



Instituto Federal Catarinense  
Curso de Bacharelado em Ciência da Computação  
Campus Blumenau

HENRIQUE HEIDERSCHEIDT

**ALGORITMO HEURÍSTICO APLICADO AO PROBLEMA DE  
LOCALIZAÇÃO DE CONCENTRADORES COM MAXIMIZAÇÃO DO  
LUCRO E CONEXÕES DIRETAS**

Blumenau  
2024

HENRIQUE HEIDERSCHEIDT

**ALGORITMO HEURÍSTICO APLICADO AO PROBLEMA DE  
LOCALIZAÇÃO DE CONCENTRADORES COM MAXIMIZAÇÃO DO  
LUCRO E CONEXÕES DIRETAS**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Curso de Bacharelado em Ciência da Computação do Instituto Federal Catarinense — Campus Blumenau para a obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação.

Orientador: Prof. Fabricio Alves Oliveira, Dr.

Blumenau

2024

HENRIQUE HEIDERSCHEIDT

**ALGORITMO HEURÍSTICO APLICADO AO PROBLEMA DE  
LOCALIZAÇÃO DE CONCENTRADORES COM MAXIMIZAÇÃO DO  
LUCRO E CONEXÕES DIRETAS**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de “Bacharel em Ciência da Computação” e aprovado em sua forma final pelo curso de Bacharelado em Ciência da Computação do Instituto Federal Catarinense — Campus Blumenau.

Blumenau, 12 de Dezembro de 2024.

**Banca Examinadora:**

Documento assinado digitalmente  
 FÁBRICIO ALVES OLIVEIRA  
Data: 16/12/2024 12:49:17-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Fabricio Alves Oliveira, Dr.  
Orientador – IFC Campus Blumenau

Documento assinado digitalmente  
 HYLSON VESCOVI NETTO  
Data: 17/12/2024 15:27:26-0300  
CPF: \*\*.166.897-\*\*  
Verifique as assinaturas em <https://v.ufsc.br>

---

Prof. Hylson Vescovi Netto, Dr.  
IFC Campus Blumenau

Documento assinado digitalmente  
 BRYAN AOLIABE SIQUEIRA  
Data: 17/12/2024 05:56:46-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Bryan Aoliabe Siqueira, Me.  
IFC Campus Blumenau

Dedico este trabalho à minha família.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por criar este universo maravilhoso.

À minha mãe, Lúcia, ao meu pai, Valério, e ao meu irmão, Elvis, pelo amor, apoio e incentivo incondicional em todas as etapas da minha vida.

Ao meu orientador, Fabrício Alves Oliveira, pela paciência, dedicação e orientação imprescindíveis, e aos demais professores, pelo conhecimento compartilhado e pela inspiração ao longo da minha trajetória acadêmica.

Aos amigos, pelas experiências compartilhadas e pelas conversas que tornaram essa caminhada mais leve e significativa.

Se eu vi mais longe, foi porque estava sobre os ombros de gigantes.  
(NEWTON, 1675)

## RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um algoritmo heurístico para resolver o problema de localização de concentradores com maximização do lucro, que considera conexões diretas entre os nós não concentradores da rede. Neste contexto, os concentradores são nós especiais na rede que coletam, consolidam e distribuem os fluxos de demanda, permitindo economias de escala no transporte. Esse problema consiste em determinar a quantidade e a localização dos concentradores, bem como selecionar os pares de origem e destino a serem atendidos para maximizar o lucro da rede, calculado como a diferença entre a receita total e os custos de operação e configuração da rede. A formulação matemática proposta para o problema tem como características a estratégia de alocação múltipla, rede de concentradores incompleta, ausência de restrições de capacidade e permissibilidade de conexões diretas. São apresentados vários experimentos computacionais, realizados com conjuntos de dados de referência da área, com a finalidade de avaliar a formulação e o algoritmo heurístico propostos, bem como analisar a estrutura da rede. Os resultados mostraram que a formulação possui um bom desempenho em comparação com a literatura e que o algoritmo heurístico é eficiente na obtenção de soluções de boa qualidade em tempos computacionais viáveis. Os resultados dos testes evidenciam ainda que a inclusão de conexões diretas entre os nós não concentradores aumenta a flexibilidade da rede e contribui para melhoria do lucro líquido total.

**Palavras-chave:** Localização de concentradores; Maximização do lucro; Conexões diretas; Algoritmos heurísticos.

## ABSTRACT

This work presents the development of a heuristic algorithm to solve the hub location problem with profit maximization, which considers direct connections between non-hub nodes in the network. Hubs are special nodes in the network responsible for collecting, consolidating, and distributing demand flows, thereby enabling economies of scale in transportation. The problem involves determining the number and location of hubs as well as selecting the origin-destination pairs to be served to maximize the network's profit, calculated as the difference between total revenue and the network's operational and setup costs. The proposed mathematical formulation features a multiple allocation strategy, an incomplete hub network, absence of capacity constraints, and the allowance of direct connections. Several computational experiments are presented, conducted using benchmark datasets in the field, to evaluate the proposed formulation and heuristic algorithm, as well as to analyze the network's structure. The results showed that the formulation performs well compared to the literature and that the heuristic algorithm is efficient in obtaining high-quality solutions within feasible computational times. The test results also highlight that the inclusion of direct connections between non-hub nodes increases network flexibility and contributes to improving total net profit.

**Keywords:** Hub location; Profit maximization; Direct connections; Heuristic algorithms.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Rede de concentradores com alocação múltipla, incompleta e com conexões diretas. . . . .	12
Figura 2 – Porcentagem média da demanda atendida por concentrador e por conexão direta. . . . .	30
Figura 3 – Tempo computacional gasto pelo CPLEX para resolver a formulação proposta e a formulação de Taherkhani nas instâncias CAB. . . . .	31
Figura 4 – Lucro da rede de concentradores para as versões com e sem conexões diretas. . . . .	33
Figura 5 – Configuração da rede para a instância com receita 1500, custo baixo e $\alpha = 0,8$ . . . . .	34
Figura 6 – Configuração da rede para a instância com receita 1000, custo alto e $\alpha = 0,2$ . . . . .	34
Figura 7 – Configuração da rede para a instância com receita 2000, custo baixo e $\alpha = 0,2$ . . . . .	35
Figura 8 – Tempo gasto pelo CPLEX para resolver as instâncias CAB nos problemas com conexão direta e sem conexão direta. . . . .	36
Figura 9 – Gráfico de dispersão entre os valores médios e valores ótimos . . . . .	46
Figura 10 – Quantidade de valores ótimos obtidos pela heurística . . . . .	47
Figura 11 – Razão entre tempo CPLEX e tempo heurística . . . . .	48
Figura 12 – Tempo médio por instância . . . . .	50

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Configurações dos parâmetros CAB . . . . .	28
Tabela 2 – Resultados da formulação com conexões diretas aplicada ao conjunto de dados CAB. . . . .	29
Tabela 3 – Resultados das versões do problema com conexões diretas e sem conexões diretas aplicadas as instâncias CAB. . . . .	32
Tabela 4 – Resultados do Smart ILS e do CPLEX com as instâncias AP contendo até 75 nós . . . . .	45
Tabela 5 – Resultados obtidos pelo Smart ILS com as instâncias AP contendo de 100 a 200 nós . . . . .	49

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>11</b>
1.1	OBJETIVOS . . . . .	14
1.1.1	Objetivo Geral . . . . .	14
1.1.2	Objetivos Específicos . . . . .	14
1.2	METODOLOGIA . . . . .	15
1.3	JUSTIFICATIVAS E CONTRIBUIÇÕES . . . . .	16
1.4	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA . . . . .	17
1.4.1	Programação linear e programação inteira mista . . . . .	17
1.4.2	Heurísticas e Meta-heurísticas . . . . .	19
1.5	TRABALHOS CORRELATOS . . . . .	20
1.6	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO . . . . .	22
<b>2</b>	<b>PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO DE CONCENTRADORES COM MAXIMIZAÇÃO DO LUCRO E CONEXÕES DIRETAS</b>	<b>23</b>
2.1	DEFINIÇÃO E CARACTERÍSTICAS DO PROBLEMA . . . . .	23
2.2	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA . . . . .	24
2.2.1	Função Objetivo . . . . .	26
2.2.2	Restrições . . . . .	26
2.3	EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS: FORMULAÇÃO MATEMÁTICA . . . . .	28
2.3.1	Experimento I . . . . .	28
2.3.2	Experimento II . . . . .	31
<b>3</b>	<b>ALGORITMO HEURÍSTICO . . . . .</b>	<b>37</b>
3.1	DESCRIÇÃO DO ALGORITMO . . . . .	37
3.1.1	Representação e avaliação da solução . . . . .	37
3.1.2	Solução Inicial . . . . .	38
3.1.3	Vizinhanças . . . . .	39
3.1.4	Busca Local . . . . .	40
3.1.5	Perturbação . . . . .	41
3.1.6	Smart ILS . . . . .	42
3.2	EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS: ALGORITMO HEURÍSTICO	44
3.2.1	Experimento III . . . . .	44
3.2.2	Experimento IV . . . . .	48
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>51</b>
	REFERÊNCIAS . . . . .	53

## 1 INTRODUÇÃO

Problemas de otimização em redes geralmente lidam com o fluxo de demanda entre os nós e a determinação da configuração da rede de modo a otimizar um objetivo específico. De acordo com Arenales *et al.* (2006), esses problemas possuem ampla aplicação em diversas áreas, incluindo redes de comunicação, transporte de passageiros e transporte de cargas.

Em uma rede interligando pares de origem e destino, os concentradores são tipos especiais de nós responsáveis por coletar, consolidar, transferir e distribuir o fluxo de demanda na rede. A demanda entre os pares de nós é, em geral, roteada através dos concentradores em vez de usar conexões diretas. Devido à consolidação dos fluxos de demanda, uma economia de escala pode ser aplicada nos custos de transporte entre os concentradores, o que possibilita uma redução no custo total de transporte.

Por exemplo, um concentrador em uma rede aérea é um aeroporto central responsável por consolidar e redistribuir os fluxos de passageiros e cargas entre diferentes origens e destinos. Em uma rede sem concentradores, cada aeroporto precisaria operar conexões diretas com todos os outros aeroportos, o que resultaria em um grande número de rotas com baixa demanda. Com a introdução de concentradores, os fluxos poderiam ser direcionados para esses aeroportos centrais, reduzindo o número total de rotas, otimizando o uso das principais conexões e diminuindo os custos operacionais. No entanto, em alguns casos, conexões diretas entre aeroportos não concentradores poderiam ser mais econômicas, especialmente quando houvesse demanda suficiente para justificar sua operação.

O problema de localização de concentradores pode ser definido como um problema de localização e alocação, que consiste na localização dos concentradores, na alocação dos nós de demanda a esses concentradores e, paralelamente, na determinação das rotas de fluxo entre os pares de origem e destino de forma a otimizar um determinado objetivo. Exceto em casos muito especiais, os problemas de localização de concentradores são NP-difíceis, o que se deve à combinação de elementos das decisões de localização e alocação (CAMPBELL; O'KELLY, M. E., 2012). Essa classificação implica que, para qualquer solução potencial, não se conhece um algoritmo eficiente capaz de resolvê-lo em tempo polinomial, resultando em um tempo de execução que aumenta exponencialmente com o tamanho da entrada.

Nas últimas décadas, os problemas de localização de concentradores têm sido objeto de estudo de muitos pesquisadores, pois possuem aplicações em várias áreas, como sistemas de transporte, tanto de passageiros quanto de cargas (JAILLET; SONG; YU, 1996; TAN; KARA, 2007; WIEBERNEIT, 2008; LIN, C. C.; LIN, J. Y.; CHEN, 2012), redes de telecomunicações (CARELLO *et al.*, 2004; BOLLAPRAGADA; LI; RAO, 2006; KIM; O'KELLY, M. E., 2009) e serviços de entrega postal (KUBY; GRAY, 1993; ÇETINER; SEPİL; SÜRAL, 2010).

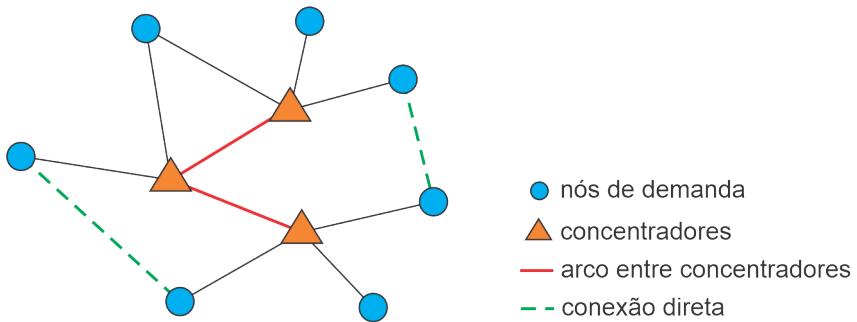
Os concentradores e os arcos que os conectam (arcos entre concentradores) formam uma rede no nível dos concentradores, enquanto os nós não concentradores e os arcos que os ligam aos concentradores (arcos de alocação) compõem uma rede de acesso e/ou distribuição. Em geral, a topologia dessas redes está intimamente relacionada com a área de aplicação e constitui um dos principais critérios de classificação para os problemas de localização de concentradores.

Morton E. O'Kelly e Miller (1994) propuseram três características topológicas de uma rede: (i) tipo de alocação, em que cada nó não concentrador é atribuído a um único concentrador (alocação única) ou é conectado a mais de um concentrador (alocação múltipla); (ii) permissão de conexões diretas entre nós não concentradores; e (iii) interconectividade entre os nós concentradores, em que todo par de concentradores é interligado (rede de concentradores completa), ou é parcialmente interligado (rede de concentradores incompleta).

Além das estratégias de alocação estabelecidas no item (i) acima, H. Yaman (2011) também introduziu a estratégia de  $r$ -alocação, em que cada nó pode ser atribuído a no máximo  $r$  concentradores.

A Figura 1 mostra o exemplo de uma rede de concentradores com alocação múltipla, incompleta e com a presença de conexões diretas entre nós não concentradores.

Figura 1 – Rede de concentradores com alocação múltipla, incompleta e com conexões diretas.



Fonte: Autor, 2024.

Três outras propriedades também são utilizadas para caracterizar esses problemas: (a) a fixação da quantidade de concentradores presentes na rede (originando os problemas de localização de concentradores  $p$ -mediana); (b) a limitação de capacidade de fluxo nos concentradores e arcos da rede (caracterizando os problemas capacitados ou não); e (c) a existência de custos fixos para instalação de concentradores e arcos entre concentradores. Com essa série de características, diversos tipos de problemas de localização de concentradores foram propostos na literatura. Revisões dessas muitas variantes do problema podem ser obtidas em Campbell e M. E. O'Kelly (2012), Farahani *et al.* (2013) e Contreras (2015).

Os problemas clássicos de localização de concentradores são modelados principalmente sob o ponto de vista dos custos e têm como objetivo principal minimizar o custo

total da rede, de modo que a demanda na rede seja completamente atendida. Do ponto de vista do lucro, pode ser mais vantajoso não atender a demanda de alguns pares de origem e destino, especialmente se o custo for maior do que a receita associada ao atendimento dessa demanda. Nessa situação, o mais adequado é maximizar o lucro em vez de minimizar o custo, de forma que a decisão sobre quais pares serão atendidos dependa da compensação entre receita e custo.

Segundo Alibeyg, Contreras e Elena Fernández (2016), os problemas com objetivo orientado a maximização do lucro, integram no projeto da rede decisões estratégicas adicionais sobre os nós e as mercadorias que devem ser atendidas e mede a compensação entre a receita dos pares servidos e o *design* geral da rede e os custos de transporte. As decisões operacionais determinam como encaminhar as demandas selecionadas para serem atendidas. Assim, esses problemas generalizam os problemas clássicos à medida que incorporam um nível adicional ao processo de tomada de decisão.

Na literatura sobre localização de concentradores, geralmente assume-se que a rede de concentradores é completa, i.e., que todos os concentradores são conectados entre si. No entanto, a construção deste tipo de rede pode aumentar desnecessariamente os custos totais de investimento no projeto da rede. Na realidade, a maior parte das redes de telecomunicações e de transporte de cargas terrestre não operam com uma estrutura de rede de concentradores completa (ALUMUR, S.; KARA, 2009).

Adicionalmente, a permissão de conexões diretas entre os nós não concentradores pode facilitar o acesso à rede e é de interesse em muitas aplicações, como no transporte aéreo de passageiros, onde a maioria dos clientes prefere voos diretos para chegar aos seus destinos, ou no transporte de mercadorias, onde há procura suficiente para enviar remessas diretas entre nós não concentradores.

Neste trabalho, o problema de localização de concentradores é abordado sob a perspectiva do lucro, considerando a estratégia de alocação múltipla. Assume-se que a rede de concentradores é incompleta, permite conexões diretas entre nós não concentradores e restrições de capacidade, ou seja, os concentradores e os arcos da rede possuem capacidade suficiente para lidar com o fluxo de demanda.

Este estudo tem como objetivo determinar a quantidade e a localização dos concentradores, selecionar os pares de origem e destino a serem atendidos, definir os arcos a serem instalados e estabelecer o roteamento ótimo para cada fluxo de demanda, visando maximizar o lucro da rede. O lucro é calculado como a diferença entre a receita total e os custos totais de projeto e operação. Não se impõe que toda a demanda da rede seja completamente satisfeita, nem há restrições quanto à topologia da rede.

Potenciais aplicações deste problema surgem, por exemplo, no projeto de redes de transporte aéreo, uma vez que o lucro é um fator decisivo na consolidação e manutenção dessas redes. O objetivo, nesse caso, é encontrar a estrutura de rede de concentradores ideal, de modo a maximizar o lucro líquido total para fornecer serviços de viagens aéreas a um

conjunto de voos, levando em consideração o custo total da rede (ALIBEYG; CONTRERAS; FERNÁNDEZ, E., 2016). Além disso, esse problema pode ser aplicado em outras áreas em que o lucro seja um fator essencial na concepção da rede de concentradores.

Muitos procedimentos têm sido propostos para resolver problemas de localização de concentradores. Como algoritmos exatos, podem-se destacar o método de decomposição de Benders (CAMARGO, R.; MIRANDA, 2012; CAMARGO, Ricardo S. *et al.*, 2017; MARTINS DE SÁ; MORABITO; CAMARGO, Ricardo Saraiva de, 2018; TAHERKHANI; ALUMUR, S. A.; HOSSEINI, 2020) e métodos que empregam a estrutura de *branch-and-bound* juntamente com outras técnicas, como planos de corte, enumeração parcial e testes para reduzir a dimensão do problema (CONTRERAS; CORDEAU; LAPORTE, 2011; RODRÍGUEZ-MARTÍ; SALAZAR-GONZÁLEZ; YAMAN, Hande, 2014; ALIBEYG; CONTRERAS; FERNÁNDEZ, E., 2017). Devido à complexidade desses problemas, diversos tipos de abordagens heurísticas também têm sido usadas para resolvê-los, incluindo métodos de busca local (RODRÍGUEZ-MARTÍN; SALAZAR-GONZÁLEZ, 2006; FAZEL ZARANDI; DAVARI, Soheil; HADDAD SISAKHT, 2015), busca tabu (CALIK *et al.*, 2009; GHAFFARINASAB, 2020), algoritmos evolucionários e genéticos (SHANG *et al.*, 2021), *variable neighborhood search* (DAVARI, S.; ZARANDI; TURKSEN, 2013), relaxação Lagrangeana (CONTRERAS; FERNÁNDEZ E. M., A., 2009) e outras heurísticas (HOFF *et al.*, 2017; DAI *et al.*, 2019).

## 1.1 OBJETIVOS

### 1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver uma heurística para a resolução do problema de localização de concentradores com maximização do lucro, que permite o uso de conexões diretas entre os nós não concentradores.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

Como objetivos específicos são listados:

- Analisar o problema e as formulações matemáticas para o mesmo;
- Propor uma formulação para o problema;
- Comparar os principais trabalhos da literatura que abordaram o problema de localização de concentradores com maximização do lucro;
- Analisar o impacto da permissibilidade de conexões diretas entre nós não concentradores sobre a configuração da rede, sobre o valor do lucro associado à rede e também sobre a quantidade de demanda e de pares de origem e destinos atendidos.
- Analisar algoritmos heurísticos que foram aplicados ao problema;

- Desenvolver um algoritmo heurístico que gere boas soluções em tempos computacionais aceitáveis.

## 1.2 METODOLOGIA

Quanto à definição dos tipos de classificação de pesquisa científica definidos por Wazlawick (2020), a pesquisa realizada se enquadra:

- **Quanto à natureza:** O problema de localização de concentradores é amplamente estudado e possui contribuições de diversos autores, entretanto o foco da pesquisa em buscar uma heurística para a maximização do lucro permitindo conexões diretas é um diferencial pouco explorado caracterizando a pesquisa primária.
- **Quanto aos objetivos:** No trabalho o objetivo é explorar a aplicação de uma heurística no problema de localização de concentradores, sendo caracterizada como pesquisa exploratória.
- **Quanto aos procedimentos:** O trabalho apresenta dois tipos de procedimentos principais: a pesquisa bibliográfica e a parte experimental. A pesquisa bibliográfica busca criar uma base de conhecimentos de trabalhos anteriores para serem aplicados e fundamentar a parte experimental, que consiste na realização de quatro experimentos computacionais comparando a eficiência da formulação e do algoritmo heurístico desenvolvido com outros propostos na literatura.

Os experimentos foram realizados em um computador com as seguintes especificações: processador *Intel Core i7-8700*, com 16 GB de memória RAM e sistema operacional em modo terminal *Ubuntu 22.04 LTS*. O algoritmo heurístico foi implementado em C++ e utilizou o *solver CPLEX* da IBM para resolver as formulações estudadas.

Nos experimentos computacionais foram utilizados dois conjuntos de dados amplamente utilizados em problemas de localização de concentradores: o *Civil Aeronautics Board (CAB)* e o *Australian Post (AP)*. O conjunto CAB, introduzido por O'kelly (1987), é baseado em dados reais da rede de transporte aéreo dos Estados Unidos em 1970. Ele consiste em 25 nós que representam cidades e inclui informações sobre os custos de transporte e a demanda entre os pares de cidades.

O conjunto AP foi introduzido por Ernst e Krishnamoorthy (1996) e baseia-se em dados reais do sistema postal da Austrália. Ele inclui instâncias com até 200 nós, e fornece os valores das demandas relacionadas à movimentação de correspondências e encomendas. O custo de transporte é dado pela distância euclidiana entre os nós da rede e é fornecido também dois tipos de custos fixos para instalação de concentradores, denominados *tight (T)* e *loose (L)*. Esse conjunto de dados é amplamente utilizado para avaliar a escalabilidade

de algoritmos e testar modelos em redes logísticas de maior complexidade (CAMPBELL; O'KELLY, M. E., 2012).

Para alcançar os objetivos deste trabalho, foram conduzidos os seguintes experimentos:

- **Experimento I:** Comparação entre a formulação desenvolvida neste trabalho e a proposta por Taherkhani e S. A. Alumur (2018) para problemas com alocação múltipla e conexões diretas. Foi utilizado o *solver* CPLEX para resolver os modelos, aplicados ao conjunto de dados CAB, com diferentes configurações dos parâmetros. Esses testes foram realizados com o objetivo de avaliar o desempenho computacional da formulação proposta.
- **Experimento II:** Comparação das versões do problema com a permissão de conexões diretas e sem conexões diretas, utilizando o CPLEX para resolver a formulação proposta, aplicada ao conjunto de dados CAB. O objetivo foi avaliar o impacto da permissão de conexões diretas no problema em relação ao lucro total, a estrutura da rede e ao tempo computacional necessário para resolver as instâncias.
- **Experimento III:** Análise da performance do algoritmo heurístico proposto em relação à qualidade das soluções obtidas e o tempo computacional. Nesse experimento, foram aplicados a heurística e o CPLEX em instâncias AP contendo de 25 a 75 nós (maior tamanho de instância resolvido pelo *solver*, considerando a máquina com as especificações acima).
- **Experimento IV:** Aplicação da heurística desenvolvida neste trabalho em instâncias do conjunto de dados AP, contendo de 100 a 200 nós. O objetivo é avaliar a performance do algoritmo heurístico em instâncias de grande porte do problema.

### 1.3 JUSTIFICATIVAS E CONTRIBUIÇÕES

Recentemente proposto na literatura, o problema de localização de concentradores com considerações de lucro e que permite conexões diretas entre nós não concentradores ainda foi pouco explorado. Com isso, mais estudos são fundamentais para compreender melhor esse novo tipo de problema e os desafios que o cercam. Adicionalmente, a grande quantidade de aplicações nas quais ele está inserido endossa a importância desses estudos.

Nesse problema, o lucro é obtido através do atendimento da demanda de um par de origem e destino. Esse lucro pode estar envolvido não apenas com os custos de roteamento, mas também com custos de configuração adicionais, pois os nós de origem e destino podem exigir a instalação, *a priori*, de uma infraestrutura adequada de transporte. Os problemas clássicos de localização de concentradores, no entanto, ignoram esses lucros e os custos de configuração associados, uma vez que é requerido o atendimento completo da

demandas. Em termos gerais, esse requisito expressa a hipótese implícita de que os custos gerais da rede serão compensados pelos lucros gerais. Obviamente, esta hipótese não é necessariamente válida, e a incorporação de decisões sobre os pares de nós que devem ser atendidos pode ter implicações importantes nos custos estratégicos e operacionais (ALIBEYG; CONTRERAS; FERNÁNDEZ, E., 2016).

Como mencionado anteriormente, este problema pertence à classe NP-difícil, o que torna a obtenção da configuração ótima de uma rede de concentradores uma tarefa desafiadora. Além disso, o projeto dessas redes é um trabalho de planejamento estratégico que, em geral, envolve altos custos devido à natureza das aplicações com as quais está relacionado. No setor aéreo, por exemplo, os concentradores podem representar a instalação de um aeroporto em uma determinada localidade, o que constitui um fator de grande impacto econômico e social. Em redes de transporte rodoviário e ferroviário, além dos custos de instalação dos concentradores, os custos associados às conexões entre os nós, como rodovias e ferrovias, também são de extrema importância no planejamento das redes.

Assim, é fundamental que a rede de concentradores seja projetada de forma precisa, assegurando que a escolha dos pares de origem e destino a serem atendidos seja a mais vantajosa (maximizando o lucro) e que a localização dos concentradores, bem como a topologia da rede, estejam alinhadas com os objetivos reais do problema. Dessa forma, surge a necessidade de desenvolver métodos eficientes para lidar com esse tipo de problema.

Este trabalho tem como principal contribuição o estudo das propriedades e características do problema de localização de concentradores com maximização do lucro, permitindo conexões diretas, com rede incompleta e não capacitado, um tema ainda pouco explorado na literatura. As contribuições específicas deste estudo são as seguintes:

- (i) a apresentação de uma nova formulação matemática para o problema;
- (ii) o desenvolvimento de um algoritmo heurístico baseado em procedimentos de busca local e na troca sistemática de estruturas de vizinhança, eficaz na resolução de instâncias de grande porte do problema.

## 1.4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 1.4.1 Programação linear e programação inteira mista

A Programação Linear (PL) é uma ferramenta empregada em problemas de otimização onde tanto a função objetivo quanto as restrições podem ser representadas por expressões lineares. A formulação geral de um problema de PL pode ser representada da

seguinte forma:

$$\text{minimizar ou maximizar} \quad Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1)$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

em que  $Z$  é a função objetivo que se deseja minimizar ou maximizar,  $x_j, j = 1, \dots, n$  são as variáveis de decisão,  $c_j, j = 1, \dots, n$  são coeficientes que indicam o impacto de cada variável na função objetivo (parâmetros),  $a_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$  são coeficientes que compõem a matriz tecnológica e  $b_i, i = 1, \dots, m$  são os termos independentes. A matriz tecnológica, formada pelos coeficientes  $a_{ij}$ , representa matematicamente as relações entre as variáveis de decisão e as restrições do modelo. Cada elemento  $a_{ij}$  indica o impacto da variável  $x_j$  sobre a restrição  $i$ , descrevendo como os recursos disponíveis são afetados pelas decisões do modelo. O conjunto de desigualdades (2) representam as restrições do problema, enquanto (3) determinam as condições de não negatividade das variáveis. Uma solução  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  que satisfaz (2) e (3) e que fornece o menor (para problemas de minimização) ou o maior (para problemas de maximização) valor para a função objetivo  $Z$  é chamada solução ótima, e o seu valor de função objetivo é denominado valor ótimo.

A Programação Inteira Mista (PIM) estende a PL ao incluir variáveis de decisão que podem assumir valores inteiros ou binários. Essa abordagem permite modelar problemas que envolvem tanto decisões contínuas, como fluxos em redes, quanto decisões discretas, como ativar ou não determinado recurso. Aplicações desses tipos de problemas ocorrem em diversas áreas, tais como energia, transportes, telecomunicações, circuitos eletrônicos, biologia molecular e finanças (ARENALES *et al.*, 2006).

As variáveis binárias, comuns em modelos de PIM, assumem valores 0 ou 1 e são frequentemente utilizadas para representar escolhas exclusivas, habilitação de recursos ou ativação de condições específicas. Por exemplo, considere a restrição:

$$x + y \leq 1, \quad (4)$$

com  $x, y \in \{0, 1\}$ . Essa restrição impõe que, apenas uma das variáveis  $x$  ou  $y$  pode assumir o valor 1, ou ambas podem ser iguais a 0. Isso equivale a dizer que podem ser escolhidos  $x$ , ou  $y$ , ou nenhum, mas nunca ambos. Em uma situação prática, uma restrição dessa forma pode representar, se uma determinada demanda é atendida através de um concentrador ou por uma conexão direta ou não é atendida.

Segundo Arenales *et al.* (2006), os métodos exatos (que fornecem uma solução ótima) mais comuns para resolver problemas de PIM incluem:

- *Branch-and-Bound*, que explora sistematicamente as soluções viáveis dividindo o problema em subproblemas menores;

- *Branch-and-Cut*, que adiciona cortes às restrições do problema para reduzir o espaço de busca.

Grande parte desses problemas são combinatórios, sendo classificados na literatura como NP-difíceis, e assim, ainda não existem algoritmos que os resolvam em tempo polinomial. Desse modo, as heurísticas e meta-heurísticas surgem como uma alternativa na busca de soluções.

#### 1.4.2 Heurísticas e Meta-heurísticas

Heurísticas são métodos aproximativos projetados para encontrar soluções de qualidade para problemas de otimização combinatória em tempo reduzido. Esses métodos, embora não garantam a solução ótima, são fundamentais para lidar com problemas complexos que apresentam alta dimensionalidade. Além disso, a maioria das heurísticas são específicas para cada problema.

Conforme descrito por M. J. F. Souza (2024), as heurísticas podem ser classificadas em dois tipos principais:

- Heurísticas Construtivas: constroem uma solução de forma incremental, adicionando elementos ao conjunto inicial até que uma solução completa seja obtida;
- Heurísticas de Refinamento: começam a partir de uma solução já existente e realizam alterações locais para melhorá-la, utilizando estruturas de vizinhança e técnicas de busca local.

As meta-heurísticas são procedimentos destinados a encontrar uma boa solução, eventualmente a ótima, consistindo na aplicação, em cada passo, de uma heurística subordinada (RIBEIRO, 1996).

De acordo com M. J. F. Souza (2024), ao contrário das heurísticas, as meta-heurísticas são de caráter geral e providas de mecanismos para evitar que se fique preso em ótimos locais.

Essas abordagens combinam intensificação (exploração detalhada de áreas promissoras) e diversificação (exploração de novas áreas), permitindo que soluções de alta qualidade sejam obtidas. Exemplos de meta-heurísticas incluem Algoritmos Genéticos, Simulated Annealing, Busca Tabu e as estratégias abordadas neste trabalho: *Variable Neighborhood Descent* (VND) e *Iterated Local Search* (ILS).

O VND é um método de busca local baseado na exploração de múltiplas estruturas de vizinhança. De acordo com M. J. F. Souza (2024), o VND explora a premissa de que uma solução ótima local em uma vizinhança pode não ser ótima em relação a outra. O método alterna entre diferentes vizinhanças, garantindo uma busca mais ampla e eficaz no espaço de soluções. De modo geral, o procedimento básico do VND pode ser descrito como:

1. Selecionar uma solução inicial  $s_0$ ;

2. Definir um conjunto de vizinhanças  $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_k$ , e uma ordem de exploração;
3. Buscar em cada vizinhança  $\mathcal{N}_i$  uma solução que melhore a solução atual e mover-se para ela;
4. Repetir este processo até que todas as vizinhanças tenham sido exploradas sem melhorias.

Por outro lado, o ILS é uma meta-heurística baseada na ideia de que um procedimento de busca local pode ser melhorado gerando-se novas soluções de partida, as quais são obtidas por meio de perturbações na solução ótima local (LOURENÇO; MARTIN; STÜTZLE, 2003). O ILS segue os seguintes passos básicos:

1. Gerar uma solução inicial  $s_0$ ;
2. Aplicar um procedimento de busca local para encontrar uma solução melhorada  $s^*$ ;
3. Perturbar a solução  $s^*$  para criar uma nova solução  $s'$ ;
4. Aplicar busca local em  $s'$  e comparar com  $s^*$ ;
5. Atualizar  $s^*$ , caso a solução obtida anteriormente seja melhor e repetir este procedimento até atender um determinado critério de parada.

Enquanto o VND tem seu foco na exploração de diferentes vizinhanças de uma mesma solução, o ILS combina busca local com perturbação, permitindo maior diversificação. Esses métodos são complementares e frequentemente usados em conjunto, especialmente em problemas combinatórios complexos, como o tratado neste trabalho.

## 1.5 TRABALHOS CORRELATOS

O problema de localização de concentradores tem sido abordado por diversos autores ao longo dos anos. Campbell e M. E. O'Kelly (2012) realizaram uma ampla revisão de 25 anos de pesquisa nessa área. Neste trabalho, os autores categorizam as diversas variações do problema e examinam como elas evoluíram ao longo do tempo. Também é destacado a crescente importância de considerar fatores como a capacidade dos concentradores e as restrições na topologia das redes.

Farahani *et al.* (2013) complementam essa revisão ao apresentar uma análise detalhada das diferentes formulações do problema de localização de concentradores, classificando-as de acordo com aspectos como topologia, capacidade e alocação dos nós. Esse trabalho faz uma distinção entre problemas de alocação única, onde cada nó é conectado a apenas um concentrador, e de alocação múltipla, onde os nós podem ser conectados a vários concentradores. Os autores examinam a aplicabilidade de diversas técnicas de solução, desde métodos exatos, como a decomposição de Benders, até heurísticas para instâncias maiores.

O primeiro trabalho de localização de concentradores com maximização do lucro foi apresentado por Alibeyg, Contreras e Elena Fernández (2016). Nesse trabalho, os autores consideraram a estratégia de alocação múltipla e assumiram que cada caminho de origem e destino contém no máximo dois concentradores. Eles modelaram diferentes variações do problema e testaram o desempenho de seus modelos usando o CPLEX. Em um trabalho posterior, Alibeyg, Contreras e Elena Fernández (2017) desenvolveram um algoritmo exato para os modelos apresentados em Alibeyg, Contreras e Elena Fernández (2016). Eles incorporaram a relaxação lagrangeana em um algoritmo *Branch-and-Bound* e também usaram testes de redução e enumeração parcial.

Taherkhani e S. A. Alumur (2018) apresentaram formulações para diferentes variantes do problema de localização de concentradores com maximização do lucro, incluindo versões que permitem conexões diretas entre nós não concentradores. As autoras utilizaram o solver CPLEX para analisar o desempenho computacional das formulações e compararam os resultados com as formulações propostas por Alibeyg, Contreras e Elena Fernández (2016).

Taherkhani, S. A. Alumur e Hosseini (2020) investigaram o problema de localização de concentradores com foco na maximização do lucro capacitado. Foram desenvolvidos dois modelos: um determinístico e outro estocástico. Esses modelos consideram: a segmentação da demanda em diferentes classes; a estratégia de alocação múltipla; a proibição de conexões diretas entre nós não concentradores; a limitação de, no máximo, dois concentradores no caminho entre pares de origem e destino; e que a rede de concentradores é completamente conectada. Para resolver o problema, foram propostos métodos exatos baseados na decomposição de Benders. Além disso, foi aplicada a pré-fixação de variáveis para reduzir a dimensão do problema e o esforço computacional necessário para sua resolução.

Oliveira, Sá e Sérgio Ricardo de Souza (2022) abordaram o problema de localização de concentradores com maximização do lucro em redes incompletas. Neste trabalho, foi utilizada a decomposição de Benders com cortes Pareto-ótimos. Os resultados dos experimentos computacionais mostraram que o algoritmo proposto foi eficiente na resolução de grandes instâncias, apresentando melhor desempenho que o solver CPLEX em termos de tempo e qualidade das soluções.

Em Oliveira *et al.* (2023), os autores propuseram metaheurísticas baseadas em *Iterated Local Search (ILS)* para lidar com o problema. Testes realizados com instâncias de até 500 nós demonstraram que os algoritmos propostos obtiveram soluções de alta qualidade, em tempos de execução aceitáveis. Em comparação com métodos exatos, os algoritmos se mostraram mais eficientes em instâncias maiores, atestando sua escalabilidade e eficácia para lidar com redes de grande porte.

Recentemente, Zhang *et al.* (2023) usaram algoritmos heurísticos baseados em VNS (*Variable Neighborhood Search*) para solucionar algumas variantes de problemas de localização de concentradores não capacitados, com rede incompleta e objetivo voltado à

maximização do lucro. Foram considerados problemas com estratégias de alocação única, alocação múltipla e  $r$ -alocação, em versões com e sem conexões diretas.

Esse trabalho fornece a base para o presente estudo, que foca na maximização do lucro em redes de concentradores incompletas, permitindo conexões diretas entre nós não concentradores. Embora diversos estudos tenham abordado o problema de localização de concentradores sob diferentes óticas, o presente trabalho se diferencia ao combinar a maximização de lucro com a flexibilidade proporcionada pelas conexões diretas. Os métodos desenvolvidos até o momento mostram que essa combinação tem o potencial de gerar redes mais lucrativas e eficientes, especialmente em cenários onde os custos de instalação e transporte são críticos.

## 1.6 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O restante deste trabalho está organizado como segue. No Capítulo 2, o problema é descrito formalmente, uma nova formulação é apresentada e comparada com outra da literatura. Experimentos computacionais são apresentados para verificar a eficiência da formulação proposta e estudar propriedades do problema. No Capítulo 3 é desenvolvido o algoritmo heurístico baseado no ILS e na troca sistemática de estruturas de vizinhança para resolver o problema. Para analisar a performance do método de solução proposto, extensivos testes computacionais com instâncias de referência da área de localização de concentradores foram executados. Por fim, o Capítulo 4 apresenta as conclusões e sugere possíveis direções para trabalhos futuros.

## 2 PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO DE CONCENTRADORES COM MAXIMIZAÇÃO DO LUCRO E CONEXÕES DIRETAS

### 2.1 DEFINIÇÃO E CARACTERÍSTICAS DO PROBLEMA

O problema de localização de concentradores com maximização do lucro, abordado neste trabalho, possui os seguintes dados de entrada: um conjunto de nós que pertencem a rede, a demanda a ser roteada entre esses nós, a receita e o custo de transporte por cada unidade de demanda e os custos fixos de instalação de concentradores, arcos entre concentradores e conexões diretas entre nós não concentradores. O problema consiste em determinar a localização dos concentradores, o projeto da rede de concentradores e as rotas ótimas de fluxo com a finalidade de maximizar o lucro total da rede. A decisão de localização concentra-se na seleção de um conjunto de nós para instalar concentradores e as decisões de projeto da rede tratam das conexões entre os nós da rede que foram selecionados para serem atendidos.

As características do problema são as seguintes:

- (i) Os nós não concentradores podem ser alocados a mais de um concentrador;
- (ii) Não existem restrições de capacidade nos arcos e nós da rede;
- (iii) Conexões diretas entre nós não concentradores são permitidas;
- (iv) Os concentradores podem ser parcialmente conectados entre si;
- (v) A demanda não precisa ser completamente atendida;
- (vi) Existem custos fixos de instalação de concentradores, arcos entre concentradores e nas conexões diretas.

O objetivo do problema é maximizar o lucro total da rede, que é calculado pela diferença entre a receita total e o custo total. A receita total é obtida com base na quantidade de demanda atendida entre cada par de origem e destino. O custo total inclui diversas componentes: o custo variável de transporte entre cada par de origem e destino, o custo fixo de instalação de concentradores e os custos fixos de instalação dos arcos entre os concentradores e conexões diretas entre os nós não concentradores.

O cálculo do custo total de transporte entre cada par de origem e destino que não é atendido por conexões diretas, é determinado pelo custo de transporte da origem até o concentrador (coleta), pelo custo de transporte nas conexões entre concentradores (transferência) e pelo custo de transporte do concentrador até o destino (distribuição). É importante notar que, neste caso, economias de escala são incorporadas no custo de transporte ao longo dos arcos entre concentradores, provenientes da consolidação da demanda nessas instalações.

## 2.2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Apresentamos a seguir uma formulação matemática para o problema de localização de concentradores com maximização do lucro e conexões diretas, adaptada da formulação apresentada por Oliveira, Sá e Sérgio Ricardo de Souza (2022), que trata da versão do problema sob o ponto de vista do lucro, sem a permissão de conexões diretas entre os nós não concentradores.

As adaptações realizadas incluíram a introdução de uma variável binária  $e_{ij}$ , que indica a existência de uma conexão direta na rede, e do parâmetro  $q_{ij}$ , que representa o custo associado à instalação de cada conexão direta. Essas variáveis e parâmetros foram incorporados às restrições do modelo, assegurando o funcionamento adequado e a consistência geral da rede.

Os parâmetros e variáveis de decisão empregados na formulação são apresentados abaixo.

### Parâmetros:

- $N$ : Conjunto de nós da rede que trocam fluxo e são potenciais candidatos a concentradores;
- $r_{ij}$ : Receita obtida ao atender uma unidade da demanda entre os nós  $i \in N$  e  $j \in N$ ;
- $w_{ij}$ : Demanda entre os nós  $i \in N$  e  $j \in N$ ;
- $c_{ij}$ : Custo de transporte por unidade de demanda entre os nós  $i \in N$  e  $j \in N$ ;
- $O_i = \sum_{j \in N} w_{ij}$ : Quantidade total de demanda originada no nó  $i \in N$ ;
- $s_k$ : Custo fixo de instalação de um concentrador no nó  $k \in N$ ;
- $g_{km}$ : Custo fixo de instalação de um arco entre os concentradores  $k \in N$  e  $m \in N$ ;
- $\alpha$ : Fator de desconto constante nos arcos entre concentradores, com  $0 \leq \alpha < 1$ ;
- $q_{ij}$ : Custo fixo de instalação de uma conexão direta entre os nós  $i \in N$  e  $j \in N$ .

### Variáveis de decisão:

- $a_{ik}$ : variáveis de fluxo que representam a fração da demanda que é originada no nó  $i \in N$  e acessa a rede por meio do concentrador  $k \in N$ ;
- $b_{ijm}$ : variáveis de fluxo que representam a fração da demanda entre os nós  $i \in N$  e  $j \in N$  que é atendida ao longo de uma rota na qual o último concentrador é  $m \in N$ ;
- $f_{ikm}$ : variáveis de fluxo que representam a quantidade de demanda originada no nó  $i \in N$  que é roteada no arco entre os concentradores  $k \in N$  e  $m \in N$ ;
- $h_k$ : variáveis binárias que indicam se um concentrador foi instalado no nó  $k \in N$ ;

- $z_{km}$ : variáveis binárias que indicam se existe um arco ligando os concentradores  $k$  e  $m$ ;
- $e_{ij}$ : variável binária que indica se a demanda entre os nós  $i \in N$  e  $j \in N$  é atendida diretamente, sem passar por um concentrador.

Com essa notação, uma formulação de programação inteira mista para o problema de localização de concentradores com maximização do lucro e conexões diretas é dada por:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{m \in N} r_{ij} w_{ij} b_{ijm} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} r_{ij} w_{ij} e_{ij} - \left( \sum_{i \in N} \sum_{k \in N} c_{ik} O_i a_{ik} \right. \\ & + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{m \in N} c_{mj} w_{ij} b_{ijm} + \sum_{i \in N} \sum_{k \in N} \sum_{m \in N} \alpha c_{km} f_{ikm} + \sum_{k \in N} s_k h_k \\ & \left. + \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} g_{km} z_{km} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} q_{ij} e_{ij} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{k \in N} a_{ik} \leq 1 \quad \forall i \in N \quad (6)$$

$$\sum_{m \in N} b_{ijm} + e_{ij} \leq 1 \quad \forall i, j \in N \quad (7)$$

$$a_{ik} \leq h_k \quad \forall i, k \in N \quad (8)$$

$$b_{ijm} \leq h_m \quad \forall i, j, m \in N \quad (9)$$

$$e_{ij} + h_i \leq 1 \quad \forall i, j \in N \quad (10)$$

$$e_{ij} + h_j \leq 1 \quad \forall i, j \in N \quad (11)$$

$$\sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} f_{imk} + O_i a_{ik} = \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} f_{ikm} + \sum_{j \in N} w_{ij} b_{ijk} \quad \forall i, k \in N \quad (12)$$

$$f_{ikm} \leq O_i z_{km} \quad \forall i, k, m \in N, k \neq m \quad (13)$$

$$z_{km} \leq h_k \quad \forall k, m \in N, k \neq m \quad (14)$$

$$z_{km} \leq h_m \quad \forall k, m \in N, k \neq m \quad (15)$$

$$f_{ikm} \geq 0 \quad \forall i, k, m \in N \quad (16)$$

$$a_{ik} \geq 0 \quad \forall i, k \in N \quad (17)$$

$$b_{ijm} \geq 0 \quad \forall i, j, m \in N \quad (18)$$

$$e_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in N \quad (19)$$

$$h_k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in N \quad (20)$$

$$z_{km} \in \{0, 1\} \quad \forall k, m \in N, k \neq m \quad (21)$$

A função objetivo e as restrições que compõem essa formulação são detalhados a seguir.

### 2.2.1 Função Objetivo

A função objetivo, dada por

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{m \in N} r_{ij} w_{ij} b_{ijm} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} r_{ij} w_{ij} e_{ij} - \left( \sum_{i \in N} \sum_{k \in N} c_{ik} O_i a_{ik} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{m \in N} c_{mj} w_{ij} b_{ijm} \right. \\ & \left. + \sum_{i \in N} \sum_{k \in N} \sum_{m \in N} \alpha c_{km} f_{ikm} + \sum_{k \in N} s_k h_k + \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} g_{km} z_{km} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} q_{ij} e_{ij} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

representa o lucro total da rede, que é obtido pela diferença entre a receita total e o custo total. Os dois primeiros termos da função objetivo calcula a receita obtida com o atendimento da demanda, pelos pares de nós que foram atendidos por caminhos contendo concentradores ou através da conexão direta entre eles, respectivamente. Os três primeiros termos dentro dos parênteses representam os custos de transporte associados aos pares de origem e destino que são atendidos por caminhos que contém concentradores, o qual é composto pelos custos de acesso, distribuição e transferência na rede. Os três últimos termos dentro dos parênteses correspondem aos custos fixos de instalação de concentradores, custos fixos de instalação de arcos entre concentradores, seguido dos custos fixos de instalação das conexões diretas.

### 2.2.2 Restrições

As restrições

$$\sum_{k \in N} a_{ik} \leq 1, \quad \forall i \in N \quad (6)$$

asseguram que a fração total de demanda originada em cada nó  $i \in N$  e que é roteada através de um concentrador é sempre menor ou igual a 1.

O conjunto de restrições

$$\sum_{m \in N} b_{ijm} + e_{ij} \leq 1, \quad \forall i, j \in N \quad (7)$$

garantem que a demanda entre cada par de nós  $i, j \in N$  pode ser atendida diretamente (quando  $e_{ij} = 1$ ) ou roteada através de caminhos contendo concentradores, mas nunca ambos.

As restrições

$$a_{ik} \leq h_k, \quad \forall i, k \in N \quad (8)$$

$$b_{ijm} \leq h_m, \quad \forall i, j, m \in N \quad (9)$$

indicam que o fluxo de demanda só pode ser roteado através de concentradores instalados na rede.

As expressões

$$e_{ij} + h_i \leq 1, \quad \forall i, j \in N \quad (10)$$

$$e_{ij} + h_j \leq 1, \quad \forall i, j \in N \quad (11)$$

garantem que, se existir uma conexão direta entre  $i \in N$  e  $j \in N$  (ou seja,  $e_{ij} = 1$ ), então esses nós não podem ser concentradores.

O conjunto de restrições dado por

$$\sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} f_{imk} + O_i a_{ik} = \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} f_{ikm} + \sum_{j \in N} w_{ij} b_{ijk}, \quad \forall i, k \in N \quad (12)$$

se refere ao balanceamento do fluxo de demanda na rede e assegura que ele seja devidamente roteado entre os concentradores e que a demanda gerada no nó  $i \in N$  que passa pelo concentrador  $k \in N$  seja corretamente distribuída entre os nós de destino.

As restrições

$$f_{ikm} \leq O_i z_{km}, \quad \forall i, k, m \in N, k \neq m \quad (13)$$

determinam que a demanda originada em cada nó  $i \in N$  da rede só pode ser roteada entre os concentradores  $k \in N$  e  $m \in N$  se existir uma conexão entre eles ( $z_{km} = 1$ ).

As desigualdades dadas por

$$z_{km} \leq h_k, \quad \forall k, m \in N, k \neq m \quad (14)$$

$$z_{km} \leq h_m, \quad \forall k, m \in N, k \neq m \quad (15)$$

asseguram que um arco entre os concentradores  $k \in N$  e  $m \in N$  só pode existir se esses nós forem, de fato, concentradores instalados na rede.

Por fim, as restrições a seguir determinam o domínio das variáveis de decisão do problema:

$$f_{ikm} \geq 0, \quad \forall i, k, m \in N \quad (16)$$

$$a_{ik} \geq 0, \quad \forall i, k \in N \quad (17)$$

$$b_{ijm} \geq 0, \quad \forall i, j, m \in N \quad (18)$$

$$e_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in N \quad (19)$$

$$h_k \in \{0, 1\}, \quad \forall k \in N \quad (20)$$

$$z_{km} \in \{0, 1\}, \quad \forall k, m \in N, k \neq m. \quad (21)$$

## 2.3 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS: FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Esta seção apresenta os experimentos computacionais realizados, com duplo objetivo: (i) avaliar o desempenho da formulação apresentada na seção anterior; e (ii) analisar o impacto que a permissão de conexões diretas tem sobre a configuração da rede de concentradores e sobre o lucro. O solver CPLEX foi utilizado para resolver a formulação em instâncias do conjunto de dados CAB, com diferentes configurações dos parâmetros.

Como relatado anteriormente, o conjunto de dados CAB contém 25 nós e fornece uma matriz com as demandas ( $w_{ij}$ ) e os custos de transporte ( $c_{ij}$ ) entre cada par de nós da rede. Foram consideradas diversas combinações de receitas, custos fixos de instalação e fatores de desconto, permitindo uma análise abrangente do comportamento da formulação em diferentes cenários operacionais.

Os valores de receita por unidade de demanda ( $r_{ij}$ ), custos de instalação de concentradores ( $s_k$ ), custos de instalação de arcos entre concentradores ( $g_{km}$ ) e custos de instalação de conexões diretas ( $q_{ij}$ ), foram considerados para refletir três cenários de baixa, média e alta complexidade financeira, enquanto os fatores de desconto constante ( $\alpha$ ) foram tomados no conjunto  $\{0, 2; 0, 4; 0, 6; 0, 8\}$ . Observe que valores menores de  $\alpha$  refletem um maior desconto nos arcos entre concentradores e maiores valores de  $\alpha$  acarretam em menores descontos. Por exemplo, quando  $\alpha = 0, 2$ , significa que o custo de transporte unitário entre os concentradores  $k \in N$  e  $m \in N$  será igual a  $\alpha c_{km} = 0, 2 c_{km}$ , proporcionando um desconto de 80%. Esses valores para os parâmetros seguem diretamente os propostos por Taherkhani e S. A. Alumur (2018). A Tabela 1 detalha os valores utilizados.

Tabela 1 – Configurações dos parâmetros CAB

Parâmetro	Valor
Quantidade de nós	25
Receita por unidade de demanda ( $r_{ij}$ )	Baixo: 1000, Médio: 1500, Alto: 2000
Custo de instalação de um concentrador ( $s_k$ )	Baixo: 50, Médio: 100, Alto: 150
Custo de instalação de um arco entre concentradores ( $g_{km}$ )	Baixo: 5, Médio: 10, Alto: 15
Custo de instalação de uma conexão direta ( $q_{ij}$ )	Baixo: 1, Médio: 2, Alto: 3
Fator de desconto constante ( $\alpha$ )	0,2; 0,4; 0,6; 0,8

Fonte: Autor, 2024.

### 2.3.1 Experimento I

Esse experimento foi realizado com o objetivo de avaliar a performance da formulação proposta neste trabalho, que permite a instalação de conexões diretas na rede de concentradores.

A Tabela 2 exibe os resultados obtidos pelo CPLEX aplicado à formulação proposta com o conjunto de dados CAB. Para cada configuração dos parâmetros são exibidos o valor da função objetivo (Lucro), a porcentagem de demanda atendida na rede (Demanda

Atendida), a porcentagem de demanda que foi atendida através de conexões diretas (Conexão Direta), os concentradores instalados na rede (Concentradores Instalados) e os tempos, em segundos, gastos na resolução dos problemas usando a formulação proposta (Tempo Form) e também usando a formulação apresentada por Taherkhani e S. A. Alumur (2018) para a versão do problema com conexões diretas (Tempo Taherkhani).

Tabela 2 – Resultados da formulação com conexões diretas aplicada ao conjunto de dados CAB.

Receita	Custo	$\alpha$	Lucro	Demandas Atendidas (%)	Conexão Direta (%)	Concentradores Instalados	Tempo Form (s)	Tempo Taherkhani (s)
2000	Baixo	0,2	1166,32	100,0	0,33	4, 7, 12, 14, 17	1076,46	11457,79
2000	Baixo	0,4	1024,43	95,33	2,0	4, 12, 14, 18	3142,62	11110,94
2000	Baixo	0,6	926,49	90,33	4,0	4, 12, 18	1001,11	11051,15
2000	Baixo	0,8	901,10	82,67	7,67	2, 21	252,37	10278,29
2000	Médio	0,2	927,44	97,33	1,67	4, 12, 17	280,22	11221,05
2000	Médio	0,4	823,75	93,0	2,0	4, 12, 18	141,38	1546,54
2000	Médio	0,6	777,74	76,0	7,0	5	90,98	143,21
2000	Médio	0,8	777,74	76,0	7,0	5	13,85	44,41
2000	Alto	0,2	748,04	97,33	1,33	4, 12, 17	104,67	3446,88
2000	Alto	0,4	694,52	69,0	4,33	20	74,51	48,56
2000	Alto	0,6	694,52	69,0	4,33	20	14,13	39,92
2000	Alto	0,8	694,52	69,0	4,33	20	10,04	39,82
1500	Baixo	0,2	669,19	94,0	0,33	4, 7, 12, 14, 17	1629,04	11001,27
1500	Baixo	0,4	538,18	85,0	2,0	4, 12, 14, 18	1971,94	11264,57
1500	Baixo	0,6	503,91	66,67	5,33	2, 4	333,45	1512,92
1500	Baixo	0,8	495,61	59,0	11,67	20	32,83	159,51
1500	Médio	0,2	439,30	84,33	1,67	4, 12, 17	166,48	2122,26
1500	Médio	0,4	399,81	55,33	5,67	20	45,68	45,27
1500	Médio	0,6	399,81	55,33	5,67	20	20,35	25,76
1500	Médio	0,8	399,81	55,33	5,67	20	11,52	25,39
1500	Alto	0,2	324,71	54,33	3,33	20	56,62	28,47
1500	Alto	0,4	324,71	54,33	3,33	20	13,56	25,74
1500	Alto	0,6	324,71	54,33	3,33	20	11,66	25,25
1500	Alto	0,8	324,71	54,33	3,33	20	10,23	25,83
1000	Baixo	0,2	213,06	49,0	1,67	4, 14, 17	352,35	623,94
1000	Baixo	0,4	181,06	31,67	5,67	20	40,47	53,94
1000	Baixo	0,6	181,06	31,67	5,67	20	15,11	14,44
1000	Baixo	0,8	181,06	31,67	5,67	20	8,33	14,14
1000	Médio	0,2	119,33	5,67	5,67	-	15,23	19,85
1000	Médio	0,4	119,33	5,67	5,67	-	9,82	19,65
1000	Médio	0,6	119,33	5,67	5,67	-	8,46	19,98
1000	Médio	0,8	119,33	5,67	5,67	-	7,19	20,16
1000	Alto	0,2	88,97	4,33	4,33	-	7,07	6,80
1000	Alto	0,4	88,97	4,33	4,33	-	6,13	6,80
1000	Alto	0,6	88,97	4,33	4,33	-	6,14	6,93
1000	Alto	0,8	88,97	4,33	4,33	-	5,67	6,70

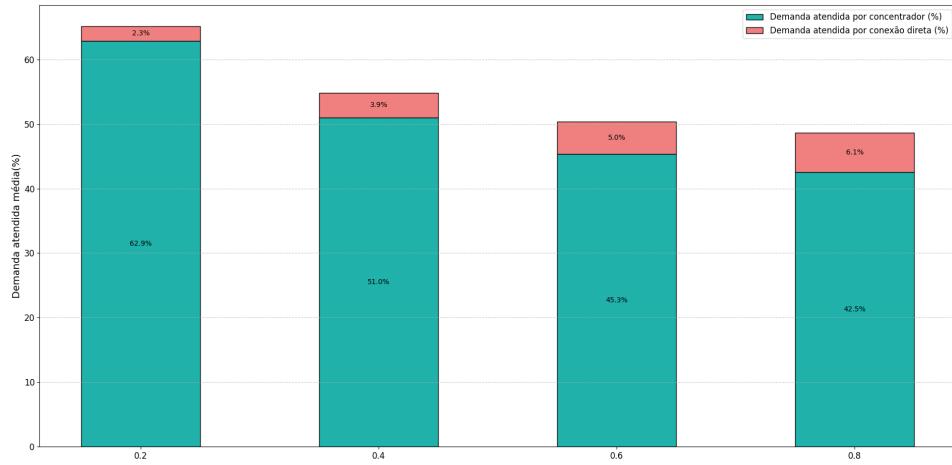
Fonte: Autor, 2024.

Observa-se que, com o aumento de  $\alpha$ , há uma redução significativa no lucro e na porcentagem de demanda atendida, bem como uma diminuição na quantidade de concentradores instalados na rede. Esse comportamento deve-se ao fato de que maiores valores de  $\alpha$  acarretam em uma diminuição do desconto nos custos operacionais dos arcos entre concentradores e reflete em cenários que tendem a economizar mais em instalação

de concentradores e, consequentemente, na instalação de arcos entre concentradores. Essa redução no número de concentradores e dos arcos entre eles, acaba limitando a quantidade de demanda atendida. Para receita 2000 e custo baixo, o lucro diminui de 1166,32 para 901,10 e a porcentagem de demanda atendida reduz de 100% para 82,67%, enquanto a quantidade de concentradores instalados passa de cinco para dois, quando  $\alpha$  varia de 0,2 para 0,8. Esse padrão é similar para diferentes níveis de receita e custo, destacando a relação inversa entre  $\alpha$  e esses indicadores.

Além disso, o fator de desconto constante nos arcos entre concentradores afeta também a porcentagem de demanda atendida por conexão direta. Valores menores de  $\alpha$ , como 0,2, estimula a instalação de arcos entre concentradores, resultando em uma menor necessidade de priorizar conexões diretas. Por outro lado, à medida que  $\alpha$  aumenta, o custo relativo de operar arcos entre concentradores se torna mais elevado, incentivando um maior uso de conexões diretas para reduzir os custos totais. Essa relação é evidenciada na Figura 2, que mostra a porcentagem média da demanda atendida por rotas com concentrador e por conexão direta. Nota-se que há um aumento consistente no percentual de uso de conexões diretas com o crescimento de  $\alpha$ .

Figura 2 – Porcentagem média da demanda atendida por concentrador e por conexão direta.



Fonte: Autor, 2024.

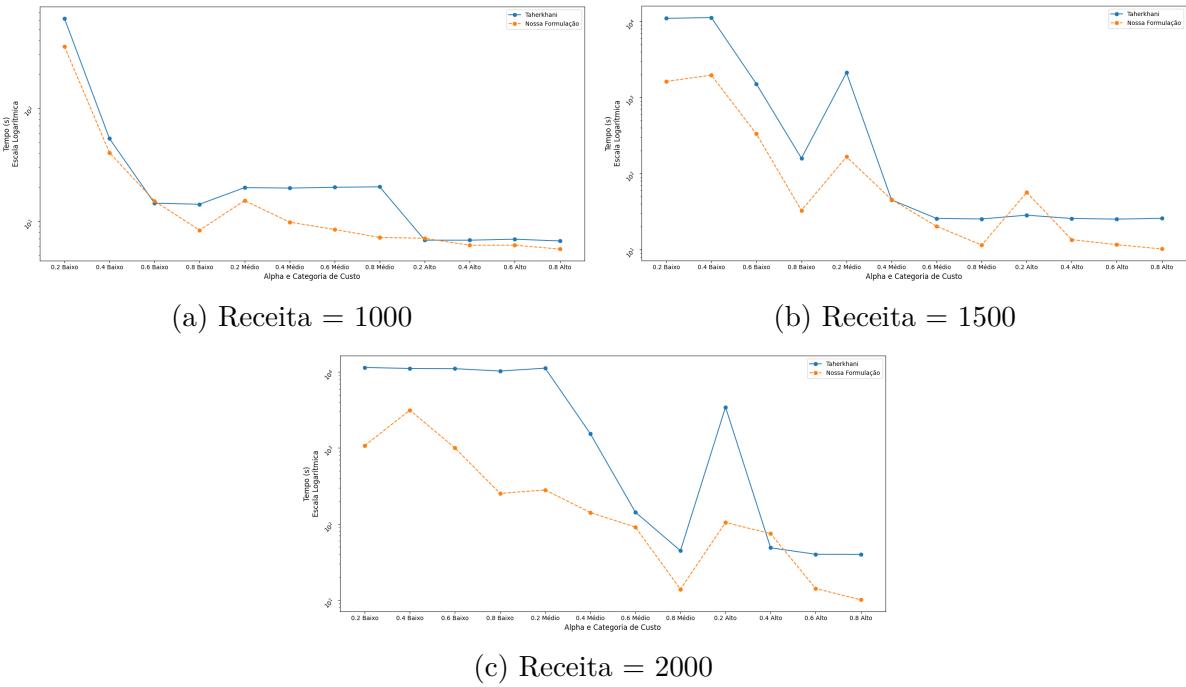
Em relação aos tempos de processamento, nota-se uma tendência oposta à mencionada anteriormente em relação ao valor de  $\alpha$ . À medida  $\alpha$  aumenta, o tempo necessário para solucionar o problema reduz. Desse modo, os casos mais dispendiosos são aqueles com um menor valor  $\alpha$ . Como discutido acima, nesses casos a instalação de concentradores e arcos entre concentradores é mais atrativa, o que resulta em redes mais complexas e com mais conexões, acarretando em um aumento no tempo de processamento computacional necessário. Por exemplo, no cenário em que a receita é 2000 e o custo é baixo, o tempo de processamento na formulação proposta foi de 1076,46 segundos para  $\alpha = 0,2$  e de 252,37

segundos para  $\alpha = 0,8$ , representando uma redução de aproximadamente 76,56%.

Ainda em relação aos tempos de resolução, a formulação proposta neste trabalho demonstra um desempenho superior em comparação com a formulação proposta em Taherkhani e S. A. Alumur (2018). Os tempos necessários para obter a solução ótima são significativamente menores na maioria dos cenários analisados. Por exemplo, com receita 2000, custo baixo e  $\alpha = 0,2$ , o tempo de processamento foi reduzido de 11.457,79 segundos na formulação de Taherkhani para 1.076,46 segundos na formulação proposta, representando uma redução de aproximadamente 90%.

Uma visualização gráfica dos tempos gastos utilizando cada uma das formulações é mostrada na Figura 3. Na maioria dos casos, independente dos valores de receita, custo e  $\alpha$ , os tempos computacionais registrados para resolver as instâncias do problema foram menores utilizando a formulação proposta. Note que essa diferença dos tempos gastos entre as duas formulações tende a aumentar com o aumento da receita.

Figura 3 – Tempo computacional gasto pelo CPLEX para resolver a formulação proposta e a formulação de Taherkhani nas instâncias CAB.



Fonte: Autor, 2024.

### 2.3.2 Experimento II

O experimento apresentado nesta seção, busca avaliar o impacto das conexões diretas na configuração da rede, sua influência sobre o lucro e a eficiência computacional. Como feito anteriormente, a análise foi realizada com as diferentes combinações de receitas, custos e valores de fator de desconto nos arcos entre concentradores, como descrito na Tabela 1. Também são analisadas soluções de algumas instâncias, considerando o problema

com e sem conexões diretas com o objetivo de identificar cenários em que a permissão de conexões diretas apresenta vantagens significativas na concepção da rede.

A Tabela 3 apresenta os resultados com as instâncias CAB, considerando as versões do problema com e sem conexões diretas. Os testes foram realizados com o CPLEX, aplicado à formulação proposta neste trabalho, sendo que, no caso da versão sem conexões diretas, as variáveis  $e_{ij}$ , responsáveis pela instalação de conexões diretas, foram tomadas iguais a zero. Para cada uma das versões do problema, são mostrados nesta tabela o valor do lucro, os concentradores instalados na rede e o tempo de processamento, em segundos.

Tabela 3 – Resultados das versões do problema com conexões diretas e sem conexões diretas aplicadas as instâncias CAB.

Receita	Custo	$\alpha$	Com conexão direta (CD)			Sem conexão direta (SCD)		
			Lucro	Concentradores	Tempo (s)	Lucro	Concentradores	Tempo (s)
2000	Baixo	0,2	1166,32	4, 7, 12, 14, 17	2357,25	1162,92	4, 7, 12, 14, 17	1076,46
2000	Baixo	0,4	1024,43	4, 12, 14, 18	2389,30	1008,46	4, 7, 12, 14, 17	3142,62
2000	Baixo	0,6	926,49	4, 12, 18	401,71	898,24	1, 4, 12, 17	1001,11
2000	Baixo	0,8	901,10	2, 21	52,80	839,40	1, 4, 12, 17	252,37
2000	Médio	0,2	927,44	4, 12, 17	300,24	911,27	4, 12, 17, 24	280,22
2000	Médio	0,4	823,75	4, 12, 18	154,13	803,73	4, 12, 17	128,63
2000	Médio	0,6	777,74	5	48,50	717,73	4, 12, 17	133,45
2000	Médio	0,8	777,74	5	12,79	690,90	18, 21	14,90
2000	Alto	0,2	748,04	4, 12, 17	145,16	738,08	4, 12, 17	64,18
2000	Alto	0,4	694,52	20	35,78	633,73	4, 12, 17	113,23
2000	Alto	0,6	694,52	20	12,68	599,18	20	15,57
2000	Alto	0,8	694,52	20	9,98	599,18	20	10,10
1500	Baixo	0,2	669,19	4, 7, 12, 14, 17	1887,45	665,79	4, 7, 12, 14, 17	1370,62
1500	Baixo	0,4	538,18	4, 12, 14, 18	1209,40	520,25	4, 12, 14, 17	2734,47
1500	Baixo	0,6	503,91	2, 4	70,41	439,14	4, 12, 17	596,49
1500	Baixo	0,8	495,61	20	32,05	424,73	4, 18	33,61
1500	Médio	0,2	439,30	4, 12, 17	180,83	426,90	4, 12, 17	152,13
1500	Médio	0,4	399,81	20	38,26	348,40	4, 17	53,09
1500	Médio	0,6	399,81	20	15,26	327,82	4, 17	25,44
1500	Médio	0,8	399,81	20	10,88	324,73	4, 18	12,15
1500	Alto	0,2	324,71	20	41,20	266,41	4, 17	72,03
1500	Alto	0,4	324,71	20	13,86	259,89	20	13,25
1500	Alto	0,6	324,71	20	10,33	259,89	20	12,98
1500	Alto	0,8	324,71	20	10,14	259,89	20	10,31
1000	Baixo	0,2	213,07	4, 14, 17	243,47	197,98	4, 12, 14, 17	461,23
1000	Baixo	0,4	181,06	20	57,51	156,90	4, 17	23,42
1000	Baixo	0,6	181,06	20	16,90	141,69	4, 17	13,31
1000	Baixo	0,8	181,06	20	9,76	132,16	4, 17	6,90
1000	Médio	0,2	119,32	—	13,56	69,02	4, 17	16,89
1000	Médio	0,4	119,32	—	9,63	65,28	17	10,01
1000	Médio	0,6	119,32	—	9,27	65,28	17	7,65
1000	Médio	0,8	119,32	—	8,60	65,28	17	5,78
1000	Alto	0,2	88,97	—	6,24	15,28	17	7,89
1000	Alto	0,4	88,97	—	5,48	15,28	17	6,78
1000	Alto	0,6	88,97	—	6,22	15,28	17	6,05
1000	Alto	0,8	88,97	—	5,48	15,28	17	5,85

Fonte: Autor, 2024.

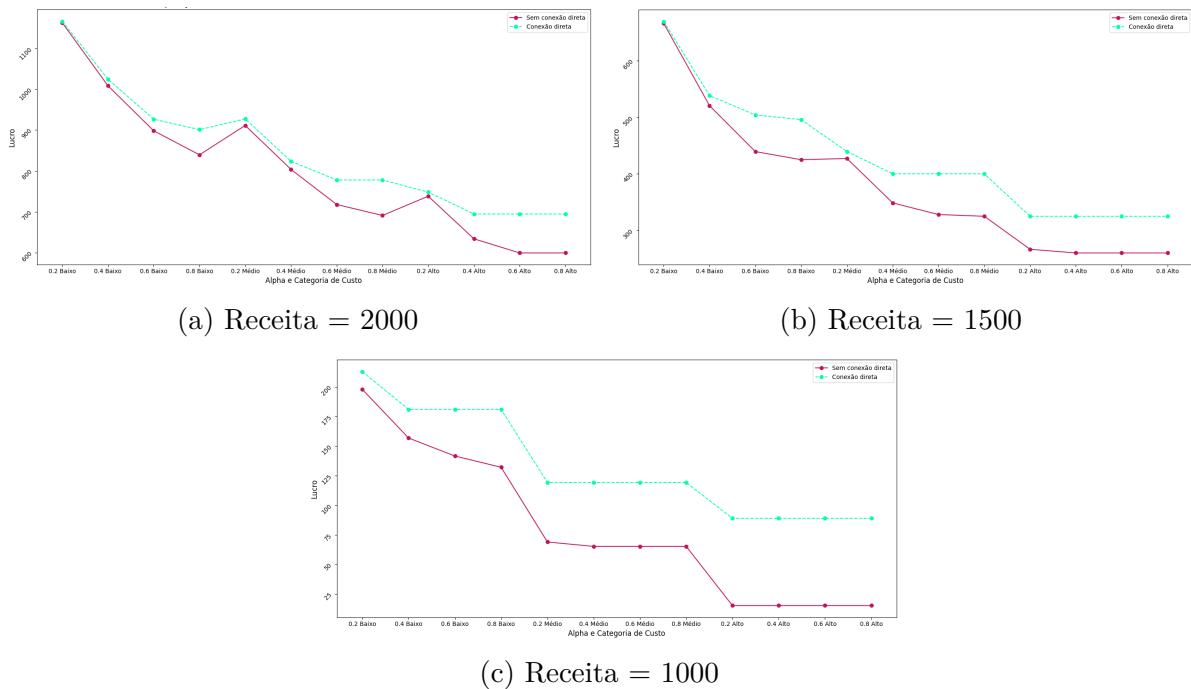
Analizando os resultados obtidos, verifica-se que, de maneira geral, a versão com conexão direta tende a produzir valores da função objetivo superiores em comparação com a versão sem conexão direta. Esse comportamento sugere que a abordagem com conexão direta é mais vantajosa para o lucro líquido da rede.

Por exemplo, para a instância com receita 2000, custo baixo e fator de desconto  $\alpha = 0,4$ , o lucro obtido com conexão direta foi de 1.024,43, enquanto sem conexão direta

foi de 1.008,46. Essa diferença mostra que a utilização da conexão direta proporcionou um incremento no lucro de aproximadamente 1,58%.

A Figura 4 evidencia o comportamento do lucro da rede, para cada valor de receita. Como discutido acima, os valores dos lucros obtidos com conexão direta são superiores aos obtidos sem conexão direta em todos os casos. Além disso, observa-se que essa diferença nos valores obtidos com as duas abordagens fica mais acentuada com o aumento  $\alpha$ , indicando que a conexão direta se torna mais vantajosa para o valor da função objetivo à medida que o fator de desconto cresce (e, consequentemente, o desconto nos arcos entre concentradores diminui).

Figura 4 – Lucro da rede de concentradores para as versões com e sem conexões diretas.



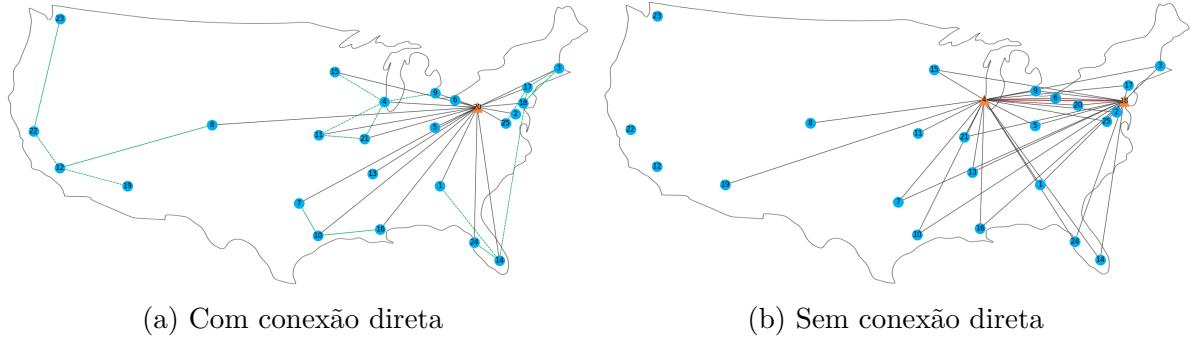
Fonte: Autor, 2024.

Em relação ao impacto que as conexões diretas tem sobre a estrutura da rede, nota-se na Tabela 3 que o número de concentradores instalados com a versão que permite conexões diretas geralmente é menor do que a quantidade de concentradores ativos na rede sem conexões diretas. Vê-se também que existe uma diferença considerável entre as duas abordagens em relação aos nós que são definidos como concentradores, na maioria dos casos.

Por exemplo, para a instância com receita igual a 1500, custo médio e  $\alpha = 0,8$ , a versão sem conexões diretas instala na rede dois concentradores e um arco entre eles, enquanto a outra variante ativa um único concentrador, conforme ilustrado na Figura 5. Nota-se que a configuração das redes são significativamente diferentes e, apesar do número de concentradores ser menor, o lucro obtido na rede com conexão direta é 23,13% maior do que o lucro associado à rede sem conexão direta. As conexões diretas permitem que

mais nós sejam conectados à rede e que mais conexões entre os nós sejam instaladas, formando uma espécie de sub-rede direta. Observe na figura que os nós mais distantes dos concentradores (nós 12, 22 e 23) passaram a fazer parte da rede com a permissão das conexões diretas.

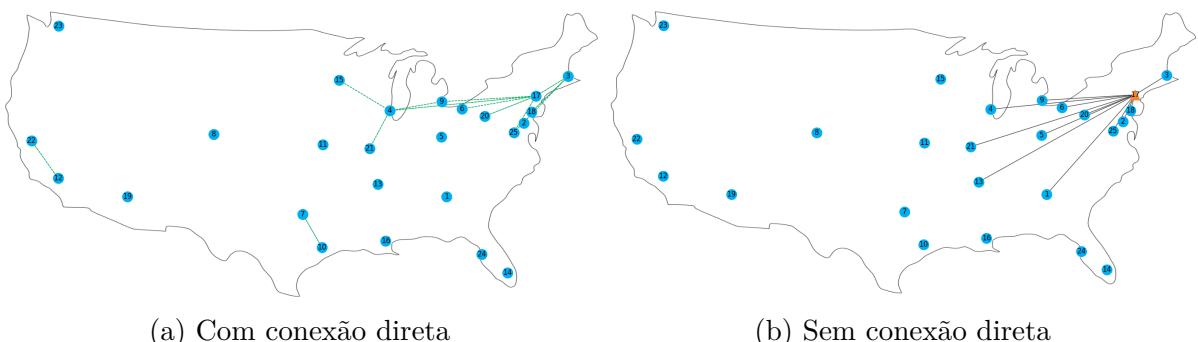
Figura 5 – Configuração da rede para a instância com receita 1500, custo baixo e  $\alpha = 0,8$ .



Fonte: Autor, 2024.

A Figura 6 exibe a configuração da rede para a instância com receita 1000, custo alto e  $\alpha = 0,2$ . Neste caso, em que o valor de receita é crítico e o custo é alto, sob o ponto de vista do lucro, foi mais vantajoso para a versão com conexões diretas não instalar nenhum concentrador na rede. Novamente, observamos que a estrutura das redes obtidas são distintas. Enquanto na versão sem conexão direta os pares atendidos são aqueles que estão mais próximos do concentrador, na outra abordagem são obtidas duplas de nós que ficam desconexos com o restante da rede.

Figura 6 – Configuração da rede para a instância com receita 1000, custo alto e  $\alpha = 0,2$ .

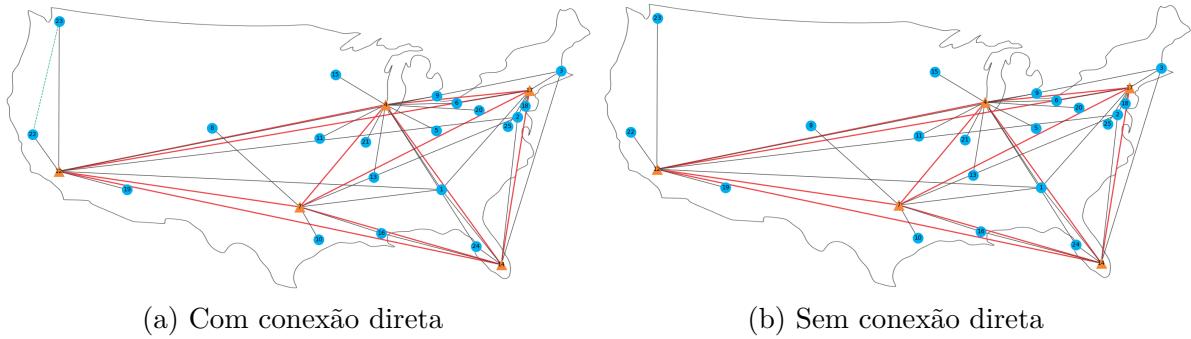


Fonte: Autor, 2024.

Entretanto, em alguns casos, as redes obtidas pelas duas abordagens possuem configurações semelhantes e o aumento no valor do lucro com uso de conexões diretas é pequeno. Essa característica ocorre principalmente nas instâncias com maiores valores para receita e menores valores de  $\alpha$ . A Figura 7 mostra a configuração da rede, com e sem o uso de conexões diretas, para a instância com receita 2000, custo baixo e  $\alpha$  igual a

0,2. Observe que a configuração final da rede é praticamente idêntica, exceto pela conexão direta efetuada entre os nós 22 e 23. Neste caso, a diferença no lucro é de apenas 3,4 unidades.

Figura 7 – Configuração da rede para a instância com receita 2000, custo baixo e  $\alpha = 0,2$ .



Fonte: Autor, 2024.

Sobre os tempos computacionais, observa-se na Tabela 3 que as execuções com conexão direta apresentam, na maioria dos casos, tempos menores ou próximos aos das execuções sem conexão direta. A Figura 8 exibe os tempos de processamento registrados pelo CPLEX para resolver as instâncias em ambas as abordagens, considerando os três valores de receita. Essa figura mostra que, em todas as categorias de receita, os maiores tempos foram registrados para resolver instâncias com custo baixo e valores menores de  $\alpha$  (0,2 e 0,4), independente do problema permitir ou não a instalação de conexões diretas.

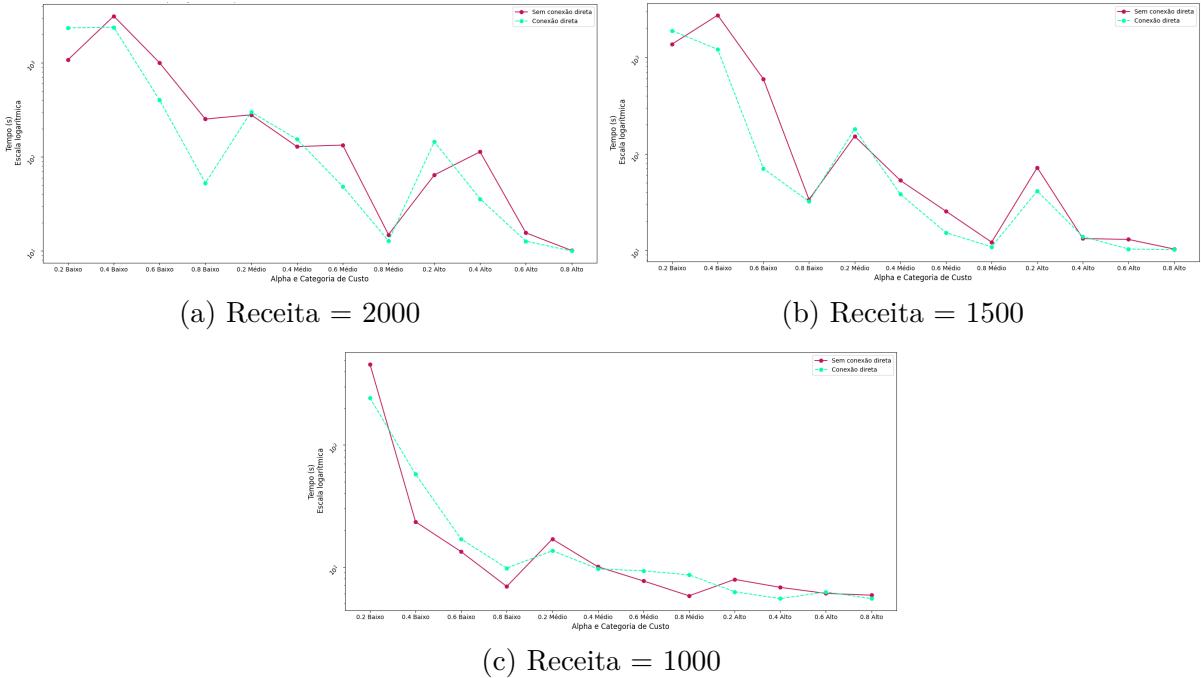
Adicionalmente, nota-se que para as receitas 2000 e 1500, os tempos obtidos apresentaram um comportamento similar. Os tempos gastos nas execuções com conexão direta foram menores do que os obtidos sem conexão direta, para a maioria dos cenários. Contudo, em alguns casos específicos, sobretudo nos menores valores do fator de desconto nos arcos entre concentradores, observou-se o efeito contrário.

Por outro lado, nos testes realizados com receita igual a 1000 são verificadas diferenças menos acentuadas nos tempos de processamento entre as duas abordagens. Em alguns casos, os tempos sem conexão direta são menores. Isso pode ser explicado pela limitação da receita, que não estimula a instalação de concentradores, arcos entre concentradores e a ativação de conexões diretas na rede.

Observa-se ainda que os tempos computacionais mais elevados foram obtidos com os maiores valores de receita. Ademais, devido à complexidade do problema, os tempos computacionais podem tornar-se impraticáveis, podendo atingir escalas de dias de processamento ou até mais para determinadas instâncias. Além disso, o aumento da dimensão do problema leva a um crescimento significativo no consumo de memória, que pode ultrapassar os limites disponíveis, inviabilizando a resolução em máquinas convencionais.

No próximo capítulo, um método de resolução heurístico é proposto para o problema de localização de concentradores com maximização do lucro e conexões diretas. Tal método

Figura 8 – Tempo gasto pelo CPLEX para resolver as instâncias CAB nos problemas com conexão direta e sem conexão direta.



Fonte: Autor, 2024.

pode ser aplicado em instâncias com uma maior quantidade de nós e permite obter soluções de boa qualidade para o problema em tempos computacionais viáveis.

### 3 ALGORITMO HEURÍSTICO

Problemas de otimização combinatória, como o tratado neste trabalho, frequentemente possuem alta complexidade computacional, tornando inviável a utilização de métodos exatos em instâncias de grande porte. Nesse contexto, heurísticas e metaheurísticas surgem como alternativas eficientes, proporcionando soluções de boa qualidade em tempos computacionais aceitáveis. Estas técnicas, ao explorarem o espaço de soluções de forma iterativa, permitem lidar com as limitações impostas pela natureza *NP-difícil* desses problemas, garantindo uma abordagem prática para sua resolução.

A heurística desenvolvida neste trabalho é baseada na meta-heurística *Smart Iterated Local Search (Smart ILS)*, introduzida por Reinsma, Penna e M. J. F. Souza (2018), que consiste em explorar o espaço de soluções por meio de perturbações em ótimos locais. O *Smart ILS* trata-se de uma adaptação da meta-heurística *Iterated Local Search (ILS)* (LOURENÇO; MARTIN; STÜTZLE, 2003), onde uma maior intensificação na região de busca é realizada.

O algoritmo heurístico tem como procedimento de busca local o método *Random Variable Neighborhood Descent (RVND)*, proposto por M.J.F. Souza *et al.* (2010) e Subramanian *et al.* (2010). O RVND explora o espaço de soluções utilizando a troca sistemática de estruturas de vizinhança em ordem aleatória, com a finalidade de encontrar soluções melhores do que a solução corrente. Quando a busca local não encontra melhorias, aplica-se uma etapa de perturbação, que modifica a solução atual com o propósito de não ficar preso em ótimos locais.

Essa abordagem foi adaptada às características do problema de localização de concentradores com maximização do lucro e conexões diretas. A seguir a descrição do algoritmo e todas suas componentes são apresentados em detalhes. Para analisar a performance do algoritmo proposto, são apresentados dois experimentos computacionais, utilizando as instâncias AP contendo até 200 nós.

#### 3.1 DESCRIÇÃO DO ALGORITMO

##### 3.1.1 Representação e avaliação da solução

A solução para o problema de localização de concentradores com maximização do lucro e conexões diretas será representada por  $s = (H, Z, E)$ , sendo  $H$  o conjunto de concentradores instalados,  $Z$  o conjunto de arcos entre concentradores ativos e  $E$  o conjunto das conexões diretas utilizadas. As conexões entre os concentradores e os demais nós da rede não precisam ser indicadas, pois essa alocação é feita através do caminho que resulta no menor custo de transporte.

A avaliação de uma solução  $s$  é determinada da seguinte maneira. Seja  $C_{ij}$  o menor custo de transporte de uma rota da origem  $i \in N$  até o destino  $j \in N$ , utilizando caminhos

que passam por concentradores. Esse valor é dado por:

$$C_{ij} = \min_{k,m \in H} \{c_{ik} + \alpha \cdot c_{km}^W + c_{mj}\}, \quad (22)$$

em que  $c_{km}^W$  é o menor custo de transporte entre os concentradores  $k \in H$  e  $m \in H$ , determinado através do algoritmo de Floyd-Warshall (FLOYD, 1962).

A demanda de um par de nós  $i \in N$  e  $j \in N$  poderá ser roteada na rede através de um caminho que contém concentradores ou através de uma conexão direta entre eles. No primeiro caso, temos que o lucro associado ao atendimento da demanda é dado por:

$$P_{ij}^{\text{conc}} = \max \{0, (r_{ij} - C_{ij}) w_{ij}\}. \quad (23)$$

Na segunda possibilidade, em que uma conexão direta entre os nós  $i \in N$  e  $j \in N$  é utilizada, o lucro é calculado como:

$$P_{ij}^{\text{direta}} = \max \{0, (r_{ij} - c_{ij}) w_{ij}\}. \quad (24)$$

Desse modo, o lucro total associado ao par de nós  $i \in N$  e  $j \in N$  será o maior entre essas duas opções, isto é:

$$P_{ij} = \max \{P_{ij}^{\text{conc}}, P_{ij}^{\text{direta}}\}. \quad (25)$$

Por fim, o valor da solução  $f(s)$  é obtido pela soma dos lucros associados a todos os pares de nós da rede, subtraindo os custos fixos relacionados à instalação de concentradores, os custos de instalação de arcos entre concentradores e os custos fixos das conexões diretas. Assim, temos:

$$f(s) = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} P_{ij} - \sum_{k \in H} s_k - \sum_{(k,m) \in Z} g_{km} - \sum_{(i,j) \in E} q_{ij}. \quad (26)$$

### 3.1.2 Solução Inicial

Uma solução inicial para o problema de localização de concentradores com maximização do lucro e conexões diretas foi construída considerando o maior lucro possível em uma rede contendo um único concentrador instalado, juntamente com a possibilidade de utilizar conexões diretas. Este procedimento está descrito no Algoritmo 1, que recebe como entrada os parâmetros do problema, incluindo o custo fixo associado às conexões diretas ( $q_{ij}$ ), mas desconsidera o custo fixo de instalação de arcos entre concentradores ( $g_{km}$ ) e o fator de desconto constante ( $\alpha$ ), já que apenas um concentrador é considerado. O algoritmo retorna a solução inicial  $s^0$ , composta por três conjuntos: o conjunto de concentradores instalados, o conjunto de arcos entre concentradores ativos e o conjunto de conexões diretas utilizadas. Além disso, o algoritmo também retorna o valor objetivo associado à solução, denotado por  $\phi$ .

Inicialmente, a solução  $s^0$  é configurada como três conjuntos vazios, enquanto o valor objetivo  $\phi$  e uma variável auxiliar  $\phi_{\text{aux}}$  são inicializados como zero (linhas 1–3). No laço principal (linhas 4–23), o lucro total é calculado iterativamente para cada nó avaliado como o único concentrador da rede, e o melhor valor encontrado é armazenado. Para isso, a variável auxiliar recebe inicialmente o custo fixo de instalação do nó como concentrador (linha 5), e um conjunto auxiliar  $E'$  é usado para registrar as conexões diretas que possam ser utilizadas nesta configuração.

Em seguida, para cada par de nós  $(i, j)$ , calcula-se o lucro de atender à demanda por duas possibilidades: utilizando o concentrador instalado ( $l_{ij}^c$ ) ou uma conexão direta ( $l_{ij}^d$ ) (linhas 8–9). Caso o lucro de qualquer uma dessas opções seja positivo, o par é considerado na solução. Se o lucro utilizando o concentrador for maior ou igual ao da conexão direta, seu valor é somado à variável auxiliar (linha 11). Caso contrário, o lucro da conexão direta é somado, e o par  $(i, j)$  é adicionado ao conjunto auxiliar  $E'$  (linha 15). Pares de nós que não geram lucro positivo são descartados, ou seja, não tem sua demanda atendida.

Após calcular o lucro total para o nó avaliado como concentrador, é verificado se este valor é maior ou igual ao melhor valor registrado até o momento (linhas 19–22). Caso positivo, o conjunto de concentradores, conexões diretas e o valor objetivo da solução inicial são atualizados. Por fim, o algoritmo retorna a solução inicial  $s^0$  e o valor associado  $\phi$  (linha 24).

### 3.1.3 Vizinhanças

O espaço de soluções é explorado aplicando-se seis tipos de movimentos a partir de uma solução  $s = (H, Z, E)$ . Cada movimento dá origem a uma das estruturas de vizinhança  $\mathcal{N}_i, i = 1, \dots, 6$  a seguir:

- $\mathcal{N}_1(s)$ : conjunto de soluções obtidas a partir da solução  $s$  pela instalação de um novo concentrador. O número de soluções nesta vizinhança é igual ao número de concentradores não instalados.
- $\mathcal{N}_2(s)$ : conjunto de soluções obtidas a partir da solução  $s$  pela remoção de um concentrador instalado. Neste caso, os arcos entre concentradores conectados ao concentrador removido também são excluídos. O número de soluções nesta vizinhança é igual ao número de concentradores instalados.
- $\mathcal{N}_3(s)$ : conjunto de soluções obtidas a partir da solução  $s$  pela instalação de um arco entre concentradores, ligando concentradores já instalados. O número de soluções nesta vizinhança é igual ao número de arcos entre concentradores não instalados.
- $\mathcal{N}_4(s)$ : conjunto de soluções obtidas a partir da solução  $s$  pela remoção de um arco entre concentradores. O número de soluções nesta vizinhança é igual ao número de arcos entre concentradores instalados.

---

**Algoritmo 1** Solução inicial: melhor solução com um único concentrador considerando conexões diretas

---

**Entrada:**  $N, r_{ij}, w_{ij}, c_{ij}, s_k, q_{ij}$

**Saída:** Solução inicial  $s^0$ , Valor da solução inicial  $\phi$

```

1:  $s^0 \leftarrow (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$                                 ▷ Conjunto de concentradores, arcos e conexões diretas
2:  $\phi \leftarrow 0$ 
3:  $\phi_{\text{aux}} \leftarrow 0$ 
4: para todo  $k \in N$  faz
5:    $\phi_{\text{aux}} \leftarrow -s_k$ 
6:    $E' \leftarrow \emptyset$                                          ▷ Conexões diretas utilizadas para o concentrador atual
7:   para todo  $(i, j) \in N \times N$  faz
8:      $l_{ij}^c \leftarrow (r_{ij} - c_{ik} - c_{kj}) \cdot w_{ij}$ 
9:      $l_{ij}^d \leftarrow (r_{ij} - c_{ij}) \cdot w_{ij} - q_{ij}$ 
10:    se  $l_{ij}^c > 0 \vee l_{ij}^d > 0$  então
11:      se  $l_{ij}^c \geq l_{ij}^d$  então
12:         $\phi_{\text{aux}} \leftarrow \phi_{\text{aux}} + l_{ij}^c$ 
13:      senão
14:         $\phi_{\text{aux}} \leftarrow \phi_{\text{aux}} + l_{ij}^d$ 
15:       $E' \leftarrow E' \cup \{(i, j)\}$ 
16:    fim se
17:  fim se
18:  fim para
19:  se  $\phi_{\text{aux}} \geq \phi$  então
20:     $\phi \leftarrow \phi_{\text{aux}}$ 
21:     $s^0 \leftarrow (\{k\}, \emptyset, E')$                                 ▷ Atualiza a solução
22:  fim se
23: fim para
24: retorne  $s^0, \phi$ 

```

---

- $\mathcal{N}_5(s)$ : conjunto de soluções que podem ser obtidas instalando um novo concentrador e conectando-o a todos os demais concentradores presentes na rede. O número de soluções nesta vizinhança é igual ao número de concentradores não instalados.
- $\mathcal{N}_6(s)$ : conjunto de soluções obtidas a partir da solução  $s$  pela troca de um concentrador instalado por outro ainda não instalado. Neste caso, os arcos entre concentradores conectados ao concentrador removido também são excluídos. O número de soluções nesta vizinhança é dado pelo produto entre o número de concentradores instalados e o número de concentradores não instalados.

### 3.1.4 Busca Local

Como relatado anteriormente, o procedimento de busca local utilizado no algoritmo proposto foi o método *Random Variable Neighborhood Descent (RVND)*, que realiza uma troca sistemática entre as estruturas de vizinhança apresentadas na Subseção 3.1.3. Esse

método é uma variante do algoritmo *Variable Neighborhood Descent (VND)*, proposto por Hansen *et al.* (2017). No RVND, a ordem de exploração das vizinhança é gerada aleatoriamente a cada chamada do método, diferentemente do VND clássico, em que a ordem é fixada previamente, geralmente pela complexidade das estruturas utilizadas.

Esse método foi escolhido devido a sua boa performance quando aplicado ao problema de localização de concentradores para a versão sem conexões diretas por Oliveira *et al.* (2023). Além disso, essa característica aleatória permite que o método adapte-se melhor a diferentes instâncias do problema, explorando as vizinhanças de forma mais diversificada, o que pode ser benéfico para escapar de ótimos locais. Neste trabalho foi adotada a estratégia *best improvement*, onde a busca dentro de cada vizinhança é performada até obter a melhor solução vizinha.

O Algoritmo 2 mostra o procedimento de busca local RVND. De modo geral, o método segue o seguinte fluxo: inicia-se com a exploração da primeira vizinhança da ordem aleatória gerada. Caso não ocorra melhora na solução atual, o algoritmo passa para a próxima vizinhança da ordem, repetindo o processo até que todas as vizinhanças sejam exploradas. Por outro lado, sempre que uma solução melhor é encontrada, a busca reinicia na primeira vizinhança da lista, garantindo que, ao final do processo, a solução obtida seja a melhor em relação a todas as vizinhanças.

---

#### **Algoritmo 2** Random Variable Neighborhood Descent - RVND

---

**Entrada:** Solução  $s$ , Conjunto de vizinhanças  $\mathcal{N}$   
**Saída:** Solução refinada  $s$

- 1:  $\mathcal{NR} \leftarrow \mathcal{N}$  em ordem aleatória
- 2:  $i \leftarrow 1$
- 3: **enquanto**  $i \leq |\mathcal{N}|$  **faça**
- 4:     Encontre o melhor vizinho  $s' \in \mathcal{NR}_i(s)$
- 5:     **se**  $f(s') > f(s)$  **então**
- 6:          $s \leftarrow s'$
- 7:     *i*  $\leftarrow 1$
- 8:     **senão**
- 9:         *i*  $\leftarrow i + 1$
- 10:   **fim se**
- 11: **fim enquanto**
- 12: **retorne**  $s$

---

### 3.1.5 Perturbação

O método de perturbação aplicado neste trabalho, altera a solução atual, realizando  $k$  modificações sucessivas a partir da estrutura de vizinhança  $\mathcal{N}_6$ . O número  $k$  é chamado de nível de perturbação. O Algoritmo 3 detalha esse procedimento. A execução começa criando uma cópia da solução atual, que será utilizada como base para as alterações. Essa

cópia, denotada por  $s'$ , acumula as mudanças realizadas durante o processo. Um contador é então inicializado para acompanhar o número de modificações realizadas.

A perturbação ocorre iterativamente, enquanto o contador for menor ou igual ao número de modificações definido,  $k$ . Em cada iteração, uma solução  $s''$  é escolhida de forma aleatória dentro da vizinhança  $\mathcal{N}_6(s')$ , que corresponde a trocas entre concentradores instalados e não instalados. Após a seleção,  $s'$  é atualizado com os elementos de  $s''$ , e o contador é incrementado. Esse ciclo se repete até que todas as  $k$  modificações sejam realizadas. Ao final do procedimento, a solução resultante  $s'$ , agora perturbada, é retornada.

---

### Algoritmo 3 Perturbação

---

**Entrada:** Solução atual  $s$ , Estrutura de vizinhança  $\mathcal{N}_6$ , Nível de perturbação  $k$

**Saída:** Solução perturbada  $s'$

```

1:  $s' \leftarrow s$ 
2:  $i \leftarrow 1$ 
3: enquanto  $i \leq k$  faça
4:   Seleccione aleatoriamente uma solução vizinha  $s'' \in \mathcal{N}_6(s')$ 
5:    $s' \leftarrow s''$ 
6:    $i \leftarrow i + 1$ 
7: fim enquanto
8: retorne  $s'$ 

```

---

### 3.1.6 Smart ILS

A metaheurística *Smart Iterated Local Search* (Smart ILS) é uma variação do método *Iterated Local Search* (ILS). A principal distinção entre eles reside na estratégia de atualização do nível de perturbação aplicada pelo algoritmo. No ILS, toda vez que não há melhora na solução atual, o nível de perturbação é aumentado. Por outro lado, no Smart ILS, o nível de perturbação só é incrementado após algumas tentativas mal sucedidas de melhora. Essa última abordagem permite realizar uma exploração mais detalhada de uma região específica do espaço de soluções, promovendo uma intensificação mais precisa durante a execução do algoritmo.

O Algoritmo 4 descreve o método *Smart ILS*, aplicado ao problema. O algoritmo recebe como entrada o número máximo de iterações sem melhora  $iterMax$  e o número de vezes máximo dentro de um mesmo nível de perturbação  $vezesMax$ . Para esses parâmetros do algoritmo foram utilizados os valores 4 e 3, respectivamente. Esses valores foram os mesmos empregados nos experimentos computacionais realizados por Oliveira *et al.* (2023).

Na etapa inicial, o contador de iterações sem melhora  $iter$ , o contador de nível de perturbação  $nivel$  e o contador do número de vezes em um mesmo nível de perturbação  $nvezes$  são inicializados (linha 1). Em seguida, na linha 2, uma solução inicial  $s^0$  é gerada, usando o Algoritmo 1. Depois, uma busca local é feita sobre a solução inicial, utilizando o RVND (Algoritmo 2) e a solução retornada é então armazenada em  $s$  (linha 3).

Após a etapa inicial, entre as linhas 4 e 21, o algoritmo entra em um laço com a finalidade de melhorar o valor da solução corrente até que a quantidade de iterações sem melhora seja igual atingida. Na linha 5 o contador de iterações sem melhora é incrementado. Na linha 6, uma solução  $s'$  é obtida através do procedimento de perturbação aplicado à solução  $s$ , como descrito no Algoritmo 3. Por sua vez, na linha 7 é realizada uma busca local sobre a solução  $s'$  e a solução refinada é armazenada em  $s''$ . Caso o valor de  $s''$  seja melhor do que o valor de  $s$ , então a solução  $s$  é atualizada para  $s''$ , o contador de iterações sem melhora é reiniciado, bem como o nível de perturbação e a quantidade de vezes em um mesmo nível de perturbação (linhas 8 a 12). Se o valor de  $s''$  não for melhor do que o valor da solução  $s$ , então entre as linhas 14 e 19 é verificado se o número de vezes em um mesmo nível de perturbação atingiu o seu valor máximo. Caso afirmativo, então o nível de perturbação é aumentado em uma unidade e a quantidade de vezes no mesmo nível de perturbação é reiniciada. Caso contrário,  $nvezes$  é atualizado. Ao final do procedimento, o algoritmo retorna a melhor solução obtida  $s$ .

---

**Algoritmo 4** Smart Iterated Local Search - Smart ILS
 

---

**Entrada:** Número máximo de iterações sem melhora  $iterMax$ ,  
 Número máximo de vezes em um mesmo nível de perturbação  $vezesMax$

**Saída:** Melhor solução encontrada  $s$

```

1:  $iter \leftarrow 0, nivel \leftarrow 1, nvezes \leftarrow 1$ 
2:  $s^0 \leftarrow SolucaoInicial()$                                 ▷ Aplica o Algoritmo 1
3:  $s \leftarrow RVND(s^0, \mathcal{N})$                                 ▷ Aplica o Algoritmo 2
4: enquanto  $iter \leq iterMax$  faça
5:    $iter \leftarrow iter + 1$ 
6:    $s' \leftarrow Perturbacao(s, \mathcal{N}_6, k)$                   ▷ Aplica o Algoritmo 3
7:    $s'' \leftarrow RVND(s', \mathcal{N})$                                 ▷ Aplica o Algoritmo 2
8:   se  $f(s'') > f(s)$  então
9:      $s \leftarrow s''$ 
10:     $iter \leftarrow 0$ 
11:     $nivel \leftarrow 1$ 
12:     $nvezes \leftarrow 1$ 
13:   senão
14:     se  $nvezes \geq vezesMax$  então
15:        $nivel \leftarrow nivel + 1$ 
16:        $nvezes \leftarrow 1$ 
17:     senão
18:        $nvezes \leftarrow nvezes + 1$ 
19:     fim se
20:   fim se
21: fim enquanto
22: retorne  $s$ 
  
```

---

### 3.2 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS: ALGORITMO HEURÍSTICO

Nesta seção, são apresentados os resultados obtidos nos experimentos realizados utilizando o conjunto de dados AP, apresentado na Seção 1.2. Foram executados dois conjuntos de testes, referenciados a seguir como Experimento III e Experimento IV, respectivamente. Eles foram realizados com o objetivo de avaliar a qualidade das soluções obtidas pelo Smart ILS e sua eficiência em termos de tempo computacional. Para este estudo, o parâmetro  $\alpha$  foi fixado em 0,75 (como feito na literatura), e foram analisados três valores de receita: 20, 30 e 50 unidades. O custo de instalação de uma conexão direta entre os nós  $i \in N$  e  $j \in N$  foi tomado como  $q_{ij} = 0,2g_{ij}$ . Além disso, esse conjunto de dados fornece as demandas e os custos de transporte entre os pares de nós na rede e também os custos fixos de instalação de concentradores, divididos em duas categorias *loose* (L) e *tight* (T). Foram testadas instâncias contendo de 25, 40, 50, 75, 100, 125, 150 e 200 nós. Para cada instância, foram realizadas 10 execuções do algoritmo heurístico proposto.

#### 3.2.1 Experimento III

Nesta seção são apresentados os resultados dos testes realizados com o Smart ILS e com o solver CPLEX na resolução de instâncias AP contendo até 75 nós. O objetivo principal é avaliar o desempenho da heurística em termos de qualidade das soluções alcançadas.

A Tabela 4 mostra os resultados desses testes. Para o CPLEX são exibidos o valor ótimo (Valor Ótimo) e o tempo (Tempo (s)). Para o Smart ILS são apresentados, o melhor valor de função objetivo (Melhor Valor) e o valor médio (Valor Médio), obtidos com as dez execuções do algoritmo. Nas duas colunas seguintes, também são mostrados os valores dos *gaps* associados ao melhor valor e ao valor médio, calculados pelas equações:

$$Gap \text{ melhor valor} = 100 \times \frac{\text{Valor Ótimo} - \text{Melhor valor}}{\text{Valor Ótimo}}, \quad (27)$$

$$Gap \text{ valor médio} = 100 \times \frac{\text{Valor Ótimo} - \text{Valor Médio}}{\text{Valor Ótimo}}. \quad (28)$$

Por fim, as duas últimas colunas informam a quantidade de vezes, dentre as dez execuções, que o Smart ILS atingiu a solução ótima do problema e o tempo médio gasto pelo algoritmo para resolver as instâncias (Tempo Médio (s)).

Observa-se na Tabela 4 que, na maioria dos casos, tanto os *gaps* associados ao melhor valor, quanto os *gaps* relativos ao valor médio foram iguais ou próximos de zero. Isso indica, no caso do primeiro *gap*, que o melhor valor obtido pelo Smart ILS foi igual ao valor ótimo ou próximo dele. Para o outro *gap*, um valor baixo significa que o valor médio dos resultados obtidos com as dez execuções é relativamente próximo do valor ótimo. Esses

Tabela 4 – Resultados do Smart ILS e do CPLEX com as instâncias AP contendo até 75 nós

Instância	Receita	CPLEX		Smart ILS					
		Valor Ótimo	Tempo (s)	Melhor Valor	Valor Médio	Gap melhor valor (%)	Gap valor médio (%)	Quantidade de ótimos	Tempo Médio (s)
25L	20	19.074,00	9,41	19.074,00	19.074,00	0,00	0,00	10	0,01
25L	30	48.255,70	36,26	48.228,20	48.228,20	0,06	0,06	0	0,01
25L	50	124.494,00	173,01	124.493,64	124.493,64	0,00	0,00	10	0,07
25T	20	12.892,20	4,39	12.043,79	12.043,79	6,58	6,58	0	0,01
25T	30	38.104,80	13,52	37.993,83	37.993,83	0,29	0,29	0	0,01
25T	50	113.478,00	16,51	112.736,43	112.736,43	0,65	0,65	0	0,01
40L	20	15.860,10	118,12	15.860,11	15.860,11	0,00	0,00	10	0,03
40L	30	44.888,70	1.058,85	44.888,72	44.888,72	0,00	0,00	10	0,14
40L	50	120.130,00	3.423,90	120.130,00	119.771,52	0,00	0,30	2	0,14
40T	20	6.690,35	68,35	6.690,35	6.690,35	0,00	0,00	10	0,03
40T	30	33.383,60	193,92	33.383,59	33.383,59	0,00	0,00	10	0,04
40T	50	106.719,00	197,61	106.718,69	106.718,69	0,00	0,00	10	0,08
50L	20	15.003,60	408,74	15.003,60	15.003,60	0,00	0,00	10	0,05
50L	30	43.682,50	7.041,48	43.682,47	43.475,57	0,00	0,47	4	0,37
50L	50	119.992,00	26.402,76	119.340,59	119.340,59	0,54	0,54	0	0,34
50T	20	8.338,91	187,39	8.338,91	8.338,91	0,00	0,00	10	0,05
50T	30	31.787,10	599,80	31.787,10	31.787,10	0,00	0,00	10	0,12
50T	50	105.523,00	649,68	105.523,00	105.523,00	0,00	0,00	10	0,19
75L	20	14.424,70	8.089,10	14.424,70	14.424,70	0,00	0,00	10	0,18
75L	30	44.670,00	31.517,34	43.985,90	43.985,90	1,53	1,53	0	1,12
75L	50	120.653,00	26.796,84	119.524,02	119.524,02	0,94	0,94	0	1,94
75T	20	1.144,13	1.951,32	1.144,13	1.144,13	0,00	0,00	10	0,17
75T	30	25.999,60	3.731,06	25.999,60	25.999,60	0,00	0,00	10	0,31
75T	50	99.186,30	2.456,42	99.186,30	99.186,30	0,00	0,00	10	0,48

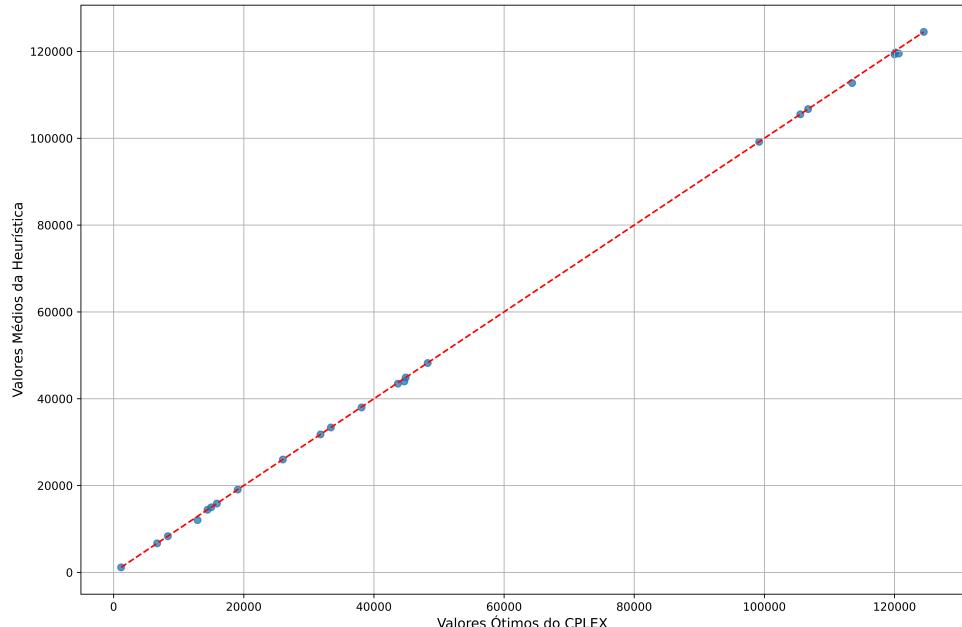
Fonte: Autor, 2024.

baixos valores para os *gaps* apontam que o Smart ILS é eficiente para resolver instâncias do problema, uma vez que conseguiu gerar soluções de boa qualidade, apresentando um valor da função objetivo muito próximo ou igual ao ótimo conhecido.

Entretanto, nota-se que em duas instâncias, 25T com receita 20 e 75L com receita 30, foram obtidos os valores mais altos para os *gaps*, iguais a 6,58% e 1,53%, respectivamente. Nestes casos, os valores de ambos os *gaps* foram coincidentes, demonstrando que mesmo aplicando múltiplas execuções, o algoritmo heurístico gerou a mesma solução em todas elas, o que implica em uma diferença constante em relação ao valor ótimo para essas instâncias.

A Figura 9 exibe um gráfico de dispersão que compara os valores médios encontrados pelo Smart ILS com os valores ótimos, obtidos com o CPLEX para as instâncias testadas. Nesse gráfico, os valores obtidos pelo CPLEX são representados no eixo X, enquanto os valores da heurística estão no eixo Y. A proximidade dos pontos ao gráfico da função identidade, mostram que os valores gerados pela heurística são bastante próximos aos valores ótimos do problema. Isso deixa evidente que o algoritmo heurístico proposto se mostrou eficaz em encontrar soluções que se aproximam da solução ótima para esse grupo de instâncias.

Figura 9 – Gráfico de dispersão entre os valores médios e valores ótimos



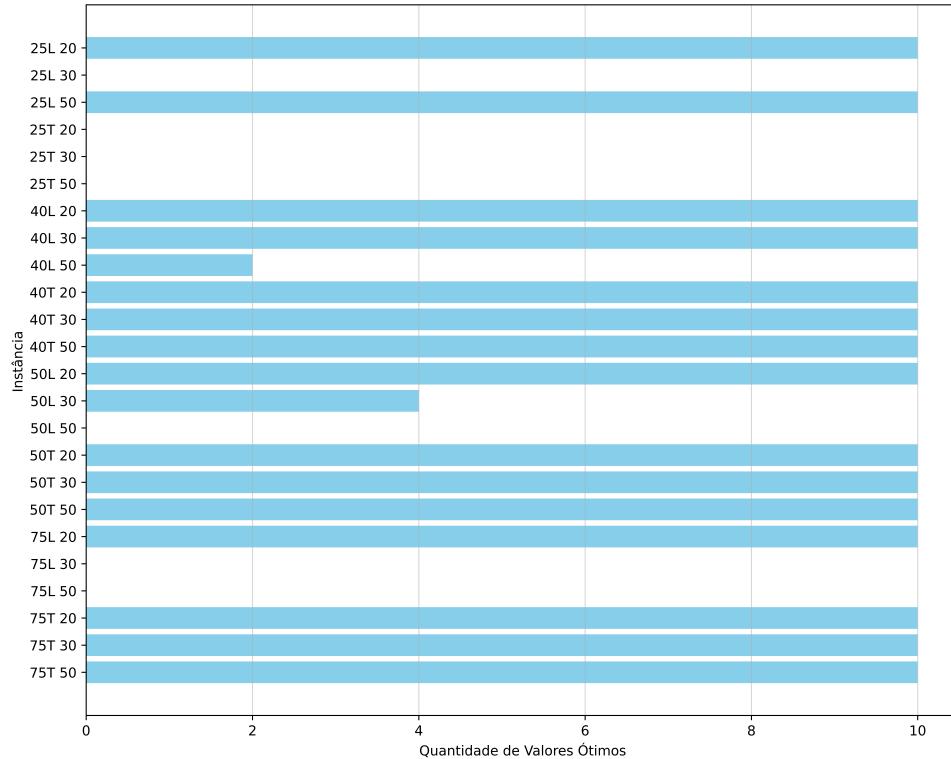
Fonte: Autor, 2024.

O gráfico da Figura 10 exibe a quantidade de valores ótimos obtidos pelo Smart ILS, dentre as dez execuções, para cada uma das instâncias. Veja que para 15 das 24 instâncias testadas, a quantidade de valores ótimos foi igual à quantidade de vezes que os testes foram executados, ou seja, para essas instâncias a heurística obteve a solução ótima do problema em todas as execuções.

Em quase todas as execuções com as instâncias que contém custo fixo de instalação de concentradores *tight* (T), a heurística atingiu o valor ótimo, exceto nas instâncias com 25 nós. Enquanto nas instâncias com custo *loose* (L), a quantidade de ótimos alcançados foi variada. Isso sugere que as instâncias AP com custo fixo L são mais difíceis para o problema abordado neste trabalho do que as instâncias com custo T.

Em relação aos tempos de processamento, observa-se na Tabela 4 que os tempos médios registrados pela Smart ILS foram baixos. Isso aponta que o algoritmo proposto é eficiente computacionalmente em relação ao tempo de resolução das instâncias, característica desejável em um algoritmo heurístico.

Figura 10 – Quantidade de valores ótimos obtidos pela heurística

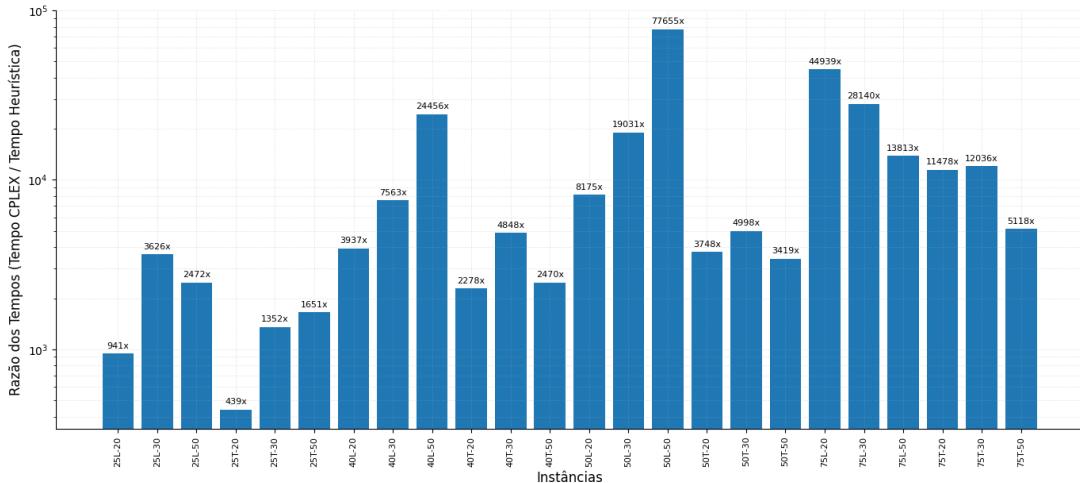


Fonte: Autor, 2024.

Como esperado, a eficiência computacional do Smart ILS também se destaca em comparação com o CPLEX. O tempo de processamento da heurística é expressivamente menor em todas as instâncias analisadas. Por exemplo, na instância *50L* com receita de 50, o algoritmo levou em média 0,34 segundos para encontrar uma solução, enquanto o CPLEX necessitou de 26.402,76 segundos. Essa diferença representa uma redução de mais de 77.000 vezes no tempo de processamento.

Essa diferença nos tempos de processamento entre as duas abordagens é evidenciada na Figura 11. Verifica-se que o CPLEX demanda um tempo significativamente maior, especialmente nas instâncias com maior número de nós e com receitas mais elevadas. Note que essa disparidade é mais acentuada em instâncias *loose*.

Figura 11 – Razão entre tempo CPLEX e tempo heurística



Fonte: Autor, 2024.

Os testes realizados nesta seção mostraram que a heurística manteve um desempenho consistente em diferentes cenários, fornecendo soluções de alta qualidade, com tempos de processamento significativamente menores em comparação com o CPLEX. Essa eficiência é particularmente relevante em instâncias de maior dimensão, onde o *solver* enfrenta limitações computacionais.

### 3.2.2 Experimento IV

O experimento IV foi executado, com o propósito de avaliar o desempenho computacional da heurística para instâncias maiores. Foram utilizadas instâncias AP com até 200 nós, considerando as mesmas configurações de parâmetros definidas no experimento III. Os testes computacionais foram projetados para verificar a escalabilidade do Smart ILS, uma vez que o uso do CPLEX se torna computacionalmente inviável conforme a quantidade de nós da rede aumenta.

Devido a limitações da máquina, a resolução do problema utilizando o CPLEX para instâncias com mais de 75 nós não foi possível. Isso deve-se ao alto consumo de memória e ao tempo de processamento excessivamente elevado exigido pelo *solver* para lidar com o aumento da dimensão das instâncias e a complexidade computacional inerente ao problema. Com o aumento do número de nós na rede, a quantidade de variáveis e restrições da formulação cresce demasiadamente, o que dificulta o processamento e a resolução pelo *solver*.

Dessa forma, os experimentos para instâncias com tamanhos 100, 125, 150 e 200, foram realizados exclusivamente com o Smart ILS. A Tabela 5 mostra o melhor valor (Melhor Valor) e o valor médio (Valor Médio), obtidos entre as dez execuções de cada instância. Em seguida, são reportados os concentradores instalados na rede da melhor solução encontrada pelo algoritmo (Concentradores) e os tempos médios (Tempo Médio

(s)).

Tabela 5 – Resultados obtidos pelo Smart ILS com as instâncias AP contendo de 100 a 200 nós

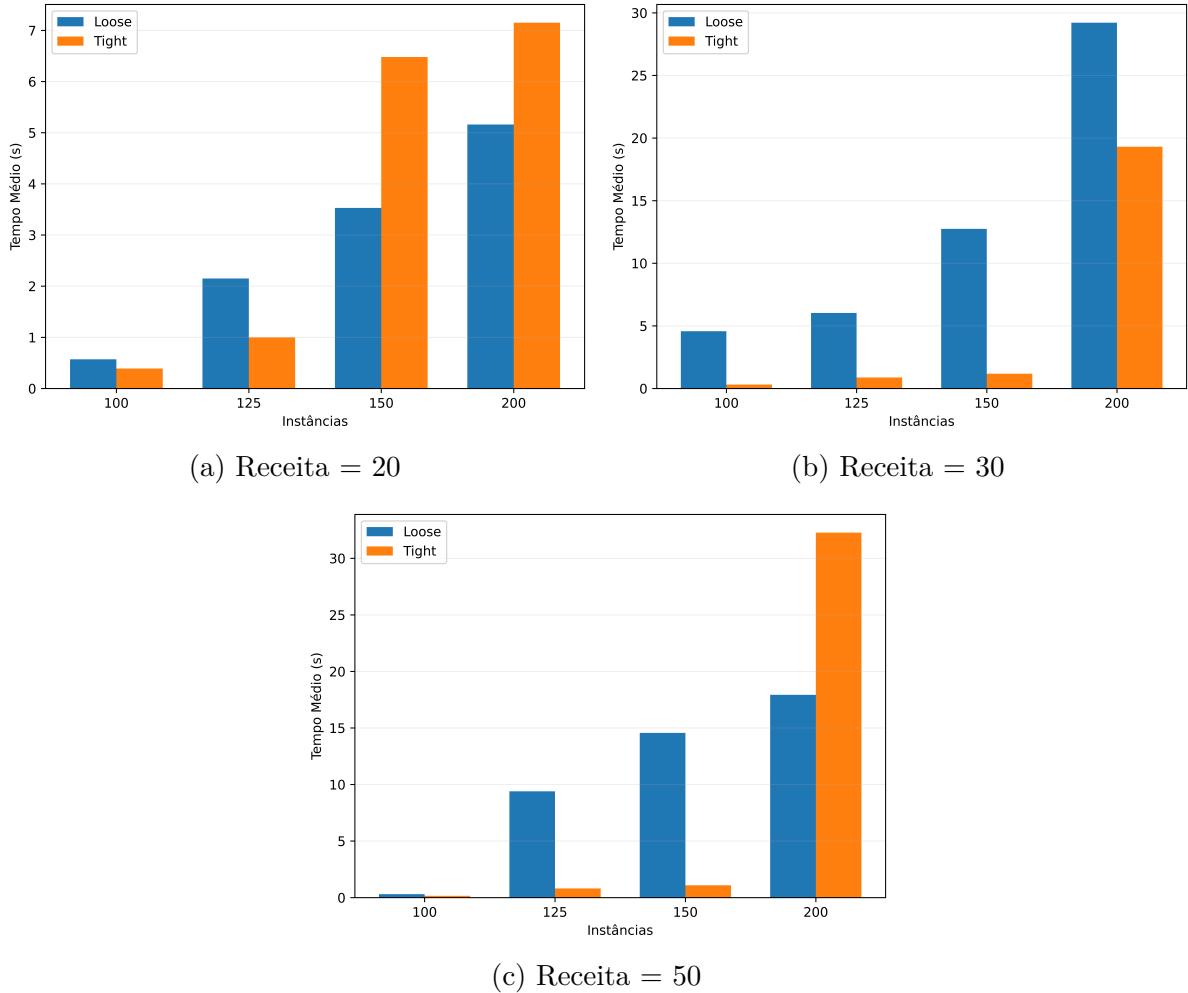
Instância	Receita	Melhor Valor	Valor Médio	Concentradores	Tempo Médio (s)
100L	20	13943,89	13943,89	71	0,57
100L	30	43052,07	43022,68	29, 52, 64, 70	4,57
100L	50	118102,64	118102,64	29, 52, 64, 70	0,30
100T	20	2116,57	2116,57	95	0,39
100T	30	25271,32	25271,32	53, 96	0,31
100T	50	98113,77	98113,77	6, 53, 96	0,16
125L	20	15135,19	15135,19	35, 79, 86	2,15
125L	30	45081,60	45081,60	34, 63, 79, 86	6,03
125L	50	120104,21	120104,21	34, 63, 79, 86	9,40
125T	20	7169,77	7169,77	85	1,00
125T	30	29586,11	29586,11	85	0,88
125T	50	93251,38	93251,38	85	0,81
150L	20	14540,77	14540,77	39, 82, 95, 102	3,53
150L	30	44168,96	44168,96	38, 81, 94, 101	12,75
150L	50	119329,25	119320,76	39, 82, 95, 102	14,56
150T	20	10936,81	10936,81	104, 128	6,48
150T	30	38294,30	38294,30	70, 104, 128	1,18
150T	50	111271,76	111271,76	39, 70, 104, 128	1,09
200L	20	13660,35	13660,35	148	5,16
200L	30	43253,98	43253,98	43, 113, 130, 160	29,21
200L	50	118304,70	118304,70	43, 95, 130, 160	17,93
200T	20	7392,64	7392,64	122, 186	7,15
200T	30	35317,26	35317,26	57, 113, 168, 186	19,31
200T	50	109676,37	109676,37	38, 69, 103, 127	32,27

Fonte: Autor, 2024.

Observa-se na Tabela 5 que os tempos médios gastos pelo Smart ILS crescem consideravelmente ao aumentar o tamanho da instância. Para as instâncias de 100 nós, os tempos médios variaram de 0,16 segundos, como em 100T com receita de 50, a 4,57 segundos, como em 100L com receita de 30, indicando uma execução rápida para redes menores. Já em instâncias de 200 nós, os tempos médios aumentaram significativamente, chegando a 32,27 segundos na instância 200T com receita de 50, que apresenta maior receita e complexidade.

A Figura 12 exibe os tempos médios de execução registrados pelo algoritmo Smart ILS, de acordo com três valores de receita considerados. Com as receitas 20 e 50, é possível observar que nas instâncias do tipo *Loose*, o tempo é maior do que nas instâncias do tipo *Tight*, nas redes com menor quantidade de nós. No entanto, à medida que a quantidade de nós aumenta, o tempo para encontrar soluções das instâncias do tipo *Tight* cresce de forma mais acentuada, superando o das instâncias do tipo *Loose*. Em contrapartida, para as instâncias com receita 30, observa-se que os maiores tempos computacionais foram gastos para resolver as instâncias do tipo *Loose*, em todos os quatro tamanhos de redes.

Figura 12 – Tempo médio por instância



Fonte: Autor, 2024.

Vale destacar ainda que não foram apresentados valores de *gaps* associados ao melhor valor e ao valor médio, obtidos com o Smart ILS, pois até onde se tem conhecimento, este é o primeiro trabalho a explorar o problema de localização de concentradores com maximização do lucro e conexões diretas, considerando esses tamanhos de instâncias. Logo, não há na literatura valores ótimos para realizar tal comparação e avaliar a qualidade das soluções obtidas nesses casos.

## 4 CONCLUSÃO

No presente trabalho, explorou-se o Problema de Localização de Concentradores com Maximização do Lucro e Conexões Diretas. Uma formulação matemática alternativa para o problema foi proposta e devido à complexidade computacional desse problema foi desenvolvido um algoritmo heurístico, *Smart Iterated Local Search* (Smart ILS), que explora o espaço de soluções por meio de perturbações em ótimos locais.

Os resultados obtidos a partir dos experimentos computacionais demonstraram a eficácia da formulação proposta. Os tempos computacionais registrados pelo CPLEX com ela foram menores do que os tempos registrados ao usar outra formulação da literatura ao resolver instâncias do conjunto de dados CAB. Foi possível observar que a permissão de conexões diretas na rede de concentradores tende a aumentar o valor do lucro, em relação às redes sem conexões diretas. Além disso, na maioria dos casos analisados, as configurações das redes obtidas em ambas as abordagens são bastante distintas, sendo mais acentuada quando são considerados menores valores para o fator de desconto constante nos arcos entre concentradores  $\alpha$ . Os tempos gastos para resolver as duas versões do problema também foram investigados. Em geral, os problemas com conexões diretas registraram menores tempos computacionais, com exceção dos casos em que  $\alpha$  assume menores valores.

O algoritmo heurístico proposto, utiliza o método *Random Variable Neighborhood Descent* (RVND) como procedimento de busca local. Esse procedimento realiza uma troca sistemática de estruturas de vizinhanças em uma ordem aleatória. Vários experimentos computacionais foram executados para avaliar a eficiência do algoritmo.

Os resultados com as instâncias CAB, mostraram que a heurística proposta foi capaz de obter soluções de boa qualidade para o problema em baixos tempos computacionais. Isso é evidenciado pelos pequenos valores dos *gaps* calculados. Para avaliar a escalabilidade do algoritmo, ele foi aplicado na resolução de instâncias do conjunto de dados AP contendo até 200 nós. Nesses casos, mesmo com o aumento da dimensão das instâncias, o algoritmo obteve uma boa performance, apresentando tempos computacionais viáveis.

De modo geral, os experimentos performados indicam que o uso da heurística é capaz de encontrar soluções próximas ao ótimo, mantendo um desempenho consistente com instâncias de grande escala. Além disso, a abordagem com conexão direta proporcionou melhores valores de lucro do que a versão sem conexão direta. Isso destaca a importância de considerar conexões diretas no projeto de uma rede de concentradores, contribuindo para a eficiência operacional da rede.

Como propostas de trabalhos futuros, esta pesquisa pode ser estendida, por exemplo, nas seguintes direções:

- (i) Desenvolvimento de um algoritmo híbrido, combinando a heurística proposta neste trabalho com um método exato.
- (ii) Incorporação de técnicas de aprendizado de máquina ao algoritmo heurístico

proposto, a fim de torná-lo mais eficiente na resolução de instâncias maiores do problema, sob o ponto de vista do lucro e com a permissão de conexões diretas.

## REFERÊNCIAS

- ALIBEYG, Armaghan; CONTRERAS, Ivan; FERNÁNDEZ, Elena. Exact solution of hub network design problems with profits. **European Journal of Operational Research**, Elsevier Science, p. 1–15, out. 2017.
- ALIBEYG, Armaghan; CONTRERAS, Ivan; FERNÁNDEZ, Elena. Hub network design problems with profits. **Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review**, Elsevier Science, v. 96, p. 40–59, dez. 2016.
- ALUMUR, S.; KARA, B. Y. A Hub Covering Network Design Problem for Cargo Applications in Turkey. **Journal of the Operational Research Society**, Palgrave Publishers Ltd., v. 60, p. 1349–1359, 10 out. 2009.
- ARENALES, M.; ARMENTANO, V. A.; MORABITO, R.; YANASSE, H. H. **Pesquisa operacional**. Rio de Janeiro: Elsevier Brasil, 2006. ISBN 9788535251937.
- BOLLAPRAGADA, Ramesh; LI, Yanjun; RAO, Uday S. Budget-Constrained, Capacitated Hub Location to Maximize Expected Demand Coverage in Fixed-Wireless Telecommunication Networks. **INFORMS Journal on Computing**, Operations Research Society of America, v. 18, p. 422–432, 4 nov. 2006.
- CALIK, Hatice; ALUMUR, Sibel A.; KARA, Bahar Y.; KARASAN, Oya E. A tabu-search based heuristic for the hub covering problem over incomplete hub networks. **Computers and Operations Research**, Elsevier Science, v. 36, p. 3088–3096, 12 2009.
- CAMARGO, R.S.; MIRANDA, G. Single allocation hub location problem under congestion: Network owner and user perspectives. **Expert Systems with Applications**, Elsevier Science, v. 39, p. 3385–3391, 3 2012.
- CAMARGO, Ricardo S.; DE MIRANDA JR, Gilberto; O'KELLY, Morton E.; CAMPBELL, James F. Formulations and Decomposition Methods for the Incomplete Hub Location Network Design Problem With and Without Hop-Constraints. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier Science, v. 51, p. 274–301, 51 jul. 2017.
- CAMPBELL, J. F.; O'KELLY, M. E. Twenty-Five Years of Hub Location Research. **Transportation Science**, INFORMS, v. 46, p. 153–169, 2 mai. 2012.

- CARELLO, G.; CROCE, F. D.; GHIRARDI, M.; TADEI, R. Solving the Hub location problem in telecommunication network design: A local search approach. **Networks**, John Wiley e Sons, v. 44, p. 94–105, 2 2004.
- ÇETINER, S.; SEPIL, C.; SÜRAL, H. Hubbing and routing in postal delivery systems. **Annals of Operations Research**, Springer US, v. 181, p. 109–124, 1 dez. 2010.
- CONTRERAS, Ivan. Hub Location Problems. In: LAPORTE, Gilbert; NICKEL, Stefan; SALDANHA DA GAMA, Francisco (Ed.). **Location Science**. [S.l.]: Springer International Publishing, 2015. P. 311–344.
- CONTRERAS, Ivan; CORDEAU, Jean-François; LAPORTE, Gilbert. Benders Decomposition for Large-Scale Uncapacitated Hub Location. **Operations Research**, INFORMS, v. 59, p. 1477–1490, 6 dez. 2011.
- CONTRERAS, Ivan; FERNÁNDEZ ELENA; MARÍN, Alfredo. Tight bounds from a path based formulation for the tree of hub location problem. **Computers and Operations Research**, Elsevier Science, v. 36, p. 3117–3127, 12 2009.
- DAI, Weibin; ZHANG, Jun; SUN, Xiaoqian; WANDELT, Sebastian. HUBBI: Iterative network design for incomplete hub location problems. **Computers and Operations Research**, v. 104, p. 394–414, 2019.
- DAVARI, S.; ZARANDI, M. H. F.; TURKSEN, I. B. The incomplete hub-covering location problem considering imprecise location of demands. **Scientia Iranica**, Elsevier Science, v. 20, p. 983–991, 3 2013.
- ERNST, Andreas T.; KRISHNAMOORTHY, Mohan. Efficient algorithms for the uncapacitated single allocation p-hub median problem. **Location Science**, Elsevier Science, v. 4, p. 139–154, 3 1996.
- FARAHANI, Reza Zanjirani; HEKMATFAR, Masoud; ARABANI, Alireza Boloori; NIKBAKHSH, Ehsan. Hub location problems: A review of models, classification, solution techniques, and applications. **Computers and Industrial Engineering**, Elsevier Science, v. 64, p. 1096–1109, 4 abr. 2013.
- FAZEL ZARANDI, Mohammad Hossein; DAVARI, Soheil; HADDAD SISAKHT, Ali. An empirical comparison of simulated annealing and iterated local search for the hierarchical

single allocation hub median location problem. **Scientia Iranica**, Sharif University of Technology, v. 22, n. 3, p. 1203–1217, 2015. ISSN 1026-3098.

FLOYD, Robert W. Algorithm 97: Shortest path. **Communications of the ACM**, Association for Computing Machinery, v. 5, p. 345, 6 jun. 1962.

GHAFFARINASAB, Nader. A highly efficient exact algorithm for the uncapacitated multiple allocation p-hub center problem. **Decision Science Letters**, v. 9, p. 181–192, 2020.

HANSEN, P.; MLADENOVIĆ, N.; TODOSIJEVIĆ, R.; HANAFI, S. Variable neighborhood search: basics and variants. **EURO Journal of Computational Optimization**, v. 5, p. 423–454, 2017.

HOFF, Arild; PEIRÓ, Juanjo; CORBERÁN, Ángel; MARTÍ, Rafael. Heuristics for the capacitated modular hub location problem. **Computers and Operations Research**, v. 86, p. 94–109, 2017. ISSN 0305-0548.

JAILLET, P.; SONG, G.; YU, G. Airline network design and hub location problems. **Location Science**, Elsevier Science, v. 4, p. 195–212, 3 1996.

KIM, H.; O'KELLY, M. E. Reliable p-Hub Location Problems in Telecommunication Networks. **Geographical Analysis**, John Wiley & Sons, v. 41, p. 283–306, 3 2009.

KUBY, Michael J.; GRAY, Robert Gordon. The hub network design problem with stopovers and feeders: The case of Federal Express. **Transportation Research Part A: Policy and Practice**, Elsevier Science, v. 27, p. 1–12, 1 jan. 1993.

LIN, Cheng Chang; LIN, Jr Yung; CHEN, Yin Chieh. The capacitated p-hub median problem with integral constraints: An application to a Chinese air cargo network. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier Science, v. 36, p. 2777–2787, 6 2012.

LOURENÇO, H.R.; MARTIN, O.C.; STÜTZLE, T. Iterated Local Search. In: GLOVER, F.; KOCHENBERGER, G.A. (Ed.). **Handbook of Metaheuristics**. Boston, MA: International Series in Operations Research & Management Science, 2003. v. 57. P. 321–353.

MARTINS DE SÁ, Elisangela; MORABITO, Reinaldo; CAMARGO, Ricardo Saraiva de. Benders decomposition applied to a robust multiple allocation incomplete hub location

problem. **Computers and Operations Research**, Elsevier Science, v. 89, p. 31–50, 2018.

O'KELLY, Morton E. A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities. **European journal of operational research**, Elsevier, v. 32, n. 3, p. 393–404, 1987.

O'KELLY, Morton E.; MILLER, Harvey J. The hub network design problem. **Journal of Transport Geography**, Elsevier Science, v. 2, p. 31–40, 1 mar. 1994.

OLIVEIRA, Fabricio Alves; SÁ, Elisangela Martins de; SOUZA, Sérgio Ricardo de. Benders decomposition applied to profit maximizing hub location problem with incomplete hub network. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 142, p. 105715, 2022.

OLIVEIRA, Fabricio Alves; SÁ, Elisangela Martins de; SOUZA, Sérgio Ricardo de; SOUZA, Marcone Jamilson Freitas. ILS-based algorithms for the profit maximizing uncapacitated hub network design problem with multiple allocation. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 157, p. 106252, 2023.

REINSMA, J. A.; PENNA, P. H. V.; SOUZA, M. J. F. Um algoritmo simples e eficiente para resolução do problema do caixeiro viajante generalizado (in Portuguese). In: ANAIS do 50º Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional. Rio de Janeiro, Brazil: Galoá, 2018. Available at <https://proceedings.science/sbpo/papers/um-algoritmo-simples-e-eficiente-para-resolucao-do-problema-do-caixeiro-viajante-generalizado>.

RIBEIRO, C. C. **Metaheuristics and Applications**. Estoril, Portugal: Advanced School on Artificial Intelligence, 1996.

RODRÍGUEZ-MARTÍ, Inmaculada; SALAZAR-GONZÁLEZ, Juan-José; YAMAN, Hande. A branch-and-cut algorithm for the hub location and routing problem. **Computers and Operations Research**, v. 50, p. 161–174, 2014.

RODRÍGUEZ-MARTÍN, Inmaculada; SALAZAR-GONZÁLEZ, Juan-José. An Iterated Local Search Heuristic for a Capacitated Hub Location Problem. In: LAPORTE, Gilbert; NICKEL, Stefan; SALDANHA DA GAMA, Francisco (Ed.). **Hybrid Metaheuristics**. [S.l.]: Springer, 2006. P. 70–81.

SHANG, Xiaoting; YANG, Kai; JIA, Bin; GAO, Ziyou; JI, Hao. Heuristic algorithms for the bi-objective hierarchical multimodal hub location problem in cargo delivery systems. **Applied Mathematical Modelling**, v. 91, p. 412–437, 2021. ISSN 0307-904X.

SOUZA, M. J. F. **Inteligência Computacional para Otimização: meta-heurísticas**. Ouro Preto, Minas Gerais: [s.n.], 2024. Disponível em: <http://www.decom.ufop.br/prof/marcone/Disciplinas/InteligenciaComputacional/InteligenciaComputacional.pdf>. Acesso em: 30 nov. 2024.

SOUZA, M.J.F.; COELHO, I.M.; RIBAS, S.; SANTOS, H.G.; MERSCHMANN, L.H.C. A hybrid heuristic algorithm for the open-pit-mining operational planning problem. **European Journal of Operational Research**, v. 207, n. 2, p. 1041–1051, 2010.

SUBRAMANIAN, A.; DRUMMOND, L.M.A.; BENTES, C.; OCHI, L.S.; FARIA, R. A parallel heuristic for the Vehicle Routing Problem with Simultaneous Pickup and Delivery. **Computers & Operations Research**, v. 37, n. 11, p. 1899–1911, 2010. Metaheuristics for Logistics and Vehicle Routing.

TAHERKHANI, G.; ALUMUR, S. A. Profit Maximizing Hub Location Problems. **Omega**, Elsevier Science, v. 86, p. 1–15, 2018.

TAHERKHANI, G.; ALUMUR, S. A.; HOSSEINI, Seyed Mojtaba. Benders Decomposition for the Profit Maximizing Capacitated Hub Location Problem with Multiple Demand Classes. **Transportation Science**, v. 54, p. 1446–1470, 6 2020.

TAN, P. Z.; KARA, B. Y. A hub covering model for cargo delivery systems. **Networks**, John Wiley & Sons, v. 49, p. 28–39, 1 2007.

WAZLAWICK, Raul Sidnei. **Metodologia de Pesquisa para Ciência da Computação**. [S.l.]: GEN LTC, 2020. ISBN 9788595151093.

WIEBERNEIT, Nicole. Service network design for freight transportation: a review. **OR Spectrum**, Springer, v. 30, p. 77–112, 1 jan. 2008.

YAMAN, H. Allocation strategies in hub networks. **European Journal of Operational Research**, Elsevier Science, v. 211, p. 442–451, 3 2011.

ZHANG, Chunxiao; SUN, Xiaoqian; DAI, Weibin; WANDELT, Sebastian. Solving Hub Location Problems With Profits Using Variable Neighborhood Search. **Transportation**

**Research Record**, SAGE Publications Sage CA: Los Angeles, CA, v. 2677, n. 1, p. 1675–1695, 2023.