Benemérita Universidad
Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias de la Electrónica

Licenciatura en Electrónica

Dinámica y Control de Posición

Robótica

Profesor:
Dr. Fernando Reyes Cortés

Alumno:	*Número de Matrícula:*
Hanan Ronaldo Quispe Condori	555010653

1 de junio de 2020

1. Resumen

En el presente reporte se trabajarán aspectos importantes del algoritmo de control propuesto, primeramente, se considerará el caso general de un robot manipulador de n grados de libertad y luego la explicación cualitativa de este algoritmo aplicado a un robot manipulador de dos grados de libertad,con esta finalidad, se obtendrá la ecuación en lazo cerrado usando el modelo dinámico del robot de n grados de libertad y se procederá a demostrar la existencia del punto de equilibrio, seguidamente se propondrá una función candidata de Lyapunov analizando que esta, sea una función definida positiva, despues, se demostrará la estabilidad de este punto. Ademas de esto, se demostrará que la componente de regulación de este algoritmo de control se encuentra acotada. Finalmente se hará la simulación en MATLAB usando el modelo dinámico de un robot manipulador de dos grados de libertad y el valor numérico de los parametros físicos proporcionados.

2. Propósitos

- Competencias Profesionales
  - Analizar un esquema de control nuevo usando los conocimientos adquiridos durante todo el curso teniendo en cuenta las condiciones propuestas para esta tarea.
  - Aplicar las tecnicas de simulación en MATLAB aprendidas para el análisis de algoritmos de control nuevos.
- Competencias Generales
  - Aplicar el razonamiento lógico matemático a la demostración de esquemas de control usando los contenidos teoricos desarrollados.
  - Usar las habilidades de aprendizaje autónomo en la simulación en software de sistemas no lineales autónomos.

3. Introducción

En robótica el uso de ecuaciones diferenciales es vital dada la complejidad de los sistemas, un modelo dinámico expresado por estas ecuaciones nos permite explicar todos los fenomenos físicos que se encuentran en su estructura mecánica, dentro de estos fenomenos podemos mencionar.

- Fuerzas Centrípetas y Coriolis
- Efectos Inerciales
- Par Gravitacional

Este modelo se obtiene usando la metodología de Euler-Lagrange, para la cual se obtiene el lagrangiano del robot manipulador $\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \mathcal{K}(q,\dot{q}) - \mathcal{U}(q,\dot{q})$ siendo resultante el modelo dinámico para un robot manipulador de n grados de libertad formado por eslabones rígidos conectados por articulaciones libres de elasticidad en cadena cinemática abierta.

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) + f_f(\dot{q}, f_e) \tag{1}$$

Este modelo se puede usar para propositos de simulación, diseño, contrucción del sistema mecánico, analisis y diseño de sistemas de control[Reyes (2011)].

En continuación con esta temática se verá tambien el problema de regulación o control de posición, consiste en mover el extremo final del robot manipulador desde cualquier posición inicial $q(0)$ hacia una posición deseada q_d, con esta finalidad, se determinará una ley de control τ que proporcione los pares aplicados a los servomotores del robot, de tal forma que el error de posición del robot $\tilde{q}(t)$ y la velocidad articular $\dot{q}(t)$ convergan asintóticamente a cero sin importar las condiciones iniciales $\tilde{q}(0)$ y $\dot{q}(0)$ expresado matemáticamente esto se tendrá.

$$\lim_{t\to\infty} \begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ \tilde{q}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Para determinar la ley de control τ recurriremos al enfoque de moldeo de energia, este permite diseñar una familia extensa de esquemas de control. Un esquema de control de posición es una ecuación cuya principal característica es que genera un atractor en la ecuación de lazo cerrado formada por el modelo dinámico del robot manipulador y la estructura matemática del esquema de control. Lo que quiere decir que el atractor de las variables de estado corresponde al origen visto en un diagrama fase y por tanto dicho punto sea asintóticamente estable, esto hara que la influencia de las condiciones iniciales sea nula, el robot manipulador siempre llegara a la posición deseada q_d[Reyes (2011)].

$$\tau = \nabla\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q}) - f_v(K_v, \dot{q}) + g(q) \tag{3}$$

En la ecuación 3 el término que se diseñará es $\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q})$ el cual corresponde a la energia potencial artificial, este diseño se llevará a cabo proponiendo una función de Lyapunov que tendrá la siguiente forma.

$$V(\dot{q}, \tilde{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q} + \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q}) \tag{4}$$

4. Planteamiento y Descripción del Problema

Considere el siguiente algoritmo de control:

$$\tau = K_p \left[\frac{1}{cosh^2(\tilde{q})}\frac{tanh(\tilde{q})}{1+tanh^2(\tilde{q})}\right] - K_v atan(\dot{q}) + g(q) \tag{5}$$

Donde K_p,$K_v \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son matrices definidas positivas; además:

$$\left[\frac{1}{cosh^2(\tilde{q})}\frac{tanh(\tilde{q})}{1+tanh^2(\tilde{q})}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{cosh^2(\tilde{q}_1)}\frac{tanh(\tilde{q}_1)}{1+tanh^2(\tilde{q}_1)} \\ \frac{1}{cosh^2(\tilde{q}_2)}\frac{tanh(\tilde{q}_2)}{1+tanh^2(\tilde{q}_2)} \\ \vdots \\ \frac{1}{cosh^2(\tilde{q}_n)}\frac{tanh(\tilde{q}_n)}{1+tanh^2(\tilde{q}_n)} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad atan(\dot{q}) = \begin{bmatrix} atan(\dot{q}_1) \\ atan(\dot{q}_2) \\ \vdots \\ atan(\dot{q}_n) \end{bmatrix} \tag{6}$$

1. Desmostrar la existencia y unicidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado.

2. Proponer una función candidata de Lyapunov (demostrar analíticamente que dicha función se definida positiva).

3. Demostrar la estabilidad del punto de equilibrio.

4. Demostrar que la componente de regulación de (5) se encuentra acotada.

5. Realizar la simulación del algoritmo de control (5) con el modelo dinámico numérico de un robot de 2 gld, tomando en cuenta las siguientes referencias:$\begin{bmatrix} q_{d1}, & q_{d2} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 90°, & 90° \end{bmatrix}^T$. Considere un tiempo de simulación de $t = 0$ a 10 segundos y un periodo de muestreo $h = 2{,}5 mseg$. Explicar cualitativamente el funcionamiento del algoritmo de control(5).

6. Proponga una regla de sintonía de las ganancias proporcional $K_p \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y derivativa $K_v \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, tal que la ley de control $\tau \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ no rebase el torque del hombro $\tau_1^{max} = 150Nm$ y para la articulación del codo $\tau_2^{max} = 15Nm$. Grafique los pares aplicados y errores de posición.

5. Solución del Problema

1. Se procederá a armar la ecuación lazo cerrado, usando el modelo dinámico sin considerar la fricción de Coulomb ni la fricción estática de articulación y el algoritmo de control .

$$\begin{aligned} M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) + B\dot{q} &= K_p \left[\frac{1}{cosh^2(\tilde{q})}\frac{tanh(\tilde{q})}{1+tanh^2(\tilde{q})}\right] - K_v atan(\dot{q}) + g(q) \\ M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + \cancel{g(q)} + B\dot{q} &= K_p \left[\frac{1}{cosh^2(\tilde{q})}\frac{tanh(\tilde{q})}{1+tanh^2(\tilde{q})}\right] - K_v atan(\dot{q}) + \cancel{g(q)} \\ M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + B\dot{q} &= K_p \left[\frac{1}{cosh^2(\tilde{q})}\frac{tanh(\tilde{q})}{1+tanh^2(\tilde{q})}\right] - K_v atan(\dot{q}) \end{aligned} \tag{7}$$

Despejando $\ddot{q}$ se tendrá

$$\ddot{q} = M^{-1}(q)[K_p \left[\frac{1}{cosh^2(\tilde{q})}\frac{tanh(\tilde{q})}{1+tanh^2(\tilde{q})}\right] - K_v atan(\dot{q}) - C(q,\dot{q})\dot{q} - B\dot{q}] \tag{8}$$

El error estara dado por la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= q_d - q \\ \dot{\tilde{q}} &= -\dot{q} \end{aligned} \tag{9}$$

De las ecuaciones (8) y (9) se tendrá la ecuación en lazo cerrado.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\tilde{q}\\ \dot{q}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\dot{q}\\ M^{-1}(q)[K_p\left[\frac{1}{cosh^2(\tilde{q})}\frac{tanh(\tilde{q})}{1+tanh^2(\tilde{q})}\right] - K_v atan(\dot{q}) - C(q,\dot{q})\dot{q} - B\dot{q}]\end{bmatrix} \tag{10}$$

La demostración de existencia y unicidad del punto de equilibrio $\begin{bmatrix}0, & 0\end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{2n}$ será.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\tilde{q}\\ \dot{q}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\dot{q}\\ M^{-1}(q)[K_p\left[\frac{1}{cosh^2(\tilde{q})}\frac{tanh(\tilde{q})}{1+tanh^2(\tilde{q})}\right] - K_v atan(\dot{q}) - C(q,\dot{q})\dot{q} - B\dot{q}]\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \tag{11}$$

- El primer término de la ecuación (11) satisface $-\dot{q} = -I\dot{q} \leftrightarrow \dot{q} = 0$ esto ya que $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz identidad.
- Para el segundo término de la ecuación (11) se tiene que $M(q) > 0$ por propiedad de ser definida positiva $M^{-1}(q)$ sera tambien definida positiva, entonces para que se cumpla la condición $M^{-1}(q)[K_p\left[\frac{1}{cosh^2(\tilde{q})}\frac{tanh(\tilde{q})}{1+tanh^2(\tilde{q})}\right] - K_v atan(\dot{q}) - C(q,\dot{q})\dot{q} - B\dot{q}] = 0$, se debe cumplir que $[K_p\left[\frac{1}{cosh^2(\tilde{q})}\frac{tanh(\tilde{q})}{1+tanh^2(\tilde{q})}\right] - K_v atan(\dot{q}) - C(q,\dot{q})\dot{q} - B\dot{q}] = 0$, analizando esta expresión

$$C(q,\dot{q})\dot{q} = 0 \leftrightarrow \dot{q} = 0 \;\;,\;\; B\dot{q} = 0 \leftrightarrow \dot{q} = 0 \;\;,\;\; -K_v atan(\dot{q}) = 0 \leftrightarrow atan(0) = 0 \tag{12}$$

El ultimo factor que falta analizar es $K_p\left[\frac{1}{cosh^2(\tilde{q})}\frac{tanh(\tilde{q})}{1+tanh^2(\tilde{q})}\right]$, en esta expresion dado que K_p es definida positiva entonces $\left[\frac{1}{cosh^2(\tilde{q})}\frac{tanh(\tilde{q})}{1+tanh^2(\tilde{q})}\right] = 0 \leftrightarrow \tilde{q} = 0$, si gráficamos esta función podremos ver el comportamiento acotado del regulador propuesto.

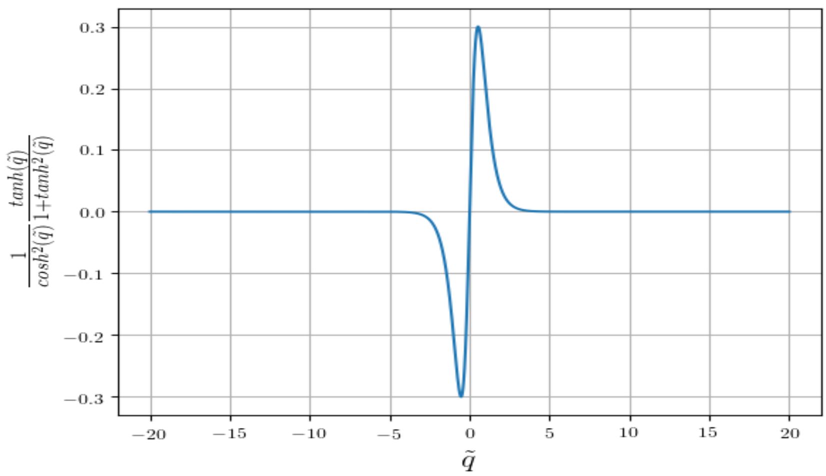

Figura 1: Regulador Acotado.

Entonces podemos concluir que el punto $[\tilde{q}, \dot{q}] = 0 \in \mathbb{R}^{2n}$ existe y es el único punto de equilibrio del sistema.

2. Se propondra la siguiente función candidata de Lyapunov compuesta por la suma de la energía cinética del robot manipulador y energia potencial artificial siguiendo la regla

de diseño (4).

$$V(\tilde{q},\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{ln(tanh^2(\tilde{q}_1)+1)}\\ \sqrt{ln(tanh^2(\tilde{q}_2)+1)}\\ \vdots \\ \sqrt{ln(tanh^2(\tilde{q}_n)+1)}\end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix}\sqrt{ln(tanh^2(\tilde{q}_1)+1)}\\ \sqrt{ln(tanh^2(\tilde{q}_2)+1)}\\ \vdots \\ \sqrt{ln(tanh^2(\tilde{q}_n)+1)}\end{bmatrix} \quad (13)$$

Esta función candidata de Lyapunov debe ser definida positiva, lo cual se procederá a demostrar.

- El primer sumado $\frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q}$ se puede observar que tiene la forma $x^T P x$ el cual según el teorema de silvestrer [Reyes (2020)] será definida positiva si y solo si la matriz P es definida positiva. En este caso por propiedad del modelo dinámico la matriz de inercia $M(q)$ es definida positiva.
- En el caso de la energia potencial artificial se puede observa que $\mathcal{U}_a(K_p,\tilde{q}) = \mathcal{U}_a(K_p,0) = 0$

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_a(K_p,0) &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{ln(tanh^2(0)+1)}\\ \sqrt{ln(tanh^2(0)+1)}\\ \vdots \\ \sqrt{ln(tanh^2(0)+1)}\end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix}\sqrt{ln(tanh^2(0)+1)}\\ \sqrt{ln(tanh^2(0)+1)}\\ \vdots \\ \sqrt{ln(tanh^2(0)+1)}\end{bmatrix}\\
\mathcal{U}_a(K_p,0) &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{ln(1)}\\ \sqrt{ln(1)}\\ \vdots \\ \sqrt{ln(1)}\end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix}\sqrt{ln(1)}\\ \sqrt{ln(1)}\\ \vdots \\ \sqrt{ln(1)}\end{bmatrix} \qquad (14)\\
\mathcal{U}_a(K_p,0) &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots \\ 0\end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots \\ 0\end{bmatrix}\\
\mathcal{U}_a(K_p,0) &= 0
\end{aligned}$$

  Tambien se puede observar que $\mathcal{U}_a(K_p,\tilde{q}) > 0$ si $\tilde{q} \neq 0$, se puede concluir que $\mathcal{U}_a(K_p,\tilde{q})$ es definida positiva local ya que $\exists\rho > 0, \gamma >)0 : 0 < \mathcal{U}_a(K_p,\tilde{q}) < \gamma$, se sabe que la suma de funciones definidas positivas es otra función definida positiva por lo tanto.

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q} > 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{U}_a(K_p,\tilde{q}) > 0 \quad \therefore \quad \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q} + \mathcal{U}_a(K_p,\tilde{q}) > 0\\
V(\tilde{q},\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q} + \mathcal{U}_a(K_p,\tilde{q}) > 0
\end{gathered} \qquad (15)$$

3. Para demostrar la estabilidad del punto se equilibrio se procederá a derivar la ecuación (13) con respecto al tiempo para obtener la potencia.

$$\dot{V}(\tilde{q},\dot{q}) = \frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q} + \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{ln(tanh^2(\tilde{q}_1)+1)}\\ \sqrt{ln(tanh^2(\tilde{q}_2)+1)}\\ \vdots \\ \sqrt{ln(tanh^2(\tilde{q}_n)+1)}\end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix}\sqrt{ln(tanh^2(\tilde{q}_1)+1)}\\ \sqrt{ln(tanh^2(\tilde{q}_2)+1)}\\ \vdots \\ \sqrt{ln(tanh^2(\tilde{q}_n)+1)}\end{bmatrix}\right]$$

$$\dot{V}(\tilde{q},\dot{q}) = \frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}[\dot{q}^T M(q)\dot{q}))]\right] + \frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{ln(tanh^2(\tilde{q}_1)+1)}\\ \sqrt{ln(tanh^2(\tilde{q}_2)+1)}\\ \vdots \\ \sqrt{ln(tanh^2(\tilde{q}_n)+1)}\end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix}\sqrt{ln(tanh^2(\tilde{q}_1)+1)}\\ \sqrt{ln(tanh^2(\tilde{q}_2)+1)}\\ \vdots \\ \sqrt{ln(tanh^2(\tilde{q}_n)+1)}\end{bmatrix}\right]$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}[\dot{q}^T M(q)\dot{q}]\right] &= \frac{1}{2}[\dot{q}^T M(q)\ddot{q} + \ddot{q}^T M(q)\dot{q} + \dot{q}^T \dot{M}(q)\dot{q}]\\
\frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}[\dot{q}^T M(q)\dot{q}]\right] &= \frac{1}{2}[\dot{q}^T M(q)\ddot{q} + \dot{q}^T M(q)\ddot{q} + \dot{q}^T \dot{M}(q)\dot{q}]\\
\frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}[\dot{q}^T M(q)\dot{q}]\right] &= \frac{1}{2}[2\dot{q}^T M(q)\ddot{q} + \dot{q}^T \dot{M}(q)\dot{q}]\\
\frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}[\dot{q}^T M(q)\dot{q}]\right] &= \dot{q}^T M(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T \dot{M}(q)\dot{q}
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{U}_a(K_p,\tilde{q}) &= \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\left[\sqrt{ln(tanh^2(\tilde{q})+1)}\right]^T K_p \left[\sqrt{ln(tanh^2(\tilde{q})+1)}\right])\\
\frac{d}{dt}\mathcal{U}_a(K_p,\tilde{q}) &= \frac{1}{2}2\left[\sqrt{ln(tanh^2(\tilde{q})+1)}\right]^T K_p \frac{d}{dt}\left[\sqrt{ln(tanh^2(\tilde{q})+1)}\right]\\
\frac{d}{dt}\mathcal{U}_a(K_p,\tilde{q}) &= \frac{1}{2}2\left[\sqrt{ln(tanh^2(\tilde{q})+1)}\right]^T K_p \left[\tfrac{2tanh(\tilde{q})\dot{\tilde{q}}}{2\sqrt{ln(tanh^2(\tilde{q})+1)}(tanh^2(\tilde{q})+1)cosh^2(\tilde{q})}\right]\\
\frac{d}{dt}\mathcal{U}_a(K_p,\tilde{q}) &= \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{2}\cancel{\left[\sqrt{ln(tanh^2(\tilde{q})+1)}\right]^T} K_p \left[\tfrac{\cancel{2}tanh(\tilde{q})}{\cancel{2\sqrt{ln(tanh^2(\tilde{q})+1)}}(tanh^2(\tilde{q})+1)cosh^2(\tilde{q})}\right]\dot{\tilde{q}}\\
\frac{d}{dt}\mathcal{U}_a(K_p,\tilde{q}) &= -\left[\tfrac{tanh(\tilde{q})}{(tanh^2(\tilde{q})+1)cosh^2(\tilde{q})}\right]^T K_p\dot{q}
\end{aligned} \tag{17}$$

Usando las ecuaciones (16), (17) y (11)se tendrá

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\tilde{q},\dot{q}) &= \dot{q}^T M(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T\dot{M}(q)\dot{q} - \left[\tfrac{tanh(\tilde{q})}{(tanh^2(\tilde{q})+1)cosh^2(\tilde{q})}\right]^T K_p\dot{q}\\
\dot{V}(\tilde{q},\dot{q}) &= \dot{q}^T \cancel{M(q)M^{-1}(q)}[K_p\left[\tfrac{1}{cosh^2(\tilde{q})}\tfrac{tanh(\tilde{q})}{1+tanh^2(\tilde{q})}\right] - K_v atan(\dot{q}) - C(q,\dot{q})\dot{q} - B\dot{q}]\\
&\quad + \frac{1}{2}\dot{q}^T\dot{M}(q)\dot{q} - \dot{q}^T K_p\left[\tfrac{tanh(\tilde{q})}{(tanh^2(\tilde{q})+1)cosh^2(\tilde{q})}\right]\\
\dot{V}(\tilde{q},\dot{q}) &= \dot{q}^T[K_p\left[\tfrac{1}{cosh^2(\tilde{q})}\tfrac{tanh(\tilde{q})}{1+tanh^2(\tilde{q})}\right] - K_v atan(\dot{q}) - C(q,\dot{q})\dot{q} - B\dot{q}]\\
&\quad + \frac{1}{2}\dot{q}^T\dot{M}(q)\dot{q} - \dot{q}^T K_p\left[\tfrac{tanh(\tilde{q})}{(tanh^2(\tilde{q})+1)cosh^2(\tilde{q})}\right]\\
\dot{V}(\tilde{q},\dot{q}) &= \cancel{\dot{q}^T K_p\left[\tfrac{1}{cosh^2(\tilde{q})}\tfrac{tanh(\tilde{q})}{1+tanh^2(\tilde{q})}\right]} - \dot{q}^T K_v atan(\dot{q}) - \dot{q}^T C(q,\dot{q})\dot{q} - \dot{q}^T B\dot{q}\\
&\quad + \frac{1}{2}\dot{q}^T\dot{M}(q)\dot{q} - \cancel{\dot{q}^T K_p\left[\tfrac{tanh(\tilde{q})}{(tanh^2(\tilde{q})+1)cosh^2(\tilde{q})}\right]}\\
\dot{V}(\tilde{q},\dot{q}) &= -\dot{q}^T K_v atan(\dot{q}) - \cancel{\dot{q}^T C(q,\dot{q})\dot{q}} - \dot{q}^T B\dot{q} + \cancel{\frac{1}{2}\dot{q}^T\dot{M}(q)\dot{q}}\\
\dot{V}(\tilde{q},\dot{q}) &= -\dot{q}^T K_v atan(\dot{q}) - \dot{q}^T B\dot{q} \leq 0
\end{aligned} \tag{18}$$

De la ecuación (18) se puede afirmar que $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q})$ es semidefinida negativa, por lo tanto queda demostrada la estabilidad del punto de equilibrio.

4. En este apartado se demostrará que la norma euclideana de $\left[\frac{1}{cosh^2(\tilde{q})} \frac{tanh(\tilde{q})}{1+tanh^2(\tilde{q})}\right]$ es menor igual que una cota superior.

6. Conclusiones

Referencias

Reyes, F. (2011). *Robótica-control de robots manipuladores*. Alfaomega grupo editor.

Reyes, F. (2020). *Preliminares matemáticos,parte iii, diapositiva 5.*