ILI 292 - Investigación de operaciones I
Tarea I

Alonso Sandoval Acevedo
asandova@alumnos.inf.utfsm.cl
201073011-5

Hernán Vargas Leighton
hvargas@alumnos.inf.utfsm.cl
201073009-3

8 de septiembre de 2014

1. Pregunta 1

1. **Buscando la función objetivo:** El local busca maximizar sus ganancias de la venta de sus almuerzos, a los cuales llamamos A y B respectivamente. Como sabemos el precio de venta de cada uno tenemos que la función objetivo será:

$$\text{máx}\, Z = 1400A + 1600B$$

2. **Seleccionando restricciones:** Del enunciado podemos obtener los siguientes datos, tenemos: 40 tomates (T), 20 lechugas (L), 50 croquetas (C) y 50 hamburguesas (H). Además sabemos que para hacer un almuerzo de cada tipo necesitamos:

$$A = 0{,}5T + 0{,}2L + C$$

$$B = 0{,}4T + 0{,}3L + H$$

Como las cantidades T, L, C, H son conocidas podemos plantear las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} 0{,}5A + 0{,}4B &\leq 40 \quad \textit{(Tomates)} \\ 0{,}2A + 0{,}3B &\leq 20 \quad \textit{(Lechugas)} \\ A &\leq 50 \quad \textit{(Croquetas)} \\ B &\leq 50 \quad \textit{(Hamburguesas)} \end{aligned}$$

Además sabemos que debemos hacer al menos 10 almuerzos de cada tipo, esta restricción incluye la restricción de naturaleza de las variables (tener almuerzos enteros positivos), luego se agregan 2 restricciones:

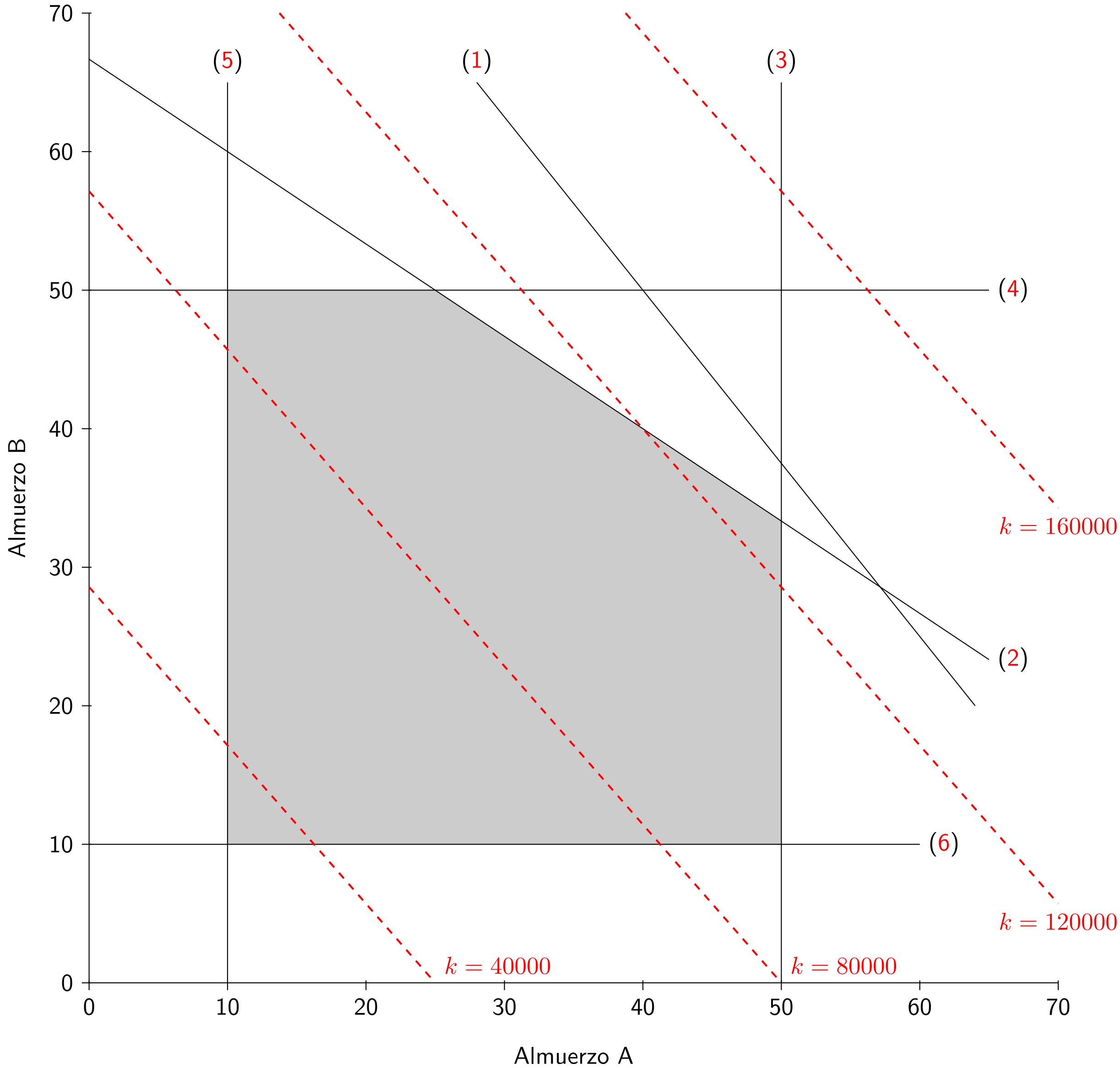
$$\text{Mínima cantidad producida A:} \qquad A \geq 10$$

$$\text{Mínima cantidad producida B:} \qquad B \geq 10$$

3. **Modelo:** El modelo de programación lineal para este problema queda reducido a:

$$\begin{aligned} \textbf{F.O.:} \quad & \text{máx}\, Z = 1400A + 1600B \\ \textbf{S.T.:} \quad & 0{,}5A + 0{,}4B \leq 40 && (1) \\ & 0{,}2A + 0{,}3B \leq 20 && (2) \\ & A \leq 50 && (3) \\ & B \leq 50 && (4) \\ & A \geq 10 && (5) \\ & B \geq 10 && (6) \end{aligned}$$

4. **Resolución grafica:** Para solucionar el problema nos basta graficar las restricciones y evaluar los vértices:



En el gráfico vemos representadas las restricciones como las rectas, la región factible está pintada gris y por ultimo tenemos con lineas punteadas algunos valores de la función objetivo.
Del análisis del gráfico vemos como claramente el punto intercepción entre la recta (3) y la recta (2) es el punto optimo en maximización, además, de este mismo análisis podemos concluir que las demás restricciones (1, 4, 5, 6) son no-activas.
Cabe destacar que el punto máximo en nuestro gráfico no es entero, por lo que, debido a la naturaleza de las variables, debemos buscar el entero más cercano a éste que sea máximo. En este caso tenemos que el punto optimo es $(50, 33{,}3)$, los candidatos a máximo serán: $(50, 33)$ y $(49, 34)$ ya que cumplen todas las restricciones. De estos últimos tenemos que el máximo es para $A = 49$ y $B = 34$ con un valor de \$123000.

2. Pregunta 2

1. **Buscando función objetivo:** Las variables que modificarán nuestras ganancias son:

   a) **Smart Fortwo ED importados** (x_{ed}) a un costo de \$18.000.000 cada uno.

   b) **Volkswagen e-up! importados** (x_{up}) a un costo de \$23.000.000 cada uno.

   c) **Smart Fortwo ED vendidos** (y_{ed}) a \$22.000.000 menos la comisión para el vendedor de \$2.200.000. Ganancia total de \$19.800.000.

   d) **Volkswagen e-up!** (y_{up}) a un costo de \$30.000.000 menos el 10 % para el vendedor que equivale a \$3.000.000. Ganancia total de \$2.700.000.

   e) **Los empleados** (`T`) a los que debemos pagar un sueldo de \$1.200.000 mensual, sin contar su comisión por venta.

   Luego la función objetivo será:

   $$\textbf{F.O.:} \quad \text{máx}\, Z = 19800000 \cdot y_{ed} + 27000000 \cdot y_{up} - 18000000 \cdot x_{ed} - 23000000 \cdot x_{up} - 1200000 \cdot \mathtt{T}$$

2. **Analisando restricciones:** Del texto podemos extraer las siguientes restricciones:

   $$x_{ed} \geq 20 \qquad \textit{(Importar al menos 20 ED)} \tag{7}$$
   $$x_{ed} - y_{ed} \geq 3 \qquad \textit{(Dejar al menos 3 ED para exhibir)} \tag{8}$$
   $$x_{up} - y_{up} \geq 3 \qquad \textit{(Dejar al menos 3 UP para exhibir)} \tag{9}$$
   $$y_{ed} - 0{,}6 \cdot x_{ed} \geq 0 \qquad \textit{(Vender al menos el 60 \% de los ED)} \tag{10}$$
   $$y_{up} - 0{,}6 \cdot x_{up} \geq 0 \qquad \textit{(Vender al menos el 60 \% de los UP)} \tag{11}$$
   $$0{,}2 \cdot x_{ed} + 0{,}2 \cdot x_{up} = \mathtt{T} \qquad \textit{(Contratar 1 empleado cada 5 autos)} \tag{12}$$
   $$\mathtt{T} \leq 40 \qquad \textit{(Contratar a los más a 40 empleados)} \tag{13}$$

   Estas restricciones son las que utilizamos en el código (ver el anexo: sección 5), el resultado obtenido se muestra a continuación, pero para hacer el tableau podemos reducir un poco el problema.

   ```
   Value of objective function: 567600000.00000048
   Actual values of the variables:
   v_ed                          17
   v_up                         177
   i_ed                          20
   i_up                         180
   t                             40
   ```

   Teniendo en cuenta que es una maximización las restricciones (10) y (11) pueden ser obviadas, además de de la unión de (12) y (13) podemos obtener la siguiente restricción que incluye ambas:

   $$x_{ed} + x_{up} \leq 200 \tag{14}$$

3. **Normalizando las ecuaciones:** Ahora debemos normalizar las restricciones (7), (8), (9) y (14), definir la función objetivo y luego construir el tableau.

   $$\begin{aligned} \textbf{F.O.:} \quad & \text{máx}\, Z = 19800000y_{ed} + 27000000y_{up} - 18240000x_{ed} - 23240000x_{up} + 0s_1 + \sum_{i=1}^{4} 0s_i - Ma_i \\ \textbf{S.T.:} \quad & x_{ed} + x_{up} + s_1 = 200 \\ & x_{up} - y_{up} - e_2 + a_2 = 3 \\ & x_{ed} - y_{ed} - e_3 + a_3 = 3 \\ & x_{ed} - e_4 + a_4 = 20 \end{aligned}$$

4. **Resolución por Tableau:**
   Nota: Para simplificar la escritura escribiremos los millones como unidad, es decir: $1000000 \rightarrow 1$

- **1º iteración**

		y_{ed}	y_{up}	x_{ed}	x_{up}	s_1	e_2	a_2	e_3	a_3	e_4	a_4		
Base	c_j	19.8	27	-18.24	-23.24	0	0	-M	0	-M	0	-M	b_i	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
s_1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	200	200
a_2	-M	0	-1	0	1	0	-1	1	0	0	0	0	3	-
a_3	-M	-1	0	1	0	0	0	0	-1	1	0	0	3	3
a_4	-M	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	20	20
	z_j	M	M	-2M	-M	0	M	-M	M	-M	M	-M	-26M	
	$c_j - z_j$	19.8-M	27-M	-18.24 + 2M	-23.24+M	0	-M	0	-M	0	-M	0		

Sale a_3 y entra x_{ed}.
Realizamos las operaciones fila correspondientes: $f_3 \cdot (-1) + f_1$ y $f_3 \cdot (-1) + f_4$

- **2º itearación**

		y_{ed}	y_{up}	x_{ed}	x_{up}	s_1	e_2	a_2	e_3	a_3	e_4	a_4		
Base	c_j	19.8	27	-18.24	-23.24	0	0	-M	0	-M	0	-M	b_i	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
s_1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	-1	0	0	197	197
a_2	-M	0	-1	0	1	0	-1	1	0	0	0	0	3	-
x_{ed}	-18.24	-1	0	1	0	0	0	0	-1	1	0	0	3	-
a_4	-M	1	0	0	0	0	0	0	1	-1	-1	1	17	17
	z_j	18.24-M	M	-18.24	-M	0	M	-M	18.24-M	18.24+M	M	-M	-54.72-20M	
	$c_j - z_j$	1.56+M	27-M	0	-23.24+M	0	-M	0	-18.24+M	18.24-2M	-M	0		

Sale a_4 y entra y_{ed}.
Realizamos las operaciones fila correspondientes: $f_4 \cdot (-1) + f_1$ y $f_4 \cdot 1 + f_3$

- **3º itearación**

		y_{ed}	y_{up}	x_{ed}	x_{up}	s_1	e_2	a_2	e_3	a_3	e_4	a_4		
Base	c_j	19.8	27	-18.24	-23.24	0	0	-M	0	-M	0	-M	b_i	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
s_1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	-1	180	180
a_2	-M	0	-1	0	1	0	-1	1	0	0	0	0	3	3
x_{ed}	-18.24	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	20	-
y_{ed}	19.8	1	0	0	0	0	0	0	1	-1	-1	1	17	-
	z_j	19.8	M	-18.24	-M	0	M	-M	19.8	-19.8	-1.56	1.56	-28.2-3M	
	$c_j - z_j$	0	27-M	0	-23.24+M	0	-M	0	-19.8	-M+19.8	1.56	-M-1.56		

Sale a_2 y entra x_{up}.
Realizamos las operaciones fila correspondientes: $f_2 \cdot (-1) + f_1$

- **4º itearación**

Base	c_j	y_{ed} 19.8	y_{up} 27	x_{ed} -18.24	x_{up} -23.24	s_1 0	e_2 0	a_2 -M	e_3 0	a_3 -M	e_4 0	a_4 -M	b_i	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
s_1	0	0	1	0	0	1	1	-1	0	0	1	-1	177	177
x_{up}	-23.24	0	-1	0	1	0	-1	1	0	0	0	0	3	-
x_{ed}	-18.24	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	20	-
y_{ed}	19.8	1	0	0	0	0	0	0	1	-1	-1	1	17	-
	z_j	19.8	23.24	-18.24	-23.24	0	23.24	-23.24	19.8	-19.8	-1.56	1.56	-97.92	
	$c_j - z_j$	0	3.76	0	0	0	-23.24	-M-23.24	-19.8	-M-19.8	1.56	-M-1.56		

Sale s_1 y entra y_{up}.
Realizamos las operaciones fila correspondientes: $f_1 \cdot 1 + f_2$

- **5º itearación**

Base	c_j	y_{ed} 19.8	y_{up} 27	x_{ed} -18.24	x_{up} -23.24	s_1 0	e_2 0	a_2 -M	e_3 0	a_3 -M	e_4 0	a_4 -M	b_i	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
y_{up}	27	0	1	0	0	1	1	-1	0	0	1	-1	177	-
x_{up}	-23.24	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	-1	180	-
x_{ed}	-18.24	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	20	-
y_{ed}	19.8	1	0	0	0	0	0	0	1	-1	-1	1	17	-
	z_j	19.8	27	-18.24	-23.24	3.76	27	-27	19.8	-19.8	2.2	-2.2	537.6	
	$c_j - z_j$	0	0	0	0	-3.76	-27	-M-27	-19.8	-M+19.8	-2.2	-M+2.2		

Vemos que todos los costos de oportunidad o precios sombras son negativos o 0, por tanto estamos en un vértice óptimo, con lo que la función objetivo es: 537600000. Las diferencias con LPsolve son mínimas, lo que se debe a la precisión de cálculo del software, en términos prácticos, obtuvimos el mismo resultado, pues los valores de las variables son los mismos.

3. Pregunta 3

Primero, normalizaremos el modelamiento:

F.O.: $\max z = 25x_1 + 15x_2 + 16x_3 + 0s_1 + 0s_3 + 0s_4 - Ma_2$
S.T.: $4x_2 + 8x_3 + s_1 = 1600$

$$10x_1 + 2x_2 + a_2 = 2100$$
$$x_3 + s_3 = 300$$
$$x_2 + s_4 = 250$$

1. Como $x_2 = 250$ y $x_3 = 75$, tenemos para la restricción 1:

$$\begin{aligned} 4 \cdot 250 + 8 \cdot 75 + s_1 &= 1600 \\ 1600 + s_1 &= 1600 \\ s_1 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, s_1 no es basal, se ocupan todos los recursos en la restricción 1.

2. Modificando el coeficiente de x_2 en el tableau:

		x_1	x_2	x_3	s_1	a_2	s_3	s_4	
Base	c_j	25	$15+\delta$	16	0	-M	0	0	b_j
x_3	16	0	0	1	1/8	0	0	-1/2	75
x_1	25	1	0	0	0	1/10	0	-1/5	160
s_3	0	0	0	0	-1/8	0	1	1/2	225
x_2	$15+\delta$	0	1	0	0	0	0	1	250
	z_j	25	$15+\delta$	16	2	5/2	0	$2+\delta$	
	$c_j - z_j$	0	0	0	-2	-M-5/2	0	$-2-\delta$	

Luego el rango de insignificancia para x_2 es:

$$\begin{aligned} -2 - \delta &\leq 0 \quad \textit{(caso max en el que no seguimos iterando).} \\ -\delta &\leq 2 \\ \delta &\geq -2 \\ +\infty \geq \delta &\geq -2 \quad \textit{(rango de insignificancia).} \end{aligned}$$

Si el coeficiente de x_2 cambia a 10:

$$\begin{aligned} \Delta c_j &= c_j' - c_j \\ \Delta c_j &= 10 - 15 \\ \Delta c_j &= -5 = \delta \end{aligned}$$

-5 está fuera del rango de insignificancia, por tanto: $-2 - \delta = -2 + 5 = 3 \geq 0$.
Es decir, s_4 entra a la base, calculando los b_j/a_{ij} :

...	s_4		
...	0	b_j	b_j/a_{ij}
...	-1/2	75	-
...	-1/5	160	-
...	1/2	225	225/2
...	1	250	250
...	-3		
...	3		

Por lo tanto, cambia nuestro óptimo (se debe volver a iterar) y la restricción 3 se vuelve limitante (se sale de la base, por lo tanto vale 0 lo que quiere decir que se usan todos los recursos en dicha restricción.)

3. - **No activa:** Significa variable artificial $\neq 0$ o que está en la base: $s_3 = 225 \Rightarrow$ Restricción 3 es inactiva.
   - **Activa:** Caso contrario al anterior, restricciones 1,2 y 4 no están en base por ende sus variables artificiales son 0, por ello son restricciones activas.

4. Tenemos que:

$$\begin{bmatrix} Nueva \\ \\ soluci\acute{o}n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Soluci\acute{o}n \\ \\ actual \end{bmatrix} + \Delta b_i a_{ij} \geq 0$$

Reemplazando por los valores correspondientes a la solución actual y a los coeficientes de la variable artificial correspondiente a la restricción 1 y naturaleza de las variables, encontraremos el rango para Δb_i:.

$$\begin{bmatrix} 75 \\ 160 \\ 225 \\ 250 \end{bmatrix} + \Delta b_1 \begin{bmatrix} 1/8 \\ 0 \\ -1/8 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

Luego, el rango para b_1:

$$\begin{aligned} 75 + \Delta b_1/8 \geq 0 \quad &\rightarrow \quad \Delta b_1 \geq -600 \\ 225 - \Delta b_1/8 \geq 0 \quad &\rightarrow \quad \Delta b_1 \leq 1800 \\ -600 \leq \Delta b_1 \leq 1800 \quad &\textit{(Rango dentro del cual no cambia la base)} \end{aligned}$$

Si la solución varía en +1000:

$$\begin{bmatrix} Nueva \\ \\ soluci\acute{o}n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ 160 \\ 225 \\ 250 \end{bmatrix} + 1000 \begin{bmatrix} 1/8 \\ 0 \\ -1/8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 + 1000/8 \\ 160 \\ 225 - 1000/8 \\ 250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & x_3* \\ 160 & x_1* \\ 100 & s_3* \\ 250 & x_2* \end{bmatrix} \quad \textit{Nueva soluci\'on}$$

Evaluando en la **F.O.**: $25 \cdot 160 + 15 \cdot 250 + 16 \cdot 200 + 0 \cdot 100 = 10950$

Casos Extremos

Caso 1 $\Delta b_1 = -600$

$$\begin{bmatrix} Nueva \\ \\ soluci\acute{o}n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ 160 \\ 225 \\ 250 \end{bmatrix} - 600 \begin{bmatrix} 1/8 \\ 0 \\ -1/8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 - 600/8 \\ 160 \\ 225 + 600/8 \\ 250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x_3* \\ 160 & x_1* \\ 300 & s_3* \\ 250 & x_2* \end{bmatrix} \quad \textit{Nueva soluci\'on}$$

En este caso, x_3 sale de la base. **F.O.** $z = 25 \cdot 160 + 15 \cdot 250 + 16 \cdot 0 + 0 \cdot 300 = 7750$

Caso 2 $\Delta b_1 = 1800$

$$\begin{bmatrix} Nueva \\ \\ soluci\acute{o}n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ 160 \\ 225 \\ 250 \end{bmatrix} + 1800 \begin{bmatrix} 1/8 \\ 0 \\ -1/8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 + 1800/8 \\ 160 \\ 225 - 1800/8 \\ 250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 & x_3* \\ 160 & x_1* \\ 0 & s_3* \\ 250 & x_2* \end{bmatrix} \quad \textit{Nueva soluci\'on}$$

En este caso, s_3 sale de la base. **F.O.** $z = 25 \cdot 160 + 15 \cdot 250 + 16 \cdot 300 + 0 \cdot 0 = 12550$

5. Evaluemos las variables implicadas en la nueva restricción ($x_1 = 160, x_2 = 250, x_3 = 75$):

$$\begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\leq 1900 \\ 6 \cdot 160 + 3 \cdot 250 + 4 \cdot 75 = 2010 &\geq 1900 \end{aligned}$$

Luego, no se cumple la restricción. Para resolver el problema, debemos retroceder en el tableau y chequear la restricción hasta que se cumpla, luego volver a iterar hasta hallar la nueva solución.

4. Conclusiones

- **Parte 1:** Si bien en un principio el modelo aparenta tener varias variables, un análisis adecuado nos permite llegar a las que realmente influyen en el proceso de optimización. Por otra parte, se hacen evidentes las limitaciones del método gráfico, si bien su carácteristica principal es ser bastante claro al momento de visualizar la región factible y las soluciones, cuando el modelo se vuelve más complejo, el método se vuelve inútil.
- **Parte 2:** Sabemos que hay muchas formas de modelar, por lo mismo hay que considerar varias opciones al momento de escoger un modelo. En un principio nuestro modelo de optimización era complejo, sin embargo, con las debidas modificaciones pudimos simplificar el problema y resolver el tableu en menos iteraciones. A esto, el software nos permitió "jugar" de manera rápida con las variables y restricciones, de manera que pudimos comprobar nuestras sospechas y verificar que el modelo era correcto.
- **Parte 3:** El análisis de sensibilidad nos permite analizar de manera directa los cambios en varias zonas de un modelo, ya sean recursos, variables nuevas, restricciones nuevas, etc. Este proceso nos permite ahorrar bastante tiempo dado que no es necesario volver a resolver el modelo completo. Por otro lado, nos permite tener un control más claro, a la hora de tomar decisiones respecto a las variables que modifican más nuestras predicciones.

5. Anexo

pregunta2.lp

```
/************************************************
* Variables:                                    *
*   i_ed = vehículos Smart Fortwo ED importados.    *
*   i_up = vehículos Volkswagen e-up! importados.   *
*   v_ed = vehículos Smart Fortwo ED vendidos.      *
*   v_up = vehículos Volkswagen e-up! vendidos.     *
*   t    = trabajadores contratados.                *
************************************************/

/* Se restó el 10% directamente */
max: 19800000 v_ed + 27000000 v_up - 18000000 i_ed - 23000000 i_up - 1200000 t;

/* Restricciones */
i_ed >= 20;                  // Al menos importar 20 ED.
i_ed - v_ed >= 3;            // Dejar al menos 3 a fin de mes.
i_up - v_up >= 3;
v_ed - 0.6 i_ed >= 0;        // Vender al menos el 60%.
v_up - 0.6 i_up >= 0;
t = 0.2 i_ed + 0.2 i_up;     // 1 trabajador cada 5 vehículos.
t <= 40;                     // a lo más 40 trabajadores.

/* Naturaleza de las variables */
v_ed >= 0;
v_up >= 0;
i_ed >= 0;
i_up >= 0;
t    >= 0;
```