h} に対し、平均と分散の双方が領域上で不変な変換ができることを意味する。すなわち、

$$\begin{aligned} E[Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})] &= E[Z(\mathbf{x})] \\ \text{cov}[Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}), Z(\mathbf{x})] &= C[\mathbf{h}] \end{aligned}$$

平均値 $E[Z(\mathbf{x})] = m$ は、領域内のどの地点 \mathbf{x} においても等しい。1対の地点間の共分散は、それらを隔てるベクトル \mathbf{h} のみに基づいている。

参考文献

- バーロー, P. A. 著 / 安仁屋政武・佐藤亮訳 (1990) 『地理情報システムの原理：土地資源評価への応用』古今書院。
- Davis, J. C. (1986): *Statistics and Data Analysis in Geology Second Edition*. New York: Wiley.
- Goovaerts, P. (1997): *Geostatistics for Natural Resources Evaluation*. New York: Oxford University Press.
- Haining, R. (1990): *Spatial Data Analysis in the Social and Environmental Sciences*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Kohsaka, H. (1992): Three-dimensional representation and estimation of retail store demand by bicubic splines. *Journal of Retailing*, 68(2), 221-241.
- Matheron, G. (1970): *The Theory of Regionalized Variables and its Applications*. Fascicule 5, Les Cahiers de Centre de Morphologie Mathématique, Ecole des Mines de Paris, Fontainebleau, 211p.
- Wackernagel, H. (1995): *Multivariate Geostatistics: An Introduction with Applications*. Berlin: Springer.