

Phương pháp lặp dây đen

1. Nội dung phương pháp:

Từ $Ax = b \Leftrightarrow x = Bx + \beta$

Điều kiện: $\|B\|_p \leq q < 1$, với $p = 1, 2, \infty$

Sau đó, từ $x = Bx + \beta \Leftrightarrow x = \underline{B}x + \overline{B}x + \beta$

Trong đó: \underline{B} là ma trận tam giác dưới, \overline{B} là ma trận tam giác trên

Thỏa mãn: $\underline{B} + \overline{B} = B$

Công thức lặp: $X^{(n+1)} = \underline{B}X^{(n+1)} + \overline{B}X^{(n)} + \beta$

Với $X^{(0)}$ tùy ý, thường chọn $X^{(0)} = \beta$

Sai số:

Công thức sai số 1: $\|X^{(n+1)} - X^*\| \leq \frac{\|B\|_p^{(n+1)}}{1 - \|B\|_p} \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_p$

Công thức sai số 2: $\|X^{(n+1)} - X^*\| \leq \frac{\|B\|_p}{1 - \|B\|_p} \|X^{(n+1)} - X^{(n)}\|_p$

2. Ví dụ:

Ví dụ 1: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + x_3 = 7.5 \\ -3x_1 + 10x_2 - x_3 = 9 \\ -x_1 + 2x_2 + 8x_3 = -2.5 \end{cases} \quad (I)$$

Cho trước $X^{(0)} = [0, 0, 0]^T$, tìm nghiệm xấp xỉ của hệ phương trình trên sau 5 bước lặp và đánh giá sai số với nghiệm đúng $X^* = [0.5, 1, -0.5]^T$.

Giải:

...

$$(I) \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -0.3x_2 - 0.1x_3 + 0.75 \\ x_2 = 0.3x_1 + 0.1x_3 + 0.9 \\ x_3 = 0.125x_1 - 0.25x_2 - 0.3125 \end{cases}$$

Ta có $B = \begin{bmatrix} 0 & -0.3 & -0.1 \\ 0.3 & 0 & 0.1 \\ 0.125 & -0.25 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \|B\|_\infty = 0.4$

$$= \underline{B} + \overline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 \\ 0.125 & -0.25 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0.3 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Đặt: $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.9 \\ 0.3125 \end{bmatrix}$

Công thức lặp: $X^{(n+1)} = \underline{B}X^{(n+1)} + \overline{B}X^{(n)} + \beta$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1^{(n+1)} = -0.3x_2^{(n)} - 0.1x_3^{(n)} + 0.75 \\ x_2^{(n+1)} = 0.3x_1^{(n+1)} + 0.1x_3^{(n)} + 0.9 \\ x_3^{(n+1)} = 0.125x_1^{(n+1)} - 0.25x_2^{(n+1)} - 0.3125 \end{cases}$$

Bảng kết quả:

n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$x_3^{(n)}$
0	0	0	0
1	0.75	1.125	-0.5
2	0.4625	0.98875	-0.501875
3	0.50356	1.00088	-0.49978
4	0.49971	0.99994	-0.50002
5	0.50002	1	-0.5

Bấm máy:

Chỗ nào có x_1 thì ta thay bằng X, thay x_2 bằng Y và thay x_3 bằng A

- *Xóa bộ nhớ: Shift 9 3 = =*

- *Lập công thức tính:*

$$X = -0.3 \times Y - 0.1 \times A + 0.75 : Y = 0.3 \times X + 0.1 \times A + 0.9 : A = 0.125 \times X - 0.25 \times Y - 0.3125$$

- *Máy tính hỏi Y và A thì ta tiến hành nhập dữ liệu vào.*
- *Viết kết quả vào bảng dữ liệu.*

Đánh giá sai số:

$$\|X^{(5)} - X^*\| \leq \frac{0.4^5}{1 - 0.4} \times 1.125 = 0.0192$$

$$\|X^{(5)} - X^*\| \leq \frac{0.4}{1 - 0.4} \times 3 \times 10^{-4} = 0.0002$$

3. Bài tập:

Bài tập 1: Dùng phương pháp lặp dây đen tìm nghiệm gần đúng $x^{(4)}$ của hệ

phương trình sau:
$$\begin{cases} 4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 = 8 \\ 0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 = 9 \\ 0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$$

Bài tập 2: Dùng phương pháp lặp dây đen tìm nghiệm gần đúng $x^{(4)}$ của hệ

phương trình sau:
$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$$