Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

BUAP

Facultad de Ciencias de la Electrónica

Licenciatura en Electrónica

Tarea 1

Profesor:
Gutierres Arias Jose Eligio Moises,

Alumno:	*Número de Matrícula:*
Hanan Ronaldo Quispe Condori	555010653

1. Transformada Z

1.1. Transformada Z Bilateral

La transformada Z surge de la transformada de Fourier discreta, esta se define de la siguiente manera.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \tag{1}$$

Se tendrá la definición de la transformada Z tomando variable $z = re^{j\omega}$, bajo esta consideranción, la ecuación 1 quedara de la siguiente forma, tomemos en cuenta que cuando $r = 1$ la transformada Z será la transformada de Fourier discreta (Schafer y Oppenheim (1989)).

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{2}$$

Tomaremos una nueva notación para ecuación 2

$$\mathscr{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = X(z) \tag{3}$$

La sumatoria 2 convergerá solo si se cumple que

$$\begin{gathered}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]||z^{-n}| < \infty \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]||(re)^{-j\omega n}| < \infty \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty\end{gathered} \tag{4}$$

Para que la ecuación 4 se cumpla la secuencia debe ser absolutamente sumable, debemos encontrar el rango de valores de r para que esto se cumpla, con este objeto, procederemos a operar en 4 como sigue.

$$\begin{aligned}X(z) &\leq \sum_{n=-\infty}^{-1} |x(n)r^{-n}| + \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)r^{-n}| \\ X(z) &\leq \sum_{n=}^{\infty} |x(-n)r^{n}| + \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)r^{-n}|\end{aligned} \tag{5}$$

De 5 podemos sacar las siguientes relaciones para n, $1 \leq n < \infty$ y $0 \leq n < \infty$, estas relaciones nos daran una region donde la transformada Z convergerá, si analizamos esta region, se podrá obtener información sobre la secuencia

- Secuencia de longitud finita $0 < |z| < \infty$
- Secuencia limitada por la derecha $R_{x-} < |z| < \infty$
- Secuencia limitada por la izquierda $0 < |z| < R_{x+}$
- Secuencia bilateral $R_{x-} < |z| < R_{x+}$

1.1.1. Propiedades de la Transformada Z

Linealidad

Esta propiedad establece que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(ax_1[n]+bx_2[n])z^{-n}=a\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1[n]z^{-n}+b\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_2[n]z^{-n} \tag{6}$$

Desplazamiento en el Tiempo

Esta propiedad establece que

$$x[n-n_0]\xrightarrow{\mathscr{Z}}z^{-n_0}X(z) \tag{7}$$

Demostración

$$X(Z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n-n_0]z^{-n} \tag{8}$$

Haciendo cambio de variable $m=n-n_0$ en 8 se tendrá

$$\begin{aligned}Y(Z)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[m]z^{m+n_0}\\ Y(Z)&=z^{-m_0}X(Z)\end{aligned} \tag{9}$$

Multiplicación por una Secuencia Exponencial

Esta propiedad establece que

$$z_0^n x[n]\xrightarrow{\mathscr{Z}}X(z/z_0) \tag{10}$$

Demostración

$$\begin{aligned}X(Z)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(z_0^n x[n])z^{-n}\\ X(Z)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n](\frac{z}{z_0})^{-n}\end{aligned} \tag{11}$$

De 11 podemos ver que se cumple 10

Propiedad de Convolución

La convolución de dos secuencias, equivale a la multiplicación de sus respectivas transformadas Z.

$$x_1[n]*x_2[n]\xrightarrow{\mathscr{Z}}X_1(Z)X_2(Z) \tag{12}$$

Demostración

Sea la convolución de $x_1[n], x_2[n]$ en tiempo discreto

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k] \tag{13}$$

Calculando la transformada Z de la ecuación 13 se tendrá.

$$Y(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k])z^{-n} \tag{14}$$

Haciendo cambio de variable $m = n-k$ e intercambiando el orden de la suma se tendrá

$$\begin{aligned} Y(Z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k](\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2[m]z^{-m})z^{-k} \\ Y(Z) &= (\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]z^{-k})X_2(Z) \\ Y(Z) &= X_1(Z)X_2(Z) \end{aligned} \tag{15}$$

Diferenciación

Esta propiedad estipula que

$$nx_1[n] \xrightarrow{\mathscr{Z}} -z\frac{dX(z)}{dz} \tag{16}$$

Demostración Sea la transformada Z de la secuencia $x[n]$

$$Y(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{17}$$

Derivando la ecuación 17 con respecto a z y multiplicando por $-z$

$$\begin{aligned} -z\frac{dX(z)}{dz} &= -z\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n)x[n]z^{-n-1} \\ -z\frac{dX(z)}{dz} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n} \end{aligned} \tag{18}$$

1.2. Transformada Z Unilateral

La transformada bilateral necesita ser definida para el rango completo de $-\infty < n < \infty$, este requerimiento impide que sea usada para la resolución de problemas, los sistemas descritos por ecuaciones de diferencias con condiciones iniciales diferentes a cero, esto ya que la entrada aplicada en un tiempo finito n_0 esta especificada para $n \geq n_0$, pero no necesariamente será cero para $n \leq n_0$, por lo que la transformada bilateral no puede ser usada; para solucionar este problema, se tendrá que definir la transformada Z unilateral. Proakis y Manolakis (1996)

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{19}$$

La notación antes usada para la transformada Z cambiara a $\mathscr{Z}^+\{x[n]\}$, esta transformada difiere de la transformada bilateral en el límite inferior de la sumatoria, el cual es siempre cero.

Casi todas las propiedades estudidadas para la transformada bilateral se cumplen tambien para la transformada unilateral, a excepción de la propiedad de desplazamiento en el tiempo.

Retardo en el Tiempo

Sea

$$x[n] \xrightarrow{\mathscr{Z}^+} X^+(z) \tag{20}$$

Sabemos que $x[n]$ será causal entonces se tendrá

$$\begin{aligned} \mathscr{Z}^+\{x[n-k]\} &= z^{-k}[\sum_{l=-k}^{-1} x[l]z^{-l} + \sum_{l=0}^{\infty} x[l]z^{-l}] \\ \mathscr{Z}^+\{x[n-k]\} &= z^{-k}[\sum_{l=-1}^{-k} x[l]z^{-l} + X^+(z)] \end{aligned} \tag{21}$$

Haciendo el cambio de variable $n = -l$ se tendrá

$$\mathscr{Z}^+\{x[n-k]\} = z^{-k}[\sum_{n=1}^{k} x[-n]z^{n} + X^+(z)], \quad k > 0 \tag{22}$$

Adelanto en el Tiempo

Sea

$$x[n] \xrightarrow{\mathscr{Z}^+} X^+(z) \tag{23}$$

Sabemos que $x[n]$ será causal entonces se tendrá

$$\mathscr{Z}^+\{x[n+k]\} = z^{-k}\sum_{n=0}^{\infty} x[n+k]z^{-n} = z^{k}\sum_{l=k}^{\infty} x[l]z^{-l} \tag{24}$$

Haciendo el cambio de variable $n = k - l$ se tendrá

$$X^+(z) = \sum_{l=0}^{k-1} x[l]z^{-l} + \sum_{l=k}^{\infty} x[l]z^{-l} \tag{25}$$

Combinando la ecuación 25 obtendremos finalmente

$$\mathscr{Z}^+\{x[n+k]\} = z^{k}[X^+(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x[n]z^{-n}], \quad k > 0 \tag{26}$$

1.2.1. Transformada Z de Funciones Elementales

Escalon Unitario

Sea $x[n] = \mu(n)$

Usando la definición de la transformada Z unilateral y operando se tendrá.

$$\begin{aligned} X^{+}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu(n) z^{-n} \\ X^{+}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \end{aligned} \tag{27}$$

Sabemos que la sumatoria 27 es una serie geométrica cuya fórmula general es

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \frac{a}{1-r} \tag{28}$$

De 28 se tendrá finalmente que

$$X^{+}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} \tag{29}$$

Rampa Unitaria

Sea $x[n] = n$ Usando la definición de la transformada Z unilateral y operando se tendrá.

$$X^{+}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} \tag{30}$$

Expandiendo la sumatoria tendremos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + ... + nz^{-n} \tag{31}$$

Multiplicando 31 por $-2z^{-1}$

$$-2z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + ... + nz^{-n} \tag{32}$$

Sumando 31 y 32 se tendrá

$$\sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} = \frac{z^{-1} - 2nz^{-(n+1)} + nz^{-(n+2)}}{(1-z^{-1})^2} \tag{33}$$

Llevando el límite cuando n tiende a ∞ en 33 se tendrá finalmente.

$$X^{+}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \tag{34}$$

Función Polinomial

Sea $x[n] = a^n$

Usando la definición de la transformada Z unilateral y operando se tendrá.

$$\begin{aligned} X^+(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \\ X^+(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n \end{aligned} \tag{35}$$

Tendremos que 35 tiene la misma forma que 28, por lo que podemos dar una respuesta directamente.

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \tag{36}$$

Función Exponencial

Sea $x[n] = e^{-an}$

Usando la definición de la transformada Z unilateral y operando se tendrá.

$$\begin{aligned} X^+(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-an} z^{-n} \\ X^+(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-a} z^{-1})^n \end{aligned} \tag{37}$$

Tendremos que 37 tiene la misma forma que 28, por lo que podemos dar una respuesta directamente.

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-an} z^{-n} = \frac{1}{1 - e^{-a} z^{-1}} \tag{38}$$

Función Senoidal

La identidad de Euler establece que $sen(\omega n) = \frac{e^{i\omega n} - e^{-i\omega n}}{2i}$

Usando la definición de la transformada Z unilateral y usando la propiedad de linealidad se tendrá.

$$\begin{aligned} X^+(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{e^{iwn} - e^{-iwn}}{2i}) z^{-n} \\ X^+(z) &= \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} e^{iwn} z^{-n} - \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iwn} z^{-n} \\ X^+(z) &= \frac{1}{2i} (\sum_{n=0}^{\infty} e^{iwn} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iwn} z^{-n}) \end{aligned} \tag{39}$$

Tendremos que 39 tiene la misma forma que 28, por lo que, operando se tendrá.

$$
\begin{aligned}
X^+(z) &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-z^{-1}e^{i\omega}} - \frac{1}{1-z^{-1}e^{-i\omega}}\right) \\
X^+(z) &= \frac{z^{-1}sen(\omega)}{1+z^{-2}-2z^{-1}cos(\omega)}
\end{aligned} \tag{40}
$$

Para función coseno se tendrá que a identidad de Euler establece que $cos(\omega n) = \frac{e^{i\omega n}+e^{-i\omega n}}{2}$

Usando la definición de la transformada Z unilateral y la propiedad de linealidad se tendrá.

$$
\begin{aligned}
X^+(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{i\omega n}+e^{-i\omega n}}{2}\right)z^{-n} \\
X^+(z) &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{iwn}z^{-n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-iwn}z^{-n} \\
X^+(z) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{iwn}z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iwn}z^{-n}\right)
\end{aligned} \tag{41}
$$

Tendremos que 41 tiene la misma forma que 28, por lo que, operando se tendrá.

$$
\begin{aligned}
X^+(z) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z^{-1}e^{i\omega}} + \frac{1}{1-z^{-1}e^{-i\omega}}\right) \\
X^+(z) &= \frac{1-z^{-1}cos(\omega)}{1+z^{-2}-2z^{-1}cos(\omega)}
\end{aligned} \tag{42}
$$

1.3. Ejemplos

- $e^{-at}sen(\omega t)$

  Sea su representación en tiempo discreto $x[n] = e^{-aTn}sen(\omega Tn)$, usaremos la propiedad de multiplicación por una secuencia exponencial para su resolución.

  De 40 sabemos que

$$
\begin{aligned}
X^+(z) &= \frac{z^{-1}sen(\omega T)}{1+z^{-2}-2z^{-1}cos(\omega T)} \\
X^+\left(\frac{z}{e^{-aT}}\right) &= \frac{\left(\frac{z}{e^{-aT}}\right)^{-1}sen(\omega T)}{1+\left(\frac{z}{e^{-aT}}\right)^{-2}-2\left(\frac{z}{e^{-aT}}\right)^{-1}cos(\omega T)} \\
X^+\left(\frac{z}{e^{-aT}}\right) &= \frac{e^{-aT}z^{-1}sen(\omega T)}{1+e^{-2aT}z^{-2}-2z^{-1}e^{-aT}cos(\omega T)}
\end{aligned} \tag{43}
$$

- $e^{-at}cos(\omega t)$

  Sea su representación en tiempo discreto $x[n] = e^{-aTn}cos(\omega Tn)$, usaremos la propiedad de multiplicación por una secuencia exponencial para su resolución.

De 42 sabemos que

$$\begin{aligned} X^+(z) &= \frac{1 - z^{-1}cos(\omega T)}{1 + z^{-2} - 2z^{-1}cos(\omega T)} \\ X^+(\frac{z}{e^{-aT}}) &= \frac{1 - (\frac{z}{e^{-aT}})^{-1}cos(\omega T)}{1 + (\frac{z}{e^{-aT}})^{-2} - 2(\frac{z}{e^{-aT}})^{-1}cos(\omega T)} \\ X^+(\frac{z}{e^{-aT}}) &= \frac{1 - e^{-aT}z^{-1}cos(\omega T)}{1 + e^{-2aT}z^{-2} - 2e^{-aT}z^{-1}cos(\omega T)} \end{aligned} \tag{44}$$

- $x[n] = \frac{-1}{n}(\frac{1}{2})^n$

  Usaremos la propiedad de la diferenciación para resolver este problema, para ello procederemos como sigue.

$$\begin{aligned} nx[n] &= -(\frac{1}{2})^n \\ \mathscr{Z}\{nx[n]\} &= -z\frac{dX(z)}{dz} \\ -z\frac{dX(z)}{dz} &= \frac{-1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \\ \frac{dX(z)}{dz} &= \frac{-2}{1 - 2z} \\ X(z) &= log(1 - 2z) \end{aligned} \tag{45}$$

- $x[n] = 2(\frac{1}{2})^n - (\frac{1}{4})^n$

  Por la naturaleza de la secuencia tendremos

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{-1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \\ X(z) &= \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} \end{aligned} \tag{46}$$

- **Sean las secuencias** $x_1[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2], x_2[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ **calcular** $\mathscr{Z}(x_1[n] * x_2[n])$

  Usaremos la propiedad de la convolución para resolver este problema

$$\begin{aligned} X_1(z) &= 1 + 2z^{-1} + z^{-2} \\ X_2(z) &= 1 - z^{-1} \\ X(z) &= X_1(z)X_2(z) \\ X(z) &= 1 + z^{-1} - z^{-2} - z^{-3} \end{aligned} \tag{47}$$

2. Función de Transferencia

La función de transferencia de un sistema lineal se define como el cociente de la transformada de Laplace de la variable de salida y la transformada de Laplace de la variable de entrada, todo esto con condiciones iniciales igual a cero. Esta relación describe la dinámica del sistema a considerar; una función de transferencia debe ser definida solo para sistemas lineales, estacionarios. Un sistema no estacionario(variante en el tiempo) tiene más de una variable que varia en el tiempo y la transformada de Laplace no debe ser usada. Una función de transferencia da una descripción de la entrada y salida del sistema, pero no incluye ninguna información con respecto a la estructura interna del sistema ni su comportamiento.Dorf y cols. (2005)

El proceso parte de las ecuaciones diferenciales que modelan el sistema, se usa la transformada de Laplace y se calcula el cociente $\frac{salida}{entrada}$ en función de la variable de Laplace s

2.1. Ejemplos

- Hallar la función de transferencia del sistema mostrado en la figura Usando KLV

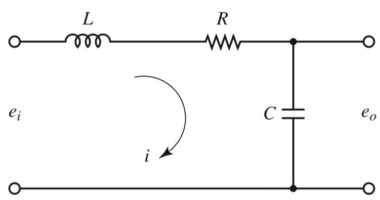

Figura 1: LRC en serie.

en el circuito mostrado se tendran las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} e_i &= L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int idt \\ e_o &= \frac{1}{C}\int idt \end{aligned} \tag{48}$$

Usando la transformada de Laplace en 48 se tendrá

$$\begin{aligned} E_i(s) &= LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{C}\frac{1}{s}I(s) \\ E_o(s) &= \frac{1}{C}\frac{1}{s}I(s) \end{aligned} \tag{49}$$

De 49 se podrá facilmente calcular

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \tag{50}$$

- Hallar la función de transferencia del sistema mostrado en la figura Usando KCL

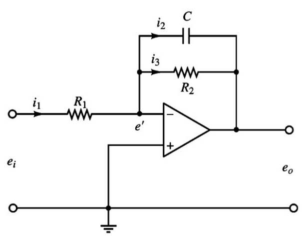

Figura 2: Op-amp ideal.

en el circuito dado se tendrá lo siguiente

$$
\begin{aligned}
i_1 &= \frac{e_i - e'}{R_1} \\
i_2 &= C\frac{d(e' - e_o)}{dt} \\
i_3 &= \frac{e' - e_o}{R_2} \\
i_1 &= i_2 + i_3 \\
\frac{e_i - e'}{R_1} &= C\frac{d(e' - e_o)}{dt} + \frac{e' - e_o}{R_2}
\end{aligned} \tag{51}
$$

Usando la transformada de Laplace en 51 se tendrá.

$$\frac{E_i}{R_1} = -\frac{R_2Cs + 1}{R_2} \tag{52}$$

De 52 se podrá calcular

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{R_2Cs + 1} \tag{53}$$

- Hallar la función de transferencia $\frac{Y(s)}{U(s)}$ del sistema mostrado en la figura Las

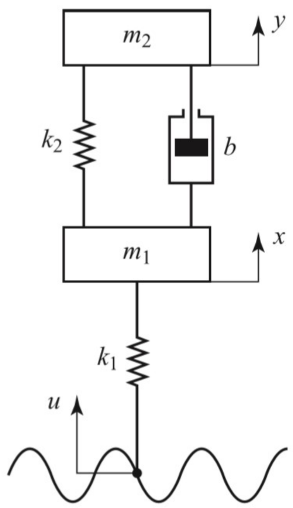

Figura 3: Sistema mecánico.

ecuaciones apartir de la segunda ley de Newton serán.

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{x} &= k_2(y - x) + b(\dot{y} - \dot{x}) + k_1(u - x) \\
m_2\ddot{y} &= -k_2(y - x) - b(\dot{y} - \dot{x})
\end{aligned} \tag{54}
$$

Usando la transformada de Laplace en 54

$$X(s)(m_1s^2 + bs + k_1 + k_2) = Y(s)(bs + k_2) + k_1U(s) \tag{55}$$

Por condición de la función de transferencia $U(s) = 0$, ordenando tendremos la función de transferencia.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_1(bs + k_2)}{m_1m_2s^4 + (m_1 + m_2)bs^3 + [k_1m_2 + (m_1 + m_2)k_2]s^2 + k_1bs + k_1k_2} \tag{56}$$

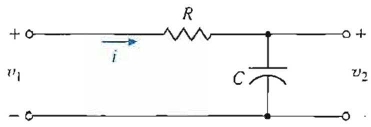

Figura 4: Circuito RC en Serie.

- Hallar la función de transferencia del sistema mostrado en la figura

  Usando KVL en la red se tiene

$$\begin{aligned} v_1(t) &= i(t)R + \frac{1}{C}\int idt \\ v_2(t) &= \frac{1}{C}\int idt \end{aligned} \tag{57}$$

  Llevando al dominio de Laplace se tiene

$$\begin{aligned} V_1(s) &= I(s)(R + \frac{1}{Cs}) \\ V_2(s) &= I(s)\frac{1}{Cs} \end{aligned} \tag{58}$$

  Finalmente

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{sRC+1} \tag{59}$$

3. Representación en Variables de Estado

El estado de un sistema en un instante dado, es el valor de unas variables internas del sistema(en ocaciones ficticias y no accesibles) que describen la evolución del mismo a lo largo del tiempo.

Estado: El estado de un sistema dinámico en cualquier instante de tiempo t_0 es

el conjunto más pequeño de números suficiente para determinar el comportamiento o disposición del sistema para todo tiempo $t \geq t_0$.

Variable de Estado:

Se llama al conjunto linealmente independiente de variables que se utilizan para especificar el estado de un sistema.

Se dice que un conjunto de n variables $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ es linealmente independiente si no existe un conjunto de constantes $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$ que sean todas cero, que satisfagan lo siguiente

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + ... + c_nx_n = 0 \tag{60}$$

Ecuación de Estado:

Las variables de estado deben formularse de tal modo que si uno de conoce sus cariables en un instante dado, junto con los valores de las variables de entrada para este momento y para todo momento futuro, entonces la disposición del sistema y estas variables se determinan completamente para ese momento y para cualquier momento futuro.

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_n) \quad x_1(t_0) = x_{1t-0} \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_n) \quad x_2(t_0) = x_{2t-0} \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_n) \quad x_n(t_0) = x_{nt-0}
\end{aligned} \tag{61}$$

Donde t_0 =tiempo inicial

El espacio de estados es un espacio matemático de n dimensiones cuyas coordenadas son las variables de estado. Por lo tanto en cualquier instante, el estado del sistema esta representado por un punto en el espacio de estados.

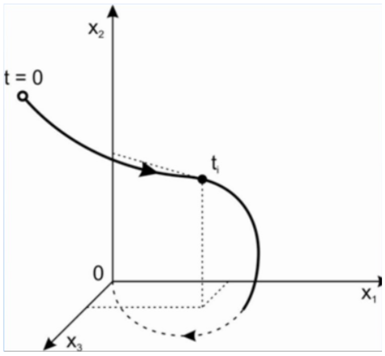

Figura 5: Espacio de Estados.

3.1. Ejemplos

- Sea un sistema, cuyas ecuaciones que lo modelan son $u(t) - kx(t) - b\dot{x}(t) = m\ddot{x}(t)$. Hallar su representación en variables de estado

  Seleccionaremos las siguientes variables de estado.

$$\begin{aligned}
x_1 &= x(t) = y(t) \\
x_2 &= \dot{x}(t) \\
u_1 &= u(t)
\end{aligned} \tag{62}$$

  Reemplazando estas variables en la ecuación Dadas

$$\begin{aligned}
\dot{x_1} &= x_2(t) \\
\dot{x_2} &= \frac{-k}{m}x_1(t) + \frac{-b}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}u_1(t) \\
y(t) &= x_1
\end{aligned} \tag{63}$$

En forma matricial se tendrá

$$\begin{bmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{-k}{m} & \frac{-b}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix} u_1$$
$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \tag{64}$$

- Sea un sistema, cuyas ecuaciones que lo modelan son $m_1\ddot{y_1} + b\dot{y_1} + k(y_1 - y_2) = 0$ y $m_2\ddot{y_2} + k(y_2 - y_1) = u$. Hallar su representación en variables de estado

  Seleccionaremos las siguientes variables de estado.

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1\\ x_2 &= \dot{y_1}\\ x_3 &= y_2\\ x_4 &= \dot{y_2} \end{aligned} \tag{65}$$

  Reemplazando estas variables en la ecuación Dadas

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2\\ \dot{x_2} &= \frac{1}{m_1}(-b\dot{y_1} - k(y_1 - y_2))\\ \dot{x_3} &= x_4\\ \dot{x_4} &= \frac{1}{m_2}(-k(y_2 - y_1) + u) \end{aligned} \tag{66}$$

  En forma matricial se tendrá

$$\begin{bmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\\ \dot{x_3}\\ \dot{x_4}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ \frac{-k}{m_1} & \frac{-b}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \frac{k}{m_2} & 0 & \frac{-k}{m_2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \frac{1}{m_2}\end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} \tag{67}$$

- Sea un sistema, cuyas ecuaciones que lo modelan son $i_(c) = C\frac{dv_c}{dt} = u(t) - i_L$, $L\frac{di_L}{dt} = -Ri_L + v_c$ y $v_o = Ri_L$.

  Hallar su representación en variables de estado

  Seleccionaremos las siguientes variables de estado.

$$\begin{aligned} x_1 &= v_c\\ x_2 &= i_L\\ y &= v_o \end{aligned} \tag{68}$$

Reemplazando estas variables en la ecuación Dadas

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= \frac{-1}{C}x_2 + \frac{1}{C}u \\ \dot{x_2} &= \frac{1}{L}x_1 + \frac{-R}{L}x_2 \end{aligned} \tag{69}$$

En forma matricial se tendrá

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{C} \\ \frac{1}{L} & \frac{-R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{70}$$

- Sea un sistema, cuyas ecuaciones que lo modelan son $\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 5\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + y(t) + \int_0^t y(\tau)d\tau = r(\tau)$. Hallar su representación en variables de estado

  Seleccionaremos las siguientes variables de estado.

$$\begin{aligned} x_1 &= \int_0^t y(\tau)d\tau \\ x_2 &= \dot{x_1} \\ x_3 &= \dot{y} \\ x_4 &= \ddot{y} \end{aligned} \tag{71}$$

  En forma matricial se tendrá

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \\ \dot{x_4} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{72}$$

4. Criterio de Controlabilidad y Observabilidad

Criterio de Controlabilidad:

Un sistema es completamente controlable si todas las variables de estado del proceso pueden ser controladas para alcanzar un determinado objetivo en un tiempo finito por un control sin restricciones $u(t)$, si alguna de las variables de estado no depende de $u(t)$ entonces se dice que esta variable es incontrolable, y en el caso esto suceda, se dice que el sistema no es completamente controlable. La controlabilidad puede ser definida tambien para las salidas del sistema, asi que se debe diferenciar entre controlabilidad de estados y controlabilidad del sistema.

Se dice que el estado $x(t)$ es controlable en $t = t_0$ si existe una entrada $u(t)$ que llevará el estado a cualquier estado final $x(t_1)$ por un tiempo finito.

Sea las siguientes definiciones

$$\begin{aligned} e^{A(t-\tau)} &= \sum_{i=0} \gamma_i A^i \\ x &= \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bud\tau = \sum_{i=0} \gamma_i (t-\tau) A^i Bud\tau \\ \rho_i &= \int \gamma_i u(\tau) d\tau x(t) = \sum_{i=0} A^i B \rho_t = \begin{bmatrix} B & AB & ... & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1(t) \\ : \\ : \\ \rho_4(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{73}$$

La matriz de controlabilidad estará dada por

$$\begin{bmatrix} B & AB & ... & A^{n-1}B \end{bmatrix} \tag{74}$$

El sistema será controlable solo si esta matriz es de rango máximo. **Criterio de Observabilidad:** Dado un sistema LTI descrito por ecuaciones dinámicas, un estado $x(t)$ es observable si para una entrada $u(t)$, existe un tiempo finito $t_f \geq t_0$, tal que, conociendo $u(t)$ para $t_0 \leq t < t_f$ y las matrices A,B,C y D y la salida $y(t)$ para en intervalo $t_0 \leq t < t_f$ sean suficientes para determinar $x(t_0)$. Si todos los estados de un sistema son observables para un tiempo finito t_f se puede decir que el sistema es completamente observable.

Sea la matriz de Observabilidad

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ : \\ : \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{75}$$

Si esta matriz es de rango completo el sistema es observable.

4.1. Ejemplos

- Determinar si el siguiente sistema es controlable

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} B & AB & ... & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{76}$$

El sistema es controlable

- Determinar si el siguiente sistema es controlable

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} B & AB & ... & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 2 & 5 & 21 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \tag{77}$$

  El sistema es controlable

- Determinar si el siguiente sistema es observable

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{78}$$
$$\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

  El sistema es observable

- Determinar si el siguiente sistema es observable

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 13 & 4 & 17 \end{bmatrix} \tag{79}$$

  El sistema no es observable

5. Solución de Sistema de Ecuaciones Mediante la Función de Transferencia

Usaremos la transformada inversa de Laplace para solucionar el sistema de ecuaciones mediante la función de transferencia.

5.1. Ejemplos

- Sea la siguiente función de transferencia $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{5}{s^3+10s^2+200s}$ determinar su respuesta a una entrada de escalon unitario $R(s) = \frac{1}{s}$.

  La respuesta del sistema estará dada por

$$Y(s) = \frac{5}{s(s^3 + 10s^2 + 200s)} \tag{80}$$

Desarrollando por fracciones parciales, la ecuación 80 se expresara como

$$Y(s) = \frac{-1}{800s} + \frac{1}{40s^2} + \frac{s\frac{1}{800} - \frac{1}{80}}{s^2 + 10s + 200}$$
$$Y(s) = \frac{1}{40s^2} + \frac{-1}{800s} + \frac{-3}{160}\frac{1}{(s+5)^2 + 175} + \frac{1}{800}\frac{s+5}{(s+5)^2 + 175} \tag{81}$$

Tomando la transformada inversa de Laplace en la ecuación 81 se tendrá.

$$y(t) = \frac{t}{40} + \frac{-1}{800} + \frac{-3}{160}\frac{1}{5\sqrt(7)}e^{-5t}sen(5\sqrt(7)t) + \frac{1}{800}e^{-5t}cos(5\sqrt(7)t) \tag{82}$$

- Sea la siguiente función de transferencia $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^3+10s^2+200s}$ determinar su respuesta a una entrada de escalon unitario $R(s) = \frac{1}{s^2}$.

  La respuesta del sistema estará dada por

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s^3 + 10s^2 + 200s)} \tag{83}$$

Desarrollando por fracciones parciales, la ecuación 83 se expresara como

$$Y(s) = \frac{1}{40s^3} + \frac{-1}{800s^2} + \frac{-1}{1600s} + \frac{1}{1600}\frac{s+5}{(s+5)^2 + 175} + \frac{1}{640}\frac{1}{(s+5)^2 + 175} \tag{84}$$

Tomando la transformada inversa de Laplace en la ecuación 84 se tendrá.

$$y(t) = \frac{t^2}{80} + \frac{-1}{1600} + \frac{-t}{800} + \frac{1}{1600}e^{-5t}cos(5\sqrt(7)t) + \frac{1}{5\sqrt(7)640}e^{-5t}sen(5\sqrt(7)t) \tag{85}$$

- Sea la siguiente función de transferencia $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s}{s^2+4s+5}$ determinar su respuesta a una entrada de escalon unitario $R(s) = \frac{1}{s}$.

  La respuesta del sistema estará dada por

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 5} \tag{86}$$

Desarrollando por fracciones parciales, la ecuación 86 se expresara como

$$Y(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 1} + \frac{-2}{(s+2)^2 + 1} \tag{87}$$

Tomando la transformada inversa de Laplace en la ecuación 87 se tendrá.

$$y(t) = e^{-2t}cos(t) - 2e^{-2t}sen(t) \tag{88}$$

- Sea la siguiente función de transferencia $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}$ determinar su respuesta a una entrada de escalon unitario $R(s) = \frac{1}{s}$.

  La respuesta del sistema estará dada por

$$Y(s) = \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} \tag{89}$$

  Desarrollando para llegar a la forma $L^{-1}(\frac{(2n-1)!\sqrt{\pi}}{2^{sn+\frac{1}{2}}})$, 89 se expresara como

$$Y(s) = \frac{3\pi^{\frac{1}{2}}}{2^2 s^{\frac{3}{2}}} \tag{90}$$

  Tomando la transformada inversa de Laplace en la ecuación 90 se tendrá.

$$y(t) = \frac{4t^{\frac{3}{2}}}{3\pi^{\frac{1}{2}}} \tag{91}$$

6. Solución de las Ecuaciones de Estado

Resolveremos las ecuaciones diferenciales de las variables de estado en el dominio del tiempo.

6.1. Ejemplos

- Sea la siguiente ecuación diferencial que modela un sistema $\ddot{y} + 4\dot{y} + y = 5r(t)$ calcular la respuesta en el tiempo del sistema para $r(t) = \mu(t)$. La ecuación diferencial quedará

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + y = 5 \tag{92}$$

  Esta ecuación es una ODE de segundo orden con coeficientes constantes, la solución general estará dada por la ecuación característica $m^2 + 4m + 1 = 0$. La solución particular será simplemente 5, entonces se tendrá

$$y_p + y_g = c_1 e^{\frac{t(-\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}} + c_2 e^{\frac{-t(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}} + 5 \tag{93}$$

  Donde c_1 y c_2 dependen de las condiciones iniciales del sistema.

- Sea la siguiente ecuación diferencial que modela un sistema $\ddot{y} + 4\dot{y} + y = r(t)$ calcular la respuesta en el tiempo del sistema para $r(t) = t$. La ecuación diferencial quedará

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + y = t \tag{94}$$

Esta ecuación es una ODE de segundo orden con coeficientes constantes, la solución general estará dada por la ecuación característica $m^2 + 4m + 1 = 0$. La solución particular será $t - 4$, entonces se tendrá

$$y_p + y_g = c_1 e^{\frac{t(-\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}} + c_2 e^{\frac{-t(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}} + t - 4 \tag{95}$$

Donde c_1 y c_2 dependen de las condiciones iniciales del sistema.

- Sea la siguiente ecuación diferencial que modela un sistema $u(t) - kx(t) - b\dot{x}(t) = m\ddot{x}(t)$ calcular la respuesta en el tiempo del sistema para $u(t) = 1$ para $m = 1, k = 1, b = 1$.

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = 1 \tag{96}$$

Esta ecuación es una ODE de segundo orden con coeficientes constantes, la solución general estará dada por la ecuación característica $m^2 + m + 1 = 0$. La solución particular será 1, entonces se tendrá

$$y_p + y_g = e^{\frac{-t}{2}}(c_1 cos(\frac{\sqrt{3}t}{2}) + c_2 sen(\frac{\sqrt{3}t}{2})) + 1 \tag{97}$$

Donde c_1 y c_2 dependen de las condiciones iniciales del sistema.

- Sea la siguiente ecuación diferencial que modela un sistema $u(t) - kx(t) - b\dot{x}(t) = m\ddot{x}(t)$ calcular la respuesta en el tiempo del sistema para $u(t) = t$ para $m = 1, k = 1, b = 1$.

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = t \tag{98}$$

Esta ecuación es una ODE de segundo orden con coeficientes constantes, la solución general estará dada por la ecuación característica $m^2 + m + 1 = 0$. La solución particular será $t - 1$, entonces se tendrá

$$y_p + y_g = e^{\frac{-t}{2}}(c_1 cos(\frac{\sqrt{3}t}{2}) + c_2 sen(\frac{\sqrt{3}t}{2})) + t - 1 \tag{99}$$

Donde c_1 y c_2 dependen de las condiciones iniciales del sistema.

7. Lugar Geométrico de las Raices

Es un metodo gráfico para examinar el comportamiento de las raices de un sistema frente a la variación de algun parametro en lazo cerrado. Nos permite a determinar la estabilidad del sistema.

Sea el sistema en lazo cerrado

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)} \tag{100}$$

Podemos escribir el denominador $1 + H(s)G(s)$ como sigue

$$0 = 1 + K\frac{(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)...(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)...(s-p_n)} \tag{101}$$

Los lugares de las raíces para el sistema son los lugares de los polos en lazo cerrado cuando la ganancia K varía de cero a infinito. Ogata (2003)

7.1. Ejemplos

- Graficar el lugar de las raices para $\frac{1}{s(s^2+5s+6)}$

  Observando la función de transferencia, podemos ver que tiene infitos ceros, y 3 polos en $s = 0, -3, -2$

  Podemos reescribir la función de transferencia en lazo abierto como $G(s)H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ de aqui tendremos que $N(s) = 1$ y $D(s) = s^3 + 5s^2 + 6s$

  La ecuación característica será $D(s) + KN(s) = s^3 + 5s^2 + 6s + K = 0$

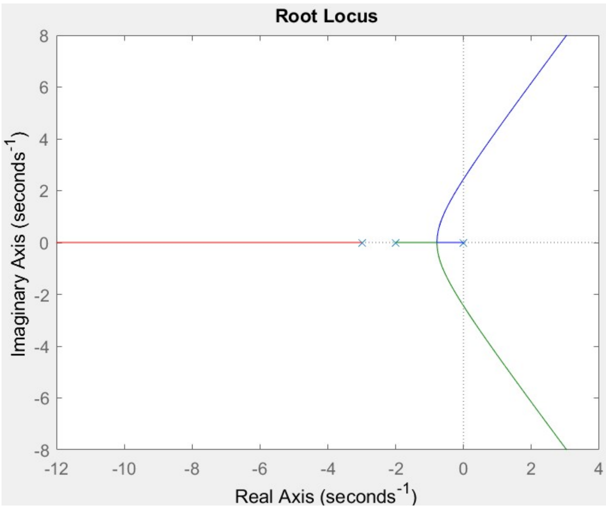

Figura 6: Ejemplo 1

- Graficar el lugar de las raices para $\frac{s+3}{s(s^2-s-2)}$

```
%Ejemplo 2
num=[1 3];
den=[1 -1 -2];
h=tf(num,den);
rlocus(h)
```

- Graficar el lugar de las raices para $\frac{s+1}{s^3+4s^2+6s+4}$

```
%Ejemplo 3
num=[1 1];
den=[1 4 6 4];
h=tf(num,den);
rlocus(h)
```

- Graficar el lugar de las raices para $\frac{s^2+2s+2}{s^4+9s^3+33s^2+51s^2+26s}$

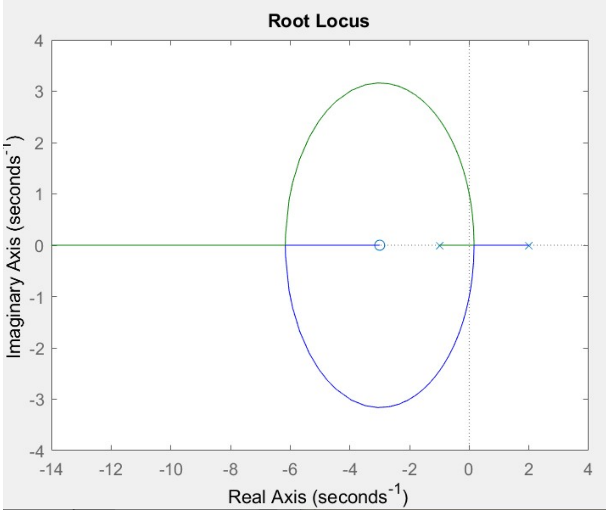

Figura 7: Ejemplo 2

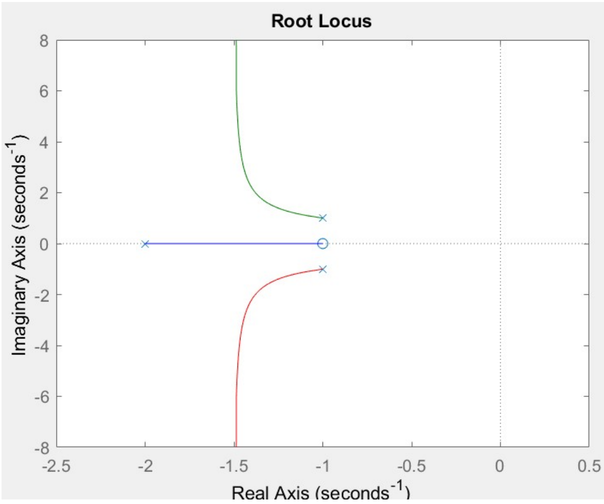

Figura 8: Ejemplo 3

```
%Ejemplo 4
num=[1 2 2];
den=[1 9 33 51 26 0];
h=tf(num,den);
rlocus(h)
```

8. Metodos para la Asignación de Polos para el Diseño de Controladores

La fórmula de Ackermann es un metodo de diseño para resolver este problema de asignación de polos para sistemas LTI, con este metodo se puede hacer el diseño en un solo paso para sistemas representados en espacio de estados. Consiste en calcular una nueva ganancia en lazo cerrado K, esta se calculará usando la siguiente fórmula.

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} M_c^{-1} p_c(A) \tag{102}$$

Donde

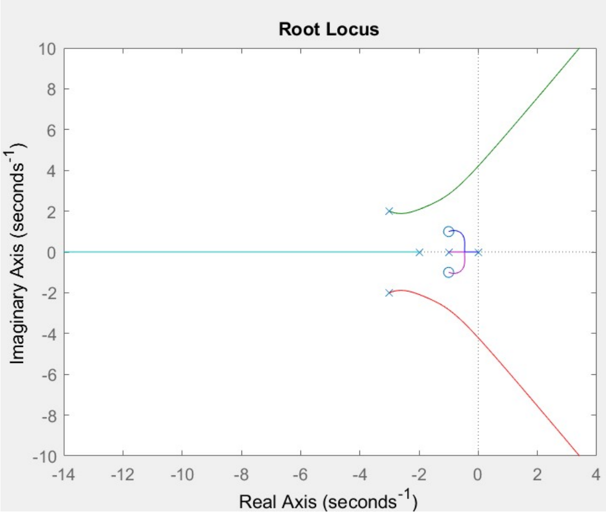

Figura 9: Ejemplo 4

- M_c^{-1} es la inversa de la matriz de controlabilidad
- p_c es el polinomio que contiene los polos en lazo cerrado que se desean incluir en el sistema.

$$p_c = S^n + a_{n-1}S^{n-1} + a_{n-2}S^{n-2} + ... + a_1 S + a_0 \tag{103}$$

8.1. Ejemplos

- Dadas las siguientes matrices de un sistema en espacio de estados A, B, C calcular la ganancia en lazo cerrado K para posicionar los polos en lazo cerrado en -1 y -2

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -0{,}4 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \tag{104}$$

Solución

Se desea posicionar los polos en -1 y -2 entonces se tendrá

$$\begin{aligned} p_c &= (S+1)(S+2) \\ p_c &= S^2 + 3S + 2 \\ p_c(A) &= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -0{,}4 \end{bmatrix}^2 + 3\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -0{,}4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ p_c(A) &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1{,}4 & -1{,}84 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -0{,}4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ p_c(A) &= \begin{bmatrix} -2 & -3{,}2 \\ 1{,}6 & -1{,}04 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{105}$$

La inversa de la matriz de controlabilidad será

$$\begin{aligned} M_c &= \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} \\ M_c &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1{,}8 \end{bmatrix} \\ M_c^{-1} &= \frac{1}{7{,}8}\begin{bmatrix} 1{,}8 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{106}$$

Reemplazando 106 y 105 en la fórmula de Ackermann y operando, se tendrá finalmente.

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} M_c^{-1} p_c(A) = \begin{bmatrix} -0{,}31 & -0{,}95 \end{bmatrix} \tag{107}$$

Referencias

Dorf, R. C., Bishop, R. H., Canto, S. D., Canto, R. D., y Dormido, S. (2005). *Sistemas de control moderno*. Pearson Educación.

Ogata, K. (2003). *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación. Descargado de `https://books.google.com.pe/books?id=QK148EPC_m0C`

Proakis, J. G., y Manolakis, D. G. (1996). *Digital signal processing*. Prentice Hall New Jersey.

Schafer, R. W., y Oppenheim, A. V. (1989). *Discrete-time signal processing*. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ.