МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Департамент математического и компьютерного моделирования

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2

Тема: Метод моментов и метод наибольшего правдоподобия

Студент
Гузовская Александра Чеславовна
группы Б9123-01.03.02сп

Преподаватель Деревягин А. А.

Регистрационный № ___________ Оценка________________________

____________ ___________________ ____________ ___________________
(подпись) (И. О. Фамилия) (подпись) (И. О. Фамилия)

«___» ____________________ 2025 г. «___» ____________________ 2025 г.

г. Владивосток
2025

Лабораторная работа 2

Гузовская Александра Чеславовна

23 марта 2025г.

1 Распределение Пуассона

Если количество испытаний n достаточно велико, а вероятность p появления события A в отдельно взятом испытании весьма мала (0,05-0,1 и меньше), то вероятность того, что в данной серии испытаний событие A появится ровно m раз, можно приближенно вычислить по формуле Пуассона:

$$P_m \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$$

где $\lambda = n \cdot p$

В теории установлено, что математическое ожидание пуассоновской случайной величины равно $EX = \lambda$ и дисперсия – тому же самому значению: $DX = \lambda$.

2 Матчасть: метод моментов

Метод моментов состоит в приравнивании теоретических моментов соответствующим эмпирическим моментам того же порядка.
Когда распределение определяется одним параметром (как распределение Пуассона в нашем случае), тогда один теоретический момент приравниваем к эмпирическому того же порядка
$\lambda = M_1$ (параметр лямбда есть первый теоретический момент)
учитывая что $\lambda = MX$, а $M_1 = \overline{x}_{\text{выб}}$
получим $MX = \overline{x}_{\text{выб}}$

3 Матчасть: метод максимального правдоподобия

Метод максимального правдоподобия сводится к нахождению максимума функции одного или нескольких оцениваемых параметров (в нашем случае одного - λ). Также в нашем случае распределение дискретное, поэтому будем рассматривать метод для дискретного случая

В результате проведения n опытов дискретная случайная величина X приняла значения $x_1, x_2, ..., x_n$, θ - неизвестный параметр распределения Пуассона, требуется найти его (параметра) точечную оценку $\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, ..., x_n)$

Пусть вероятность случайной величине X принять в результате испытания значение x_i есть $p(x_i, \theta)$

Тогда функция правдоподобия СВ X есть функция аргумента θ:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta) = p(x_1, \theta) \cdot p(x_2, \theta) \cdot ... \cdot p(x_n, \theta)$$

Логично, оценкой наибольшего (максимального) правдоподобия параметра θ есть такое значение θ, при котором функция правдоподобия достигает максимума

Принято вместо функции L брать в качестве функции правдоподобия её логарифм ln(L), так как обе они достигают максимума при одном значении θ. Функцию ln(L) называют логарифмической функцией правдоподобия

Использование логарифмической функции правдоподобия удобнее, так как с помощью свойств логарифма произведение превращается в сумму, логарифм упрощает вычисления и делает их более стабильными

Алгоритм

1) найти производную $\frac{dlnL}{d\theta}$

2) найти критическую точку, приравняв производную к нулю, получим θ^* - корень полученного уравнения

3) найти вторую производную и если она отрицательна при $\theta = \theta^*$, то θ^* - точка максимума, её принимаем в качестве оценки наибольшего правдоподобия параметра θ

4 Вывод оценки через данные методы

4.1 Методом моментов

Эмпирический момент первого порядка (среднее значение выборки) определяется как:

$$M_1 = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

где x_i — наблюдаемые значения, а (n) — количество наблюдений.

Согласно методу моментов, мы приравниваем теоретический момент к эмпирическому:

$$E[X] = \lambda = M_1 = \overline{x}$$

4.2 Методом максимального правдоподобия

Оцениваемый параметр в нашем случае один, составим функцию правдоподобия:

$$L(\overline{x}, \theta) = \prod_{x_i \in \overline{x}} p(x_i, \theta)$$

где θ — это искомый параметр
в распределении Пуассона вероятность случайной величине X принять в результате испытания значение x_i примерно равна

$$\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \cdot e^{-\lambda}$$

где λ - истинный параметр, тогда

$$\prod_{x_i \in \overline{x}} p(x_i, \theta) = \prod_{x_i \in \overline{x}} \frac{\theta^{x_i}}{x_i!} \cdot e^{-\theta}$$

Прологарифмируем обе части равенства $ln(L(\overline{x}, \theta)) = ln(\prod_{x_i \in \overline{x}} \frac{\theta^{x_i}}{x_i!} \cdot e^{-\theta})$
Получим:

$$ln(L(\overline{x}, \theta)) = \sum_{x_i \in \overline{x}} ln(\frac{\theta^{x_i}}{x_i!} \cdot e^{-\theta}) = \sum_{x_i \in \overline{x}} \left(ln(\theta^{x_i}) - ln(x_i!) + ln(e^{-\theta}) \right) =$$

$$= \sum_{x_i \in \overline{x}} \left(x_i \cdot ln(\theta) - ln(x_i!) + (-\theta) \right) = \ln(\theta) \sum_{x_i \in \overline{x}} x_i - \sum_{x_i \in \overline{x}} \ln(x_i!) - \theta \cdot n$$

здесь $\sum_{x_i \in \overline{x}} (-\theta) = -\theta \cdot n$, где n - количество элементов в выборке

Теперь найдем первую производную по θ:

$$\frac{d \ln(L)}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left(\ln(\theta) \sum_{x_i \in \overline{x}} x_i - n\theta \right)$$

Используя правило производной для произведения и производной логарифма, получаем:

$$\frac{d \ln(L)}{d\theta} = \frac{1}{\theta} \sum_{x_i \in \overline{x}} x_i - n$$

Теперь приравняем первую производную к нулю для нахождения критической точки:

$$\frac{1}{\theta} \sum_{x_i \in \overline{x}} x_i - n = 0$$

Решая это уравнение относительно θ, получаем:

$$\frac{\sum_{x_i \in \overline{x}} x_i}{\theta} = n \implies \theta^* = \frac{\sum_{x_i \in \overline{x}} x_i}{n}$$

Таким образом, θ^* — это среднее значение выборки

Теперь найдем вторую производную:

$$\frac{d^2 \ln(L)}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\theta} \sum_{x_i \in \overline{x}} x_i - n \right)$$

Используя правило производной для дроби, получаем:

$$\frac{d^2 \ln(L)}{d\theta^2} = -\frac{1}{\theta^2} \sum_{x_i \in \overline{x}} x_i$$

Проверим, является ли $\hat{\theta}$ точкой максимума. Если вторая производная отрицательна при $\theta = \hat{\theta}$, то $\hat{\theta}$ — это точка максимума:

$$\frac{d^2 \ln(L)}{d\theta^2} \bigg| \theta = \hat{\theta} = -\frac{1}{(\hat{\theta})^2} \sum_{x_i \in \overline{x}} x_i$$

Поскольку $\sum_{x_i \in \overline{x}} x_i > 0$ и $\hat{\theta} > 0$, вторая производная будет отрицательной:

$$-\frac{1}{(\hat{\theta})^2} \sum_{x_i \in \overline{x}} x_i < 0$$

Это подтверждает, что $\hat{\theta}$ является точкой максимума.

5 Код

```
import numpy as np
import pandas as pd
import scipy.stats as stats
from scipy.optimize import minimize_scalar

def factorial(n):
    if n < 0:
        raise ValueError("Факториал не определен для отрицательных чисел")
    result = 1
    for i in range(2, n + 1):
        result *= i
    return result

true_lambda = 5
random_state = 9

samples = {
    'Poisson_100': stats.poisson.rvs(mu=true_lambda, size=100, random_state=random
    'Poisson_10000': stats.poisson.rvs(mu=true_lambda, size=10000, random_state=ra
}

results = []

for key, sample in samples.items():
    n = len(sample)

    lambda_mm = np.mean(sample)

    def negative_logLikelihood(lambda_):
```

```
        if lambda_ <= 0:
            return np.inf
        return -(np.sum(sample * np.log(lambda_)) - n * lambda_ - np.sum([np.log(f

    try:
        result = minimize_scalar(negative_logLikelihood, bounds=(0, 100), method='
        lambda_mle = result.x
    except Exception as e:
        print(f"Ошибка при минимизации для {key}: {e}")
        lambda_mle = np.nan

    results.append({
        'Размер выборки': n,
        'Истинные параметры': true_lambda,
        'Оценка ММ': lambda_mm,
        'Оценка ММП': lambda_mle,
    })

results_df = pd.DataFrame(results)
print("\n", results_df.to_string(index=False), "\n")
```

метод fit не предусмотрен для распределения Пуассона

5.1 scipy.stats

X — класс, реализующий распределение.
Распределение с параметрами — X(params).
Используемые методы:

- X(params).rvs(size=N) — генерация выборки размера N (Random VariateS). Возвращает numpy.array;
- X(params).mean() — математическое ожидание;

Для дискретных распределений:
- X(params).pmf(k) — значение функции вероятности дискретной случайной величины в точке k (Probability Mass Function);

Вызов X.rvs(size=N, params) эквивалентен X(params).rvs(size=N)

5.2 scipy.optimize

В коде мы импортировали $minimize\_scalar$, он ищет минимум для скалярной функции. В методе наибольшего правдоподобия мы ищем максимум логарифмической функции правдоподобия, поэтому передаём её отрицание как аргумент в данный метод. Через bounds=(0, None) мы ограничиваем параметр лямбда (больше нуля), а через method='bounded' ищем минимум функции в заданных границах для параметра.

5.3 θ^* и $\hat{\theta}$

$\hat{\theta}$:
используется для обозначения оценки параметра, обозначение подчеркивает, что это именно оценка, а не истинное значение параметра

θ^*:
используется для обозначения критической точки, найденной в процессе оптимизации, в нашем случае это значение параметра, при котором достигается максимум логарифмической функции правдоподобия. В зависимости от контекста может также использоваться для обозначения "истинного"значения параметра

6 Итоговая таблица

Параметр λ взяли равным 5

Размер выборки	Истинные параметры (λ)	Оценка ММ (λ)	Оценка ММП (λ)
100	5	5.1000	5.1000
10000	5	4.9982	4.9982

Рис. 1: Оценка параметра методали моментов и максимального правдоподобия