

Desempeño de Esquemas de Control Tipo Hiperbólico para Control de Posición de Aeropéndulo

Hanan Ronaldo Quispe Condori, Joel Huamán Zárate, Héctor Lionel García Hurtado, Roly Sandro Gutierrez Benito, María Teresa Vera Percca, Nicoll Alexandra Sotomayor Mamani

Resumen—Se propone la aplicación de una familia de esquemas de control tipo hiperbólico de alto desempeño basadas en la técnica de moldeado de energía para el problema de control de posición del aeropéndulo.

I. INTRODUCCIÓN

Texto aca [?].

II. MODELAMIENTO MATEMÁTICO

Se usará el enfoque de dinámica analítica, este enfoque usa las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange para la obtención del modelo dinámico del sistema, se eligió este método debido a que se obtiene una estructura matemática bien definida el cual se integra de manera natural con la teoría de estabilidad de Lyapunov para el análisis de estabilidad para sistemas dinámicos lineales y no lineales sin importar el orden del sistema. [?]

Se obtendrá la cinemática directa del sistema en función de la posición angular q .

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_c \sin(q) \\ -l_c \cos(q) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Apartir de ?? se podrá obtener la cinemática diferencial para calcular la rapidez lineal.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} l_c \cos(q) \\ \dot{\theta} l_c \sin(q) \end{bmatrix} \quad (2)$$

La rapidez lineal esta dada por

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= v \cdot v^T = \sqrt{\dot{q}^2 l_c^2 \sin^2(q) + \dot{q}^2 l_c^2 \cos^2(q)}^2 \\ \|v\|^2 &= l_c^2 \dot{q}^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Usando la expresión de la rapidez lineal del sistema se procedera a calcular el modelo de energía del sistema.

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} m l_c^2 \dot{q}^2 + \frac{1}{2} I \dot{q}^2 \\ \mathcal{U}(q) &= g m l_c [1 - \cos(q)] \end{aligned} \quad (4)$$

El lagrangiano del sistema esta dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q, \dot{q}) &= \mathcal{K}(q, \dot{q}) - \mathcal{U}(q) \\ \mathcal{L}(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} [m l_c^2 \dot{q}^2 + I \dot{q}^2] - g m l_c [1 - \cos(q)] \end{aligned} \quad (5)$$

Las ecuaciones de Euler lagrange para el sistema tienen la siguiente forma

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} \right] + f_f(f_e, \dot{q}) = \tau \quad (6)$$

Considerando el lagrangiano se tienen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] &= [m l_c^2 + I] \dot{q} \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] &= [m l_c^2 + I] \ddot{q} \\ \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} \right] &= -g m l_c \sin(q) \end{aligned} \quad (7)$$

El modelo dinámico del sub-sistema brazo-hélice considerando el fenómeno de fricción esta dado por:

$$[m l_c^2 + I] \ddot{q} + g m l_c \sin(q) + b \dot{q} = \tau_{ri} \quad (8)$$

Comunmente se considera que el torque de rotor τ_r es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad rotacional ω_r^2 [?], [?], [?], [?], pero esto no considera la dinámica interna del rotor, ni las perdidas por fricción. En este estudio se hará uso del modelo LuGre para el modelamiento de la fricción del rotor ya que este es el modelo más completo reportado en la literatura [?]. Segun el modelo Lugre la estructura dinámica para el rotor esta dada por:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{ri} &= \omega_{ri} - \sigma_{0,ri} \frac{|\omega_{ri}|}{\mu_{ri}(\omega_{ri})} z_{ri} \\ \tau_{f,ri} &= \sigma_{0,ri} z_{ri} + \sigma_{1,ri} \dot{z}_{ri} + f_{ri}(\omega_{ri}) \end{aligned} \quad (9)$$

Además $\mu_{ri}(\omega_{ri}) = \tau_{c,ri} + [\tau_{s,ri} - \tau_{c,ri}] e^{-|\frac{\omega_{ri}}{\omega_{s,ri}}|^2}$ es una función con la fricción de Coulomb y el efecto Stribeck. Donde

- \dot{z}_{ri} Micromovimientos con velocidad.
- $\tau_{f,ri}$ Torque de fricción en el rotor.
- $\sigma_{0,ri}$ Constante de rigidez de fricción de Lugre.
- $\sigma_{1,ri}$ Coeficiente de amortiguamiento asociado a \dot{z}_{ri} .
- $f_{ri}(\omega_{ri}) = b_{ri} \omega_{ri}$ Fricción viscosa.
- $\tau_{c,ri}$ Coeficiente de fricción de Coulomb.
- $\tau_{s,ri}$ Coeficiente de fricción estatico.
- $\omega_{s,ri}$ Constante de Stribeck.

Usando este modelo el modelo dinámico del rotor con hélice queda de la siguiente forma.

$$\tau_{ri} = I_{ri}\dot{\omega}_{ri} + \sigma_{0_{ri}}z_{ri} + \sigma_{1_{ri}}\dot{z}_{ri} + b_{ri}\omega_{ri} \quad (10)$$

Donde

- I_{ri} Momento de Inercia del rotor.
- τ_{ri} Torque aplicado (señal de control)

Finalmente el modelo dinámico del sistema estará dado por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \\ z_{ri} \\ z_q \\ \omega_{ri} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \frac{1}{ml_c^2 + I} [\tau_{ri} - gml_c \sin(q) - \sigma_{0_q}z_q - \sigma_{1_q}\dot{z}_q - b\dot{q}] \\ \omega_{ri} - \sigma_{0_{ri}} \frac{|\omega_{ri}|}{\mu_{ri}(\omega_{ri})} z_{ri} \\ \dot{q} - \sigma_{0_q} \left[\frac{|\dot{q}|}{\tau_{cq} + [\tau_{sq} - \tau_{cq}]e^{-|\frac{\dot{q}}{q_{sq}}|^2}} \right] z_q \\ \frac{1}{I_{ri}} [\tau_{ri} - \sigma_{0_{ri}}z_{ri} - \sigma_{1_{ri}}\dot{z}_{ri} - b_{ri}\omega_{ri}] \end{bmatrix} \quad (11)$$

Donde