TOÁN
RỜI RẠC

2022

Giải bài tập đề cương

Vũ Văn Huy
20216931
MI2-K66

Contents

Lời mở đầu

Mở đầu

Toán rời rạc bộ môn vừa chợp mắt cái là không biết thầy giảng đến đâu, giảng viên nói mãi vẫn không hiểu ☺, là sự kết hợp giữa rất nhiều kiến thức giải tích đại số thêm combo tin học thuật toán, lý thuyết đồ thị(nghe thầy bảo là môn này có năm tạch 90 %) . Nên rất nhiều bạn sẽ rất rén với môn học này. Sau khi thi xong giữa kì vì điểm quá thấp và cũng vì đam mê hình học nên mình đã tự xoạn ra bộ tài liệu này để ôn lại kiến thức.

Trên lớp mình không ghi chép đầy đủ chỉ nhớ rồi về làm lại khó tránh những lỗi trình bày. Bài làm ko bao gồm lý thuyết do lý thuyết viết khá đầy đủ trong giáo trình của các thầy cô, về phần lý thuyết đồ thị chỉ bao gồm phần chứng minh một số định lý và bài tập tổng hợp.☞☜

Đây là phiên bản đầu tiên và bài giải do cá nhân mình trực tiếp biên xoạn nên không thể tránh khỏi những sai xót về lỗi đánh máy, trình bày. Mọi người đọc nếu xin đừng cười chê.

Mọi đóng góp xin được ghi nhận qua facebook cá nhân Vũ Huy
hoặc qua gmail Huyv80313@gmail.com
Thân ....

1 Lý thuyết đồ thị

1.1 Lý thuyết

1.1.1 Cần học gì?

Phần này không thấy có ví dụ trên slide của thầy nên mình không thêm vào đây
Phần này mình chỉ tổng hợp những phương pháp và các cách chứng minh một số định lý, bài tập đơn giản thầy chữa trên lớp để các bạn rèn luyện tư duy giải các bài toán liên quan đến lý thuyết đồ thị.

1.2 Bài tập

Vẽ 1 hình bằng 1 nét

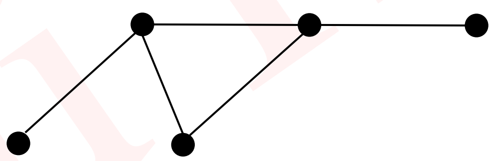
Thì cái hình đó $\exists$ tất cả các điểm nút là giao điểm của các đường thẳng là số chẵn

Định lý: $G = (V, E)$ là đồ thị vô hướng với m cạnh khi đó:

$$\boxed{2m = \lim_{v \in V} deg(V)}$$

Chứng minh: Mỗi cạnh $e = (u, v)$ được tính 1 lần trong $deg(u)$ và 1 lần trong $deg(v)$
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Hệ quả}}$ Trong đồ thị vô hướng, số đỉnh bậc lẻ là số đỉnh chẵn.

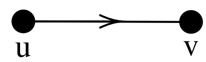
Ví dụ:



$\Rightarrow$ Số đỉnh bậc lẻ: 4.
$G(V, E)$ là đồ thị có hướng

$$\boxed{\lim_{v \in V} deg^{+}(V) = \lim_{v \in V} deg^{-}(V) = |E|}$$

Chứng minh:



Có cung = vào
1 bán bậc ra
1 bán bậc vào

$G(V, E)$ được gọi là liên thông nếu 2 đỉnh bất kỳ luôn tìm được đường đi.
$\Rightarrow$ 2 mạng máy tính bất kỳ có thể trao đổi thông tin với nhau $\Leftrightarrow$ Đồ thị tương ứng với mạng máy tính này là đồ thị liên thông.
Ta gọi đồ thị con của $G(V, E)$ là $H(V, E)$ nếu $W \subseteq V$ và $F \subseteq E$
VD: Cho G là đồ thị vô hướng $n \geq 2$ đỉnh. Biết:

$$\delta(G) = min\{deg(v) : v \in V \geq \frac{n-1}{2}\}$$

Chứng minh rằng G liên thông.

<u>Giải</u>

Giả sử G không liên thông, khi đó:

$$\delta(G) \geq \frac{n-1}{2}$$

$\Rightarrow$ mỗi thành phần liên thông chứa ít ra

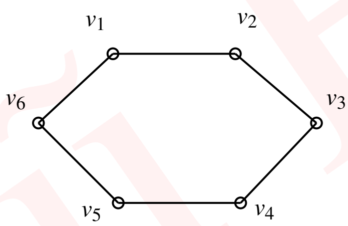
$$\frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2} \text{ đỉnh.}$$

$\Rightarrow$ đồ thị có ít nhất n+1 đỉnh
Chứng minh định lý 5.2.4: $2m = \lim\limits_{degv \vdots 2} deg(v) + \lim\limits_{degu \not\vdots 2} deg(u) = (1) + (2)$
(1), (2) đều theo công thức trên

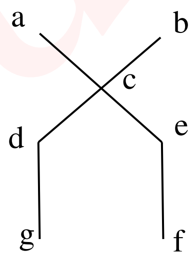
K - Liên thông(k - connected)

G là đồ thị k liên thông nếu $u, v \in V$ và $\exists$ ít nhất k đường rời rạc nhau, các đỉnh bên chỉ chung nhau 2 điểm đầu mút

VD:

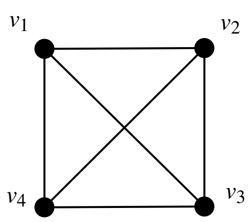


2 - liên thông



1 - liên thông

$k \geq l$, k - liên thông $\rightarrow$ l - liên thông.
VD: 3 liên thông $\rightarrow$ chắc chắn 3 liên thông cạnh

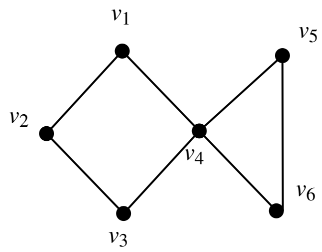


v_1v_2	v_1v_3
$v_1v_4v_2$	$v_1v_2v_3$
$v_1v_4v_2$	$v_1v_4v_3$

$v_4v_3v_2$(không phải do trùng v_4)

Đồ thị k liên thông cạnh (K - edge connected)

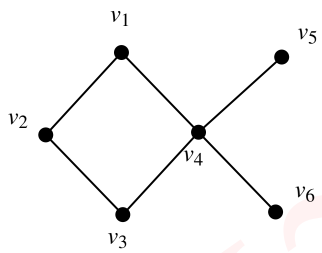
G là k liên thông cạnh nếu giữa 2 đỉnh $u, v \exists$ ít nhất k đường rời rạc nhau về cạnh(có thể chung đỉnh).



2 - liên thông cạnh không là 2 liên thông
(Vì mọi đường qua v_5 đều phải qua v_4

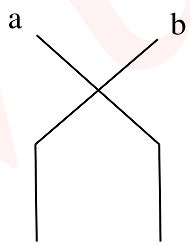
$v_1v_4v_5$
$v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_5$

$\Rightarrow$ không được $\equiv v_4v_5$



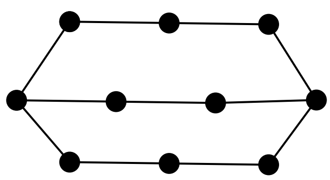
1 - liên thông cạnh
(Vì từ $v_1 \to v_2$ không chỉ được 2 đường rời rạc nhau về cạnh.)

Chú ý: áp dụng với 2 đỉnh bất kỳ.



1 - liên thông cạnh vì a $\to$ b
không chỉ được 2 đường rời rạc
nhau về cạnh

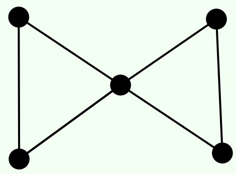
rời rạc nhau về đỉnh $\to$ rời rạc nhau về cạnh



Nhận xét: G là k liên thông $\to$ G là k liên thông cạnh, không có chiều ngược lại.
Phép xóa cạnh và xóa đỉnh thì đơn giản nên mình sẽ không liệt kê ở đây.

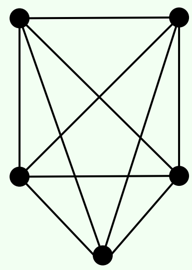
Số liên thông đỉnh

- $K(G)$ (kappa G).
- Là số lượng đỉnh nhỏ nhất cần phải xóa khỏi G để G không còn liên thông.
- Quy ước: Nếu G có 1 đỉnh duy nhất thị coi là không liên thông.



G

$\Rightarrow K(G) = 1$

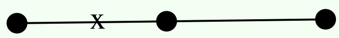


G

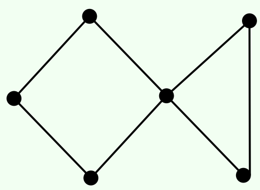
$\Rightarrow K(G) = 4$

Số liên thông cạnh (edge connectivity)

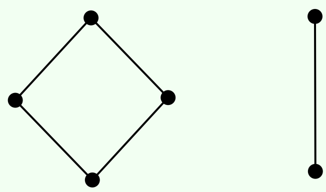
Là số lượng cạnh nhỏ nhất của tập S mà $G - S$ mất tính liên thông. $K'(G)$



$K'(G) = 1$



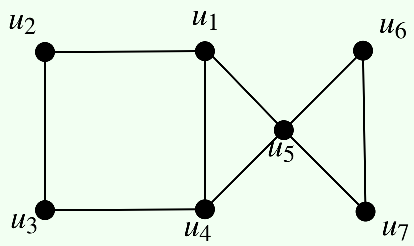
$$K'(G) \geqslant 2 \\ = 2$$



- Lưu ý: K - Liên thông cạnh $\Rightarrow K'(G) \geq k$

Khoảng cách và một số lưu ý:

- Khoảng cách giữa 2 đỉnh trong G, ký hiệu là $d(u,v)$ - distance.
- Là số lượng cạnh trong đường đi kết nối giữa chúng.



$u_6u_7u_5u_4u_3$

$u_6u_7u_5u_1u_2u_3$

$u_6u_7....$

$u_6u_5u_4u_3$: Khoảng cách: $d(u_6,u_3) = 3$

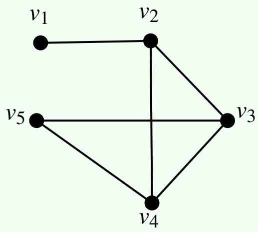
- Khoảng cách d: $V \times V \to Z^+ \cup \{0\}$. Do 0 là 1 trường hợp đặc biệt.

1. $d(u,v) = 0 \Rightarrow u \equiv v$
2. $d(u,v) = d(v,u)$
3. $d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)$
4. $d(u,v) = \infty$ (trong số 1 số thuật toán lại quy ước là -1).

Độ lệch tâm của đỉnh v

$$e(u) = \max_{v \in V} d(u,v)$$

- Là khoảng cách lớn nhất giữa u và các đỉnh còn lại $(V \setminus \{u\})$



$$\begin{aligned} e(v_1) &= 3 \\ e(v_2) &= 2 \\ e(v_3) &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} e(v_4) &= 2 \\ e(v_5) &= 3 \end{aligned}$$

- Đường kính: $diam(G) = max\{e(v)\ \forall v \in V(G)\}$

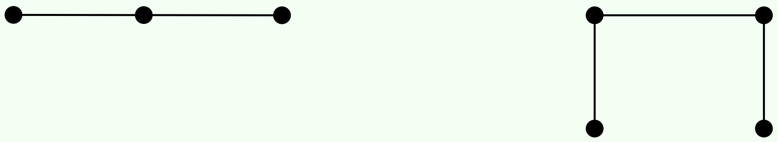
$$H_1: \quad diam(H_1) = 3$$
$$H_2: \quad diam(H_2) = 2$$

- Bán kính: $rad(G) = min\{e(v) = v \in V\}$

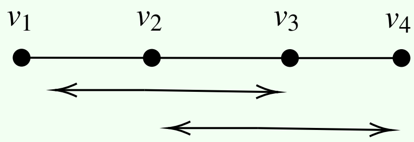
$$H_1: \quad rad(H_1) = 2$$
$$H_2: \quad rad(H_2) = 1$$

Một số đồ thị đặc biệt

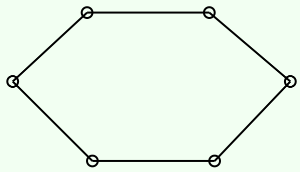
1. Đường: P_n, n là số đỉnh. $|V(P_n)| = n$
   $|E(P_n)| = n - 1$

   $diam(P_n) = n - 1$
   $rad(P_n) = 2$

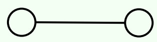
2. Chu trình: $C_n,\ n \geq 3$
   $|V(C_n) = n|$
   $|E(C_n) = n|$

   C_6

   $e(v_i) = \binom{n}{2}$

3. Đồ thị đầy đủ: K_n, n là số đỉnh.
   n = 1, k_1 ●
   $n = 2$, k_2

   $|V(K_n)| = n$
   $|E(K_n)| = \binom{n}{2}$
   K_n xóa 1 đỉnh $\rightarrow K_{n-1}$

2.1 1

2.1.1 2

2.2 2

3

3.1 1