

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA



BUAP

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA

LICENCIATURA EN ELECTRÓNICA

Preliminares Matemáticos

ROBÓTICA

Profesor:

Dr. Fernando Reyes Cortés

Alumno:

Hanan Ronaldo Quispe Condori

Número de Matrícula:

555010653

11 de marzo de 2020

1. Introducción

En el presente informe se desarrollaran soluciones mediante el software de MATLAB para sistemas dinámicos ademas de ello, se presentará un análisis cualitativo de los datos obtenidos en el laboratorio de robótica.

Estos sistemas dinámicos son modelos matemáticos de ecuaciones diferenciales que describen fenomenos físicos que se encuentren presentes en el robot[Reyes (2011)].

Haremos un análisis de las características cualitativas del punto de equilibrio del sistema dinámico(ecuación en lazo cerrado formada por la dinámica del péndulo-robot y el algoritmo de control) ,esto con la ayuda de los datos obtenidos del experimento realizado en el laboratorio.

Se verá que la implementación del código presentado en clase hizo más rapido el proceso de simulación y resolución de los problemas planteados, esto solo se pudo lograr luego de una comprensión de los mismos.

Cada solución ofrecida a los problemas se dará de la manera más clara posible tal y como se afronto en la realización de los mismos.

Este informe consta de los siguientes apartados

- Introducción
- Propositos
- Descripción del Problema
- Solución del Problema
- Resultados
- Conclusiones

Todos estos apartados se desarrollarán de la manera más concisa relacionada al problema propuesto.

La solución mediante MATLAB es de gran utilidad, este al ser un lenguaje de alta complejidad permite una variedad de herramientas a la hora de resolver problemas y comprobación de resultados con fiabilidad, bastante precisión y en tiempos cortos.

En los anexos se adjuntarán los codigos en su totalidad para su revisión y los gráficos generados por estos que nos permitan tener una mayor comprensión de los sistemas dinámicos planteados.

Finalmente, en el apartado de conclusiones se hara un balance de los puntos importantes que conllevo la realización del presente informe, habrá especial enfoque en la metodología empleada para la implementación del código.

De igual manera en el apartado de refercias se podrán encontrar mayor información con respecto a los temas de sistemas dinámicos y punto de equilibrio de un sistema dinámico.

2. Propósitos

Los objetivos esperados son los siguientes

- Interpretar el punto de equilibrio del sistema dinámico usando los datos experimentales obtenidos en el laboratorio de robótica
- Usar el software de MATLAB para solucionar el sistema dinámico propuesto, haciendo uso de los distintos metodos presentados en sesión de clase.

3. Descripción del Problema

1. Explicar cualitativamente la interpretación física del punto de equilibrio de un sistema dinámico(ecuación en lazo cerrado formada por la dinámica del péndulo-robot y el algoritmo de control).
2. Considere el archivo experimental denominado robot.dat, el cual contiene la información experimental en cuatro columnas; primera columna corresponde al tiempo real, segunda columna posición articular $q(t_k)$ [grados]; la velocidad de movimiento $\dot{q}(t_k)$ [grados/segundo]. Finalmente, la cuarta columna registra el par τ [Nm] aplicado al motor cada columna consta de 2000 reglones; el periodo de muestreo es de 2.5mseg
 - a) Describir la energía mecánica aplicada a la ecuación en lazo cerrado $V(\dot{q}, \tilde{q})$ (graficar y analizar resultados).
 - b) Describir la potencia mecánica de la ecuación en lazo cerrado $V(\dot{q}, \tilde{q})$ (graficar y analizar resultados).
3. Considere la siguiente ecuación diferencial

$$9\ddot{y} + 8\dot{y} + 0,23\dot{y} + \pi y = 3u \quad (1)$$

Donde la entrada u es el escalon unitario.

- a) Realice la simulación del sistema con la función ode45().
- b) Resuelva numéricamente el sistema dinámico usando el metodo de Euler.
- c) Resuelva numéricamente el sistema dinámico usando el metodo de filtrado.
- d) Lleve a cabo una comparación de los metodos numéricos utilizados.

4. Solución del Problema

1. En un sistema dinámico el punto de equilibrio tiene la característica de ser un atractor, al existir una perturbación de magnitud acotada y tiempo finito, será atrapado por el punto de equilibrio haciendo que el error $\tilde{q} = q_d - q$ sea cero, esto quiere decir que el robot alcanzo la posición deseada, en este punto la velocidad y la energía tambien serán cero ya que al ser la energía una función de Lyapunov, evaluada en el punto de equilibrio es cero, esta es una característica del punto de equilibrio.
2. a) Sea la ecuación dada del torque aplicado

$$\tau_c = k_p \operatorname{atanh}(\tilde{q}) - k_v \operatorname{atan}(\dot{q}) + m \operatorname{sen}(q) \quad (2)$$

Sea el modelo dinámico del péndulo[Reyes (2011)].

$$\tau_c = I\ddot{q} + b\dot{q} + mlsen(q) \quad (3)$$

La ecuación en lazo cerrado estará dada por

$$\begin{aligned} k_p \operatorname{atanh}(\tilde{q}) - k_v \operatorname{atan}(\dot{q}) &= I\ddot{q} + b\dot{q} \\ \ddot{q} &= \frac{1}{I}(k_p \operatorname{atanh}(\tilde{q}) - k_v \operatorname{atan}(\dot{q}) - b\dot{q}) \\ \tilde{q} &= q_d - q \\ \dot{\tilde{q}} &= -\dot{q} \end{aligned} \quad (4)$$

Ordenando las ecuaciones 4 se tiene

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ \frac{1}{I}(k_p \operatorname{atanh}(\tilde{q}) - k_v \operatorname{atan}(\dot{q}) - b\dot{q}) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Se propondra la siguiente función de energia

$$V(\dot{q}, \tilde{q}) = \frac{1}{2}I\dot{q}^2 + b + \frac{1}{2}k_p\tilde{q}^2 - \frac{e_0\tilde{q}\dot{q}I}{1 + \tilde{q}^2} \quad (6)$$

El error esta definido como la diferencia entre la posición deseada y la posición actual, bajo esta premisa de los datos obtenidos en el laboratorio se tendrá

Graficando el error vs la velocidad se tendrá

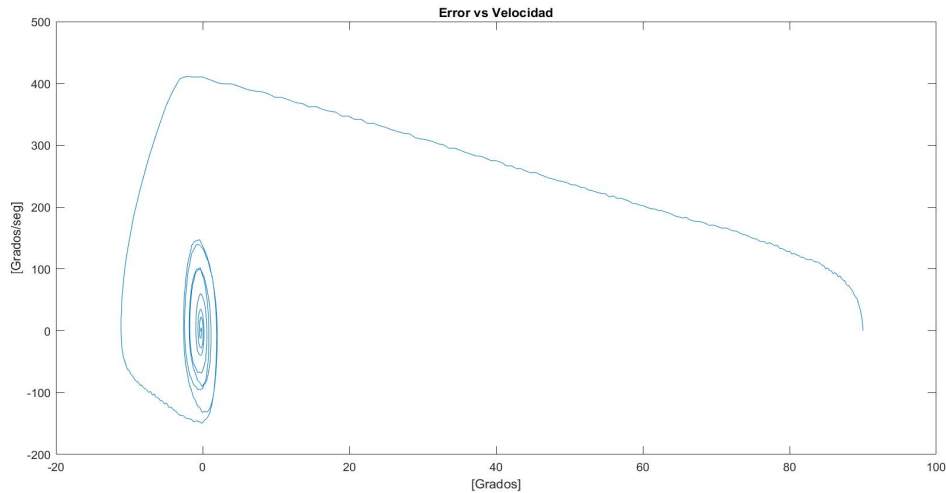


Figura 1: Energia Mecánica Aplicada al Sistema.

La figura 1 nos muestra el comportamiento del error y la velocidad de nuestro sistema, se puede observar que ambos convergen en cero a medida que pasa el tiempo, esto es una comprobación de que han llegado al punto de equilibrio, por característica del punto de equilibrio en este punto el error es cero ya que se llegó a la posición deseada y la velocidad en este punto también es cero.

b) De las ecuaciones 5 y 6 la potencia mecánica estará dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) &= -1[\dot{q}^2(b + 2e_0I - \frac{e_0I}{1 + \tilde{q}^2}) + \tilde{q}\dot{q}[k_p - \frac{e_0b}{1 + \tilde{q}^2}]] + (\dot{q} - \frac{e_0\tilde{q}}{1 + \tilde{q}^2}) \\ &\quad (k_v \operatorname{atanh}(\dot{q}) - k_p \operatorname{atan}(\tilde{q})) \end{aligned} \quad (7)$$

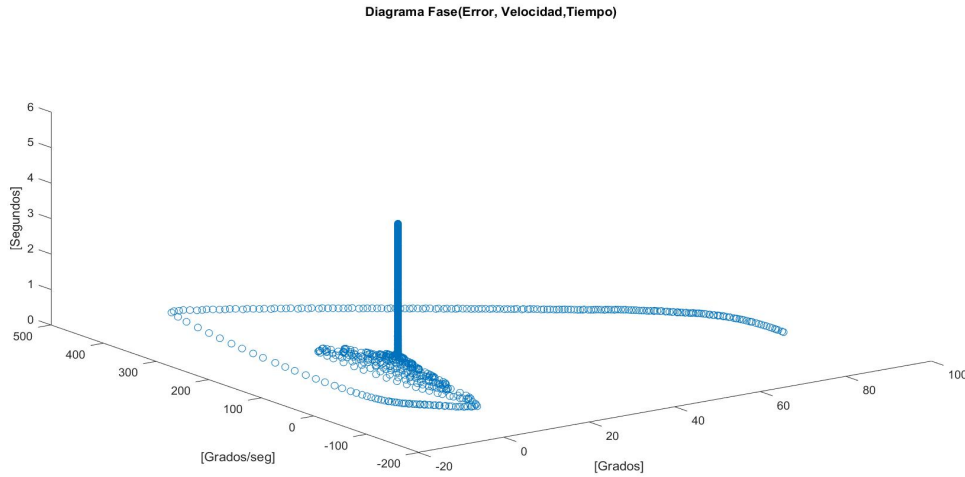


Figura 2: Potencia Mecánica Aplicada al Sistema.

Graficando con los datos del laboratorio se tendrá

La figura 2 nos muestra como evoluciona la energia con respecto pasa el tiempo, se puede observar claramente que una vez el punto de equilibrio es alcanzado, la energia se hace cero, al igual que la velocidad y el error[Cortés (2020)].

3. Usaremos MATLAB para obtener el modelo dinámico de la ecuación dada.

Primero se usara la función "tf" para obtener la función de transferencia del sistema despues usaremos la función "tf2ss" para obtener el modelo dinámico del sistema.

- a) Procedimiento enteramente realizado en MATLAB(ver anexos).
- b) Para el método de Euler se tendrá

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &\simeq \dot{y}(t_k) = \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{h} \\ \ddot{y}(t_k) &= \frac{y(t_k) - 2y(t_{k-1}) + y(t_{k-2}))}{h^2} \\ \ddot{\ddot{y}}(t_k) &= \frac{y(t_k) - 3y(t_{k-1}) + 3y(t_{k-2}) - y(t_{k-3}))}{h^3}\end{aligned}\quad (8)$$

Reemplazando 8 en la ecuación diferencial dada y tomando $h = 0,001$ se tendrá.

$$\begin{aligned}y(t_k) = & \left[\frac{1}{\frac{9}{0,001^3} + \frac{8}{0,001^2} + \frac{0,23}{0,001} + \pi} \right] \left[3\mu(t_k) + y(t_{k-1}) \left(\frac{3 * 9}{0,001^3} + \frac{2 * 8}{0,001^2} + \frac{0,23}{0,001} \right) \right. \\ & \left. - y(t_{k-2}) \left(\frac{3 * 9}{0,001^3} + \frac{2 * 8}{0,001^2} \right) + y(t_{k-3}) \frac{9}{0,001^3} \right] \\ & + \lambda^3 y(t_k)\end{aligned}\quad (9)$$

Usando la ecuación 9 se tendrá

- c) Para el metodo del filtrado se tendrán la siguientes estructuras de los filtros.

$$\begin{aligned}\dot{y}(t_k) &= \dot{F}_{y(t_k)}(t_k) = -\lambda F_{y(t_k)}(t_k) + \lambda y(t_k) \\ \ddot{y}(t_k) &= \dot{F}_{\dot{y}(t_k)}(t_k) = -\lambda F_{\dot{y}(t_k)}(t_k) + \lambda \dot{y}(t_k) = -\lambda F_{\dot{y}(t_k)}(t_k) - \lambda^2 F_{y(t_k)}(t_k) + \lambda^2 y(t_k) \\ \ddot{\ddot{y}}(t_k) &= \dot{F}_{\ddot{y}(t_k)}(t_k) = -\lambda F_{\ddot{y}(t_k)}(t_k) + \lambda \ddot{y}(t_k) = -\lambda F_{\ddot{y}(t_k)}(t_k) - \lambda^2 F_{\dot{y}(t_k)}(t_k) - \lambda^3 F_{y(t_k)}(t_k) \\ &+ \lambda^3 y(t_k)\end{aligned}\quad (10)$$

Reemplazando la ecuación 10 en la ecuación 1 y despejando $y(t_k)$ se tendrá.

$$y(t_k) = \frac{9\lambda F_{\ddot{y}(t_k)} + (9\lambda^2 + 8\lambda)F_{\dot{y}(t_k)} + (9\lambda^3 + 8\lambda^2 + 0,23\lambda - \pi)F_{y(t_k)} + 3F_{u(t_k)}}{9\lambda^3 + 8\lambda^2 + 0,23\lambda} \quad (11)$$

Usando las ecuaciones 10 y 11 en MATLAB se tendrá.

d) Sean los resultados de los diferentes métodos

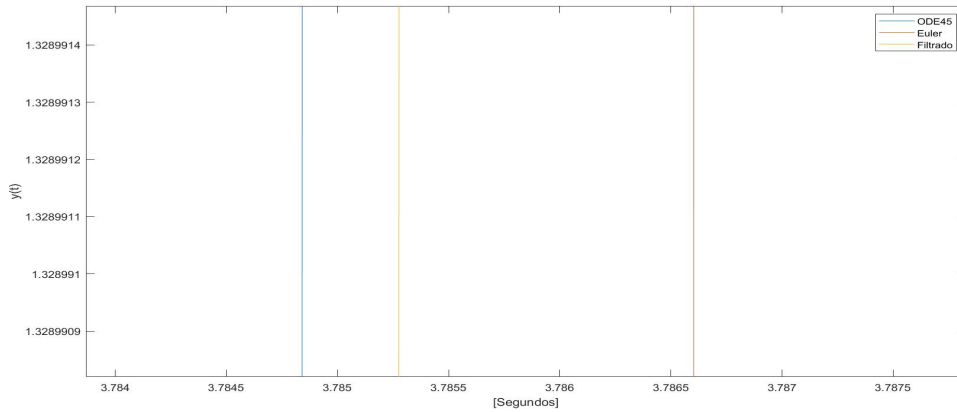


Figura 3: Comparación de Resultados ode45, Euler y Filtrado.

5. Resultados

El resultado obtenido es

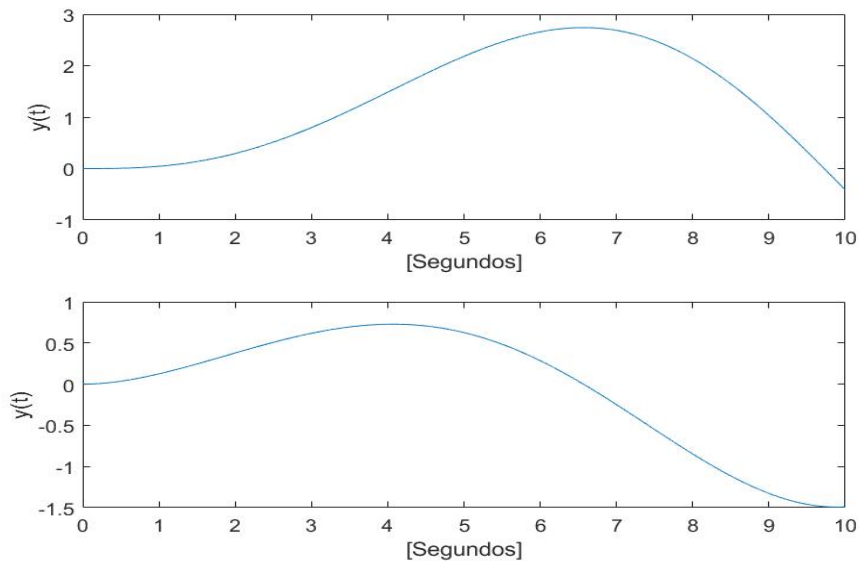


Figura 4: Simulación por ode45.

La función ode45 retorna la solución del sistema así como el vector de tiempo.
La gráfica obtenida será

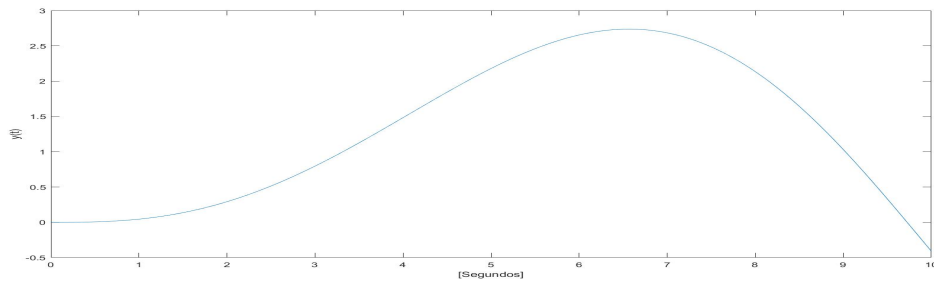


Figura 5: Simulación por Metodo de Euler.

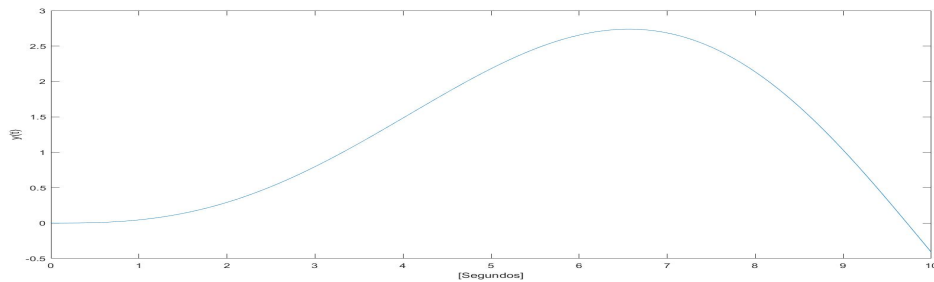


Figura 6: Simulación por Metodo de Filtrado.

6. Conclusiones

Se puede concluir que los metodos numéricos utilizados en el presente informe comparados con el metodo de ode45 con competitivos, de rapida ejecucion y bajo consumo de memoria a comparacion de este ultimo, esto facilita su uso en condiciones donde no se cuenta con tantos recursos computacionales.

7. Anexos

- Extracción de muestras del archivo `.dat`

```

1  %Extraccion de Datos
2  filename='robotGrupoD.dat';
3  delimiter=' ';
4  A=importdata(filename,delimiter,1);
5  time=A.data(:,1);
6  angle=A.data(:,2);
7  speed=A.data(:,3);
8  error=90-angle;%se calula el error apartir del vector de angulos
9  par_aplicado=A.data(:,4);

```

- Extracción del modelo dinámico

```

1  sys=tf([3],[9,8,0.23,pi])
2
3  sys =
4
5      3
6  -----
7  9 s^3 + 8 s^2 + 0.23 s + 3.142
8
9  Continuous-time transfer function.
10

```

```

11 [A,B,C]=tf2ss(n,d)
12
13 A =
14
15     -0.8889    -0.0256    -0.3491
16     1.0000         0         0
17         0     1.0000         0
18
19
20 B =
21
22         1
23         0
24         0
25
26
27 C =
28
29         0         0     0.3333
30
31 diary off

```

- ODE45 Se usaran las matrices A y B como se muestra a continuación.

```

1 function xp=sso(t,x)
2 %A=[-0.8889 -0.0256 -0.3491;1 0 0;0 1 0];
3 %B=[1;0;0];
4 A=[0 1 0;0 0 1;-0.3491 -0.0256 -0.8889];
5 B=[0;0;3/9];
6 u=1;
7 xp=A*x+B*u;
8 end

```

La función principal es

```

1 ti=0;tf=10;h=0.001;
2 ts=ti:h:tf;
3 cond_iniciales=[0,0,0];
4 opciones=odeset('RelTol',1e-06,'AbsTol',1e-06,'InitialStep',h,'Maxstep',h);
5 disp('Simulacion sistema lineal de segundo orden');
6 [t,x]=ode45('sso',ts,cond_iniciales,options);
7 figure
8 subplot(2,1,1);plot(t,x(:,1))
9 xlabel('[Segundos]')
10 ylabel('y(t)')
11 subplot(2,1,2);plot(t,x(:,2))
12 xlabel('[Segundos]')
13 ylabel('y(t)')

```

- Euler

```

1 clc;clear all; close all;
2 ti=0;tf=10;h=0.001;
3 ts=ti:h:tf;
4 cond_iniciales=[0,0,0];
5 opciones=odeset('RelTol',1e-06,'AbsTol',1e-06,'InitialStep',h,'Maxstep',h);
6 [t,x]=ode45('sso',ts,cond_iniciales,options);
7 [n,m]=size(x(:,1));
8 y=zeros(n,m);u=ones(n,m);
9 a0=pi;a1=0.23;a2=8;a3=9;
10 for k=4:n
11     y(k)=(1/(a3/h^3+a2/h^2+a1/h+a0))*(3*u(k)+(3*a3/h^3+2*a2/h^2+a1/h)*y(k-1)-(3*a3/h^3+a2/h^2)*y(k-2)+a3/h^3*y(k-3));
12 end
13 figure
14 plot(t,y);
15 xlabel('[Segundos]')

```



```
16 ylabel('y(t)')
```

■ Filtrado

```
1  clc;clear all; close all;format short;
2  ti=0;tf=10;h=0.001;
3  ts=ti:h:tf;
4  cond_iniciales=[0,0,0];
5  opciones=odeset('RelTol',1e-06,'AbsTol',1e-06,'InitialStep',h,'Maxstep',h);
6  [t,x]=ode45('sso',ts,cond_iniciales,opciones);
7  [m,n]=size(x(:,1));
8  fy=zeros(n,m);fyp=zeros(n,m);fypp=zeros(n,m);
9  fu=ones(n,m);y=zeros(n,m);
10 lamb=35;
11 a0=pi;a1=0.23;a2=8;a3=9;
12 for k=2:m
13     fy(k)=exp(-lamb*h)*fy(k-1)+(1-exp(-lamb*h))*x(k-1,1);
14     fyp(k)=exp(-lamb*h)*fyp(k-1)+(1-exp(-lamb*h))*x(k-1,2);
15     fypp(k)=exp(-lamb*h)*fypp(k-1)+(1-exp(-lamb*h))*x(k-1,3);
16     fu(k)=exp(-lamb*h)*fu(k-1)+(1-exp(-lamb*h))*fu(k-1);
17     y(k)=(1/(9*lamb^3+8*lamb^2+0.23*lamb))*(9*lamb*fypp(k)+(9*lamb^2+8*lamb)*fyp(k)+
        (9*lamb^3+8*lamb^2+0.23*lamb-pi)*fy(k)+3*fu(k));
18 end
19 figure
20 plot(t,y);xlabel('[Segundos]');ylabel('y(t)');
```

■ Comparación de Resultados

```
1  clc;clear all; close all;format short;
2  ti=0;tf=10;h=0.001;
3  ts=ti:h:tf;
4  cond_iniciales=[0,0,0];
5  opciones=odeset('RelTol',1e-06,'AbsTol',1e-06,'InitialStep',h,'Maxstep',h);
6  [t,x]=ode45('sso',ts,cond_iniciales,opciones);
7  [m,n]=size(x(:,1));
8  fy=zeros(n,m);fyp=zeros(n,m);fypp=zeros(n,m);
9  fu=ones(n,m);y=zeros(n,m);
10 lamb=35;
11 a0=pi;a1=0.23;a2=8;a3=9;
12 for k=2:m
13     fy(k)=exp(-lamb*h)*fy(k-1)+(1-exp(-lamb*h))*x(k-1,1);
14     fyp(k)=exp(-lamb*h)*fyp(k-1)+(1-exp(-lamb*h))*x(k-1,2);
15     fypp(k)=exp(-lamb*h)*fypp(k-1)+(1-exp(-lamb*h))*x(k-1,3);
16     fu(k)=exp(-lamb*h)*fu(k-1)+(1-exp(-lamb*h))*fu(k-1);
17     y(k)=(1/(9*lamb^3+8*lamb^2+0.23*lamb))*(9*lamb*fypp(k)+(9*lamb^2+8*lamb)*fyp(k)+
        (9*lamb^3+8*lamb^2+0.23*lamb-pi)*fy(k)+3*fu(k));
18 end
19 y1=zeros(n,m);u1=ones(n,m);
20 a0=pi;a1=0.23;a2=8;a3=9;
21 for k=4:m
22     y1(k)=(1/(a3/h^3+a2/h^2+a1/h+a0))*(3*u1(k)+(3*a3/h^3+2*a2/h^2+a1/h)*y1(k-1)-(3*
        a3/h^3+a2/h^2)*y1(k-2)+a3/h^3*y1(k-3));
23 end
24 figure;plot(t,x(:,1),t,y1,t,y);legend('ODE45','Euler','Filtrado');xlabel('[Segundos]');
    ylabel('y(t)');
```

Referencias

Cortés, F. R. (2020). *Preliminares matemáticos, parte iv, diap 12*.

Reyes, F. (2011). *Robótica-control de robots manipuladores*. Alfaomega grupo editor.