TOÁN
RỜI RẠC
2022

Giải bài tập đề cương

Vũ Văn Huy
20216931
MI2 - K66

Contents

Lời mở đầu

1.1 Lý thuyết

Lý thuyết bạn đọc tự tham khảo giáo trình

1.2 Bài tập

Bài 1. Gọi $P(x)$ là mệnh đề "$x \leq 4$". Những mệnh đề nào sau đây là mệnh đề luôn ĐÚNG?

a) $P(0)$

b) $P(4)$

c) $P(6)$

Giải

$\Longrightarrow$ Dễ dàng thấy ngay mệnh đề luôn đúng là a, b

Bài 2. Xác định giá trị ĐÚNG của mỗi mệnh đề sau, nếu mỗi giá trị nhận được là số thực

a) $\exists x(x^2 = 2)$

b) $\exists x(x^2 = -1)$

c) $\forall x(x^2 + 2 \geq 1)$

d) $\forall x(x^2 \neq x)$

Giải

a) $x = \pm\sqrt{2}$

b) Không tồn tại

c) R

d) $R/\{1,0\}$

Bài 3. Cho p,q là các mệnh đề. Hai mệnh đề $(p \to q) \to q$ và $p \vee q$ có tương đương logic không? Vì sao ?

Giải

$$
\begin{aligned}
(p \to q) \to \; q &\Leftrightarrow (\overline{p} \vee q) \to q \\
&\Leftrightarrow \overline{\overline{p} \vee q} \vee q \\
&\Leftrightarrow p \wedge \overline{q} \vee q \\
&\Leftrightarrow p \wedge \overline{q} \vee q \\
&\Leftrightarrow 1 \text{ (Luôn nhận giá trị đúng)}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Không tương đương logic

Bài 4. Cho các mệnh đề A, B và C thỏa mãn $(A \wedge C) \to (B \wedge C)$ và $(A \vee C) \to (B \vee C)$ là các mệnh đề đúng. Chứng minh rằng $A \to B$ là mệnh đề đúng.

Giải

Giả sử $A \to B$ là mệnh đề sai

Không mất tính tổng quát chọn A = 1, B = 0

$$\Longrightarrow \begin{cases} C = 0 \Rightarrow A \vee C = 1 \Rightarrow (A \vee C) \Rightarrow (B \vee C) = 0 \\ C = 1 \Rightarrow B \vee C = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} C = 0 \Rightarrow A \wedge B = 0 \\ C = 1 \Rightarrow B \wedge C = 0 \end{cases} \Longrightarrow (A \wedge C) \Rightarrow (B \wedge C) = 0$$

$\Longrightarrow$ Giả sử sai $A \to B$ đúng

Bài 5. Cho $A = \{a, b, c, d\}, B = \{x, y\}$. Xác định

a) A × B

b) $(A/B) \times (B \setminus A)$

c) $(A \cap B) \cup (A \setminus B)$

d) B × A

Giải

Tích Descartes của tập hợp

$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$

a) $A \times B = \{(a,x),(a,y),(b,x),(b,y),(c,x),(c,y),(d,x),(d,y)\}$.

b) $A \setminus B = \{a, b, c, d\}$
$B \setminus A = \{x, y\}$
$\Rightarrow \; (A/B) \times (B\ A) = A \times B$

c) $A \cap B = \varnothing$
$A \setminus B = \{a, b, c, d\}$
$\Rightarrow (A \cap B) \cup (A \setminus B) = \varnothing$

d) $B \times A = \{(x,a),(x,b),(x,c),(x,d),(y,a),(y,b),(y,c),(y,d)\}$

Bài 6. Hai tập hợp $(A \times B) \times (C \times D)$ và $A \times (B \times C) \times D$ có giống nhau không ? Vì sao?

Giải

Giả sử $A = \{a\}, B = \{b\}, C = \{c\}, D = \{d\}$
$(A \times B) \times (C \times D) = \{(a,c),(a,d),(b,c),(b,d)$
$A \times (B \times C) \times D = \{(a,d),(b,d),(a,d),(c,d)\}$
$\Longrightarrow$ Hai tập đã cho không giống nhau

Bài 7. Cho A, B, C, D là các tập bất kỳ. Chứng minh

a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

b) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$

c) $(A \setminus B) \cup (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

Giải

a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
$+) A \cap (B \setminus C)$
$\Leftrightarrow A \cap (B \cap \overline{C}) = A \cap B \cap \overline{C}$
$+) (A \cap B) \setminus (A \cap C) = A \cap B \cap \overline{A \cap C}$
$= A \cap B \cap (\overline{A} \cup \overline{C}$
$= (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap \overline{C})$
$= A \cap B \cap \overline{C}$
$\Longrightarrow$ đpcm

b) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$
$\Leftrightarrow A \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A})$
$\Leftrightarrow A \cap B$
$\Longrightarrow$ đpcm

c) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$
$\Leftrightarrow A \cap \overline{B} \cap C \cap \overline{D}$
$\Leftrightarrow A \cap C \cap \overline{B} \cap \overline{D} \Leftrightarrow (A \cap C) \setminus (\overline{\overline{B} \cap \overline{D}})$
$\Leftrightarrow (A \cap C) \setminus (B \cup D)$
$\Longrightarrow$ (đpcm)

Bài 8. Cho $f : R^2 \to R^2$, xác định bởi $f(x,y) = (x^3 - 2y; 2x + y)$. Hỏi f có đơn ánh , toàn ánh, song ánh không?

Giải

$f(x,y) = (x^2 - 2y; 2x + y)$

Xét$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ $\begin{cases} x_1^2 - 2y_1 = x_2^2 - 2y_2 \\ 2x_1 + y_1 = 2x_2 + y_2 \end{cases}$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = -1 (*)$
$\Longrightarrow$ Vậy f là toàn ánh song ánh(Do Pt (*) có vô số nghiệm)

Bài 9. Cho $f : R \to R$ xác định bởi$f(x) = x^2 - 4x + 6$. Tập $A = [-2; 4]$. Xác định $f(A)$ và $f^{(-1)}(A)$

Giải

$f : R \to R$
$f(x) = x^2 - 4x + 6, A = [-2; 4]$
$+) f(x) = x^2 - 4x + 6$

$\Rightarrow f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

x	-2		2		4
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	18	$\searrow$	2	$\nearrow$	6

$\Rightarrow f(A) = [2; 18]$

$+) f^{-1}(A) = \{x \in R | f(x) \in [-2; 4]\}$

$f(x) \in [-1; 2] \Rightarrow -1 \leq x^2 - 4x + 6 \leq 2$ (luôn đúng)

$\Rightarrow f^{-1} = R$

Bài 10. Đâu là biểu diễn của dãy $\{a_n\}$ biết $a_n = -3a_{n-1} + 4a_{n-2}$

a) $a_n = 0$

b) $a_n = 1$

c) $a_n = (-4)^n$

d) $a_n = 2(-4)^n + 3$

Giải

Xét phương trình đặc trưng : $t^2+3t-4=0 \begin{cases} t=-4 \\ t=1 \end{cases}$

Công thức tổng quát: $a_n = a.1^n + b.(-4)^n$

Giải hệ: $\begin{cases} a+b=a_0 \\ a-4b=a_1 \end{cases}$

Do không biết giá trị của u_n. Dựa theo đáp án $\Rightarrow a_n = 2(-4)^n + 3$ ==> Đáp án d

Bài 11. Cho $a_n = 2^n + 5.3^n, \forall n \in \mathbb{N}$

a) Tìm $a_0; a_1; a_2; a_3; a_4$

b) Chứng minh rằng $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$

Giải

a) $a_0 = 6$
$a_1 = 17$
$a_2 = 49$
$a_3 = 143$
$a_4 = 421$

b) Biển đổi 1 chút ta được $a_n - 2a_{n-1} = 3(a_{n-1} - 2a_{n-2})$
$\Leftrightarrow a_n - 2^n = 3^n(a_1 - 2a_0) = 5.3^n$
Chuyển vế thu được điều phải chứng minh

Bài 12. Tìm biểu diễn cẩu các dãy sau

a) $a_n = 3a_{n-1}; a_0 = 2$

b) $a_n = a_{n-1} + 2; a_0 = 3$

c) $a_n = a_{n-1} + n; a_0 = 1$

d) $a_n = 2na_{n-1}; a_0 = 1$

Giải

Tổng quát

Dưới đây là từng trường hợp đặc biệt $\begin{cases} a_0 = a \\ a_n = qa_{n-1} + d, n \geq 1 \end{cases}$

Chú ý: có thể dùng cách truy hồi để chứng minh

a) $a_0 = 2$

Nếu $q = 1 \Rightarrow \begin{cases} a_0 = a \\ a_n = qa_{n-1}, n \geq 1 \end{cases}$

a_n là cấp số nhân với số hạng đầu a_1 = a và công bội bằng q $\Rightarrow a_n = 2.3^n$

Hoặc:

Công Thức Truy Hồi tuyến tính cấp 1 thuần nhất:

Xét phương trình đặc trưng: t - 3 = 0 $\Rightarrow$ t = 3

Nghiệm tổng quát là $a_n = C.3^n$

Thay $a_0 = 2 \Rightarrow a_n = 2.3^n$

b) $a_0 = 3$

Nếu $q = 1 \Rightarrow \begin{cases} a_0 = a \\ a_n = a_{n-1} + d, n \geq 1 \end{cases} \Rightarrow a_n = a + (n-1)d = 3 + (n-1).2 = 2n + 1$

c) $a_0 = 1$

$a_1 = a_0 + 1$

$a_2 = a_1 + 2$

$a_3 = a_2 + 3$

$a_4 = a_3 + 4$

Cộng vế với vế ta được:$a_n = 1 + 1 + 2 + 3 + ...n = 1 + \dfrac{n(n-1)}{2}$

d) $a_n = 2na_{n-1}, a_0 = 1$

$a_0 = 1$

$a_1 = 2a_0$

$a_2 = 2.2.2a_0$

$a_3 = 2.3.2.2.2a_0$

...

$a_n = 2^n.1.2.3.4...n.a_0 = 2^n.n!.a_0 = 2^n.n!$

Bài 13. Tính giá trị của mỗi tổng sau

a) $\sum_{j=0}^{8}(1 + (-1)^j)$

b) $\sum_{j=0}^{8}(3^j - 2^j)$

c) $\sum_{j=0}^{8}(2.3^j + 3.2^j)$

d) $\sum_{j=0}^{8}(2^{j+1} - 2^j)$

Giải

Công thức

Ta có: $\sum_{j=0}^{n} x^j$ là tổng dãy cấp số λ có $u_1 = 1, q = x$

Nên là cứ áp dụng công thức cấp số nhân thôi: $S_n = \dfrac{u_1(q^n - 1)}{q - 1}$

a) $\sum_{j=0}^{8}(1+(-1)^j) = 10$

b) $\sum_{j=0}^{8}(3^j - 2^j) = 9330$

c) $\sum_{j=0}^{8}(2.3^j + 3.2^j) = 21215$

d) $\sum_{j=0}^{8}(2^{j+1} - 2^j) = 511$

Bài 14. Tính tổng sau

1. $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$
2. $\sum_{k=1}^{n} k^2$
3. $\sum_{k=99}^{200} k^3$

Giải

1. $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + ... \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

   $= 1 - \dfrac{1}{n}$

2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1))}{6}$(theo chứng minh quy nạp)

3. $\sum_{k=99}^{200} k^3 = \sum_{k=99}^{200} k^3 = \sum_{k=99}^{200} \dfrac{k^2(k+1)^2}{4} - \dfrac{k^2-(k-1)^2}{4}$

   $= \sum_{k=99}^{200} \dfrac{k^2(k+1)^2}{4} - \sum_{k=98}^{199} \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$

   $= \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}(k=200) - \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}(k=98)$

   $= \dfrac{200^2.201^2 - 98^2.99^2}{4} = \dfrac{(200.201+98.99)(200.201-98.99)}{4}$

   $= 380477799$

Bài 15. Chứng minh rằng nếu A và B là 2 tập hợp có cùng lực lượng thì $|A| \leq |B|$và$|B| \leq |A|$

Giải

Ta cần chứng minh có 1 song ánh A $\rightarrow$ B và đồng thời cũng có ánh xạ ngược B $\rightarrow$ A.
Và nó vừa là đơn ánh.
$\Longrightarrow$ đpcm

Bài 16. Chứng minh rằng A, B, C, D là các tập hợp thảo mãn $|A| = |C|$ và $|B| = |D|$, thì $|A \times B| = |C \times D|$

Giải

Ý tưởng chứng minh tương tự bài 15.

2.1 Lý thuyết

Bạn đọc tự tham khảo giáo trình hoặc slide của thầy Đoàn Duy Trung

2.2 Bài tập

2.2.1 Nguyên lý cộng, nguyên lý nhân

Bài 1. Cho 5 ký tự A, B, C, D, E

a) Có bao nhiêu xâu ký tự có độ dài 4 có thể lập được từ các ký tự đã cho(không cho phép lặp lại ký tự

b) Có bao nhiêu xâu ký tự trong (a) bắt đầu bởi từ B ?

c) Có bao nhiêu xâu ký tự trong (a) không bắt đầu bởi từ A ?

Giải

a) Ví dụ:

A	D	E	B

• Chọn 4 phần tử từ 5 tập phần tử $\{A, B, C, D, E\}$ với các ký tự lặp lại chính là một chỉnh hợp. Theo đề bài số cách chọn là $A_5^4 = 120$

b) Ví dụ:

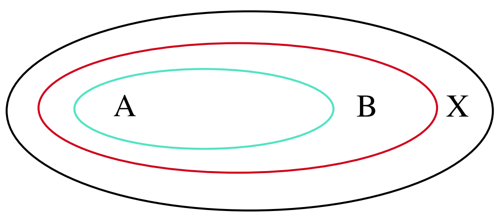
B	D	E	A

- Cố định vị trí đầu tiên của xâu kí tự là B.
- Chọn 3 phần tử từ tập 4 phần tử còn lại $\{A, C, D, E\}$ với các ký tự không lặp lại chính là một chỉnh hợp. Theo yêu cầu bài toán số cách chọn là $1.A_4^3 = 24$

c) Số xâu ký tự mà không bắt đầu từ B là 120 - 24 = 98 (Cách).

Bài 2. Cho X là tập n phần tử có bao nhiêu bộ có thứ tự (A, B) thỏa mãn $A \subseteq B \subseteq X$?

Giải



Gọi a_i là phần tử X (i = $\overline{1,n}$)
Xét a_i có 3 trường hợp:

+) Thuộc A
$\Rightarrow$ tạo ra bộ (A chứa a_i, B chứa a_i)

+) Thuộc B, Không thuộc A
$\Rightarrow$ tạo ra bộ (A không chứa a_i, B không chứa a_i)

+) Thuộc x, Không thuộc B
$\Rightarrow$ tạo ra bộ (A không chứa a_i, B không chứa a_i) $\Leftrightarrow$ mỗi phần tử a_i tạo ra 3 bộ (A, B). AD nguyên lí nhân cho phần tử a_i
$\Rightarrow$ Số hộ (A, B) là 3^n(bộ)

ĐỐI VỚI TRƯỜNG HỢP LÀ TẬP CON THỰC SỰ

X có n phần tử $\Rightarrow C_n^k$ tập có k phần tử X

Số tập con B thực sự của X: $\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k$

(Không lấy k = 0, k = n do là tập con thực sự (B $\neq \varnothing$ và B $\neq n$)

Với tập B có k phần tử thì tập con A thực sự của B là $2^k - 1$(trừ A = B)
$\Rightarrow$ Số phần tử cần tìm:

$$= \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k(2^k-1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k(2^k-1) - 2^n - 1)$$

$$= 3^n - 2^n - 2^n + 1$$

$$= 3^n - 2^{n+1} + 1$$

Bài 3. Đoàn chủ tịch của một cuộc họp gồm 6 người A, B, C, D, E, F cần bầu ra ban lãnh đạo gồm 1 chủ tịch, 1 phó chủ tịch và 1 thư ký.

a) Hỏi có bao nhiêu cách khác nhau?

b) Có bao nhiêu cách mà trong đó một trong hai người A, B là chủ tịch ?

c) Có bao nhiêu cách mà trong đó E là thành viên của ban lãnh đạo ?

d) Có bao nhiêu cách mà trong đó D và F là thành viên ban lãnh đạo ?

Giải

a) Ví dụ:

A	D	E

Số cách chọn ra 3 người phần biệt từ tập 6 người là $A_3^6 = 120$

b)

- Nếu A là chủ tịch, thì cần chọn 2 người 1 phó chủ tịch và 1 thư ký) từ 5 người còn lại $\{B,C,D,E,F\}$. Số cách chọn là A_2^5.
- Do vài trò của A và B là như nhau nên số cách chọn khi A là chủ tịch hay B là chủ tịch là như nhau. Do đó, số cách thỏa mãn yêu cầu bài toán là $2.A_5^2 = 40$

c) Ví dụ:

E	D	A

- Chọn ví trí trong ban lãnh đạo cho E có 3 vị trí (chủ tịch hoặc phó chủ tịch hoặc thư ký).
- Chọn 2 người vào 2 vị trí còn lại từ 5 tập người còn lại $\{A,B,C,D,E\}$ có cách là a_5^2
- Theo nguyên lý nhân số cách thỏa mãn yêu cầu bài toán là : $3.A_5^2 = 60$.

d) Ví dụ:

D	F	A

- Chọn 2 vị trí trong ban lãnh đạo cho D và F. Số cách là C_3^2
  Do vai trò của D và F là như nhau nên chúng có thể hoán vị các chức danh cho nhau. Số cách là 2!
- Chọn vị trí còn lại trong ban lãnh đạo từ tập 4 con người còn lại $\{A,B,C,E\}$. Số cách là A_4^1.
- Theo nguyên lý nhân. Số cách thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $(2!.C_3^2).A_4^1 = 24$.

Bài 4. Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài 10 bắt đầu bởi hoặc là 101 hoặc 111?

Giải

Ví dụ:

1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	1

- Xâu nhị phân (Chỉ gồm bít 0 và 1) bắt đầu bởi 101.
  - ⋆ Ba vị trí đầu của xâu là 101 nên xâu 10 *bít* còn lại 10-3 = 7 *bít*.
  - ⋆ Do mỗi ô trong 7 ô đó đều có 2 cách chọn (Chọn 0 hoặc 1) nên theo nguyên lý nhân, số cách chọn là 2^7.
- Xâu nhị phân (Chỉ gồm bít 0 và 1) bắt đầu bởi 111.

- ⋆ Ba vị trí đầu xâu là 111 nên xâu 10 bít còn lại 10 - 3 = 7 bít.
- ⋆ Do mỗi ô trong 6 ô đó đều có 2 cách chọn(chọn 0 hoặc 1) nên theo nguyên lý nhân, số cách chọn là 2^7.

- Theo nguyên lý cộng, số xâu nhị phân thỏa mãn yêu cầu là: $2^7 + 2^7 = 256$.

Bài 5. Có 10 cuốn sách khác nhau, trong đó có 5 cuốn thuộc lĩnh vực Tin học, 3 cuốn Toán học, 2 cuốn nghệ thuật. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 2 cuốn sách có nội dung thuộc các lĩnh vực khác nhau từ 10 cuốn sách nói trên?

Giải

- Chọn 2 cuốn sách(1 cuốn Tin Học và 1 cuốn Toán Học)
  - ⋆ Chọn 1 cuốn Tin Học từ tập 5 cuốn sách Tin Học, có số cách là C_3^1.
  - ⋆ Chọn 1 cuốn Toán Học từ tập 3 cuốn sách Toán Học, có số cách là C_3^1.
  - ⋆ Theo nguyên lý nhân, số cách chọn là $C_5^1.C_5^1 = 15$.
- Chọn 2 cuốn sách (1 cuốn Toán Học và 1 cuốn Nghệ Thuật)
  - ⋆ Chọn 1 cuốn Toán học từ tập 3 cuốn sách Toán Học, có số cách là C_3^1.
  - ⋆ Chọn 1 cuốn Nghệ Thuật từ tập 2 cuốn sách Nghệ Thuật, cố số cách là C_2^1.
  - ⋆ Theo nguyên lý nhân, số cách chọn là $C_3^1.C_2^1 = 6$.
- Chọn 2 cuốn sách(1 cuốn Nghệ Thuật và 1 cuốn Tin Học)
  - ⋆ Chọn 1 cuốn Nghệ Thuật từ tập 2 cuốn sách Nghệ Thuật, có số cách chọn là C_2^1.
  - ⋆ Chọn 1 cuốn Tin Học từ tập 5 cuốn sách Tin Học, có số cách là C_5^1.
  - ⋆ Theo nguyên lý nhân, số cách chọn thỏa mãn yêu cầu là: 15 + 6 + 10 = 31

Bài 6. Có 10 cuốn sách khác nhau, trong đó 5 cuốn Tin học, 3 cuốn Toán học và 2 cuốn nghệ thuật

a) Hỏi có bao nhiêu cách xếp 10 cuốn này ên giá sách?

b) Hỏi có bao nhiêu cách xếp 10 cuốn này lên 1 giá sách sao cho tất cả các cuốn sách Tin học được xếp ở phía trái giá sách còn hai cuốn sách về nghệ thuật được xếp bên phải?

c) Có bao nhiêu cách xếp 10 cuốn sách này lên 1 giá sách sao cho tất cả các cuốn sách thuộc cùng lĩnh vực được xếp cạnh nhau?

d) Hỏi có bao nhiêu cách xếp 10 cuốn sách này lên 1 giá sách sao cho hai cuốn sách nghệ thuật không được xếp cạnh nhau

Giải

a)
- Khi xếp lên giá thì 10 cuốn sách là như nhau, nên chúng có thể đổi chỗ cho nhau được.
- Số cách chính là số hoán vị của 10 phần tử hay 10!

b) Ví dụ:

Tin	Tin	Tin	Tin	Tin	Toán	Toán	Toán	Nghệ Thuật	Nghệ Thuật

- Do vai trò của 5 cuốn sách Tin Học là như nhau nên chúng có thể hoán vị cho nhau. Số cách xếp 5 cuốn sách Tin Học ở bên trái là 5!.
- Do vai trò của 2 cuốn sách Nghệ Thuật là như nhau nên chúng có thể hoán vị cho nhau. Số cách xếp lại 3 cuốn sách Nghệ Thuật ở bên phải là 2!.
- Do chỉ có 10 vị trí, nhưng xếp bên trái 5 vị trí cho Toán Học, bên phải 2 vị trí cho Nghệ Thuật nên còn lại 3 cuốn sách Toán Học sẽ tự đặt vào giữa giá sách.
  - Số cách xếp 3 cuốn sách Toán Học là 3!.
- Theo nguyên lý nhân, số cách phân chia công việc thỏa mãn yêu cầu bài toán là 5!.3!.2! = 1440.

c) Ví dụ:

Tin	Tin	Tin	Tin	Tin	Toán	Toán	Toán	Nghệ Thuật	Nghệ Thuật

- Coi 5 cuốn sách Tin Học là phần tử X $\Rightarrow$ Số cách xếp 5 cuốn sách Tin Học trong X là 5!.
- Coi 3 cuốn sách Toán Học là phần tử Y $\Rightarrow$ Số cách xếp 3 cuốn Toán Học trong Y là 3!.
- Coi 2 cuốn Nghệ Thuật là phần tử Z $\Rightarrow$ Số cách xếp X, Y, Z vào 3 vị trí là 3!.
- Theo nguyên lý nhân, số cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán là (5!.3!.2!).3! = 8640.

d) Ví dụ:

Tin	Toán	Tin	Toán	Tin	Tin	Toán	Tin	Nghệ Thuật	Nghệ Thuật

- Coi 2 cuốn sách Nghệ Thuật là phần tử X $\Rightarrow$ Số cách xếp 2 cuốn sách Nghệ Thuật trong X là 2!.
- Xếp 8 cuốn sách còn lại(5 cuốn sách Tin Học và 3 cuốn sách Toán Học) cùng với X vào 9 vị trí $\Rightarrow$ Số cách xếp chúng là 9!.
- Theo nguyên lý nhân, số cách xếp thỏa mãn là 2!.9!

Bài 7. Có bao nhiêu số có bốn chữ số có thể tạo thành từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 thỏa mãn

1. Không có chữ số nào được lặp lại
2. Các chữ số được lặp lại
3. Các số chẵn trong (b)

Giải

a) Ví dụ:

1	0	2	3

- Gọi số cần tìm là $\overline{a_1a_2a_3a_4}$, trong đó $a_i \neq a_j$ và $a_1 \neq 0$. Có $a_i \in \mathrm{X} = \{0,1,2,3,4,5\}$
  - Do $a_i \neq 0$ nên $a_1 \in$ 1, 2, 3, 4, 5. Số cách chọn là a_1 là 5.
  - Do không có chữ số nào được lặp lại nên ta cần lấy ra 3 chữ số cho a_2, a_3, a_4 từ tập gồm 5 chữ số X $\ a_1$. số cách chọn là A_5^3.
- Theo nguyên lý nhân, số cách chọn thỏa mãn là $5.A_3^5 = 300$.

b)
- Gọi số cần tìm là $\overline{a_1a_2a_3a_4}$, trong đó $a_i \neq a_j$ và $a_1 \neq 0$. Có $a_i \in \mathrm{X} = \{0,1,2,3,4,5\}$
  - Do $a_i \neq 0$ nên $a_1 \in$ 1, 2, 3, 4, 5. Số cách chọn là a_1 là 5.
  - Do các chữ số có thể được lặp lại, nên mỗi chữ số a_2, a_3, a_4 đều có 6 cách chọn từ tập X. Do đó số cách chọn bộ (a_2, a_3, a_4) là 6^3.
- Theo nguyên lý nhân, số cách chọn thỏa mãn là $5.6^3 = 1080$.

c)
- Gọi số cần tìm là $\overline{a_1a_2a_3a_4}$, trong đó $a_i \neq a_j$ và $a_1 \neq 0$. Có $a_i \in \mathrm{X} = \{0,1,2,3,4,5\}$
- Do số cần tìm chẵn nên $a_4 \in \{0,2,4\}$. Số cách chọn a_4 là 3.
  - Do $a_i \neq 0$ nên $a_1 \in$ 1, 2, 3, 4, 5. Số cách chọn là a_1 là 5.
  - Do các chữ số có thể được lặp lại, nên mỗi chữ số a_2, a_3 đều có 6 cách chọn từ tập X. Do đó, số cách chọn bộ $a_2, a_3)$ là 6^3.
- Theo nguyên lý nhân, số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $5.6^2.3 = 540$

d)
- Gọi số cần tìm là $\overline{a_1a_2a_3a_4}$, trong đó $a_i \neq a_j$ và $a_1 \neq 0$. Có $a_i \in \mathrm{X} = \{0,1,2,3,4,5\}$
- Do số cần tìm chẵn nên $a_4 \in \{0,2,4\}$.
- Nếu $a_4 = 0$
  - Do số tạo thành không có chữ số nào lặp lại nên ta cần lấy ra 3 chữ số cho a_1, a_2, a_3 từ tập gốc 5 chữ số X $\ \{0\}$. Số cách chọn là A_5^3.
  - Theo nguyên lý nhân, số cách chọn trong trường hợp này là: A_5^3.
- Nếu $a_4 \in \{2,4\}$
  - Số cách chọn a_4 là 2.
  - Do $a_i \neq 0$ nên $a_1 \in X\ \{0, a_4\}$. Số cách chọn a_1 là 4.
  - Do không có chữ số nào được lặp lại nên ta cần lấy ra 2 chữ số cho a_2, a_3 từ tập gồm 4 chữ số X $\ \{a_1, a_4\}$. Số cách chọn là A_4^2.

- Theo nguyên lý nhân, số cách chọn trong trường hợp này là: $4.A_4^2.2 = 96$.

- Theo nguyên lý cộng, số các chọn thỏa mãn yêu cầu là $A_5^3 + 96 = 156$.

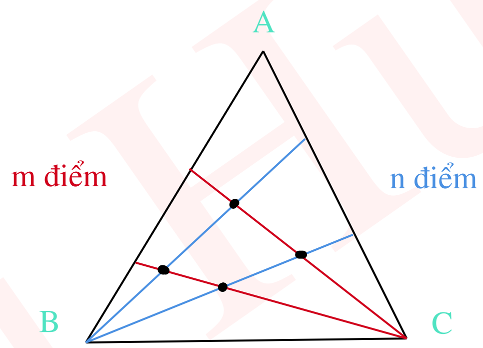
Bài 8. Trên cạnh bên của một tam giác ta lấy n điểm, trên cạnh bên thứ hai ta lấy m điểm. Mỗi một trong hai đỉnh của cạnh đáy được nối với các điểm được chọn trên cạnh bên đối diện bởi các đường thẳng. Hỏi

a) Có bao nhiêu giao điểm của các đường thẳng nằm trong tam giác?

b) Các đường thẳng chia tam giác ra làm bao nhiêu phần?

Giải

1.



- Giả sử đỉnh ở đáy là B và C. Trên cạnh AB lấy m điểm. Trên cạnh AC lấy n điểm.
- Nối điểm B với n điểm trên cạnh AC ta được n đường thẳng.
- Nối điểm C với m điểm trên cạnh AB ta được m đường thẳng.
  - Mỗi đường đi qua C không song song với bất kỳ đường nào trong n đường kia sẽ cắt n đường kia tại n giao điểm nằm trong tam giác.
  - Do có tất cả m đường đi qua C, nên số giao điểm nằm trong tam giác là n.m

2.
- Kẻ m đường thẳng qua điểm C sẽ chia $\triangle ABC$ ra thành m + 1 phần.
- Ta thấy n đường thẳng qua B chia một phần (Trong m + 1 phần) ra thành n + 1 phần nhỏ.
- Do có tất cả m + 1 phần nên tam giác sẽ được chia ra làm: (m+1).(n+1) phần.

Bài 9. Một cán bộ tin học do đãng trí nên đã quen mật khẩu của phần mềm máy tính của mình. May mắn anh ta có nhớ mật khẩu có dạng NNNXX, trong đó bộ NNN là các chữ số. XX là các chữ cái lấy trong bảng 26 chữ cái. Hỏi trong trường hợp xấu nhất cần phải thử bao nhiêu trường hợp để tìm lại được mật khẩu?

Giải

Ví dụ:

0	1	0	A	A

- Ta có tập các chữ số có 10 phần tử là $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
- Ta có tập các chữ cái có 26 phần tử.
- Mật khẩu có chứa 3 chữ số NNN (có thể lặp lại)
  - Mỗi chữ số N trong mật khẩu có 10 cách chọn từ tập $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.
  - Theo nguyên lý nhân, Số cách chọn cho NNN là 10^3
- Mật khẩu có chứa 2 chữ cái XX (có thể lặp lại)
  - Mỗi chữ cái X trong mật khẩu có 26 cách chọn.
  - Theo nguyên lý nhân, số cách chọn cho XX là 26^2.
- Số trường hợp xấu nhất cần phải thử cũng chính là số lượng mật khẩu có thể có. Số mật khẩu có thể có đó là $10^3.26^2$.

Bài 10. Hỏi có bao nhiêu bộ có thứ tự gồm 3 tập X_1, X_2, X_3 thỏa mãn
$X_1 \cup X_2 \cup X_3 = \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$ Và $X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \emptyset$
Lưu ý: Hai bộ

$$X_1 = \{1;2;3\}, X_2 = \{1;4;8\}, X_3 = \{2;5;6;7\}$$

Và

$$X_1 = \{1;4;8\}, X_2 = \{1;2;3\}, X_3 = \{2;5;6;7\}$$

Là khác nhau

Giải

- Do $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = \varnothing$ nên mội phần tử a_i chỉ thuộc tối đa là 1 tập hợp.
- Xét 1 phần tử $a_i \in X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ bất kỳ
  - Nếu a_i chỉ thuộc 1 tập thì nó có 3 cách chọn (Hoặc X_1, X_2, X_3)
  - Nếu a_i thuộc 2 tập hpwj thì có C_3^2 cách chọn vị trí cho a_i.
  - Nếu $a_i \notin X_j$ với j = 1,2,3 thì vô lý. Do $a_j \in X_1 \cap X_2 \cap X_3$.
  - Theo nguyên lý cộng, số cách xếp chỗ cho a_j là 3 + C_3^2 = 6.
- Do a_j có thể là một trong số $\{1,2,..7,8\}$ nên số bộ có thứ tự $X_1, X_2, X_3)$ là 6^8 = 1679616.

2.2.2 Nguyên lý bù trừ

Bài 11. Có bao nhiêu hoán vị của các chữ cái trong xâu ABCDEF mà trong đó có chứa xâu con DEF ?

Giải

- Coi xâu con DEF là phần tử X.

- Xếp ABCX vào 4 vị trí, số các hoán vị có thể có là 4!
- Số các hoán vị chứa xâu con DEF chính là số các hoán vị của xâu ABCX. Số các hoán vị thỏa mãn yêu cầu bài toán là 4! = 24.

Bài 12. Có bao nhiêu hoán vị của các chữ cái trong xâu ABCDEF mà trong đó có chứa ba chữ cái D, E, F đứng cạnh nhau ?

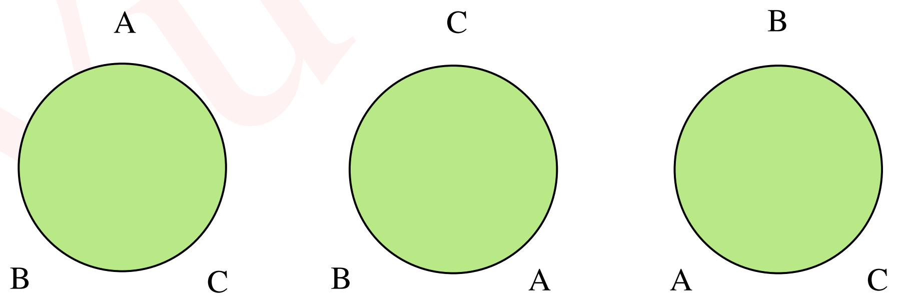
Giải

- Coi 3 chữ cái D, E, F đứng cạnh nhau là phần tử X.
  - Do vai trò của D, E, F như nhau nên số các cách xếp có thể có của X là 3!
- Xếp A, B, C, X vào 4 vị trí, số hoán vị có thể là 4!.
- Theo nguyên lý nhân, số các hoán vị thảo mãn yêu cầu bài toán là 3!.4! = 144.

Bài 13. Có bao nhiêu cách xếp 6 người vào ngồi quanh cái bàn tròn (hai cách xếp không coi là khác nhau nếu chúng có thể thu được từ nhau bởi phép quay bàn tròn) ?

Giải

Ví dụ: Xét cách xếp 3 người A, B, C quanh một bàn tròn như sau được coi là một.



- Xếp 6 người ngồi cạnh một bàn thì số cách xếp là 6!.
- Xếp quanh một bàn tròn
  - Khi ta quay bàn tròn thì với một cách xếp có thứ tự của 6 người sẽ được tính 6 lần.
- Từ đó, số cách xếp 6 người ngồi quanh một bàn tròn là $\frac{6!}{6}$ = 5! = 120.

Tổng quát

- Số cách xếp n người ngồi thành một hàng ngang là **n!**.
- Số cách xếp n người ngồi quanh một bàn tròn là **(n-1)!**

Bài 14. Có bao nhiêu cách xếp 7 học sinh nam và 5 học sinh nữ ra thành một hàng ngang sao cho không có 2 nữ sinh nào đứng cạnh nhau?

Giải

- Ký hiệu Nam là B, còn Nữ là G.
- Ví dụ:

B	G	B	G	B	G	B	G	B	B	B	G

- Xếp chỗ cho 7 bạn Nam
  - Do các bạn Nam có thể hoán vị cho nhau nên số cách xếp Nàm là 7!.
- Do có 7 bạn Nam nên giữa chúng hình thành lên khe + 2 bên = 8 vị trí. Ta có thể xếp bạn Nữ vaafo 8 vị trí trên sao cho không có ít nhất 2 bạn Nữ ở cùng một vị trí thì sẽ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
  - Số cách xếp 5 bạn Nữ vào 8 vị trí mà không có ít nhất 2 bạn Nữ ở cùng 1 vị trí là A_8^5.
- Theo nguyên lý nhân, số cách xếp thỏa mãn là $7!.A_8^5 = 33868800$.

Bài 15. Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 32 bit mà trong đó có đúng 6 số 1 ?

Giải

Ví dụ:

1	$\cdots$	1	1	$\cdots$	1	$\cdots$	1	$\cdots$	1

- Xâu nhị phân chỉ gồm 2 số là 0 hoặc 1.
- Xâu nhị phân có độ dài 32 bit có đúng 6 số chính là số cách chọn ra vị trí để xếp số 1 vào
  - Số cách chọn đó là $C_{32}^6 = 906192$.

Bài 16. Có bao nhiêu xâu ký tự có thể dược tao ra từ các chữ cái MISSISSIPPI?

Giải

Ví dụ: xâu đề bài: MISSISSIPPI?

- Có 11 kí tự. Suy ra có 11! xâu
- Các chữ cái phân biệt 4I,4S,2P lặp lại
- Vậy số xâu ký tự có thể tạo thành là: $\frac{11!}{4!.4!.2!} = 34650$.

Tổng quát:

- Xếp n đồ vật thành hàng ngang.
- Trong n đồ vật có n_1 đồ vật loại I,..., có n_k đồ vật loại k.
- Số cách xếp đồ thỏa mãn là: $\frac{n!}{n_1!.n_2!...nk!}$

Bài 17. Có 8 cuốn sách khác nhau. Hỏi cso bao nhiêu cách phân các cuốn này cho 3 học sinh: **Mơ, Mai, Mận** sao cho **Mơ** nhận được 4 cuốn sách, còn **Mai, Mận** mỗi người nhận được 2 cuốn sách?

Giải

- **Mơ** có 4 cuốn sách từ 8 cuốn sách. Số cách lấy sách cho **Mơ** là C_8^4.
- **Mai** có 2 cuốn sách từ cuốn sách còn lại. Số cách lấy sách cho **Mai** là C_4^2.
- **Mận** có 2 cuốn sách từ 2 cuốn sách còn lại. Số cách lấy sách cho **Mận** là 1.
- Theo nguyên lý nhân, số cách lấy sách thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $C_8^4.C_4^2 = 420$.

Bài 18. Giả sử tập X là tập có t phần tử. Ta gọi tổ hợp lặp chập k từ t phần tử X là một bộ không có thứ tự gồm k thành phần lấy từ các phần tử của X. Ví dụ:

- Xét tập X = $\{a, b, c\}$. Các tổ hợp lặp chập 2 phần tử của X là
  - $(a,a); (a,b); (a,c); (b,b); (b,c); (c,c)$.

Chứng minh rằng số tổ hợp lặp chập k từ t là $C_{k+t-1}^{t-1} = C_{k+t-1}^{k}$.

Giải

- Ta xếp t phần tử thành 1 hàng ngang.
  - Giữa 2 phần tử liên tiếp luôn tồn tại 1 vách ngăn.
  - Do có t phần tử nên có t - 1 vách ngăn.
  - Chúng ta sẽ tạo thành t ngăn được đánh số từ 1 tới t.
- Xét tổ hợp lặp chập k của t phần tử.
  - Coi k phần tử chính là k ngôi sao. Xếp k ngôi sao thành 1 hàng ngang.
  - Ngăn thứ i chứa thêm 1 ngôi sao mỗi lần khi phần tử thứ i của tập xuất hiện trong tổ hợp.
- Ta thấy một dãy chập (t-1) vách ngăn và k ngôi sao tương ứng với 1 tổ hợp lắp chập k của t phần tử.

- Chọn t - 1 vị trí từ t-1+k vị trí để xếp chỗ cho t -1 vách ngăn. Số cách xếp là: C_{t-1+k}^{t-1}.
- Còn lại k ví trí trong dãy ứng với k ngôi sao.

- Vậy số tổ hợp lặp chặp k từ t phần tử là C_{t-1+k}^{t-1}
- Theo tính chất của tổ hợp $C_n^k = C_n^{n-k}$, ta có $C_{t-1+k}^{t-1} = C_{t-1+k}^{k}$

Bài 19. Có 3 rổ đựng các quả cầu Xanh, Đỏ, Tím. Mỗi giỏ chỉ chứa các quả cầu cùng màu và mỗi giỏ chứa ít ra là 8 quả cầu.

1. Có bao nhiêu cách chọn ra 8 quả cầu.
2. Có bao nhiêu cách chọn ra 8 quả cầu mà trong đó có ít nhất một quả cầu Đỏ, một quả cầu Xanh, một quả cầu Tím?

Giải

1. - Số cách lấy ra 8 quả cầu từ 3 giỏ là nguyên nguyên không âm của phương trình:
   $$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$
   - Số nghiệm của phương trình là: $C_{3+8-1}^{8} = C_{10}^{8} = 45$(Xem công thức trong giáo trình)
2. Số cách lấy 8 quả cầu từ 3 quả là số nghiệm nguyên không âm của phương trình:
   $$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$
   Do lấy ít nhất một quả cầu Đỏ, Xanh, Tím:
   - Đặt $t_1 = x_1 - 1, t_2 = x_2 - 1, t_3 = x_3 - 3$.
   - Phương trình trở thành $t_1 + t_2 + t_3 = 5$
   - Vậy số nghiệm là $C_{3+5-1}^{3} = C_7^3 = 21$

Bài 20. Xét phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 29$.

1. Hỏi phương trình đã cho có bao nhiêu nghiệm nguyên dương ?
2. Hỏi phương trình đã cho có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm ?

Giải

1. - Do đề bài yêu cầu nghiệm nguyên dương, nên ta đặt: $y_i = x_i - 1$ với $\forall i = \overline{1,4}$
   - Vậy số nguyện của phương trình là $C_{4+25-1}^{25} = C_{28}^{3}$
2. Số nghiệm của phương trình là: $C_{29+4-1}^{29} = C_{32}^{3}$

2.2.3 Chỉnh hợp, hoán vị tổ hợp

Bài 1. Trong đoạn từ 1 đến 1000 có bao nhiêu số hoặc lẻ hoặc là số chính phương?

Giải

Gọi A là tập các số lẻ.
Gọi B là tập các số chính phương.
$\Rightarrow A \cap B$ là tập các số chính phương lẻ.
$\Rightarrow A \cup B$ là tập các số lẻ hoặc là số chính phương.
Khi đó:

- $|A| = \left[\frac{1000}{2}\right] = 500$
- Số các số chính phương trong đoạn từ 1-1000 là các số k thỏa mãn $1 \leq k^2 \leq 1000$
$\Rightarrow |B| = \sqrt{1000} = 31$
- Số các số chính phương lẻ trong đoạn từ 1-1000 là các số k thỏa mãn $1 \leq (2k+1)^2 \leq 1000$
$\Rightarrow 0 \leq k \leq 15 \Rightarrow |A \cap B| = 16$.
- Theo nguyên lý bù trừ, trong đoạn từ 1 đến 1000 số các số lẻ hoặc là số chính phương là :
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 500 + 31 - 16 = 515$ số.

Bài 2. Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài 8, không chứa 6 số 0 liên tiếp ?

Giải

Số xâu nhị phân có độ dài 8 bít là: $2^8 = 256$.
Đếm số xâu nhị phân chứa từ 6 số 0 liên tiếp:

- **Chứa 6 số 0 liên tiếp**:
  - Xếp 6 số 0 có 1 cách.
  - 6 số 0 ở đầu có 2 xâu.
  - 6 số 0 ở cuối có 2 xâu.
  - 6 số 0 ở giữa có 1 xâu.
  $\Rightarrow$ có 5 xâu.
- **Chứa 7 số 0 liên tiếp** có 2 xâu.
- **Chứa 8 số 0 liên tiếp** có 1 xâu.
- Theo quy tắc cộng có 8 xâu thỏa mãn
$\Rightarrow$ Theo nguyên lý bù trừ, số xâu thỏa mãn yêu cầu bài toán là$2^8 - 9 = 248$.

Bài 3. Có bao nhiêu số có 10 chữ số với các chữ số 1, 2, 3 mà trong đó mỗi chữ số 1, 2, 3 có mặt ít nhất 1 lần.

Giải

Gọi A_i là tập các số có 10 chữ số mà chữ số i không xuất hiện. Với(i=1,2,3)
$\Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup A_3$ là tập các số có 10 chữ số mà chữ số mà chữ số 1 or 2 or 3 không xuất hiện.
Số các số tự nhiên có thể có từ tập 1, 2, 3 là 3^{10}.
Số các số tự nhiên có 10 chữ số mà trong đó mỗi chữ số 1, 2, 3 xuất hiện ít nhất 1 lần
Theo nguyên lý bù trừ, ta có N = $3^{10} - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$.
GỌi N_i lần lượt là tập có 10 chữ số mà có i số không xuất hiện
Ta có:

- $N_1 = |A_1 + A_2 + A_3| = 2^{10} + 2^{10} + 2^{10} = 3.2^{10}$
- $N_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_2 \cap A_3| + |A_3 \cap A_1| = 1 + 1 + 1 = 3$
- $N_3 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$

$\Longrightarrow$ Số các số thỏa mãn là: $N = 3^{10} - (N_1 - N_2 + N_3) = 3^{10} - (3.2^{10} - 3 - 0)$= 55980.

Bài 4. Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài 10 hoặc là bắt đầu với 3 số 1, hoặc là kết thúc bởi 4 số 0?

Giải

A là tập các xâu nhị phân có độ dài 10 bit mà bắt đầu bởi số 3 và 1.
B là tập các xâu nhị phân có độ dài 10 bit mà bắt đầu bởi số 4 và 0
$\Rightarrow$ Cần tính $|A \cup B|$

- $|A| = 2^7$ (Do 3 vị trí đầu 1 cách, 7 vị trí còn lại từ 0,1)
- $|B| = 2^6$
- $|A \cap B| = 2^3$

Theo nguyên lý bù trừ $|A \cap B| = |A| + |B| - ||A \cup B| = 2^7 + 2^6 - 2^3$ = 184.

Bài 5. Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 1000 chia hết cho 7 nhưng không chia hết cho 5 và 2

Giải

A tập các số nguyên dương nhỏ hơn 10000 chia hết cho 7.

$$\Rightarrow |A| = \left[\frac{1000}{7}\right] = 1428.$$

B tập số nguyên dương nhỏ hơn 10000 và chia hết cho 7 và 2.

$$\Rightarrow |B| = \left[\frac{10000}{2.7}\right] = 714.$$

C tập số nguyên dương nhỏ hơn 10000 chia hết cho 7 và 5.

$$\Rightarrow |C| = \left[\frac{10000}{5.7}\right] = 285.$$

$|B \cap C|$ tập các số nguyên dương nhỏ hơn 10000 và chia hết cho 7, 5, 2.

$$\Rightarrow |B \cap C| = \left[\frac{10000}{2.5.7}\right] = 142.$$

Theo nguyên lý bù trừ, các số nhỏ hơn 10000 chia hết cho 7 nhưng không chia hết cho 2 và 5 là

$$N = |A| - |B \cup C| = |A| - (|B| + |C| - |B \cap C|) = 1428 - (714 + 285 - 142) = 571.$$

Bài 6. Có bao nhiêu hoán vị của các số tự nhiên 1, 2, ..., 10 mà trong đó 3 số 1, 2, 3 không đứng cạnh nhau theo thứ tự tăng dần?

Giải

Số các hoán vị của tập các số tự nhiên $\{1, 2, ..., 9, 10\}$ là 10!.
Xét hoán vị của tập các số tự nhiên $\{1, 2, ..., 9, 10\}$ mà 1, 2, 3 đứng cạnh nhau.

- Xếp 1, 2, 3 có 1 cách do theo thứ tự tăng dần.
- Xếp 8 số còn lại có 8! cách.
- Theo nguyên lý nhân, số hoán vị trong trường hợp này là 1.8! = 8!.

Theo nguyên lý bù trừ, số các hoán vị của tập các số tự nhiên $\{1, 2, .., 9, 10\}$ mà 1, 2, 3 không đứng cạnh nhau theo thứ tự tăng dần là $N = 10! - 8! = 3588480$.

Bài 7. Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 29$ (*) có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa mãn

$$x_1 \le 3, x_2 \le 12, x_3 \le 5, x_4 \le 10$$

Giải

Đặt $t_1 = 3 - x_1, t_2 = 12 - x_2, t_3 = 5 - x_3, t_4 = 10 - x_4$.
Thay vào (*) ta được:

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 1 \ (**)$$

Từ (**) ta có: $t_1 \le 1, t_2 \le 1, t_3 \le 1, t_4 \le 1$.
Vậy số nghiệm của phương trình là: $C^1_{4+1-1} = C^1_4 = 4$.

Bài 8. : Một lớp gồm có 50 học sinh làm bài kiểm tra gồm 3 câu hỏi. Biết rằng mỗi học sinh làm được ít nhất 1 câu và số học sinh làm được câu 1 là 40, câu 2 là 25, câu 3 là 30. Chứng minh rằng số học sinh làm được cả 3 câu không vượt quá 27.

Giải

Gọi X_i là số học sinh làm được câu thứ i. Với i = 1, 2, 3.
$\Rightarrow |X_1| = 40, |X_2| = 25, |X_3| = 35.$
Số học sinh làm được ít nhất 1 câu là: $|X_1 \cup X_2 \cup X_3| = 50.$
Theo nguyên lý bù trừ, ta có:

$$|X_1 \cup X_2 \cup X_3| = |X_1| + |X_2| + |X_3| - |X_1 \cap X_2| - |X_2 \cap X_3| - |X_3 \cap X_1| + |X_1 \cap X_2 \cap X_3|$$

Đặt $X_{12} = |X_1 \cap X_2|, X_{23} = |X_2 \cap X_3|, X_{13} = |X_1 \cap X_3|, X_{123} = |X_1 \cap X_2 \cap X_3|$
Ta có: 50 = 40 + 35 + 30 - $X_{12} - X_{23} - X_{13} + X_{123}$
$\Leftrightarrow$ 50 = 105 - $X_{12} - X_{23} - X_{13} + X_{123}$
$\Leftrightarrow$ 55 = $(X_{12} - X_{123}) + (X_{23} - X_{123}) + (X_{13} - X_{123}) + 2X_{123}$
Đặt $A = X_{12} - X_{123} \geq 0, B = X_{23} - X_{123} \geq 0, C = X_{13} - X_{123} \geq 0$
$\Rightarrow$ 55 - $2X_{123} = A + B + C \geq 0$
$\Rightarrow X_{123} \leq \left[\frac{55}{2}\right] = 27.$
Vậy số học sinh làm được cả 3 câu không vượt quá 27.

2.2.4 Hệ thức truy hồi

Bài 1. Giải các hệ thức truy hồi sau

a) $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1}, & \forall n \geq 1 \\ a_0 = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, & \forall n \geq 2 \\ a_0 = 1, a_1 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, & \forall n \geq 2 \\ a_0 = 6, a_1 = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_n = 4a_{n-2}, & \forall n \geq 2 \\ a_0, a_1 = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} a_n = \frac{a_{n-2}}{4}, & \forall n \geq 2 \\ a_0 = 1, a_1 = 0 \end{cases}$

Giải

a) $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1}, & \forall n \geq 1 \\ a_0 = 3 \end{cases}$

Xét phương trình đặc trưng: t - 2 = 0 $\rightarrow$ t = 2.
Công thức tổng quát: $a_n = a.2^n$ với $n \geq 0$.
+) n = 0.
$\Rightarrow a_0 = a.2^0 = 3 \Rightarrow a = 3$.
Vậy $a_n = 3.2^n, \forall n \geq 0$.

b) $\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, & \forall n \geq 2 \\ a_0 = 1, a_1 = 0 \end{cases}$

Xét phương trình đặc trưng $t^2 - 5t + 6 = 0$.
Có nghiêm $t_1 = 1, t_2 = 3$.
$\Rightarrow$ Công thức tổng quát: $a_n = a.2^n + b.3^n, \forall n \geq 0$
Ta có : $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a.2^0 + b.3^0 = 1 \\ a.2^1 + b.3^1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$
Vậy $a_n = 3.2^n - 2.3^n, \forall n \geq 0$

c) $\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, & \forall n \geq 2 \\ a_0 = 6, a_1 = 8 \end{cases}$

Xét phương trình đặc trưng: $t^2 - 4t + 4 = 0$
Có nghiệm kép t = 2.
$\Rightarrow$ Công thức tổng quát $a_n = (a + b.n).2^n, \forall n \geq 0$
Ta có: $\begin{cases} a_0 = 6 \\ a_1 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a + 0.b).2^0 = 6 \\ (a + 1.b).2^1 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -2 \end{cases}$
Vậy $a_n = (6 - 2n).2^n, \forall n \geq 0$

d) $\begin{cases} a_n = 4a_{n-2}, & \forall n \geq 2 \\ a_0, a_1 = 4 \end{cases}$

Xét phương trình đặc trưng: $t^2 - 4 = 0$.
Có nghiêm: $t_1 = -2, t_2 = 2$.
$\Rightarrow a_n = a.2^n + b.(-2)^n, \forall n \geq 0$
Ta có: $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a.2^0 + b.(-2)^0 = 0 \\ a.2^1 + b.(-2)^1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$
Vậy $a_n = 2^n - (-2)^n, \forall n \geq 0$

e) $\begin{cases} a_n = \frac{a_{n-2}}{4}, & \forall n \geq 2 \\ a_0 = 1, a_1 = 0 \end{cases}$

Xét phương trình đặc trưng: $t^2 - \frac{1}{4} = 0$.
Có 2 nghiệm phân biệt $t_1 = -\frac{1}{2}, t_2 = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow$ Công thức tổng quát: $a_n = a.(-\frac{1}{2})^n + b(\frac{1}{2})^n$
Ta có:
$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a.(-\frac{1}{2})^0 + b(\frac{1}{2})^0 = 1 \\ a.(-\frac{1}{2})^1 + b(\frac{1}{2})^1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$
Vậy công thức tổng quát $a_n = (1 + (-1)^n).(\frac{1}{2})^{n+1}, \forall n \geq 0$.

Bài 2. Lập công thức truy hồi cho S_n là số cách chia một hình chữ nhật kích thước 2 x n ra thành các hình chữ nhật con có cạnh song song với cạnh của hình chữ nhật đã cho và với kích thước là 1 x 2, 2 x 1, 2 x 2. Giải hệ thức thu được

<u>Giải</u>

+) n = 1. Ta có lưới ô vuông kích thước 2 x 1. Số cách phủ bằng hình chữ nhật kích thước 2 x 1 là $S_1 = 1$.
+) n = 2. Ta có lưới ô vuông kích thước 2 x 2.

- Ta có thể phủ bằng hình chữ nhật kích thước 1 x 2. Số cách phủ là 1.
- Ta có thể phủ bằng hình chữ nhật kích thước 2 x 1. Số cách phủ là 1.
- Ta có thể phủ bằng hình chữ nhật kích thước 2 x 2. Số cách phủ là 1.
- Do vậy, Số cách phủ trong trường hợp này là $S_2 = 3$.

+) n > 2. Phân tập các cách phủ thành 3 tập:

- Tập A - tập các cách phủ tron đó ô ở góc trái được phủ bởi hình chữ nhật kích thước 1 x 2. Ví dụ:

1	2	3	···
x	x		···
			···

Còn lại n - 2 ô cần phủ (từ 3, 4...). Ta được |A| = S_{n-2}

- Tập B - tập các cách phủ tron đó ô ở góc trái được phủ bởi hình chữ nhật kích thước 2 x 1. Ví dụ:

1	2	3	···
x			···
x			···

Còn lại n - 1 ô cần phủ(Từ 2, 3,..). Ta được |B| = S_{n-1}.

- Tập C - tập các cách phủ trong đó ô ở góc trên trái được phủ bởi hình chữ nhật 2 x 2. Ví dụ:

1	2	3	···
x	x		···
x	x		···

Còn lại n - 2 ô cần phủ(Từ 3, 4,..). Ta được |C| = S_{n-2}

+) Theo nguyên lý cộng: $S_n = |A| + |B| + |C|, \forall n \geq 3$.Hay $S_n = S_{n-1} + 2S_{n-2}, \forall n \geq 3$.

- phương trình đặc trưng: $t^2 - t - 2 = 0$. Có nghiêm phân biệt $t_1 = -1, t_2 = 2$.
- Công thực tổng quát $S_n = a.(-1)^n + b.2^n, \forall n \geq 1$
  Ta có

$$\begin{cases} S_1 = 1 \\ S_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + 2b = 1 \\ a + 4b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{2}{3} \end{cases}$$

- Công thức tổng quát $S_n = \frac{(-1)^n + 2^{n+1}}{3}, \forall n \geq 1$.

Bài 3. Lập công thức truy hồi để đếm F_n là số xâu nhị phân độ dài n không chứa 3 số 0 liên tiếp. Từ đó tính F_n

Giải

+) Với n = 1. Ta có 2 xâu nhị phân độ dài 1 không chứa 3 số 0 liền nhau là 0 và 1. Do vậy $F_1 = 2$. +) Với n = 2. Ta có 4 xâu nhị phân độ dài 2 không chứa 3 số 0 liền nhau là 00,01,10,11. Do vậy $F_2 = 4$ +) Với n = 3. Ta có 7 xâu nhị phân độ dài 3 không chứa 3 số 0 liền nhau là 001,010,011,100,101,110. Do vậy $F_3 = 7$ +) Với n > 3. Phân tập các xâu nhị phân cần đếm ra thành 3 tập:

- Tập A - Tập các xâu nhị phân cần đếm chứa 1 ở vị trí đầu tiên.
  Ví dụ:

1	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

  Do mỗi xâu nhị phân trong A chứa 1 ở vị trí đầu tiên nên n - 1 phần tử còn lại sẽ tạo thành 1 xâu nhị phân cần đếm độ dài n - 1. Ta được |A| - F_{n-1}

- Tập B – Tập các xâu nhị phân cần đếm chứa 00 ở vị trí đầu tiên.
  Ví dụ:

0	0	1	$\cdots$

  Do mỗi chỉnh hợp trong b chứa 00 ở vị trí đầu tiên nên vị trí thứ ba của nó phải là số 1. Còn lại n - 3 phần tử sẽ tạo thành 1 xâu nhị phân cần đếm độ dài n - 3. Ta được |B| = f_{n-3}

- Tập C – Tập các xâu nhị phân cần đếm chứa 01 ở vị trí đầu tiên.
  Ví dụ:

0	1	$\cdots$	$\cdots$

  Do mỗi xâu nhị phân trong C chứa 01 ở vị trí đầu tiên nên n - 2 phần tử sẽ tạo thành 1 xâu nhị phân cần đếm độ dài n - 2. Ta được |C| = F_{n-2}.

- Ta thấy các tập A, B, C tạo thành phân hoạch của tập tất cả các xâu nhị phân cần đếm.

+) Theo nguyên lý cộng, $F_n = |A| + |B| + |C|, \forall n \geq 4$. Hay $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-3}$.
F_{10}

$$= F_9 + F_8 + F_7$$

$$= F_8 + F_7 + F_6 + F_8 + F_7 = 2F_8 + 2F_7 + F_6$$

$$= 2(F_7 + F_6 + F_5) + 2F_7 + F_6 = F_7 + 3F_6 + 2F_5$$

$$= 4(F_6 + F_5 + F_4) + 3F_6 + 2F_5 = 7F_6 + 6F_5 + 4F_4$$

Ta thấy:

$$= 7(F_5 + F_4 + F_3) + 6F_5 + 4F_4 = 13F_5 + 11F_4 + 7F_3$$

$$= 13(F_4 + F_3 + F_2) + 11F_4 + 7F_3 = 24F_4 + 20F_3 + 13F_2$$

$$= 20(F_3 + F_2 + F_1) + 20F_3 + 13F_2 = 40F_3 + 33F_2 + 20F_1$$

$$= 40.7 + 30.4 + 20.2$$

$$= 452$$

Bài 4. Lập công thức truy hồi để đếm Q_n là số chỉnh hợp lặp chập n từ ba chữ số 0, 1, 2 không chứa hoặc là hai số 0 liên tiếp hoặc là hai số 1 liên tiếp. Từ đó tính Q_6. Giải hệ thức thu được

Giải

Gọi Q_n là số chỉnh hợp lặp chập n từ ba chữ số 0, 1, 2 không chứa hoặc là xâu 00, hoặc là xâu 11.
Với n = 1, ta có các chỉnh hợp lặp chập 1 của 3 thỏa mãn là: 0, 1, 2. Do vậy $Q_1 = 3$.
Với n = 2, ta có các chỉnh hợp lặp chập của 3 là: 01, 02, 10, 12, 20, 21, 22. Do vậy $Q_2 = 7$
Với n $\geq$ 2. Phân tập các chỉnh hợp lặp cần đếm ra thành 3 tập.

- Tập A - Tập các chỉnh hợp lặp bắt đầu bằng 2.
  Ví dụ:

2	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

  Do mỗi chỉnh hợp lặp trong A chứa 2 ở vị trí đầu tiên nên n - 1 phần tử còn lại sẽ tạo thành chỉnh hợp lặp cần đếm độ dài n - 1. Ta được |A| = Q_{n-1}.

- Tập B - Tập các chỉnh hợp lặp bắt đầu bằng 0.
  Nếu vị trí thứ 2 trong chỉnh hợp lặp là 2. Còn lại n - 2 phần tử sẽ tạo thành chỉnh hợp lặp cần đếm độ dài n - 2. Ta được Q_{n-2}.
  Ví dụ:

0	2	$\cdots$	$\cdots$

  Nếu vị trí thứ hai trong chỉnh hợp lặp là 1 thì ta lại tiếp tục xét như vậy cho đến khi đạt chỉnh hợp lặp ngắn nhất có độ dài là 1.
  Ví dụ:

0	1	⋯	⋯

- Tập C - Tập các chỉnh hợp lặp bắt đầu bằng 1.
  Do vai trò của 0 và 1 là như nhau nên số chỉnh hợp lặp bắt đầu bằng 0 sẽ bằng số chỉnh hợp lặp bắt đầu bằng 1.

- Ta thấy các tập A, B, C tạo thành phần hoạch của tập tất cả các chỉnh hợp lặp cần đếm.

Theo nguyên lý cộng, ta có $Q_n = |A| + |B| + |C|, \forall n \geq 3$.

- Ta thấy $Q_n = Q_{n-1} + 2(Q_{n-2} + Q_{n-3} + Q_{n-4} + ... + 1), \forall n \geq 3$

- Trừ 2 vế cho nhau ta có $Q_n - Q_{n-1} = Q_{n-1} - Q_{n-2} + 2Q_{n-2} \Rightarrow Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$

- Phương trình đặc trưng: $t^2 - 2t - 1 = 0$.
  Phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $t_1 = 1 - \sqrt{2}, t_2 = 1 + \sqrt{2}$

- Công thức tổng quát $Q_n = a(1-\sqrt{2})^n + b(1+\sqrt{2})^n, \forall n \geq 1$

  $\begin{cases} Q_1 = 3 \\ Q_= 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = a(1-\sqrt{2}) + b(1+\sqrt{2}) = 3 \\ Q_2 = a(1-\sqrt{2})^2 + b(1+\sqrt{2})^2 = 7 \end{cases}$

  Rút gọn $a = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}, b = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

- Công thức tổng quát: $Q_n = \dfrac{1}{2}.(1-\sqrt{2})^{n+1} + \dfrac{1}{2}.(1+\sqrt{2})^{n+1}, \forall n \geq 1$

Bài 5. Xét ma trận vuông $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Chứng minh rằng $A^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$. Trong đó F_n là số hạng thứ n cả dãy số Fibonaci.

b) Tính $\det(A^n)$. Từ đó suy ra công thức $F_{n-1}F_n - (F_n)^2 = (-1)^n$

Giải

a) Dãy Fibonaci: $\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, & \forall n \geq 2 \\ F_0 = 0, F_1 = 1 \end{cases}$

+) n = 1. Ta có A = $\begin{pmatrix} F_0 & F_1 \\ F_1 & F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
Cần chứng minh biểu thức đúng với n = k và n = k + 1
Giả sử công thức đúng với n = k với mọi $k \geq 2$. Ta có

$$A^k = \begin{pmatrix} F_{k-1} & F_k \\ F_k & F_{k+1} \end{pmatrix}$$

Với n = k + 1. Ta có:

$$A^{k+1} = A^k.A = \begin{pmatrix} F_{k-1} & F_k \\ F_k & F_{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_k & F_{k-1}+F_k \\ F_{k+1} & F_k+F_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_k & F_{k+1} \\ F_{K+1} & F_{k+2} \end{pmatrix}$$ luôn đúng.

Theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.

b) Ta có $\det(A^n) = \begin{vmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{vmatrix} = F_{n-1}.F_{n+1} - (F_n)^2$
Mặt khác det(AB) = det(A)det(B). Do vậy $\det(A^n) = (\det(A))^n$
Ta có det(A) = $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$. Do vậy $\det(A^n) = (-1)^n$.
Đồng nhất hệ số ta có điều phải chứng minh.

Bài 6. Tính số mất thứ tự D_n

Có n là thư và n phong bì ghi sẵn địa chỉ. Bỏ ngẫu nhiên các lá thư vào các phong bì. Hỏi số cách để xảy ra không một lá thư nào bỏ đúng địa chỉ là bao nhiêu ? Số cách bỏ thư như trên được gọi là số mất thứ tự.

Giải

Bài 7. Trên mặt phẳng, kẻ n đường thẳng sao cho không có 2 đường thẳng chéo nhau nào song song với 3 đường nào đồng quy. Hỏi mặt phương được chia làm mấy phần ?

Giải

Bài 8. Tìm hệ số tổ hợp C_n^k

Giải

Gọi số cách lấy ra k phần tử từ tập gồm n phần tử là C_n^k.
Chọn một phần tử cố định trong n phần tử đang xét .
Xét số cách chọn tập con có k phần tử của tập n phần tử thành 2 lớp: có chứa x và không chứa x.
Nếu tập con có chứa x.

- Bổ sung thêm k - 1 phần tử gồm n - 1 phần tử còn lại.
- Số cách chọn tập có chứa x là C_{n-1}^{k-1}.

Nếu tập con không chứa x.

- Bổ sung thêm k phàn tử từ tập gồm n - 1 phần tử còn lại.

- Số cách chọn tập không chứa x là C_{n-1}^{k}.

Theo nguyên lý cộng. Ta có công thức đệ quy $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}$
Trong đó $C_0^n = C_n^n = 1$.

Bài 9. Bài toán tháp Hà Nội - Hanoi Tower
Có 3 cái cọc a,b,c. Trên cọc a có một chồng gồm n cái đĩa đường kính giảm dần từ dưới lên. Cần phải di chuyển chồng đĩa từ cọc a sang cọc b tuân thủ quy tắc: "Mỗi lần chỉ chuyển 1 đĩa và chỉ được xếp đãi có đường kính nhỏ hơn lên đĩa có đường kính lớn hơn. Trong quá trình chuyển được phép dùng cọc b làm cọc trung gian"Tính số lần di chuyển đĩa ít nhất cần thực hiện để di chuyển toàn bộ đĩa từ cọc a sang cọc c ?

Giải

Bài này nên code để hiểu rõ hơn
Đây là code mẫu:

```
#include<iostream>
using namespace std;
void chuyen(int n, char a, char b){
   cout<<"\nChuyen dia thu "<<n<<" tu cot "<<a<<" sang cot "<<b;
}
void thaphanoi(int n, char a, char b, char c){
   if(n == 1){
      chuyen(1, a , c);
   }else{
      thaphanoi(n-1, a , c, b);
      chuyen(n-1, a, c);
      thaphanoi(n-1, b, c, a);
   }
}
int main(){
   int n;
   do{
      cout<<"Nhap so dia cua thap: ";
      cin>>n;
   }while(n<=0);
   char a = 'A', b = 'B', c = 'C';
   thaphanoi(n, a, b, c);
}
```

Để đếm số lần có thê thêm biến count vào vòng lặp.

Bài 10. Xây dựng công thức đệ quy cho Q_n, là số lượng cách phủ lưới ô vuông kích thước 2 x n bằng các quân bài Domino ?

Giải

2.2.5 Hàm sinh

Một vài chuỗi hội tụ

1. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \forall |x| < 1$

2. $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - ... = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad \forall |x| < 1$

Bài 1. Viết công thức dưới dạng giải tích cho hàm sinh của các dãy số sau:

a) $a_n = 3^n, n = 0, 1, ...$

b) $\{a_0, a_1, a_2, a_3, ..\} = \{0, 1, 0, 1, ...\}$

Giải

Bài này thì cứ công thức trên mà áp vào thôi

a) Hàm sinh là $f(x) = 1 + 3x + 3^2x^2 + ... = 1 + (3x) + (3x)^2 + ... = \dfrac{1}{1-3x}$

b) Hàm sinh là $f(x) = x + x^3 + x^5 + ... = x(1 + x^2 + x^4 + ...) = x(1 + x^2 + (x^2)^2 + ...$
$= x.\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{x}{1-x^2}$

Bài 2. Tìm công thức cho số hạng tổng quát a_n của dãy số $\{a_n\}$ có hàm sinh là

Giải

Ngược lại của bài 1

1. $G(x) = \dfrac{1}{1-2x}$
   Ta có: $\dfrac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + ... = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
   $\Rightarrow$ chuỗi số cần tìm: $a_n = 2^n$

2. $G(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$
   Ta có $\dfrac{1}{(1-x)^2} = (1 + x + x^2 + ...)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...$
   $G(x) - \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_{n+2-1}^{n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
   $\Rightarrow a_n = n + 1, \forall n = 0, 1, 2, ...$

3. $G(x) = \dfrac{1}{1+x-2x^2}$

Ta có $\dfrac{1}{1+x-2x^2} = \dfrac{1}{(1-x)(1+2x)} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{1+2x} + \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{1-x}$

$G(x) = \dfrac{2}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^n + \dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n.2^{n+1}+1}{3}x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

$\Rightarrow a_n = \dfrac{1+(-1)^n.2^{n+1}}{3}, \forall n = 0,1,2,\dots$

Bài 3. Sử dụng hàm sinh để tìm công thức dưới dạng thực hiện cho dãy số cho bởi công thức đệ quy sau đây:

Giải

a) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2 \\ a_0 = 3 \end{cases}$

Gọi $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ là hàm sinh của dãy số.

Ta có $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \Rightarrow xf(x) = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \dots$

$\Rightarrow f(x)[1-x] = a_0 + (a_1 - a_0x) - (a_2 - a_1)x^2 + \dots = -3 + 2x + 2x^2 + \dots$

- Thay $\begin{cases} a_0 = -3 \\ a_n - a_{n-1} = 2 \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$

Ta có $(1-x)f(x) + 5 = 2(1+x+x^2+\dots) \Rightarrow (1-x)f(x) + 5 = \dfrac{2}{1-x}$

Từ đó có $f(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2} - \dfrac{5}{1-x} = 2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n - 5\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+2-5)x^n$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n-3)x^n$

Vậy $a_n = 2n-3, \quad \forall n \geq 0$

b) $\begin{cases} 2a_{n+1} = a_n + a_{n-1} & \forall n \geq 2 \\ a_0 = 0, & a_1 = 1 \end{cases}$

Gọi $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ là hàm sinh của dãy số.

Ta có: $f(x) = a_0 + a_1x + \sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nx^n = x + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=2}^{\infty}(a_{n-1}+a_{n-2})x^n = x + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^n + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n$

Có $f(x) = x + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^{n+1} + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}$

$= x + \dfrac{1}{2}x\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n + \dfrac{1}{2}x^2\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

$= x + \dfrac{x}{2}(f(x) - a_0) + \dfrac{x^2}{2}f(x)$

Từ đó ta có được $f(x) = x + \dfrac{x(x+1)}{2}f(x)$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-2x}{x^2+x-2} = -\frac{4}{3}\frac{1}{x+2} - \frac{2}{3}\frac{1}{x-1}$$

Có $f(x) = -\frac{2}{3}\frac{1}{1+\frac{x}{2}} + \frac{2}{3}\frac{1}{1-x}$

$$= -\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{2})^n x^n + \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3}\left[-(-\frac{1}{2})^n\right]x^n$$

Vậy $a_n = \frac{2}{3}\left[1-(-\frac{1}{2})^n\right], \forall n \geq 0$

c) $\begin{cases} a_{n+2} = 3a_{n+} - 2a_n + 2.3^n \quad \forall n \geq 2 \\ a_0 = 1, a_1 = 2 \end{cases}$

Gọi $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ là hàm sinh của dãy số.

Ta có: $f(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 1 + = 2x + \sum_{n=2}^{\infty}(3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2.3^{n-2}x^n)$

- Có $f(x) = 1 + 2x + 3\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n - 2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n + 2\sum_{n=2}^{\infty} 3^{n-2}x^n$
- Cố $f(x) = 1 + 2x + 3x\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} - 2x^2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2} + 2x^2\sum_{n=2}^{\infty} 3^{n-2}x^{n-2}$
- Thay vào ta được $f(x) = 1 + 2x + 3x(f(x) - a_0) - 2x^2 f(x) + 2x^2\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n$
- Hay $f(x) = 1 + 2x - 3x + (3x - 2x^2)f(x) + \frac{2x^2}{1-3x}$

Từ đó ta được

$$f(x) = \frac{5x^2-4x+1}{(x-1)(2x-1)(1-3x)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n$$

Rút gọn được $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(1 - 2^n + 3^n)x^n$

Vậy $a_n = 3^n - 2^n + 1, \quad \forall n \geq 0.$

3.1 Lý thuyết

Với chương này chỉ cần nắm vững định lý Dirichlet,...

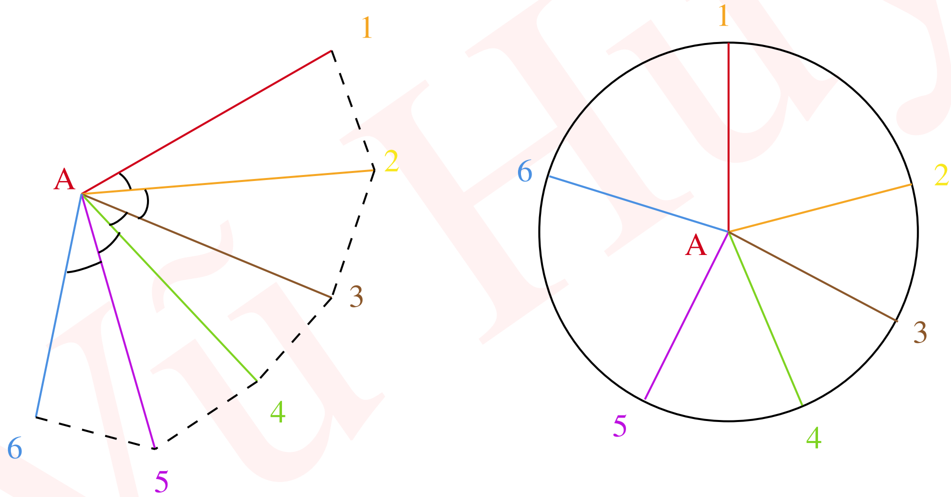
3.2 Bài tập

3.2.1 Bài toán tồn tại

Bài 1. Trên mặt phẳng cho n $\geq$ 6 điểm, khoảng cách giữa các cặp điểm là khác nhau từng đôi. Mỗi điểm được nối với điểm gần nó nhất. Chứng minh rằng mỗi điểm được nối với không quá 5 điểm.

Giải

Minh họa:



Giả sử mỗi điểm trên mặt phẳng nối được ít nhất 6 điểm A là điểm bất kỳ và 6 điểm từ 1-6 như hình

$\Rightarrow \widehat{A_1}+\widehat{A_2}+\widehat{A_3}+\widehat{A_4}+\widehat{A_5}+\widehat{A_6} \geq 360^\circ$

Trong $\triangle$ 1A2 chọn $\begin{cases} \widehat{1A2} > \widehat{A12} \\ \widehat{1A2} > \widehat{A21} \end{cases}$

$\rightarrow \widehat{1A2} > 60^\circ$

Tương tự:

$\Rightarrow \widehat{1A2}+\widehat{2A3}+\widehat{3A4}+\widehat{4A5}+\widehat{5A6} > 360^\circ$(vô lý)

$\Rightarrow$ Giả sử sai $\Rightarrow$ đpcm

Bài 2. Một trung tâm máy tính có 151 máy vi tính. Các máy của trung tâm được đặt tên bởi một số nguyên dương trong khoảng từ 1 đến 300 sao cho không có hai máy nào được đặt tên trùng nhau. Chứng minh rằng luôn tìm được 2 máy có tên là các số nguyên liên tiếp.

Giải

Cách 1: Giả sử 150 máy đánh số từ 1-300
Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì các máy đánh số lẻ hoặc chẵn
$\rightarrow$ Khi thêm 1 máy với số bất kỳ từ 1-300 thì ta được đpcm

Cách 2: Chia khoảng 1-300 thành 150 cặp liên tiếp
$\rightarrow$ Theo nguyên tắc Dirichlet số máy trong 1 cặp ko ít hơn $\left[\frac{300}{151}\right] = 2$
$\rightarrow$ Có ít nhất 2 máy có tên là 2 số liên tiếp.

Bài 3. Các học sinh của một lớp học gồm 45 nam và 35 nữ được xếp ra thành một hàng ngang. Chứng minh rằng, trong hàng đó luôn tìm được hai học sinh nam mà ở giữa họ có 8 người đứng xen vào.

Giải

$(1;10),(2,11),..(9,18)$
$(19,28),(20,290,...(27,36)$
$(37,46),(38,47)$
$(55,64),(65,74)$
72 học sinh đầu chia làm 36 cặp.
8 học sinh cuối với 8 cặp. (64,73),(65,74),...,(71,80). $\Rightarrow$ có 44 cặp
Mà có 45 học sinh nam nên luôn có ít nhất 2 bạn học sinh nam trong 1 cặp.
$\Rightarrow$ đpcm

Bài 4. Có 12 cầu thủ bóng rổ đeo áo với số từ 1 đến 12 đứng tập trung thành mọt vòng tròn giữa sân. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 người liên tiếp có tổng các số trên áo là lớn hơn hoặc bằng 20.

Giải

Tổng số áo: 1+2+3+...+12=$\frac{13.12}{2} = 78$
Chia 12 người thành 4 nhóm, mỗi nhóm có 3 cầu thủ liên tiếp.
Do tổng số áo là 78 nên có ít nhất 1 nhóm có tổng số áo ko ít hơn $\frac{78}{4} = 19.5$
$\Rightarrow$ Có ít nhất 1 nhóm 3 người liên tiếp có tổng số áo lớn hơn hoặc bằng 20.

Bài 5. Chứng minh rằng trong số 10 người bất kỳ bào giờ cũng tìm được hoặc là hai người có tổng số tuổi là chia hết cho 16, hoặc là hai người mà hiệu số tuổi của họ là chia hết cho 16.

Giải

Gọi số dư tuổi 10 người khi chia cho 16 là a_i, $i \in \{1,..,10\}$
$\rightarrow a_i \in \{1,..,15\}$

TH1: 2 số dư bằng nhau
$\exists a_i = a_j \Rightarrow$ đpcm vì có có hiệu số chia hết cho 16

TH2: 2 số dư khác nhau
Ta có 16+0=15+1=14+2=...=8+8
Do 10 số mà có 9 tổng nên theo nguyên tắc Dirichlet thì có 2 số trong các số $a_i \in$ cùng 1 tổng.
$\Rightarrow$ tổng của chúng chia hết cho 16(đpcm)

Bài 6. Cần có ít nhất bao nhiêu bộ có thứ tự gồm 2 số nguyên (a,b) sao cho chắc chắn tìm được trong số 2 số đó hai bộ (c,d) và (e,f) sao cho $c-e$ và $d-f$ là các số có chữ số tận cùng bằng 0 ?

Giải

Trước hết ta có chú ý sau: muốn có 2 số có cùng số dư khi chia cho 10 ta cần chọn 2 số trong đó có 11 số bất kì. Điều này đúng theo định lý Dirichlet.
Ta xét các cặp số (a,b) bất kì. Chia các cặp số này thành 10 nhóm có số dư của a khi chia cho 10 lần lượt là 0,1,2,..,9. Như vậy 2 cặp số (a1,a2) và (a3,a4) trong cùng 1 nhóm thì a1 và a3 có cùng số dư khi chia cho 10. Do đó ta chỉ cần tìm số cặp số (a,b) sao cho có ít nhất 1 nhóm trong số 10 nhóm trên có ít nhất 11 cặp số. Lúc đó trong nhóm vừa nêu sẽ có 2 cặp số (d-f) cũng tận cùng bằng 0. Do có 10 nhóm nên để tồn tại ít nhất 1 nhóm có ít nhất 11 cặp thì số cặp (a,b) cần chọn là: 10*10+1=101 cặp.

Vậy nếu ta chọn ra 101 cặp số nguyên (a,b) có thứ tự bất kì thì luôn tồn tại 2 cặp số (c,d) và (e,f) sao cho (c-e) và (d-f) tận cùng bằng 0(đpcm).

Có thể kiểm tra lại điều này bằng cách cho 101 cặp số bất kỳ và chứng minh tồn tại 2 cặp (c,d) và (e,f) thỏa mãn điều kiện bài toán nhưng lấy 100 số là không thể được.

Bài 7. 17 nhà bác học đôi một viết thư trao đổi cho nhau về 3 chủ đề, mỗi cặp chỉ trao đổi với nhau về 1 chủ đề. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 nhà bác học đôi một viết thư trao đổi cho nhau về cùng một chủ đề.

Giải

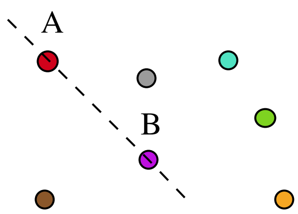
Nhà bác học A trao đổi với 16 nhà bác học khác
Do chỉ trao đổi về 3 vấn đề nên theo nguyên lý Dirichlet số nhà bác học cùng trao đổi về cùng 1 vấn đề không ít hơn $\dfrac{16}{5} = 5.33 \rightarrow 6$
Tiếp tục trong 6 nhà bác học B bất kỳ trong 6 nhà bác học đó

- Nếu có 1 trong 5 nhà bác học còn lại viết thư trao đổi với B $\rightarrow$ đpcm
- B viết thư trao đôi với 5 người còn lại về 2 vấn đề, theo nguyên lý Dirichlet $\rightarrow \exists$ 3 người trao đổi với B về cùng 1 vấn đề. Giả sử vấn đề đó là x.
  - Trong 3 người trao đổi về vấn đề x $\rightarrow$ đpcm.

– Trong 3 người không ai trao đổi về vấn đề còn lại → đpcm.

Bài 8. Trong không gian cho 9 điểm có tọa độ nguyên. Chứng minh rằng trong số 9 điểm đã cho luôn tìm được 2 điểm sao cho đoạn thẳng nối chúng đi qua điểm có tọa độ nguyên

Giải



Xét 1 điểm bất kỳ trong không gian có tọa độ nguyên (x,y,z)
x,y,z có thể là chẵn hoặc lẻ → có đúng $2^3 = 8$ bộ số (x,y,z) thỏa mãn 2 bộ bất kỳ.
Do có 9 điểm trong mặt phẳng, theo nguyên lý Dirichlet ∃ ít nhất 2 điểm có cùng tọa độ chẵn lẻ. VD cùng ccc,lll,clc.
⇒ Trung điểm của 2 điểm đó cùng có tọa độ nguyên(cộng tọa độ vào rồi chia 2 ra cùng đều là số nguyên)
⇒ đpcm
Có thể suy nghĩ giải bài này bằng phương pháp hình học vecto.

Bài 9. Chứng minh rằng trong số 10 người bất kỳ luôn tìm được hoặc là 4 người đôi một quen nhau và 3 người đôi một không quen nhau hoặc là 4 người đôi một không quen nhau và 4 người đôi một quen nhau.

Giải

Đây là bài toán ramsey nên chỉ áp dụng công thức, phần chứng minh tham khảo kĩ trong các giáo trình

3.2.2 Bài toán liệt kê

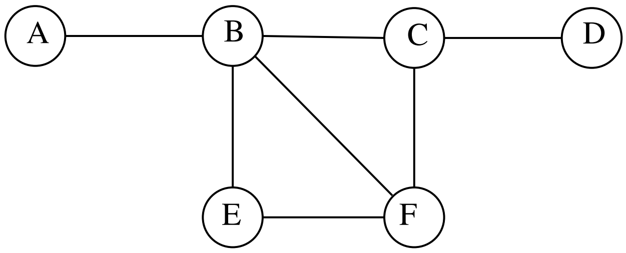
Bài 1. Giả sử A, B,..., F trên hình là các hòn đảo và các đoạn nối là các cây cầu nối chúng. Một người du lịch khởi hành từ A đi từ hòn đảo này sang hòn đảo khác. Người du lịch sẽ dừng lại ăn trưa nếu như tiếp tục đi sẽ phải đi qua cái cầu nào đó hai lần.

a) Liệt kê các cách mà người du lịch có thể đi cho đến khi dừng lại ăn trưa.

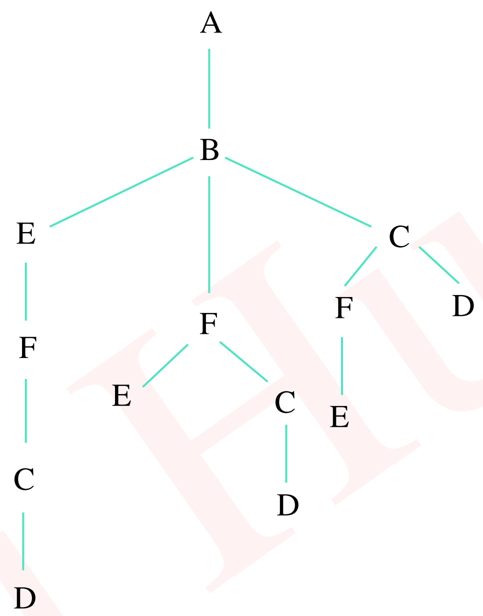
b) Cho biết những điểm nào người du lịch có thể dừng lại ăn trưa.

Giải

Hình vẽ:



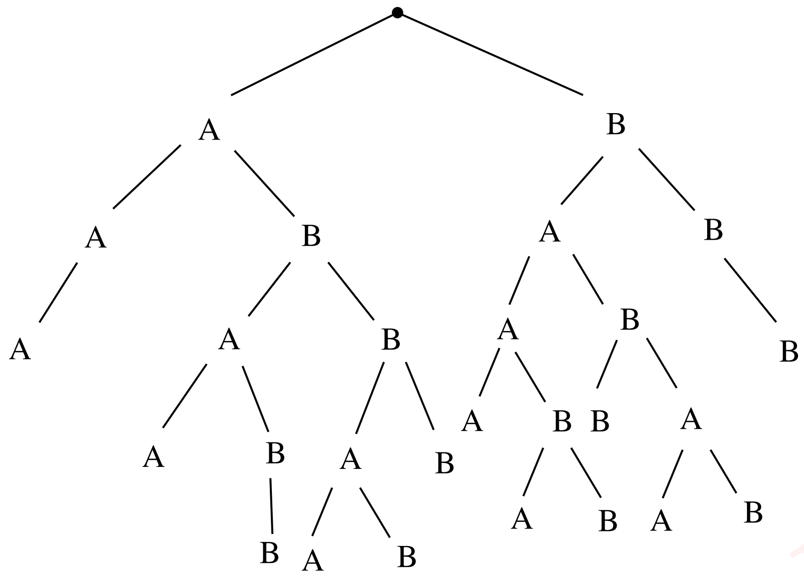
a)



b) D, E là những điểm người du lịch có thể dừng lại ăn trưa.

Bài 2. Hai đội bóng chuyền A, B thi đấu trong một giải vô địch quốc gia. Đội thắng trong trận đấu sẽ là đội giành được ba hiêp thắng trước. Hãy liệt kê tất cả các khả năng có thể của trận đấu giữa hai đội đó.

Giải



Bài 3. Liệt kê tất cả các cách mất thứ tự của 4 số tự nhiên 1;2;3;4

Giải

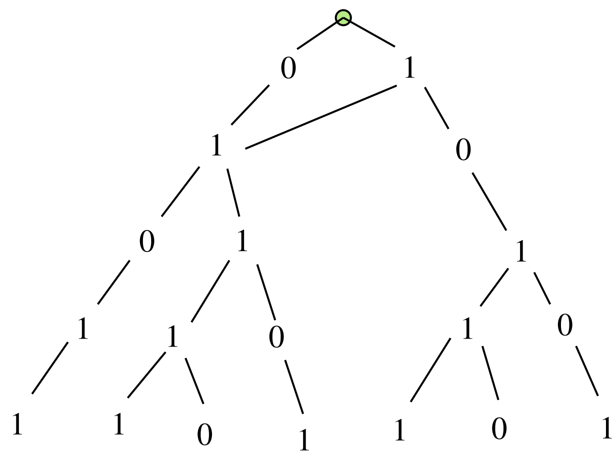
Công thức:
$D_4 = 4!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}) = 9$

Các số thỏa mãn:

2143	3142	4123
2341	3412	4312
2413	3421	4321

Bài 4. Liệt kê các xâu nhị phân độ dài 5 không chứa hai số 0 liên tiếp

Giải



3.2.3 Bài toán tối ưu

Bài 2. Giải các bài toán cái túi sau đây bằng thuật toán nhánh cận. Quá trình thực hiện thuật.

a) $17x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 3x_4 \to \max$
$7x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 19$
$x_j \geq 0,$ nguyên, $j = 1;2;3;4$

b) $16x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 5x_4 \to \max$
$6x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 17$
$x_j \geq 0,$ nguyên, $j = 1;2;3;4$

c) $16x_1 + 8x_2 + 6x_3 + x_4 \to \max$
$7x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 17$
$x_j \geq 0,$ nguyên, $j = 1;2;3;4$

Giải

Trong bài toán tối ưu đặt:

σ : Giá trị đồ vật đang có trong túi

w : Khối lượng còn lại

g : Cận trên

$g = \sigma_k + C_{k+1}$

a)

b)

c)

4.1 Lý thuyết

Lý thuyết

Khi 1 thuật toán (Algorithm) có lời giải cho 1 bài toán trước tiên nó phải có đáp số đúng trước.
Sự hiệu quả của thuật toán là thời gian mà máy tính sử dụng để giải quyết bài toán đó. Máy tính có thể tính được hàng triệu phép tính (thời gian chỉ chênh nhau 0,00...1 s là đã có sự khác biệt rất lớn rồi.
→ Chương này sẽ giúp bạn làm thế nào để xác định thuật toán nào tối ưu hơn qua việc xác định độ phức tạp của thuật toán

4.1.1 Phải học gì

Học hết bỏ phần máy Turing và bài toán P, NP

4.2 Bài tập

4.2.1 Thuật toán

Bài 1. Viết thuật toán tìm tổng của các số tự nhiên.

Giải

```
Enter n
S:=0, i = 0
For i ; i = i+1:
if i<= n then return S
print(S)
```

Bài 2. Viết thuật toán nhận danh sách n số tự nhiên và tìm số các số tự nhiên âm trong dãy.

Giải

```
int main{
   int a = [n]
   int b = []
   for i=0 to len(a):
   if i < 0:
   b.append(i)
   print(b)
}
```

Bài 3. Viết thuật toán tìm số x trong dãy số cho trước.

Giải

list là dãy cho trước

```
enter x
for i in list do:
if i == x:
return 1
else:
return 0
```

Bài 4. Cho một dãy đã sắp xếp theo chiều tăng. Viết thuật toán thêm số x vào vị trí thích hợp.

Giải

a là mảng số cho trước

```
void swap(a,b)
a = a + b
b = a - b
a = a - b
int main{
   int b = new int[i+1]
   for i = 0 to n do b[i] = a[i]
   b[i+1] = x
   for i = n + 1 do
   if b[i] < s then swap $(b_i, b_{i-1})$
}
```

4.2.2 Đánh giá O-lớn

Bài 1. Xác định xem mỗi hàm số sau có O(x)

a) $f(x) = 10$

b) $f(x) = 3x + 7$

c) $f(x) = x^2 + x + 1$

d) $f(x) = 5\log x$

Giải

a) $O(1)$

b) $f(x) = O(x)$

c) $f(x) = O(\lambda x^2)$

d) $f(x) = O(\log x)$

Bài 2. Xác định xem mỗi hàm số sau có $O(x^2)$

a) $f(x) = 17x + 11$

b) $f(x) = x^2 + 1000$

c) $f(x) = x \log x$

d) $f(x) = \dfrac{x^4}{2}$

e) $f(x) = 2^x$

Giải

1. Không. Do $f(x) = O(x)$
2. $f(x) = O(x^2)$
3. $|x \log x| < |x^2| < c|x^2|$
   $\Rightarrow f(x) = O(x^2)$
4. $f(x) = O(x^4)$
5. $f(x) = O(2^x)$

Bài 3. Bằng định nghĩa "$f(x)$ là $O(g(x))$" để chứng minh:

a) $x^4 + 9x^3 + 4x + 7$ là $O(x^4)$

b) $2^x + 17$ là $O(3^x)$

c) $\dfrac{x^2+1}{x+1}$ là $O(x)$

d) $\dfrac{x^3+2x}{2x+1}$ là $O(x^2)$

Giải

a) $|x^4 + 9x^3 + 4x + 7| \leq c|x^4|$

b) $|2^n + 17| \le c|3^n|$

c) $|\dfrac{x^2+1}{x+1}| < O(x)$

d) $|\dfrac{2x^3+2x}{x+1}| \le |x^2|$

Bài 4. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $f(x)$ là $O(x^n)$ cho mỗi hàm số sau:

a) $f(x) = 2x^3 + x^2 \log x$

b) $f(x) = 3x^3 + (\log x)^4$

c) $f(x) = \dfrac{x^4+x^2+1}{x^2+1}$

d) $f(x) = \dfrac{x^4+5\log x}{x^4+1}$

Giải

a) $f(x) = 2x^3 + x^2 \log x < c|x^3|, \quad \forall x > 1$

b) $f(x) = O(x^3) + O(\log x)^4 = O(x^3)$

c) $f(x) = O(x^2)$

d) $f(x) = 0(1)$

Bài 5. Chứng minh rằng $x^2+4x+17$ là $O(x^3)$ nhưng x^3 không phải là $O(x^2+4x+17)$.

Giải

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x+17}{x^3}\right) = 0$$

$\to x^2+4x+17$ có bậc là $cx^3(x^2+4x+17) \in O(x^3)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+4x+17}\right) = \infty$$

$\to x^3$ cố bậc > $x^2+4x+17(x^3 \in \Omega(x^2+4x+17))$
$\to$ Đpcm.

Bài 6. Tương tự với x^3 là $O(x^4)$ nhưng x^4 không phải là $O(x^3)$.

Giải

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^4}\right)=0$$

$\to x^3$ có bậc là $cx^4(x^3) \in O(x^4)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^4}{x^3}\right)=\infty$$

$\to x^4$ có bậc $> x^3(x^4 \in \Omega(x^3))$
$\to$ Đpcm.

Bài 7. Tương tự $x\log x$ là $O(x^2)$ nhưng x^2 không phải là $O(x\log x)$.

Giải

1 so sánh khá quen thuộc: $x\log x \le x^2$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\log x}{x^2}\right)=0$$

$\to x\log x$ có bậc là $cx^2(x\log x \in O(x^2)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^2}{x\log x}\right)=\infty$$

$\to x^2$ có bậc $> x\log x(x^2 \in \Omega(x\log x))$
$\to$ Đpcm.

Bài 8. 2^n là $O(3^n)$ nhưng 3^n không phải là $O(2^n)$.

Giải

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}^n\right)=0$$

$\to 2^n$ có bậc $c.3^n$ $(2^n \in O(3^n))$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}^n\right)=\infty$$

$\to 3^n$ có bậc $> 2^n$ $(3^n \in \Omega(2^n))$
$\to$ đpcm.

Bài 10. Chứng minh rằng $f(x)$ là $O(x)$, thì $f(x)$ là $O(x^2)$.

Giải

Không chắc đề bài có sai không nhưng mà hình như không có hàm nào như vậy

Để chứng minh rằng $f(x)$ là $O(x)$ thì ta phải tìm được một hằng số c và một điểm bđầu tư mà cho phép ta viết $f(x) \leq c.x$ cho mọi x > bđầu tư.

Để chứng minh rằng $f(x)$ là $O(x^2)$ thì ta phải tìm được một hằng số c và một điểm bđầu tư mà cho phép ta viết $f(x) \leq c.x^2$ cho mọi x > bđầu tư.

Như vậy, để chứng minh rằng $f(x)$ là $O(x^2)$ khi đã biết rằng $f(x)$ là $O(x)$, ta cần phải tìm được một hằng số c và một điểm bđầu tư mà cho phép ta viết $f(x) \leq c.x^2$ cho mọi x > bđầu tư.

Nhưng không hẳn là có thể làm được điều đó. Ví dụ, hàm $f(x) = x^2 + x$ là $O(x)$ nhưng không phải là $O(x^2)$. Do đó, không thể chắc chắn rằng một hàm là $O(x)$ luôn có thể được chứng minh là $O(x^2)$

Bài 11. Giả sử $f(x), g(x)$ và $h(x)$ là các hàm số thỏa mãn $f(x)$ là $O(g(x))$ và $g(x)$ là $O(h(x))$. Chứng minh rằng $f(x)$ là $O(h(x))$.

Giải

Có bài tương tự trong slide các bạn tự tham khảo

Bài 12. Cho k là số tự nhiên. Chứng minh rằng $1^k + 2^k + ... + n^k$ là $O(n^{k+1})$

Giải

Thao khảo 1 cách của con AI GPT giải bằng cách quy nạp: Để chứng minh rằng $f(n)$ là $O(n^{k+1})$, ta cần phải tìm được một hằng số c và một điểm bđầu tư mà cho phép ta viết $f(n) \leq c.n^{k+1}$ cho mọi n > b đầu tư.

Để làm điều đó, ta có thể tìm một hằng số c = 1 và một điểm bđầu tư b = 1. Cho n > 1, ta có

$f(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k \leq 1^k + 2^k + \cdots + n^{k+1}$
$= (n^{k+1} + n^k + \cdots + 1)/(n-1) \leq (n^{k+1} + n^{k+1} + \cdots + n^{k+1})/(n-1)$
$= n^{k+1}.n/(n-1) \leq n^{k+1}$

Vậy $f(n) \leq 1.n^{k+1}$ cho mọi n > 1, do đó $f(n)$ là $O(n^{k+1})$.

Cách 2:

Như đã biết thì ta luôn có:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

$\Rightarrow f(x) = O(n^{k+1})$

Bài 13. Giả sử có 2 thuật toán khác nhau để giải quyết một vấn đề. Để giải quyết 1 vấn đề có kích thước là n, thì thuật toán đầu tiên sử dụng chính xác $n(\log n)$ toán tử và thuật toán thứ 2 là $n^{\frac{3}{2}}$. Đối với n thì thuật toán nào sử dụng ít toán tử hơn ?

Giải

$f(x) = n(\log n) = O(x^2)$
$g(x) = n^{\frac{3}{2}} = O(x^{\frac{3}{2}}$
Do vậy thuật toán $n^{\frac{3}{2}})$ sử dụng ít toán tử hơn.

Bài 14. Tương tự với $n^2 2^n$ và n!

Giải

Chú ý:

$2^n >> n!$

$f(x) = n^2 2^n = O(2^n)$
$g(x) = n! = O(n!)$
Do vậy thuật toán n! sử dụng ít toán tử hơn.

Bài 15. Đưa ra đánh giá O của mỗi hàm sau:

a) $(n^2+8)(n+1)$

b) $(n\log n+n^2)(n^3+2)$

c) $(n!+2^n)(n^3+\log(n^2+1))$

Giải

Bài này nhân ra rồi xét:

a) $O(n^3)$

b) $O(n^5)$

c) $O(n!)$

Bài 16. Đưa ra đánh giá O của mỗi hàm số sau. Đối với hàm số g trong đánh giá $f(x)$ của bạn là $O(g(x))$, sử dụng $g(x)$ với bậc nhỏ.

a) $(n^3+n^2\log n)(\log n+1)+(17\log n+19)(n^3+2)$

b) $(2^n+n^2)(n^3+3^n)$

c) $(n^n+n2^n+5^n)(n!+5^n)$

Giải

Ở bài này mình chỉ ghi kết quả các bạn khi trình bài phải ghi rõ quá trình

a) $O(n^4)$

b) $O(6^n)$

c) $O(n^n)$

Bài 17. Tương tự bài 16.

a) $n\log(n^2+1)+n^2\log n$

b) $(n\log n+1)^2+(\log n+1)(n^2+1)$

c) $n^{2^n}+n^{n^2}$

Giải

Đánh giá một chút:

a) $n^2\log n \le n\log(n^2+n^2) = 2n\log 2n \le 2n^2 \to O(n^2)$

b) $O(n^4)+O(n^3)=O(n^4)$

c) $$\begin{aligned}&n^2 < 2^n, \qquad n\to\infty\\ \to\ &n^{n^2} < n^{2n}, \qquad n\to\infty\\ \to\ &n^{n^2}+n^{2n} < 2n^{2^n}\\ \to\ &O(g(x)) = O(n^{2^n})\end{aligned}$$

Bài 18. Đối với mỗi hàm số ở bài 1, hãy xác định $\Omega(x)$ và $O(x)$-lớn

Giải

Bài 19. Đối với mỗi hàm số ở bài 2, hãy xác định $\Omega(x)$ và $O(x)$-lớn

Giải

Bài 20. Chứng minh các hàm số sau có cùng cỡ

a) $3x+7$ và x

b) $2x^2+x-7$ và x^2

c) $[x+1/2]$ và x

d) $\log(x^2+1)$ và $\log x$

e) $\log_{10} x$ và $\log x$

Giải

Bài này chỉ việc tính lim của 2 hàm từ định nghĩa $\Rightarrow$ đều bằng (x^n)

Bài 21. Đưa ra đánh giá O-lớn cho số lượng toán tử (một toán tử là một phép cộng hoặc một phép nhân) sử dụng trong phân đoạn thuật toán sau

```
t := 0
for i:= 1 to 3
    for j := to 4
        t := t + ij
```

Giải

Số phép toán là $3 \times 4 = 12 \Rightarrow$ Độ phức tạp của thuật toán là $O(1)$

Bài 22. Đưa ra đánh giá $O-$lớn cho số lượng phép cộng sử dụng trong phân đoạn của thuật toán sau

```
t :=0
for i := 1 to n
    for j := 1 to n
        t := t + i +j
```

Giải

$1 \leq i \leq n$

$1 \leq j \leq n$

$t = t + i + j, t = 0$

$\Rightarrow$ Số lượng phép toán là n.n = n^2.
$\Rightarrow$ Độ phức tạp của thuật toán là $O(n^2)$

Bài 23. Đưa ra đánh giá $O-$lớn cho số lượng các toán tử, mỗi toán tử là một phép so sánh hoặc phép nhân sử dụng trong phân đoạn sau của một thuật toán (lưu ý bỏ qua các so sánh để kiểm tra điều kiện trong các vòng lặp for xem a_i là số thực dương)

```
m := 0
for i:= 1 to n
    for j := i + 1 to n
        m := max(a_i a_j, m)
```

<u>Giải</u>

$1 \leq i \leq n$

$1 \leq j \leq n + 1$

$\Rightarrow$ Số lượng phép toán là n.(n+1)
$\Rightarrow$ Độ phức tạp của thuật toán là $O(n^2)$

Bài 24. . Đưa ra đánh giá O-lớn cho số lượng các toán tử, mỗi toán tử là một phép cộng hoặc phép nhân sử dụng trong phân đoạn sau của một thuật toán (bỏ qua các so sánh sử dụng để kiểm tra các điều kiện trong vòng lặp while)

```
i := 1
t := 0
while i ≤ n
    t := t + i
    t := 2i
```

<u>Giải</u>

$\Rightarrow$ Số lượng phép toán là 2n.(n+1)
$\Rightarrow$ Độ phức tạp của thuật toán là $O(n^2)$

5.1 lý thuyết

5.1.1 Cần học gì?

5.2 Bài tập

Phần này không thấy có ví dụ trên slide của thầy nên mình không thêm vào đây

6.1 Đề thi

6.1.1 Đề 20201

Chú ý:

==

1. n là chữ số cuối cùng của MSSV, m = (n mod 5)+3, ở đó mod là phép toán lấy phần dư
2. Sinh viên phải thay m vào để tính ở từng câu
3. Yêu cầu tất cả câu phải có giải thích rõ ràng
4. Đề thi gồm 2 trang

==

Câu 1. Cho R là tập số thực. Hỏi tập R và tập $(m, +\infty)$ có cùng lực lượng không? Giải thích?

Câu 2. Trên một đường tròn lấy 100m điểm(khoảng cách giữa chúng bằng nhau). Có bao nhiêu cách để kết nối **các cặp điểm** từ 100m điểm này để tạo thành 50m đonạ thẳng sao cho chúng không cắt nhau? Giải thích?

Câu 3. Để chuẩn bị cho cuộc Olympic Toán Toàn quốc, Viện Toán thành lập đoàn cán bộ hỗ trợ sinh viên thi từ m + 5 cán bộ của Viện. Hỏi có bao nhiêu cách để có thể chọn được 1 đoàn trưởng, 1 đoàn phó và 3 thành viên.

Câu 4. Có bao nhiêu số tự nhiên nằm trong khoảng $[100, 800]$ hoặc chia hết cho 3 hoặc chia hết cho 4

Câu 5. Cho đoạn chương trình sau:

```
produce matrix multiplication(A, B: matrix)
for i:= 1 to m
for j:=1 to n
c_{ij} := 0
for q := 1 to k
c_{ij} = c_{ij} + a_{iq}b_{qj}
return C ( C = [c_{ij}] is the product of A and B)
```

(a) Thuật toán trên thực hiện bao nhiêu phép cộng và bao nhiêu phép nhân? Giải thích?

(b) Hãy cho biết độ phức tạp của thuật toán trên.

Câu 6. Cho $k \in N, k \leq 1$ và $S = \{1, 2, 3, ..., mk\}$. Khẳng định sau đây là đúng hay sai " Luôn chọn được 2 số từ k + 1 số của tập S sao cho hiệu của chúng tối đa m - 1". Giải thích.

Câu 7. **Sử dụng công thức hàm sinh** để tìm công thức dưới dạng hiện cho dãy số được cho bởi công thức đệ quy sau: $a_{n+2} = (2m+1)a_{n+1} - m(m+1)a_{n-2}$ ở đó $a_0 = 1, a_1 = 1$

Câu 8. Có bao nhiêu dãy nhị phân có độ dài m + 3 mà bắt đầu bởi chữ số 1 và không có 2 chữ số 0 liên tiếp đứng cạnh nhau?

Câu 9. Nhân viên bán hàng tại công ty máy tính xếp máy tính lên giá. Hỏi có bao nhiêu cách để xếp m + 5 máy Macbook và m + 3 máy Thinkpad lên giá sao cho 2 máy Thinkpad không xếp cạnh nhau(lưu ý các máy đều khác nhau không hoàn theo từng số Serie).

Câu 10. Sử dụng thuật toán nhánh cận để tính.
$f(x) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + mx_4 \to max$
$6x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 6x_4 \leq 20, x_i \in (0;1), i = 1, ..., 4$

=======HẾT=======

6.1.2 Đề thi thử 20221

==

Thời gian làm bài: 60p

==

Câu 1. Xét 1 quan hệ trên tập các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $((a,b),(c,d)) \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a+d = b+c$. Hỏi $\mathbb{R}$ là quan hệ tương đương không ? Giải thích?

Câu 2. Tìm tập hợp tất cả số nguyên dương nhỏ hơn 10000 sao cho chia hết cho 5 và chia hết cho 4.

Câu 3. Có bao nhiêu cách chia 50 hộp vào 6 cái tủ sao cho mỗi tủ chứa ít nhất 2 cái hộp.

Câu 4. Cho dãy số $a_{n+1} = a_n + 3a_{n-1} + 2^{n+1}, a_0 = 0, a_1 = 1$. Tìm dãy số trên.

Câu 5. Đưa ra đánh giá O của hàm $f(n) = (n^4 + 2n\log_2 h)(\log_2(n^2+1)+n) + (5n^2 + \log_2 n)(n^4 + 1)$

Câu 6. Có bao nhiêu cách chọn 1 giải nhất, 1 giải nhì, 2 bà từ 200 sinh viên tham gia ký thi Olympci tại Đại Học Bách Khoa Hà Nội.

Câu 7. Trên mạng facebook. CMR trong 10 tài khoản bất kỳ luôn tìm được ít nhất 4 tài khoản sao cho đôi một là bạn bè với nhau hoặc 3 tài khoản sao cho đôi một không là bạn bè.

Câu 8. Vẽ cây tìm kiếm quay lui để tìm cách đặt 6 quân hậu trên bàn cờ để không có 2 quân hậu bất kỳ ăn được nhau. Biết rằng có 1 con hậu ở hàng 2 cột 1.

Câu 9. Cho tập $X = \{1,2,3,4\}$ có bao nhiêu ánh xạ $f : X \longrightarrow X$.

Câu 10. Xác định độ phức tạp của đoạn mã giả sau:

```
for i = 0 to n - 3:
   for j = 1 to i+3:
      if A[i] > A[j] then swap(A[i], A[j])
      // swap(A[i], A[j]) la O(1)
```

=======HẾT=======

Câu 1. +) Xét $(x,y) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$
Ta có: $((x,y);(x,y) \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ có tính chất phản xạ (1).

+) Xét với $\forall(x_1, y_1) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$
$(x_2, y_2) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$
Khi $(x_1, y_1); (x_2, y_2) \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 + y_2 = x_2 + y_1$
$\Rightarrow (x_2, y_2), (x_1, y_1)\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ có tính chất đối xứng(2)

+) Xét $\begin{cases} ((x_1, y_1); (x_2, y_2) \in \mathbb{R} \\ ((x_2, y_2); (x_3, y_3) \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + y_2 = x_2 + y_1 \\ x_2 + y_3 = x_3 + y_2 \end{cases}$

$\to\ x_1 + y_2 + x_2 + y_3 = x_2 + y_1 + x_3 + y_2$
$\to\ x_1 + y_3 = y_1 + x_3$
$\to\ (x_1, y_1)(x_3, y_3)$
$\to\ \mathbb{R}$ có tính chất bắc cầu (3).

$\Rightarrow (1)(2)(3)\mathbb{R}$ là quan hệ tương đương

Câu 2. A: tập các số chia hết cho 5
B: tập các số chia hết cho 4
...
$|A \cap B| = 3999$

Câu 3. Số cách chia là số nghiệm nguyên của phương trình:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 50$$

Với $x_1 \leq 2, x_2 \leq 2, x_3 \leq 2, x_4 \leq 2, x_5 \leq 2, x_6 \leq 2$. Đặt $y_i = x_i - 2 \leq 0$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 38$$

$\Rightarrow$ Số cách chọn là $C^{38}_{38+6-1} = C^{38}_{43}$.

Câu 4. $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3a_{n-1} + 2.2^n \\ a_0 = 0, a_1 = 1. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n + 2^{n+2} \\ a_0 = 0, a_1 = 1 \end{cases}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$
$$= a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} (a_{n-1} + 3a_{n-2} + 2^n) x^n$$
$$= x + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1} x^n + 3 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} 2^n x^n$$
$$f(x) = x + x \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n-1} + 3x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n-2} + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} 2^n x^n$$
$$\Rightarrow f(x) = x + f(x)(x + 3x^2) + \frac{2}{1-2x}$$
$$\Rightarrow f(x)(-3x^2 - x + 1) = x + \frac{2}{1-2x}$$
$$\Rightarrow f(x) = \frac{-2x^2 + x + 2}{(-3x^2 - x + 1)(1-2x)}$$

Bài này có thể giải tiếp nhưng nghiệm khá lẻ lúc chữa bài thầy cx bảo cho đề nhưng chưa thử lại kết quả.

Câu 5. $f(n) = (n^4 + 2n\log_2 h)(\log_2(n^2+1) + n) + (5n^2 + \log_2 n)(n^4+1)$
$n^4 \log_2(n^2+1) + n^5 + 2n\log_2 n \log_2(n^2+1) \qquad = O(n^6)$

Câu 6. Chọn:

1 giải nhất C_{200}^1
1 giải nhì C_{199}^1
2 giải ba C_{197}^2

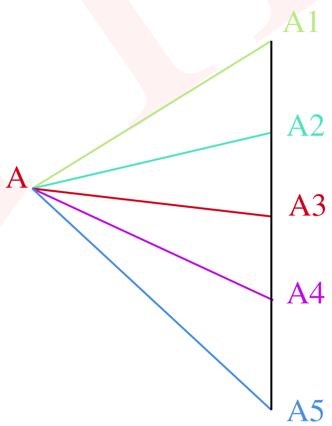
Theo quy tắc nhân $\to$ Có $C_{200}^1 C_{199}^1 C_{197}^2$

Câu 7. Giả sử 10 tài khoản là 10 điểm, các đường thẳng nối 2 điểm bất kỳ nếu là màu đỏ thì là bạn, màu xanh thì không là bạn.

Chọn điểm bất kỳ. Nối điểm này với 9 điểm còn lại $\Rightarrow$ có 9 đường thẳng. Vì chỉ có 2 màu nên theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất 5 đường được tô màu xanh. Giả sử các đường đó là A_i với i = $\overline{1,5}$.

- Nếu ít nhất 1 trong các đoạn trên được tô màu xanh thì 3 người đôi một không kết bạn.
- Nếu tất cả các đường còn lại tô màu đỏ thì $\exists$ 4 người đôi một kết bạn

$\to$ đpcm.
Minh họa:



Câu 8. - Đặt các ô hàng ngang lần lượt là A, B, C, D, E, F
- Đặt các ô hàng dọc lần lượt là 1, 2, 3, 4, 5, 6. - Áp dụng thuật toán quay lui vẽ các trường hợp xảy ra (Có thể tham khảo giáo trình trang 98.)

$\to \{A_1, B_4, C_6, D_1, E_3, F_5\}$.

Câu 9. Kết quả là 4^4.

Câu 10. $-1 \le i \le n-3$
$1 \le j \le n$
Số lượng phép toán $n(n-3).1.O(1)$
$\Rightarrow$ Độ phức tạp $O(n^2)$.

6.1.3 Đề thi 20221

==========***==========

ĐỀ 1

Họ và tên: Mã sinh viên:

Câu 1. Trên tập $A = \{-1, 0, 2, 3, 4\}$ xét quan hệ hai ngôi như sau $xRy = x^2 - 3x = y^{-}3y$

a) Liệt kê các phần tử của quan hệ R trên tập A.

b) Xây dựng một tập X có vô hạn phần tử để R là một quan hệ trên X. Giải thích.

Câu 2. Xét tập hợp $S = \{0, 1, 2, 3, 5, 8, 9\}$. Tìm các số có 4 chữ số khác nhau hoặc chia hết cho 2 hoặc chia hết cho 5.

Câu 3. Hỏi có bao nhiêu cách chia 18 hộp bánh cho 3 học sinh sao cho mỗi bạn nhận được ít nhất 3 hộp bánh.

Câu 4. Sử dụng phương pháp hàm sinh để tìm công thức dưới dạng hiện cho dãy cho bởi công thức đệ uy sau: $a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$ với $a_0 = 1, a_1 = 1$

Câu 5. Cho các số nguyên dương m_1, m_2 và n thỏa mãn $n < m_1, m_2$.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m_1}{k} \binom{m_2}{n-k} = \binom{m_1 + m_2}{n}$$

a) Chỉ ra một ví dụ cụ thể với các số m_1, m_2, n để khẳng định đẳng thức đúng.

b) Sử dụng kiến thức phép đếm và tổ hợp chứng minh đẳng thức trên.

Câu 6. Cho $m \geq 4$ số nguyên $a_1, a_2, a_3, ..., a_m$. Chứng minh rằng luôn tồn tại số nguyên k, l thỏa mãn $0 \leq k < l \leq m$ sao cho $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_i$ chia hết cho m. Đưa ra ví dụ cụ thể?

Câu 7. Có bao nhiêu cách xếp 12 sinh viên nam và 4 sinh viên nữ thành một hàng ngang sao cho không có hai sinh viên nữ đứng cạnh nhau?

Câu 8. Giải bài toán cái túi bằng thuật toán nhánh cận
$f(x) = 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 \to max$
$3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 6x_4 \leq 15, x_i \in \{0, 1\}, i = 1...4$

==========HẾT===========

7.1 1

7.2 2

8.1 1

8.2 2

9.1 1

9.2 2