

0.1.1 EMQM: EINFÜHRUNG IN DAS MANAGEMENT UND SEINE QUANTITATIVEN METHODEN — WIRTSCHAFTSMATHEMATIK —

Vorlesungsskript für die Bachelorstudiengänge IB/IMK/IMA/ITM/IEVM/KKM/IEM/IMM

HENK VAN ELST

30. August 2015

Fakultät I: Betriebswirtschaft und Management
Karlshochschule
International University
Karlstraße 36–38
76133 Karlsruhe
Germany

E-Post: hvanelst@karlshochschule.de

Inhaltsverzeichnis

Qualifikationsziele des Moduls (Auszug)	1
Einleitung	2
1 Vektorrechnung im Euklidischen Raum \mathbb{R}^n	5
1.1 Grundbegriffe und Grundrechenarten	5
1.2 Dimension und Basis des \mathbb{R}^n	7
1.3 Euklidisches Skalarprodukt	8
2 Matrizen	11
2.1 Matrizen als lineare Abbildungen	11
2.2 Grundbegriffe und Grundrechenarten	13
2.3 Matrizenmultiplikation	14
3 Lineare Gleichungssysteme	17
3.1 Grundbegriffe	17
3.2 Gaußscher Algorithmus	18
3.3 Rang einer Matrix	19
3.4 Lösbarkeitskriterien	20
3.5 Inverse einer regulären $(n \times n)$ -Matrix	21
3.6 Ausblick	22
4 Leontiefsches Input–Output–Matrizenmodell	25
4.1 Allgemeines	25
4.2 Input–Output–Matrix und Rohstoffverbrauchsmatrix	27
4.2.1 Input–Output–Matrix	27
4.2.2 Rohstoffverbrauchsmatrix	29
4.3 Stationäre lineare Güterstromrelationen	29
4.3.1 Güterströme endogener INPUT zu gesamtem OUTPUT	29
4.3.2 Güterströme exogener INPUT zu gesamtem OUTPUT	30
4.4 Ausblick	31
5 Lineare Optimierung	33
5.1 Einführung	33
5.2 Grafisches Lösen von Problemen mit zwei Variablen	35

5.3	Dantzig'scher Simplexalgorithmus	36
6	Elementare Finanzmathematik	39
6.1	Arithmetische und geometrische Folgen und Reihen	39
6.1.1	Arithmetische Zahlenfolge und Reihe	39
6.1.2	Geometrische Zahlenfolge und Reihe	40
6.2	Zins und Zinseszins	41
6.3	Tilgung in konstanten Annuitäten	43
6.4	Rentenrechnung	46
6.5	Lineare und geometrisch-degressive Abschreibungen	48
6.5.1	Lineare Abschreibung	48
6.5.2	Geometrisch-degressive Abschreibung	48
6.6	Zusammenfassende Formel	49
7	Differenzialrechnung bei reellen Funktionen	51
7.1	Reelle Funktionen einer Variablen	51
7.1.1	Polynome vom Grad n	53
7.1.2	Gebrochen rationale Funktionen	53
7.1.3	Potenzfunktionen	53
7.1.4	Exponentialfunktionen	54
7.1.5	Logarithmusfunktionen	54
7.1.6	Zusammengesetzte Funktionen	55
7.2	Ableitungen einer differenzierbaren reellen Funktion	55
7.3	Ökonomische Funktionen der Wirtschaftstheorie	57
7.4	Kurvendiskussion	59
7.5	Analytische Untersuchungen ökonomischer Funktionen	60
7.5.1	Kostenfunktionen nach Turgot und von Thünen	60
7.5.2	Ertragsgesetzliche Gewinnfunktionen	62
7.5.3	Extremwerte von Verhältnisgrößen	65
7.6	Elastizitäten	66
8	Integralrechnung bei reellen Funktionen	71
8.1	Unbestimmte Integrale	71
8.2	Bestimmte Integrale	73
8.3	Ökonomische Anwendungen	74
	Literaturverzeichnis	76

Qualifikationsziele des Moduls (Auszug)

Studierende, die dieses Modul erfolgreich absolviert haben, sind in der Lage, die Rollenbilder des Managers im Kontext der Unternehmung und anderer Organisationen sowie in der Gesellschaft zu beschreiben und ausgewählte Aufgabenstellungen des Managements mit Hilfe geeigneter und insbesondere auch quantitativer Methoden zu lösen. Insbesondere sind sie in der Lage,

- ...,
- Aufgaben der Linearen Algebra und der Analysis zu lösen und auf konkrete Fragestellungen der Managementlehre anzuwenden,
- das Gelernte auf aktuelle Fragestellungen und in ausgewählten Fallbeispielen anzuwenden und, auch im Hinblick auf die eigene Verortung im Studium, kritisch zu hinterfragen.

Einleitung

Diese Vorlesungsnotizen begleiten den quantitativen Teil des Moduls „0.1.1 EMQM: Einführung in das Management und seine quantitativen Methoden“ aus dem 1. Studiensemester. Es werden Ihnen darin ausgewählte, in der Praxis bewährte mathematische Werkzeuge zur Behandlung wirtschaftswissenschaftlicher Fragestellungen quantitativer Natur vorgestellt. Die zu besprechenden Werkzeuge bilden das Fundament für einen systematischen Umgang mit einfachen, im Rahmen eines Bachelorstudiums auftretenden quantitativen Problemen. Es geht dabei vor allem um das Verdeutlichen grundlegender Prinzipien in der Anwendung quantitativer Methoden in den Wirtschaftswissenschaften. Darüber hinaus bilden sich genügend thematische Anknüpfungspunkte für die Diskussion weiterführender quantitativer Methoden, die im Rahmen eines vertiefenden wirtschaftswissenschaftlichen Masterstudiums behandelt werden können.

Zum Verständnis der zu besprechenden Themen benötigen Sie an mathematischen Vorkenntnissen lediglich Oberstufenmathematik auf Grundkursniveau, d.h. Sie sollten beispielsweise mit der Bruchrechnung, der Potenzrechnung, den binomischen Formeln, dem Berechnen des Schnittpunktes zweier Geraden, dem Lösen quadratischer Gleichungen, oder der Diskussion der Eigenschaften von (ableitbaren) reellen Funktionen einer Variablen und der Beschreibung ihres lokalen Änderungsverhaltens vertraut sein.

Bei vielen der im Nachfolgenden angesprochenen Themen wird darauf geachtet Ihnen darzulegen, welche Arbeitsschritte bequemerweise von einem modernen grafikfähigen Taschenrechner (**GTR**) übernommen werden können. Gängige aktuelle Modelle, die häufig in Schulen zum Einsatz kommen, sind beispielsweise

- Texas Instruments *TI-84 plus*,
- Casio *CFX-9850GB PLUS*.

Hauptthema dieser Vorlesungsnotizen ist das Erlernen und Anwenden von einfachen und effektiven mathematischen Methoden in einem wirtschaftswissenschaftlich orientierten Umfeld. Hierbei stehen quantitative Aspekte von **Prozessen** der Art

$$\text{INPUT} \rightarrow \text{OUTPUT}$$

im Vordergrund, für die spezielle **funktionale Relationen** zwischen einer bestimmten Menge von zahlenartigen INPUT-Größen und einer zweiten Menge von zahlenartigen OUTPUT-Größen betrachtet werden. Besonderes Interesse kommt hierbei (den Zahlenwerten von) vergleichenden **Verhältnisgrößen** der Struktur

$$\frac{\text{OUTPUT}}{\text{INPUT}}$$

zu. Im Allgemeinen wird man versuchen, die Werte der Größen INPUT und OUTPUT derart zu gestalten, dass daraus ein für den Anwender möglichst günstiger Wert dieser Verhältnisgrößen resultiert. Viele der im Nachfolgenden betrachteten quantitativen Fragestellungen enthalten deshalb als zentralen Aspekt Überlegungen zur **Optimierung** der Werte von Größen. Die Optimierung kann sich wahlweise als **Minimierung** beziehungsweise **Maximierung** manifestieren. Das Thema Optimierung wird in den nachfolgenden Kapiteln einen Roten Faden bilden.

Teil I dieser Vorlesungsnotizen ist ausgewählten mathematischen Methoden aus der **Linearen Algebra** gewidmet und umfasst die Kapitel 1 bis 5. Anwendung finden diese vorallem bei der mengenmäßigen Betrachtung von Güterströmen in einfachen Wirtschaftsmodellen sowie der Linearen Optimierung. In Teil II werden elementare Überlegungen der **Finanzmathematik** kurz angerissen; diese sind in Kapitel 6 zu finden. Grundprinzipien der zur **Analysis** gehörenden Differenzial- und Integralrechnung, und deren exemplarischer Anwendung zur Lösung wirtschaftswissenschaftlicher Probleme quantitativer Natur, treten im Teil III auf und werden dort in den Kapiteln 7 und 8 diskutiert. Das Besprechen von expliziten Rechenbeispielen zu allen angeschnittenen Themengebieten bleibt den Vorlesungen und Übungen dieser Veranstaltung vorbehalten.

Diesen Vorlesungsnotizen unterliegende Fachbücher, sowie interessante begleitende und weiterführende Texte, sind in der Literaturliste am Ende übersichtlich zusammengefasst. Die Vorlesung orientiert sich vornehmlich an den Lehrbüchern von Schreyögg und Koch (2010) [21], Bauer *et al.* (2008) [3], Bosch (2003) [6], Schmalen und Pechtl (2006) [20], Auer und Seitz (2006) [2], sowie Hülsmann *et al.* (2005) [14]. Die Relevanz mathematischer Methoden in der modernen Wirtschaft wird verständlich und eindrucksvoll in dem von Greuel *et al.* (2008) [12] herausgegebenen Buch dargelegt. Über die Wirtschaftswissenschaften hinausgehende Standardwerke der Angewandten Mathematik sind die Bücher von Bronstein *et al.* (2005) [7] und Arens *et al.* (2008) [1]. Wer sich zudem inspiriert fühlt, mehr über Eleganz, Ästhetik und Effizienz mathematischer Methoden, in unterschiedlichsten Forschungs- und Wissensbereichen, zu erfahren, der/m sei ein Blick in die Werke von Penrose (2004) [18], Singh (2002) [22], Gleick (1987) [11] und Smith (2007) [23] empfohlen. Alle hier genannten Bücher sind Ihnen über die Fachbibliothek der Karlsruhochschule International University zugänglich.

Die *.pdf-Version dieser Vorlesungsnotizen enthält aktive Querverweise zu biographischen Informationen der Internetportale The MacTutor History of Mathematics archive (www-history.mcs.st-and.ac.uk) und en.wikipedia.org über Wissenschaftler, die prägend an der historischen Entwicklung der hier besprochenen mathematischen Analyseverfahren beteiligt waren.

Kapitel 1

Vektorrechnung im Euklidischen Raum \mathbb{R}^n

Wir beginnen unsere Betrachtungen mit der Einführung einer speziellen Klasse von mathematischen Objekten, die uns später behilflich sein werden, geeignete Probleme quantitativer Natur mathematisch möglichst elegant und kompakt zu formulieren. Neben diesen mathematischen Objekten müssen wir zusätzlich definieren, welche Rechenoperationen wir auf diese Objekte anwenden können, und welche Regeln hierbei zu beachten sind.

1.1 Grundbegriffe und Grundrechenarten

Gegeben sei eine Menge V von mathematischen Objekten \mathbf{a} , die wir als eine Ansammlung von jeweils n beliebigen reellen Zahlen $a_1, \dots, a_i, \dots, a_n$ betrachten wollen, also

$$V = \left\{ \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n \right\}. \quad (1.1)$$

Diese n reellen Zahlen können wir formal entweder in einer Spalte oder aber in einer Zeile anordnen. Wir definieren:

Def.: Reellwertiger **Spaltenvektor** (engl.: column vector) mit n Komponenten

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.2)$$

Schreibweise: $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$,

und

Def.: Reellwertiger **Zeilenvektor** (engl.: row vector) mit n Komponenten

$$\mathbf{a}^T := (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) , \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n , \quad (1.3)$$

Schreibweise: $\mathbf{a}^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$.

Entsprechend werden die durch

$$\mathbf{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{0}^T := (0, \dots, 0, \dots, 0) \quad (1.4)$$

definierten Objekte n -komponentige **Nullvektoren** (engl.: zero vector) genannt.

Als nächstes definieren wir für gleichartige Elemente aus der Menge V , also entweder für n -komponentige Spaltenvektoren oder für n -komponentige Zeilenvektoren, zwei einfache Rechenoperationen:

Def.: Addition von Vektoren (engl.: addition of vectors)

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_i + b_i \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} , \quad a_i, b_i \in \mathbb{R} , \quad (1.5)$$

und

Def.: Skalieren von Vektoren (engl.: scaling of vectors)

$$\lambda \mathbf{a} := \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} , \quad \lambda, a_i \in \mathbb{R} . \quad (1.6)$$

Das Skalieren eines Vektors \mathbf{a} mit einer von Null verschiedenen reellen Zahl λ hat folgende Auswirkungen auf diesen:

- $|\lambda| > 1$ — Streckung der Länge von \mathbf{a}
- $0 < |\lambda| < 1$ — Stauchung der Länge von \mathbf{a}

- $\lambda < 0$ — Richtungsumkehr von \mathbf{a} ;

den Begriff der Länge eines Vektors \mathbf{a} werden wir in Kürze präzisieren. Bei der Addition bzw. dem Skalieren von n -komponentigen Vektoren sind folgende Rechenregeln zu beachten:

Rechenregeln für Addition und Skalierung von Vektoren

Für Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$:

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (Kommutativität)
2. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ (Assoziativität)
3. Zu \mathbf{a} und \mathbf{b} gibt es genau ein \mathbf{x} , sodass $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$ (Umkehrbarkeit)
4. $(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ (Assoziativität)
5. $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ (Skalenfestlegung)
6. $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$;
 $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (Distributivität).

Wir bemerken zum Schluss: jede entsprechend Gl. (1.1) konstruierte Menge V von Objekten, für deren Elemente eine Addition sowie eine Skalierung wie in Gln. (1.5) und (1.6) definiert sind, und die den angeführten Rechenregeln genügen, wird **linearer Vektorraum über dem Euklidischen Raum \mathbb{R}^n** genannt (engl.: linear vector space over Euclidian space \mathbb{R}^n).¹

1.2 Dimension und Basis des \mathbb{R}^n

Gegeben seien m n -komponentige Vektoren² $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ sowie m reelle Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. Wird aus diesen unter Anwendung der oben eingeführten Rechenoperationen Addition und Skalierung von Vektoren ein neuer n -komponentiger Vektor \mathbf{b} nach der Vorschrift

$$\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_i \mathbf{a}_i + \dots + \lambda_m \mathbf{a}_m =: \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n \quad (1.7)$$

konstruiert, so nennt man \mathbf{b} eine **Linearkombination** (engl.: linear combination) der m Vektoren \mathbf{a}_i , $i = 1, \dots, m$.

Def.: m Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ heißen voneinander **linear unabhängig** (engl.: linearly independent), wenn aus der Bedingung

$$\mathbf{0} \stackrel{!}{=} \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_i \mathbf{a}_i + \dots + \lambda_m \mathbf{a}_m = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{a}_i, \quad (1.8)$$

¹ Benannt nach dem griechischen Mathematiker Euklid von Alexandria (ca. 325 v. Chr.–ca. 265 v. Chr.).

² Zur Kennzeichnung n -komponentiger Spaltenvektoren $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ schreibt man oft auch verkürzend $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$; gelegentlich ebenfalls $\mathbf{a}^T \in \mathbb{R}^n$ für n -komponentige Zeilenvektoren $\mathbf{a}^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$.

also der Aufgabe, aus den m Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ durch Linearkombination den **Nullvektor** $\mathbf{0}$ zu konstruieren, zwingend als einzige Lösung $0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_i = \dots = \lambda_m$ folgt. Kann diese Bedingung hingegen mit $\lambda_i \neq 0$ erfüllt werden, so heißen die m Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ voneinander **linear abhängig** (engl.: linearly dependent).

Im Euklidischen Raum \mathbb{R}^n können maximal n (!) Vektoren voneinander linear unabhängig sein. Diese Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren heißt **Dimension des Euklidischen Raumes** \mathbb{R}^n (engl.: dimension of Euclidian space \mathbb{R}^n). Jede Menge von n linear unabhängigen Vektoren des Euklidischen Raumes \mathbb{R}^n bildet eine mögliche **Basis des Euklidischen Raumes** \mathbb{R}^n (engl.: basis of Euclidian space \mathbb{R}^n). Ist $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n\}$ eine Basis des \mathbb{R}^n , so gilt für alle weiteren Vektoren $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \beta_i \mathbf{a}_i + \dots + \beta_n \mathbf{a}_n = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{a}_i. \quad (1.9)$$

Die Zahlen $\beta_i \in \mathbb{R}$ heißen die **Komponenten von \mathbf{b} bezüglich der Basis** $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n\}$ (engl.: components of \mathbf{b} with respect to the given basis).

Bem.: Die n Einheitsvektoren (engl.: unit vectors)

$$\mathbf{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

bilden die sogenannte **kanonische Basis des Euklidischen Raumes** \mathbb{R}^n (engl.: canonical basis of Euclidian space \mathbb{R}^n). Bezüglich dieser sind alle Vektoren $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ als Linearkombinationen

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + \dots + b_n \mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^n b_i \mathbf{e}_i \quad (1.11)$$

darstellbar.

1.3 Euklidisches Skalarprodukt

Schließlich führen wir noch eine dritte Rechenoperation für Vektoren des \mathbb{R}^n ein.

Def.: Für einen n -komponentigen Zeilenvektor $\mathbf{a}^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ und einen n -komponentigen Spaltenvektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ definiert das **Euklidische Skalarprodukt** (engl.: Euclidian scalar product)

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} := (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \dots + a_i b_i + \dots + a_n b_n =: \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad (1.12)$$

eine Abbildung $f : \mathbb{R}^{1 \times n} \times \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. eine Abbildung dieser beiden Vektoren in die Menge der reellen Zahlen.

Beachten Sie, dass im Unterschied zur Addition oder dem Skalieren von Vektoren das Resultat einer Skalarproduktbildung *eine einzige reelle Zahl* darstellt.

Zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ (mit $\mathbf{a} \neq \mathbf{0} \neq \mathbf{b}$) werden zueinander **orthogonal** genannt, wenn sie die Eigenschaft $0 = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{a}$ aufweisen.

Rechenregeln für das Skalarprodukt von Vektoren

Für Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$:

1. $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^T \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{c}$ (Distributivität)
2. $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{a}$ (Kommutativität)
3. $(\lambda \mathbf{a}^T) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b})$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ (Homogenität)
4. $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a} > 0$ für alle $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ (positive Definitheit).

Nun wenden wir uns dem Begriff der Länge eines n -komponentigen Vektors zu.

Def.: Die **Länge** (engl.: length) eines Vektors $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$|\mathbf{a}| := \sqrt{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_i^2 + \dots + a_n^2} =: \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}. \quad (1.13)$$

Die nichtnegative reelle Zahl $|\mathbf{a}|$ wird technisch auch Betrag von \mathbf{a} bzw. Euklidische Norm von \mathbf{a} genannt. Die Länge von $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ genügt folgenden Eigenschaften:

- $|\mathbf{a}| \geq 0$; $|\mathbf{a}| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$;
- $|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}|$ für $\lambda \in \mathbb{R}$;
- $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ (Dreiecksungleichung).

Jeder Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ mit $|\mathbf{a}| > 0$ kann durch seine Länge dividiert (mit dem Kehrwert seiner Länge skaliert) werden.

Def.: **Normieren** (engl.: normalisation) eines Vektors $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$;

$$\hat{\mathbf{a}} := \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \quad \Rightarrow \quad |\hat{\mathbf{a}}| = 1. \quad (1.14)$$

Dadurch erhält man einen Vektor der Länge 1, einen **Einheitsvektor** $\hat{\mathbf{a}}$. Zur Kennzeichnung dessen verwenden wir das Symbol „Dach“.

Abschließend führen wir über das Skalarprodukt den zwischen zwei Vektoren von Länge ungleich Null eingeschlossenen Winkel ein.

Def.: Winkel (engl.: angle) zwischen $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$

$$\cos[\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b})] = \frac{\mathbf{a}^T}{|\mathbf{a}|} \cdot \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \hat{\mathbf{a}}^T \cdot \hat{\mathbf{b}} \quad \Rightarrow \quad \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \cos^{-1}(\hat{\mathbf{a}}^T \cdot \hat{\mathbf{b}}) . \quad (1.15)$$

Bem.: Die inverse Kosinusfunktion³ $\cos^{-1}(\dots)$ wird durch jeden GTR zur Verfügung gestellt.

³Der Begriff einer inversen Funktion wird in Kapitel 7 geklärt werden.

Kapitel 2

Matrizen

In diesem Kapitel führen wir eine zweite, im Vergleich zu Vektoren allgemeinere Klasse von mathematischen Objekten ein, ebenfalls mit geeigneten Rechenoperationen und Rechenregeln.

2.1 Matrizen als lineare Abbildungen

Gegeben sei jetzt eine Ansammlung von $m \times n$ beliebigen reellen Zahlen $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{mn}$, die wir nach einer einfachen Vorschrift systematisch zusammenfassen wollen.

Def.: Eine reelle $(m \times n)$ -**Matrix** (engl.: matrix) sei formal durch ein Zahlenschema der Struktur

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$, definiert.

Schreibweise: $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Besondere Eigenschaften dieses Zahlenschemas sind:

- m ist die Anzahl der **Zeilen** (engl.: rows) von \mathbf{A} , n die Anzahl der **Spalten** (engl.: columns) von \mathbf{A} .
- a_{ij} sind die **Elemente** (engl.: elements) von \mathbf{A} ; a_{ij} steht im Kreuzungspunkt von i -ter Zeile und j -ter Spalte von \mathbf{A} .
- Elemente der i -ten Zeile bilden den **Zeilenvektor** $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{in})$, Elemente der

j -ten Spalte den **Spaltenvektor** $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$.

Spaltenvektoren sind also formal $(n \times 1)$ -Matrizen, Zeilenvektoren formal $(1 \times n)$ -Matrizen. Matrizen mit *gleicher* Anzahl von Zeilen und Spalten, also $m = n$, werden **quadratische Matrizen** (engl.: quadratic matrices) genannt. Unter den quadratischen Matrizen hat die $(n \times n)$ -**Einheitsmatrix** (engl.: unit matrix)

$$\mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

ausgezeichneten Status.

Als nächstes klären wir, in welchem Sinne wir $(m \times n)$ -Matrizen als mathematische Objekte begreifen wollen.

Def.: Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ definiert über die Rechenoperation

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &:= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \mathbf{y}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

eine **Abbildung** (engl.: mapping) $\mathbf{A} : \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times 1}$, d.h. eine Abbildung der Menge der n -komponentigen Spaltenvektoren (hier: \mathbf{x}) in die Menge der m -komponentigen Spaltenvektoren (hier: \mathbf{y}).

In loser Analogie repräsentieren \mathbf{x} das „Objekt“, \mathbf{A} die „Kamera“ und \mathbf{y} das „Bild“.

Da diese durch $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gegebene Art von Abbildungsvorschrift, für Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ und reelle Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$, die zwei besonderen Eigenschaften

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) &= (\mathbf{A}\mathbf{x}_1) + (\mathbf{A}\mathbf{x}_2) \\ \mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}_1) &= \lambda(\mathbf{A}\mathbf{x}_1) \end{aligned} \quad (2.4)$$

aufweist, stellen Matrizenabbildungen so genannte **lineare Abbildungen** (engl.: linear mappings) dar.¹

Jetzt gehen wir kurz auf die wichtigsten Rechenoperationen für $(m \times n)$ -Matrizen sowie deren Rechenregeln ein.

2.2 Grundbegriffe und Grundrechenarten

Def.: Transponieren (engl.: transpose) von Matrizen

Für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$\mathbf{A}^T: \quad a_{ij}^T := a_{ji}, \quad (2.5)$$

mit $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$. Beachte, dass $\mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Beim Transponieren einer $(m \times n)$ -Matrix werden ganz einfach deren Zeilen mit deren Spalten (und umgekehrt) vertauscht; in der entsprechenden Reihenfolge werden dabei die Elemente der ersten Zeile die Elemente der ersten Spalte, usw. Hieraus folgt insbesondere die Eigenschaft

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}. \quad (2.6)$$

Für quadratische Matrizen (mit $m = n$) können zwei Spezialfälle auftreten:

- Falls $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, wird von einer **symmetrischen Matrix** (engl.: symmetric matrix) gesprochen,
- Falls $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$, von einer **antisymmetrischen Matrix** (engl.: antisymmetric matrix).

Def.: Addition von Matrizen (engl.: addition of matrices)

Für $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sei

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} =: \mathbf{C}: \quad a_{ij} + b_{ij} =: c_{ij}. \quad (2.7)$$

mit $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$.

Beachte, dass nur Matrizen von *gleichem Format* miteinander addiert werden können.

¹An dieser Stelle soll ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dass in konkreten praktischen Anwendungen quantitative Relationen die Bedingungen (2.4) häufig *nicht* erfüllen, man es also mit *nichtlinearen Abbildungen* zu tun hat. Lineare Methoden können jedoch oft hilfreiche erste Näherungen zur Verfügung stellen.

Def.: Skalieren von Matrizen (engl.: scaling of matrices)

Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei

$$\lambda A =: C: \quad \lambda a_{ij} =: c_{ij}, \quad (2.8)$$

mit $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$.

Beim Skalieren einer Matrix werden alle ihre Elemente mit der gleichen reellen Zahl λ multipliziert.

Rechenregeln für Addition und Skalierung von Matrizen

Für Matrizen $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gelten:

1. $A + B = B + A$ (Kommutativität)
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Assoziativität)
3. Zu A und B gibt es genau ein Z , sodass $A + Z = B$. (Umkehrbarkeit)
4. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (Assoziativität)
5. $1A = A$ (Skalenfestlegung)
6. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
 $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (Distributivität)
7. $(A + B)^T = A^T + B^T$ (Transpositionsregel 1)
8. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Transpositionsregel 2)

Nun besprechen wir eine für Matrizen besonders nützliche Rechenoperation.

2.3 Matrizenmultiplikation

Def.: Für eine $(m \times n)$ -Matrix A und eine $(n \times r)$ -Matrix B definiert das **Matrizenprodukt** (engl.: matrix multiplication)

$$\begin{array}{c} AB =: C \\ a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{ik}b_{kj} + \dots + a_{in}b_{nj} =: \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} =: c_{ij}, \end{array} \quad (2.9)$$

mit $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, r$, eine $(m \times r)$ -Matrix C , d.h. $C \in \mathbb{R}^{m \times r}$.

Das Element am Kreuzungspunkt der i -ten Zeile und j -ten Spalte von C ist bestimmt durch die Vorschrift

$$c_{ij} = \text{Skalarprodukt zwischen } i\text{-tem Zeilenvektor von } A \text{ und } j\text{-tem Spaltenvektor von } B. \quad (2.10)$$

Beachten Sie bitte: die Definition der oben eingeführten Matrizenmultiplikation hängt essenziell von der Tatsache ab, dass die im Produkt *links stehende Matrix A genau so viele (!) Spalten haben muss wie die rechts stehende Matrix B Zeilen*. Anderfalls lässt sich die Matrizenmultiplikation nicht sinnvoll definieren.

GTR: Für eingespeicherte Matrizen $[A]$ und $[B]$, von passenden Formaten, berechnet sich das Matrizenprodukt im Modus $\text{MATRIX} \rightarrow \text{NAMES}$ über $[A] * [B]$.

Rechenregeln für die Matrizenmultiplikation

Für A, B, C reelle Matrizen von entsprechendem Format gelten:

1. $AB = 0$ ist möglich mit $A \neq 0, B \neq 0$. (Nullteiler)
2. $A(BC) = (AB)C$ (Assoziativität)
3. $A \underbrace{1}_{\in \mathbb{R}^{n \times n}} = \underbrace{1}_{\in \mathbb{R}^{m \times m}} A = A$ (Neutrale Elemente)
4. $(A + B)C = AC + BC$
 $C(A + B) = CA + CB$ (Distributivität)
5. $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ (Homogenität)
6. $(AB)^T = B^T A^T$ (Transponierungsregel).

Kapitel 3

Lineare Gleichungssysteme

Der Inhalt dieses Kapitels ist relevant für das Verständnis der in Kapitel 5.2 des Lehrbuchs von Schreyögg und Koch (2010) [21] behandelten quantitativen Themen.

In diesem Kapitel wenden wir uns nun einem anwendungsbezogenen Einsatzgebiet von Matrizen und Vektoren, also von linearen Abbildungen, zu.

3.1 Grundbegriffe

Ausgangspunkt ist ein System von m Gleichungen, welche, jede für sich, eine *lineare Bedingung* an die Werte von n Variablen $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ stellt. Diese Bedingungen sind simultan zu erfüllen. Wir finden Probleme dieser Art, so genannte **lineare Gleichungssysteme (LGS)** (engl.: systems of linear equations), häufig in der Form geschrieben:

- Darstellung 1:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & \vdots & \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n & = & b_i \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m . \end{array} \quad (3.1)$$

Je nach Verhältnis der das Format des LGS festlegenden natürlichen Zahlen m und n zueinander, werden LGS wie folgt klassifiziert:

- $m < n$: weniger Gleichungen als Variablen; das LGS ist **unterbestimmt** (engl.: under-determined),
- $m = n$: gleich viel Gleichungen wie Variablen; das LGS ist **wohlbestimmt** (engl.: well-determined),

- $m > n$: mehr Gleichungen als Variablen; das LGS ist **überbestimmt** (engl.: over-determined).

Eine kompaktere Darstellungsweise eines LGS vom Format $(m \times n)$ liefert die folgende Variante:

- Darstellung 2:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \mathbf{b}. \quad (3.2)$$

Hierbei haben wir uns folgender mathematischer Objekte zur Bündelung relevanter Informationen bedient: \mathbf{A} ist die so genannte **Koeffizientenmatrix** (engl.: coefficient matrix) des LGS, vom Format $(m \times n)$, \mathbf{x} der **Variablenvektor** (engl.: variable vector), vom Format $(n \times 1)$, und \mathbf{b} der **Absolutgliedvektor** (engl.: image vector), vom Format $(m \times 1)$.

Die zentrale Frage bei der Beschäftigung mit LGS, in dieser zweiten Darstellung, lautet:

Frage: Gibt es einen **Objektvektor** \mathbf{x} , der sich durch die vorgegebene **Matrix** \mathbf{A} auf den vorgegebenen **Bildvektor** \mathbf{b} abbilden lässt?

Erfreulicherweise steht uns eine einfache systematische Methode zur Verfügung, diese Frage zu beantworten, also LGS zu lösen. Es handelt sich hierbei um einen Algorithmus, der von dem deutschen Mathematiker und Astronomen Carl Friedrich Gauß (1777–1855) entwickelt wurde.

3.2 Gaußscher Algorithmus

Der von Gauß entwickelte Lösungsalgorithmus (engl.: Gaussian elimination) basiert auf der Einsicht: die Lösungsmenge eines **linearen Gleichungssystems** von m Gleichungen für n Variablen,

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (3.3)$$

bleibt durch folgende **äquivalente Umformungen** (engl.: algebraic equivalence transformations) unverändert:

1. Vertauschen zweier Gleichungen.
2. Multiplizieren einer Gleichung mit einer reellen Zahl $c \neq 0$.
3. Addieren eines Vielfachen einer Gleichung zu einer zweiten.
4. Ändern der Reihenfolge der Variablen.

Letztendlich bedeutet dies, wir können ein gegebenes LGS mithilfe dieser vier Äquivalenzschritte beliebig manipulieren, ohne seinen Gehalt, sprich: seine Identität, zu verändern. Natürlich sollen

im konkreten Fall die vier Äquivalenzschritte nicht wahllos zum Einsatz kommen; der Gaußsche Algorithmus zeichnet eine zielgerichtete Lösungsstrategie vor.

Ziel: Die **erweiterte Koeffizientenmatrix** $(A|b)$ (engl.: augmented coefficient matrix), also das Zahlenschema

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}, \quad (3.4)$$

soll, wenn möglich, durch Anwendung von äquivalenten Umformungen auf so genannte **obere Dreiecksgestalt** (engl.: upper triangular form)

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & \dots & \tilde{a}_{1j} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \tilde{a}_{ij} & \dots & \tilde{a}_{in} & \tilde{b}_i \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \tilde{a}_{mn} & \tilde{b}_m \end{array} \quad (3.5)$$

transformiert werden, um sodann das diesem Endschema unterliegende einfachere lineare Gleichungssystem durch **rückwertige Substitution** (engl.: backward substitution) explizit zu lösen.

Drei Fälle **resultierender Lösungsmöglichkeiten** können nun auftreten. Das LGS hat entweder

1. *keine* Lösung (engl.: no solution), oder eine
2. *eindeutige* Lösung (engl.: unique solution), oder eine
3. *mehrdeutige* Lösung (engl.: multiple solutions).

Bem: Unterbestimmte LGS, also wenn $m < n$, sind niemals eindeutig lösbar. Denn es gibt dann zu wenig Bedingungen, um den Wert einer jeden der n Variablen festzulegen.

GTR: Für eine eingespeicherte erweiterte Koeffizientenmatrix $[A]$ vom Format $(m \times n + 1)$ eines gegebenen LGS vom Format $(m \times n)$ kann im Modus MATRIX \rightarrow MATH die Funktion $\text{rref}([A])$ angewendet werden. Je nach Lösungsfall ist die rückwertige Substitution möglicherweise von Hand durchzuführen.

Der Vollständigkeit halber wollen wir uns kurz der Theorie der Lösbarkeit eines LGS vom Format $(m \times n)$ zuwenden. Hierzu benötigen wir den im nächsten Abschnitt definierten Begriff.

3.3 Rang einer Matrix

Def.: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ besitzt den **Rang** (engl.: rank)

$$\boxed{\text{Rg}(A) = r, \quad r \leq \min\{m, n\}} \quad (3.6)$$

genau dann, wenn r die **maximale Anzahl** voneinander linear unabhängiger Zeilen- bzw. Spaltenvektoren von \mathbf{A} ist. r kann nur so groß sein, wie die kleinere der das Format von \mathbf{A} bestimmenden Zahlen m und n .

Für **quadratische Matrizen** $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kann ein alternatives, eleganteres Kriterium zur Bestimmung des Ranges der Matrix \mathbf{A} herangezogen werden. Man arbeitet dabei mit einer (z.B. mit dem GTR zu berechnenden) Kennzahl, die die **Determinante** (engl.: determinant) der quadratischen Matrix \mathbf{A} , $\det(\mathbf{A})$, genannt wird.

Def.:

- (i) Wenn $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, ist die **Determinante** von \mathbf{A} durch

$$\det(\mathbf{A}) := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (3.7)$$

definiert, also durch die Differenz der Produkte der Hauptdiagonal- und der Nebendiagonalelemente von \mathbf{A} .

- (ii) Falls $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, gilt

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &:= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &:= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{21}(a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Beachte hierbei das zyklische Vertauschen von Term zu Term jeweils des ersten Index eines Elements a_{ij} von \mathbf{A} nach der Regel $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$.

- (iii) Die Definition der **Determinante** $\det(\mathbf{A})$ für den allgemeinen Fall $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist z.B. in Bronstein *et al* (2005) [7, S. 267] zu finden.

Zur Bestimmung des Rangs einer quadratischen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wird nun festgelegt: $\text{Rg}(\mathbf{A}) = r = n$, falls $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, und $\text{Rg}(\mathbf{A}) = r < n$, falls $\det(\mathbf{A}) = 0$. Im ersten Fall heißt \mathbf{A} **regulär** (engl.: regular), im zweiten Fall **singulär** (engl.: singular). Für singuläre quadratische Matrizen \mathbf{A} ist der Rang $\text{Rg}(\mathbf{A}) = r$ (mit $r < n$) bestimmt durch die Anzahl r der Zeilen (Spalten) der größtmöglichen von Null verschiedenen Unterdeterminante von \mathbf{A} .

GTR: Für eine eingespeicherte quadratische Matrix $[\mathbf{A}]$ kann im Modus MATRIX \rightarrow MATH ihre Determinante leicht über die Funktion $\det([\mathbf{A}])$ berechnet werden.

3.4 Lösbarkeitskriterien für lineare Gleichungssysteme

Auf die Theorie der Lösbarkeit eines LGS vom Format $(m \times n)$ kann nun kurz in tabellarischer Form eingegangen werden. Für lineare Gleichungssysteme

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, gilt:

	$\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$	$\mathbf{b} = \mathbf{0}$
1. $\text{Rg}(\mathbf{A}) \neq \text{Rg}(\mathbf{A} \mathbf{b})$	unlösbar	——
2. $\text{Rg}(\mathbf{A}) = \text{Rg}(\mathbf{A} \mathbf{b}) = r$		
(a) $r = n$	eindeutig lösbar	$\mathbf{x} = \mathbf{0}$
(b) $r < n$	mehrdeutig lösbar, $n - r$ freie Parameter	mehrdeutig lösbar, $n - r$ freie Parameter

$(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ bezeichnet die **erweiterte Koeffizientenmatrix** (engl.: augmented coefficient matrix).

Dieses Kapitel abschließend wenden wir uns nun einer besonderen, für Anwendungen äußerst nützlichen Eigenschaft der Klasse von *regulären* quadratischen Matrizen zu.

3.5 Inverse einer regulären $(n \times n)$ -Matrix

Def.: Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine **reguläre** quadratische Matrix, d.h. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Dann ist die **Inverse** \mathbf{A}^{-1} (engl.: inverse matrix) von \mathbf{A} definiert durch die Relationen

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1},} \quad (3.9)$$

wobei $\mathbf{1}$ die $(n \times n)$ -**Einheitsmatrix** bezeichnet [vgl. Gl. (2.2)].

Von Hand berechnet man die zu einer regulären quadratischen Matrix \mathbf{A} Inverse \mathbf{A}^{-1} über Anwendung des **simultanen Gaußschen Algorithmus** (engl.: simultaneous Gaussian elimination).

GTR: Für eine eingespeicherte reguläre quadratische Matrix $[\mathbf{A}]$ kann die Inverse über $[\mathbf{A}]^{-1}$ berechnet werden. Beachten Sie, dass hierbei die x^{-1} -Funktionstaste zu verwenden ist.

Rechenregeln für Inversbildungen

Für $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det(\mathbf{A}) \neq 0 \neq \det(\mathbf{B})$ gilt:

1. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
3. $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$
4. $(\lambda\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{A}^{-1}$.

Für Anwendungen ist das Konzept einer inversen Matrix aus folgendem Grunde von Interesse. Gegeben sei ein LGS

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

vom Format $(n \times n)$, mit *regulärer* quadratischer Koeffizientenmatrix \mathbf{A} , also $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Dann existiert eine zu \mathbf{A} inverse Matrix \mathbf{A}^{-1} . Matrizenmultiplizieren wir beide Seiten des LGS von *links* (!) mit der Inversen \mathbf{A}^{-1} , so ergibt sich dadurch

$$\underbrace{\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x})}_{\text{linke Seite}} = \underbrace{(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x}}_{\text{linke Seite}} = \underbrace{\mathbf{1}\mathbf{x}}_{\text{linke Seite}} = \underbrace{\mathbf{x}}_{\text{linke Seite}} = \underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}}_{\text{rechte Seite}}. \quad (3.10)$$

Die eindeutige (!) Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ des LGS lässt sich in diesem Fall elegant durch eine einfache Matrizenmultiplikation mit der zu \mathbf{A} Inversen erhalten.

3.6 Ausblick

Die **Lineare Algebra** beinhaltet viele spannende weiterführende Themen. Von besonderer Relevanz für praktische Anwendungen ist das Thema der **Eigenwerte** (engl.: eigenvalues) und den zugeordneten **Eigenvektoren** (engl.: eigenvectors) von **quadratischen Matrizen**, welche letztere in besonderer Art und Weise charakterisieren. Die Fragestellung ist hierbei die folgende: Für eine gegebene quadratische reellwertige Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, existieren reelle Zahlenwerte $\lambda_n \in \mathbb{R}$ und reellwertige Vektoren $\mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$, die die Bedingung

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_n \stackrel{!}{=} \lambda_n \mathbf{v}_n \quad (3.11)$$

erfüllen? Anders gewendet lautet das Problem: Für welche Vektoren $\mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ lässt sich deren Abbildung durch eine vorgegebene Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ auf ein einfaches Skalieren dieser Vektoren mit Zahlenwerten $\lambda_n \in \mathbb{R}$ zurückführen?

Durch Umstellen und Ausklammern erhält man aus Gl. (3.11) die alternative Bedingung

$$\mathbf{0} \stackrel{!}{=} (\mathbf{A} - \lambda_n \mathbf{1}) \mathbf{v}_n, \quad (3.12)$$

mit $\mathbf{1}$ einer $(n \times n)$ -Einheitsmatrix [vgl. Gl. (2.2)] und $\mathbf{0}$ einem n -komponentigen Nullvektor. Diese Bedingung entspricht einem zu lösenden homogenen LGS vom Format $(n \times n)$. Nichttriviale Lösungen dieses homogenen LGS, also Lösungen für den Fall $\mathbf{v}_n \neq \mathbf{0}$, existieren unter der

Voraussetzung, dass die durch ein Polynom vom Grad n (vgl. Abschnitt 7.1.1) gegebene **charakteristische Gleichung** (engl.: characteristic equation)

$$0 \stackrel{!}{=} \det(\mathbf{A} - \lambda_n \mathbf{1}) \quad (3.13)$$

reellwertige Nullstellen $\lambda_n \in \mathbb{R}$ besitzt. Symmetrische quadratische Matrizen (vgl. Abschnitt 2.2) besitzen ausschließlich reelle Eigenwerte λ_n .

Kenntnis des Spektrums der **Eigenwerte** $\lambda_n \in \mathbb{R}$ und der **Eigenvektoren** $\mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ einer reellwertigen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bildet die Grundlage einer Transformation von \mathbf{A} auf **Diagonalgestalt** \mathbf{A}_{λ_n} (engl.: diagonal form), wobei die Eigenwerte λ_n die Diagonalelemente von \mathbf{A}_{λ_n} bilden. Details dieser Fragestellung sind z.B. in Arens *et al* (2008) [1, S. 585ff] zu finden.

Eine besondere Rolle spielt das Konzept der Eigenwerte und Eigenvektoren von quadratischen reellwertigen Matrizen z.B. in der **Statistik**, im Rahmen explorativer **Hauptkomponentenanalysen** (engl.: exploratory principal component analysis) multivariater Datensätze zur Identifikation von dominanten datenintrinsischen Strukturen; vgl. z.B. Rinne (2008) [19, S. 699ff].

Kapitel 4

Stationäres Leontiefsches Input–Output–Matrizenmodell

Der Inhalt dieses Kapitels ist relevant für das Verständnis der in Kapitel 5.2 des Lehrbuchs von Schreyögg und Koch (2010) [21] behandelten quantitativen Themen.

Dieses Kapitel befasst sich mit einem Teilbereich der Wirtschaftstheorie, in welchem einfache, in den vorangegangenen Kapiteln besprochene Methoden der linearen Algebra herangezogen werden, um Prozesse des Güteraustauschs zwischen wirtschaftstreibenden Akteuren möglichst realitätsnah quantitativ zu modellieren.

4.1 Allgemeines

Das zu betrachtende Modell (engl.: Leontief’s stationary input–output matrix model) dient der quantitativen Beschreibung von Güterströmen in einem wirtschaftlichen System mit n **interdependenten Produktionssektoren** während eines vorgegebenen Zeitraums. Es wurde in seinen Grundlagen von dem russischen Wirtschaftswissenschaftler Wassily Wassiljewitsch Leontief (1905–1999) entwickelt, vgl. Leontief (1936) [17], der, unter anderem für diese Leistung, im Jahre 1973 mit dem Preis für Wirtschaftswissenschaften im Gedenken an Alfred Nobel ausgezeichnet wurde.

Der Einfachheit halber werde jeder der n , der Annahme nach interdependenten (d.h., aufeinander angewiesenen) Produktionssektoren genau *ein* Gut her; die im betrachteten Zeitraum brutto produzierten und auch ausgelieferten Mengen dieser n Güter sind die **OUTPUT–Größen** des Modells. Die **INPUT–Größen** des betrachteten Produktionsmodells gliedern sich in *zwei* Bereiche. Einerseits gibt es so genannte **exogene** INPUT–Größen; darunter verstehen wir hier die Mengen von m verschiedenen **Rohstoffen**, aus welchen, in unterschiedlichen Mischungsverhältnissen, die n Güter gefertigt werden. Andererseits gibt es so genannte **endogene** INPUT–Größen; dies sind hier Mengen der **Güter der Nachbarproduzenten**, die ein einzelner Produzent zusätzlich (neben den Rohstoffen), im Sinne von Zulieferungen, zur Fertigung seines eigenen Gutes benötigt.

Die OUTPUT-Größen des Modells, also die im betrachteten Zeitraum produzierten und ausgelieferten Mengen der n verschiedenen Güter, fließen durch *zwei* Kanäle ab: (i) zu Teilen durch einen **exogenen** Kanal zu den **Endverbrauchern** des offenen Marktes, und (ii) zu Teilen durch einen **endogenen** Kanal zu den **Nachbarproduzenten**. Als Impulsgeber der zu betrachtenden Güterströme gilt die **Wertschöpfung**.

Das Leontiefsche Modell basiert auf den folgenden drei grundlegenden

Annahmen:

1. Für alle Güter sei der funktionale Zusammenhang zwischen den INPUT- und den OUTPUT-Mengen von **linearer Natur** [vgl. Gl. (2.4)].
2. Die Mengenverhältnisse „INPUT zu OUTPUT“ seien über den betrachteten Zeitraum hinweg **konstant** gehalten, die Güterströme also als **stationär** (engl.: stationary) anzusehen.
3. Es herrsche **ökonomisches Gleichgewicht** (engl.: economic equilibrium): die im betrachteten Zeitraum produzierte Mengen der Güter entsprechen ihren in diesem Zeitraum (aufgrund entsprechender Nachfrage) abgesetzten Mengen.

Zur mathematischen Formulierung von Leontiefs quantitativem Modell bedienen wir uns folgender

Vektor- und matrizenwertige Größen:¹

1. q — **Bruttoproduktionsvektor** $\in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $q_i \geq 0$ ME (dim: ME)
(engl.: total output vector)
2. y — **Endnachfragevektor** $\in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $y_i \geq 0$ ME (dim: ME)
(engl.: final demand vector)
3. P — **Input-Output-Matrix (Direktbedarfsmatrix)** $\in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_{ij} \geq 0$ (dim: 1)
(engl.: input-output matrix)
4. $(1 - P)$ — **Technologiematrix** $\in \mathbb{R}^{n \times n}$, invertierbar (dim: 1)
(engl.: technology matrix)
5. $(1 - P)^{-1}$ — **Gesamtbedarfsmatrix** $\in \mathbb{R}^{n \times n}$ (dim: 1)
(engl.: total demand matrix)
6. v — **Rohstoffvektor** $\in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $v_i \geq 0$ ME (dim: ME)
(engl.: resource vector)
7. R — **Rohstoffverbrauchsmatrix** $\in \mathbb{R}^{m \times n}$, $R_{ij} \geq 0$, (dim: 1)
(engl.: resource consumption matrix)

wobei 1 die $(n \times n)$ -**Einheitsmatrix** bezeichnet [vgl. Gl. (2.2)]. Beachten Sie, dass die Komponenten aller Vektoren sowie der Input-Output-Matrix und der Rohstoffverbrauchsmatrix nur *nichtnegative Werte (!)* annehmen können.

¹Die Abkürzung ME steht für „Mengeneinheiten“.

4.2 Input-Output-Matrix und Rohstoffverbrauchsmatrix

Wir wenden uns nun den Definitionen und Eigenschaften der zwei zentralen matrixwertigen Größen des Leontiefschen Modells zu.

4.2.1 Input-Output-Matrix

Wir beginnen mit einer **Bilanzierung** der OUTPUT-Mengen eines jeden der n Produktionssektoren, d.h. bestimmte **Gütermengen** (engl.: amounts of goods) und die handelsbedingten, der Annahme nach stationären **Güterströme** (engl.: flows of goods), die sie ausbilden, stehen im Fokus des wirtschaftstheoretischen Interesses. Wir nehmen an, dass im betrachteten Zeitraum Sektor 1 von seinem Gut an sich selbst die Menge n_{11} lieferte, an Sektor 2 die Menge n_{12} , an Sektor 3 die Menge n_{13} , usw.; schließlich an Sektor n die Menge n_{1n} . An die Endverbraucher lieferte Sektor 1 im gleichen Zeitraum die Menge y_1 . In Summe ergibt sich somit für die im betrachteten Zeitraum von Sektor 1 brutto produzierte (und, nach Annahme 3, auch ausgelieferte) Gütermenge der Wert $q_1 := n_{11} + \dots + n_{1j} + \dots + n_{1n} + y_1$. Analog verfahren wir mit den von den anderen $n - 1$ der n Produktionssektoren brutto ausgelieferten Gütermengen q_2, q_3, \dots, q_n . Somit erhalten wir das Zwischenresultat

$$q_1 = n_{11} + \dots + n_{1j} + \dots + n_{1n} + y_1 > 0 \quad (4.1)$$

$$\vdots$$

$$q_i = n_{i1} + \dots + n_{ij} + \dots + n_{in} + y_i > 0 \quad (4.2)$$

$$\vdots$$

$$q_n = n_{n1} + \dots + n_{nj} + \dots + n_{nn} + y_n > 0. \quad (4.3)$$

Diese einfache Bilanz lässt sich übersichtlich in einer **Input-Output-Tabelle** (engl.: input-output table) zusammenfassen:

[Werte in ME]	Sektor 1	...	Sektor j	...	Sektor n	Endverbraucher	Σ : Bruttomengen
Sektor 1	n_{11}	...	n_{1j}	...	n_{1n}	y_1	q_1
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots
Sektor i	n_{i1}	...	n_{ij}	...	n_{in}	y_i	q_i
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots
Sektor n	n_{n1}	...	n_{nj}	...	n_{nn}	y_n	q_n

In der ersten Spalte dieser Tabelle werden die Namen aller n **Güterstromsender** (also der Quellen der verschiedenen Güterströme; auch: Anbieter von Gütern) angegeben, in der ersten Zeile die Namen aller $n + 1$ **Güterstromempfänger** (also der Senken der verschiedenen Güterströme; auch: Verbraucher von Gütern). In der letzten Spalte finden wir die von jedem der n Güterstromsender im betrachteten Zeitraum brutto ausgesendeten Gütermengen.

Nun bilden wir für jeden der n Produktionssektoren die *nichtnegativen Mengenverhältniszahlen* (engl.: ratios)

$$P_{ij} := \frac{\text{INPUT in ME von Sektor } i \text{ an Sektor } j \text{ (im betrachteten Zeitraum)}}{\text{OUTPUT in ME von Sektor } j \text{ (im betrachteten Zeitraum)}}, \quad (4.4)$$

bzw. in kompakter Notation²

$$P_{ij} := \frac{n_{ij}}{q_j}, \quad (4.5)$$

mit $i, j = 1, \dots, n$. Wir betrachten diese $n \cdot n = n^2$ Zahlenwerte als die Elemente einer quadratischen Matrix \mathbf{P} vom Format $(n \times n)$. Allgemein hat diese quadratische Matrix das Aussehen

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{n_{11}}{n_{11} + \dots + n_{1j} + \dots + n_{1n} + y_1} & \dots & \frac{n_{1j}}{n_{j1} + \dots + n_{jj} + \dots + n_{jn} + y_j} & \dots & \frac{n_{1n}}{n_{n1} + \dots + n_{nj} + \dots + n_{nn} + y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{n_{i1}}{n_{11} + \dots + n_{1j} + \dots + n_{1n} + y_1} & \dots & \frac{n_{ij}}{n_{j1} + \dots + n_{jj} + \dots + n_{jn} + y_j} & \dots & \frac{n_{in}}{n_{n1} + \dots + n_{nj} + \dots + n_{nn} + y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{n_{n1}}{n_{11} + \dots + n_{1j} + \dots + n_{1n} + y_1} & \dots & \frac{n_{nj}}{n_{j1} + \dots + n_{jj} + \dots + n_{jn} + y_j} & \dots & \frac{n_{nn}}{n_{n1} + \dots + n_{nj} + \dots + n_{nn} + y_n} \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

und wird **Input–Output–Matrix** (oder Direktbedarfsmatrix; engl.: input–output matrix) des zu analysierenden stationären wirtschaftlichen Systems genannt.

Im relativ einfachen, überschaubaren Fall mit nur $n = 3$ Produktionssektoren nimmt die Input–Output–Matrix die explizite Gestalt

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{n_{11}}{n_{11} + n_{12} + n_{13} + y_1} & \frac{n_{12}}{n_{21} + n_{22} + n_{23} + y_2} & \frac{n_{13}}{n_{31} + n_{32} + n_{33} + y_3} \\ \frac{n_{21}}{n_{11} + n_{12} + n_{13} + y_1} & \frac{n_{22}}{n_{21} + n_{22} + n_{23} + y_2} & \frac{n_{23}}{n_{31} + n_{32} + n_{33} + y_3} \\ \frac{n_{31}}{n_{11} + n_{12} + n_{13} + y_1} & \frac{n_{32}}{n_{21} + n_{22} + n_{23} + y_2} & \frac{n_{33}}{n_{31} + n_{32} + n_{33} + y_3} \end{pmatrix}$$

an. Wir betonen, dass für ein gegebenes wirtschaftliches System eine Input–Output–Matrix \mathbf{P} erst *nach Ablauf eines betrachteten Referenzzeitraums* erstellt werden kann.

Der Nutzen des stationären Leontiefschen Matrizenmodells liegt in der **Extrapolation** (engl.: extrapolation) der Gültigkeit der Input–Output–Matrix $\mathbf{P}_{\text{Referenzperiode}}$ hinein in einen nachfolgenden, hinreichend begrenzten Zeitraum, d.h. in der *Annahme*

$$\mathbf{P}_{\text{kommende Periode}} \approx \mathbf{P}_{\text{Referenzperiode}}, \quad (4.7)$$

bzw. in Matrizenkomponenten

$$P_{ij}|_{\text{kommende Periode}} = \frac{n_{ij}}{q_j} \Big|_{\text{kommende Periode}} \approx \frac{n_{ij}}{q_j} \Big|_{\text{Referenzperiode}} = P_{ij}|_{\text{Referenzperiode}}. \quad (4.8)$$

²Beachten Sie, dass als Normierungsgrößen in den P_{ij} -Quotienten die Bruttoproduktionsmengen q_j der Güterstromempfänger j auftreten, und *nicht* die q_i der Güterstromsender i . In letzterem Fall entsprächen die P_{ij} prozentualen Anteilen der q_i .

Hierdurch werden Berechnungen von benötigten INPUT-Mengen für eine kommende Produktionsperiode aus bekannten vorgegebenen OUTPUT-Mengen ermöglicht. Langjährige Erfahrungen in der Praxis belegen, dass diese Vorgehensweise zu durchaus brauchbaren Ergebnissen führt. Dieser Art von Berechnungen unterliegen lineare stationäre Güterstromrelationen, deren Besprechung wir uns in Kürze zuwenden wollen.

4.2.2 Rohstoffverbrauchsmatrix

Eine zweite zentrale matrizenwertige Größe des Leontiefschen Modells ist durch die **Rohstoffverbrauchsmatrix** (engl.: resource consumption matrix) gegeben. Sie kann als „Kochrezept“ bzgl. der Mischungsverhältnisse zwischen den INPUT-Größen „ m Rohstoffe“ und den OUTPUT-Größen „ n Güter“ aufgefasst werden. Ihre Elemente sind durch die Angaben

$$R_{ij} := \text{Benötigte Menge in ME von Rohstoff } i \text{ pro eine Einheit in ME von Produkt } j, \quad (4.9)$$

mit $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$, gegeben. Zeilenweise liegen in der Matrix \mathbf{R} also Informationen bzgl. der m Rohstoffe, spaltenweise Informationen bzgl. der n Güter vor. Beachten Sie, dass die Rohstoffverbrauchsmatrix \mathbf{R} im allgemeinen *keine* (!) quadratische (und somit keine invertierbare) Matrix ist; generell hat sie das Format $(m \times n)$.

4.3 Stationäre lineare Güterstromrelationen

4.3.1 Güterströme endogener INPUT zu gesamtem OUTPUT

Wir wenden uns nun der quantitativen Beschreibung der mit den im betrachteten Zeitraum brutto produzierten **Gütermengen** \mathbf{q} verbundenen stationären **Güterströmen** zu. Nach Leontiefs Annahme 1 besteht zwischen den endogenen INPUT-Mengen $\mathbf{q} - \mathbf{y}$ und den gesamten OUTPUT-Mengen \mathbf{q} ein *linearer* funktionaler Zusammenhang. Dieser wird durch die Matrizenrelation

$$\mathbf{q} - \mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{q} \quad \Leftrightarrow \quad q_i - y_i = \sum_{j=1}^n P_{ij}q_j, \quad (4.10)$$

mit $i = 1, \dots, n$, zum Ausdruck gebracht, in welcher die Input-Output-Matrix \mathbf{P} die Rolle der Zuordnung (Abbildung!) zwischen beiden Mengen übernimmt. Nach Annahme 2 bleiben die Elemente von \mathbf{P} im betrachteten Zeitraum konstant, die betrachteten Güterströme also stationär.

Die Relation (4.10) lässt sich auch sehr gut aus einer alternativen, naturwissenschaftlich orientierten Perspektive heraus motivieren. Die im betrachteten Zeitraum brutto produzierten und, nach Annahme 3, ausgelieferten Mengen \mathbf{q} der n Güter des Modells unterliegen einem **Erhaltungssatz** (engl.: conservation law): „im betrachteten Zeitraum geht nichts von ihnen verloren.“ Quantitativ formuliert schreiben wir diese Feststellung als die Aussage

$$\underbrace{\mathbf{q}}_{\text{Bruttoproduktionsmengen}} = \underbrace{\mathbf{y}}_{\text{Endverbrauchermengen (exogen)}} + \underbrace{\mathbf{P}\mathbf{q}}_{\text{Zulieferungsmengen an } n \text{ Produktionssektoren (endogen)}}$$

auf.

Für Anwendungszwecke kann die zentrale stationäre Güterstromrelation (4.10) beliebig umgestellt werden. Dabei greifen wir auf die Matrizenidentität $\mathbf{q} = \mathbf{1}\mathbf{q}$ zurück, in welcher $\mathbf{1}$ die $(n \times n)$ -**Einheitsmatrix** bezeichnet [vgl. Gl. (2.2)].

Beispiele:

(i) vorgegeben: \mathbf{P} , \mathbf{q}

Dann ist

$$\mathbf{y} = (\mathbf{1} - \mathbf{P})\mathbf{q} \quad \Leftrightarrow \quad y_i = \sum_{j=1}^n (\delta_{ij} - P_{ij})q_j, \quad (4.11)$$

mit $i = 1, \dots, n$; $(\mathbf{1} - \mathbf{P})$ steht für die invertierbare **Technologiematrix** (engl.: technology matrix) des Systems.

(ii) vorgegeben: \mathbf{P} , \mathbf{y}

Dann ist

$$\mathbf{q} = (\mathbf{1} - \mathbf{P})^{-1}\mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad q_i = \sum_{j=1}^n (\delta_{ij} - P_{ij})^{-1}y_j, \quad (4.12)$$

mit $i = 1, \dots, n$; $(\mathbf{1} - \mathbf{P})^{-1}$ steht für die **Gesamtbedarfsmatrix** (engl.: total demand matrix) des Systems, die die Inverse der Technologiematrix bildet.

4.3.2 Güterströme exogener INPUT zu gesamtem OUTPUT

Auch zwischen den exogenen INPUT-Mengen \mathbf{v} und den gesamten OUTPUT-Mengen \mathbf{q} wird nach Annahme 1 ein *linearer* funktionaler Zusammenhang vorausgesetzt. Dieser wird durch die Matrizenrelation

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{q} \quad \Leftrightarrow \quad v_i = \sum_{j=1}^n R_{ij}q_j, \quad (4.13)$$

mit $i = 1, \dots, m$, zum Ausdruck gebracht. Nach Annahme 2 bleiben die Elemente der **Rohstoffverbrauchsmatrix** \mathbf{R} im betrachteten Zeitraum konstant, die betrachteten Rohstoffmengenströme also stationär.

Durch Kombination von Gl. (4.13) mit Gl. (4.12) erhalten wir die Möglichkeit, die zur Deckung von vorgegebenen Nachfragemengen \mathbf{y} für die n Güter (im betrachteten Zeitraum) benötigten Rohstoffmengen \mathbf{v} zu berechnen. Es gilt

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{q} = \mathbf{R}(\mathbf{1} - \mathbf{P})^{-1}\mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad v_i = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n R_{ij}(\delta_{jk} - P_{jk})^{-1}y_k, \quad (4.14)$$

mit $i = 1, \dots, m$.

GTR: Resultate im Sinne der Relationen (4.11), (4.12) und (4.14) lassen sich in Fällen mit $n \leq 5$, für vorgegebene Matrizen \mathbf{P} und \mathbf{R} und vorgegebene Vektoren \mathbf{q} oder \mathbf{y} , leicht unmittelbar mit dem GTR berechnen.

4.4 Ausblick

Das Leontiefsche Modell lässt sich in einfacher Weise auf weiterführende wirtschaftstheoretische Überlegungen erweitern. Für ein aus n interdependenten Produktionssektoren bestehendes, (idealisiert!) abgeschlossenes wirtschaftliches System G , das nicht notwendigerweise stationär ist, können die INPUT-Größen „Rohstoffmengen“ v sowie die OUTPUT-Größen „Bruttoproduktionsmengen“ q und „Nettoabsatzmengen“ y jeweils mit Geldbeträgen bewertet werden. Neben Gütermengen und deren Ströme bzgl. G während eines vorgegebenen Zeitraums, können dann zusätzlich an erste gekoppelte **Geldmengen** und die damit verbundenen **Geldströme** zeitlich und räumlich analysiert werden. Allerdings genügen Geldmengen, im Gegensatz zu Gütermengen, im allgemeinen *keinem* Erhaltungssatz; dieser Umstand kann die mathematische Analyse von Geldströmen erschweren. Denn im Sinne von **Wertschöpfung** kann Geld in G während eines betrachteten Zeitraums auch erzeugt oder vernichtet werden; es muss nicht auf Zufluss nach bzw. Abfluss von G beschränkt bleiben. Zentral für derartige Überlegungen ist eine **Bilanzgleichung** (engl.: balance equation) für die über einen gegebenen Zeitraum hinweg in G enthaltene Geldmenge. Diese Bilanzgleichung besitzt die in der **Physik** sehr vertraute Struktur³ (vgl. Herrmann (2003) [13, S. 7ff])

$$\left(\begin{array}{c} \text{Zeitliche Änderungsrate} \\ \text{der Geldmenge in } G \text{ (in GE/ZE)} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Geldstrom} \\ \text{nach } G \text{ (in GE/ZE)} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Gelderzeugungsrate} \\ \text{in } G \text{ (in GE/ZE)} \end{array} \right).$$

Beachten Sie, dass, bezogen auf G , Geldströme und Gelderzeugungsraten prinzipiell sowohl positive als auch negative Vorzeichen haben können. Zur konkreten quantitativen Behandlung dieser Thematik benötigt man als mathematische Werkzeuge die Differenzial- und Integralrechnung, auf welche wir in den Kapiteln 7 und 8 einführend eingehen werden. Wir tangieren hier unmittelbar den relativ jungen, interdisziplinär agierenden Wissenschaftszweig der **Econophysics** (vgl. z.B. Bouchaud und Potters (2003) [5]), dessen Zielsetzung wir an dieser Stelle jedoch nicht weiter vertiefen wollen.

Durch die hier angedeutete Erweiterung des Leontiefschen Modells können neben wirtschaftsbezogenen Verhältnisgrößen der Art

$$\frac{\text{OUTPUT (in ME)}}{\text{INPUT (in ME)}},$$

wie sie in der Einleitung betrachtet wurden, zusätzlich **Wirtschaftlichkeit** (engl.: economic efficiency) genannte dimensionslose Verhältnisgrößen der Form

$$\frac{\text{ERTRAG (in GE)}}{\text{KOSTEN (in GE)}}$$

für verschiedene wirtschaftliche Systeme bzw. deren Produktionssektoren gebildet und miteinander verglichen werden. In Kapitel 7 werden wir auf diesen Aspekt kurz zurückkommen.

³Die Abkürzungen GE und ZE stehen für „Geldeinheiten“ bzw. „Zeiteinheiten“.

Kapitel 5

Lineare Optimierung

Der Inhalt dieses Kapitels ist relevant für das Verständnis der in Kapitel 5.3 und 5.4 des Lehrbuchs von Schreyögg und Koch (2010) [21] behandelten quantitativen Themen.

Vor dem Hintergrund des **Ökonomischen Prinzips** besprechen wir in diesem Kapitel das Lösen einer speziellen Klasse von quantitativen Problemen, wie sie in nachfolgend beschriebener Qualität in der Praxis regelmäßig auftreten. Grundsätzlich unterscheidet man zwei mögliche Ausprägungen des Ökonomischen Prinzips: (i) aus begrenzten Ressourcen maximalen Nutzen zu ziehen, und (ii) ein vorgegebenes Ziel mit minimalem Aufwand zu erreichen. Bezüglich der in der Einleitung eingeführten, unseren Überlegungen unterliegenden Verhältnisgröße (OUTPUT)/(INPUT) geht es darum, den Wert dieses Quotienten größtmöglich zu gestalten. Dieses Ziel kann (i) bei festgehaltenem Nenner durch Vergrößern des Zählers, oder (ii) bei festgehaltenem Zähler durch Verkleinern des Nenners realisiert werden. Wir werden uns in diesem Kapitel vornehmlich mit der ausführlichen Behandlung von dem Fall (i) zugehörigen Ausgangssituationen beschäftigen.

5.1 Einführung

Zu Maximieren sei eine (nichtnegative) quantitative Größe z , welche in *linearer Weise* funktional von einer festen Anzahl n (nichtnegativer) variabler Größen x_1, \dots, x_n abhängt. Diesen n variablen Größen x_1, \dots, x_n wiederum seien eine feste Anzahl m von mengenmäßigen Einschränkungen auferlegt, die ebenfalls in *linearer Weise* von x_1, \dots, x_n abhängen. Die m Einschränkungen, oder Restriktionen, sollen den Charakter von vorgegebenen Kapazitätsobergrenzen haben.

Def.: Gegeben seien eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, ein Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, zwei Vektoren $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, sowie eine Konstante $d \in \mathbb{R}$. Eine Aufgabe der Form

$$\max \left\{ z = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} + d \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\}, \quad (5.1)$$

in Komponentenschreibweise also

$$\max z(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n + d \quad (5.2)$$

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \quad (5.3)$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \quad (5.4)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (5.5)$$

$$\vdots$$

$$x_n \geq 0, \quad (5.6)$$

wird **Standard–Maximum–Aufgabe** der **linearen Optimierung** (engl.: standard maximum problem of linear programming) mit n Variablen genannt.

Allgemein spricht man bei dieser Art von quantitativer Fragestellung auch von einem **Linearen Optimierungsproblem (LOP)**. Die in der angeführten Definition auftretenden Größen und Relationen tragen die Bezeichnungen

- $z(x_1, \dots, x_n)$ — **Lineare Zielfunktion** (engl.: linear objective function) von n Variablen,
- $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ — m **Restriktionen** (engl.: restrictions),
- $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ — n **Nichtnegativitätsbedingungen** (engl.: non-negativity constraints).

Bem.: In analoger Weise lässt sich auch eine **Standard–Minimum–Aufgabe** der linearen Optimierung formulieren, welche durch

$$\min \{ z = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} + d \mid \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$$

mathematisch beschrieben wird. Die Komponenten des Vektors \mathbf{b} sind hierbei als vorgegebene Kapazitätsuntergrenzen aufzufassen.

Für eine gegebene lineare Zielfunktion $z(x_1, \dots, x_n)$ wird die Menge aller Punkte $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ mit der Eigenschaft

$$\boxed{z(x_1, \dots, x_n) = C = \text{konstant} \in \mathbb{R}} \quad (5.7)$$

eine **Isoquante** (engl.: isoquant) dieser linearen Zielfunktion genannt. Isoquanten linearer Zielfunktionen stellen bei $n = 2$ Variablen Geraden, bei $n = 3$ Variablen Ebenen, bei $n = 4$ Variablen euklidische Räume, und bei $n \geq 5$ Variablen euklidische Hyperräume dar.

In den einfachsten Fällen von LOP hängt die lineare Zielfunktion z nur von $n = 2$ Variablen x_1 und x_2 ab. Eine anschauliche und effektive Methode des Lösen von LOP aus dieser Klasse stellen wir im nächsten Abschnitt vor.

5.2 Grafisches Lösen von Problemen mit zwei Variablen

Die systematische Vorgehensweise des grafischen Lösens von MAX-LOP mit $n = 2$ Variablen umfasst folgende Arbeitsschritte:

1. Aufstellen der **linearen Zielfunktion**

$$z(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2 + d$$

in Abhängigkeit von den Variablen x_1 und x_2 .

2. Bestimmen des durch die m Restriktionen festgelegten **zulässigen Bereichs** (engl.: feasible region) D von z in der x_1, x_2 -Ebene. Konkret entspricht D dem Definitionsbereich von z (siehe Kapitel 6).
3. Einzeichnen der durch den Ursprung ($0 = x_1 = x_2$) der x_1, x_2 -Ebene verlaufenden Projektion der **Isoquanten** der linearen Zielfunktion z , die (falls $c_2 \neq 0$) durch die Gleichung

$$x_2 = -(c_1/c_2)x_1$$

beschrieben wird.

4. Einzeichnen der durch den konstanten Gradienten

$$(\nabla z)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_1} \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

gegebenen **Optimierungsrichtung** (engl.: direction of optimisation) für z im Ursprung der x_1, x_2 -Ebene.

5. **Paralleles Verschieben** (engl.: parallel displacement) in der x_1, x_2 -Ebene der Projektion der Ursprungsisoquanten der linearen Zielfunktion z entlang der Optimierungsrichtung $(\nabla z)^T$ über den zulässigen Bereich D hinweg, bis dieser gerade noch berührt wird.
6. Bestimmen der **optimalen Lösung** (engl.: optimal solution) (x_{1O}, x_{2O}) als Schnittpunkt bzw. -menge zwischen verschobener Projektion der Ursprungsisoquanten und dem oberen Rand von D .
7. Berechnen des **optimalen Wertes** (engl.: optimal value) der linearen Zielfunktion $z_O = z(x_{1O}, x_{2O})$ aus der optimalen Lösung.
8. Feststellen von möglichen **Restkapazitäten** (engl.: remaining resources) durch Einsetzen der optimalen Lösung (x_{1O}, x_{2O}) in die m Restriktionen.

Generell findet man, dass die zulässigen Bereiche D von linearen Zielfunktionen z mit $n = 2$ Variablen x_1 und x_2 , sofern sie *nichtleer und beschränkt* sind, **Vielecken** (Drei-, Vier-, Fünf-, Sechs-, ... ecke) in der x_1, x_2 -Ebene entsprechen. Die gesuchten Extremwerte der linearen Zielfunktionen z finden sich in diesen Fällen immer in den Ecken bzw. auf den Rändern der zulässigen Bereiche D . Ist der zulässige Bereich D eines LOP leer, so ist dieses unlösbar. Bleibt der zulässige

Bereich D eines LOP unbeschränkt, ist letzteres möglicherweise auch unlösbar; es kommt hierbei jedoch auf die konkrete Fragestellung an.

Bem.: Zum grafischen Lösen einer Standard-Minimum-Aufgabe der linearen Optimierung parallelverschiebt man die Projektion der Ursprungsisoquanten von z in die x_1, x_2 -Ebene entlang der Optimierungsrichtung $(\nabla z)^T$ soweit, bis der zulässige Bereich D gerade erreicht (und berührt) wird. Die optimale Lösung ergibt sich sodann als Schnittpunkt bzw. -menge zwischen verschobener Ursprungsisoquante und dem *unteren Rand* von D .

5.3 Dantzig'scher Simplexalgorithmus

Ein entscheidender Nachteil der grafischen Lösungsmethode von LOP ist ihre Limitierung auf Fälle mit nur $n = 2$ Variablen. In der Praxis hat man es jedoch häufig mit linearen Optimierungsproblemen zu tun, die von mehr als zwei variablen Größen abhängen. Zur systematischen Behandlung derartiger Fälle hat der US-amerikanische Mathematiker George Bernard Dantzig (1914–2005) in den 40er-Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts einen leistungsfähigen Algorithmus entwickelt, der sich recht einfach auf Computern programmieren lässt; vgl. Dantzig (1949, 1955 [8, 9]).

Unter einem **Simplex** (engl.: simplex) versteht man in der Mathematik ein konvexes Polyeder (engl.: convex polyhedron), d.h. einen vieleckigen Körper mit entsprechend vielen Kanten und Ecken in mehr als zwei Dimensionen. Die zulässigen Bereiche von höherdimensionalen LOP bilden im allgemeinen solche Simplexe. Da auch in diesen Fällen die optimale Lösung eines LOP, verbunden mit einem Extremwert der linearen Zielfunktion, in einer Ecke oder auf einer Kante des Simplex liegen wird, ist Dantzig's so genannter **Simplexalgorithmus** darauf ausgelegt, systematisch die Ecken und Kanten eines zulässigen Bereichs mit möglichst wenigen Schritten abzufahren, um die gesuchte Extremallösung aufzuspüren und als optimal zu identifizieren.

Ausgangspunkt ist eine Standard-Maximum-Aufgabe in der Form (5.2)–(5.6). Die die m zu berücksichtigenden Restriktionen darstellenden Ungleichungen werden mithilfe von m nichtnegativen so genannten **Schlupfvariablen** (engl.: slack variables) s_1, \dots, s_m in m lineare Gleichungen umgewandelt. Aufgabe der Schlupfvariablen ist es, mögliche Differenzen zwischen den Werten der linken und der rechten Seiten der m Ungleichungen in sich zu vereinen. Zusammen mit der Definitionsgleichung für die lineare Zielfunktion z ergibt sich somit ein System von $1 + m$ linearen Gleichungen für $1 + n + m$ Variablen $z, x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_m$, gegeben durch

Lineares Maximierungsproblem in kanonischer Form

$$z - c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n = d \quad (5.8)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + s_1 = b_1 \quad (5.9)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + s_2 = b_2 \quad (5.10)$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + s_m = b_m. \quad (5.11)$$

Dieses LGS vom Format $(1 + m) \times (1 + n + m)$ ist somit *unterbestimmt*, und deshalb höchstens *mehrdeutig* lösbar. Der $(1 + n + m)$ -dimensionale allgemeine Lösungsvektor

$$\mathbf{x}_L = (z_L, x_{1,L}, \dots, x_{n,L}, s_{1,L}, \dots, s_{m,L})^T \quad (5.12)$$

enthält also n frei wählbare Variablen. Es ist wichtig, sich dieser Tatsache bewusst zu sein. Sie impliziert, dass wir, so das betrachtete LGS überhaupt lösbar ist, die *Auswahl* unter mehreren Lösungen haben. Wir können uns also unter allen Lösungen dieses LGS die für unsere Zwecke Optimale aussuchen. Dantzig's Simplexalgorithmus stellt ein Werkzeug bereit, diese optimale Lösung systematisch herzuleiten.

Wir beginnen mit dem Übertragen der Koeffizienten und der rechten Seiten (RS) des oben angeführten unterbestimmten LGS (5.8)–(5.11) in ein geeignetes Zahlentableau.

Anfangssimplextableau

$$\begin{array}{c|cccc|cccc|c}
 z & x_1 & x_2 & \dots & x_n & s_1 & s_2 & \dots & s_m & \text{RS} \\
 \hline
 1 & -c_1 & -c_2 & \dots & -c_n & 0 & 0 & \dots & 0 & d \\
 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\
 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 0 & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 1 & b_m
 \end{array} \tag{5.13}$$

In diesem Zahlentableau (engl.: initial simplex tableau) unterscheiden wir so genannte **Basisvariablen** (engl.: basis variable) von so genannten **Nichtbasisvariablen** (engl.: non-basis variables). Basisvariablen sind jene, in deren Spalten $(1 + m)$ -komponentige kanonische Einheitsvektoren [vgl. Gl. (1.10)] zu finden sind; hiervon gibt es $1 + m$ Stück. Nichtbasisvariablen sind jene, in deren Spalten *keine* kanonischen Einheitsvektoren enthalten sind; hiervon gibt es n Stück. Die komplette Basis ist also $(1 + m)$ -dimensional. Anfänglich sind z und die m Schlupfvariablen s_1, \dots, s_m Basisvariablen, die n eigentlichen Variablen x_1, \dots, x_n Nichtbasisvariablen [vgl. das Anfangstableau (5.13)]. Die zugehörige so genannte (erste) **Basislösung** (engl.: basis solution) hat generell das Aussehen

$$\mathbf{x}_{B_1} = (z_{B_1}, x_{1,B_1}, \dots, x_{n,B_1}, s_{1,B_1}, \dots, s_{m,B_1})^T = (d, 0, \dots, 0, b_1, \dots, b_m)^T,$$

denn jeder der n Nichtbasisvariablen kann der Einfachheit halber der Wert Null zugeordnet werden, da ihre Werte frei gewählt werden dürfen. Basislösungen sind immer *spezielle Lösungen* des unterbestimmten LGS (5.8)–(5.11), — des linearen Maximierungsproblems in kanonischer Form.

Ziel des Simplexalgorithmus ist es, möglichst viele der n eigentlichen Variablen x_1, \dots, x_n mit in die $(1 + m)$ -dimensionale Basis aufzunehmen und gegen jeweils eine der Schlupfvariablen s_1, \dots, s_m auszutauschen, um dadurch sukzessiv günstigere spezielle Lösungsvektoren für das Optimierungsproblem zu konstruieren. Letztendlich verbirgt sich hinter dem Simplexalgorithmus eine spezielle Form des in Kapitel 3 behandelten Gaußschen Algorithmus, mit fest vorgeschriebenen Schritten der äquivalenten Umformung des Ausgangs-LGS (5.8)–(5.11) bzw. des Anfangstableaus (5.13). Diese Schritte (engl.: algebraic simplex operations) lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Simplexschritte

- S1: Gilt im aktuellen Tableau $-c_j \geq 0$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$? Falls ja, ist die Basislösung **optimal**. **ENDE**. Andernfalls gehe zu S2.

- S2: Wähle **Pivotspaltenindex** (engl.: pivot column index) $j^* \in \{1, \dots, n\}$ mit $-c_{j^*} := \min\{-c_j | j \in \{1, \dots, n\}\} < 0$.
- S3: Gibt es ein $i^* \in \{1, \dots, m\}$ mit $a_{i^*j^*} > 0$? Falls nein, ist die Zielfunktion nach oben unbeschränkt. *ENDE*. Andernfalls gehe zu S4.
- S4: Wähle **Pivotzeilenindex** (engl.: pivot row index) i^* mit $a_{i^*j^*} > 0$ und $b_{i^*}/a_{i^*j^*} := \min\{b_i/a_{ij^*} | a_{ij^*} > 0, i \in \{1, \dots, m\}\}$. Führe einen **Pivotschritt** (engl.: pivot operation) mit dem **Pivotelement** (engl.: pivot element) $a_{i^*j^*}$ durch. Gehe zu S1.

Wenn das Endtableau des Simplexalgorithmus (engl.: final simplex tableau) gefunden ist, wird den Nichtbasisvariablen wiederum der Wert Null zugeordnet. Die Werte der finalen Basisvariablen, also der gesuchten optimalen Lösung eines gegebenen LOP, werden dann aus dem Endtableau über rückwertige Substitution zeilenweise von unten nach oben ausgerechnet. Schlupfvariablen mit positiven Werten im Endtableau geben unmittelbar Auskunft über bestehende Restkapazitäten.

Kapitel 6

Elementare Finanzmathematik

Der Inhalt dieses Kapitels diskutiert grundlegende finanzmathematische Themen, welche im Rahmen des Drittsemestermoduls 0.3.2 RESO: Resources: Financial Resources, Human Resources, Organisation wiederkehren werden.

In diesem Kapitel wenden wir uns kurz den quantitativen Grundlagen des auf jegliches unternehmerisches Handeln Einfluss nehmenden Finanzwesens zu. Wie wir im Folgenden aufzeigen wollen, beruhen viele grundlegende, für die praktische Anwendung hochrelevante Überlegungen der **Finanzmathematik** auf zwei einfach zugänglichen mathematischen Strukturen, den sogenannten arithmetischen und geometrischen reellen Zahlenfolgen und ihren zugeordneten endlichen Reihen.

6.1 Arithmetische und geometrische Zahlenfolgen und Reihen

6.1.1 Arithmetische Zahlenfolge und Reihe

Eine **arithmetische reelle Zahlenfolge** (engl.: arithmetical real-valued sequence) mit $n \in \mathbb{N}$ Gliedern,

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}},$$

ist definiert durch die Eigenschaft einer *konstant* bleibenden **Differenz** (engl.: difference) d zwischen benachbarten Gliedern der Folge, d.h. für $n > 1$ gilt

$$a_n - a_{n-1} =: d = \text{konstant} \neq 0, \quad (6.1)$$

mit $a_n, a_{n-1}, d \in \mathbb{R}$. Daraus lässt sich das einfache explizite **Bildungsgesetz** (engl.: explicit representation)

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N} \quad (6.2)$$

ableiten. Man sieht also, dass bei Kenntnis der Werte der zwei freien Parameter: Startglied a_1 und konstante Differenz d , die Glieder *jeder* arithmetischen reellen Zahlenfolge *eindeutig* bestimmt sind. Wie Gl. (6.2) zeigt, wachsen/fallen die Glieder a_n **linear** (engl.: linear growth) mit n .

Betrachtet man für eine arithmetische reelle Zahlenfolge mit $n + 1$ Gliedern für die Nachbarglieder von a_n (mit $n \geq 2$) den **arithmetischen Mittelwert** (engl.: arithmetical mean), so findet man das Resultat

$$\frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}) = \frac{1}{2}(a_1 + (n-2)d + a_1 + nd) = a_1 + (n-1)d = a_n. \quad (6.3)$$

Das Aufsummieren der ersten n Glieder einer beliebigen arithmetischen reellen Zahlenfolge führt zur **endlichen arithmetischen Reihe** (engl.: finite arithmetical series)

$$S_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n [a_1 + (k-1)d] = na_1 + \frac{d}{2}(n-1)n. \quad (6.4)$$

Im letzten Schritt wurde Gebrauch gemacht von der Gaußschen **Identität**¹ (engl.: identity) (siehe z.B. Bosch (2003) [6, S.21])

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \equiv \frac{1}{2}(n-1)n. \quad (6.5)$$

6.1.2 Geometrische Zahlenfolge und Reihe

Eine **geometrische reelle Zahlenfolge** (engl.: geometrical real-valued sequence) mit $n \in \mathbb{N}$ Gliedern,

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}},$$

ist definiert durch die Eigenschaft eines *konstant* bleibenden **Quotienten** (engl.: quotient) q zwischen benachbarten Gliedern der Folge, d.h. für $n > 1$ gilt

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} =: q = \text{konstant} \neq 0, \quad (6.6)$$

mit $a_n, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ und $q \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Daraus lässt sich das einfache explizite **Bildungsgesetz** (engl.: explicit representation)

$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} \quad (6.7)$$

ableiten. Man sieht also, dass bei Kenntnis der Werte der zwei freien Parameter: Startglied a_1 und konstanter Quotient q , die Glieder *jeder* geometrischen reellen Zahlenfolge *eindeutig* bestimmt sind. Wie Gl. (6.7) zeigt, wachsen/fallen die Glieder a_n **exponentiell** (engl.: exponential growth) mit n (vgl. Abschnitt 7.1.4).

Betrachtet man für eine geometrische reelle Zahlenfolge mit $n + 1$ Gliedern für die Nachbarglieder von a_n (mit $n \geq 2$) den **geometrischen Mittelwert** (engl.: geometrical mean), so findet man das Resultat

$$\sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} = \sqrt{a_1 q^{n-2} \cdot a_1 q^n} = a_1 q^{n-1} = a_n. \quad (6.8)$$

¹Analog gilt die Gaußsche Identität $\sum_{k=1}^n (2k-1) \equiv n^2$.

Das Aufsummieren der ersten n Glieder einer beliebigen geometrischen reellen Zahlenfolge führt zur **endlichen geometrischen Reihe** (engl.: finite geometrical series)

$$S_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n [a_1 q^{k-1}] = a_1 \sum_{k=0}^{n-1} q^k = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} . \quad (6.9)$$

Im letzten Schritt wurde Gebrauch gemacht von der **Identität** (engl.: identity) (siehe z.B. Bosch (2003) [6, S.27])

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} q^k \equiv \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{für } q \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} .} \quad (6.10)$$

6.2 Zins und Zinseszins

Gegeben seien ein **Anfangskapital** (engl.: initial capital) des positiven Werts K_0 (in GE), und ein Betrachtungszeitraum von $n \in \mathbb{N}$ gleich langen **Perioden** (engl.: periods). Das Anfangskapital soll jeweils zum Ende jeder Periode (d.h. „nachschüssig“) zu einem in Prozent anzugebenden **Zinsfuß** (engl.: interest rate) $p > 0$ mit Zinseszins verzinst werden. Über den durch²

$$q := 1 + \frac{p}{100} > 1 \quad (6.11)$$

definierten dimensionslosen **Aufzinsfaktor** (engl.: interest factor) folgt, dass sich nach Ablauf von einer Zinsperiode ein Kapital vom Wert

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right) = K_0 q$$

angesammelt haben wird. Nach Ablauf von insgesamt n Zinsperioden wird also ein **Endkapital** (engl.: final capital) vom Wert (in GE)

$$\boxed{\text{rekursiv: } K_n = K_{n-1} q, \quad n \in \mathbb{N},} \quad (6.12)$$

vorliegen, wobei K_{n-1} den Wert des Kapitals nach $n - 1$ Verzinsungen bezeichnet. Aus dieser rekursiven Darstellung des durch n -malige Verzinsung mit Zinseszins bedingten Wachstums eines Anfangskapitals K_0 geht sofort der Bezug der hier aufgezeigten zeitlichen Entwicklung zur geometrischen Zahlenfolge (6.6) hervor.

Wie sich leicht zeigen lässt, hängen Endkapital K_n und Anfangskapital K_0 über

$$\boxed{\text{explizit: } K_n = K_0 q^n, \quad n \in \mathbb{N},} \quad (6.13)$$

zusammen. Durch diese Gleichung werden die vier Größen K_n , K_0 , q und n zueinander in Relation gesetzt. Bei Kenntnis von jeweils drei dieser Größen kann somit der Wert der vierten ausgerechnet werden. Beispielsweise findet man durch Auflösen von Gl. (6.13) nach K_0 das Ergebnis

$$K_0 = \frac{K_n}{q^n} =: B_0 . \quad (6.14)$$

In dieser Variante wird von K_0 als dem **Barwert** (engl.: present value) B_0 des Kapitals K_n gesprochen; dieser ergibt sich durch n -maliges Abzinsen von K_n mit q . Weitere Möglichkeiten sind:

²Durch Umkehrung ergibt sich hieraus die Relation $p = 100 \cdot (q - 1)$.

(i) Auflösen von Gl. (6.13) nach dem **Aufzinsfaktor** (engl.: interest factor) q :

$$q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}, \quad (6.15)$$

(ii) Auflösen von Gl. (6.13) nach der **Laufzeit** (engl.: contract period) n :

$$n = \frac{\ln(K_n/K_0)}{\ln(q)}. \quad (6.16)$$

Im Folgenden sei die Dauer einer **Zinsperiode** (engl.: interest rate period) ein Kalenderjahr.

Wird ein **Anfangskapital** (engl.: initial capital) $K_0 > 0$ über ein Kalenderjahr hinweg m -malig anteilmäßig nachschüssig zu einem **nominalen Jahreszinsfuß** (engl.: annual nominal interest rate) $p_{\text{nom}} > 0$ verzinst, so ist K_0 am Ende des ersten von m Teiljahren auf den Betrag

$$K_{1/m} = K_0 + K_0 \cdot \frac{p_{\text{nom}}}{m \cdot 100} = K_0 \left(1 + \frac{p_{\text{nom}}}{m \cdot 100}\right), \quad m \in \mathbb{N},$$

angewachsen. Nach Ablauf von k von m Teiljahren gilt

$$K_{k/m} = K_0 \left(1 + \frac{p_{\text{nom}}}{m \cdot 100}\right)^k, \quad k \leq m;$$

der anteilmäßige Aufzinsfaktor $\left(1 + \frac{p_{\text{nom}}}{m \cdot 100}\right)$ ist also k -mal auf K_0 anzuwenden. Am Ende eines vollen Kalenderjahrs ist K_0 auf den Wert

$$K_1 = K_{m/m} = K_0 \left(1 + \frac{p_{\text{nom}}}{m \cdot 100}\right)^m, \quad m \in \mathbb{N},$$

angewachsen. Diese Relation definiert den **effektiven Aufzinsfaktor** (engl.: effective interest factor)

$$q_{\text{eff}} := \left(1 + \frac{p_{\text{nom}}}{m \cdot 100}\right)^m, \quad (6.17)$$

welchem, wegen $q_{\text{eff}} = 1 + \frac{p_{\text{eff}}}{100}$, über Umstellen der **effektive Jahreszinsfuß** (engl.: effective annual interest rate)

$$\boxed{p_{\text{eff}} = 100 \cdot \left[\left(1 + \frac{p_{\text{nom}}}{m \cdot 100}\right)^m - 1\right]}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (6.18)$$

zugeordnet ist.

Nach Ablauf von n Kalenderjahren ist das Anfangskapital K_0 bei der hier beschriebenen anteilmäßigen Verzinsungsvariante schließlich auf den Endwert

$$\boxed{K_n = K_0 \left(1 + \frac{p_{\text{nom}}}{m \cdot 100}\right)^{n \cdot m} = K_0 q_{\text{eff}}^n}, \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad (6.19)$$

angewachsen. Als Barwert von K_n haben wir also in diesem Fall

$$B_0 = \frac{K_n}{q_{\text{eff}}^n} = K_0 . \quad (6.20)$$

Zum Ende dieses Abschnitts wollen wir uns kurz mit dem **vorschüssigen Ratensparen** (engl.: installment savings) befassen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall von n jährlichen vorschüssigen Einzahlungen vom *konstanten* Betrag $E > 0$ (in GE) auf ein Konto mit Startwert $K_0 = 0$, welches jeweils zum Ende eines Kalenderjahres mit einem Zinsfuß $p > 0$ (also $q > 1$) verzinst wird. Nach Ablauf des ersten Kalenderjahres lautet dann der neue Kontostand

$$K_1 = E + E \cdot \frac{p}{100} = E \left(1 + \frac{p}{100} \right) = Eq .$$

Der Kontostand nach Ablauf von zwei Kalenderjahren ist auf den Wert

$$K_2 = (K_1 + E)q = (Eq + E)q = E(q^2 + q) = Eq(q + 1)$$

angewachsen. Nach Ablauf von insgesamt n Kalenderjahren gilt

$$K_n = (K_{n-1} + E)q = E(q^n + \dots + q^2 + q) = Eq(q^{n-1} + \dots + q + 1) = Eq \sum_{k=0}^{n-1} q^k .$$

Unter Anwendung der Identität (6.10), da $q > 1$, lässt sich dieses Ergebnis für den **Kontostand** (engl.: account balance) nach n Kalenderjahren K_n auf die Form

$$K_n = Eq \frac{q^n - 1}{q - 1} , \quad q \in \mathbb{R}_{>1} , \quad n \in \mathbb{N} , \quad (6.21)$$

reduzieren. Der K_n zugeordnete **Barwert** (engl.: present value) B_0 wird definiert über n -maliges Abzinsen von K_n mit q :

$$B_0 := \frac{K_n}{q^n} \stackrel{\text{Gl. 6.21}}{=} = \frac{E(q^n - 1)}{q^{n-1}(q - 1)} . \quad (6.22)$$

Er gibt an welches Anfangskapital B_0 nach n -maligem Aufzinsen mit q den Wert K_n erreicht.

Auflösen von Gl. (6.21) nach der **Laufzeit** (engl.: contract period) n führt zum Ergebnis:

$$n = \frac{\ln [1 + (q - 1)(K_n/Eq)]}{\ln(q)} . \quad (6.23)$$

6.3 Tilgung in konstanten Annuitäten

Ausgangspunkt der folgenden Betrachtung ist ein **Darlehen** (engl.: mortgage, loan of money) vom Betrag $R_0 > 0$ (in GE), welches ein Kunde zu Honorarzinszahlungen mit einem **Jahreszinsfuß** $p > 0$ (d.h. $q > 1$) von einer Bank ausleiht. Die vertraglichen Vereinbarungen zwischen beiden Parteien sehen vor, dass der Kunde dieses Darlehen an die Bank mit einem **anfänglichen Tilgungsprozentsatz** (engl.: initial percentage rate of redemption payments) $t > 0$ in *konstant* bleibenden

nachschüssigen **Annuitäten** (engl.: annuities, annual installments) (d.h. jährlichen Zahlungen) vom Betrag $A > 0$ (in GE) zurückzahlt. Die Annuität A setzt sich zusammen aus der variablen **n -ten Zinszahlung** (engl.: interest payment) Z_n (in GE) und der variablen **n -ten Tilgungszahlung** (engl.: redemption payment) T_n (in GE), die in ihrer *Summe* über vollständige Kalenderjahre hinweg konstant bleiben müssen, also

$$A = Z_n + T_n \stackrel{!}{=} \text{konstant} . \quad (6.24)$$

Mit $n = 1$ bspw., lässt sich dieser Ausdruck darstellen als

$$A = Z_1 + T_1 = R_0 \cdot \frac{p}{100} + R_0 \cdot \frac{t}{100} = R_0 \left(\frac{p+t}{100} \right) = R_0 \left[(q-1) + \frac{t}{100} \right] \stackrel{!}{=} \text{konstant} . \quad (6.25)$$

Für das erste Kalenderjahr des laufenden Darlehensvertrags haben also die Zinsschuld, der Tilgungsbetrag und die nach Zahlung der ersten Annuität bestehende Restschuld die Werte

$$\begin{aligned} Z_1 &= R_0 \cdot \frac{p}{100} = R_0(q-1) \\ T_1 &= A - Z_1 \\ R_1 &= R_0 + Z_1 - A \quad \underbrace{\text{Einsetzen für } Z_1} \quad R_0 + R_0 \cdot \frac{p}{100} - A = R_0q - A . \end{aligned}$$

Am Ende eines zweiten Kalenderjahres gilt

$$\begin{aligned} Z_2 &= R_1(q-1) \\ T_2 &= A - Z_2 \\ R_2 &= R_1 + Z_2 - A \quad \underbrace{\text{Einsetzen für } Z_2} \quad R_1q - A \quad \underbrace{\text{Einsetzen für } R_1} \quad R_0q^2 - A(q+1) . \end{aligned}$$

Die sich hier andeutenden Schemata der Bildung mathematischer Terme setzten sich mit zunehmender Tilgungsdauer fort. Die **Zinsschuld** (engl.: remaining interest debt) für Kalenderjahr n des Darlehensvertrags hat den Wert (rekursiv)

$$Z_n = R_{n-1}(q-1) , \quad n \in \mathbb{N} , \quad (6.26)$$

mit R_{n-1} der Restschuld am Ende des vorangegangenen Kalenderjahrs. Der **Tilgungsbetrag** (engl.: redemption payment) im Kalenderjahr n ist gegeben durch (rekursiv)

$$T_n = A - Z_n , \quad n \in \mathbb{N} . \quad (6.27)$$

Die **Restschuld** (engl.: remaining debt) am Ende von Kalenderjahr n (in GE) lautet

$$\boxed{\text{rekursiv: } R_n = R_{n-1} + Z_n - A = R_{n-1}q - A , \quad n \in \mathbb{N} .} \quad (6.28)$$

Durch sukzessive rückwertige Substitution für R_{n-1} , lässt sich dieser Ausdruck in die Gestalt

$$R_n = R_0q^n - A(q^{n-1} + \dots + q + 1) = R_0q^n - A \sum_{k=0}^{n-1} q^k$$

überführen. Unter Anwendung der Identität (6.10) findet man schließlich (da $q > 1$)

$$\text{explizit: } R_n = R_0 q^n - A \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.29)$$

Die hier vorgestellten Ergebnisse bilden die Basis eines **Tilgungsplans** (engl.: redemption payment plan) mit tabellarisch geordneten Angaben zu den Größen $\{n, Z_n, T_n, R_n\}$, d.h. einem Schema

n	Z_n [GE]	T_n [GE]	R_n [GE]
0	–	–	R_0
1	Z_1	T_1	R_1
2	Z_2	T_2	R_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

wie es Banken ihren Kreditkunden zur finanziellen Orientierung zur Verfügung stellen (müssen).

Bem.: Zur Erstellung eines Tilgungsplans lassen sich die rekursiven Formeln (6.26), (6.27) und (6.28), bei vorgegebenem Darlehensbetrag R_0 , Aufzinsfaktor q und Annuität A , sehr einfach in einem Tabellenkalkulationsprogramm wie EXCEL umsetzen.

Bezüglich Gl. (6.29) lässt sich folgende Beobachtung machen: Da die konstant bleibende Annuität A implizit einen Faktor $(q - 1)$ enthält [vgl. Gl. (6.25)], wachsen die zwei miteinander konkurrierenden Terme jeweils exponentiell mit n . Für eine erfolgreiche Tilgung der Restschuld R_n ist es also entscheidend, den freien Tilgungsparameter t (bei gegebenem $p > 0 \Leftrightarrow q > 1$) derart festzulegen, dass der zweite Term die Möglichkeit erhält, den ersten (der mit einem Vorsprung $R_0 > 0$ bei $n = 0$ startet) mit n einholen zu können. Die notwendige Voraussetzung $t > 0$, welche aus der Forderung $R_n \stackrel{!}{\leq} R_{n-1}$ folgt, gewährleistet gerade diese Möglichkeit.

Gleichung (6.29) stellt eine Beziehung zwischen fünf Größen dar. Hat man Werte zu vieren vorgegeben, lässt sich daraus der resultierende Wert der fünften Größe ausrechnen.

- (i) Berechnen der **Laufzeit** (engl.: contract period) n eines Darlehensvertrags, bei vorgegebenem Darlehensbetrag R_0 , Aufzinsfaktor q und Annuität A . Auflösen der Bedingungsgleichung $R_n \stackrel{!}{=} 0$ nach n liefert (nach wenigen algebraischen Schritten)

$$n = \frac{\ln\left(1 + \frac{p}{t}\right)}{\ln(q)}; \quad (6.30)$$

die Laufzeit ist also unabhängig vom Betrag R_0 des Darlehens.

- (ii) Berechnen der **Annuität** (engl.: annuity) A , bei vorgegebener Laufzeit n , Darlehensbetrag R_0 und Aufzinsfaktor q . Auflösen der Bedingungsgleichung $R_n \stackrel{!}{=} 0$ nach A liefert unmittelbar

$$A = \frac{q^n(q - 1)}{q^n - 1} R_0. \quad (6.31)$$

Durch Gleichsetzen der Ausdrücke (6.31) und (6.25) für A findet man zusätzlich

$$\frac{t}{100} = \frac{q - 1}{q^n - 1}. \quad (6.32)$$

6.4 Rentenrechnung

Bei der **Rentenrechnung** (engl.: pension calculations) betrachtet man, ausgehend von einem **Anfangskapital** $K_0 > 0$ (in GE), die (diskrete) zeitliche Entwicklung eines **Kontostands** K_n (in GE) unter dem Einfluss von zwei gegenläufigen Wirkungen: einerseits verdient das Rentenkonto Zinsen zu einem **Jahreszinsfuß** $p > 0$ (d.h. $q > 1$), andererseits werden von diesem Konto in gleichen Abständen $m \in \mathbb{N}$ vorschüssige Rentenauszahlungen vom *konstanten Betrag* (engl.: amount) a pro Kalenderjahr getätigt.

Wir beginnen mit der Berechnung der pro Kalenderjahr anfallenden Zinsen. Hierbei berücksichtigt die Bank die Tatsache, dass sich das auf dem Konto befindende Kapital während eines Kalenderjahres stetig vermindert. Zinsen werden deshalb pro verstrichenem von m Teiljahren anteilmäßig, aber ohne Zinseszinsseffekt, berechnet. Folglich hat das Konto zum Ende des ersten von m Teiljahren anteilmäßig Zinsen vom Betrag (in GE)

$$Z_{1/m} = (K_0 - a) \cdot \frac{p}{m \cdot 100} = (K_0 - a) \frac{(q - 1)}{m}$$

verdient. Der Zinsbetrag für das k -te von m Teiljahren ($k \leq m$) ist durch

$$Z_{k/m} = (K_0 - ka) \frac{(q - 1)}{m}$$

gegeben. Über Aufsummieren der einzelnen Teilbeiträge hat also die Zinsgutschrift für ein erstes verstrichenes Kalenderjahr den Wert

$$Z_1 = \sum_{k=1}^m Z_{k/m} = \sum_{k=1}^m (K_0 - ka) \frac{(q - 1)}{m} = \frac{(q - 1)}{m} \left[mK_0 - a \sum_{k=1}^m k \right].$$

Unter Anwendung der Identität (6.5) lässt sich dieses Ergebnis in die Form

$$Z_1 = \left[K_0 - \frac{1}{2} (m + 1)a \right] (q - 1) \quad (6.33)$$

bringen. Beachten Sie die Tatsache, dass dieser Zinsbetrag linear mit dem Auszahlungsbetrag a bzw. mit der Anzahl der Auszahlungen m sinkt.

Der Kontostand nach Ablauf eines ersten Kalenderjahres ist nun durch

$$K_1 = K_0 - ma + Z_1 \stackrel{\text{Gl. (6.33)}}{=} K_0 q - \left[m + \frac{1}{2} (m + 1)(q - 1) \right] a$$

gegeben. Nach Ablauf eines zweiten Kalenderjahres gilt

$$Z_2 = \left[K_1 - \frac{1}{2} (m + 1)a \right] (q - 1),$$

sowie

$$K_2 = K_1 - ma + Z_2 \stackrel{\text{Einsetzen für } K_1 \text{ und } Z_2}{=} K_0 q^2 - \left[m + \frac{1}{2} (m + 1)(q - 1) \right] a(q + 1).$$

In Analogie zu den sich hier abzeichnenden Strukturen, haben die im Kalenderjahr n verdienten **Zinsen** (engl.: interest gained) den Wert

$$Z_n = \left[K_{n-1} - \frac{1}{2} (m+1)a \right] (q-1), \quad (6.34)$$

während der **Kontostand** (engl.: account balance) nach n Kalenderjahren

$$K_n = K_{n-1} - ma + Z_n \quad \xrightarrow{\text{Einsetzen für } K_{n-1} \text{ und } Z_n} K_0 q^n - \left[m + \frac{1}{2} (m+1)(q-1) \right] a \sum_{k=0}^{n-1} q^k$$

beträgt. Unter Verwendung der Identität (6.10) lässt sich K_n abschließend schreiben als

explizit: $K_n = K_0 q^n - \left[m + \frac{1}{2} (m+1)(q-1) \right] a \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad n, m \in \mathbb{N}.$

(6.35)

Wie schon bei der Tilgungsrechnung in Abschnitt 6.3, wachsen auch hier die beiden gegeneinander agierenden Terme auf der rechten Seite exponentiell mit n . Dabei hängt es von den Werten der Größen K_0 , q und a sowie dem Parameter m ab, ob der zweite Term den ersten (welcher mit dem Vorsprung K_0 bei $n = 0$ startet) einholen kann.

Gleichung (6.35) darf wieder beliebig algebraisch umgeformt werden (solange nicht durch Null dividiert wird).

- (i) Die **Laufzeit** (engl.: contract period) n der Rente ergibt sich aus der Forderung $K_n \stackrel{!}{=} 0$ durch entsprechendes Auflösen. Unter der Voraussetzung $[\dots]a - K_0(q-1) > 0$, findet man somit³

$$n = \frac{\ln \left(\frac{[\dots]a}{[\dots]a - K_0(q-1)} \right)}{\ln(q)}. \quad (6.36)$$

- (ii) Der **Barwert** (engl.: present value) B_0 einer Rente ergibt sich aus der folgenden Fragestellung: Bei vorgegebenem jährlichen Aufzinsfaktor $q > 1$ für ein Rentenkonto, welches Anfangskapital K_0 muss bereit gestellt werden, damit man sich über n Kalenderjahre hinweg m -mal jährlich den konstanten Betrag a vorschüssig auszahlen lassen kann? Der Wert von $B_0 = K_0$ ergibt sich wiederum aus der Forderung $K_n \stackrel{!}{=} 0$, die nun jedoch nach K_0 aufzulösen ist. Es ergibt sich daraus das Resultat

$$B_0 = K_0 = \left[m + \frac{1}{2} (m+1)(q-1) \right] a \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}. \quad (6.37)$$

- (iii) Die sogenannte (vorschüssige) **ewige Rente** (engl.: everlasting pension payments) a_{ewig} basiert auf der Strategie, nur die anfallenden Zinsen zu verkonsumieren, die ein Anfangskapital

³Der Platzhalter $[\dots]$ steht hier für den konstanten Ausdruck $\left[m + \frac{1}{2} (m+1)(q-1) \right]$.

$K_0 > 0$ auf einem Rentenkonto mit jährlichem Aufzinsfaktor $q > 1$ abwirft. Aufzulösen ist folglich die Bedingungsgleichung $K_n \stackrel{!}{=} K_0$, für alle n , nach a . Dies führt zum Ergebnis

$$a_{\text{ewig}} = \frac{q - 1}{m + \frac{1}{2}(m + 1)(q - 1)} K_0 ; \quad (6.38)$$

a_{ewig} ist direkt proportional zu K_0 !

6.5 Lineare und geometrisch-degressive Abschreibungen

Abschreibung (engl.: depreciation) nennt man den Versuch einer quantitativen Beschreibung des materiellen Wertverlusts mit der Zeit eines Wirtschaftsguts vom **Anfangswert** (engl.: initial value) $K_0 > 0$ (in GE). Im Steuerrecht gesetzlich verankert findet man für Investoren insbesondere die zwei nachfolgend diskutierten mathematischen Varianten der Abschreibung.

6.5.1 Lineare Abschreibung

Soll der **Anfangswert** K_0 über einen vorgegebenen Zeitraum von N Kalenderjahren zu gleichen Teilen *voll* abgeschrieben werden, so wird der **Restwert** (engl.: remaining value) nach Ablauf von n Kalenderjahren (in GE) durch die Gleichung

$$R_n = K_0 - n \left(\frac{K_0}{N} \right), \quad n = 1, \dots, N, \quad (6.39)$$

dargestellt. Für die Restwerte aus benachbarten Kalenderjahren gilt hierbei $R_n - R_{n-1} = - \left(\frac{K_0}{N} \right) =: d < 0$. Der **linearen Abschreibung** (engl.: straight line depreciation method) unterliegt also die Struktur einer arithmetischen Zahlenfolge mit *negativer* Differenz d zwischen ihren Nachbargliedern (vgl. Abschnitt 6.1.1).

6.5.2 Geometrisch-degressive Abschreibung

Grundlage der zweiten Abschreibungsmethode für ein Wirtschaftsgut mit **Anfangswert** K_0 ist die Überlegung, pro abgelaufenem Kalenderjahr jeweils einen **Prozentsatz** $p > 0$ vom Restwert des Guts im Vorjahr abzuschreiben. Mit der Definition eines dimensionslosen positiven **Abschreibungsfaktors**

$$q := 1 - \frac{p}{100} < 1, \quad (6.40)$$

gilt dann für den **Restwert** nach Ablauf von n Kalenderjahren (in GE)

$$\text{rekursiv: } R_n = R_{n-1}q, \quad R_0 \equiv K_0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.41)$$

Der **geometrisch-degressiven Abschreibung** (engl.: declining balance depreciation method) unterliegt somit die Struktur einer geometrischen Zahlenfolge mit konstantem Quotienten q zwischen

ihren Nachbargliedern (vgl. Abschnitt 6.1.2). Mit steigendem n wird der Wert dieser Glieder immer kleiner. Durch rückwertige Substitution kann der Ausdruck (6.41) in die alternative Form

$$\boxed{\text{explizit: } R_n = K_0 q^n, \quad 0 < q < 1, \quad n \in \mathbb{N},} \quad (6.42)$$

überführt werden.

Aus Gl. (6.42) lassen sich Antworten zu folgenden Fragestellungen quantitativer Natur ableiten:

- (i) Vorgegeben seien ein Abschreibungsfaktor q und ein projizierter Restwert R_n für ein Wirtschaftsgut. Nach welcher **Abschreibungszeit** (engl.: period of time) n wird dieser Restwert erreicht?

$$n = \frac{\ln(R_n/K_0)}{\ln(q)}. \quad (6.43)$$

- (ii) Vorgegeben sind eine projizierte Abschreibungszeit n mit Restwert R_n . Zu welchem **Prozentsatz** (engl.: percentage rate) p muss das Wirtschaftsgut abgeschrieben werden?

$$q = \sqrt[n]{\frac{R_n}{K_0}} \Rightarrow p = 100 \cdot \left(1 - \sqrt[n]{\frac{R_n}{K_0}}\right). \quad (6.44)$$

6.6 Zusammenfassende Formel

Abschließend wollen wir die Ergebnisse dieses Kapitels nochmals rekapitulieren. Bemerkenswerterweise gelingt dies mit einer einzigen Formel, aus welcher die oben diskutierten Fälle durch Spezialisierung hervorgehen. Diese Formel, die sich auf einen Betrachtungszeitraum von n Kalenderjahren bezieht, ist gegeben durch (vgl. Zeh–Marschke (2010) [25]):

$$\boxed{K_n = K_0 q^n + R \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}, \quad n \in \mathbb{N}.} \quad (6.45)$$

Die darin enthaltenen Spezialfälle sind:

- (i) **Zinseszins** für ein Anfangskapital $K_0 > 0$: mit $R = 0$ und $q > 1$ reduziert sich Gl. (6.45) auf Gl. (6.13).
- (ii) **Vorschüssiges Ratensparen** mit konstantem Einzahlungsbetrag $E > 0$: mit $K_0 = 0$, $q > 1$ und $R = Eq$ reduziert sich Gl. (6.45) auf Gl. (6.19).
- (iii) **Tilgung in konstanten Annuitäten**: mit $K_0 = -R_0 < 0$, $q > 1$ und $R = A > 0$ reduziert sich Gl. (6.45) auf das *Negative (!)* von Gl. (6.29). In dieser Formulierung werden Restschulden $K_n = R_n$ also (sinnvollerweise) durch negative Werte zum Ausdruck gebracht.
- (iv) **Rentenrechnung** mit vorschüssigen Auszahlungen eines konstanten Betrages $a > 0$: mit $q > 1$ und $R = -\left[m + \frac{1}{2}(m+1)(q-1)\right]a$ reduziert sich Gl. (6.45) auf Gl. (6.35).
- (v) **Geometrisch–degressive Abschreibung** eines Anfangswerts $K_0 > 0$: mit $R = 0$ und $0 < q < 1$ reduziert sich Gl. (6.45) auf Gl. (6.42) für den Restwert $K_n = R_n$.

Kapitel 7

Differenzialrechnung bei reellen Funktionen einer Variablen

Der Inhalt dieses Kapitels ist relevant für das Verständnis der in Kapitel 5.5 des Lehrbuchs von Schreyögg und Koch (2010) [21] behandelten quantitativen Themen.

Die Kapitel 1 bis 5 dieser Vorlesungsnotizen beschränkten sich auf die Diskussion *linearer* funktionaler Beziehungen zwischen gegebenen INPUT-Größen und zugeordneten OUTPUT-Größen. In diesem Kapitel nun betrachten wir vornehmlich quantitative Relationen zwischen (einer) INPUT-Größen und (einer) zugeordneten OUTPUT-Größen, die von **nichtlinearer Natur** (engl.: non-linear nature) sind.

7.1 Reelle Funktionen einer Variablen

Wir beginnen mit der Einführung des Begriffs einer reellen Funktion einer Variablen. Das Wesen einer reellen Funktion einer Variablen ist das einer **Abbildung** (engl.: mapping),¹ welche eine einfache aber strenge Regel zu befolgen hat:

eine Funktion f muss *jedem* Wert x aus einer Menge von reellen Zahlen $D \subseteq \mathbb{R}$ *genau einen* Wert y aus einer Menge von reellen Zahlen $W \subseteq \mathbb{R}$ zuordnen.

Def.: Eine **eindeutige** (engl.: unique) Abbildung f einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ der reellen Zahlen auf eine Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}$ der reellen Zahlen,

$$f: D \rightarrow W, \quad x \mapsto y = f(x) \quad (7.1)$$

heißt **reelle Funktion einer Variablen** (engl.: real-valued function of one variable).

Zentrale Aspekte des Konzepts einer reellen Funktionen einer Variablen werden beschrieben durch die Begriffe:

¹Vergleiche hierzu unsere Einführung von Matrizen als mathematische Objekte in Kapitel 2.

- D : **Definitionsbereich** (engl.: domain) von f ,
- W : **Wertebereich** (engl.: range) von f ,
- $x \in D$: **unabhängige Variable** ((engl.: independent variable) von f , auch Argument (engl.: argument) von f genannt,
- $y \in W$: **abhängige Variable** (engl.: dependent variable) von f ,
- $f(x)$: **Abbildungsvorschrift** (engl.: mapping instruction),
- **Graph** (engl.: graph) von f : Zahlenpaare $G = \{(x, f(x)) | x \in D\} \subset \mathbb{R}^2$.

Für die spätere Analyse der Eigenschaften bestimmter reeller Funktionen einer Variablen benötigen wir die Definitionen weiterer wichtiger Begriffe.

Def.: Die einer **eineindeutigen** (engl.: one-to-one and onto) Abbildung f , mit $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ und $W(f) \subseteq \mathbb{R}$, zugeordnete Abbildung f^{-1} , mit $D(f^{-1}) = W(f)$ und $W(f^{-1}) = D(f)$, wird **inverse Funktion** (oder Umkehrfunktion) (engl.: inverse function) zu f genannt.

Bei einer eineindeutigen Abbildung f wird nicht nur jedem $x \in D(f)$ genau ein $y \in W(f)$ zugeordnet, sondern gleichfalls auch jedem $y \in W(f)$ genau ein $x \in D(f)$.

Def.: Eine reelle Funktion f einer Variablen heißt **stetig an der Stelle** $x \in D(f)$ (engl.: continuous at), wenn sie für $\Delta x \in \mathbb{R}_{>0}$ die Bedingungen

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x - \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x) \quad (7.2)$$

erfüllt, wenn also bei x die linken und rechten Grenzwerte der Funktion f mit dem Funktionswert $f(x)$ zusammenfallen. Eine reelle Funktion f heißt **stetig** (engl.: continuous), wenn sie für *alle* $x \in D(f)$ stetig ist.

Def.: Gilt für eine reelle Funktion f einer Variablen die Beziehung

$$f(a) < f(b) \quad \text{für alle} \quad a, b \in D(f) \text{ mit } a < b, \quad (7.3)$$

so wird f **streng monoton steigend** (engl.: strictly monotonously increasing) genannt. Gilt hingegen die Beziehung

$$f(a) > f(b) \quad \text{für alle} \quad a, b \in D(f) \text{ mit } a < b, \quad (7.4)$$

so wird f **streng monoton fallend** (engl.: strictly monotonously decreasing) genannt.

Beachten Sie, dass insbesondere *streng monotone stetige Funktionen* immer eineindeutige Abbildungen darstellen und deshalb invertierbar (umkehrbar) sind.

Nun wenden wir uns kurz fünf, in wirtschaftswissenschaftlichen Anwendungen häufig auftretenden Familien reeller Funktionen einer Variablen und deren wichtigsten qualitativen Eigenschaften zu.

7.1.1 Polynome vom Grad n

Polynome vom Grad n (engl.: polynomials of degree n) sind reelle Funktionen einer Variablen der Form

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_i x^i + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$.

(7.5)

Ihr Definitionsbereich ist $D(f) = \mathbb{R}$. Ihr Wertebereich hängt im konkreten Fall von den Werten der konstanten Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$ ab. Diese Funktionen besitzen maximal n reelle **Nullstellen**.

7.1.2 Gebrochen rationale Funktionen

Gebrochen rationale Funktionen (engl.: rational functions) werden durch den **Quotienten zweier Polynome** vom Grad m bzw. vom Grad n gebildet, d.h.

$$y = f(x) = \frac{p_m(x)}{q_n(x)} = \frac{a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0}$$

mit $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, $m, n \in \mathbb{N}$, $a_m, b_n \neq 0$.

(7.6)

Ihr Definitionsbereich ist $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{x | q_n(x) = 0\}$. Wenn für die Grade m und n der Polynome $p_m(x)$ und $q_n(x)$ gilt

- (i) $m < n$, so wird f **echt gebrochen rational** (engl.: proper rational functions), bzw.
- (ii) $m \geq n$, so wird f **unecht gebrochen rational** (engl.: improper rational functions)

genannt. Im zweiten Fall lässt sich durch *Polynomdivision* (engl.: polynomial division) immer ein rein polynomialer Anteil von f abspalten. Die **Nullstellen** (engl.: roots) von f sind die Nullstellen des Zählerpolynoms $p_m(x)$, für welche gleichzeitig $q_n(x) \neq 0$ gilt. Nullstellen des Nennerpolynoms $q_n(x)$ stellen so genannte **Polstellen** (engl.: poles) von f dar. Echt gebrochen rationale Funktionen tendieren für sehr kleine ($x \rightarrow -\infty$) bzw. sehr große ($x \rightarrow +\infty$) Argumentwerte immer gegen Null.

7.1.3 Potenzfunktionen

Potenzfunktionen (engl.: power-law functions) sind Funktionen der Bauart

$$y = f(x) = x^\alpha \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}.$$
(7.7)

Hier beschränken wir uns auf Fälle mit Definitionsbereich $D(f) = \mathbb{R}_{>0}$, sodass als Wertebereich $W(f) = \mathbb{R}_{>0}$ folgt. Unter den genannten Bedingungen sind Potenzfunktionen streng monoton steigend für $\alpha > 0$, und streng monoton fallend für $\alpha < 0$; also können sie durch $y = \sqrt[\alpha]{x} = x^{1/\alpha}$ invertiert werden. Nullstellen liegen unter der hier eingeführten Beschränkung keine vor.

7.1.4 Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen (engl.: exponential functions) sind durch Konstruktionen der Form

$$\boxed{y = f(x) = a^x \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}} \quad (7.8)$$

gegeben. Ihr Definitionsbereich ist $D(f) = \mathbb{R}$, ihr Wertebereich $W(f) = \mathbb{R}_{>0}$. Sie zeigen streng monoton steigendes Verhalten für $a > 1$, und streng monoton fallendes Verhalten für $0 < a < 1$. Folglich können sie invertiert werden. Ihr y -Achsenabschnitt liegt generell bei $y = 1$. Exponentialfunktionen sind (für $a > 1$) auch unter dem Namen **Wachstumsfunktionen** bekannt.

Spezialfall: Wird die konstante (!) Basiszahl zu $a = e$ gewählt, wobei e die irrationale **Eulersche Zahl** (benannt nach dem schweizer Mathematiker Leonhard Euler, 1707–1783) darstellt, welche durch die unendliche Zahlenreihe

$$e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

definiert ist, so spricht man von der **natürlichen Exponentialfunktion** (engl.: natural exponential function)

$$y = f(x) = e^x =: \exp(x) . \quad (7.9)$$

Analog zur Definition von e gilt:

$$e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

7.1.5 Logarithmusfunktionen

Logarithmusfunktionen (engl.: logarithmic functions), gegeben durch

$$\boxed{y = f(x) = \log_a(x) \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\} ,} \quad (7.10)$$

sind als inverse Funktionen (Umkehrfunktionen) der streng monotonen Exponentialfunktionen $y = f(x) = a^x$ definiert — und umgekehrt. Folglich gilt für sie $D(f) = \mathbb{R}_{>0}$ und $W(f) = \mathbb{R}$. Streng monoton steigendes Verhalten liegt vor für $a > 1$, streng monoton fallendes Verhalten für $0 < a < 1$. Ihr x -Achsenabschnitt ist generell $x = 1$.

Spezialfall: Die **natürliche Logarithmusfunktion** (engl.: natural logarithmic function) erhalten wir, wenn die Basiszahl zu $a = e$ gewählt wird; also

$$y = f(x) = \log_e(x) := \ln(x) . \quad (7.11)$$

7.1.6 Zusammengesetzte Funktionen

Funktionen aus allen fünf hier betrachteten Familien können sowohl über die vier Grundrechenarten, als auch durch Verkettung bzw. Verschachtelung (im Rahmen gültiger Rechenregeln) beliebig miteinander kombiniert werden (engl.: concatenations of real-valued functions).

Satz: Seien f und g auf $D(f)$ bzw. $D(g)$ stetige reelle Funktionen. Dann sind auch die kombinierten Funktionen

1. **Summe/Differenz** $f \pm g$, wobei $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$ mit $D(f) \cap D(g)$,
2. **Produkt** $f \cdot g$, wobei $(f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$ mit $D(f) \cap D(g)$,
3. **Quotient** $\frac{f}{g}$, wobei $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ mit $g(x) \neq 0$ und $D(f) \cap D(g) \setminus \{x | g(x) = 0\}$,
4. **Verkettung** $f \circ g$, wobei $(f \circ g)(x) := f(g(x))$ mit $\{x \in D(g) | g(x) \in D(f)\}$,

stetig auf den entsprechenden Definitionsbereichen.

7.2 Ableitungen einer differenzierbaren reellen Funktion

Das zentrale Thema dieses Kapitels ist die mathematische Beschreibung des **lokalen Änderungsverhaltens** (engl.: local variability) von *stetigen* reellen Funktion einer Variablen, $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}$, deren Grundlagen wir uns nun zuwenden. Dazu wollen wir eine kleine Änderung des Wertes des Argumentes x von f betrachten, d.h. wir verändern $x \rightarrow x + \Delta x$ mit $\Delta x \in \mathbb{R}$ und untersuchen, welche Auswirkung auf f diese Änderung von x nach sich zieht. Wir finden unmittelbar, dass sich aus der vorgegebenen Änderung die Konsequenz $y \rightarrow y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ mit $\Delta y \in \mathbb{R}$ einstellt. Im Fazit: eine vorgegebene Änderung des Argumentes x der Größe Δx bewirkt für f eine Änderung der Größe $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Interessant ist nun für uns ein **Größenvergleich** dieser beiden Änderungen. Dazu bilden wir das Verhältnis

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

auch *Differenzenquotient* für f genannt. Eine naheliegende Frage lautet nun: wie verhält sich der Wert dieses Differenzenquotienten im Grenzfall, dass wir die vorgegebene Änderung Δx des Argumentes von f kontinuierlich kleiner werden lassen, bis sie auf Null gesunken ist?

Def.: Eine stetige reelle Funktion f einer Variablen heißt **differenzierbar an der Stelle** (engl.: differentiable at) $x \in D(f)$, wenn für beliebiges $\Delta x \in \mathbb{R}$ der Grenzwert

$$f'(x) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (7.12)$$

existiert und eindeutig ist. Ist f differenzierbar für alle $x \in D(f)$, so wird f **differenzierbar** (engl.: differentiable) genannt.

Die Existenz dieses Grenzwertes in einem Punkt $(x, f(x))$ setzt für die Funktion f in diesem Punkt faktisch die Abwesenheit von „Sprüngen und Knicken“ voraus, dass also f in $(x, f(x))$ hinreichend „glatt“ ist. Die Größe $f'(x)$ wird **erste Ableitung** (engl.: first derivative) der (differenzierbaren) Funktion f an der Stelle x genannt. Sie ist ein Maß für die **lokale Änderungsrate** (engl.: local rate of change) der Funktion f im Punkt $(x, f(x))$. Allgemein gilt für die erste Ableitung $f'(x)$ die Interpretation: wird das Argument x einer differenzierbaren reellen Funktion f um 1 (eine Einheit) erhöht, so ändert sich die Funktion f in Konsequenz dessen näherungsweise um $f'(x) \cdot 1$ (Einheiten).

Alternative Schreibweise:

$$f'(x) \equiv \frac{df(x)}{dx}.$$

Die Differenzialrechnung wurde zusammen mit der Integralrechnung (siehe Kapitel 7) während der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts unabhängig voneinander von dem englischen Physiker, Mathematiker, Astronomen und Philosophen Sir Isaac Newton (1643–1727) sowie dem deutschen Philosophen, Mathematiker und Physiker Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) entwickelt.

Über die erste Ableitung einer differenzierbaren Funktion f an einer Stelle $x_0 \in D(f)$, also $f'(x_0)$, definieren wir die so genannte **Linearisierung** (engl.: linearisation) von f in einer Umgebung der Stelle x_0 . Die damit verbundene Gleichung der **Tangente** (engl.: tangent) an f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist durch

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (7.13)$$

gegeben.

GTR: Die Berechnung lokaler Ableitungswerte $f'(x_0)$ kann, für vorgegebenes, eingespeichertes f , im Modus CALC mit der vorprogrammierten interaktiven Funktion dy/dx durchgeführt werden.

Für die in Abschnitt 7.1 besprochenen fünf Familien elementarer reeller Funktionen, sowie für (u.a. aus diesen nach diversen Möglichkeiten) zusammengesetzte Funktionen, gelten folgende Differenzierungsregeln:

Differenzierungsregeln

1. $(c)' = 0$ für $c = \text{konstant} \in \mathbb{R}$ (Konstanten)
2. $(x)' = 1$ (Lineare Funktion)
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$ (Natürliche Potenzfunktionen)
4. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}_{>0}$ (Allgemeine Potenzfunktionen)
5. $(a^x)' = \ln(a)a^x$ für $a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$ (Exponentialfunktionen)
6. $(e^{ax})' = ae^{ax}$ für $a \in \mathbb{R}$ (Natürliche Exponentialfunktionen)
7. $(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln(a)}$ für $a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$ und $x \in \mathbb{R}_{>0}$ (Logarithmusfunktionen)
8. $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ (Natürliche Logarithmusfunktion).

Für differenzierbare reelle Funktionen f und g gilt:²

1. $(cf(x))' = cf'(x)$ für $c = \text{konstant} \in \mathbb{R}$
2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ (Summenregel)
3. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (Produktregel)
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ (Quotientenregel)
5. $((f \circ g)(x))' = f'(g)|_{g=g(x)} \cdot g'(x)$ (Kettenregel)
6. $(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ für $f(x) > 0$ (Logarithmisches Differenzieren)
7. $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(y)} \Big|_{y=f^{-1}(x)}$, falls f eineindeutig ist.
(Differenzieren einer inversen Funktion).

Die Methoden der Differenzialrechnung wollen wir nun exemplarisch zur Beschreibung des Änderungsverhaltens einiger in ökonomischen Anwendungen häufig wiederkehrender einfacher Funktionen heranziehen, sowie zur Bestimmung von möglichen Extremwerten dieser. Die im folgenden Abschnitt bereit gestellte Liste bietet einen kurzen Überblick über verschiedene gängige Beispiele.

7.3 Ökonomische Funktionen der Wirtschaftstheorie

1. **Kostenfunktion** (engl.: total cost function) $K(x) \geq 0$ (dim: GE)
 Argument: Ausbringungsmenge (engl.: level of physical output) $x \geq 0$ (dim: ME)
2. **Grenzkostenfunktion** (engl.: marginal cost function) $K'(x) > 0$ (dim: GE/ME)
 Argument: Ausbringungsmenge $x \geq 0$ (dim: ME)
3. **Durchschnittskostenfunktion** (engl.: average cost function) $K(x)/x > 0$ (dim: GE/ME)
 Argument: Ausbringungsmenge $x > 0$ (dim: ME)
4. **Stückpreisfunktion** (engl.: unit price function) $p(x) \geq 0$ (dim: GE/ME)
 Argument: Ausbringungsmenge $x > 0$ (dim: ME)
5. **Ertragsfunktion** (engl.: total revenue function) $E(x) := xp(x) \geq 0$ (dim: GE)
 Argument: Ausbringungsmenge $x > 0$ (dim: ME)
6. **Grenzertragsfunktion** (engl.: marginal revenue function) $E'(x) = xp'(x) + p(x)$ (dim: GE/ME)
 Argument: Ausbringungsmenge $x > 0$ (dim: ME)

²(Engl.: summation rule, product rule, quotient rule, chain rule, logarithmic differentiation, differentiation of an inverse function.)

7. **Gewinnfunktion** (engl.: profit function) $G(x) := E(x) - K(x)$ (dim: GE)
Argument: Ausbringungsmenge $x > 0$ (dim: ME)
8. **Grenzgewinnfunktion** (engl.: marginal profit function) $G'(x) := E'(x) - K'(x) = xp'(x) + p(x) - K'(x)$ (dim: GE/ME)
Argument: Ausbringungsmenge $x > 0$ (dim: ME)
9. **Nutzenfunktion**³ (engl.: utility function) $U(x)$ (dim: fallabhängig)
Argument: Wohlstand, Handlungsmöglichkeit (engl.: wealth, opportunity, action) x (dim: fallabhängig)

Das Konzept einer Nutzenfunktion zur Quantifizierung des psychologischen Werts, den ein Wirtschaftsakteur einer bestimmten Geldsumme oder dem Besitz eines bestimmten Guts zuschreibt, wurde von dem Schweizerischen Mathematiker und Physiker Daniel Bernoulli (1700–1782) im Jahre 1738 in die **Wirtschaftstheorie** (engl.: economic theory) eingeführt; vgl. Bernoulli (1738) [4]. Die Existenz einer Nutzenfunktion gehört zu den Grundannahmen der Theorie und wird allgemein als rechtsgekrümmte Funktion dargestellt, $U''(x) < 0$, vor dem Hintergrund der *Annahme* abnehmenden Grenznutzens mit steigendem Wohlstand.
10. **Wirtschaftlichkeit** (engl.: economic efficiency) $W(x) := E(x)/K(x) \geq 0$ (dim: 1)
Argument: Ausbringungsmenge $x > 0$ (dim: ME)
11. **Nachfragefunktion** (engl.: demand function) $N(p) \geq 0$, monoton fallend (dim: ME)
Argument: Preis pro ME p , ($0 \leq p \leq p_{\max}$) (dim: GE/ME)
12. **Angebotsfunktion** (engl.: supply function) $A(p) \geq 0$, monoton steigend (dim: ME)
Argument: Preis pro ME p , ($p_{\min} \leq p$) (dim: GE/ME).

Ein besonders prominentes Beispiel einer reellen ökonomischen Funktion einer Variablen stellt die **psychologische Wertfunktion** (engl.: psychological value function) dar, welche die Israelisch-US-Amerikanischen experimentellen Psychologen Daniel Kahneman und Amos Tversky (1937–1996) im Rahmen ihrer **Neuen Erwartungstheorie** (engl.: Prospect Theory), einem Fundament der **Verhaltensökonomik** (engl.: Behavioural Economics), entwickelt haben (vgl. Kahneman und Tversky (1979) [16, S. 279], und Kahneman (2011) [15, S. 282f]). Geehrt wurden die Untersuchungen dieser Autoren im Jahre 2002 mit dem Preis für Wirtschaftswissenschaften im Gedenken an Alfred Nobel. Eine mögliche Representation dieser psychologischen Wertfunktion wird durch abschnittsweise Beschreibung

$$v(x) = \begin{cases} a \log_{10}(1+x) & \text{für } x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \\ -2a \log_{10}(1-x) & \text{für } x \in \mathbb{R}_{< 0} \end{cases}, \quad (7.14)$$

mit Parameter $a \in \mathbb{R}_{> 0}$, gegeben. Im Kontrast zu Bernoullis Nutzenfunktion, stellt hierbei das Argument x die *Änderung einer quantitativen Wohlstandsgröße* bezüglich eines vorgegebenen Referenzpunktes dar (anstatt die quantitative Wohlstandsgröße selbst).

³Nutzenfunktionen werden in der Wirtschaftstheorie nicht notwendigerweise als differenzierbar vorausgesetzt.

7.4 Kurvendiskussion

Bevor wir zur Anwendung der Differenzialrechnung auf einige einfache quantitative Probleme aus den Wirtschaftswissenschaften schreiten, fassen wir in diesem Abschnitt kurz die grundlegenden Schritte einer umfassenden Kurvendiskussion (engl.: curve sketching) für reelle Funktionen einer Variablen zusammen. Wesentlicher Aspekte einer Kurvendiskussion bedienen wir uns sodann in drei nachfolgenden Betrachtungen ökonomischer Art.

1. **Definitionsbereich** (engl.: domain): $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ ist regulär}\}$
2. **Symmetrien** (engl.: symmetries): für alle $x \in D(f)$, ist
 - (i) $f(-x) = f(x)$, d.h. f **gerade** (engl.: even), oder
 - (ii) $f(-x) = -f(x)$, d.h. f **ungerade** (engl.: odd), oder
 - (iii) $f(-x) \neq f(x) \neq -f(x)$, d.h. f hat **keine Symmetrie**?
3. **Nullstellen** (engl.: roots): alle $x_N \in D(f)$, die die Bedingung $f(x) \stackrel{!}{=} 0$ erfüllen.
4. **Lokale Extremwerte** (engl.: local extremal values):
 - (i) lokale **Minima** (engl.: local minima) von f liegen vor bei allen $x_E \in D(f)$, die die notwendige Bedingung $f'(x) \stackrel{!}{=} 0$, und die hinreichende Bedingung $f''(x) \stackrel{!}{>} 0$ simultan erfüllen.
 - (ii) lokale **Maxima** (engl.: local maxima) von f liegen vor bei allen $x_E \in D(f)$, die die notwendige Bedingung $f'(x) \stackrel{!}{=} 0$, und die hinreichende Bedingung $f''(x) \stackrel{!}{<} 0$ simultan erfüllen.
5. **Wendepunkte** (engl.: points of inflection): alle $x_W \in D(f)$, die die notwendige Bedingung $f''(x) \stackrel{!}{=} 0$, und die hinreichende Bedingung $f'''(x) \stackrel{!}{\neq} 0$ simultan erfüllen.
6. **Monotonie** (engl.: monotonous behaviour):
 - (i) f monoton **steigend** (engl.: monotonously increasing) für $x \in D(f)$ mit $f'(x) > 0$
 - (ii) f monoton **fallend** (engl.: monotonously decreasing) für $x \in D(f)$ mit $f'(x) < 0$
7. **Lokale Krümmung** (engl.: local curvature):
 - (i) f **linksgekrümmt** (engl.: left-handedly curved) für $x \in D(f)$ mit $f''(x) > 0$
 - (ii) f **rechtsgekrümmt** (engl.: right-handedly curved) für $x \in D(f)$ mit $f''(x) < 0$
8. **Asymptoten** (engl.: asymptotic behaviour):

(i) Geraden $y = ax + b$ mit den Eigenschaften $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax - b] = 0$ oder $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax - b] = 0$

(ii) Geraden $x = x_0$ an Polstellen $x_0 \notin D(f)$

9. Wertebereich (engl.: range): $W(f) = \{y \in \mathbb{R} | y = f(x)\}$.

7.5 Analytische Untersuchungen ökonomischer Funktionen

7.5.1 Kostenfunktionen nach Turgot und von Thünen

Nach dem wirtschaftstheoretischen **Ertragsgesetz** (engl.: law of diminishing returns), welches auf den französischen Staatsmann und Ökonomen Anne Robert Jacques Turgot (1727–1781) sowie den deutschen Agrar- und Wirtschaftswissenschaftler Johann Heinrich von Thünen (1783–1850) zurückgeht, wird für eine nichtnegative **Kostenfunktion** (engl.: total cost function) $K(x)$ (in GE) mit **Ausbringungsmenge** (engl.: level of physical output) $x \geq 0$ ME als quantitative Abbildungsvorschrift die mathematische Form eines speziellen *Polynoms dritten Grades* [vgl. Gl. (7.5)] angenommen, welches durch

$$K(x) = \underbrace{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x}_{=K_v(x)} + \underbrace{a_0}_{=K_f} \quad (7.15)$$

mit $a_3, a_1 > 0$, $a_2 < 0$, $a_0 \geq 0$, $a_2^2 - 3a_3a_1 < 0$

beschrieben wird und somit vier freie Parameter besitzt. Es handelt sich hierbei um ein konkretes Beispiel einer empirisch motivierten, aus einer **Regressionsanalyse** hervorgegangenen **Modellierung** eines **nichtlinearen** (engl.: non-linear) funktionalen Zusammenhangs zwischen zwei gegebenen ökonomischen Größen: hier konkret der Ausbringungsmenge x eines Produktes einerseits, und den daran gekoppelten Produktionskosten $K(x)$ andererseits. Die für $K(x)$ angenommene funktionale Form ist aus der Praxis abgeleitet; sie soll folgende empirisch beobachtete Eigenschaften der Produktionskosten reflektieren: für Ausbringungsmengen $x \geq 0$ ME liegt streng monoton steigendes Verhalten vor, insbesondere gibt es *keine* Nullstellen, *keine* lokalen Extremwerte,⁴ jedoch *genau eine* Wendestelle. Als Kurve betrachtet stellt $K(x)$ in dieser speziellen Form einen seitenverkehrten, langgestreckten Großbuchstaben „S“ dar: ausgehend von einem Fixkostenwert, steigen die Produktionskosten zunächst degressiv bis zu einem Wendepunkt, um danach progressiv weiterzuwachsen.

Allgemein setzt sich eine Kostenfunktion in Abhängigkeit einer Ausbringungsmenge aus **variablen Kosten** (engl.: variable costs) $K_v(x)$ und **fixen Kosten** (engl.: fixed costs) $K_f = a_0$ zusammen. Diese Tatsache bringen wir durch den einfachen Ansatz

$$K(x) = K_v(x) + K_f \quad (7.16)$$

zum Ausdruck.

⁴Die letzte Bedingung in Gl. (7.15) gewährleistet eine erste Ableitung von $K(x)$, welche *keine* reellen Nullstellen zulässt; vgl. $0 \stackrel{!}{=} ax^2 + bx + c$ mit $b^2 - 4ac < 0$.

Ertragsgesetzliche Kostenfunktionen unterteilt man in der Betriebswirtschaftslehre in vier Phasen, deren Grenzen durch besonders ausgezeichnete Werte der Ausbringungsmenge festgelegt werden:

• **Phase I** ($0 \text{ ME} \leq x \leq x_W$):

Die Kostenfunktion $K(x)$ besitzt für die Ausbringungsmenge $x_W = -a_2/(3a_3) > 0 \text{ ME}$ einen **Wendepunkt**. Für kleinere Werte von x ist $K''(x) < 0 \text{ GE/ME}^2$, d.h. $K(x)$ wächst hier degressiv, für größere x ist $K''(x) > 0 \text{ GE/ME}^2$, d.h. $K(x)$ wächst hier progressiv. Die **Grenzkosten** (engl.: marginal costs)

$$K'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1 > 0 \text{ GE/ME für alle } x \geq 0 \text{ ME} \quad (7.17)$$

erreichen bei der Ausbringungsmenge $x_W = -a_2/(3a_3)$ ein **Minimum**.

• **Phase II** ($x_W < x \leq x_{g1}$):

Die **variablen Durchschnittskosten** (bzw. variablen Stückkosten) (engl.: variable average costs)

$$\frac{K_v(x)}{x} = a_3x^2 + a_2x + a_1, \quad x > 0 \text{ ME} \quad (7.18)$$

werden **minimal** für eine Ausbringungsmenge $x_{g1} = -a_2/(2a_3) > 0 \text{ ME}$. Bei diesem Wert von x liegt *Gleichheit der variablen Durchschnittskosten und der Grenzkosten* vor, also

$$\frac{K_v(x)}{x} = K'(x), \quad (7.19)$$

was über die Quotientenregel des Ableitens aus der notwendigen Extremalbedingung

$$0 \stackrel{!}{=} \left(\frac{K_v(x)}{x} \right)' = \frac{(K(x) - K_f)' \cdot x - K_v(x) \cdot 1}{x^2},$$

mit $K'_f = 0 \text{ GE/ME}$, folgt. Man spricht vom Wertepaar $(x_{g1}, K(x_{g1}))$ als dem **Betriebsminimum**. Für die Tangente an $K(x)$ in diesem Punkt [vgl. Gl. (7.13)] gilt unter Verwendung der Eigenschaft (7.19)

$$T(x) = K(x_{g1}) + K'(x_{g1})(x - x_{g1}) = K_v(x_{g1}) + K_f + \frac{K_v(x_{g1})}{x_{g1}}(x - x_{g1}) = K_f + \frac{K_v(x_{g1})}{x_{g1}}x,$$

d.h. sie schneidet die K -Achse an der Stelle K_f .

• **Phase III** ($x_{g1} < x \leq x_{g2}$):

Die **Durchschnittskosten** (bzw. Stückkosten) (engl.: average costs)

$$\frac{K(x)}{x} = a_3x^2 + a_2x + a_1 + \frac{a_0}{x}, \quad x > 0 \text{ ME} \quad (7.20)$$

werden **minimal** für eine Ausbringungsmenge $x_{g2} > 0 \text{ ME}$, welche die Bedingungsgleichung $0 \text{ GE} \stackrel{!}{=} 2a_3x_{g2}^3 + a_2x_{g2}^2 - a_0$ erfüllt. Bei diesem Wert von x liegt *Gleichheit der Durchschnittskosten und der Grenzkosten* vor, also

$$\frac{K(x)}{x} = K'(x), \quad (7.21)$$

was über die Quotientenregel des Ableitens aus der notwendigen Extremalbedingung

$$0 \stackrel{!}{=} \left(\frac{K(x)}{x} \right)' = \frac{K'(x) \cdot x - K(x) \cdot 1}{x^2}$$

folgt. Alternativ findet man aus dieser Bedingung durch Umstellen die Beziehung

$$\frac{K'(x)}{K(x)/x} = x \frac{K'(x)}{K(x)} = 1 \quad \text{für } x = x_{g_2}. \quad (7.22)$$

Man spricht vom Wertepaar $(x_{g_2}, K(x_{g_2}))$ als dem **Betriebsoptimum** (engl.: minimum efficient scale (MES)). Betriebswirtschaftlich betrachtet ist für eine Ausbringungsmenge $x = x_{g_2}$ das (bezüglich der in der Einleitung genannten Größe inverse) Verhältnis „INPUT zu OUTPUT“, also $K(x)/x$, am günstigsten. Für die Tangente an $K(x)$ in diesem Punkt [vgl. Gl (7.13)] gilt unter Verwendung der Eigenschaft (7.21)

$$T(x) = K(x_{g_2}) + K'(x_{g_2})(x - x_{g_2}) = K(x_{g_2}) + \frac{K(x_{g_2})}{x_{g_2}}(x - x_{g_2}) = \frac{K(x_{g_2})}{x_{g_2}}x,$$

d.h. sie schneidet die K -Achse an der Stelle 0 GE.

• **Phase IV** ($x > x_{g_2}$):

Es gilt $K'(x)/K(x)/x > 1$; die mit der Fertigung einer zusätzlichen ME des betrachteten Produkts verbundenen Kosten, $K'(x)$, fallen jetzt höher aus als die Durchschnittskosten des Produkts, $K(x)/x$. Diese Situation ist betriebswirtschaftlich betrachtet ungünstig.

7.5.2 Ertragsgesetzliche Gewinnfunktionen

In diesem Abschnitt seien unsere Überlegungen auf die Preispolitik im **Monopol** (engl.: monopoly) beschränkt. Darüber hinaus wollen wir die Annahme der Gültigkeit eines **ökonomischen Gleichgewichtes** (engl.: economic equilibrium) machen, dass sich also das Angebot/der Absatz bzgl. eines Produktes und die Nachfrage bzgl. desselben Produktes mengenmäßig entsprechen; als Formel

$$x(p) = N(p) \quad (7.23)$$

geschrieben. Deshalb identifizieren wir im Folgenden $x(p)$ mit einer nichtnegativen **Nachfragefunktion** (engl.: demand function) (in ME), die von einem **Stückpreis** (engl.: price per unit) p (in GE/ME) abhängt, den ein Monopolist beliebig vorgeben kann. Je nach herangezogenem Wirtschaftsmodell könnte $x(p)$ beispielsweise linear oder quadratisch von p abhängen. Wichtig ist jedoch, dass wir $x(p)$ realistischerweise als streng monoton fallende Funktion annehmen wollen und sie somit auch *umkehrbar* sei. Die Nachfragefunktion $x(p)$ wird durch zwei spezielle Werte gekennzeichnet. Der so genannte **Prohibitivpreis** (engl.: prohibitive price) p_{proh} der Nachfrage wird durch die Bedingung $x(p_{proh}) = 0$ ME definiert; er gibt also eine Nullstelle von $x(p)$ an. Die so genannte **Sättigungsmenge** (engl.: saturation quantity) x_{satt} der Nachfrage definiert sich durch die Bedingung $x_{satt} := x(0 \text{ GE/ME})$.⁵

⁵Prohibitivpreis und Sättigungsmenge geben also die Werte der „ x - und y -Achsenabschnitte“ einer nichtnegativen Nachfragefunktion an.

Die zur streng monoton fallenden, nichtnegativen Nachfragefunktion $x(p)$ gehörige inverse Funktion ist durch die ebenfalls streng monoton fallende, nichtnegative **Preis–Absatz–Funktion** (engl.: price vs sales function) $p(x)$ (in GE/ME) gegeben. Über $p(x)$ berechnet sich der **Ertrag** (engl.: total revenue) (in GE) eines Monopolisten in Abhängigkeit einer Ausbringungsmenge nach Abschnitt 7.3 zu

$$E(x) = xp(x) . \quad (7.24)$$

Unter der Annahme ertragsgesetzlich modellierter Kosten $K(x)$ (in GE) für die Produktion, etc., hat im Monopol eine ertragsgesetzliche **Gewinnfunktion** (engl.: profit function) (in GE) in Abhängigkeit einer Ausbringungsmenge die Form

$$G(x) = E(x) - K(x) = \underbrace{x \overbrace{p(x)}^{\text{Preis–Absatz}}}_{\text{Ertrag}} - \underbrace{[a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0]}_{\text{Kosten}} . \quad (7.25)$$

Ihre ersten zwei Ableitungen nach x sind folglich durch die Ausdrücke

$$G'(x) = E'(x) - K'(x) = xp'(x) + p(x) - [3a_3x^2 + 2a_2x + a_1] \quad (7.26)$$

$$G''(x) = E''(x) - K''(x) = xp''(x) + 2p'(x) - [6a_3x + 2a_2] \quad (7.27)$$

gegeben. Mit den in Abschnitt 7.4 zur Kurvendiskussion angeführten Regeln berechnen sich damit für $G(x)$ die folgenden charakteristischen Kennwerte:

- **Gewinnschwelle** (engl.: break-even point)

$x_S > 0$ ME als Lösung von

$$G(x) \stackrel{!}{=} 0 \text{ GE} \quad (\text{notwendige Bedingung}) \quad (7.28)$$

und

$$G'(x) \stackrel{!}{>} 0 \text{ GE/ME} \quad (\text{hinreichende Bedingung}) , \quad (7.29)$$

- **Gewinnngrenze** (engl.: end of profitable zone)

$x_G > 0$ ME als Lösung von

$$G(x) \stackrel{!}{=} 0 \text{ GE} \quad (\text{notwendige Bedingung}) \quad (7.30)$$

und

$$G'(x) \stackrel{!}{<} 0 \text{ GE/ME} \quad (\text{hinreichende Bedingung}) , \quad (7.31)$$

- **Gewinnmaximum** (engl.: maximum profit)

$x_M > 0$ ME als Lösung von

$$G'(x) \stackrel{!}{=} 0 \text{ GE/ME} \quad (\text{notwendige Bedingung}) \quad (7.32)$$

und

$$G''(x) \stackrel{!}{<} 0 \text{ GE/ME}^2 \quad (\text{hinreichende Bedingung}) . \quad (7.33)$$

Beachte insbesondere die folgende spezielle geometrische Eigenschaft: im Gewinnmaximum besitzen Ertrags- und Kostenfunktion grundsätzlich immer zueinander *parallele Tangenten*. Diese Tatsache folgt aus der notwendigen Bedingung

$$0 \text{ GE/ME} \stackrel{!}{=} G'(x) = E'(x) - K'(x) \quad \Leftrightarrow \quad E'(x) \stackrel{!}{=} K'(x) . \quad (7.34)$$

GTR: Die Berechnung von Nullstellen und lokalen Maxima (bzw. Minima) kann für eine eingespeicherte Funktion im Modus `CALC` leicht mit den vorprogrammierten interaktiven Funktionen `zero` und `maximum` (bzw. `minimum`) durchgeführt werden.

Von besonderem mathematischen Interesse ist in diesem Zusammenhang die folgende Betrachtung. Bekannt sei eine Gewinnfunktion $G(x)$ der polynomialen Form

$$G(x) = -a_3(x+a)(x-b)(x-c) = a_3 \left[-x^3 + (b+c-a)x^2 + (ab-bc+ca)x - abc \right] , \quad (7.35)$$

mit $a, b, c > 0$, $b < c$ und $x \geq 0$ ME, der nach Gln. (7.24) und (7.25) eine *lineare* Preis–Absatz–Funktion $p(x)$ zugrunde liegt. Dann überführen die simultanen **Skalentransformationen** (engl.: scale transformation)

$$x \mapsto \lambda x , \quad G(x) \mapsto \frac{1}{\lambda^3} G(\lambda x) , \quad \lambda > 0 \quad (7.36)$$

von unabhängiger und abhängiger Variable die Gewinnfunktion $G(x)$ in eine zweite, zu $G(x)$ **selbstähnliche** (engl.: self-similar) Gewinnfunktion

$$\begin{aligned} \tilde{G}(x) &= -a_3 \left(x + \frac{a}{\lambda} \right) \left(x - \frac{b}{\lambda} \right) \left(x - \frac{c}{\lambda} \right) \\ &= a_3 \left[-x^3 + \frac{(b+c-a)}{\lambda} x^2 + \frac{(ab-bc+ca)}{\lambda^2} x - \frac{abc}{\lambda^3} \right] . \end{aligned} \quad (7.37)$$

Analog lässt sich mit polynomialen ökonomischen Funktionen $p(x)$, $E(x)$ und $K(x)$ verfahren.

Diese Betrachtung abschließend wenden wir uns kurz dem Begriff des **Cournotschen Punktes** (engl.: Cournot's point) (benannt nach dem französischen Mathematiker und Wirtschaftstheoretiker Antoine–Augustin Cournot, 1801–1877) zu. Man versteht hierunter ganz einfach die gewinnmaximale Mengen–Preis–Wertekombination $(x_M, p(x_M))$ der Preis–Absatz–Funktion $p(x)$ im Monopol. Für diese Wertekombination gilt die **Amoroso–Robinson–Relation** (engl.: Amoroso–Robinson formula) (Luigi Amoroso, 1886–1965, italienischer Mathematiker und Wirtschaftswissenschaftler; Joan Violet Robinson, 1903–1983, britische Ökonomin)

$$p(x_M) = \frac{K'(x_M)}{1 + \varepsilon_p(x_M)} , \quad (7.38)$$

mit $K'(x_M)$ dem Wert der Grenzkosten bei x_M , und $\varepsilon_p(x_M)$ dem Wert der **Elastizität** (engl.: elasticity) (siehe den nachfolgenden Abschnitt 7.6) der Preis–Absatz–Funktion bei x_M . Ausgehend von $E(x) = xp(x)$, erfolgt ihre Herleitung durch Umstellen aus dem gewinnmaximalen Grenzertrag

$$E'(x_M) = p(x_M) + x_M p'(x_M) = p(x_M) \left[1 + x_M \frac{p'(x_M)}{p(x_M)} \right] \stackrel{\text{Abschn. 7.6}}{=} p(x_M) [1 + \varepsilon_p(x_M)] ,$$

unter Verwendung der Extremaleigenschaft $E'(x_M) = K'(x_M)$.

Bem.: Bei einer Marktsituation mit **totaler Konkurrenz** (engl.: perfect competition) wird davon ausgegangen, dass die Preis–Absatz–Funktion einen vom Markt fest vorgegebenen *konstanten* Wert annimmt, also $p(x) = p = \text{konstant} > 0$ GE/ME (und deshalb $p'(x) = 0$ GE/ME²) gilt.

7.5.3 Extremwerte von Verhältnisgrößen

Wir wollen nun kurz die Bestimmung von Extremwerten ökonomischer Funktionen im Fall von Verhältnisgrößen im Sinne der in der Einleitung genannten Konstruktion

$$\frac{\text{OUTPUT}}{\text{INPUT}}$$

besprechen. Die technische Vorgehensweise bleibt dabei natürlich gleich; lediglich der benötigte Rechenaufwand steigt möglicherweise an, kann aber gegebenenfalls von einem GTR übernommen werden.

Zwei Beispiele von **Maximalwertbestimmungen** wollen wir betrachten:

- (i) Wir beginnen mit dem **Durchschnittsgewinn** (engl.: average profit)

$$\frac{G(x)}{x} \quad (7.39)$$

in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge $x \geq 0$ ME. Die Bedingungen zur Bestimmung eines Maximalwertes lauten dann $[G(x)/x]' \stackrel{!}{=} 0$ GE/ME² und $[G(x)/x]'' \stackrel{!}{<} 0$ GE/ME³. Unter Beachtung der Quotientenregel des Ableitens (siehe Abschnitt 7.2) liefert die erste Bedingung

$$\frac{G'(x)x - G(x)}{x^2} = 0 \text{ GE/ME}^2. \quad (7.40)$$

Da ein Quotient den Wert Null aber nur annehmen kann, wenn sein Zähler zu Null wird und gleichzeitig sein Nenner ungleich Null bleibt, folgt daraus

$$G'(x)x - G(x) = 0 \text{ GE} \quad \Rightarrow \quad x \frac{G'(x)}{G(x)} = 1. \quad (7.41)$$

Zu Bestimmen sind Ausbringungsmengen, die die letztgenannte Bedingung erfüllen, und für welche zusätzlich die zweite Ableitung des Durchschnittsgewinns negativ wird.

- (ii) Als Maßzahlen zum Vergleich zweier Unternehmen, beispielsweise ihrer Leistungsfähigkeit bezogen auf einen vorgegebenen Zeitraum, eignen sich letztendlich nur dimensionslose, d.h. *einheitenunabhängige* Verhältnisgrößen. Eine Größe dieser Art ist die **Wirtschaftlichkeit** (engl.: economic efficiency)

$$W(x) = \frac{E(x)}{K(x)}, \quad (7.42)$$

gebildet aus den Kosten- und Ertragsfunktionen (in GE) eines Unternehmens in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge $x \geq 0$ ME. Analog zu oben lauten hier die Bedingungen

zur Bestimmung eines Maximalwertes $[E(x)/K(x)]' \stackrel{!}{=} 0 \cdot 1/\text{ME}$ und $[E(x)/K(x)]'' \stackrel{!}{<} 0 \cdot 1/\text{ME}^2$. Über die Quotientenregel des Ableitens (siehe Abschnitt 7.2) ergibt sich aus der ersten Bedingung

$$\frac{E'(x)K(x) - E(x)K'(x)}{K^2(x)} = 0 \cdot 1/\text{ME} , \quad (7.43)$$

also für $K(x) > 0$ GE

$$E'(x)K(x) - E(x)K'(x) = 0 \text{ GE}^2/\text{ME} . \quad (7.44)$$

Nach Umstellen und Durchmultiplizieren mit $x > 0$ ME, lässt sich diese letzte Bedingung auch als

$$x \frac{E'(x)}{E(x)} = x \frac{K'(x)}{K(x)} \quad (7.45)$$

schreiben. Hintergrund dieser auf den ersten Blick ein wenig seltsam anmutenden Darstellungsweise [ebenso in Gl. (7.41)] sind Überlegungen, auf welche wir unmittelbar im nächsten Abschnitt eingehen werden. Abschließend bemerken wir: die Kennzahl Wirtschaftlichkeit wird maximal für Ausbringungsmengen, für welche Gl. (7.45) erfüllt und zusätzlich die zweite Ableitung der Wirtschaftlichkeit negativ ist.

7.6 Elastizitäten

Wir wenden uns nun nochmals dem **lokalen Änderungsverhalten** (engl.: local variability) von differenzierbaren reellen Funktionen einer Variablen $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}$ zu. Aus Gründen, die wir in Kürze erläutern werden, wollen wir uns hierbei ausschließlich auf Bereiche von f mit *positiven* Werten des Argumentes x und *positiven* Funktionswerten $y = f(x)$ beschränken. Wie schon zuvor in Abschnitt 7.2, gehen wir wieder von einer kleinen Änderung eines vorgegebenen Wertes des Argumentes x aus, und untersuchen die daraus resultierende Wirkung auf $y = f(x)$:

$$x \xrightarrow{\Delta x \in \mathbb{R}} x + \Delta x \quad \implies \quad y = f(x) \xrightarrow{\Delta y \in \mathbb{R}} y + \Delta y = f(x + \Delta x) . \quad (7.46)$$

Folgende Begriffe spielen in dieser Betrachtung eine wichtige Rolle:

- Vorgegebene **absolute Änderung** (engl.: absolute change) der Variablen x : Δx ,
- Resultierende **absolute Änderung** der Funktion f : $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$,
- Vorgegebene **relative Änderung** (engl.: relative change) der Variablen x : $\frac{\Delta x}{x}$,
- Resultierende **relative Änderung** der Funktion f : $\frac{\Delta y}{y} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x)}$.

Relative Änderungen nichtnegativer quantitativer Größen sind definiert durch die Berechnungsvorschrift

$$\frac{\text{Neuer Wert} - \text{Alter Wert}}{\text{Alter Wert}} ,$$

unter der Voraussetzung, dass „Alter Wert > 0 “ gilt. Aus dieser Berechnungsvorschrift ergibt sich folglich „ -1 “ als Minimalwert für eine relative Änderung (was einer Reduzierung um „minus 100%“ entspricht).

Nun wollen wir die Größenordnungen der beiden relativen Änderungen $\frac{\Delta x}{x}$ und $\frac{\Delta y}{y}$ miteinander vergleichen. Hierzu betrachten wir deren Quotienten, d.h. „resultierende relative Änderung von f zu vorgegebener relativer Änderung von x “:

$$\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Da f als differenzierbar angenommen wurde, können wir den Grenzwert dieses Quotienten für den Fall immer kleiner werdender vorgegebener relativer Änderungen $\frac{\Delta x}{x} \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta x \rightarrow 0$ bei $x > 0$ betrachten und definieren:

Def.: Für eine differenzierbare reelle Funktion f einer Variablen wird die *einheitenunabhängige Größe*

$$\varepsilon_f(x) := \lim_{\frac{\Delta x}{x} \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} = x \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (7.47)$$

die **Elastizität** (engl.: elasticity) der Funktion f an der Stelle x genannt.

Die Elastizität gibt die resultierende relative Änderung von f bei vorgegebener infinitesimal kleiner relativer Änderung von x , ausgehend von $x > 0$, an und ist somit ein Maß für die **relative lokale Änderungsrate** (engl.: relative local rate of change) der Funktion f im Punkt $(x, f(x))$. Allgemein gilt insbesondere in der Wirtschaftstheorie für die Elastizität $\varepsilon_f(x)$ die Interpretation: wir das Argument x einer differenzierbaren positiven reellen Funktion f um 1 % erhöht, so ändert sich die Funktion f in Konsequenz dessen näherungsweise um $\varepsilon_f(x) \cdot 1$ %.

In der Fachliteratur drückt man die Elastizität von f oft auch mithilfe von logarithmischen Ableitungen wie folgt aus:

$$\varepsilon_f(x) := \frac{d \ln[f(x)]}{d \ln(x)} \quad \text{für } x > 0 \text{ und } f(x) > 0,$$

denn es gilt mit der Kettenregel der Differenziation

$$\frac{d \ln[f(x)]}{d \ln(x)} = \frac{\frac{df(x)}{f(x)}}{\frac{dx}{x}} = x \frac{\frac{df(x)}{dx}}{f(x)} = x \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

In dieser logarithmischen Schreibweise der Regel für das Berechnen der Elastizität einer differenzierbaren reellen Funktion f erschließt sich direkt, wieso wir zu Beginn dieser Betrachtung

die Einschränkung auf Bereiche von f mit positiven Argumenten und positiven Funktionswerten vornahmen: der Definitionsbereich einer jeden Logarithmusfunktion umfasst nur *positive* reelle Zahlen.⁶ Ein kurzer Blick auf die in Abschnitt 7.3 bereit gestellte Liste ökonomischer Funktionen zeigt: in wirtschaftswissenschaftlichen Anwendungen der Differenzialrechnung treten häufig (aber nicht ausschließlich) Funktionen mit nichtnegativen Argumenten und nichtnegativen Funktionswerten auf.

Für die in Abschnitt 7.1 diskutierten Familien elementarer reeller Funktionen einer Variablen gilt:

Standardelastizitäten

$$1. \quad f(x) = x^n \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ und } x \in \mathbb{R}_{>0} \Rightarrow \varepsilon_f(x) = n \quad (\text{Natürliche Potenzfunktionen})$$

$$2. \quad f(x) = x^\alpha \text{ für } \alpha \in \mathbb{R} \text{ und } x \in \mathbb{R}_{>0} \Rightarrow \varepsilon_f(x) = \alpha \quad (\text{Allgemeine Potenzfunktionen})$$

$$3. \quad f(x) = a^x \text{ für } a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\} \text{ und } x \in \mathbb{R}_{>0} \Rightarrow \varepsilon_f(x) = \ln(a)x \quad (\text{Exponentialfunktionen})$$

$$4. \quad f(x) = e^{ax} \text{ für } a \in \mathbb{R} \text{ und } x \in \mathbb{R}_{>0} \Rightarrow \varepsilon_f(x) = ax \quad (\text{Natürliche Exponentialfunktionen})$$

$$5. \quad f(x) = \log_a(x) \text{ für } a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\} \text{ und } x \in \mathbb{R}_{>0} \\ \Rightarrow \varepsilon_f(x) = \frac{1}{\ln(a) \log_a(x)} \quad (\text{Logarithmusfunktionen})$$

$$6. \quad f(x) = \ln(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}_{>0} \Rightarrow \varepsilon_f(x) = \frac{1}{\ln(x)} \quad (\text{Natürliche Logarithmusfunktion}).$$

Beachten Sie die Tatsache, dass für allgemeine Potenzfunktionen die Elastizität $\varepsilon_f(x)$ eine x -unabhängige, *konstante* Größe darstellt. **Allgemeine Potenzfunktionen** werden deshalb auch **skaleninvariant** (engl.: scale-invariant) genannt. Unter Skaleninvarianz reduzieren sich einheitenunabhängige Verhältnisgrößen, also Quotienten von Variablen gleicher Dimension, generell zu Konstanten. In diesem Zusammenhang ist zu bemerken, dass skaleninvariante (fraktale) Potenzgesetze der Form $f(x) = Kx^\alpha$, mit $K > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}_{<0} \setminus \{-2, -1\}$, häufig als Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktionen beim mathematischen Modellieren von Unsicherheit in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften zum Einsatz kommen, da sie bei geeigneter Wahl des Wertespektrums der Variablen x und des Wertes ihrer Potenz α zu unbeschränkter Varianz führen; siehe z.B. Gleick (1987) [11, S. 86], Taleb (2007) [24, S. 326ff], oder Ref. [10, Sec. 8.9].

Praktische Anwendungen des Konzepts der Elastizität stützen sich auf folgende einfache (lineare!) Näherungsformel zur Berechnung der Konsequenzen kleiner prozentualer Änderungen des Arguments x einer differenzierbaren reellen Funktion f : Ausgehend vom Wert $x_0 > 0$, gilt für vorgegebene prozentuale Änderungen von x im Wertebereich $0\% < \frac{\Delta x}{x_0} \leq 5\%$ für die resultierenden prozentualen Änderungen von f näherungsweise die Relation

$$(\text{Prozentuale Änderung von } f) \approx (\text{Elastizität von } f \text{ bei } x_0) \times (\text{Prozentuale Änderung von } x), \quad (7.48)$$

⁶Um den Anwendungsbereich der Messgröße ε_f zu erweitern, könnte man in verallgemeinernder Weise mit den Beträgen $|x|$ und $|f(x)|$ arbeiten. In diesem Fall müsste man die vier Möglichkeiten (i) $x > 0$, $f(x) > 0$, (ii) $x < 0$, $f(x) > 0$, (iii) $x < 0$, $f(x) < 0$ und (iv) $x > 0$, $f(x) < 0$ getrennt betrachten.

oder als Formel

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{f(x_0)} \approx \varepsilon_f(x_0) \frac{\Delta x}{x_0}. \quad (7.49)$$

Nun wenden wir uns noch einer in den Wirtschaftswissenschaften praktizierten speziellen Sprachregelung zu. Das relative lokale Änderungsverhalten einer Funktion f heißt für jene $x \in D(f)$

- **unelastisch** (engl.: inelastic), für welche $|\varepsilon_f(x)| < 1$,
- **proportional elastisch** (engl.: unit elastic), für welche $|\varepsilon_f(x)| = 1$,
- **elastisch** (engl.: elastic), für welche $|\varepsilon_f(x)| > 1$.

Beispielsweise weist eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion $K(x)$ im Betriebsoptimum $x = x_{g_2}$ die Eigenschaft $\varepsilon_K(x_{g_2}) = 1$ auf [vgl. Gl. (7.22)]. Ebenso gilt im Maximum eines Durchschnittsgewinns $G(x)/x$, dass $\varepsilon_G(x) = 1$ [vgl. Gl. (7.41)].

Die folgenden Rechenregeln erweisen sich als nützlich bei der Berechnung der Elastizitäten von zusammengesetzten Funktionen in Sinne von Abschnitt 7.1.6 hin:

Rechenregeln für Elastizitäten

Sind f und g differenzierbare reelle Funktionen einer Variablen, mit Elastizitäten ε_f und ε_g , so gilt:

1. **Produkt** $f \cdot g$: $\varepsilon_{f \cdot g}(x) = \varepsilon_f(x) + \varepsilon_g(x)$,
2. **Quotient** $\frac{f}{g}$, $g \neq 0$: $\varepsilon_{f/g}(x) = \varepsilon_f(x) - \varepsilon_g(x)$,
3. **Verkettung** $f \circ g$: $\varepsilon_{f \circ g}(x) = \varepsilon_f(g(x)) \cdot \varepsilon_g(x)$,
4. **Inverse Funktion** f^{-1} : $\varepsilon_{f^{-1}}(x) = \frac{1}{\varepsilon_f(y)} \Big|_{y=f^{-1}(x)}$.

Zum Schluss dieses Kapitels wollen wir uns noch mit einer möglichen Erweiterung des Elastizitätsbegriffs befassen. Für positive differenzierbare reellwertige Funktionen f einer positiven reellen Variablen x lässt sich eine zweite Elastizität nach der Ableitungsvorschrift

$$\varepsilon_f[\varepsilon_f(x)] := x \frac{d}{dx} \left[\frac{x}{f(x)} \frac{df(x)}{dx} \right] \quad (7.50)$$

definieren. Ohne Schwierigkeiten lässt sich diese Vorgehensweise auch noch auf höhere Ableitungen von f verallgemeinern.

Kapitel 8

Integralrechnung bei reellen Funktionen einer Variablen

Der Inhalt dieses Kapitels dient unter anderem der Vorbereitung auf elementare Teilaspekte der Wahrscheinlichkeitstheorie, welche im Rahmen der Module 0.1.3 WISS: Einführung in das wissenschaftliche Arbeiten und die empirische Sozialforschung und 1.3.2 MARE: Marketing Research in der Schließenden Statistik benötigt wird.

Im letzten Kapitel dieser Vorlesungsnotizen besprechen wir in einer kurzen Übersicht die wesentlichen Definitionen und Regeln der Integralrechnung bei reellen Funktionen einer Variablen. Daran anschließend betrachten wir eine einfache ökonomische Anwendung dieses mathematischen Werkzeuges.

8.1 Unbestimmte Integrale

Def.: f sei eine stetige reelle Funktion und F eine differenzierbare reelle Funktion, mit $D(f) = D(F)$. Gilt zwischen f und F die Beziehung

$$F'(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in D(f), \quad (8.1)$$

so heißt F **Stammfunktion** (engl.: primitive) von f .

Bem: Für eine gegebene stetige reelle Funktion f ist eine Stammfunktion niemals eindeutig. Denn nach den in Abschnitt 7.2 besprochenen Differenzierungsregeln ist neben F auch immer $F + c$, mit $c \in \mathbb{R}$ einer reellwertigen Konstante, Stammfunktion zu f , da $(c)' = 0$.

Def.: Ist F Stammfunktion zu einer stetigen reellen Funktion f , so heißt

$$\int f(x) \, dx = F(x) + c, \quad c = \text{konst.} \in \mathbb{R}, \quad \text{mit } F'(x) = f(x) \quad (8.2)$$

Unbestimmtes Integral (engl.: indefinite integral) der Funktion f . In diesem Ausdruck werden

- x — **Integrationsvariable** (engl.: integration variable),
- $f(x)$ — **Integrand** (engl.: integrand),
- dx — **Integrationsdifferenzial** (engl.: differential), und
- c — **Integrationskonstante** (engl.: constant of integration)

genannt.

Speziell für die in Abschnitt 7.1 besprochenen Familien elementarer stetiger reeller Funktionen einer Variablen gelten folgende Integrationsregeln:

Integrationsregeln

$$1. \int \alpha \, dx = \alpha x + c \text{ mit } \alpha = \text{konstant} \in \mathbb{R} \quad (\text{Konstanten})$$

$$2. \int x \, dx = \frac{x^2}{2} + c \quad (\text{Lineare Funktion})$$

$$3. \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \text{ für } n \in \mathbb{N} \quad (\text{Natürliche Potenzfunktionen})$$

$$4. \int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \text{ für } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \text{ und } x \in \mathbb{R}_{>0} \quad (\text{Allgemeine Potenzfunktionen})$$

$$5. \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c \text{ für } a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\} \quad (\text{Exponentialfunktionen})$$

$$6. \int e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a} + c \text{ für } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (\text{Natürliche Exponentialfunktionen})$$

$$7. \int x^{-1} \, dx = \ln |x| + c \text{ für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Die Integration zusammengesetzter Funktionen erfordert im allgemeinen die Anwendung besonderer Integrationsmethoden. Nachfolgend listen wir die für diese Zwecke gängigen Standardmethoden auf. Für differenzierbare reelle Funktionen f und g gilt:¹

$$1. \int (\alpha f(x) \pm \beta g(x)) \, dx = \alpha \int f(x) \, dx \pm \beta \int g(x) \, dx \quad (\text{Summenregel})$$

mit $\alpha, \beta = \text{konstant} \in \mathbb{R}$

$$2. \int f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx \quad (\text{Partielle Integration})$$

$$3. \int f(g(x))g'(x) \, dx \stackrel{u=g(x) \text{ und } du=g'(x)dx}{=} \int f(u) \, du = F(g(x)) + c \quad (\text{Substitutionsmethode})$$

$$4. \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + c \text{ für } f(x) \neq 0 \quad (\text{Logarithmische Integration}).$$

¹(Engl.: summation rule, integration by parts, substitution method, logarithmic integration.)

8.2 Bestimmte Integrale

Def.: Sei f eine auf dem Intervall $[a, b] \subset D(f)$ stetige reelle Funktion einer Variablen, und F eine beliebige Stammfunktion von f . Dann definiert der Ausdruck

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a) \quad (8.3)$$

das **bestimmte Integral** (engl.: definite integral) von f in den **Integrationsgrenzen** (engl.: limits of integration) a und b .

Für bestimmte Integrale gelten allgemein die Regeln:

1. $\int_a^a f(x) \, dx = 0$ (Zusammenfallende Integrationsgrenzen)
2. $\int_b^a f(x) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx$ (Vertauschte Integrationsgrenzen)
3. $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$ für $c \in [a, b]$ (Integrationszwischenstelle).

Bem: Der wesentliche qualitative Unterschied zwischen (i) einem unbestimmten und (ii) einem bestimmten Integral einer stetigen reellen Funktion einer Variablen ist durch die Art des Ergebnisses bedingt: (i) liefert als Resultat eine reelle (Stamm-)Funktion, (ii) eine einzige reelle Zahl.

GTR: Die Berechnung von bestimmten Integralen kann für eine eingespeicherte Funktion im Modus CALC mit der vorprogrammierten Funktion $\int f(x) \, dx$ durchgeführt werden. Die Eingabe der erforderlichen Integrationsgrenzen erfolgt hierbei interaktiv.

Wie schon in Abschnitt 7.6 angedeutet, spielen in praktischen Anwendungen skaleninvariante allgemeine Potenzfunktionen $f(x) = x^\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}_{>0}$ eine bedeutsame Rolle. Mit $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}_{>0}$ und $\alpha \neq -1$ gilt also

$$\int_a^b x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{1}{\alpha+1} (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}) . \quad (8.4)$$

Problematisch können in diesem Zusammenhang Grenzwertbetrachtungen der Art $a \rightarrow 0$ bzw. $b \rightarrow \infty$ werden. Denn die Forderungen

(i) Fall $\alpha < -1$:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^b x^\alpha \, dx \rightarrow \infty , \quad (8.5)$$

(ii) Fall $\alpha > -1$:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b x^\alpha \, dx \rightarrow \infty , \quad (8.6)$$

führen jeweils zu **divergenten** (engl.: divergent) mathematischen Ausdrücken.

8.3 Ökonomische Anwendungen

Ausgangspunkt sei eine vereinfachte Marktsituation für ein einziges Produkt. Die Marktsituation werde einerseits durch eine Nachfragefunktion $N(p)$ (in ME) beschrieben, welche auf dem Preisintervall $[p_u, p_o]$ monoton fallend sei. Die Werte p_u und p_o bezeichnen Mindest- und Höchststückpreise (in GE/ME) für das Produkt. Andererseits werde die Marktsituation beschrieben durch eine Angebotsfunktion $A(p)$ (in ME), die auf dem Preisintervall $[p_u, p_o]$ monoton steigend sei.

Der **Marktpreis** (engl.: equilibrium price) p_M (in GE/ME) für das Produkt definiert sich über den Zustand des **ökonomischen Gleichgewichtes** (engl.: economic equilibrium), d.h. durch die Bedingung

$$A(p_M) = N(p_M) , \quad (8.7)$$

wodurch ein gemeinsamer Schnittpunkt für die beiden Funktionen $A(p)$ und $N(p)$ beschrieben wird.

GTR: Für eingespeicherte Funktionen f und g können gemeinsame Schnittpunkte leicht im Modus CALC mit der vorprogrammierten interaktiven Funktion `intersect` bestimmt werden.

In stark vereinfachter Weise wollen wir nun den von den Anbietern unter drei unterschiedlichen **Markteinführungsstrategien** für das Produkt erzielten Umsatz berechnen.

1. **Strategie 1:** Werden die angebotenen Mengen des Produktes direkt zum Marktpreis p_M verkauft, so beträgt der Umsatz der Anbieter

$$U_1 = U(p_M) = p_M N(p_M) . \quad (8.8)$$

2. **Strategie 2:** Manche Konsumenten des Produktes wären bereit, dieses bei Markteinführung auch zu einem höheren Stückpreis als p_M zu erwerben. Entscheiden sich also die Anbieter für einen Einführungsstückpreis p_o , um sodann, mit der Absicht die Nachfrage zu steigern, den Stückpreis stetig² (!) bis auf p_M zu reduzieren, beläuft sich der erzielte Umsatz auf den höheren Wert

$$U_2 = U(p_M) + \int_{p_M}^{p_o} N(p) \, dp . \quad (8.9)$$

Da der durch

$$K := \int_{p_M}^{p_o} N(p) \, dp \quad (\text{in GE}) \quad (8.10)$$

definierte Geldbetrag von den Konsumenten gespart wird, wenn das Produkt nach Strategie 1 in den Markt eingeführt wird, wird dieser in der wirtschaftswissenschaftlichen Fachliteratur **Konsumentenrente** (engl.: consumer surplus) genannt.

3. **Strategie 3:** Manche Produzenten wären bereit, das Produkt bei Markteinführung auch zu einem niedrigeren Stückpreis als p_M anzubieten. Entscheiden sich die Anbieter also für

²Dies ist eine drastisch vereinfachende Annahme, die die bei der anstehenden Berechnung durchzuführenden mathematischen Schritte erleichtern soll.

einen Einführungsstückpreis p_u , um sodann den Stückpreis stetig³ (!) bis auf p_M zu erhöhen, beläuft sich der erzielte Umsatz auf den niedrigeren Wert

$$U_3 = U(p_M) - \int_{p_u}^{p_M} A(p) \, dp . \quad (8.11)$$

Da die Produzenten den durch

$$P := \int_{p_u}^{p_M} A(p) \, dp \quad (\text{in GE}) \quad (8.12)$$

definierten Geldbetrag mehr einnehmen, wenn sie das Produkt nach Strategie 1 in den Markt einführen, wird dieser in der wirtschaftswissenschaftlichen Fachliteratur **Produzentenrente** (engl.: producer surplus) genannt.

³Dies ist eine drastisch vereinfachende Annahme, die die bei der anstehenden Berechnung durchzuführenden mathematischen Schritte erleichtern soll.

Literaturverzeichnis

- [1] T. Arens, F. Hettlich, C. Karpfinger, U. Kockelkorn, K. Lichtenegger und H. Stachel (2008) *Mathematik* 1. Aufl. (Heidelberg: Spektrum) ISBN–13: 9783827417589
- [2] B. Auer und F. Seitz (2006) *Grundkurs Wirtschaftsmathematik — Prüfungsrelevantes Wissen, praxisnahe Aufgaben, komplette Lösungswege* 1. Aufl. (Wiesbaden: Gabler) ISBN–13: 9783834900340
- [3] C. Bauer, M. Clausen, A. Kerber und H. Meier–Reinhold (2008) *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler* 5. Aufl. (Stuttgart: Schäffer–Poeschel) ISBN–13: 9783791027487
- [4] D. Bernoulli (1738) Specimen theoriae novae de mensura sortis *Papers of the Imperial Academy of Sciences in St. Petersburg*
Englische Übersetzung: (1954) Exposition of a new theory on the measurement of risk *Econometrica* **22** 23–36
- [5] J.–P. Bouchaud and M. Potters (2003) *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing* 2nd Edition (Cambridge: Cambridge University Press) ISBN–13: 9780521741866
- [6] K. Bosch (2003) *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler* 14. Aufl. (München: Oldenbourg) ISBN–10: 3486273094
- [7] I. N. Bronstein, K. A. Semedjajew, G. Musiol und H. Mühlig (2005) *Taschenbuch der Mathematik* 6. Aufl. (Frankfurt (Main): Harri Deutsch) ISBN–10: 3817120060
- [8] G. B. Dantzig (1949) Programming of interdependent activities: II mathematical model *Econometrica* **17** 200–211
- [9] G. B. Dantzig (1955) Linear programming under uncertainty *Management Science* **1** 197–206
- [10] H. van Elst (2015) Foundations of descriptive and inferential statistics *Preprint* arXiv:1302.2525v3 [stat.AP]
- [11] J. Gleick (1987) *Chaos — Making a New Science* *n*th Ed. 1998 (London: Vintage) ISBN–13: 9780749386061
- [12] G.–M. Greuel, R. Remmert und G. Rupprecht (Hrsg.) (2008) *Mathematik — Motor der Wirtschaft (Initiative der Wirtschaft zum Jahr der Mathematik)* 1. Aufl. (Berlin: Springer) ISBN–13: 9783540786672

- [13] F. Herrmann (2003) *Physik III: Thermodynamik — Skripten zur Experimentalphysik* Universität Karlsruhe (TH) URL (zitiert am 10. August 2012):
www.physikdidaktik.uni-karlsruhe.de/skripten/thermod.pdf
- [14] J. Hülsmann, W. Gamerith, U. Leopold–Wildburger und W. Steindl (2005) *Einführung in die Wirtschaftsmathematik* 4. Aufl. (Berlin: Springer) ISBN–10: 3540244093
- [15] D. Kahneman (2011) *Thinking, Fast and Slow* (London: Penguin) ISBN–13: 9780141033570
- [16] D. Kahneman und A. Tversky (1979) Prospect theory: an analysis of decision under risk *Econometrica* **47** 263–292
- [17] W. W. Leontief (1936) Quantitative input and output relations in the economic systems of the United States *The Review of Economics and Statistics* **18** 105–125
- [18] R. Penrose (2004) *The Road to Reality — A Complete Guide to the Laws of the Universe* 1st Ed. (London: Jonathan Cape) ISBN–10: 0224044478
- [19] H. Rinne (2008) *Taschenbuch der Statistik* 4. Aufl. (Frankfurt Main): Harri Deutsch) ISBN–13: 9783817118274
- [20] H. Schmalen und H. Pechtl (2006) *Grundlagen und Probleme der Betriebswirtschaft* 13. Aufl. (Stuttgart: Schäffer–Poeschel) ISBN–13: 9783791024387
- [21] G. Schreyögg und J. Koch (2010) *Grundlagen des Management — Basiswissen für Studium und Praxis* 2. Aufl. (Wiesbaden: Gabler) ISBN–13: 9783834915894
- [22] S. Singh (2002) *Fermats letzter Satz — Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels* 7. Aufl. (München: dtv) ISBN–10: 3446193138
- [23] L. Smith (2007) *Chaos — A Very Short Introduction* (Oxford: Oxford University Press) ISBN–13: 9780192853783
- [24] N. N. Taleb (2007) *The Black Swan — The Impact of the Highly Improbable* (London: Penguin) ISBN–13: 9780141034591
- [25] A. Zeh–Marschke (2010) *Finanzmathematik — Zins und Zinseszins, Tilgungs- und Rentenrechnung, Investitionsrechnung, Abschreibungen* Privates Vorlesungsskript