

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA



FACULTAD DE CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA
LICENCIATURA EN ELECTRÓNICA

Tarea 1

Profesor:

Gutierrez Arias Jose Eligio Moises,

Alumno:

Hanan Ronaldo Quispe Condori

Número de Matrícula:

555010653

1. Transformada Z

1.1. Transformada Z Bilateral

La transformada Z surge de la transformada de Fourier discreta, esta se define de la siguiente manera.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (1)$$

Se tendrá la definición de la transformada Z tomando variable $z = re^{j\omega}$, bajo esta consideración, la ecuación 1 quedara de la siguiente forma, tomemos en cuenta que cuando $r = 1$ la transformada Z será la transformada de Fourier discreta (Schafer y Oppenheim (1989)).

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (2)$$

Tomaremos una nueva notación para ecuación 2

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = X(z) \quad (3)$$

La sumatoria 2 convergerá solo si se cumple que

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]||z^{-n}| &< \infty \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]||(re)^{-j\omega n}| &< \infty \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| &< \infty \end{aligned} \quad (4)$$

Para que la ecuación 4 se cumpla la secuencia debe ser absolutamente sumable, debemos encontrar el rango de valores de r para que esto se cumpla, con este objeto, procederemos a operar en 4 como sigue.

$$\begin{aligned} X(z) &\leq \sum_{n=-\infty}^{-1} |x(n)r^{-n}| + \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)r^{-n}| \\ X(z) &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(-n)r^n| + \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)r^{-n}| \end{aligned} \quad (5)$$

De 5 podemos sacar las siguientes relaciones para n , $1 \leq n < \infty$ y $0 \leq n < \infty$, estas relaciones nos daran una region donde la transformada Z convergerá, si analizamos esta region, se podra obtener información sobre la secuencia

- Secuencia de longitud finita $0 < |z| < \infty$
- Secuencia limitada por la derecha $R_{x-} < |z| < \infty$
- Secuencia limitada por la izquierda $0 < |z| < R_{x+}$
- Secuencia bilateral $R_{x-} < |z| < R_{x+}$

1.1.1. Propiedades de la Transformada Z**Linealidad**

Esta propiedad establece que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (ax_1[n] + bx_2[n])z^{-n} = a \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]z^{-n} + b \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n]z^{-n} \quad (6)$$

Desplazamiento en el Tiempo

Esta propiedad establece que

$$x[n - n_0] \xrightarrow{\mathcal{Z}} z^{-n_0} X(z) \quad (7)$$

Demostración

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n - n_0]z^{-n} \quad (8)$$

Haciendo cambio de variable $m = n - n_0$ en 8 se tendrá

$$\begin{aligned} Y(Z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[m]z^{m+n_0} \\ Y(Z) &= z^{-m_0} X(Z) \end{aligned} \quad (9)$$

Propiedad de Convolución

La convolución de dos secuencias, equivale a la multiplicación de sus respectivas transformadas Z.

$$x_1[n] * x_2[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} X_1(Z)X_2(Z) \quad (10)$$

Demostración

Sea la convolución de $x_1[n], x_2[n]$ en tiempo discreto

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n - k] \quad (11)$$

Calculando la transformada Z de la ecuación 11 se tendrá.

$$Y(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n - k] \right) z^{-n} \quad (12)$$

Haciendo cambio de variable $m = n - k$ e intercambiando el orden de la suma se tendrá

$$\begin{aligned} Y(Z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2[m]z^{-m} \right) z^{-k} \\ Y(Z) &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]z^{-k} \right) X_2(Z) \\ Y(Z) &= X_1(Z)X_2(Z) \end{aligned} \quad (13)$$

Diferenciación

Esta propiedad estipula que

$$nx_1[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} -z \frac{dX(z)}{dz} \quad (14)$$

Demostración Sea la transformada Z de la secuencia $x[n]$

$$Y(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (15)$$

Derivando la ecuación 15 con respecto a z y multiplicando por $-z$

$$\begin{aligned} -z \frac{dX(z)}{dz} &= -z \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n)x[n]z^{-n-1} \\ -z \frac{dX(z)}{dz} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n} \end{aligned} \quad (16)$$

1.2. Transformada Z Unilateral

La transformada bilateral necesita ser definida para el rango completo de $-\infty < n < \infty$, este requerimiento impide que sea usada para la resolución de problemas, los sistemas descritos por ecuaciones de diferencias con condiciones iniciales diferentes a cero, esto ya que la entrada aplicada en un tiempo finito n_0 esta especificada para $n \geq n_0$, pero no necesariamente será cero para $n \leq n_0$, por lo que la transformada bilateral no puede ser usada; para solucionar este problema, se tendrá que definir la transformada Z unilateral. Proakis y Manolakis (1996)

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (17)$$

La notación antes usada para la transformada Z cambiara a $\mathcal{Z}^+\{x[n]\}$, esta transformada difiere de la transformada bilateral en el limite inferior de la sumatoria, el cual es siempre cero.

Casi todas las propiedades estudiadas para la transformada bilateral se cumplen tambien para la transformada unilateral, a excepción de la propiedad de desplazamiento en el tiempo.

Retardo en el Tiempo

Sea

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}^+} X^+(z) \quad (18)$$

Sabemos que $x[n]$ sera causal entonces se tendrá

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^+\{x[n-k]\} &= z^{-k} \left[\sum_{l=-k}^{-1} x[l]z^{-l} + \sum_{l=0}^{\infty} x[l]z^{-l} \right] \\ \mathcal{Z}^+\{x[n-k]\} &= z^{-k} \left[\sum_{l=-1}^{-k} x[l]z^{-l} + X^+(z) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

Haciendo el cambio de variable $n = -l$ se tendrá

$$\mathcal{Z}^+\{x[n-k]\} = z^{-k} \left[\sum_{n=1}^k x[-n]z^n + X^+(z) \right], \quad k > 0 \quad (20)$$

Adelanto en el Tiempo

Sea

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}^+} X^+(z) \quad (21)$$

Sabemos que $x[n]$ sera causal entonces se tendrá

$$\mathcal{Z}^+\{x[n+k]\} = z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} x[n+k]z^{-n} = z^k \sum_{l=k}^{\infty} x[l]z^{-l} \quad (22)$$

Haciendo el cambio de variable $n = k - l$ se tendrá

$$X^+(z) = \sum_{l=0}^{k-1} x[l]z^{-l} + \sum_{l=k}^{\infty} x[l]z^{-l} \quad (23)$$

Combinando la ecuación 23 obtendremos finalmente

$$\mathcal{Z}^+\{x[n+k]\} = z^k [X^+(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x[n]z^{-n}], \quad k > 0 \quad (24)$$

1.2.1. Transformada Z de Funciones Elementales

Escalon Unitario

Sea $x[n] = \mu(n)$

Usando la definición de la transformada Z unilateral y operando se tendrá.

$$\begin{aligned} X^+(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu(n)z^{-n} \\ X^+(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \end{aligned} \quad (25)$$

Sabemos que la sumatoria 25 es una serie geométrica cuya fórmula general es

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \frac{a}{1-r} \quad (26)$$

De 26 se tendrá finalmente que

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad (27)$$

Rampa Unitaria

Sea $x[n] = n$ Usando la definición de la transformada Z unilateral y operando se tendrá.

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n} \quad (28)$$

Referencias

Proakis, J. G., y Manolakis, D. G. (1996). *Digital signal processing*. Prentice Hall New Jersey.

Schafer, R. W., y Oppenheim, A. V. (1989). *Discrete-time signal processing*. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ.