

Control De Posición De Brazo Levitado Por Hélice

Quispe Condori Hanan Ronaldo

Resumen—En este proyecto implementaremos el control de un brazo levitado por hélice, esto se logrará modificando la velocidad de giro de la hélice con el fin de que el brazo se encuentre en una posición deseada.

I. MODELAMIENTO MATEMÁTICO

El modelo matemático de este sistema se logrará conectando el sistema del motor DC, sistema de propulsión de la hélice es el siguiente y el sistema del brazo.

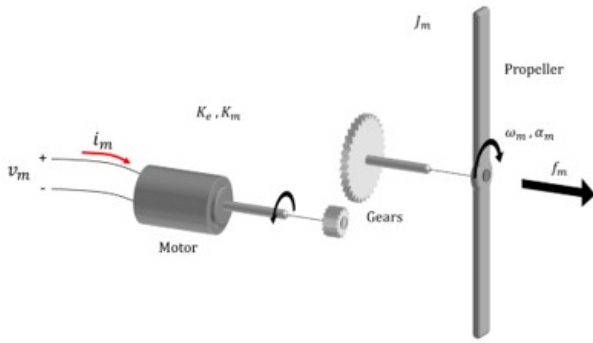


Figura 1. Diagrama sistema motor DC-hélice.

En el motor DC se tendrá.

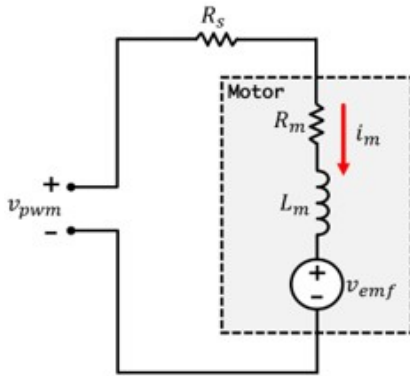


Figura 2. Diagrama sistema motor DC-hélice.

Usando la ley de voltajes de Kirchhoff se tendrá.

$$-v_{pwm} + i_m R_m R_s + L_m \frac{di}{dt} - v_{emf} = 0 \quad (1)$$

Tendremos que a medida que transcurra el tiempo, el factor $\frac{di}{dt} \approx 0$ por lo que la ecuación 1 quedará.

$$-v_{pwm} + i_m R_m R_s - v_{emf} = 0 \quad (2)$$

Las ecuaciones para la fuerza de empuje de la hélice son [1].

$$\begin{aligned} \tau_m &= K_m i_m(t) \\ \tau_m &= J_m \alpha_m(t) \\ f_m &= K_t \omega_m(t)^2 \\ v_{emf} &= K_e \omega_m(t) \end{aligned} \quad (3)$$

Donde

- τ_m es el torque ejercido por el motor.
- ω_m es la velocidad angular del motor.
- α_m es la aceleración angular de la hélice.
- v_{emf} es el voltaje de retorno del motor.
- K_t es el coeficiente de empuje de la hélice.
- K_m es el coeficiente del torque del motor.
- J_m es el momento de inercia del motor

Reemplazando 3 en 2 y despejando $\alpha_m(t)$ se tendrá.

$$\alpha_m(t) = \frac{K_m v_{pwm} - K_e \omega_m(t)}{J_m R_s + R_m} \quad (4)$$

Agregaremos un término de fricción correspondiente a la velocidad angular $-K_f \omega_m(t)$, en 4 se tendrá.

$$\alpha_m(t) = \frac{K_m v_{pwm} - K_e \omega_m(t)}{J_m R_s + R_m} - K_f \omega_m(t) \quad (5)$$

Donde K_f es un coeficiente de fricción.

En el brazo se tendrá la siguiente ecuación apartir de la segunda ley de Newton.

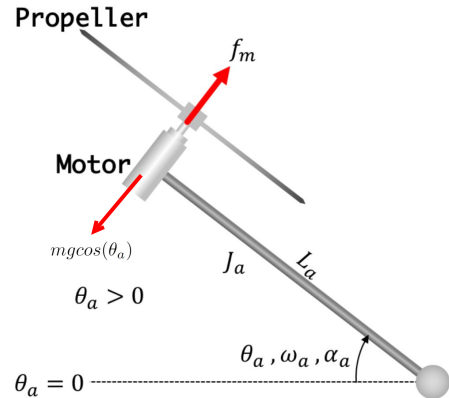


Figura 3. Diagrama de cuerpo libre en el brazo.

$$\begin{aligned}
J_a \ddot{\theta}_a &= -mg \cos(\theta_a) + \tau_a \\
\tau_a &= L_a f_m \\
\ddot{\theta}_a &= -mg \cos(\theta_a) + f_m \frac{L_a}{J_a}
\end{aligned} \tag{6}$$

II. LINEALIZACIÓN DE LA PLANTA

Haremos un cambio de coordenadas centrado en los puntos de equilibrio.

$$\begin{aligned}
\omega_m(t) &= \omega_{mo} + \partial\omega_m \\
\theta_m(t) &= \theta_{mo} + \partial\theta_m
\end{aligned} \tag{7}$$

Usando la expansión en series de Taylor y 7 en la ecuación 6 se tendrá .

$$\partial \ddot{\theta}_m(t) = \frac{mg}{J_a} \sin(\theta_{mo}) \partial\theta_a + \frac{L_a}{J_a} 2K_t \omega_{mo} \partial\omega_m \tag{8}$$

Haciendo el mismo procedimiento en 5 se tendrá.

$$\partial \dot{\omega}_m(t) = \left(\frac{-K_m K_e}{J_m(R_s + R_m)} - K_f \right) \partial\omega_m + \frac{K_m}{J_m(R_s + R_m)} \partial v_{pwm} \tag{9}$$

Para simplificar el álgebra se harán los siguientes cambios de variable.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{K_m K_e}{J_m(R_s + R_m)} + K_f \\
B &= \frac{K_m}{J_m(R_s + R_m)} \\
C &= \frac{mg}{J_a} \sin(\theta_{mo}) \\
D &= \frac{L_a}{J_a} 2K_t \omega_{mo}
\end{aligned} \tag{10}$$

Haciendo $\partial v_{pwm} = \partial\mu$ en 8; Reemplazando 10 en 8 y 9 y usando la transformada de Laplace se tendrá.

$$\begin{aligned}
s \Delta\omega_m(s) &= -A \Delta\omega_m(s) + B \Delta\mu(s) \\
\Delta\omega_m(s)(s + A) &= B \Delta\mu(s) \\
\frac{\Delta\omega_m(s)}{\Delta\mu(s)} &= \frac{B}{s + A} \\
s^2 \Delta\theta_a(s) &= C \Delta\theta_a(s) + D \Delta\omega_m(s) \\
\Delta\theta_m(s)(s^2 - C) &= D \Delta\omega_m(s) \\
\frac{\Delta\theta_a(s)}{\Delta\omega_m(s)} &= \frac{D}{s^2 - C} \\
\frac{\Delta\theta_a(s)}{\Delta\omega_m(s)} \frac{\Delta\omega_m(s)}{\Delta\mu(s)} &= \frac{B}{s + A} \frac{D}{s^2 - C} \\
\frac{\Delta\theta_a(s)}{\Delta\mu(s)} &= \frac{\Delta\theta_a(s)}{\Delta v_{pwm}(s)} \\
\frac{\Delta\theta_a(s)}{\Delta v_{pwm}(s)} &= \frac{BD}{(s + A)(s^2 - C)}
\end{aligned} \tag{11}$$

III. SENSIBILIDAD DEL SISTEMA

$Im + ReSe$ calculará la sensibilidad a variaciones de la masa, en C se hará $C = mc'$, donde $c' = \frac{g}{J_a} \sin(\theta_{mo})$. Para Lazo Abierto

$$\begin{aligned}
S_m^T &= \frac{\frac{dT}{T}}{\frac{dm}{m}} \\
T &= \frac{BD}{(s + A)(s^2 - mc')} \\
\frac{dT}{T} &= \frac{sc'm}{(s + A)(s^2 - mc')} \frac{dm}{m} \\
S_m^T &= \frac{sc'm}{(s + A)(s^2 - mc')} \\
S_m^T &= \frac{sC}{(s + A)(s^2 - C)}
\end{aligned} \tag{12}$$

Para Lazo Cerrado

$$\begin{aligned}
S_m^T &= \frac{\frac{dT}{T}}{\frac{dm}{m}} \\
T &= \frac{BD}{BD + (s + A)(s^2 - mc')} \\
\frac{dT}{T} &= \frac{sc'm}{BD + (s + A)(s^2 - mc')} \frac{dm}{m} \\
S_m^T &= \frac{sc'm}{BD + (s + A)(s^2 - mc')} \\
S_m^T &= \frac{sC}{BD + (s + A)(s^2 - C)}
\end{aligned} \tag{13}$$

IV. DIAGRAMA DE POLOS Y CEROS

Del denominador de la función de transferencia se tienen 3 polos, en A , \sqrt{C} y $\sqrt{-C}$

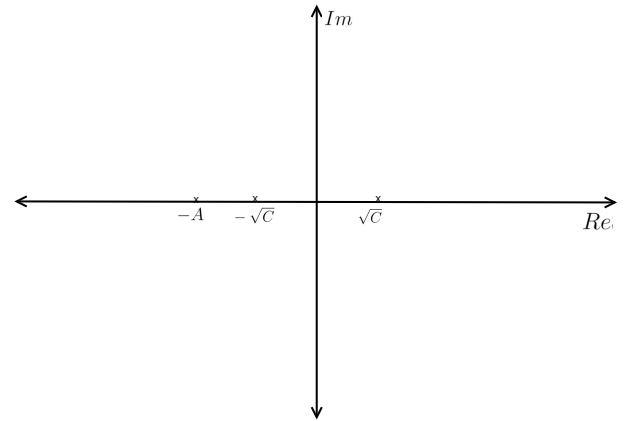


Figura 4. Diagrama de Polos y Ceros.

El sistema es inestable.

V. ERROR DE ESTADO ESTACIONARIO

El sistema es inestable, por eso no se podrá calcular el error de estado estacionario para este sistema.

VI. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

El denominador se expandirá de la siguiente manera

$$T = \frac{BD}{s^3 + s^2 A + s(-C) - AC + BD} \tag{14}$$

VI-A. Criterio de Routh

s^3	1	-C
s^2	A	-AC+BD
s	b1	
1	c1	

Figura 5. Arreglo de Routh.

$$b1 = \frac{-AC + AC - DB}{A} = \frac{-DB}{A} \quad (15)$$

$$c1 = -AC + DB \quad (16)$$

Vemos que existe un cambio de variable, el sistema es inestable.

VI-B. Criterio de Hurwitz

$$\Delta_1 = a_2 = A > 0$$

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{pmatrix} = -AC + AC + BD = DB > 0$$

$$\Delta_3 = \det \begin{pmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} = A(-C) - (-AC + BD) = -BD \quad (17)$$

No todos los determinantes son positivos, el sistema es inestable.

VII. LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAICES

Por simple inspección de los polos de la función de transferencia calculada en 11 podemos ver que el sistema es inestable ya que posee un polo en $s = \sqrt{C}$, grafiquemos el lugar geométrico de las raíces para este sistema

Procederemos a calcular la función de transferencia en lazo cerrado.

$$T = \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p} \quad (18)$$

Donde

- G_c es el controlador a usar, para la gráfica del lugar geométrico de las raíces, este será una constante.
- G_p es la función de transferencia de la planta en lazo abierto calculada en 11

Haciendo $G_c = k$ en el denominador se tendrá.

$$\begin{aligned} 1 + kG_p &= 0 \\ kG_p &= -1 \\ |kG_p| &= 1 \\ \angle kG_p &= \pi \end{aligned} \quad (19)$$

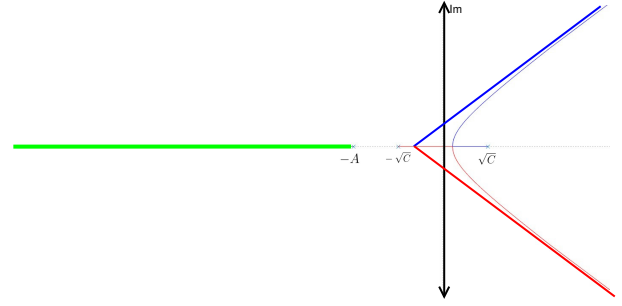


Figura 6. Lugar Geométrico de las Raíces.

Usando 19 y las demas reglas descritas en [2], se tendrá el siguiente gráfico.

Del gráfico podemos observar lo siguiente

- Existen tres polos por lo que tendremos el mismo número de ramas.
- El origen de las asíntotas es en el punto $-\frac{A}{3}$
- Los ángulos de estas rectas asíntotas son $\frac{\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}, -\pi$, este esta dado por la fórmula $\frac{(2k+1)\pi}{3}$

El gráfico del lugar geométrico de las raíces nos dice que el control proporcional no nos servirá para hacer nuestro sistema estable, mas cabe mencionar que la posición de los polos dependerá de los puntos de equilibrio elegidos según sea la aplicación deseada.

VIII. DISEÑO DEL CONTROLADOR

Usaremos un control PID para hacer nuestro sistema estable, con este fin se tendrá.

$$G_c = k_p + sk_d + k_i \quad (20)$$

Reemplazando 20 en 18 se tendrá

$$T = \frac{BD(k_i + sk_p + s^2k_d)}{s^4 + As^3 + (k_dBD - C)s^2 + s(BDk_p - AC) + BDk_i} \quad (21)$$

Para simplificar el algebra se usarán valores conocidos de las constantes mencionados en 21 y se elegirán puntos de equilibrio para las mismas [3], [4].

- $\sin(\theta_{mo}) = 0$
- $K_m = 0,0053$
- $K_3 = 0,0053$
- $J_m = 3 \times 10^{-6}$
- $J_a = 4,5 \times 10^{-4}$
- $R_s = 0,5$
- $R_m = 0,5$
- $L_a = 0,15$

Usando estos valores, se tendrán el valor de las constantes

$$\begin{aligned} A &= 11,473 \\ B &= 1766,667 \\ C &= 0 \\ D &= 8,18 \end{aligned} \quad (22)$$

Se puede observar que el valor de $C = 0$ hace que el sistema pase de ser inestable a marginalmente estable, esto hace que el sistema sea oscilante mas no estable.

Reemplazando 22 en 21 se tendrá.

$$\frac{14451,336(k_i + sk_p + s^2k_d)}{s^4 + 11,473s^3 + k_d14451,336s^2 + s14451,336k_p + 14451,336k_i} \quad (23)$$

23 posee 4 polos que podremos manipular cambiando k_i, k_p, k_d , ya que no fueron especificados los parametros de repuesta en transitorio ni condiciones de operación del sistema, podemos elegir cualquier punto o puntos en el semiplano negativo donde nuestro sistema será estable, el polo elegido será $s = -2,868$

Bajo esta premisa en el denominador de 23 se cumplira que:

$$\begin{aligned} s^4 + 11,473s^3 + k_d14451,336s^2 + s14451,336k_p \\ + 14451,336k_i = \\ s^4 + 11,473s^3 + \frac{1542267}{31250}s^2 + s\frac{368601813}{3906250} + \frac{264287499921}{3906250000} \end{aligned} \quad (24)$$

De aquí se obtendrán los valores de k_i, k_p, k_d

$$\begin{aligned} k_i &= 4,682 \times 10^{-3} \\ k_p &= 6,53 \times 10^{-3} \\ k_d &= 3,415 \times 10^{-3} \end{aligned} \quad (25)$$

Se usará Simulink para simular este sistema

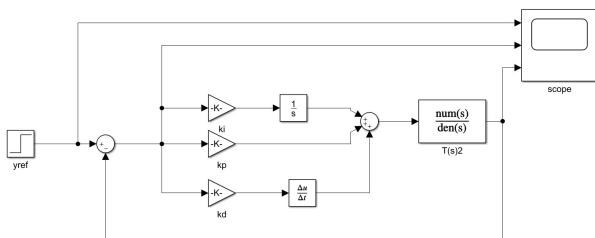


Figura 7. Diagrama de Bloques

La configuración de los bloques es la siguiente

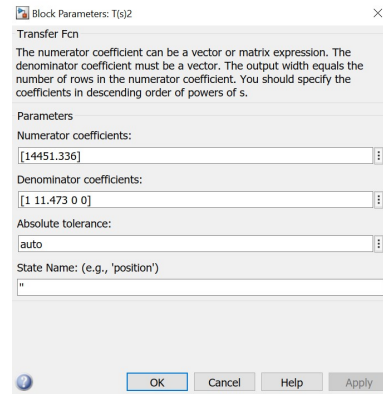


Figura 8. Función de Transferencia

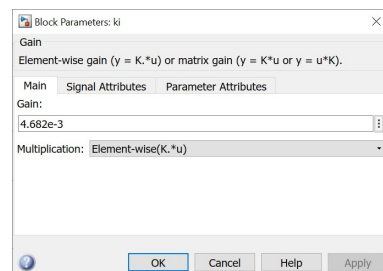


Figura 9. Ganancia del Integrativo.

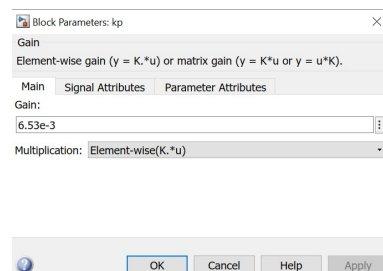


Figura 10. Ganancia del Proporcional.

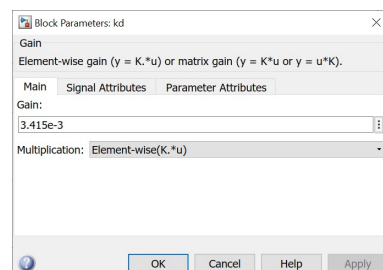


Figura 11. Ganancia del Derivativo.

La respuesta al escalon es la siguiente

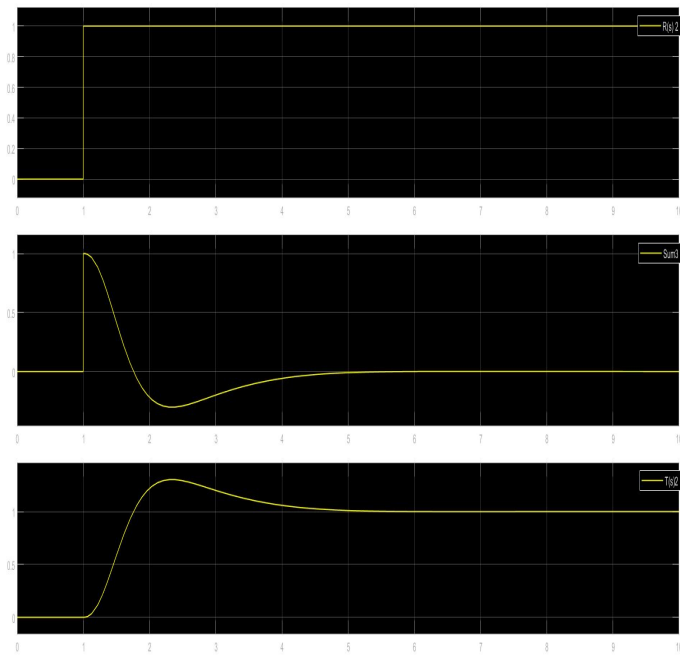


Figura 12. Respuesta al Escalon.

De esta simulación se obtienen los siguientes datos

- El tiempo de pico es de 2,296seg
- El tiempo de subida es de 1,762seg
- El tiempo de asentamiento es de 4,89seg
- El valor pico es de 1,302
- La sobreelongación es de 0,302

IX. RESPUESTA EN FRECUENCIA

Se obtuvo la siguiente ecuación que representa al sistema + controlador

$$\frac{14451,336(k_i + s k_p + s^2 k_d)}{s^4 + 11,473s^3 + k_d 14451,336s^2 + s 14451,336k_p + 14451,336k_i} \quad (26)$$

Reemplazando los valores para las ganancias se tiene

$$\frac{14451,336(4,682 \times 10^{-3} + s 6,653 \times 10^{-3} + s^2 3,415 \times 10^{-3})}{(s + 2,868)^4} \quad (27)$$

Hagamos un analisis de bode para esta nueva función de transferencia

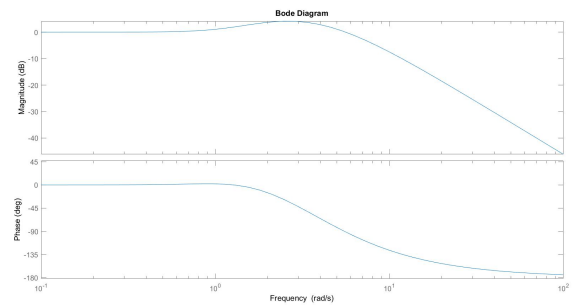


Figura 13. Diagrama de Bode Sistema y Controlador.

Podemos observar que:

- El sistema en la magnitud, atenuara las entradas por encima de su frecuencia de corte al igual que un filtro pasabajos.
- El sistema en la fase, atrasará la salida con respecto a la entrada a frecuencias por encima de su frecuencia de corte.
- El ancho de banda es de 7.2518

El diagrama de bode del sistema sin controlador es el que sigue.

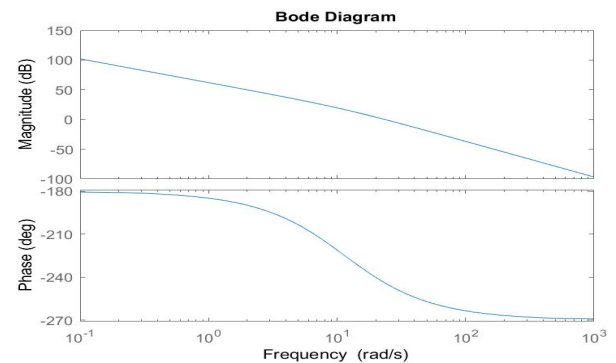


Figura 14. Diagrama de Bode Sistema sin Controlador.

- La ganancia en DC es infinita, por ello el ancho de banda es indeterminado.
- A frecuencias bajas el sistema invertirá la fase de la entrada y a frecuencias altas adelantará la salida en noventa grados con respecto a la entrada.

X. CONCLUSIONES Y OBSERVACIONES

- Los criterios de Routh y Hurwitz se complementan confirmando que el sistema no es estable.
- Al observar el cambio en la respuesta en el tiempo se puede concluir la efectividad del sistema de control PID para nuestro sistema.
- Se pudo comprobar la predicción del método del lugar de las raíces al elegir valores numéricos para las constantes.
- Se pudo observar nuestro sistema actúa como un filtro pasabajos.
- Se pudo observar el efecto simplificador de la linealización del sistema usando la expansión en series de Taylor.

REFERENCIAS

- [1] MITx, “Introduction to control system design-computational state space approaches.” url <https://courses.edx.org/courses/course-v1:MITx+6.302.1x+2T2016/course/>, 2016.
- [2] R. C. Dorf, R. H. Bishop, S. D. Canto, R. D. Canto, and S. Dormido, *Sistemas de control moderno*. Pearson Educación, 2005.
- [3] FAULHABER, *DC-Micromotors*, 2019. Rev. 3.
- [4] MITx, “Introduction to control system design – a first look.” url <https://www.edx.org/course/introduction-to-control-system-design-a-first-look>, 2016.