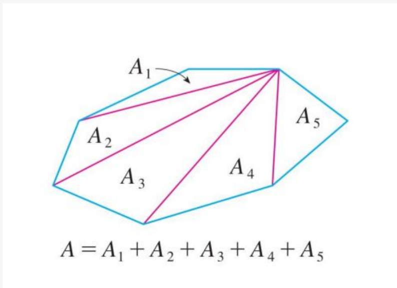
# CHƯƠNG 1:
# Tổng Quan Về Giải Tích

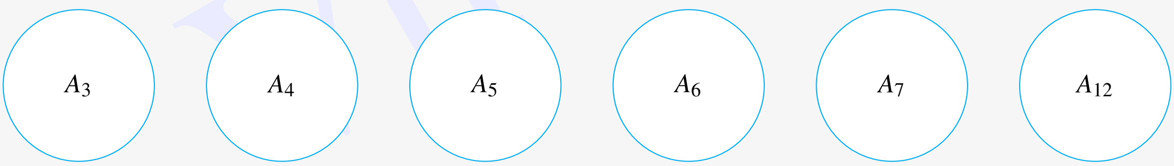
Về cơ bản, giải tích khác với môn toán mà các bạn đã học trước đây: giải tích ít tĩnh mà mang tính động nhiều hơn. Nó liên quan đến sự biến thiên và sự chuyển động; nó bàn về các đại lượng biến thiên dần về các đại lượng khác. Vì nguyên nhân đó, nên rất hữu ích khi chúng ta có một cái nhìn tổng quan về môn học trước khi bắt đầu nghiên cứu chuyên sâu. Ở đây chúng ta lướt qua một số khái niệm chính về giải tích bằng cách cho thấy khái niệm giới hạn này sinh ra như thế nào khi chúng ta cố gắng giải quyết một loạt các vấn đề.

## Bài toán diện tích

Giải tích bắt nguồn cách đây ít nhất 2500 năm, thời những người Hy Lạp cổ đại, lúc đó họ đã biết tìm diện tích bằng cách sử dụng “phương pháp vét cạn”. Họ biết cách tìm diện tích A của một hình đa giác bất kỳ bằng cách chia nó thành các hình tam giác như trong hình bên và cộng các diện tích của các tam giác này lại.




Tìm diện tích của một hình cong là một bài toán khó hơn nhiều. Phương pháp vét cạn của người Hy Lạp là vẽ các đa giác nội tiếp bên trong hình và các đa giác nội tiếp bên ngoài hình và sau đó tăng số cạnh của đa giác lên. Hình dưới minh họa tiến trình này với trường hợp đa giác đều nội tiếp trong đường tròn.

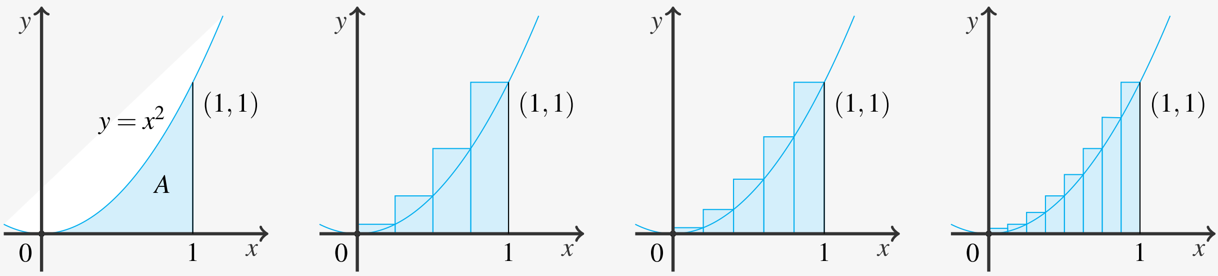



Cho $A_n$ là diện tích của đa giác nội tiếp có n cạnh. Khi n tăng, dường như$A_n$ càng lúc càng gần hơn với diện tích của đường tròn. Ta nói rằng diện tích của đường tròn là *giới hạn* của các diện tích của đa giác nội tiếp và ta viết

$$\boxed{A = \lim_{n\to\infty} A_n}$$

Người Hy Lạp không sử dụng các giới hạn một cách tường minh. Tuy nhiên, bằng lập luận gián tiếp, Eudoxus (thế kỷ thứ 5 tr. CN) đã sử dụng phương pháp vét cạn để chứng minh công thức tính diện tích đường tròn quen thuộc: $A = \pi r^2$.

Chúng ta sẽ sử dụng ý tưởng tương tự để tìm diện tích của các miền có dạng được cho trong hình dưới. Chúng ta sẽ tính xấp xỉ diện tích A bằng diện tích của các hình chữ nhật, cho chiều rộng của các hình chữ nhật giảm xuống và sau đó tính A như giới hạn của tổng diện tích của các hình chữ nhật này.



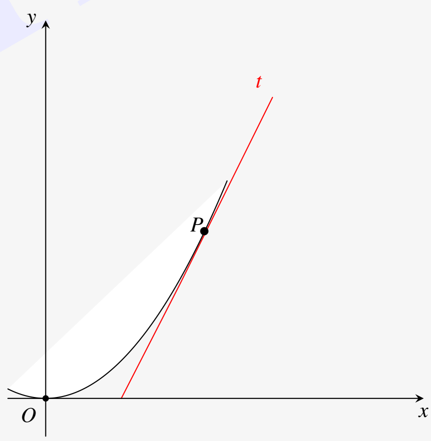

Bài toán diện tích là bài toán trọng tâm trong một nhánh của giải tích được gọi là *phép tính tích phân*

## Bài toán tiếp tuyến

Bài toán tiếp tuyến dẫn đến một nhánh của giải tích được gọi *phép tính vi phân*, được phát minh sau phép tính tích phân hơn 2000 năm. Ý tưởng chủ đạo nằm đằng sau phép tính vi phân được đưa ra bởi nhà toán học người Pháp Pierre Fermat (1601-1665) và được phát triển bởi các nhà toán học Anh John Wallis (1616-1703), Isaac Barrow (1630-1667), Isaac Newton (1642-1727) và nhà toán học người Đức Gottfried Leibniz (1646-1716).

Xét bài toán tìm phương trình tiếp tuyến t của đường cong có phương trình $y = f(x)$ tại điểm $P$ cho trước (Chúng tôi sẽ đưa ra định nghĩa chính xác của tiếp tuyến trong các chương sau. Từ giờ các bạn có thể hình dung tiếp tuyến như một đường thẳng tiếp xúc với đường cong tại điểm $P$ như hình bên). Vì ta biết rằng điểm $P$ nằm trên tiếp tuyến, nên ta có thể tìm phương trình của t nếu ta biết hệ số góc $m$ của nó. Dạng điểm-hệ số góc của phương trình đường thẳng qua $P_1(a, f(a))$ và có hệ số góc $m$là

$$y - f(a) = m(x - a)$$




Vấn đề là ta cần tìm hai điểm để tính hệ số góc và ta chỉ biết một điểm $P$ trên t. Để giải quyết vấn đề đó, đầu tiên ta tìm giá trị xấp xỉ với $m$ bằng cách lấy một điểm lân cận $Q(x, f(x))$trên đường cong và tính hệ số góc $mPQ$ của cát tuyến $PQ$

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Khi ta nhìn đồng hồ đo vận tốc của xe hơi và thấy vận tốc chiếc xe đang di chuyển là 48 dặm/giờ, thông tin đó cho ta biết điều gì? Ta biết rằng nếu vận tốc không đổi, thì sau một giờ, chúng ta sẽ di chuyển được 48 dặm. Nhưng nếu vận tốc của xe hơi biến thiên, thì có ý nghĩa gì khi ta nói rằng vận tốc tại thời điểm được cho là 48 dặm/giờ?

Để phân tích câu hỏi này, chúng ta hãy kiểm tra chuyển động của một chiếc xe hơi di chuyển dọc theo một con đường thẳng và giả sử rằng chúng ta có thể đo được khoảng cách di chuyển của xe hơi (theo foot) tại mỗi khoảng một giây như trong bảng sau:

| t = thời gian chạy (s) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| d = khoảng cách (ft) | 0 | 2 | 9 | 24 | 42 | 71 |

Bước đầu tiên ta tìm vận tốc sau 2 giây, ta tìm vận tốc trung bình suốt khoảng thời gian$2 \leq t \leq 4$ :

$$\text{vận tốc trung bình} = \frac{\text{Mức biến thiên vị trí}}{\text{thời gian chạy}} = \frac{42-9}{4-2} = 16.5 \text{ ft/s}$$

Tương tự, vận tốc trung bình trong khoảng thời gian $2 \leq t \leq 3$ là

$$\text{vận tốc trung bình} = \frac{24-9}{3-2} = 15 \text{ ft/s}$$

Ta có cảm giác rằng vận tốc tại thời điểm t = 2 không thể chênh lệch nhiều với vận tốc trung bình suốt khoảng thời gian ngắn bắt đầu tại t = 2. Vì vậy chúng ta hãy hình dung khoảng cách di chuyển đo được tại các khoảng thời gian 0.1 giây như trong bảng:...

### Lời kết

**Thông điệp** muốn gửi gắm.

1. Rất cảm ơn các anh chị trong LCĐ đã tận tình chỉ bảo trong suốt quá trình học vừa qua.
2. Mong rằng sẽ được các anh chị chỉ bảo trong các khóa học sau.
3. Bài làm còn chưa hoàn thiện và có nhiều lỗi mong nhận được sự bổ sung đánh giá của anh chị.