UNIVERSIDAD NACIONAL
DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO

Facultad de Ingeniería Eléctrica, Electrónica, Informática y Mecánica

Escuela Profesional de Ingeniería Electrónica

Muestreo, Transformada de Fourier, Transformada Discreta de Fourier y Convolución Circular

Docente:
Rossy Uscamaita Quispetupa

Alumno:	*Código:*
Hanan Ronaldo Quispe Condori	163819

3 de febrero de 2020

1. Muestreo

Al trabajar con una señal continua, muestrear significa tomar los valores de una determinada señal en puntos determinados. Sea una señal continua $x(t)$ limitada en banda, es decir, $|X_B(\omega)| = 0$ para $|\omega| > B$, si tomamos muestras a intervalos T espaciadas con respecto a la frecuencia más alta de la señal $x(t)$, entonces ésta se podrá reconstruir a partir de sus muestras. Para efectuar el muestreo se puede multiplicar la señal $x(t)$ por un tren de impulsos unitarios en el tiempo continuo[Escobar (2009)].

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \tag{1}$$

Es decir

$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) \tag{2}$$

Usando la transformada de Fourier en 2 se tendrá

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega); \omega_s = \frac{2\pi}{T} \tag{3}$$

Donde

- ω_s es la frecuencia de muestreo.
- T es el periodo de muestreo.

Por la propiedad de convolución de la transformada de Fourier se tiene que

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega)\delta(\omega - n\omega_s) \tag{4}$$

La gráfica del espectro de esta señal se muestra a continuación

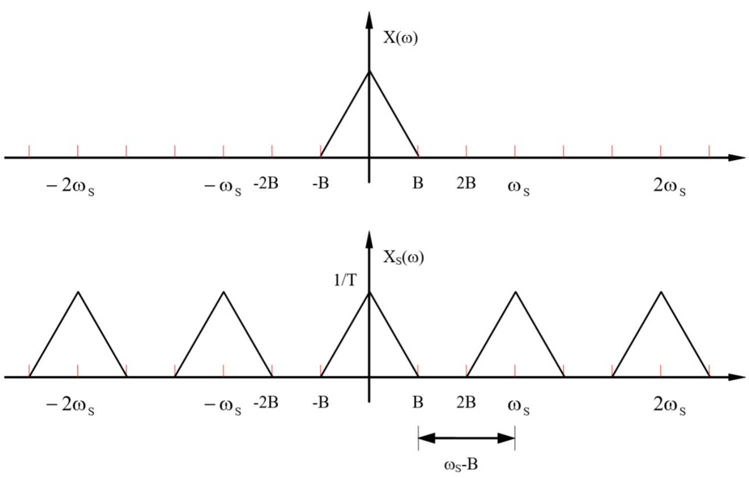

Figura 1: Espectro de una señal Muestreada.

Las repeticiones del espectro en la figura 1 no deben solaparse para evitar la superposición de frecuencias, para evitar este problema el teorema de Nyquist nos dice que se debe cumplir lo siguiente.

$$|\omega_s - B| > B \rightarrow \omega_s > 2B \tag{5}$$

Esta desigualdad se conoce como la frecuencia de Nyquist o Shanon, nos garantizará que la señal original se podrá reconstruir apartir de las muestras tomadas.

1.1. Ejemplo

Se muestreará una señal senoidal usando matlab.

```
%Sampling
T=0.5;
t=-10:0.1:10;
f=sin(t);
deltas=0.0;
for i=min(t):max(t)
    deltas=deltas+sinc(10*(t-T*i)); %generacion del tren de impulsos
end
subplot(3,1,1);
plot(t,f);
subplot(3,1,2);
plot(t,deltas);
muestreo=f.*deltas; %multiplicacion por la entrada
subplot(3,1,3);
plot(t,muestreo);
```

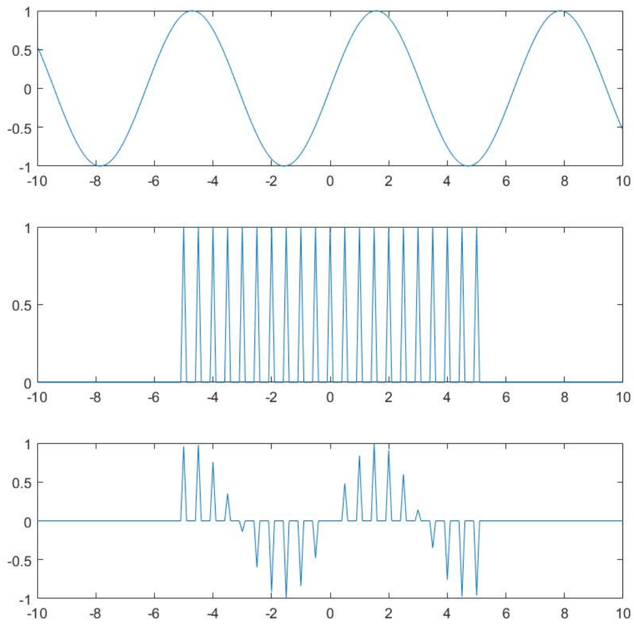

Figura 2: Muestreo de señal Senoidal.

2. Transformada de Fourier

Es un caso especial de la transformada bilateral de Laplace esta se define de la siguiente manera [Lago y cols. (1984)].

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)dt \tag{6}$$

Dentro de todo el plano complejo s la transformada de Fourier estará definida para $s = j\omega$

$$\mathscr{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f(t)dt \tag{7}$$

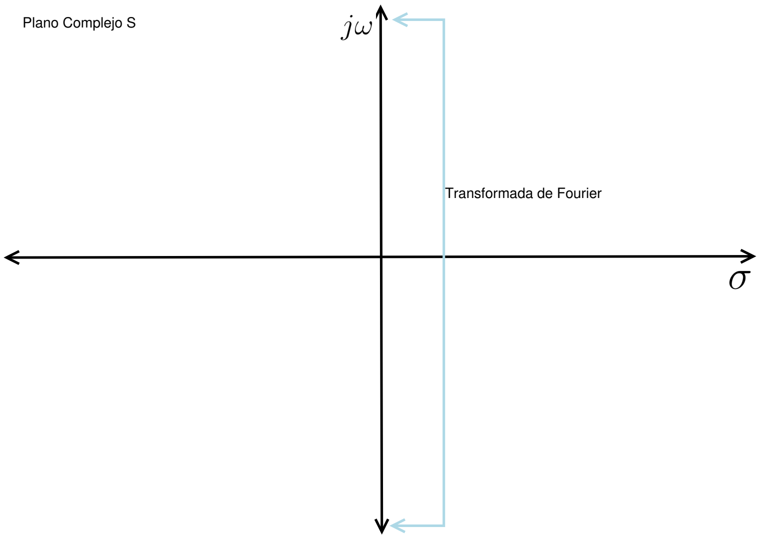

Figura 3: Plano Complejo S.

2.1. Ejemplo

Se calculará la transformada de fourier de la función seno, se hara uso del comando "fft"(fast fourier transform), de Matlab.

```
%Fourier Transform of sine function
t=-1:0.001:1;
f=sin(2*pi*20*t);
X=fft(f); %se usara la transformada rapida de Fourier
subplot(2,1,1);
plot(t,f);
subplot(2,1,2);
plot(t,abs(X));
```

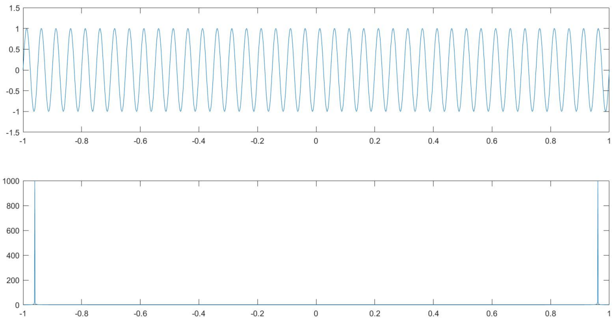

Figura 4: Muestreo de señal Senoidal.

3. Transformada Discreta de Fourier

En palabras simples es la transformada de fourier en tiempo discreto muestreada, la fórmula se deduce de la siguiente manera.

Sea la transformada unilateral de Laplace

$$X(s) = \int_0^\infty e^{-st}x(t)dt \tag{8}$$

Usemos esta transformada en la señal muestreada $x(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_0^\infty \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)e^{-st}dt \\ X(s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\int_0^\infty \delta(t-nT)e^{-st}dt \\ z &= e^{sT} \\ X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)z^{-nT} \\ X(nT) &= X(n) \\ X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \end{aligned} \tag{9}$$

La expresión 9 es conocida como la transformada Z. Por la identidad de Euler, sabemos que $e^{j\omega} = cos(\omega) + jsen(\omega)$ tenemos que el periodo de esta expresión es 2π

Tomando $z = e^{j\omega}$ en 9 se tendrá:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \tag{10}$$

Esta ultima expresión se le conoce como transformada de Fourier en tiempo discreto, en 10 se tendrá $\omega = \frac{2\pi k}{N}$ donde es el número de muestras a cuantizar

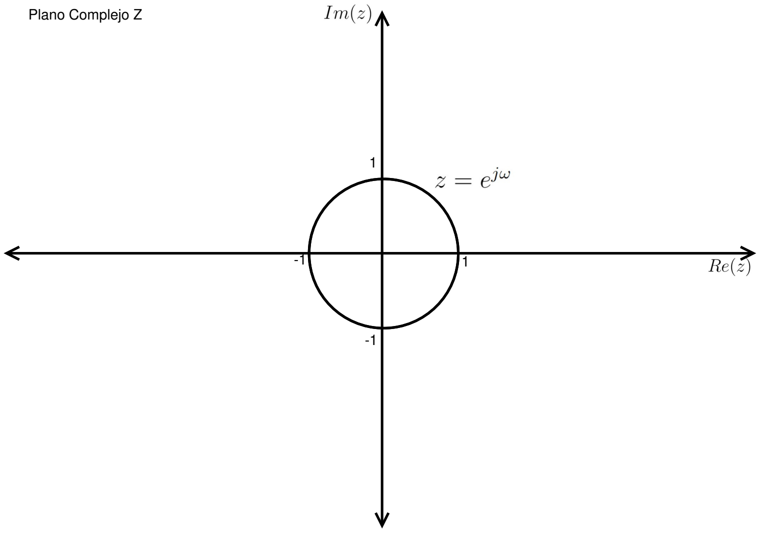

Figura 5: Plano Complejo Z.

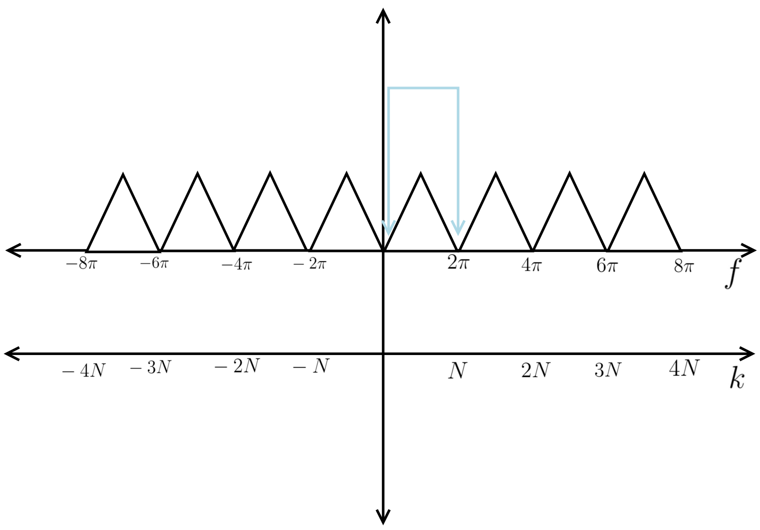

Figura 6: Muestreo de DFTF.

En la figura se puede observar que como $e^{j\omega}$ es periodico solo será necesario tomar un intervalo, haciendo esto, se tendrá.

$$X(\omega) = X(e^{j\omega})$$

$$X(\omega)|_{w=\frac{2\pi k}{N}} = X(\frac{2\pi k}{N}) = ... + \sum_{n=-N}^{-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} + \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} + \sum_{n=N}^{2N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} + ...$$

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \tag{11}$$

A la expresión 11 se le conoce como transformada discreta de fourier.

3.1. Ejemplo

Hallar la DFT de la siguiente secuencia $x(n) = [1, 2, 1, 0]$. Usando la definición de DFT se tendrá.

$$\begin{aligned} k = 0 &\rightarrow X_t[0] = 1 + 2 + 1 + 0 = 4 \\ k = 1 &\rightarrow X_t[1] = 1 + e^{\frac{-j\pi}{2}} + e^{\frac{-j\pi}{1}} = -2j \\ k = 2 &\rightarrow X_t[2] = 1 + 2e^{\frac{-j\pi}{1}} + e^{\frac{-j2\pi}{2}} = 0 \\ k = 3 &\rightarrow X_t[3] = 1 + 2e^{\frac{-j3\pi}{1}} + e^{\frac{-j3\pi}{1}} = 2j \\ X_t[k] &= [4, -2j, 0, 2j] \end{aligned} \tag{12}$$

4. Convolución Circular

La convolución circular de 2 secuencias $x_1(n)$ y $x_2(n)$ esta definida como

$$x(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(m-n) \tag{13}$$

En el contexto de la transformada discreta de Fourier, la convolución circular en el dominio del tiempo corresponde a la multiplicación las transformadas discretas de cada secuencia.

$$x_1(n) \circledast x_2(n) \rightarrow \frac{1}{N} X_1(k)X_2(k) \tag{14}$$

4.1. Ejemplo

Calcular la convolución circular de las secuencias $x(n) = [1, 2, 1, 1]$ y $h(n) = [1, 1, -1, -1]$ Usando la definición se tendrá.

$$\begin{aligned} x(n) \circledast h(n)[0] &= 1 - 2 = -1 \\ x(n) \circledast h(n)[1] &= 2 + 1 - 2 = 1 \\ x(n) \circledast h(n)[2] &= 1 + 2 - 1 - 1 = 1 \\ x(n) \circledast h(n)[3] &= 1 + 1 - 2 - 1 = -1 \\ x(n) \circledast h(n)[n] &= [-1, 1, 1, -1] \end{aligned} \tag{15}$$

Referencias

Escobar, S. (2009). *Conceptos básicos de procesamiento digital de señales.*

Lago, G., Benningfield, L. M., y Barrón, V. P. A. (1984). *Teoría de sistemas y circuitos.* Limusa.