

一种新的级联 FFT 算法

张大炜

(中国电子进出口总公司, 北京 100037)

摘 要: 提出针对交叉项补偿的新级联 FFT 算法。通过交叉项补偿处理及级联 FFT 运算顺序的调整, 解决了传统算法数据量大的问题, 以及栅瓣效应的出现, 同时降低了在进行大数据量 FFT 运算时, 单次处理负荷过大的问题。该算法在雷达、声呐并行信号处理领域具有较好的应用前景, 理论推导和仿真验证的结果都表明了该算法的可行性和有效性。

关键词: 级联 FFT; 交叉项抑制; 能量泄露

中图分类号: TN957 **文献标识码:** A

文章编号: 1672-7619(2016)05-0060-04 **doi:** 10.3404/j.issn.1672-7619.2016.05.013

A new inverse order cascade FFT algorithm

ZHANG Da-wei

(China National Electronics Import and Export Corporation, Beijing 100037, China)

Abstract: A new Inverse Order Cascade FFT (IOCFFT) algorithm is provided in this paper based on the analysis of the principle and shortage to the traditional Cascade FFT algorithm. The order of the traditional Cascade FFT algorithm is changed to reduce the processing load and energy leakage phenomenon. The inverse order of the traditional Cascade FFT is adopted in this new algorithm and intersection factor compensation is done between the two FFT stages. The phenomenon of grating lobes and high processing load is avoided in this new method. The validity and feasibility of the new algorithm is tested by deduction of the formulation and simulation of the theory.

Key words: cascade FFT; inverse order cascade FFT; intersection factor

0 引 言

快速傅里叶变换 (FFT) 出现以来, 人们提出了多种以 FFT 算法为基础的数字信号处理方法。其中, 级联 FFT、扫频窄带分析法、复调制 Zoom FFT 法、直接抽取法等都能够进行频率细化的 FFT 算法^[1]。在舰船电子信息系统中, FFT 作为基本的信号处理算法, 在雷达、声呐、导航、电子对抗等电子装备中大量使用, 是基本的时频信号处理工具。FFT 运算作为主要的信号处理工具通常占据了大量的信号处理硬件资源。级联 FFT 通过将大序列数据分成两级短序列数据进行 FFT 处理的方式大大减轻了硬件上实现大序列 FFT 的压力。但是, 分段处理的方法带来了能量泄漏和频率镜像现象的出现。文献[2]研究了 FFT 和级联 FFT 计算结果之间的差异, 并对正弦信号的分析结果给出了一种补偿方法, 但在采用级联 FFT 对非正弦的

一般信号进行处理时, 该文献描述的补偿方法受到一定的限制。文献[3]提出了一种改进的级联 FFT 算法, 通过对数据的加窗和对输出结果进行相邻段之间的平均和修正来减小误差带来的影响, 但仍然没有能够完全避免能量泄漏和处理数据量增大的现象。

1 基本级联 FFT 的算法原理

级联 FFT 算法的理论基础是通过将数据分段, 通过两级长度较短的 FFT 运算来实现一个序列全长度的 FFT 结果, 使得频谱分辨率, 从而减少硬件资源上的消耗。

$M \times N$ 点序列信号 $x(n + mN)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$; $m = 0, 1, 2, \dots, M-1$, 利用级联 FFT 进行处理可以表示为 2 级 FFT 串联的变形式。通过矩阵化, 一维序列可以表示为二维 $M \times N$ 矩阵的形式, 对于 N 点表示的数

收稿日期: 2015-05-29; 修回日期: 2015-06-08

作者简介: 张大炜(1981-), 男, 博士, 高级工程师, 研究方向为信息系统工程及信息系统集成。

据进行 FFT 运算可以表示为:

$$X_m(q) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n+mN)e^{-j2\pi nq/N} = \text{FFT}_n[x(n+mN)]. \quad (1)$$

对第一次 FFT 之后, 相同频率点上但不同段上的 M 点数据做 FFT 分析, 可以表示为:

$$X'(p+qM) = \text{FFT}_m\{\text{FFT}_n[x(n+mN)]\} = \sum_{m=0}^{M-1} e^{-j2\pi mp/M} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(n+mN)e^{-j2\pi nq/N} \right), \quad (2)$$

其中 $q = 0, 1, 2, \dots, N-1$; $p = 0, 1, 2, \dots, M-1$, 这样就得到了基本级联 FFT 算法的结果。

对一个长度为 $M \times N$ 的时间序列信号 $x(n+mN)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$; $m = 0, 1, 2, \dots, M-1$, 进行离散傅里叶变换之后得到的频谱为:

$$X(p+qM) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} x(n+mN)e^{-j2\pi(p+qM)(n+mN)/MN}, \quad (3)$$

其中 $q = 0, 1, 2, \dots, N-1$; $p = 0, 1, 2, \dots, M-1$ 考虑因子 $e^{-j2\pi np/MN} = 1$, 则式 (3) 可用两级 FFT 形式表示为:

$$X_1(p+qM) = \sum_{m=0}^{M-1} e^{-j2\pi mp/M} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(n+mN)e^{-j2\pi nq/N} \right) = \text{FFT}_m\{\text{FFT}_n[x(n+mN)]\}. \quad (4)$$

可以看到, 式 (4) 与式 (2) 的表现形式相同。这就表明, 级联 FFT 算法是在 $\exp(-j2\pi np/MN) = 1$ 的情况下, 全长度序列的 FFT 变换结果。也就是说, 通过粗频谱和细频谱两步分析, 得到了全序列的全频谱分析谱线, 也即, 在因子 $\exp(-j2\pi np/MN) = 1$ 情况下通过两级串联的 FFT 序列 $x(n+mN)$ 的频谱。

2 基于交叉项补偿的级联 FFT 算法

2.1 级联 FFT 算法的局限性

在上面的数学运算过程中, 假定交叉项因子等于 1, 而实际上该因子是一个变量。根据推导, 交叉项因子式以下面的形式存在并耦合到两级运算当中, 即

$$e^{-j2\pi n(q+p/M)/N}. \quad (5)$$

该交叉项因子两级变量 n 和 p 的函数。在 $p \neq 0$ 的情况下, 该交叉项因子的结果不等于 1。如果不对第一段 FFT 运算的结果进行修正, 将会出现误差, 并带来相邻频点上能量的扩散。通过分析和仿真计算, 在 $p/M \approx 1/2$ 附近时, 将产生最大误差, 能量的泄漏大约在 50% 左右。

为解决粗频谱分析时的能量泄漏, 往往采用对第一次分段的数据进行重叠, 并通过加窗降旁瓣和对最终的输出结果进行幅度矫正才能达到较满意的效果^[1-2]。但是, 为达到较处理好效果的 50% 以上的重叠比将会大大增加处理的运算量以及复杂程度。

2.2 基于交叉项补偿的级联 FFT 算法

根据分析发现, 对于误差项的补偿, 将会大大影响处理的结果。考虑到 FFT 预算的线性特性, 矩阵化后数据的两维傅里叶变化的顺序并不影响最终的运算结果。因此, 在将两维变换顺序调整之后, 可以得到:

$$X_1(p+qM) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi nq/N} \sum_{m=0}^{M-1} x(n+mN)e^{-j2\pi mp/M} = \text{FFT}_n\{\text{FFT}_m[x(n+mN)]\}. \quad (6)$$

这时再考虑 $\exp(-j2\pi np/MN)$ 的影响可以发现, 在进行第 1 次计算时, 此因子并不影响第 1 次得到的结果, 在第 2 次运算前, 只需要在关于 p 的频率点进行误差补偿就可以消除影响:

$$\begin{aligned} X(p+qM) &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} x(n+mN)e^{-j2\pi n(q+p/M)/N} \times e^{-j2\pi mp/M} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi n(q+p/M)/N} \sum_{m=0}^{M-1} x(n+mN)e^{-j2\pi mp/M} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi nq/N} e^{-j2\pi np/MN} X(p, n). \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $X(p, n)$ 为沿 m 方向进行 FFT 计算的结果。

如果从 z 变换的角度来理解 FFT, FFT 实际上是从单位圆零相角开始, 角度等分之后得到的 z 变换的数值。根据式 (7) 的结果, 第 2 次变换时的 FFT 核函数变为 $\exp[-j2\pi n(q+p/M)N]$, 也就是说第 2 次 FFT 变换取样点的起始角频率不同, 是增加了一个分数分量的 FFT 变换。这样, 如果交叉项带来的分数分量能够得到补偿, 2 次 FFT 运算的结果就与全长度序列的 FFT 结果相同。图 1 给出了新算法的实现步骤图。图 2 给出了 FFT 相角受交叉项影响的示意图。

可以看出, 改进算法采用了与传统算法不同的矩阵运算顺序, 同时增加了交叉项抑制和相位补偿运算。新算法不需要对分段后的数据取重叠, 只是通过复乘的操作就实现了交叉项抑制和补偿, 运算量相比传统方法将会大大减小, 同时还能得到较好的处理结果。

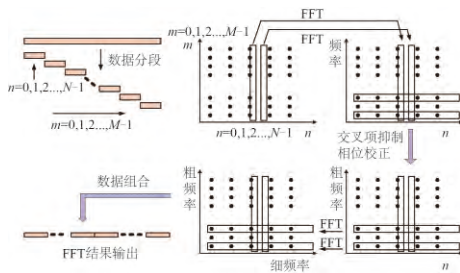


图 1 基于交叉项补偿的 FFT 算法示意图

Fig. 1 Diagram of FFT algorithm based on intersection factor compensation

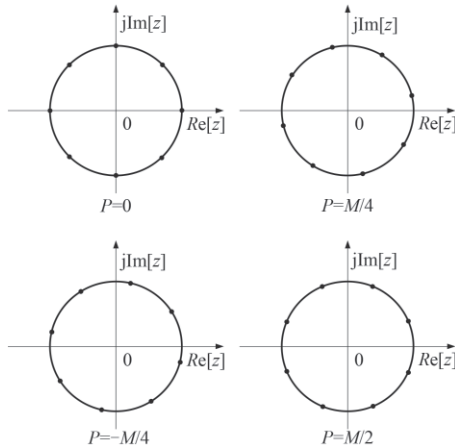


图 2 交叉项影响相角示意图

Fig. 2 Diagram of influence of intersection factor to the phase angle

3 算法仿真及性能分析

根据上文的分析,给出基于交叉项补偿的级联 FFT 算法的实现流程如图 2 所示。



图 3 基于交叉项补偿的级联 FFT 处理流程图

Fig. 3 Flow chart of Cascade FFT algorithm based on intersection factor compensation

根据逆序级联 FFT 算法的步骤,下面给出对一个线性调频信号进行频谱分析的实例,并对实现时的运算量大小进行分析。仿真所用的线性调频信号的带宽为 80 Hz,信号持续时间为 5 s,采样频率为 200 Hz,

表 1 两种算法的运算量比较

Tab. 1 Calculation amount comparison of two algorithm

基本级联 FFT 算法	基本级联 FFT 算法 (50% 重叠比)	基于交叉项补偿的级联 FFT 算法	全长度 FFT
复乘 $M \times N \times (\log_2 NM) / 2$	$M \times N \times (1 + \log_2 NM)$	$M \times N \times (\log_2 NM + 2) / 2$	$M \times N \times (\log_2 NM) / 2$
复加 $M \times N \times (\log_2 NM)$	$2M \times N \times (1 + \log_2 NM)$	$M \times N \times (\log_2 NM)$	$M \times N \times (\log_2 NM)$

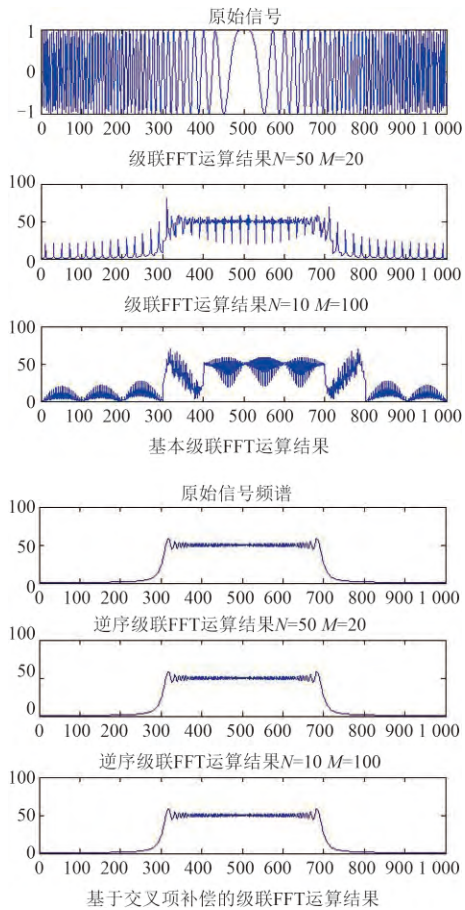


图 4 新算法进行后的频谱分析对比

Fig. 4 Spectrum comparison of new algorithm

采用的分段方式为 $N = 50, M = 20$ 和 $N = 10, M = 100$ 。

表 1 给出了基本算法在不取重叠、50% 重叠的计算结果和采用基于交叉项补偿的级联 FFT 算法进行运算时的运算量对比。

从分析结果可看出,通过增加一次复乘操作来进行交叉项补偿,实现了 2 级 FFT 运算之间分数分量的影响,并得到与一次全长度序列 FFT 完全相同的运算结果。相对传统算法采用大重叠比实现栅瓣抑制的方法,新算法每次进行 FFT 运算的长度可大大缩短,同时以较小的复乘运算换来了实现长序列 FFT 频谱分析的问题,这对于雷达、声呐、电子对抗等大量需要大数据量 FFT 运算的领域很有实际意义。

4 结 语

本文在分析传统的级联 FFT 算法的基础上, 提出一种新的基于交叉项补偿的级联 FFT 算法。该算法首先对输入时间序列的数据进行抽样, 然后对抽样后数组内的数据进行 FFT 运算处理, 然后进行交叉项的补偿, 再对 FFT 之后不同数组间相同位置上的数据进行第 2 次 FFT 处理, 从而达到一次 FFT 运算能够得到的效果。该算法能够有效避免栅瓣效应和能量泄漏现象给级联 FFT 运算带来的影响, 从而实现用短序列 FFT 运算来进行长序列 FFT 运算的结果。同传统的级联 FFT 算法相比, 改进的算法能够避免了原有算法的不足, 同时在运算量上也避免了由于不同数据段之间重叠比过高所带来的运算量的增加。

参考文献:

- [1] PERRY R P, KAISER H W. Digital step transform approach to airborne radar processing[C]//Proceedings of IEEE National Aerospace and Electronics Conference. New York: IEEE, 1973: 280–287.
- [2] YIP P C Y. Some aspects of the Zoom transform[J]. IEEE Transactions on Computers, 1976, C-25(3): 287–296.

- [3] FJELL P O, LUNDE E B. A modified cascade fast Fourier transform in a spectrum analysing system[C]//Proceedings of IEEE international conference on ICASSP '77 acoustics, speech, and signal processing. Hartford, CT, USA: IEEE, 1977, (2): 873–876.
- [4] HOYER E A, STORK R F. The Zoom FFT using complex modulation[C]//Proceedings of IEEE international conference on ICASSP '77 acoustics, speech, and signal processing. Hartford, CT, USA: IEEE, 1977, (2): 78–81.
- [5] WU K H, VANT M R. Extensions to the step transform SAR processing technique[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1985, AES-21(3): 338–344.
- [6] MCGOEY-SMITH A D, VANT M R. Modification of the SAR Step Transform algorithm[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1992, 28(3): 666–674.
- [7] MOREIRA A. Real-time Synthetic aperture radar (SAR) processing with a new subaperture approach[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 1992, 30(4): 714–722.
- [8] SUN X B, YEO T S, ZHANG C B, et al. Time-varying step-transform algorithm for high squint SAR imaging[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 1999, 37(6): 2668–2677.
- [9] YEO T S, TAN N L, ZHANG C B, et al. A new subaperture approach to high squint SAR processing[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2001, 39(5): 954–968.

(上接第59页)

2) 对比不同工况组合下对系泊线拉力影响可知: 浪、流、风为 0° , 45° , 30° 以及 180° , 135° , 150° 时半潜式平台升沉幅值最大, 最大幅值为 2.733 m, 同时系泊线产生的拉力最大, 为最危险工况, 但安全系数均大于 DNV 规范要求的 1.50, 即所设计的系泊线符合安全规范的要求。

参考文献:

- [1] 王俊荣, 谢彬. 半潜式平台水动力性能及运动响应研究综述[J]. 中国造船, 2009, 50(S): 255–261.
WANG Jun-rong, XIE Bin. Review of hydrodynamic properties and global motion prediction of semi-submersible[J]. Shipbuilding of China, 2009, 50(S): 255–261.
- [2] YANG Li-jun, XIAO Long-fei, YANG Jian-min. Review on the study of hydrodynamics of semi-submersible platforms[J]. China Offshore Platform, 2009, 24(1): 1–9.
- [3] 孟昭瑛, 任贵永. 半潜式平台工作原理和结构特点分析[J]. 中国海洋平台, 1995, 10(1): 35–37.
MENG Zhao-ying, REN Gui-yong. Working principle and

structural characteristic analysis of semi-submersible platforms[J]. China Offshore Platform, 1995, 10(1): 35–37.

- [4] 陈鹏. 深水半潜式平台系泊系统耦合动力响应研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2010.
- [5] 张威, 冯玮, 谢彬. 深水半潜式平台运动响应预报方法的对比分析[J]. 中国海上油气, 2009, 21(1): 61–64, 68.
ZHANG Wei, FENG Wei, XIE Bin. Comparative analysis on forecasting procedures of deepwater semi-submersible platform motion-response[J]. China Offshore Oil and Gas, 2009, 21(1): 61–64, 68.
- [6] 刘应中, 缪国平, 李谊乐, 等. 系泊系统动力分析的时域方法[J]. 上海交通大学学报, 1997, 31(11): 7–12.
LIU Ying-zhong, MIAO Guo-ping, LI Yi-le, et al. A time domain computation method for dynamic behavior of mooring system[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 1997, 31(11): 7–12.
- [7] 聂武, 刘玉秋. 海洋工程结构动力分析[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学出版社, 2002.
- [8] YILMAZ O, INCECIK A. Extreme motion response analysis of moored semi-submersibles[J]. Ocean Engineering, 1996, 23(6): 497–517.