

Các quy tắc tính sai số - Chương 1

Ví dụ 1: Cho hàm số hai biến số: $S = a - 3b + 5c$ và $P = 3a^2b^2c$. Tính gần đúng S , P và tính các sai số Δ_S , δ_S , Δ_P , δ_P khi biết $a = 1.2 \pm 0.03$; $b = 3.56 \pm 0.02$ và $c = 1.3 \pm 0.002$.

Giải:

Ta có:

- $a = 1.2 \pm 0.03$ nên $a \approx 1.2$ và $\Delta_a = 0.03$
- $b = 3.56 \pm 0.02$ nên $b \approx 3.56$ và $\Delta_b = 0.02$
- $c = 1.3 \pm 0.002$ nên $c \approx 1.3$ và $\Delta_c = 0.002$

Tính gần đúng:

- $S = a - 3b + 5c \approx 1.2 - 3 \times 3.56 + 5 \times 1.3 \approx -2.98$
- $P = 3a^2b^2c \approx 3 \times 1.2^2 \times 3.56^2 \times 1.3 \approx 71.1749$

Xác định các sai số tuyệt đối giới hạn:

$$\begin{aligned}\Delta_S &= |S'_a| \times \Delta_a + |S'_b| \times \Delta_b + |S'_c| \times \Delta_c = \Delta_a + 3\Delta_b + 5\Delta_c \\ &= 0.03 + 3 \times 0.02 + 5 \times 0.002 = 0.1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_P &= |P'_a| \times \Delta_a + |P'_b| \times \Delta_b + |P'_c| \times \Delta_c = 6ab^2c\Delta_a + 6a^2bc\Delta_b + 3a^2b^2\Delta_c \\ &\approx 3.6734\end{aligned}$$

Xác định các sai số tương đối giới hạn:

$$\begin{aligned}\delta_S &= \frac{\Delta_S}{|S|} = \frac{0.1}{2.98} \approx 0.0336 \\ \delta_P &= \frac{\Delta_P}{|P|} = \frac{3.6734}{71.1749} \approx 0.0516\end{aligned}$$

Ví dụ 2: Cho hàm số $u = \ln(x_1 + x_2^2)$. Hãy xác định giá trị của u tại $x_1 = 0.97$; $x_2 = 1.132$ và sai số tuyệt đối giới hạn Δ_u , sai số tương đối giới hạn δ_u . Biết mọi chữ số có nghĩa của x_1 và x_2 đều là chữ số đáng tin.

Giải:

Vì mọi chữ số có nghĩa của x_1 và x_2 đều là chữ số đáng tin nên ta có:

$$x_1 = 0.97 \rightarrow \Delta_{x_1} = 0.5 \times 10^{-2} = 0.005$$

$$x_2 = 1.132 \rightarrow \Delta_{x_2} = 0.5 \times 10^{-3} = 0.0005$$

Ta có:

$$u'_{x_1} = \frac{1}{x_1 + x_2^2}; u'_{x_2} = \frac{2x_2}{x_1 + x_2^2}$$

$$\text{Và: } \Delta_u = |u'_{x_1}| \Delta_{x_1} + |u'_{x_2}| \Delta_{x_2} = \left| \frac{1}{x_1 + x_2^2} \right| \Delta_{x_1} + \left| \frac{2x_2}{x_1 + x_2^2} \right| \Delta_{x_2} \approx 0.002724$$

$$u = \ln(0.97 + 1.132^2) \approx 0.81156$$

$$\rightarrow \delta_u = \frac{\Delta_u}{|u|} = \frac{0.002724}{0.81156} \approx 0.003356$$

Bài tập 1: Cho hàm số hai biến số $u = x^y$. Tính gần đúng u và tính các sai số Δ_u , δ_u tại $x = 5 \pm 0.1$; $y = 2 \pm 0.08$.

Bài tập 2: Cho hình trụ với bán kính đáy $R = 0.55$ m, chiều cao $H = 1.13$ m. Biết các chữ số của R , H đều là các chữ số đáng tin. Hãy tìm sai số tuyệt đối giới hạn Δ_S và sai số tương đối giới hạn δ_S của diện tích toàn phần S của hình trụ đó. Lấy $\pi = 3.14$. Biết $S = 2\pi R(R + H)$.