

# BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA



## BUAP

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA

LICENCIATURA EN ELECTRÓNICA

---

## Cinemática

---

### ROBÓTICA

*Profesor:*

Dr. Fernando Reyes Cortés

*Alumno:*

Hanan Ronaldo Quispe Condori

*Número de Matrícula:*

555010653

17 de marzo de 2020

## 1. Resumen

En el presente trabajo se muestra el uso del modelo cinemático directo de un robot prototipo, para comenzar se calculo su tabla de Denavit–Hartenberg, con estos parametros se uso la forma general de la matriz de transformación homogénea esto con la ayuda de una transformación auxiliar como se hizo en el caso del robot cartesiano desarrollado en clase debido a la dificultad que presenta la posición de casa planteada, el determinante del jacobiano nos indicó los puntos singulares dada la posición de casa propuesta y con ayuda de la cinemática inversa y las ecuaciones paramétricas de la elipse se logro el grafico de esta cónica en el plano  $xy$  .

## 2. Propósitos

- Generales.
  - Hacer uso del modelo cinemático del robot prototipo planteado para realizar el recorrido de una elipse en un plano a elección.
- Particulares
  - Calcular la tabla de Denavit–Hartenberg.
  - Calcular la matriz homogénea del robot prototipo planteado.
  - Calcular el jacobiano del robot prototipo planteado.
  - Calcular las ecuaciones de cinemática inversa del robot prototipo planteado.

### 3. Introducción

La cinemática es la parte de la física que estudia el movimiento de los cuerpos, sin tomar en cuenta las fuerzas que lo originan, esto nos indica que no se tomarán en cuenta ecuaciones diferenciales como era el caso de los modelos dinámicos.

Los robots industriales están compuestos por una serie consecutiva de eslabones y articulaciones para formar una cadena en cinemática abierta, la cual es la estructura mecánica básica de un robot industrial. La cadena cinemática abierta está conformada por los siguientes elementos: La primera articulación sirve para formar la base, luego siguen las conexiones sucesivas entre articulaciones y eslabones, finalmente el extremo del último eslabón no posee una articulación, por lo general aquí se coloca la herramienta de trabajo según lo requiera una aplicación en específico [Reyes (2011)].

Las articulaciones se constituyen de un servomotor, estos representan las interconexiones entre dos eslabones consecutivos. Una articulación puede realizar solo un tipo de movimiento, este puede ser lineal, también llamada prismática, o rotacional [Reyes (2011)].

Al estudio de la cinemática aplicado a los sistemas mecánicos que forman robots manipuladores se le denomina cinemática directa, esta se refiere al estudio analítico del movimiento del robot con respecto a un sistema de referencia cartesiano fijo, [Reyes (2011)].

De manera general, el posicionamiento del extremo final del robot en el espacio tridimensional requiere de seis coordenadas, de estas tres se utilizan para la posición cartesiana y las otras tres se utilizan para la orientación de la herramienta de trabajo. Dependiendo de la aplicación del robot se pueden requerir menos coordenadas, ya que algunas de ellas podrían tener el valor de cero y por lo tanto no sería necesario incluirlas en el cálculo matemático.

La cinemática inversa representa en la robótica un área de mayor complejidad que la cinemática directa.

Para un robot manipulador siempre es posible encontrar el modelo de cinemática directa mientras que en la cinemática inversa puede haber varias soluciones o no existir solución analítica, en caso de presentarse esta situación, serán necesarias otros métodos tales como:

- Métodos Numéricos
- Redes Neuronales
- Métodos Iterativos
- Métodos Geométricos

#### Convención Denavit–Hartenberg

Esta es una herramienta usada ampliamente conocida en el área de la robótica y de la ingeniería, esto por que ofrece un procedimiento simple para obtener el modelo cinemático directo, cuya estructura queda en términos de matrices de transformaciones homogéneas cuyos elementos dependen de los cuatro parámetros de Denavit–Hartenberg, en adición a estos parámetros se agrega un término extra  $\beta$  que representa al espesor del servomotor [Reyes (2011)].

## 4. Planteamiento y Descripción del Problema

1. Obtener la tabla DH, considerando la posición de casa indicada en la figura 1, describa la matriz de la transformación homogénea  $H_0^3$ .

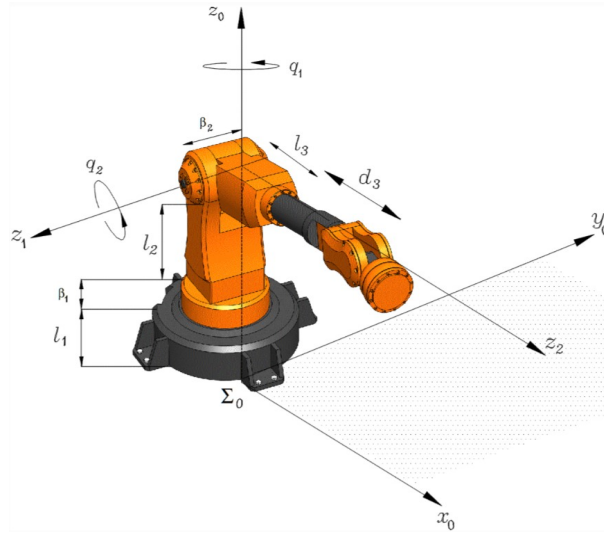


Figura 1: Robot Prototipo.

2. Indique la región dentro del espacio de trabajo donde se encuentran los puntos singulares del robot.
3. Diseñar una trayectoria elíptica, tal que el extremo final del robot pueda trazar en su espacio de trabajo. Determine los parámetros geométricos de la trayectoria (centros, foco, radio, etc) de acuerdo a las dimensiones del robot.

## 5. Solución del Problema

1. Se tendrán que asignar los sistemas de referencia en la figura 1, esto resultará en la siguiente figura.

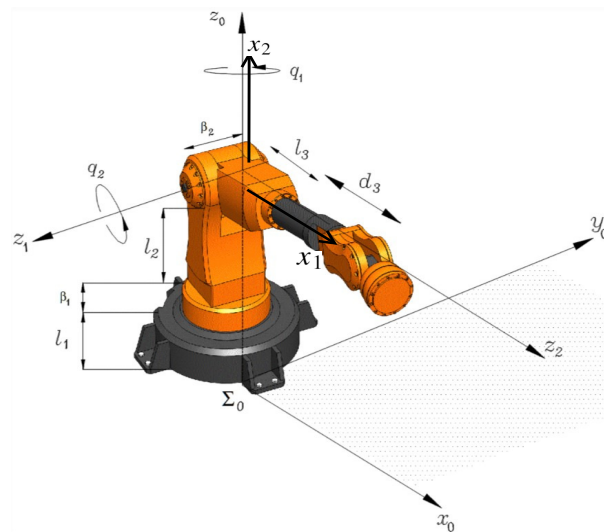


Figura 2: Sistemas de Referencia Asignados.

Para realizar esta asignación se tuvo que hacer uso de un sistema de referencia auxiliar, esto ya que la posición de casa propuesta presenta el caso en el que al rotar el eje  $z_1$  alrededor de  $x_1$  es imposible llegar  $z_2$ , cabe mencionar que este es el mismo caso que se presenta en el análisis del robot cartesiano desarrollado en clase. Esta asignación realizo de la siguiente manera.

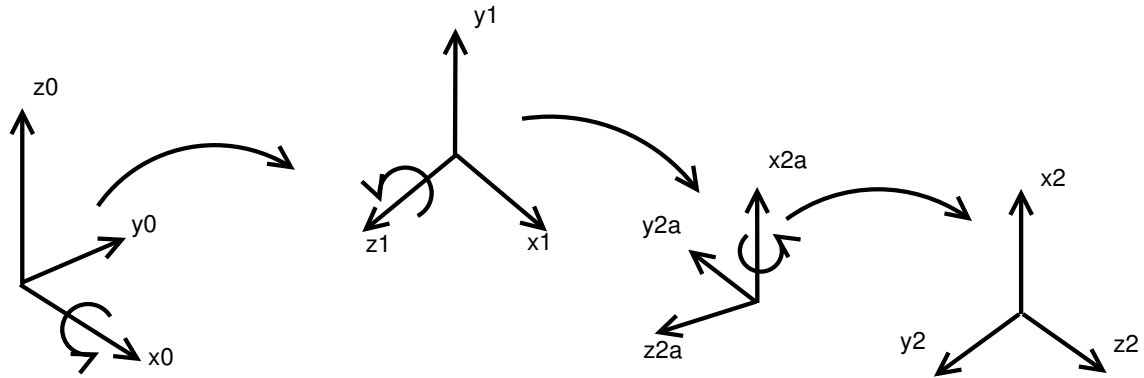


Figura 3: Rotación Sistemas de Referencia.

La tabla de Denavit–Hartenberg para el robot de figura 2 estará dada por

$l$	$\alpha$	$d, \beta$	$\theta$
0	$\frac{\pi}{2}$	$l_1 + \beta_1 + l_2$	$q_1$
0	$\frac{\pi}{2}$	$\beta_2$	$q_2$
0	0	$l_3 + d_3$	0

Apartir de estos parametros se pueden hallar las siguientes matrices de transformación homogénea

$$\begin{aligned}
 H_0^1 &= \begin{bmatrix} \cos(q_1) & 0 & \sin(q_1) & 0 \\ \sin(q_1) & 0 & -\cos(q_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 + \beta_1 + l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 H_1^2 &= \begin{bmatrix} \cos(q_2) & 0 & \sin(q_2) & 0 \\ \sin(q_2) & 0 & -\cos(q_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 H_{2a} &= H_{Rz1, \frac{\pi}{2}} * H_1^2 \\
 H_{2a} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \cos(q_2) & 0 & \sin(q_2) & 0 \\ \sin(q_2) & 0 & -\cos(q_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1) \\
 H_{2a} &= \begin{bmatrix} -\sin(q_2) & 0 & \cos(q_2) & 0 \\ \cos(q_2) & 0 & \sin(q_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 H_2^3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_3 + d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Haciendo uso de las ecuaciones 1 en  $H_0^3 = H_0^1 * H_{2a} * H_2^3$  se tendrá

$$H_0^3 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & 0 & \sin(q_1) & 0 \\ \sin(q_1) & 0 & -\cos(q_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 + \beta_1 + l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -\sin(q_2) & 0 & \cos(q_2) & 0 \\ \cos(q_2) & 0 & \sin(q_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_3 + d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_0^3 = \begin{bmatrix} -\sin(q_2)\cos(q_1) & \sin(q_1) & \cos(q_1)\cos(q_2) & \cos(q_1)\cos(q_2) * (l_3 + d_3) + \beta_2\sin(q_1) \\ -\sin(q_2)\sin(q_1) & -\cos(q_1) & \sin(q_1)\cos(q_2) & \sin(q_1)\cos(q_2) * (l_3 + d_3) - \beta_2\cos(q_1) \\ \cos(q_2) & 0 & \sin(q_2) & \sin(q_2)(l_3 + d_3) + l_1 + l_2 + \beta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

De esta ultima matriz se pueden separar la matriz de rotación y el vector de traslación

$$R_0^3 = \begin{bmatrix} -\sin(q_2)\cos(q_1) & \sin(q_1) & \cos(q_1)\cos(q_2) \\ -\sin(q_2)\sin(q_1) & -\cos(q_1) & \sin(q_1)\cos(q_2) \\ \cos(q_2) & 0 & \sin(q_2) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$d_0^3 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(q_1)\cos(q_2) * (l_3 + d_3) + \beta_2\sin(q_1) \\ \sin(q_1)\cos(q_2) * (l_3 + d_3) - \beta_2\cos(q_1) \\ \sin(q_2)(l_3 + d_3) + l_1 + l_2 + \beta_1 \end{bmatrix}$$

El vector de traslación nos dará información sobre la cinemática directa del robot.

2. Los puntos singulares se calcularán mediante la determinante del jacobiano del vector de traslación, esta se calculará usando  $J(q_1, q_2, d_3)$ .

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(q_1)\cos(q_2) * (l_3 + d_3) + \beta_2\sin(q_1) \\ \sin(q_1)\cos(q_2) * (l_3 + d_3) - \beta_2\cos(q_1) \\ \sin(q_2)(l_3 + d_3) + l_1 + l_2 + \beta_1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Los elementos de esta matriz estarán dados por

$$\begin{aligned} J_{1,1} &= -\sin(q_1)\cos(q_2) * (d_3 + l_3) + \beta_2\cos(q_1) \\ J_{2,1} &= \cos(q_1)\cos(q_2) * (d_3 + l_3) + \beta_2\sin(q_1) \\ J_{3,1} &= 0 \\ J_{1,2} &= -\cos(q_1)\sin(q_2) * (d_3 + l_3) \\ J_{2,2} &= -\sin(q_1)\sin(q_2) * (d_3 + l_3) \\ J_{3,2} &= \cos(q_2) * (d_3 + l_3) \\ J_{1,3} &= \cos(q_1)\cos(q_2) \\ J_{2,3} &= \sin(q_1)\sin(q_2) \\ J_{3,3} &= \sin(q_2) \end{aligned} \quad (5)$$

Usaremos Matlab para calcular la determinante de este jacobiano.

```
1  clc; clear all; close all;
2  syms q1 q2 l1 l2 l3 d3 b1 b2
3  J=[-sin(q1)*cos(q2)*(d3+l3)+cos(q1)*b2 -cos(q1)*sin(q2)*(d3+l3) cos(q1)*cos(q2); cos(
    (q1)*cos(q2)*(d3+l3)+sin(q1)*b2 -sin(q1)*sin(q2)*(d3+l3) sin(q1)*cos(q2); 0 cos(
    q2)*(l3+d3) sin(q2)]
4  pretty(det(J))
5  pretty(simplify(det(J)))
```

La salida de este script es la siguiente

```

1 J =
2
3 [ b2*cos(q1) - cos(q2)*sin(q1)*(d3 + l3), -cos(q1)*sin(q2)*(d3 + l3), cos(q1)*cos(q2) ]
4 [ b2*sin(q1) + cos(q1)*cos(q2)*(d3 + l3), -sin(q1)*sin(q2)*(d3 + l3), cos(q2)*sin(q1) ]
5 [ 0, cos(q2)*(d3 + l3), sin(q2) ]
6
7 d3^2*cos^2(q1) + cos^2(q2) + l3^2*cos^2(q1) + cos^2(q2) + d3^2*cos^2(q2) + sin^2(q1) + l3^2*cos^2(q2) +
8 sin^2(q1) + d3^2*cos^2(q1) + cos^2(q2) + sin^2(q2)
9
10 + l3^2*cos^2(q1) + cos^2(q2) + sin^2(q2) + d3^2*cos^2(q2) + sin^2(q1) + sin^2(q2) + l3^2*cos^2(q2) +
11 sin^2(q1) + sin^2(q2) + 2*d3*l3*cos(q1)*cos(q2)*sin(q2)
12
13 + 2*d3*l3*cos(q2)*sin(q1) + 2*d3*l3*cos(q1)*cos(q2)*sin(q2) + 2*d3*l3*cos(q2)*sin(q1)
14 + 2*d3*l3*cos(q1)*cos(q2)*sin(q2) + 2*d3*l3*cos(q2)*sin(q1)
15
16 cos(q2)^2*(d3 + l3)^2
17
18 diary off
19

```

De la línea 19 del resultado tendremos que los puntos singulares estarán dados donde  $\cos(q_2) \cdot (d_3 + l_3) = 0$  esto corresponde a los puntos donde  $q_2 = \pm(2n + 1)\pi$  no existe condición para  $d_3$  ya que al ser una longitud esta nunca puede ser negativa, por lo tanto el segundo factor no puede ser 0.

3. Se usaran las ecuaciones paramétricas de la elipse en conjunto con la cinemática inversa del robot.

$$\begin{aligned} x &= a + b\cos(t) \\ y &= c + d\sin(t) \end{aligned} \quad (6)$$

En la ecuación 6 el centro de la figura estará dado por el par ordenado  $a, c$  y tendrá semiejes  $b$  y  $d$ .

## 6. Conclusiones

- Se puede concluir que las matrices de transformación homogéneas calculadas mediante la convención de Denavit–Hartenberg predicen el comportamiento de la cinemática del robot.

## Referencias

Reyes, F. (2011). *Robótica-control de robots manipuladores*. Alfaomega grupo editor.

## 7. Anexos



```
1  clc;clear all;close all;
2  syms q1 q2 l1 l2 l3 d3 b1 b2
3  J=[-sin(q1)*cos(q2)*(d3+l3)+cos(q1)*b2 -cos(q1)*sin(q2)*(d3+l3) cos(q1)*cos(q2);cos(q1)*cos(q2)*(d3+l3)+sin(q1)*b2 -sin(q1)*sin(q2)*(d3+l3) sin(q1)*cos(q2);0 cos(q2)*(l3+d3)+sin(q2)*b2]
4  pretty(det(J))
5  pretty(simplify(det(J)))
```