

Đa thức nội suy

Và phương pháp bình phương bé nhất

Chương 4

1) Đa thức nội suy Lagrange:

Ví dụ 1: Cho bảng giá trị của hàm số $y = f(x)$:

| | | | | | | | | |
|---|---------|-----------|---------|-----------|---------|-----------|---------|-----------|
| x | 321 | (x_0) | 322.8 | (x_1) | 324.2 | (x_2) | 325 | (x_3) |
| y | 2.50651 | (y_0) | 2.50893 | (y_1) | 2.51081 | (y_2) | 2.51188 | (y_3) |

Tính gần đúng $f(323.5)$ bằng đa thức nội suy Lagrange.

Giải:

Có 4 nút nội suy ($n = 3$) \Rightarrow Đa thức nội suy Lagrange của hàm $f(x)$ là:

$$\begin{aligned}
 L_3(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 \\
 &+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3 \\
 &= \frac{(x - 322.8)(x - 324.2)(x - 325)}{(321 - 322.8)(321 - 324.2)(321 - 325)} 2.50651 \\
 &+ \frac{(x - 321)(x - 324.2)(x - 325)}{(322.8 - 321)(322.8 - 324.2)(322.8 - 325)} 2.50893 \\
 &+ \frac{(x - 321)(x - 322.8)(x - 325)}{(324.2 - 321)(324.2 - 322.8)(324.2 - 325)} 2.51081 \\
 &+ \frac{(x - 321)(x - 322.8)(x - 324.2)}{(325 - 321)(325 - 322.8)(325 - 324.2)} 2.51188 \\
 &\approx -0.10879(x - 322.8)(x - 324.2)(x - 325)
 \end{aligned}$$

$$+0.45255(x - 321)(x - 324.2)(x - 325)$$

$$-0.70056(x - 321)(x - 322.8)(x - 325)$$

$$+0.35680(x - 321)(x - 322.8)(x - 324.2)$$

$$f(323.5) \approx L_3(323.5) \approx -0.10879(323.5 - 322.8)(323.5 - 324.2)(323.5 - 325)$$

$$+0.45255(323.5 - 321)(323.5 - 324.2)(323.5 - 325)$$

$$-0.70056(323.5 - 321)(323.5 - 322.8)(323.5 - 325)$$

$$+0.35680(323.5 - 321)(323.5 - 322.8)(323.5 - 324.2)$$

$$\approx -0.07996 + 1.18794 + 1.83897 - 0.43708$$

$$\approx 2.50987$$

2) Đa thức nội suy Newton – không cách đều:

Ví dụ 2: Cho bảng giá trị của hàm số $y = f(x)$ như sau:

| | | | | | |
|---|----|----|----|-----|------|
| x | -1 | 0 | 3 | 6 | 7 |
| y | 3 | -6 | 39 | 822 | 1611 |

a) Xây dựng đa thức nội suy Newton từ nút $x_0 = -1$.

b) Tính gần đúng $f(-0.25)$ bằng đa thức nội suy tìm được ở trên.

Giải:

a) Có 5 nút nội suy, ta có:

$$P_4(x) = y_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]$$

$$+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x_3]$$

$$+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$$

Ta lập bảng:

| i | x_i | y_i | Tỷ hiệu cấp 1 | Tỷ hiệu cấp 2 | Tỷ hiệu cấp 3 | Tỷ hiệu cấp 4 |
|---|-------|-------|----------------------------------|----------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 0 | -1 | 3 | | | | |
| | | | $\frac{-6 - (3)}{0 - (-1)} = -9$ | | | |
| 1 | 0 | -6 | | $\frac{15 - (-9)}{3 - (-1)} = 6$ | | |
| | | | 15 | | $\frac{41 - 6}{6 - (-1)} = 5$ | |
| 2 | 3 | 39 | | 41 | | $\frac{13 - 5}{7 - (-1)} = 1$ |
| | | | 261 | | 13 | |
| 3 | 6 | 822 | | 132 | | |
| | | | 789 | | | |
| 4 | 7 | 1611 | | | | |

Đa thức cần tìm là:

$$P_4(x) = 3$$

$$+ [x - (-1)] \times (-9)$$

$$+ [x - (-1)] \times (x - 0) \times 6$$

$$+ [x - (-1)] \times (x - 0) \times (x - 3) \times 5$$

$$+ [x - (-1)] \times (x - 0) \times (x - 3) \times (x - 6) \times 1$$

$$= 3 - 9(x + 1) + 6x(x + 1) + 5x(x + 1)(x - 3) + x(x + 1)(x - 3)(x - 6)$$

b) Ta có $f(-0.25) \approx P_4(-0.25)$

$$\approx 3 - 9(-0.25 + 1) + 6(-0.25)(-0.25 + 1) + 5(-0.25)(-0.25 + 1)(-0.25 - 3)$$

$$+ (-0.25)(-0.25 + 1)(-0.25 - 3)(-0.25 - 6)$$

$$\approx -5.6367$$

Ví dụ 3: Sử dụng đa thức nội suy Newton, tìm số liệu còn thiếu trong bảng sau:

| | | | | | |
|---|---|---|---|-----|----|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | 1 | 3 | 9 | ??? | 81 |

3) Đa thức nội suy Newton – có cách đều:

Ví dụ 4: Cho bảng giá trị của hàm $y = f(x)$ như sau:

| | | | | |
|---|------|------|------|------|
| x | 5 | 5.2 | 5.4 | 5.6 |
| y | 0.85 | 2.41 | 4.77 | 7.32 |

a) Tìm đa thức nội suy Newton của hàm $y = f(x)$ ứng với bảng trên.

b) Tính gần đúng $f(5.1)$

Giải:

a) Có 4 nút nội suy, ta có:

$$P_3(x) = P_3(x=x_0+ht) = y_0 + t\Delta_{y_0} + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta_{y_0}^2 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta_{y_0}^3$$

Với $x_0 = 5$ và $h = 0.2$

Ta lập bảng:

| i | x_i | y_i | Hiệu hữu hạn cấp 1 | Hiệu hữu hạn cấp 2 | Hiệu hữu hạn cấp 3 |
|---|-------|-------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 0 | 5 | 0.85 | | | |
| | | | 2.41-0.85 =1.56 | | |
| 1 | 5.2 | 2.41 | | 2.36-1.56 =0.8 | |
| | | | 2.36 | | 0.19-0.8 =-0.61 |
| 2 | 5.4 | 4.77 | | 0.19 | |
| | | | 2.55 | | |
| 3 | 5.6 | 2.55 | | | |

Đa thức cần tìm là:

$$P_3(x = 5 + 0.2t) = 0.85 + 1.56t + \frac{t(t-1)}{2!} 0.8 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} (-0.61)$$

b) Ta có $f(5.1) = f(5.1 = 5 + 0.2t)$

Từ đó suy ra $t = \frac{x-x_0}{h} = \frac{5.1-5}{0.2} = 0.5$

Thay $t = 0.5$ vào đa thức tìm được ở câu a) ta được:

$$f(5.1) \approx P_3(x = 5.1) = P_3(t = 0.5)$$

$$\approx 0.85 + 1.56 \times 0.5 + \frac{0.5(0.5-1)}{2!} 0.8 - \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)}{3!} 0.61$$

$$\approx 1.49188$$

Ví dụ 5: Cho bảng giá trị của hàm số $y = f(x)$ tại 5 nút cách đều nhau như sau:

| | | | | | |
|---|-----|---|-----|----|------|
| x | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 |
| y | 0.5 | 3 | 8 | 17 | 31.5 |

a) Tìm đa thức nội suy Newton xuất phát từ nút $x_0 = 0.5$ của hàm $f(x)$ tại các nút đã cho trong bảng trên.

b) Tính gần đúng giá trị của hàm $f(x)$ tại điểm $x = 0.75$.

4) Phương pháp bình phương bé nhất:

Ví dụ 6: Cho bảng giá trị:

| | | | | | | |
|---|------|------|-----|-------|-------|-------|
| x | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| y | 7.32 | 8.24 | 9.2 | 10.19 | 11.01 | 12.05 |

a) Tìm đường thẳng $y = a + bx$ gần với hàm $y = f(x)$ theo phương pháp bình phương bé nhất.

b) Từ đó tính gần đúng giá trị của y tại $x = 5$.

Giải:

a) Ta có a và b là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} na + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases}$$

Trong đó:

$$n = 6$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 42; \sum_{i=1}^n y_i = 58.01; \sum_{i=1}^n x_i^2 = 364; \sum_{i=1}^n x_i y_i = 439.02$$

$$\text{Hệ trở thành: } \begin{cases} 6a + 42b = 58.01 \\ 42a + 364b = 439.02 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a = 6.37333 \\ b = 0.47071 \end{cases}$$

$$\rightarrow y = 6.37333 + 0.47071x$$

Bấm máy:

- Xóa bộ nhớ máy tính: Shift 9 3 = =
- Chuyển sang chế độ thống kê: MODE 3
- Chọn 2 (A + BX)
- Nhập dữ liệu:

| | X | Y |
|-----|-----|------|
| 1 | 2 | 7.32 |
| 2 | 4 | 8.24 |
| ... | ... | ... |

- Bấm AC để lưu dữ liệu.
- Lấy các giá trị của tổng: Shift 1 3 ...
- Lấy hệ số a và b: Shift 1 5 ...

b) y tại x = 5 có giá trị gần đúng là:

$$y \approx 6.37333 + 0.47071 \times 5$$

$$\approx 8.73$$

Ví dụ 7: Cho bảng giá trị:

| | | | | | |
|---|------|------|------|------|------|
| x | 0.78 | 1.56 | 2.34 | 3.12 | 3.81 |
| y | 2.50 | 1.20 | 1.12 | 2.25 | 4.28 |

Bảng phương pháp bình phương bé nhất, tìm hàm $y = a + bx + cx^2$.

Giải:

Ta có a, b, c là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} na + b \sum_{i=1}^n x_i + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \end{cases}$$

Trong đó:

$$n = 5;$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 11.61; \sum_{i=1}^n x_i^2 = 32.7681; \sum_{i=1}^n y_i = 11.35; \sum_{i=1}^n x_i^3 = 102.7615;$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = 29.7696; \sum_{i=1}^n x_i^4 = 341.7505; \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i = 94.6053$$

$$\text{Hệ trở thành: } \begin{cases} 5a + 11.61b + 32.7681c = 11.35 \\ 11.61a + 32.7681b + 102.76c = 29.7696 \\ 32.7681a + 102.76b + 341.7505c = 94.6053 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 5.0221 \\ b = -4.0143 \\ c = 1.0023 \end{cases}$$

Vậy, ta có công thức nghiệm cần tìm là: $y = 5.0221 - 4.0143x + 1.0023x^2$.

Bấm máy:

- Xóa bộ nhớ: Shift 9 3 = =
- Chuyển sang chế độ thống kê: MODE 3 (STAT)
- Chọn 3 ($_ + cX^2$)
- Nhập dữ liệu:

| | X | Y |
|-----|------|-----|
| 1 | 0.78 | 2.5 |
| 2 | 1.56 | 1.2 |
| ... | ... | ... |

- Bấm AC để lưu dữ liệu.
- Lấy các giá trị của tổng: Shift 1 3
- Lấy các giá trị hệ số a , b và c : Shift 1 5

Ví dụ 8: Cho bảng giá trị tương ứng giữa x và y như sau:

| | | | | | | |
|-----|----|-------|-------|------|------|------|
| x | 2 | 2.3 | 2.6 | 2.9 | 3.2 | 3.5 |
| y | 14 | 11.27 | 10.91 | 8.25 | 7.86 | 6.05 |

- Bằng phương pháp bình phương bé nhất, tìm hàm $y = a + bx$ gần với bảng giá trị trên.
- Tính gần đúng đạo hàm $y'_x(3.2)$.

Ví dụ 9: Theo dõi ảnh hưởng tiêu cực của chất độc X trong nước uống (đơn vị: mg/dm^3) đến tuổi thọ Y của một loài động vật (đơn vị: tháng) cho bởi bảng sau:

| | | | | | |
|------------------------------------|----|----|----|----|----|
| X (mg/dm^3) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Y (tháng) | 36 | 31 | 26 | 20 | 13 |

- Bằng phương pháp bình phương bé nhất, tìm công thức nghiệm của Y có dạng $y = a + bx + cx^2$.
- Từ câu a) nếu lượng chất độc $X = 6 \text{ mg}/\text{dm}^3$ thì tuổi thọ Y của động vật này là bao nhiêu?

Ví dụ 10: Cho bảng giá trị của hàm số $y = f(x)$ như sau:

| | | | | | |
|-----|---|----|-----|----|-----|
| x | 0 | 2 | 2.5 | 3 | 4 |
| y | 0 | 10 | ??? | 42 | 118 |

- Tìm đa thức nội suy Lagrange của hàm $f(x)$ tại các nút cho bởi bảng trên.
- Tìm giá trị y còn thiếu trong bảng trên.