

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA



BUAP

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA

LICENCIATURA EN ELECTRÓNICA

Dinámica y Control de Posición

ROBÓTICA

Profesor:

Dr. Fernando Reyes Cortés

Alumno:

Hanan Ronaldo Quispe Condori

Número de Matrícula:

555010653

2 de junio de 2020

1. Resumen

En el presente reporte se trabajarán aspectos importantes del algoritmo de control propuesto, primeramente, se considerará el caso general de un robot manipulador de n grados de libertad y luego la explicación cualitativa de este algoritmo aplicado a un robot manipulador de dos grados de libertad, con esta finalidad, se obtendrá la ecuación en lazo cerrado usando el modelo dinámico del robot de n grados de libertad y se procederá a demostrar la existencia del punto de equilibrio, seguidamente se propondrá una función candidata de Lyapunov analizando que esta, sea una función definida positiva, después, se demostrará la estabilidad de este punto. Además de esto, se demostrará que la componente de regulación de este algoritmo de control se encuentra acotada. Finalmente se hará la simulación en MATLAB usando el modelo dinámico de un robot manipulador de dos grados de libertad y el valor numérico de los parámetros físicos proporcionados.

2. Propósitos

- Competencias Profesionales
 - Analizar un esquema de control nuevo usando los conocimientos adquiridos durante todo el curso teniendo en cuenta las condiciones propuestas para esta tarea.
 - Aplicar las técnicas de simulación en MATLAB aprendidas para el análisis de algoritmos de control nuevos.
- Competencias Generales
 - Aplicar el razonamiento lógico matemático a la demostración de esquemas de control usando los contenidos teóricos desarrollados.
 - Usar las habilidades de aprendizaje autónomo en la simulación en software de sistemas no lineales autónomos.

3. Introducción

En robótica el uso de ecuaciones diferenciales es vital dada la complejidad de los sistemas, un modelo dinámico expresado por estas ecuaciones nos permite explicar todos los fenomenos físicos que se encuentran en su estructura mecánica, dentro de estos fenomenos podemos mencionar.

- Fuerzas Centrípetas y Coriolis
- Efectos Inerciales
- Par Gravitacional

Este modelo se obtiene usando la metodología de Euler-Lagrange, para la cual se obtiene el lagrangiano del robot manipulador $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{K}(q, \dot{q}) - \mathcal{U}(q, \dot{q})$ siendo resultante el modelo dinámico para un robot manipulador de n grados de libertad formado por eslabones rígidos conectados por articulaciones libres de elasticidad en cadena cinemática abierta.

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + f_f(\dot{q}, f_e) \quad (1)$$

Este modelo se puede usar para propósitos de simulación, diseño, construcción del sistema mecánico, análisis y diseño de sistemas de control [Reyes (2011)].

En continuación con esta temática se verá también el problema de regulación o control de posición, consiste en mover el extremo final del robot manipulador desde cualquier posición inicial $q(0)$ hacia una posición deseada q_d , con esta finalidad, se determinará una ley de control τ que proporcione los pares aplicados a los servomotores del robot, de tal forma que el error de posición del robot $\tilde{q}(t)$ y la velocidad articular $\dot{q}(t)$ convergan asintóticamente a cero sin importar las condiciones iniciales $\tilde{q}(0)$ y $\dot{q}(0)$ expresado matemáticamente esto se tendrá.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ \tilde{q}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Para determinar la ley de control τ recurriremos al enfoque de moldeo de energía, este permite diseñar una familia extensa de esquemas de control. Un esquema de control de posición es una ecuación cuya principal característica es que genera un atractor en la ecuación de lazo cerrado formada por el modelo dinámico del robot manipulador y la estructura matemática del esquema de control. Lo que quiere decir que el atractor de las variables de estado corresponde al origen visto en un diagrama fase y por tanto dicho punto sea asintóticamente estable, esto hará que la influencia de las condiciones iniciales sea nula, el robot manipulador siempre llegará a la posición deseada q_d [Reyes (2011)].

$$\tau = \nabla \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q}) - f_v(K_v, \dot{q}) + g(q) \quad (3)$$

En la ecuación 3 el término que se diseñará es $\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q})$ el cual corresponde a la energía potencial artificial, este diseño se llevará a cabo proponiendo una función de Lyapunov que tendrá la siguiente forma.

$$V(\dot{q}, \tilde{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q}) \quad (4)$$

4. Planteamiento y Descripción del Problema

Considere el siguiente algoritmo de control:

$$\tau = K_p \left[\frac{1}{\cosh^2(\tilde{q})} \frac{\tanh(\tilde{q})}{1+\tanh^2(\tilde{q})} \right] - K_v \operatorname{atan}(\dot{q}) + g(q) \quad (5)$$

Donde $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices definidas positivas; además:

$$\left[\frac{1}{\cosh^2(\tilde{q})} \frac{\tanh(\tilde{q})}{1+\tanh^2(\tilde{q})} \right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cosh^2(\tilde{q}_1)} \frac{\tanh(\tilde{q}_1)}{1+\tanh^2(\tilde{q}_1)} \\ \frac{1}{\cosh^2(\tilde{q}_2)} \frac{\tanh(\tilde{q}_2)}{1+\tanh^2(\tilde{q}_2)} \\ \vdots \\ \frac{1}{\cosh^2(\tilde{q}_n)} \frac{\tanh(\tilde{q}_n)}{1+\tanh^2(\tilde{q}_n)} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \operatorname{atan}(\dot{q}) = \begin{bmatrix} \operatorname{atan}(\dot{q}_1) \\ \operatorname{atan}(\dot{q}_2) \\ \vdots \\ \operatorname{atan}(\dot{q}_n) \end{bmatrix} \quad (6)$$

1. Demostrar la existencia y unicidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado.
2. Proponer una función candidata de Lyapunov (demostrar analíticamente que dicha función se definida positiva).
3. Demostrar la estabilidad del punto de equilibrio.
4. Demostrar que la componente de regulación de (5) se encuentra acotada.
5. Realizar la simulación del algoritmo de control (5) con el modelo dinámico numérico de un robot de 2 gld, tomando en cuenta las siguientes referencias: $\begin{bmatrix} q_{d1}, & q_{d2} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 90^\circ, & 90^\circ \end{bmatrix}^T$. Considere un tiempo de simulación de $t = 0$ a 10 segundos y un periodo de muestreo $h = 2,5\text{ms}$. Explicar cualitativamente el funcionamiento del algoritmo de control(5).
6. Proponga una regla de sintonía de las ganancias proporcional $K_p \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ y derivativa $K_v \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, tal que la ley de control $\tau \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ no rebase el torque del hombro $\tau_1^{max} = 150Nm$ y para la articulación del codo $\tau_2^{max} = 15Nm$. Grafique los pares aplicados y errores de posición.

5. Solución del Problema

1. Se procederá a armar la ecuación lazo cerrado, usando el modelo dinámico sin considerar la fricción de Coulomb ni la fricción estática de articulación y el algoritmo de control .

$$\begin{aligned} M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + B\dot{q} &= K_p \left[\frac{1}{\cosh^2(\tilde{q})} \frac{\tanh(\tilde{q})}{1+\tanh^2(\tilde{q})} \right] - K_v \operatorname{atan}(\dot{q}) + g(q) \\ M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + B\dot{q} &= K_p \left[\frac{1}{\cosh^2(\tilde{q})} \frac{\tanh(\tilde{q})}{1+\tanh^2(\tilde{q})} \right] - K_v \operatorname{atan}(\dot{q}) + g(q) \quad (7) \\ M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + B\dot{q} &= K_p \left[\frac{1}{\cosh^2(\tilde{q})} \frac{\tanh(\tilde{q})}{1+\tanh^2(\tilde{q})} \right] - K_v \operatorname{atan}(\dot{q}) \end{aligned}$$

Despejando \ddot{q} se tendrá

$$\ddot{q} = M^{-1}(q) \left[K_p \left[\frac{1}{\cosh^2(\tilde{q})} \frac{\tanh(\tilde{q})}{1+\tanh^2(\tilde{q})} \right] - K_v \operatorname{atan}(\dot{q}) - C(q, \dot{q})\dot{q} - B\dot{q} \right] \quad (8)$$

El error estara dado por la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= q_d - q \\ \dot{\tilde{q}} &= -\dot{q} \end{aligned} \quad (9)$$

De las ecuaciones (8) y (9) se tendrá la ecuación en lazo cerrado.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{q}} \\ M^{-1}(q) \left[K_p \left[\frac{1}{\cosh^2(\tilde{q})} \frac{\tanh(\tilde{q})}{1+\tanh^2(\tilde{q})} \right] - K_v \operatorname{atan}(\dot{\tilde{q}}) - C(q, \dot{q}) \dot{\tilde{q}} - B \dot{\tilde{q}} \right] \end{bmatrix} \quad (10)$$

La demostración de existencia y unicidad del punto de equilibrio $[0, 0]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ será.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{q}} \\ M^{-1}(q) \left[K_p \left[\frac{1}{\cosh^2(\tilde{q})} \frac{\tanh(\tilde{q})}{1+\tanh^2(\tilde{q})} \right] - K_v \operatorname{atan}(\dot{\tilde{q}}) - C(q, \dot{q}) \dot{\tilde{q}} - B \dot{\tilde{q}} \right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

- El primer término de la ecuación (11) satisface $-\dot{\tilde{q}} = -I\dot{\tilde{q}} \leftrightarrow \dot{\tilde{q}} = 0$ esto ya que $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad.
- Para el segundo término de la ecuación (11) se tiene que $M(q) > 0$ por propiedad de ser definida positiva $M^{-1}(q)$ será también definida positiva, entonces para que se cumpla la condición $M^{-1}(q) \left[K_p \left[\frac{1}{\cosh^2(\tilde{q})} \frac{\tanh(\tilde{q})}{1+\tanh^2(\tilde{q})} \right] - K_v \operatorname{atan}(\dot{\tilde{q}}) - C(q, \dot{q}) \dot{\tilde{q}} - B \dot{\tilde{q}} \right] = 0$, se debe cumplir que $\left[K_p \left[\frac{1}{\cosh^2(\tilde{q})} \frac{\tanh(\tilde{q})}{1+\tanh^2(\tilde{q})} \right] - K_v \operatorname{atan}(\dot{\tilde{q}}) - C(q, \dot{q}) \dot{\tilde{q}} - B \dot{\tilde{q}} \right] = 0$, analizando esta expresión

$$C(q, \dot{q}) \dot{\tilde{q}} = 0 \leftrightarrow \dot{\tilde{q}} = 0, \quad B \dot{\tilde{q}} = 0 \leftrightarrow \dot{\tilde{q}} = 0, \quad -K_v \operatorname{atan}(\dot{\tilde{q}}) = 0 \leftrightarrow \operatorname{atan}(0) = 0 \quad (12)$$

El último factor que falta analizar es $K_p \left[\frac{1}{\cosh^2(\tilde{q})} \frac{\tanh(\tilde{q})}{1+\tanh^2(\tilde{q})} \right]$, en esta expresión dado que K_p es definida positiva entonces $\left[\frac{1}{\cosh^2(\tilde{q})} \frac{\tanh(\tilde{q})}{1+\tanh^2(\tilde{q})} \right] = 0 \leftrightarrow \tilde{q} = 0$, si graficamos esta función podremos ver el comportamiento acotado del regulador propuesto.

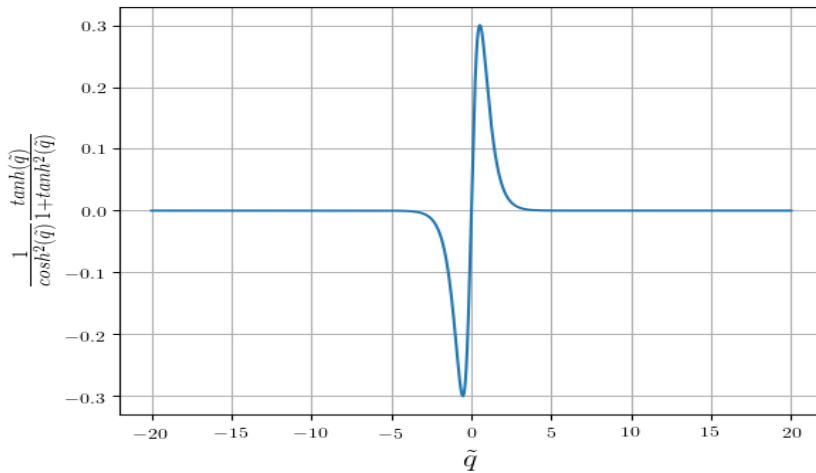


Figura 1: Regulador Acotado.

Entonces podemos concluir que el punto $[\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}] = 0 \in \mathbb{R}^{2n}$ existe y es el único punto de equilibrio del sistema.

2. Se propondrá la siguiente función candidata de Lyapunov compuesta por la suma de la energía cinética del robot manipulador y energía potencial artificial siguiendo la regla

de diseño (4).

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\tanh^2(\tilde{q}_1) + 1)} \\ \sqrt{\ln(\tanh^2(\tilde{q}_2) + 1)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\tanh^2(\tilde{q}_n) + 1)} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\tanh^2(\tilde{q}_1) + 1)} \\ \sqrt{\ln(\tanh^2(\tilde{q}_2) + 1)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\tanh^2(\tilde{q}_n) + 1)} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Esta función candidata de Lyapunov debe ser definida positiva, lo cual se procederá a demostrar.

- El primer sumado $\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}$ se puede observar que tiene la forma $x^T P x$ el cual según el teorema de silvestrer [Reyes (2020)] será definida positiva si y solo si la matriz P es definida positiva. En este caso por propiedad del modelo dinámico la matriz de inercia $M(q)$ es definida positiva.
- En el caso de la energía potencial artificial se puede observa que $\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q}) = \mathcal{U}_a(K_p, 0) = 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_a(K_p, 0) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\tanh^2(0) + 1)} \\ \sqrt{\ln(\tanh^2(0) + 1)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\tanh^2(0) + 1)} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\tanh^2(0) + 1)} \\ \sqrt{\ln(\tanh^2(0) + 1)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\tanh^2(0) + 1)} \end{bmatrix} \\ \mathcal{U}_a(K_p, 0) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1)} \\ \sqrt{\ln(1)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1)} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1)} \\ \sqrt{\ln(1)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1)} \end{bmatrix} \\ \mathcal{U}_a(K_p, 0) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{U}_a(K_p, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Tambien se puede observar que $\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q}) > 0$ si $\tilde{q} \neq 0$, se puede concluir que $\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q})$ es definida positiva local ya que $\exists \rho > 0, \gamma > 0 : 0 < \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q}) < \gamma$, se sabe que la suma de funciones definidas positivas es otra función definida positiva por lo tanto.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} > 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q}) > 0 \quad \therefore \quad \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q}) > 0 \\ V(\tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q}) > 0 \end{aligned} \quad (15)$$

3. Para demostrar la estabilidad del punto se equilibrio se procederá a derivar la ecuación (13) con respecto al tiempo para obtener la potencia.

$$\begin{aligned}\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\tanh^2(\tilde{q}_1) + 1)} \\ \sqrt{\ln(\tanh^2(\tilde{q}_2) + 1)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\tanh^2(\tilde{q}_n) + 1)} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\tanh^2(\tilde{q}_1) + 1)} \\ \sqrt{\ln(\tanh^2(\tilde{q}_2) + 1)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\tanh^2(\tilde{q}_n) + 1)} \end{bmatrix} \right] \\ \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} [\dot{q}^T M(q) \dot{q}] \right] + \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\tanh^2(\tilde{q}_1) + 1)} \\ \sqrt{\ln(\tanh^2(\tilde{q}_2) + 1)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\tanh^2(\tilde{q}_n) + 1)} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\tanh^2(\tilde{q}_1) + 1)} \\ \sqrt{\ln(\tanh^2(\tilde{q}_2) + 1)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\tanh^2(\tilde{q}_n) + 1)} \end{bmatrix} \right] \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} [\dot{q}^T M(q) \dot{q}] \right] &= \frac{1}{2} [\dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \ddot{q}^T M(q) \dot{q} + \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q}] \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} [\dot{q}^T M(q) \dot{q}] \right] &= \frac{1}{2} [\dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q}] \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} [\dot{q}^T M(q) \dot{q}] \right] &= \frac{1}{2} [2\dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q}] \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} [\dot{q}^T M(q) \dot{q}] \right] &= \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q}\end{aligned}\tag{16}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q}) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left[\sqrt{\ln(\tanh^2(\tilde{q}) + 1)} \right]^T K_p \left[\sqrt{\ln(\tanh^2(\tilde{q}) + 1)} \right] \right) \\ \frac{d}{dt} \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q}) &= \frac{1}{2} 2 \left[\sqrt{\ln(\tanh^2(\tilde{q}) + 1)} \right]^T K_p \frac{d}{dt} \left[\sqrt{\ln(\tanh^2(\tilde{q}) + 1)} \right] \\ \frac{d}{dt} \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q}) &= \frac{1}{2} 2 \left[\sqrt{\ln(\tanh^2(\tilde{q}) + 1)} \right]^T K_p \left[\frac{2 \tanh(\tilde{q}) \dot{\tilde{q}}}{2 \sqrt{\ln(\tanh^2(\tilde{q}) + 1)} (\tanh^2(\tilde{q}) + 1) \cosh^2(\tilde{q})} \right] \\ \frac{d}{dt} \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q}) &= \frac{1}{2} 2 \left[\sqrt{\ln(\tanh^2(\tilde{q}) + 1)} \right]^T K_p \left[\frac{\dot{\tilde{q}} \tanh(\tilde{q})}{\sqrt{\ln(\tanh^2(\tilde{q}) + 1)} (\tanh^2(\tilde{q}) + 1) \cosh^2(\tilde{q})} \right] \dot{\tilde{q}} \\ \frac{d}{dt} \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q}) &= - \left[\frac{\tanh(\tilde{q})}{(\tanh^2(\tilde{q}) + 1) \cosh^2(\tilde{q})} \right]^T K_p \dot{\tilde{q}}\end{aligned}\tag{17}$$

Usando las ecuaciones (16), (17) y (11) se tendrá

$$\begin{aligned}\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &= \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} - \left[\frac{\tanh(\tilde{q})}{(\tanh^2(\tilde{q}) + 1) \cosh^2(\tilde{q})} \right]^T K_p \dot{\tilde{q}} \\ \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &= \dot{q}^T \cancel{M(q)} \cancel{M^{-1}(q)} [K_p \left[\frac{1}{\cosh^2(\tilde{q})} \frac{\tanh(\tilde{q})}{1 + \tanh^2(\tilde{q})} \right] - K_v \operatorname{atan}(\dot{q}) - C(q, \dot{q}) \dot{q} - B \dot{q}] \\ &\quad + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} - \dot{q}^T K_p \left[\frac{\tanh(\tilde{q})}{(\tanh^2(\tilde{q}) + 1) \cosh^2(\tilde{q})} \right] \\ \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &= \dot{q}^T [K_p \left[\frac{1}{\cosh^2(\tilde{q})} \frac{\tanh(\tilde{q})}{1 + \tanh^2(\tilde{q})} \right] - K_v \operatorname{atan}(\dot{q}) - C(q, \dot{q}) \dot{q} - B \dot{q}] \\ &\quad + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} - \dot{q}^T K_p \left[\frac{\tanh(\tilde{q})}{(\tanh^2(\tilde{q}) + 1) \cosh^2(\tilde{q})} \right] \\ \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &= \cancel{\dot{q}^T K_p \left[\frac{1}{\cosh^2(\tilde{q})} \frac{\tanh(\tilde{q})}{1 + \tanh^2(\tilde{q})} \right]} - \dot{q}^T K_v \operatorname{atan}(\dot{q}) - \dot{q}^T C(q, \dot{q}) \dot{q} - \dot{q}^T B \dot{q} \\ &\quad + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} - \cancel{\dot{q}^T K_p \left[\frac{\tanh(\tilde{q})}{(\tanh^2(\tilde{q}) + 1) \cosh^2(\tilde{q})} \right]} \\ \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &= -\dot{q}^T K_v \operatorname{atan}(\dot{q}) - \cancel{\dot{q}^T C(q, \dot{q}) \dot{q}} - \dot{q}^T B \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} \\ \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &= -\dot{q}^T K_v \operatorname{atan}(\dot{q}) - \dot{q}^T B \dot{q} \leq 0\end{aligned}\tag{18}$$

De la ecuación (18) se puede afirmar que $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q})$ es semidefinida negativa, por lo tanto queda demostrada la estabilidad del punto de equilibrio.

4. Para esta demostración se analizará el comportamiento del vector $\left[\frac{1}{\cosh^2(\tilde{q})} \frac{\tanh(\tilde{q})}{1+\tanh^2(\tilde{q})} \right]$.

$$\begin{aligned} f(\tilde{q}) &= \left[\frac{1}{\cosh^2(\tilde{q})} \frac{\tanh(\tilde{q})}{1+\tanh^2(\tilde{q})} \right] \\ \frac{d}{d(\tilde{q})} f(\tilde{q}) &= g(\tilde{q}) \\ \frac{d}{d(\tilde{q})} j(\tilde{q}) &= -ag(\tilde{q}) \end{aligned} \quad (19)$$

Definimos una función decreciente $\frac{d}{d(\tilde{q})} j(\tilde{q})$ para encontrar una ODE.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d(\tilde{q})} j(\tilde{q}) &= -ag(\tilde{q}) \\ dj(\tilde{q}) &= -ag(\tilde{q})d(\tilde{q}) \\ \int dj(\tilde{q}) &= \int -ag(\tilde{q})d(\tilde{q}) \\ J(\tilde{q}) - J(\tilde{q}_0) &= -a \int g(\tilde{q})d(\tilde{q}) \\ J(\tilde{q}_0) &= a \int g(\tilde{q})d(\tilde{q}) + J(\tilde{q}) \end{aligned} \quad (20)$$

Por el colorario de los numeros reales $a, b, c \in \mathbb{R} \rightarrow a = b + c \leftrightarrow a > b \wedge a > c$ en la ecuación (20) se tendrá.

$$J(\tilde{q}_0) > a \int g(\tilde{q})d(\tilde{q}) \quad (21)$$

Reemplazando la ecuación (19) en (21) se puede afirmar.

$$\begin{aligned} J(\tilde{q}_0) &> a \left[\frac{1}{\cosh^2(\tilde{q})} \frac{\tanh(\tilde{q})}{1+\tanh^2(\tilde{q})} \right] \\ \frac{J(\tilde{q}_0)}{a} &> \left[\frac{1}{\cosh^2(\tilde{q})} \frac{\tanh(\tilde{q})}{1+\tanh^2(\tilde{q})} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

De la ecuación (22) se puede concluir que la componente de regulación esta acotada, adicionalmente a esto se puede afirmar [Reyes-Cortes y cols. (2019)].

$$\left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{\cosh^2(\tilde{q}_1)} \frac{\tanh(\tilde{q}_1)}{1+\tanh^2(\tilde{q}_1)} \\ \frac{1}{\cosh^2(\tilde{q}_2)} \frac{\tanh(\tilde{q}_2)}{1+\tanh^2(\tilde{q}_2)} \\ \vdots \\ \frac{1}{\cosh^2(\tilde{q}_n)} \frac{\tanh(\tilde{q}_n)}{1+\tanh^2(\tilde{q}_n)} \end{bmatrix} \right\| < \frac{J(\tilde{q}_0)}{a} \quad (23)$$

5. Se procederá a graficar las funciones que conforman el esquema de control propuesto en la ecuación (5) para su análisis cualitativo, este esquema se usara en MATLAB para la simulación usando el modelo dinámico del robot de dos grados con los parametros numéricos proporcionados .

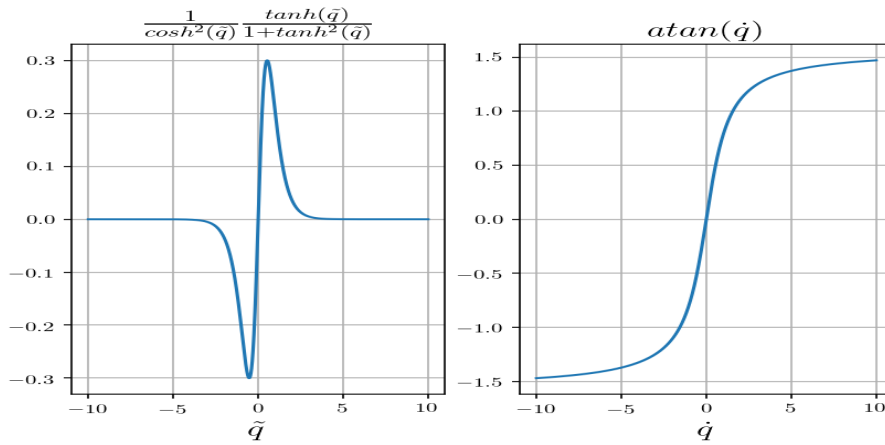


Figura 2: Gráfica de Componentes del Esquema de Control.

Como se puede observar en las figuras ambas componentes se encuentran saturadas, para valores positivos muy grandes y negativos muy pequeños del error \tilde{q} , esta componente no tendrá efecto, en el caso de que \tilde{q} sea pequeño o lo suficientemente grande, esta componente trabajará como un resorte no lineal de comportamiento hiperbólico. La componente $\text{atan}(\dot{q})$ producirá un efecto de amortiguamiento que atraparará los picos, sobreimpulsos de la repuesta transitoria para valores de \dot{q} lo suficientemente grandes.

Para ejecutar la simulación se incluirán las siguientes líneas de código al archivo que contiene el algoritmo de control y la posición deseada $[90^\circ, 90^\circ]^T$.

```

1 %posiciones deseadas
2 qd1=90;
3 qd2=90;
4 qd=[qd1; qd2];
5 %algoritmo de control
6 hyper_p=[1/(cosh(qt(1,1))*cosh(qt(1,1)))*(tanh(qt(1,1)))/(1+tanh(qt(1,1))*tanh(qt(1,1)));1/(cosh(qt(2,1))*cosh(qt(2,1)))*(tanh(qt(2,1)))/(1+tanh(qt(2,1))*tanh(qt(2,1)))];
7 hyper_d=[atan(qp(1,1)); atan(qp(2,1))];
8 tau=Kp*hyper_p-Kv*hyper_d+par_grav;

```

Al ejecutar la simulación se tendrán las siguientes gráficas de la posición y error de posición.

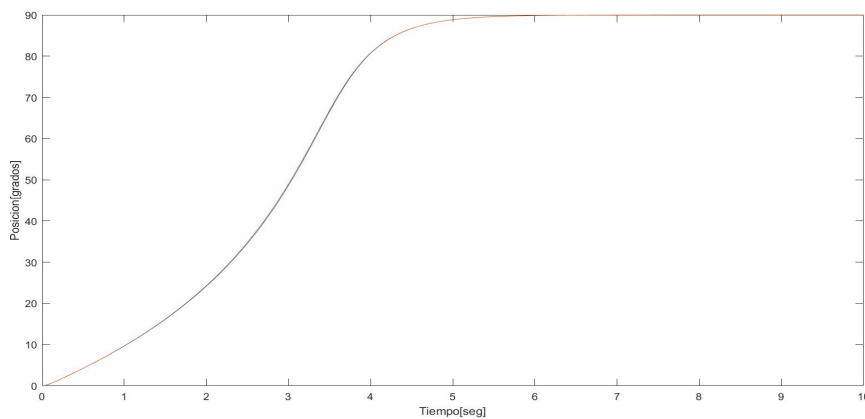


Figura 3: Evolución de la Posición en el Tiempo.

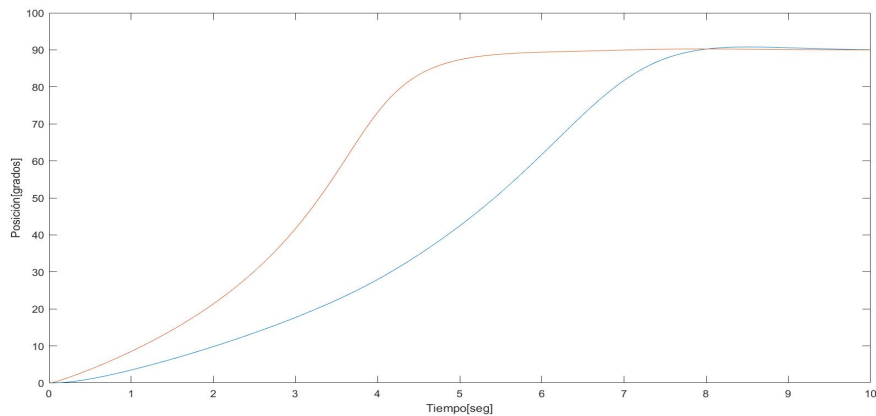


Figura 4: Evolución de la Posición en el Tiempo, K_p Disminuido.

En las figuras (3) y (4) se puede observar el efecto de las componentes de amortiguamiento y regulación del esquema de control, las curvas no presentan picos ni sobreimpulsos en su respuesta transitoria, en el caso de la figura (4) se disminuyó la ganancia K_p con respecto a la figura (3) esto produjo un ligero sobreimpulso en la respuesta transitoria de la posición del codo, también se observa que el hombro alcanzó la posición deseada más rápido, además de ello, tanto el hombro como el codo llegan a 90° suavemente esto debido a que el punto de equilibrio fue demostrado por lo que se tiene garantía que el algoritmo de control funciona antes de realizar la simulación.

- En el apartado anterior se vio que el esquema de control propuesto corresponde a un regulador saturado, por lo que la regla de sintonía por lo que se propondrá una función de la posición deseada y de los torques máximos para el hombro y codo del robot manipulador según una función hiperbólica.

La regla de sintonía propuesta es la siguiente.

```
1 tau_max_h=150;%Torque maximo del hombro=150Nm
2 tau_max_c=15;%Torque maximo del codo=150Nm
3 kp1=tau_max_h*fqd1*((1+tanh(qd1)*tanh(qd1)))/tanh(qd1);
4 kp2=tau_max_c*fqd2*((1+tanh(qd2)*tanh(qd2)))/tanh(qd2);
5 Kp=[kp1, 0, 0, kp2]; % Ganancia proporcional
```

Usando la regla de sintonía propuesta se procederá a graficar los pares aplicados así como errores de posición.

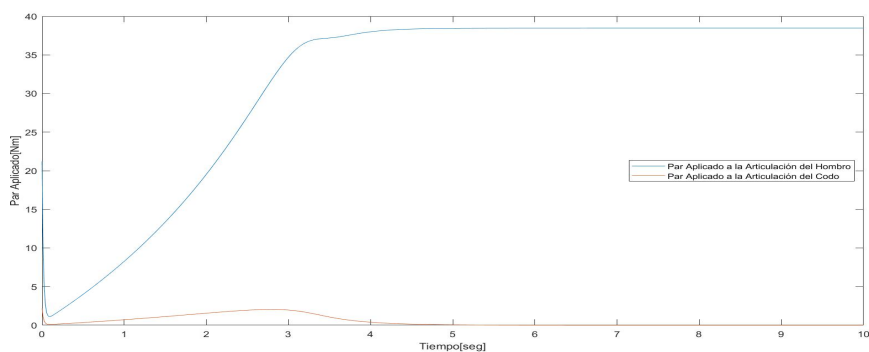


Figura 5: Pares Aplicados en las Articulaciones.

Se puede observar que los pares aplicados no superan los valores máximos en ningún instante de la simulación.

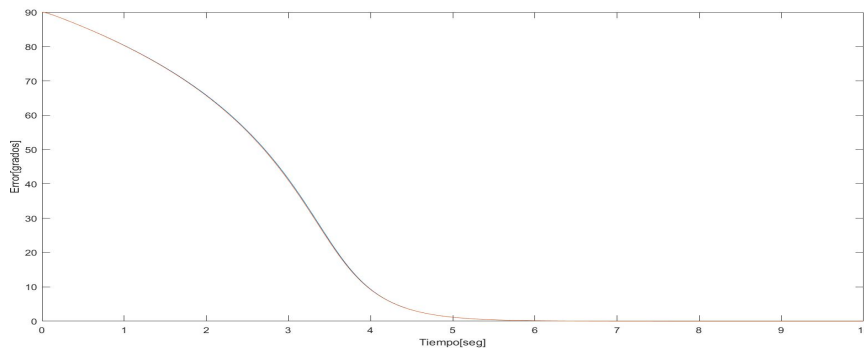


Figura 6: Evolución del Error de Posición en el Tiempo.

Como se demostró podemos observar que el error de posición converge asintóticamente a cero según transcurre el tiempo que ya fue atrapado por el atractor del punto de equilibrio [Reyes (2011)].

6. Conclusiones

Se desarrollaron demostraciones usando un nuevo esquema de control, haciendo uso de la ecuación en lazo cerrado en conjunto con el modelo dinámico del robot manipulador. En una primera instancia se hizo el tratamiento matemático para uno de n grados de libertad. Posteriormente se dieron valores numéricos a las matrices de inercia, fricciones, par gravitacional para el caso de un robot manipulador de dos grados de libertad, esto con el objetivo de realizar simulaciones y analizar cualitativamente el comportamiento del algoritmo de control propuesto esto se realizó usando una versión en $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ del algoritmo de control cuya existencia de punto de equilibrio ya había sido demostrada en $\mathbb{R}^{n \times n}$ por lo cual al ser $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ un caso particular, se tenía seguridad de su correcto funcionamiento antes de realizar las simulaciones, este hecho fue comprobado luego de interpretar a los resultados de simulación obtenidos.

Referencias

- Reyes, F. (2011). *Robótica-control de robots manipuladores*. Alfaomega grupo editor.
- Reyes, F. (2020). *Preliminares matemáticos, parte iii, diapositiva 5*.
- Reyes-Cortes, F., Felix-Beltran, O., Cid-Monjaraz, J., y Alonso-Aruffo, G. (2019). A family of hyperbolic-type control schemes for robot manipulators. *Kybernetika*, 55(3), 561–585.

7. Anexos

Código de simulación principal.

```

1  clc;clear all;close all;
2  format short
3  global n h tau1 tau2% Variables globales para graficar los pares aplicados
4  n=1;
5  tau1=0;
6  tau2=0;
7  ti=0;
8  h=0.0025; %Periodo de muestreo
9  tf = 10; % Tiempo de simulacion
10 ts=ti:h:tf; %Tiempo de simulacion
11 opciones=odeset('RelTol',1e-06,'AbsTol',1e-06,'InitialStep',h,'MaxStep',h);
12 condiciones_iniciales=[0; 0; 0; 0];%[q1,q2;qp1;qp2]
13 % Solucion del sistema:
14 [t,x]=ode45('robot2gdl',ts,condiciones_iniciales,opciones);
15 plot(t,(180/pi)*x(:,1),t,(180/pi)*x(:,2));%Grafica de posicion en el tiempo
16 ylabel("Posicion[grados]")
17 xlabel("Tiempo[seg]")
18 figure(2)
19 plot(t,90-(180/pi)*x(:,1),t,90-(180/pi)*x(:,2))%Grafica de error en el tiempo
20 ylabel("Error[grados]")
21 xlabel("Tiempo[seg]")
22 figure(3)
23 plot(linspace(0,10,length(tau1)),tau1,linspace(0,10,length(tau2)),tau2)%Grafica de pares ←
    aplicados en el tiempo
24 ylabel("Par Aplicado[Nm]")
25 xlabel("Tiempo[seg]")
26 legend({"Par Aplicado a la Articulacion del Hombro","Par Aplicado a la Articulacion del ←
    Codo"},"Location','east');

```

Código de que contiene el modelo dinámico del robot de dos grados de libertad.

```

1  function [xp,taus] =robot2gdl(t,x)
2      q1=x(1);
3      q2=x(2);
4      q = [q1;q2]; %vector de posicion articular
5
6      qp1=x(3);
7      qp2=x(4);
8
9      qp = [qp1;qp2];%vector de velocidad articular
10     M=[2.351+0.1676*cos(q2), 0.102+0.0838*cos(q2);0.102+0.0838*cos(q2), 0.102];
11
12     %matriz de fuerzas centripetas y de Coriolis
13     C=[-0.1676*sin(q2)*qp2, -0.0838*sin(q2)*qp2;
14       0.084*sin(q2)*qp1, 0.0];
15
16     %par gravitacional
17     gq=9.81*[3.9211*sin(q1)+0.1862*sin(q1+q2);
18       0.1862*sin(q1+q2)];
19
20     fr=[2.288*qp1;
21       0.175*qp2];
22     [~,tau]=alg_control(t,q,qp); %
23     %ecuacion en lazo cerrado
24     qpp = M^(-1)*(tau-C*qp-gq-fr);
25
26     %vector de estados
27     xp = [qp1;
28       qp2;
29       qpp(1);
30       qpp(2);];
31 end

```

Código que contiene el algoritmo de control

```

1 function [qt, tau] = alg_control(t,x,xp)
2   q = [x(1); x(2)]; % Posiciones
3   qp = [xp(1); xp(2)]; %Velocidades
4   global n h tau1 tau2 % Variables globales para graficar los pares aplicados
5   h=0.0025;
6   %referencias
7   qd1=90; % cinematica inversa
8   qd2=90;
9   qd=[qd1; qd2]; %Vector de referencias
10
11   tau_max_h=150;
12   tau_max_c=15;
13   fqd1=((1+tanh(qd1)*tanh(qd1)))/tanh(qd1);
14   fqd2=((1+tanh(qd2)*tanh(qd2)))/tanh(qd2);
15
16   kp1=tau_max_h*fqd1;
17   kp2=tau_max_c*fqd2;
18   Kp=[kp1, 0; 0, kp2]; % Ganancia proporcional
19
20   kv1=0.5*kp1;
21   kv2=0.5*kp2;
22   Kv=[kv1, 0; 0, kv2]; %Ganancia derivativa
23
24   % Vector de pares de gravitacionales
25   par_grav = [38.46*sin(q(1))+1.82*sin(q(1)+q(2));1.82*sin(q(1)+q(2))];
26   qt=[pi*qd(1)/180-q(1); pi*qd(2)/180-q(2)];
27
28   %Error de posicion en grados
29   qtgrados=(180/pi)*[qt(1) ;qt(2)];
30
31   %velocidad en grados/segundo.
32   qpgrados=180*qp/pi;
33
34   %Algoritmo de control
35   hyper_p=[1/(cosh(qt(1,1))*cosh(qt(2,1)))*(tanh(qt(1,1)))/(1+tanh(qt(1,1))*tanh(qt(2,1)))↔
36           ];1/(cosh(qt(2,1))*cosh(qt(2,1)))*(tanh(qt(2,1)))/(1+tanh(qt(2,1))*tanh(qt(2,1))];
37   hyper_d=[atan(qp(1,1));atan(qp(2,1))];
38   tau=Kp*hyper_p-Kv*hyper_d+par_grav;
39
40   %Adquisicion de pares aplicados
41   if(round(t/h)==(n))
42       tau1(n)=tau(1);
43       tau2(n)=tau(2);
44       n=n+1;
45   end
46 end

```

Gráfica de funciones

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3 def sech(t):
4     return(1/np.cosh(t))
5 t = np.arange(-10.0, 10.0, 0.001)#[np.newaxis] este es para poder sacarle la transpuesta
6 s = ((1+np.power(np.tanh(t),2) )*(np.power(np.cosh(t),2)))/np.tanh(t)
7 s1=np.arctan(t)
8 plt.rc('text', usetex=True)
9 plt.rc('font', family='serif')
10 plt.subplot(1,2,1)
11 plt.plot(t, s)
12 plt.grid(True)
13 plt.xlabel(r'$\tilde{q}$', fontsize=16)
14 plt.title(r'$\frac{1}{\cosh^2(\tilde{q})}\frac{\tanh(\tilde{q})}{1+\tanh^2(\tilde{q})}$',↔
15           fontsize=16)
16 plt.subplot(1,2,2)
17 plt.plot(t, s1)
18 plt.grid(True)
19 plt.xlabel(r'$\dot{q}$', fontsize=16)
20 plt.title(r'$\operatorname{atan}(\dot{q})$', fontsize=16)
21 plt.savefig('sintonia.png',dpi=150)

```