Теория функций комплексной переменной
ТФКП ИДЗ 1

Гузовская Александра Чеславовна
Б9123-01.03.02сп

27 марта 2025

1 Найти все значения корня $\sqrt[3]{i}$

корень некоторой степени из комплексного числа находится по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + \sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

где r есть модуль комплексного числа z, k изменяется от 0 до n-1, всего n значений корня комплексного числа n-ой степени

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + \sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

подставляя значения k постепенно получим все корни
рассмотрим данный случай из задания: модуль этого комплексного числа равен 1, степень искомая равня трём, подставим

$$z_0 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi \cdot 0}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi \cdot 0}{3}\right) = \cos\frac{\varphi}{3} + \sin\frac{\varphi}{3}$$

$$z_1 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi \cdot 1}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi \cdot 1}{3}\right) = \cos\frac{\varphi + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi}{3}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi \cdot 2}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi \cdot 2}{3}\right) = \cos\frac{\varphi + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 4\pi}{3}$$

из алгебраического представления комплексного числа мы также можем узнать его аргумент (угол $\varphi = \arctan\frac{b}{a}$), в нашем случае a = b = 1, $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

$$\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}$$
$$\cos\frac{9\pi}{12} + i\sin\frac{9\pi}{12} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$$
$$\cos\frac{17\pi}{12} + \sin\frac{17\pi}{12}$$

Ответ:

$$\sqrt[3]{i} = \{\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}; -i\}$$

2 Представить в алгебраической форме

2.1 $\cos\left(\frac{\pi}{6} - i\right)$

Используем формулу косинуса разности

$$\cos\frac{\pi}{6} - i = \cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos i + \sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin i$$

Функции с мнимыми аргументами представим в виде показательных:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{e^{-1}+e^{1}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-1}-e^{1}}{2i} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{e^{-1}+e^{1}}{2}\right) + i\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{1}-e^{-1}}{2}\right)$$

Ответ:

$$\left(\frac{\sqrt{3}\cdot(e^{-1}+e^{1})}{4}\right) + i\cdot\left(\frac{e^{1}-e^{-1}}{4}\right)$$

2.2 $arth\left(\frac{3+i\cdot 2\sqrt{3}}{7}\right)$

Используем представление гиперболического арктангенса через логарифм:

$$arth(z) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+\frac{3+i\cdot 2\sqrt{3}}{7}}{1-\frac{3+i\cdot 2\sqrt{3}}{7}} = \frac{\frac{10+i\cdot 2\sqrt{3}}{7}}{\frac{4-i\cdot 2\sqrt{3}}{7}} = \frac{10+i\cdot 2\sqrt{3}}{4-i\cdot 2\sqrt{3}}$$

Умножим числитель и знаменатель на сопряженное $(4+i\cdot 2\sqrt{3})$:

$$= \frac{(10+i\cdot 2\sqrt{3})(4+i\cdot 2\sqrt{3})}{(4)^2+(2\sqrt{3})^2} = \frac{40+i\cdot 20\sqrt{3}+i\cdot 4\sqrt{3}-12}{16+12} =$$

$$= \frac{28+\cdot 24\sqrt{3}}{28} = 1+i\cdot\frac{6\sqrt{3}}{7}$$

$$\operatorname{arth}(z) = \frac{1}{2}\ln\left(1+i\cdot\frac{6\sqrt{3}}{7}\right)$$

Представим в показательной форме:

$$1+i\cdot\frac{6\sqrt{3}}{7} = \sqrt{1+\left(\frac{6\sqrt{3}}{7}\right)^2}\cdot e^{i\cdot\arctan\left(\frac{6\sqrt{3}}{7}\right)} = \sqrt{\frac{157}{49}}\cdot e^{i\cdot\arctan\left(\frac{6\sqrt{3}}{7}\right)}$$

Получили:

$$\operatorname{arth}\left(\frac{3+i\cdot 2\sqrt{3}}{7}\right) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{157}{49}\right)+\frac{i}{2}\arctan\left(\frac{6\sqrt{3}}{7}\right)+i\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}$$

Ответ:

$$\frac{1}{4}\ln\left(\frac{157}{49}\right)+\frac{i}{2}\left(\arctan\left(\frac{6\sqrt{3}}{7}\right)+2\pi k\right) \approx \frac{1}{2}\cdot 0,693+\frac{i}{2}(\frac{2\pi}{3}+2\pi k), k=0,\pm 1,\pm 2,...$$

2.3 $(-1+2i)^{2i}$

Используем формулу:

$$z^w = e^{w\cdot Lnz}$$

Для $z=-1+2i$:

$$|z| = \sqrt{5}, \quad \operatorname{Arg} z = \pi - \arctan 2$$

$$Lnz = \frac{1}{2}\ln 5 + i(\pi - \arctan 2)$$

$$(-1+2i)^{2i} = e^{i\ln 5 - 2(\pi - \arctan 2)} = e^{-2\pi+2\arctan 2}\cdot(\cos(\ln 5)+i\sin(\ln 5))$$

Ответ:

$$e^{-2\pi+2\arctan 2}\cos(\ln 5) + ie^{-2\pi+2\arctan 2}\sin(\ln 5)$$

2.4 $Ln(1+i)$

Логарифмическая функция Ln(z), $z \neq 0$ определяется как обратная показательной и имеет вид:

$$Ln(z) = ln|z| + i \cdot Arg(z) = ln|z| + i(arg(z) + 2\pi k), k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

подставим значение комплексного числа из задания

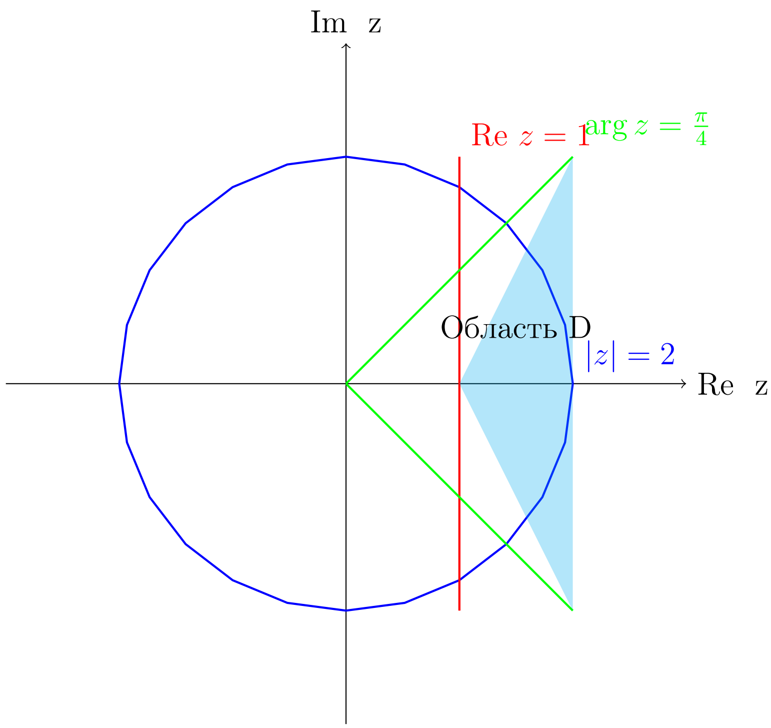
$$Ln(1+i) = ln|1+i| + i \cdot Arg(1+i) = ln\sqrt{2} + i(arg(1+i) + 2\pi k) \approx$$

Ответ:

$$\approx 0,347 + i(\frac{\pi}{4} + 2\pi k), k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

3 Вычертить область, заданную неравенствами:

$$D = \{z : |z| < 2, Rez \geq 1, argz < \pi/4\}$$



4 Определить вид пути в случае, когда он проходит через точку ∞, исследовать его поведение в этой точке:

$$z = 3 \cdot \csc(t) + i \cdot 3 \cdot \cot(t)$$

Уравнение вида
$z = z(t) = x(t) + i \cdot y(t)$
определяет на комплексной плоскости параметрически заданную кривую:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

или в этом конкретном случае:

$$\begin{cases} x(t) = 3 \cdot \csc(t) \\ y(t) = 3 \cdot \cot(t) \end{cases}$$

выразим из этой системы параметр через x, y

$$x = 3 \cdot cosec(t) = \frac{3}{\sin t} \Longrightarrow \sin t = \frac{3}{x} \Longrightarrow t = arcsin\left(\frac{3}{x}\right)$$

$$y = 3 \cdot ctg(t) \Longrightarrow ctg(t) = \frac{y}{3} \Longrightarrow t = arcctg\left(\frac{y}{3}\right)$$

Получили уравнение кривой в виде $F(x, y) = 0$:

$$arcsin\left(\frac{3}{x}\right) = arcctg\left(\frac{y}{3}\right) \Longrightarrow arcsin\left(\frac{3}{x}\right) - arcctg\left(\frac{y}{3}\right) = 0$$

Ответ:

$$arcsin\left(\frac{3}{x}\right) = arcctg\left(\frac{y}{3}\right) \Longrightarrow arcsin\left(\frac{3}{x}\right) - arcctg\left(\frac{y}{3}\right) = 0$$

5 Восстановить голоморфную в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x, y)$ или мнимой $v(x, y)$ и начальному значению $f(z_o) : v = x^2 - y^2 + 2x + 1, f(0) = i.$

Зная действительную часть аналитической функции, можно узнать производную аналитической функции по формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

Найдём её:

$$f'(z) = f'(x+i\cdot y) = -2y+2ix+2i = 2(ix-y)+2i = 2i(x+iy)+2i = 2iz+2i$$

У нас есть известная мнимая часть, тогда, зная производную, можем найти функцию с точностью до константы:

$$f(z) = \int (2iz + 2i)dz = iz^2 + 2iz + C$$

затем определим константу - $f(0) = i \cdot 0^2 + 2i \cdot 0 + C = i \Longrightarrow C = i$

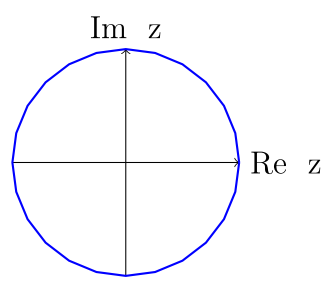
Ответ:

$$f(z) = \int (2iz + 2i)dz = iz^2 + 2iz + i$$

6 Вычислить интеграл от функции комплексной переменной по данному пути:

$$\int_L (z+1) \cdot e^z dz; L = \{z : |z| = 1, Re(z) \geq 0\}$$

График кривой, по которой будет проходить интегрирование:



Проверим, является ли исходная функция аналитической (сделаем переход):

$$f(x,y) = u(x,y) + i \cdot v(x,y); z = x + iy$$

$$f(z) = (z+1) \cdot e^z = e^x \cdot (x + iy + 1) \cdot (\cos y + i \cdot \sin y) =$$

$$= e^x(x \cdot \cos y + \cos y - y \cdot \sin y) + i \cdot e^x(y \cdot \cos y + x \cdot \sin y + \sin y)$$

Проверим на условие Коши-Римана:

$$u(x,y) = e^x(x \cdot \cos y + \cos y - y \cdot \sin y)$$

$$v(x,y) = e^x(y \cdot \cos y + x \cdot \sin y + \sin y)$$

$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x(x \cdot \cos y + 2 \cdot \cos y - y \cdot \sin y); \frac{\partial v}{\partial y} = e^x(x \cdot \cos y + 2 \cdot \cos y - y \cdot \sin y);$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x(x \cdot \sin y - 2 \cdot \sin y - y \cdot \cos y); \frac{\partial v}{\partial x} = e^x(x \cdot \sin y + 2 \cdot \sin y - y \cdot \cos y);$

Проверка:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Так как выполняются условия Коши-Римана, функция является аналитической, а следовательно результат не зависит от пути интегрирования

$$\int_L (z+1) \cdot e^z = \int_{-1}^{1} (z+1) \cdot e^z dz = ze^z \Big|_{-1}^{1} = i \cdot (e^z + \frac{1}{e^z})$$

Ответ:

$$\int_L (z+1) \cdot e^z = i \cdot (e^z + \frac{1}{e^z})$$

7 Найти радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (i^n \cdot n \cdot (2 + i^n)) \cdot z^n$$

Коэффициент ряда и его модуль:

$$a_n = i^n \cdot n \cdot (2 + i^n)$$

$$|a_n| = |i^n| \cdot |n| \cdot |2 + i^n| = n \cdot |2 + i^n|$$

Учитывая цикличность степеней мнимой единицы:

$$\begin{aligned} i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \\ i^4 &= 1 \\ &\dots \end{aligned}$$

Вычислим $|2 + i^n|$ для разных случаев:

$$\begin{aligned} n &\equiv 1 \pmod 4 : |2+i| = \sqrt{5} \\ n &\equiv 2 \pmod 4 : |2-1| = 1 \\ n &\equiv 3 \pmod 4 : |2-i| = \sqrt{5} \\ n &\equiv 0 \pmod 4 : |2+1| = 3 \end{aligned}$$

Используем формулу Коши-Адамара:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n \cdot |2+i^n|} \le \sqrt[n]{3n} \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Для подпоследовательности $n = 4k$:

$$\sqrt[4k]{|a_{4k}|} = \sqrt[4k]{3 \cdot 4k} \to 1$$

Наконец, вычислим радиус сходимости:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \implies R = \frac{1}{1} = 1$$

Ответ

Радиус сходимости ряда: 1

8 Найти лорановские разложения данной функции в 0 и в ∞:

$$f(z) = \frac{3z - 36}{z^4 + 3z^3 - 18z^2}$$

Преобразуем функцию:

$$\frac{3z-36}{z^4+3z^3-18z^2} = \frac{3(z-12)}{z^2(z+6)(z-3)} = \frac{3}{z^2} \cdot \frac{(z-12)}{(z+6)(z-3)}$$

Разложим $\frac{(z-12)}{(z+6)(z-3)}$ на сумму двух дробей методом неопределённых коэффициентов:

$$\frac{(z-12)}{(z+6)(z-3)} = \frac{A}{z+6} + \frac{B}{z-3} =$$

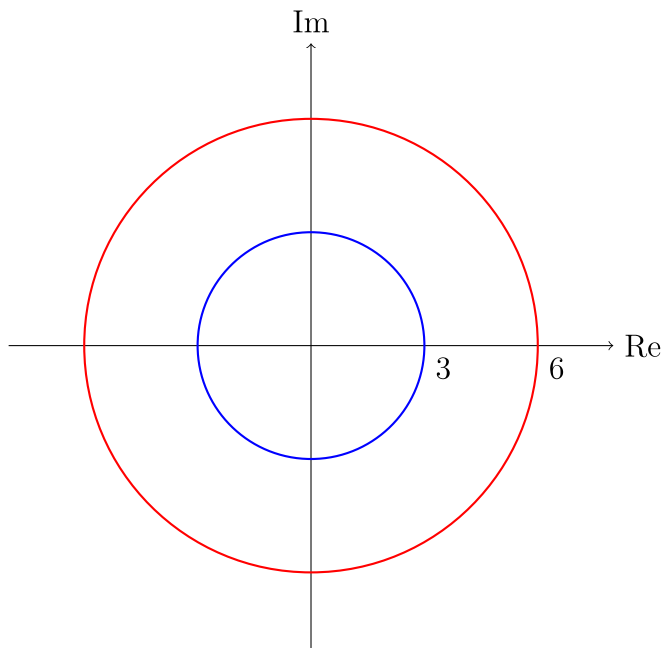
$$= \frac{A \cdot (z-3)}{(z+6)(z-3)} + \frac{B \cdot (z+6)}{(z+6)(z-3)}$$

$$\Longrightarrow \{A = 2; B = -1\} \Longrightarrow \frac{(z-12)}{(z+6)(z-3)} = \frac{2}{z+6} - \frac{1}{z-3}$$

Тогда получили следующий вид функции, найдём для неё особые точки:

$$f(z) = \frac{3}{z^2} \cdot \left(\frac{2}{z+6} - \frac{1}{z-3}\right)$$

Особые точки: $z = 0, z = 3, z = -6$



Рассмотрим область $|\mathbf{z}| < 3$:

$$f(z) = \frac{3}{z^2}\cdot\left(\frac{2}{z+6}-\frac{1}{z-3}\right) = \frac{1}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{z}{6}}+\frac{1}{1-\frac{z}{3}}\right) =$$

$$= \frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{6}+\frac{z^2}{36}-\frac{z^3}{216}+...\right)+\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}+\frac{z^3}{27}+...\right)\right] =$$

$$\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{6z}+\frac{1}{36}-\frac{z}{216}+...\right)+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3z}+\frac{1}{9}+\frac{z}{27}+...\right)$$

Рассмотрим область $\mathbf{3} < |\mathbf{z}| < \mathbf{6}$:

$$f(z) = \frac{3}{z^2}\cdot\left(\frac{2}{z+6}-\frac{1}{z-3}\right) = \frac{1}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{z}{6}}+\frac{3}{z(1-\frac{3}{z})}\right) =$$

$$= \frac{1}{z^2}\cdot\left[\left(1-\frac{z}{6}+\frac{z^2}{36}-\frac{z^3}{216}+...\right)+\left(\frac{3}{z}+\frac{9}{z^2}+\frac{27}{z^3}+\frac{81}{z^4}...\right)\right] =$$

$$\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{6z}+\frac{1}{36}-\frac{z}{216}+...\right)+\left(\frac{3}{z^3}+\frac{9}{z^4}+\frac{27}{z^5}+\frac{81}{z^6}...\right)$$

Рассмотрим область |z| > 6:

$$f(z) = \frac{3}{z^2} \cdot \left(\frac{2}{z+6} - \frac{1}{z-3} \right) = \frac{1}{z^2} \left[\frac{6}{z(1+\frac{6}{z})} + \frac{3}{z(1-\frac{3}{z})} \right] =$$

$$= \frac{1}{z^2} \cdot \left[\left(\frac{6}{z} - \frac{36}{z^2} + \frac{216}{z^3} - \frac{1296}{z^4} + ... \right) + \left(\frac{3}{z} + \frac{9}{z^2} + \frac{27}{z^3} + \frac{81}{z^4} ... \right) \right] =$$

$$= \left[\left(\frac{6}{z^3} - \frac{36}{z^4} + \frac{216}{z^5} - \frac{1296}{z^6} + ... \right) + \left(\frac{3}{z^3} + \frac{9}{z^4} + \frac{27}{z^5} + \frac{81}{z^6} ... \right) \right]$$

Ответ:

- **В окрестности нуля** ($|z| < 3$):

$$\frac{2}{z^2} + \frac{1}{6z} + \frac{5}{36} + \frac{7}{216} z + \cdots$$

- **В окрестности бесконечности** ($|z| > 6$):

$$f(z) = \frac{9}{z^3} - \frac{27}{z^4} + \frac{243}{z^5} - \frac{1215}{z^6} + \cdots$$

9 Найти все лорановские разложения по степеням $z - z_0$

$$4 \cdot \frac{z-2}{(z+1)(z-3)}; z_0 = 2 - 2i$$

преобразуем данную функцию:

$$f(z) = 4 \cdot \frac{z-2}{(z+1)(z-3)} = \frac{3}{z+1} + \frac{1}{z-3}$$

Используем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z_0

$$\frac{1}{z+a} = \frac{1}{a} - \frac{z}{a^2} + \frac{z^2}{a^3} - \frac{z^3}{a^4} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{3}{z+1} = 3\cdot\frac{1}{z+1} = 3\cdot\frac{1}{(z-z_0)+3-2i} = 3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(z-z_0)^n}{(3-2i)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{(z-z_0)-1-2i} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(z-z_0)^n}{(-1-2i)^{n+1}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(-1-2i)^{n+1}}$$

Таким образом:

$$f(z) = \frac{3}{z+1}+\frac{1}{z-3} = 3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(z-z_0)^n}{(3-2i)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(-1-2i)^{n+1}} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3\cdot(-1)^n}{(3-2i)^{n+1}} - \frac{1}{(-1-2i)^{n+1}}\right)\cdot(z-z_0)^n$$

Ответ:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3\cdot(-1)^n}{(3-2i)^{n+1}} - \frac{1}{(-1-2i)^{n+1}}\right)\cdot(z-z_0)^n$$

10 Разложить данную функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \pi$:

$$z\cdot e^{\frac{\pi z}{z-\pi}}$$

Введём замену переменной $w = z - z_0 = z - \pi$, тогда $z = w + \pi$:

$$f(w+\pi) = (w+\pi)\cdot e^{\frac{\pi(w+\pi)}{w}} = (w+\pi)\cdot e^{\pi}\cdot e^{\frac{\pi^2}{w}}$$

Разложим экспоненту в ряд:

$$e^{\pi^2/w} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi^{2n}}{n!w^n}$$

Умножим на оставшиеся множители:

$$f(w+\pi) = e^{\pi}\cdot(w+\pi)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi^{2n}}{n!w^n} = e^{\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi^{2n}}{n!w^{n-1}} + \pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi^{2n}}{n!w^n}\right)$$

Приведём к общему виду:

$$f(w+\pi) = e^{\pi}\left(\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{\pi^{2n+2}}{(n+1)!w^n} + \pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi^{2n}}{n!w^n}\right) = e^{\pi}\left(\frac{\pi^2}{w} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi^{2n+2}}{(n+1)!} + \frac{\pi^{2n+1}}{n!}\right)\frac{1}{w^n}\right)$$

Возвращаемся к переменной z:

$$f(z) = e^{\pi}\left(\frac{\pi^2}{z-\pi} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi^{2n+2}}{(n+1)!} + \frac{\pi^{2n+1}}{n!}\right)\frac{1}{(z-\pi)^n}\right)$$

Ответ:

$$f(z) = \frac{e^{\pi}\pi^2}{z-\pi} + e^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi^{2n+2}}{(n+1)!} + \frac{\pi^{2n+1}}{n!}\right)\frac{1}{(z-\pi)^n}$$

11 Определить тип особой точки $z = 0$ для функции

$$z \cdot e^{4/z^3}$$

Применим разложение в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$:

$$f(z) = z \cdot e^{4/z^3} = z\left(1 + \frac{4}{z^3} + \frac{16}{2! \cdot z^6} + \frac{64}{3! \cdot z^9} + ...\right) = z + \frac{4}{z^2} + \frac{16}{2! \cdot z^5} + \frac{64}{3! \cdot z^8} + ...$$

Теперь выделим правильную и главную части ряда Лорана:

$$f(z) = z + \frac{4}{z^2} + \frac{16}{2! \cdot z^5} + \frac{64}{3! \cdot z^8} + ...$$

z - правильная часть
остальное - главная часть

Поскольку главная часть содержит бесконечное число членов, то точка для заданной функции является существеной особой точкой

Ответ:

Точка $z = 0$ является существеной особой точкой

12 Для данной функции найти все изолированные особые точки и определить их тип:

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sin\frac{1}{z^2}$$

Особые точки возникают там, где функция не определена или не является аналитической.

- Первое слагаемое $1/z$ имеет особую точку при $z = 0$.
- Второе слагаемое $\sin(1/z^2)$ не определено при $z = 0$, так как $1/z^2$ стремится к бесконечности.

Единственной изолированной особой точкой в конечной комплексной плоскости является $z = 0$.

Исследуем поведение функции в окрестности $z = 0$, разложив её в ряд Лорана.
Используем известное разложение синуса:

$$\sin w = w - \frac{w^3}{6} + \frac{w^5}{120} - \dots \quad \text{для} \quad w = \frac{1}{z^2}$$

$$\sin\left(\frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{6z^6} + \frac{1}{120z^{10}} - \dots$$

Ряд Лорана для $f(z)$:

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sin\left(\frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{6z^6} + \frac{1}{120z^{10}} - \dots$$

Главная часть ряда (отрицательные степени z) содержит бесконечное число членов, то особая точка является **существенно особой**.

Проверка других точек

- Для $z \neq 0$ функция $f(z)$ аналитична.

- На бесконечности ($z \to \infty$):

$$\frac{1}{z} \to 0, \quad \sin\left(\frac{1}{z^2}\right) \approx \frac{1}{z^2} \to 0,$$

поэтому $z = \infty$ — устранимая особая точка

Ответ:

В конечной плоскости функция имеет одну изолированную особую точку:

$$z = 0 \text{ — существенно особая точка}$$

На бесконечности функция имеет изолированную устранимую особую точку:

$$z = \infty \text{ — устранимая особая точка}$$