Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias de la Electrónica

Licenciatura en Electrónica

Tarea 1

Profesor:
Gutierres Arias Jose Eligio Moises,

Alumno: Hanan Ronaldo Quispe Condori

Número de Matrícula: 555010653

1. Transformada Z

1.1. Transformada Z Bilateral

La transformada Z surge de la transformada de Fourier discreta, esta se define de la siguiente manera.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \tag{1}$$

Se tendrá la definición de la transformada Z tomando variable $z = re^{j\omega}$, bajo esta consideranción, la ecuación 1 quedara de la siguiente forma, tomemos en cuenta que cuando $r = 1$ la transformada Z será la transformada de Fourier discreta (Schafer y Oppenheim (1989)).

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{2}$$

Tomaremos una nueva notación para ecuación 2

$$\mathscr{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = X(z) \tag{3}$$

La sumatoria 2 convergerá solo si se cumple que

$$\begin{gathered} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]||z^{-n}| < \infty \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]||(re)^{-j\omega n}| < \infty \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty \end{gathered} \tag{4}$$

Para que la ecuación 4 se cumpla la secuencia debe ser absolutamente sumable, debemos encontrar el rango de valores de r para que esto se cumpla, con este objeto, procederemos a operar en 4 como sigue.

$$\begin{aligned} X(z) &\leq \sum_{n=-\infty}^{-1} |x(n)r^{-n}| + \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)r^{-n}| \\ X(z) &\leq \sum_{n=}^{\infty} |x(-n)r^{n}| + \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)r^{-n}| \end{aligned} \tag{5}$$

De 5 podemos sacar las siguientes relaciones para n, $1 \leq n < \infty$ y $0 \leq n < \infty$, estas relaciones nos daran una region donde la transformada Z convergerá, si analizamos esta region, se podra obtener información sobre la secuencia

- Secuencia de longitud finita $0 < |z| < \infty$
- Secuencia limitada por la derecha $R_{x-} < |z| < \infty$
- Secuencia limitada por la izquierda $0 < |z| < R_{x+}$
- Secuencia bilateral $R_{x-} < |z| < R_{x+}$

1.1.1. Propiedades de la Transformada Z

Linealidad

Esta propiedad establece que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(ax_1[n]+bx_2[n])z^{-n} = a\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1[n]z^{-n} + b\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_2[n]z^{-n} \tag{6}$$

Desplazamiento en el Tiempo

Esta propiedad establece que

$$x[n-n_0] \xrightarrow{\mathscr{Z}} z^{-n_0}X(z) \tag{7}$$

Demostración

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0]z^{-n} \tag{8}$$

Haciendo cambio de variable $m = n - n_0$ en 8 se tendrá

$$\begin{aligned} Y(Z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[m]z^{m+n_0} \\ Y(Z) &= z^{-m_0}X(Z) \end{aligned} \tag{9}$$

Multiplicación por una Secuencia Exponencial

Esta propiedad establece que

$$z_0^n x[n] \xrightarrow{\mathscr{Z}} X(z/z_0) \tag{10}$$

Demostración

$$\begin{aligned} X(Z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (z_0^n x[n])z^{-n} \\ X(Z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](\frac{z}{z_0})^{-n} \end{aligned} \tag{11}$$

De 11 podemos ver que se cumple 10

Propiedad de Convolución

La convolución de dos secuencias, equivale a la multiplicación de sus respectivas transformadas Z.

$$x_1[n] * x_2[n] \xrightarrow{\mathscr{Z}} X_1(Z)X_2(Z) \tag{12}$$

Demostración

Sea la convolución de $x_1[n], x_2[n]$ en tiempo discreto

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k] \tag{13}$$

Calculando la transformada Z de la ecuación 13 se tendrá.

$$Y(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k])z^{-n} \tag{14}$$

Haciendo cambio de variable $m = n-k$ e intercambiando el orden de la suma se tendrá

$$\begin{aligned} Y(Z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k](\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2[m]z^{-m})z^{-k} \\ Y(Z) &= (\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]z^{-k})X_2(Z) \\ Y(Z) &= X_1(Z)X_2(Z) \end{aligned} \tag{15}$$

Diferenciación

Esta propiedad estipula que

$$nx_1[n] \xrightarrow{\mathscr{Z}} -z\frac{dX(z)}{dz} \tag{16}$$

Demostración Sea la transformada Z de la secuencia $x[n]$

$$Y(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{17}$$

Derivando la ecuación 17 con respecto a z y multiplicando por $-z$

$$\begin{aligned} -z\frac{dX(z)}{dz} &= -z\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n)x[n]z^{-n-1} \\ -z\frac{dX(z)}{dz} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n} \end{aligned} \tag{18}$$

1.2. Transformada Z Unilateral

La transformada bilateral necesita ser definida para el rango completo de $-\infty < n < \infty$, este requerimiento impide que sea usada para la resolución de problemas, los sistemas descritos por ecuaciones de diferencias con condiciones iniciales diferentes a cero, esto ya que la entrada aplicada en un tiempo finito n_0 esta especificada para $n \geq n_0$, pero no necesariamente será cero para $n \leq n_0$, por lo que la transformada bilateral no puede ser usada; para solucionar este problema, se tendrá que definir la transformada Z unilateral. Proakis y Manolakis (1996)

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{19}$$

La notación antes usada para la transformada Z cambiara a $\mathscr{Z}^+\{x[n]\}$, esta transformada difiere de la transformada bilateral en el límite inferior de la sumatoria, el cual es siempre cero.

Casi todas las propiedades estudidadas para la transformada bilateral se cumplen tambien para la transformada unilateral, a excepción de la propiedad de desplazamiento en el tiempo.

Retardo en el Tiempo

Sea

$$x[n] \xrightarrow{\mathscr{Z}^+} X^+(z) \tag{20}$$

Sabemos que $x[n]$ sera causal entonces se tendrá

$$\begin{aligned} \mathscr{Z}^+\{x[n-k]\} &= z^{-k}[\sum_{l=-k}^{-1} x[l]z^{-l} + \sum_{l=0}^{\infty} x[l]z^{-l}] \\ \mathscr{Z}^+\{x[n-k]\} &= z^{-k}[\sum_{l=-1}^{-k} x[l]z^{-l} + X^+(z)] \end{aligned} \tag{21}$$

Haciendo el cambio de variable $n = -l$ se tendrá

$$\mathscr{Z}^+\{x[n-k]\} = z^{-k}[\sum_{n=1}^{k} x[-n]z^{n} + X^+(z)], \quad k > 0 \tag{22}$$

Adelanto en el Tiempo

Sea

$$x[n] \xrightarrow{\mathscr{Z}^+} X^+(z) \tag{23}$$

Sabemos que $x[n]$ sera causal entonces se tendrá

$$\mathscr{Z}^+\{x[n+k]\} = z^{-k}\sum_{n=0}^{\infty} x[n+k]z^{-n} = z^{k}\sum_{l=k}^{\infty} x[l]z^{-l} \tag{24}$$

Haciendo el cambio de variable $n = k - l$ se tendrá

$$X^+(z) = \sum_{l=0}^{k-1} x[l]z^{-l} + \sum_{l=k}^{\infty} x[l]z^{-l} \tag{25}$$

Combinando la ecuación 25 obtendremos finalmente

$$\mathscr{Z}^+\{x[n+k]\} = z^{k}[X^+(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x[n]z^{-n}], \quad k > 0 \tag{26}$$

1.2.1. Transformada Z de Funciones Elementales

Escalon Unitario

Sea $x[n] = \mu(n)$

Usando la definición de la transformada Z unilateral y operando se tendrá.

$$
\begin{aligned}
X^+(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu(n) z^{-n} \\
X^+(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}
\end{aligned} \tag{27}
$$

Sabemos que la sumatoria 27 es una serie geométrica cuya fórmula general es

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \frac{a}{1-r} \tag{28}$$

De 28 se tendrá finalmente que

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} \tag{29}$$

Rampa Unitaria

Sea $x[n] = n$ Usando la definición de la transformada Z unilateral y operando se tendrá.

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} \tag{30}$$

Expandiendo la sumatoria tendremos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + ... + nz^{-n} \tag{31}$$

Multiplicando 31 por $-2z^{-1}$

$$-2z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + ... + nz^{-n} \tag{32}$$

Sumando 31 y 32 se tendrá

$$\sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} = \frac{z^{-1} - 2nz^{-(n+1)} + nz^{-(n+2)}}{(1-z^{-1})^2} \tag{33}$$

Llevando el límite cuando n tiende a ∞ en 33 se tendrá finalmente.

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \tag{34}$$

Función Polinomial

Sea $x[n] = a^n$

Usando la definición de la transformada Z unilateral y operando se tendrá.

$$\begin{aligned} X^+(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \\ X^+(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n \end{aligned} \tag{35}$$

Tendremos que 35 tiene la misma forma que 28, por lo que podemos dar una respuesta directamente.

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \tag{36}$$

Función Exponencial

Sea $x[n] = e^{-an}$

Usando la definición de la transformada Z unilateral y operando se tendrá.

$$\begin{aligned} X^+(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-an} z^{-n} \\ X^+(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-a} z^{-1})^n \end{aligned} \tag{37}$$

Tendremos que 37 tiene la misma forma que 28, por lo que podemos dar una respuesta directamente.

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-an} z^{-n} = \frac{1}{1 - e^{-a} z^{-1}} \tag{38}$$

Función Senoidal

La identidad de Euler establece que $sen(\omega n) = \frac{e^{i\omega n} - e^{-i\omega n}}{2i}$

Usando la definición de la transformada Z unilateral y usando la propiedad de linealidad se tendrá.

$$\begin{aligned} X^+(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{e^{iwn} - e^{-iwn}}{2i}) z^{-n} \\ X^+(z) &= \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} e^{iwn} z^{-n} - \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iwn} z^{-n} \\ X^+(z) &= \frac{1}{2i} (\sum_{n=0}^{\infty} e^{iwn} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iwn} z^{-n}) \end{aligned} \tag{39}$$

Tendremos que 39 tiene la misma forma que 28, por lo que, operando se tendrá.

$$X^+(z) = \frac{1}{2i}(\frac{1}{1-z^{-1}e^{i\omega}} - \frac{1}{1-z^{-1}e^{-i\omega}})$$
$$X^+(z) = \frac{z^{-1}sen(\omega)}{1+z^{-2}-2z^{-1}cos(\omega)} \tag{40}$$

Para función coseno se tendrá que a identidad de Euler establece que $cos(\omega n) = \frac{e^{i\omega n}+e^{-i\omega n}}{2}$

Usando la definición de la transformada Z unilateral y la propiedad de linealidad se tendrá.

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{e^{i\omega n}+e^{-i\omega n}}{2})z^{-n}$$
$$X^+(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{iwn}z^{-n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-iwn}z^{-n} \tag{41}$$
$$X^+(z) = \frac{1}{2}(\sum_{n=0}^{\infty} e^{iwn}z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iwn}z^{-n})$$

Tendremos que 41 tiene la misma forma que 28, por lo que, operando se tendrá.

$$X^+(z) = \frac{1}{2}(\frac{1}{1-z^{-1}e^{i\omega}} + \frac{1}{1-z^{-1}e^{-i\omega}})$$
$$X^+(z) = \frac{1-z^{-1}cos(\omega)}{1+z^{-2}-2z^{-1}cos(\omega)} \tag{42}$$

1.3. Ejemplos

- $e^{-at}sen(\omega t)$

  Sea su representación en tiempo discreto $x[n] = e^{-aTn}sen(\omega Tn)$, usaremos la propiedad de multiplicación por una secuencia exponencial para su resolución.

  De 40 sabemos que

$$X^+(z) = \frac{z^{-1}sen(\omega T)}{1+z^{-2}-2z^{-1}cos(\omega T)}$$
$$X^+(\frac{z}{e^{-aT}}) = \frac{(\frac{z}{e^{-aT}})^{-1}sen(\omega T)}{1+(\frac{z}{e^{-aT}})^{-2}-2(\frac{z}{e^{-aT}})^{-1}cos(\omega T)} \tag{43}$$
$$X^+(\frac{z}{e^{-aT}}) = \frac{e^{-aT}z^{-1}sen(\omega T)}{1+e^{-2aT}z^{-2}-2z^{-1}e^{-aT}cos(\omega T)}$$

- $e^{-at}cos(\omega t)$

  Sea su representación en tiempo discreto $x[n] = e^{-aTn}cos(\omega Tn)$, usaremos la propiedad de multiplicación por una secuencia exponencial para su resolución.

De 42 sabemos que

$$
\begin{aligned}
X^{+}(z) &= \frac{1 - z^{-1}cos(\omega T)}{1 + z^{-2} - 2z^{-1}cos(\omega T)} \\
X^{+}(\frac{z}{e^{-aT}}) &= \frac{1 - (\frac{z}{e^{-aT}})^{-1}cos(\omega T)}{1 + (\frac{z}{e^{-aT}})^{-2} - 2(\frac{z}{e^{-aT}})^{-1}cos(\omega T)} \\
X^{+}(\frac{z}{e^{-aT}}) &= \frac{1 - e^{-aT}z^{-1}cos(\omega T)}{1 + e^{-2aT}z^{-2} - 2e^{-aT}z^{-1}cos(\omega T)}
\end{aligned}
\tag{44}
$$

Referencias

Proakis, J. G., y Manolakis, D. G. (1996). *Digital signal processing*. Prentice Hall New Jersey.

Schafer, R. W., y Oppenheim, A. V. (1989). *Discrete-time signal processing*. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ.