

1. 在求解常微分方程时，隐式格式都是绝对稳定的，能保证求解过程中的误差不会被不断放大。（ ）
2. 在针对一个具体问题建模并数值求解的过程中，应该根据建模误差和观测误差相应的确定数值格式的精度，通常数值格式的精度应小于建模和测量误差，但不需要过于追求数值精度。（ ）
3. 龙格（Runge）现象表明，存在一些连续函数，不管多高阶的多项式都不能足够好的逼近这些函数。（ ）
4. 矩阵 $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 300 & 500 \end{pmatrix}$ 、 $\begin{pmatrix} 400 & 400 \\ 300 & 500 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 40000 & 40000 \\ 300 & 500 \end{pmatrix}$ 中， $\begin{pmatrix} 400 & 400 \\ 300 & 500 \end{pmatrix}$ 的条件数最小。这说明为了使得条件数尽量的小，应该在建立线性方程组时使线性方程组不同方程的系数尽量在同一个量级。（ ）
5. 在使用幂法求矩阵的最大特征值（指绝对值最大）时，若要迭代快速收敛，矩阵的谱半径需显著小于 1。（ ）
6. 长度为大素数的向量不适于进行快速傅里叶变换。（ ）
7. 在求解线性方程组时，若能对方程的解有较好的猜测值，则应该优先考虑使用迭代法（如共轭梯度法等）求解。（ ）
8. 在求解优化问题时，牛顿法的应用受到的制约主要来自两方面，一方面是牛顿法只是局部收敛算法，另一方面是牛顿法需要计算大量二阶导数。（ ）
9. 求超定线性方程组 $Ax = b$ 的最小二乘解时，可先作 QR 分解 $A = QR$ ，然后求解 $Rx = Q^*b$ ，其中 Q^* 为酉矩阵 Q 的共轭转置， R 为上三角方阵。（ ）
10. 对积分方程 $\int_0^T K(x-y)f(y)dy = g(x)$ 进行数值离散得到线性方程组时，若以 T 为周期的函数 $K(x)$ 充分光滑，则线性方程组的系数矩阵具有很大的条件数，因而方程的数值解可能具有很大的相对误差。（ ）

二、填空题 (30')

1. 一个元素非负的 n 阶方阵, 若其每行元素之和均为 1, 则这个矩阵的谱半径是_____, 得出这一结论的理由是_____。
2. 在多项式插值时, 若已知经过点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$ 的多项式是 $P_{n-1}(x)$, 则通过 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$ 的多项式为_____。
3. 对系数矩阵正定对称的大型线性方程组 $Ax = b$, 使用最速下降法和共轭梯度法迭代求解的收敛速度分别为 $\frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}$ 和 $\frac{\sqrt{\lambda_{\max}} - \sqrt{\lambda_{\min}}}{\sqrt{\lambda_{\max}} + \sqrt{\lambda_{\min}}}$, 其中 λ_{\max} 和 λ_{\min} 为矩阵 A 最大和最小的特征值。两种方法每一步的计算量均主要为一次矩阵向量乘法。若矩阵 A 二范数意义下的条件数为 10000, 则共轭梯度法比最速下降法快约_____倍。
4. 在设计常微分方程和偏微分方程初值问题的数值格式时, _____性和_____性能保证算法的收敛性。
5. 在马尔可夫链中, 若平衡态下任意状态 i 的概率为 π_i , 则转移矩阵 P_{ij} (从状态 i 至状态 j) 满足的细致平衡条件为_____。该细致平衡条件_____(填足以或不足以)完全确定转移矩阵。
6. 一般来说, 对稠密矩阵 A 的 LU 分解、QR 分解、特征分解、矩阵求逆的计算复杂度大小关系为_____。

三、问答 (30')

1. 设计快速算法来数值求积分方程 $\int_0^T K(x-y)f(y)dy + af(x) = g(x)$ 的周期解, 其中 $K(x)$ 和 $g(x)$ 是给定的周期为 T 的周期函数。写出步骤及计算复杂度的阶。(10')
2. 对偏微分方程 $u_t = Du_{xx} + f(x, t)$, $x \in [0, 1]$, $t \in [0, T]$, 其中 $D > 0$ 为扩散系数, $f(x, t)$ 为已知函数。对 u_{xx} 用中心差分格式离散, 写出求解方程初值问题的向前欧拉格式, 并给出要保证格式稳定时, 时间步长和空间步长应满足的条件。(10')
3. 试写出通过 QR 迭代求一般方阵的特征值的步骤, 并说明为了减少计算量常用的技巧。(10')