

Лабораторная работа 5

Тестирование гипотезы о среднем

Гузовская Александра Чеславовна
Б9123-01.03.02сп

26 апреля 2025

Гипотеза о среднем с известной дисперсией

Пусть имеется случайная выборка X_1, X_2, \dots, X_n из нормального распределения $N(\mu, \sigma^2)$, где σ^2 **известна**. Проверяем нулевую гипотезу $H_0 : \mu = \mu_0$ против одной из альтернатив:

- $H_1 : \mu > \mu_0$ (правосторонняя)
- $H_1 : \mu < \mu_0$ (левосторонняя)
- $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (двусторонняя)

Критерий

$$Z = \frac{(\bar{X} - \mu_0) \cdot \sqrt{n}}{\sigma} \sim N(0; 1)$$

где $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ — выборочное среднее

Правило принятия решения:

$$p = \begin{cases} 1 - \Phi(z), & \text{для } H_1 : \mu > \mu_0 \\ \Phi(z), & \text{для } H_1 : \mu < \mu_0 \\ 2\Phi(-|z|), & \text{для } H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

где $\Phi(z)$ — функция стандартного нормального распределения.
Гипотезу H_0 отвергаем, если $p < \alpha$ (уровень значимости)

Пример задачи

Установлено, что средний вес таблетки лекарства сильного действия должен быть равен $a_0 = 0,50$ мг. Выборочная проверка 121 таблетки из полученной партии лекарства показала, что средний вес таблетки этой партии $\bar{x} = 0,53$ мг. Требуется при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу $H_0 : a = a_0 = 0,50$ при конкурирующей гипотезе $H_1 : a > 0,50$. Многократными предварительными опытами по взвешиванию таблеток, поставляемых фармацевтическим заводом, было установлено, что вес таблеток распределен нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 0,11$ мг.

Гипотеза о среднем с неизвестной дисперсией

Для случая, когда дисперсия σ^2 **неизвестна**, используем **несмещённую** оценку:

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Тестовая статистика (t-статистика Стьюдента):

$$T_{n-1} = \frac{(\bar{X} - \mu_0) \cdot \sqrt{n}}{\hat{\sigma}_n} \sim T(n-1)$$

где $T(n-1)$ — распределение Стьюдента с $n-1$ степенями свободы.

Правило принятия решения:

$$p = \begin{cases} 1 - F_{T_{n-1}}(t), & \text{для } H_1 : \mu > \mu_0 \\ F_{T_{n-1}}(t), & \text{для } H_1 : \mu < \mu_0 \\ 2F_{T_{n-1}}(-|t|), & \text{для } H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

где $F_{T_{n-1}}(t)$ — функция распределения Стьюдента

Пример задачи

Проектный контролируемый размер изделий, изготавливаемых станком-автоматом, $a = a_0 = 35$ мм. Измерения 20 случайно отобранных изделий дали следующие результаты:

Контролируемый размер x_i (мм)	Частота n_i
34,8	2
34,9	3
35,0	4
35,1	6
35,3	5

Требуется при уровне значимости проверить нулевую гипотезу $H_0 : a = a_0 = 35$ против конкурирующей гипотезы $H_1 : a \neq 35$.

Код программы

Решим с помощью функции две задачи, указанные выше, для второй задачи решим также с помощью встроенного метода *ttest_1samp*

```
import numpy as np
from scipy import stats

def mhtest(sample, mu0, alternative='two-sided', std=None):
    """
    Проверка гипотезы о среднем

    Параметры:
    sample - выборка
    mu0 - гипотетическое среднее
    alternative - 'less', 'greater', 'two-sided'
    std - стандартное отклонение (если известно, для Z-теста)

    Возвращает:
    p-value
    """
    n = len(sample)
    sampleMean = sum(sample) / n

    if std is not None:
        standartError = std / np.sqrt(n)
```

```

stat = (sampleMean - mu0) / standartError

if alternative == 'greater':
    return 1 - stats.norm.cdf(stat)
elif alternative == 'less':
    return stats.norm.cdf(stat)
elif alternative == 'two-sided':
    return 2 * (1 - stats.norm.cdf(abs(stat)))
else:
    sample_var = sum((x - sampleMean)**2 for x in sample) / (n - 1)
    standartError = np.sqrt(sample_var / n)
    stat = (sampleMean - mu0) / standartError

    if alternative == 'greater':
        return 1 - stats.t.cdf(stat, n-1)
    elif alternative == 'less':
        return stats.t.cdf(stat, n-1)
    elif alternative == 'two-sided':
        return 2 * (1 - stats.t.cdf(abs(stat), n-1))

if __name__ == "__main__":
    # mu0 = 0.50
    # sample_mean = 0.53
    # H1 = 'greater'
    # sigma = 0.11
    # n = 121
    # alpha = 0.01
    # random_state = 9
    # data = stats.norm.rvs(loc=sample_mean, scale=sigma, size=n, random_state=ran
    # result = mhtest(sample=data, mu0=mu0, std=sigma, alternative=H1)
    # print(result)

    mu0 = 35
    H1 = 'two-sided'
    alpha = 0.05
    values = [34.8, 34.9, 35.0, 35.1, 35.3]
    counts = [2, 3, 4, 6, 5]
    data = np.repeat(values, counts)

```

```
result = mhtest(sample=data, mu0=mu0, alternative=H1, alpha=alpha)
resultOfScipy = stats.ttest_1samp(data, mu0)
print(result)
print(resultOfScipy)

if (result < alpha):
    print("Нулевая гипотеза отклоняется")
else:
    print("Нулевая гипотеза принимается")
```