

# Tính gần đúng phương trình vi phân –

## Chương 6

### 1. Giải gần đúng phương trình vi phân cấp 1

#### 1.1. Sử dụng phương pháp khai triển Taylor:

Ta có dạng khai triển dãy Taylor của 1 hàm số:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \dots$$

**Ví dụ 1:** Giải gần đúng phương trình vi phân sau bằng phương pháp chuỗi Taylor, tính đến đạo hàm cấp 3 trên lân cận của  $x = 1$ :

$$\begin{cases} y' = 3xy - x + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

*Giải:*

Khai triển chuỗi Taylor đến bậc 3 của hàm  $y = f(x)$  là:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3$$

Với  $x_0 = 0$ , và  $y(x_0) = y(0) = 1$

Từ đó ta có:  $y'(0) = 3 \times 0 \times 1 - 0 + 1 = 1$

$y''(0) = [y'(0)]' = 3y + 3 \times x \times y' - 1 = 3 \times 1 + 3 \times 0 \times 1 - 1 = 2$

$y'''(0) = [y''(0)]' = 3y' + 3y' + 3xy'' = 3 \times 1 + 3 \times 1 + 3 \times 0 \times 2 = 6$

Thay các hệ số tương ứng vào khai triển của chuỗi Taylor trên, ta được:

$$y(x) = 1 + x + x^2 + x^3.$$

Đề bài có thể yêu cầu tính thêm  $y(1.5)$  chẳng hạn thì ta thay 1.5 vào  $y(x)$

$$y(1.5) \approx 1 + 1.5 + 1.5^2 + 1.5^3 \approx 8.125.$$

## 1.2. Sử dụng phương pháp Euler (Ô - le):

**Ví dụ 2:** Cho phương trình vi phân cấp 1:

$$\begin{cases} y' = \frac{xy}{2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Hãy tìm nghiệm gần đúng của phương trình trên bằng phương pháp Ô-le trên đoạn  $[0, 1]$ , với  $h = 0.1$ .

*Giải:*

$$\text{Ta có } h = \frac{x-x_0}{n} \rightarrow n = \frac{x-x_0}{h} = \frac{1-0}{0.1} = 10$$

$$x_i = x_0 + h \times i = 0.1 \times i, \forall i = \overline{0,10}$$

Theo công thức Euler, ta có:

$$y_{i+1} = y_i + h \times f(x_i, y_i) = y_i + 0.1 \times \frac{x_i y_i}{2}, \text{ với } y_0 = 1.$$

Bảng kết quả:

i	$x_i$	$y_i$
0	0	1
1	0.1	1
2	0.2	1.005
3	0.3	1.01505
4	0.4	1.03028
5	0.5	1.05088
6	0.6	1.07715
7	0.7	1.10947
8	0.8	1.14829
9	0.9	1.19423
10	1	1.24797

*Bấm máy:*

- Xóa bộ nhớ máy tính: Shift 9 3 = =
- Gán giá trị  $y_0 = 1$  cho biến Y: 1 Shift STO Y
- Bấm AC để lưu dữ liệu.
- Lập công thức:

$$Y = Y + 0.1 \times \frac{X \times Y}{2}; X = X + 0.1$$

- Bấm CALC để thực hiện lệnh (Lưu ý X khi khởi tạo).

## 2. Giải gần đúng hệ phương trình vi phân cấp 1:

**Ví dụ 3:** Giải gần đúng hệ phương trình vi phân:

$$\begin{cases} y' = (z - y)x \\ z' = (z + y)x' \end{cases}$$

Với điều kiện ban đầu  $y(0) = 1, z(0) = 1$  bằng phương pháp Ô-le trên  $[0, 1]$ , chọn  $h = 0.1$

*Giải:*

$$\text{Ta có } n = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1 - 0}{0.1} = 10$$

$$\text{Với } h = 0.1 \Rightarrow x_i = x_0 + h \times i = 0.1 \times i, \forall i = \overline{0, 10}$$

Áp dụng công thức Euler, ta có:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h \times f(x_i, y_i, z_i) = y_i + 0.1 \times (z_i - y_i) \times x_i \\ z_{i+1} = z_i + h \times g(x_i, y_i, z_i) = z_i + 0.1 \times (z_i + y_i) \times x_i \end{cases}$$

Bảng kết quả tính toán:

i	$x_i$	$y_i$	$z_i$
0	0	1	1
1	0.1	1	1
2	0.2	1	1.02

3	0.3	1.0004	1.0604
4	0.4	1.0022	1.1222
5	0.5	1.0070	1.2072
6	0.6	1.0170	1.3179
7	0.7	1.0351	1.4580
8	0.8	1.0647	1.6325
9	0.9	1.1101	1.8482
10	1	1.1765	2.1146

**Bấm máy:**

- Xóa bộ nhớ máy tính: Shift 9 3 = =
- Gán giá trị ban đầu cho  $y_0$  và  $z_0$  (Lưu ý:  $f(X, Y, Z)$  thì ta dùng  $f(X, Y, A)$ )

1 Shift STO Y

1 Shift STO A

- Lập công thức:

$$B = Y + 0.1 \times (A - Y) \times X : C = A + 0.1 \times (A + Y) \times X : Y = B : A = C : X = X + 0.1$$

- Bấm CALC để thực hiện lệnh (Lưu ý X khi khởi tạo)

**Bài tập 1:** Giải gần đúng phương trình vi phân sau bằng phương pháp chuỗi Taylor, tính đến đạo hàm cấp 3 trên lân cận của  $x = 2$ :

$$\begin{cases} y' - xy + x^3 = 0 \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

**Bài tập 2:** Cho phương trình vi phân cấp 1:

$$y' - x^3 + \frac{x}{y} = 0, \text{ với } y(1) = 0.$$

Hãy tìm nghiệm gần đúng của phương trình trên bằng phương pháp Ô-le trên đoạn  $[1, 2]$ , với  $h = 0.2$ .

Kết quả:

<b>i</b>	<b>x<sub>i</sub></b>	<b>y<sub>i</sub></b>
0	1	0
1	1.2	0.2
2	1.4	0.5123
3	1.6	0.9879
4	1.8	1.6836
5	2	2.6629

**Bài tập 3:** Giải gần đúng hệ phương trình vi phân:

$$\begin{cases} y' = zx \\ z' = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Với điều kiện ban đầu  $y(1) = 2, z(1) = 1$  bằng phương pháp O-le trên  $[1, 1.3]$ , chọn  $h = 0.1$ .

### 3. Giải gần đúng phương trình vi phân cấp 2

**Ví dụ 4:**

a) Giải gần đúng phương trình vi phân sau:  $\begin{cases} y'' - e^x y' + 2y = 1 \\ y(3) = -2; y'(3) = 0 \end{cases}$  (I)

Trên đoạn  $[3, 4]$  và chọn  $h = 0.2$ .

b) Từ đó tính gần đúng  $y(4)$  và  $y'(4)$ .

*Giải:*

a) Từ (I)  $\Leftrightarrow \begin{cases} y'' = e^x y' - 2y + 1 \\ y(3) = -2; y'(3) = 0 \end{cases}$

Đặt  $y' = z \rightarrow \begin{cases} z' = e^x z - 2y + 1 \\ y' = z \end{cases}$ , thỏa mãn  $y(3) = -2; z(3) = 0$

Ta có  $x_0 = 3; h = 0.2; y_0 = -2; z_0 = 0 \rightarrow x_i = x_0 + hi = 3 + 0.2i, \forall i = 0..5$

Theo công thức Euler, ta có: 
$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + 0.2z_i \\ z_{i+1} = z_i + 0.2(e^{x_i}z_i - 2y_i + 1) \end{cases}$$

Bảng kết quả:

i	x	y	z=y'
0	3	-2	0
1	3.2	-2	1
2	3.4	-1.8	6.9065
3	3.6	-0.4187	49.2159
4	3.8	9.4245	409.8268
5	4	91.3899	4070.2060

*Bấm máy:*

- Xóa bộ nhớ: Shift 9 3 = =
- Lập công thức:

$$B = Y + 0.2 \times A : C = A + 0.2 \times (e^X \times A - 2 \times Y + 1) :$$

$$Y = B : A = C : X = X + 0.2$$

- Bấm CALC để nhập các giá trị khởi tạo ban đầu cho biến Y, A và X
- Ghi lại kết quả vào bảng giá trị.

b) Từ bảng giá trị trên ta có:  $y(4) \approx 91.3899$ ;  $y'(4) \approx 4070.2060$ .

**Bài tập 4:** Cho phương trình vi phân cấp 2:

$$y'' - y' + 3e^x y = 0; \text{ với } y(0) = 0; y'(0) = 0.34$$

hãy tìm nghiệm gần đúng của phương trình vi phân trên bằng phương pháp Euler trên đoạn  $[0, 0.5]$ , chọn  $h = 0.1$ .