

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA



BUAP

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA

LICENCIATURA EN ELECTRÓNICA

Dinámica y Control de Posición

ROBÓTICA

Profesor:

Dr. Fernando Reyes Cortés

Alumno:

Hanan Ronaldo Quispe Condori

Número de Matrícula:

555010653

31 de mayo de 2020

1. Resumen

En el presente reporte se trabajarán aspectos importantes del algoritmo de control propuesto, primeramente, se considerará el caso general de un robot manipulador de n grados de libertad y luego la explicación cualitativa de este algoritmo aplicado a un robot manipulador de dos grados de libertad, con esta finalidad, se obtendrá la ecuación en lazo cerrado usando el modelo dinámico del robot de n grados de libertad y se procederá a demostrar la existencia del punto de equilibrio, seguidamente se propondrá una función candidata de Lyapunov analizando que esta, sea una función definida positiva, después, se demostrará la estabilidad de este punto. Además de esto, se demostrará que la componente de regulación de este algoritmo de control se encuentra acotada. Finalmente se hará la simulación en MATLAB usando el modelo dinámico de un robot manipulador de dos grados de libertad y el valor numérico de los parámetros físicos proporcionados.

2. Propósitos

- Competencias Profesionales
 - Analizar un esquema de control nuevo usando los conocimientos adquiridos durante todo el curso teniendo en cuenta las condiciones propuestas para esta tarea.
 - Aplicar las técnicas de simulación en MATLAB aprendidas para el análisis de algoritmos de control nuevos.
- Competencias Generales
 - Aplicar el razonamiento lógico matemático a la demostración de esquemas de control usando los contenidos teóricos desarrollados.
 - Usar las habilidades de aprendizaje autónomo en la simulación en software de sistemas no lineales autónomos.

3. Introducción

En robótica el uso de ecuaciones diferenciales es vital dada la complejidad de los sistemas, un modelo dinámico expresado por estas ecuaciones nos permite explicar todos los fenomenos físicos que se encuentran en su estructura mecánica, dentro de estos fenomenos podemos mencionar.

- Fuerzas Centrípetas y Coriolis
- Efectos Inerciales
- Par Gravitacional

Este modelo se obtiene usando la metodología de Euler-Lagrange, para la cual se obtiene el lagrangiano del robot manipulador $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{K}(q, \dot{q}) - \mathcal{U}(q, \dot{q})$ siendo resultante el modelo dinámico para un robot manipulador de n grados de libertad formado por eslabones rígidos conectados por articulaciones libres de elasticidad en cadena cinemática abierta.

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + f_f(\dot{q}, f_e) \quad (1)$$

Este modelo se puede usar para propositos de simulación, diseño, contrucción del sistema mecánico, analisis y diseño de sistemas de control[Reyes (2011)].

En continuación con esta temática se verá tambien el problema de regulación o control de posición, consiste en mover el extremo final del robot manipulador desde cualquier posición inicial $q(0)$ hacia una posición deseada q_d , con esta finalidad, se determinará una ley de control τ que proporcione los pares aplicados a los servomotores del robot, de tal forma que el error de posición del robot $\tilde{q}(t)$ y la velocidad articular $\dot{q}(t)$ convergan asintóticamente a cero sin importar las condiciones iniciales $\tilde{q}(0)$ y $\dot{q}(0)$ expresado matemáticamente esto se tendrá.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ \tilde{q}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Para determinar la ley de control τ recurriremos al enfoque de moldeo de energia, este permite diseñar una familia extensa de esquemas de control. Un esquema de control de posición es una ecuación cuya principal característica es que genera un atractor en la ecuación de lazo cerrado formada por el modelo dinámico del robot manipulador y la estructura matemática del esquema de control. Lo que quiere decir que el atractor de las variables de estado corresponde al origen visto en un diagrama fase y por tanto dicho punto sea asintóticamente estable, esto hara que la influencia de las condiciones iniciales sea nula, el robot manipulador siempre llegara a la posición deseada q_d [Reyes (2011)].

$$\tau = \nabla \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q}) - f_v(K_v, \dot{q}) + g(q) \quad (3)$$

En la ecuación 3 el término que se diseñará es $\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q})$ el cual corresponde a la energia potencial artificial, este diseño se llevará a cabo proponiendo una función de Lyapunov que tendrá la siguiente forma.

$$V(\dot{q}, \tilde{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q}) \quad (4)$$

4. Planteamiento y Descripción del Problema

Considere el siguiente algoritmo de control:

$$\tau = K_p \left[\frac{1}{\cosh^2(\tilde{q})} \quad \frac{\tanh(\tilde{q})}{1+\tanh^2(\tilde{q})} \right] - K_v \operatorname{atan}(\dot{q}) + g(q) \quad (5)$$

Donde $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices definidas positivas; además:

$$\left[\frac{1}{\cosh^2(\tilde{q})} \quad \frac{\tanh(\tilde{q})}{1+\tanh^2(\tilde{q})} \right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cosh^2(\tilde{q}_1)} & \frac{\tanh(\tilde{q}_1)}{1+\tanh^2(\tilde{q}_1)} \\ \frac{1}{\cosh^2(\tilde{q}_2)} & \frac{\tanh(\tilde{q}_2)}{1+\tanh^2(\tilde{q}_2)} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\cosh^2(\tilde{q}_n)} & \frac{\tanh(\tilde{q}_n)}{1+\tanh^2(\tilde{q}_n)} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \operatorname{atan}(\dot{q}) = \begin{bmatrix} \operatorname{atan}(\dot{q}_1) \\ \operatorname{atan}(\dot{q}_2) \\ \vdots \\ \operatorname{atan}(\dot{q}_n) \end{bmatrix} \quad (6)$$

1. Demostrar la existencia y unicidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado.
2. Demostrar la estabilidad del punto de equilibrio.
3. Demostrar que la componente de regulación de (5) se encuentra acotada.
4. Realizar la simulación del algoritmo de control (5) con el modelo dinámico numérico de un robot de 2 gld, tomando en cuenta las siguientes referencias: $[q_{d1}, q_{d2}]^T = [90^\circ, 90^\circ]^T$. Considere un tiempo de simulación de $t = 0$ a 10 segundos y un periodo de muestreo $h = 2,5 \text{ msec}$. Explicar cualitativamente el funcionamiento del algoritmo de control(5).
5. Proponga una regla de sintonía de las ganancias proporcional $K_p \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ y derivativa $K_v \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, tal que la ley de control $\tau \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ no rebase el torque del hombro $\tau_1^{\max} = 150 \text{ Nm}$ y para la articulación del codo $\tau_2^{\max} = 15 \text{ Nm}$. Grafique los pares aplicados y errores de posición.

5. Solución del Problema

1. Se procederá a armar la ecuación lazo cerrado, usando el modelo dinámico sin considerar la fricción de Coulomb ni la fricción estática de articulación y el algoritmo de control .

$$\begin{aligned} M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + B\dot{q} &= K_p \left[\frac{1}{\cosh^2(\tilde{q})} \quad \frac{\tanh(\tilde{q})}{1+\tanh^2(\tilde{q})} \right] - K_v \operatorname{atan}(\dot{q}) + g(q) \\ M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(\tilde{q}) + B\dot{q} &= K_p \left[\frac{1}{\cosh^2(\tilde{q})} \quad \frac{\tanh(\tilde{q})}{1+\tanh^2(\tilde{q})} \right] - K_v \operatorname{atan}(\dot{q}) + g(\tilde{q}) \quad (7) \\ M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + B\dot{q} &= K_p \left[\frac{1}{\cosh^2(\tilde{q})} \quad \frac{\tanh(\tilde{q})}{1+\tanh^2(\tilde{q})} \right] - K_v \operatorname{atan}(\dot{q}) \end{aligned}$$

Despejando \ddot{q} se tendrá

$$\ddot{q} = M^{-1}(q) \left[K_p \left[\frac{1}{\cosh^2(\tilde{q})} \quad \frac{\tanh(\tilde{q})}{1+\tanh^2(\tilde{q})} \right] - K_v \operatorname{atan}(\dot{q}) - C(q, \dot{q})\dot{q} - B\dot{q} \right] \quad (8)$$

El error estara dado por la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= q_d - q \\ \dot{\tilde{q}} &= -\dot{q} \end{aligned} \quad (9)$$

De las ecuaciones (8) y (9) se tendrá la ecuación en lazo cerrado.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ M^{-1}(q) \left[K_p \begin{bmatrix} \frac{1}{\cosh^2(\tilde{q})} & \frac{\tanh(\tilde{q})}{1+\tanh^2(\tilde{q})} \end{bmatrix} - K_v \operatorname{atan}(\dot{q}) - C(q, \dot{q})\dot{q} - B\dot{q} \right] \end{bmatrix} \quad (10)$$

La demostración de existencia y unicidad del punto de equilibrio $[0, 0]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ será.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ M^{-1}(q) \left[K_p \begin{bmatrix} \frac{1}{\cosh^2(\tilde{q})} & \frac{\tanh(\tilde{q})}{1+\tanh^2(\tilde{q})} \end{bmatrix} - K_v \operatorname{atan}(\dot{q}) - C(q, \dot{q})\dot{q} - B\dot{q} \right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

- El primer componente de la ecuación (11) satisface $-\dot{q} = -I\dot{q} \leftrightarrow \dot{q} = 0$ esto ya que $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad.
- Para el segundo termino de la ecuación (11) se tiene que $M(q) > 0$ por propiedad de ser definida positiva $M^{-1}(q)$ sera tambien definida positiva, entonces para que se cumpla la condición $M^{-1}(q) \left[K_p \begin{bmatrix} \frac{1}{\cosh^2(\tilde{q})} & \frac{\tanh(\tilde{q})}{1+\tanh^2(\tilde{q})} \end{bmatrix} - K_v \operatorname{atan}(\dot{q}) - C(q, \dot{q})\dot{q} - B\dot{q} \right] = 0$, se debe cumplir que $\left[K_p \begin{bmatrix} \frac{1}{\cosh^2(\tilde{q})} & \frac{\tanh(\tilde{q})}{1+\tanh^2(\tilde{q})} \end{bmatrix} - K_v \operatorname{atan}(\dot{q}) - C(q, \dot{q})\dot{q} - B\dot{q} \right] = 0$, analizando esta expresión

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = 0 \leftrightarrow \dot{q} = 0, \quad B\dot{q} = 0 \leftrightarrow \dot{q} = 0, \quad -K_v \operatorname{atan}(\dot{q}) = 0 \leftrightarrow \operatorname{atan}(0) = 0 \quad (12)$$

El ultimo factor que falta analizar es $K_p \begin{bmatrix} \frac{1}{\cosh^2(\tilde{q})} & \frac{\tanh(\tilde{q})}{1+\tanh^2(\tilde{q})} \end{bmatrix}$, en esta expresion dado que K_p es

6. Conclusiones

Referencias

Reyes, F. (2011). *Robótica-control de robots manipuladores*. Alfaomega grupo editor.