MATH6207H-hw3

黄伟 123071910077

日期：2023 年 11 月 1 日上课提交

Question 0.1. *Let* $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *be a real square matrix. Recall that the* ℓ_1*-norm of a vector* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *is given by* $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. *Show that the induced* ℓ_1*-norm of the matrix* $\mathbf{A}$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{0\neq \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1}, \tag{1}$$

can be computed by

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|. \tag{2}$$

证明. 首先说明式 (2) 给出的 $\|\mathbf{A}\|_1$ 对 $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 都有 $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_1 \leqslant \|\mathbf{A}\|_1\|\mathbf{x}\|_1$.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_1 &= \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \leqslant \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^n |x_j| \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|\right) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^n |x_j| \max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \cdot \sum_{j=1}^n |x_j| \\ &= \|\mathbf{A}\|_1\|\mathbf{x}\|_1,\end{aligned}$$

接下来说明对 $\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 等号都可以取到. 不妨设 $\mathbf{A}$ 的列绝对值之和最大的列为第 j' 列, 令 $\mathbf{x}$ 为第 j' 元为 1 其它均为 0 的向量, 那么有

$$\|\mathbf{x}\|_1 = 1, \quad \|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \sum_{i=1}^n |a_{ij'}|,$$

同时

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| = \sum_{i=1}^n \left|a_{ij'}\right| = \|\mathbf{A}\|_1\|\mathbf{x}\|_1,$$

综上可知命题成立. □

Question 0.2. *(a) Let* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. *Show the equivalence between vector norms and operator norms, i.e.,*

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sup_{\mathbf{y}\neq 0} \frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\|\mathbf{y}\|_\infty}, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{\mathbf{y}\neq 0} \frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\|\mathbf{y}\|_1}, \tag{3}$$

where $(\cdot,\cdot)$ *is the inner product of vectors.*

(b) Let $\mathbf{A}$ *be a real matrix. Show that* $\|\mathbf{A}\|_1 = \|\mathbf{A}^T\|_\infty$.

证明. (a) 先说明 $\dfrac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\|\mathbf{y}\|_\infty} \leqslant \|\mathbf{x}\|_1, \dfrac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\|\mathbf{y}\|_1} \leqslant \|\mathbf{x}\|_\infty\|$. 直接验证

$$\frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\|\mathbf{y}\|_\infty} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{y_i}{\|\mathbf{y}\|} \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i| = \|\mathbf{x}\|_1, \tag{4}$$

$$\frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\|\mathbf{y}\|_1}=\frac{\sum_{i=1}^n x_iy_i}{\sum_{i=1}^n |y_i|}\leqslant\frac{\|\mathbf{x}\|_\infty\sum_{i=1}^n |y_i|}{\sum_{i=1}^n |y_i|}=\|\mathbf{x}\|_\infty, \tag{5}$$

前者取 $y_i=\operatorname{sgn}(x_i)$ 可以取到等号, 后者 $\mathbf{y}$ 第 i' 元为 $\operatorname{sgn}(x'_i)$ 其余为 0 取到等号, 其中 i' 为 $\mathbf{x}$ 最大元所在位置. 综上可知命题成立.

(b) 根据定义

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{A}\|_1&=\sup_{\mathbf{x}\neq 0}\frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1}=\sup_{\mathbf{x}\neq 0}\frac{1}{\|\mathbf{x}\|_1}\sup_{\mathbf{y}\neq 0}\frac{(\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{y})}{\|\mathbf{y}\|_\infty}\\
&=\sup_{\mathbf{y}\neq 0}\frac{1}{\|\mathbf{y}\|_\infty}\sup_{\mathbf{x}\neq 0}\frac{(\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|_1}\\
&=\sup_{\mathbf{y}\neq 0}\frac{1}{\|\mathbf{y}\|_\infty}\sup_{\mathbf{x}\neq 0}\frac{(\mathbf{A}^T\mathbf{y},\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|_1}\\
&=\sup_{\mathbf{y}\neq 0}\frac{\|\mathbf{A}^T\mathbf{y}\|_\infty}{\|\mathbf{y}\|_\infty}=\|\mathbf{A}^T\|_\infty,
\end{aligned}$$

即证. □

Question 0.3. *Let $\mathbf{A}$ be a symmetric positive definite matrix. Given the maximal and minimal eigenvalues of $\mathbf{A}$, find the optimal parameter for the Richardson iteration method.*

可以证明最佳参数为 $\dfrac{2}{\lambda_{\min}+\lambda_{\max}}$.

证明. 设求解的方程为 $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$, 根据定义 Richardson 迭代为

$$\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{x}_k+\alpha(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}_k)=(\mathbf{E}-\alpha\mathbf{A})\mathbf{x}_k+\alpha\mathbf{b}, \tag{6}$$

要使得参数最优, 只要令 $\rho(\mathbf{E}-\alpha\mathbf{A})$ 最小, 只要令 $\max_{\lambda}\{|1-\alpha\lambda|\}$ 最小. 可以知道在 $1-\alpha\lambda_{\min}+1-\alpha\lambda_{\max}=0$ 时取到最小值, 所以最优参数为 $\dfrac{2}{\lambda_{\min}+\lambda_{\max}}$. □

Question 0.4. *Prove the following theorems:*

(a) Suppose $\mathbf{A}$ is a symmetric matrix with positive diagonal elements. If it is strictly diagonally dominant, or irreducible diagonally dominant, then $\mathbf{A}$ is positive definite.

(b) If $\mathbf{A}=(a_{i,j})_{n\times n}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ is symmetric and positive definite with $a_{i,j}\leq 0,\forall i\neq j$, then the Jacobi method is convergent.

定义 0.1 (不可约)**.** 如果存在 n 阶排列矩阵 $\mathbf{P}$, 使 $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}$ 有如下结果

$$\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ 0 & \mathbf{A}_{22}\end{pmatrix}, \tag{7}$$

其中 $\mathbf{A}_{11},\mathbf{A}_{22}$ 为方阵. 则称 $\mathbf{A}$ 为可约矩阵, 若不存在则为不可约矩阵.

证明. (a) 严格主对角占优: 设 $\mathbf{A}=(a_{i,j})_{n\times n}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是严格主对角占优的对称矩阵, 且对角线元素为正, 根据定义有

$$a_{i,i}>\sum_{j\neq i}|a_{i,j}|,\quad \forall i\in\{1,2,\cdots,n\}, \tag{8}$$

因为实对称, 所以 $\mathbf{A}$ 的特征值都是实数, 任取 $\mathbf{A}$ 的特征值 $\lambda\in\mathbb{R}$, 对应特征向量为 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T$, 从而 $\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$, 即

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j=\lambda x_i,\quad \forall i\in\{1,2,\cdots,n\}, \tag{9}$$

设 $|x_{i'}| = \max |x_i|$, 即第 i' 元绝对值最大, 那么

$$(a_{i',i'} - \lambda)x_{i'} = -\sum_{j\neq i'} a_{i',j}x_j, \tag{10}$$

那么

$$\begin{aligned}(a_{i',i'} - \lambda)|x_{i'}| &= |(a_{i',i'} - \lambda)x_{i'}| = |\sum_{j\neq i'} a_{i',j}x_j| \\ &\leqslant \sum_{j\neq i'} |a_{i',j}x_j| \leqslant \sum_{j\neq i'} |a_{i',j}||x_j| \leqslant \sum_{j\neq i'} |a_{i',j}||x_{i'}| \\ &= |x_{i'}| \sum_{j\neq i'} |a_{i',j}| < |x_{i'}| \cdot a_{i',i'},\end{aligned}$$

从而 $\lambda|x_{i'}| > 0$, $\lambda > 0$. 因为 λ 的选取是任意的, 所以 $\mathbf{A}$ 的特征值均是正数, 所以 $\mathbf{A}$ 正定.

不可约对角占优: 设 $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是不可约主对角占优的对称矩阵, 且对角线元素为正. 根据前面的证明, 修改式 (8) 中的严格不等号为大于等于号, 类似的, 可以说明对角占优矩阵的特征值非负, 从而只要证明不可约的条件下不存在 0 特征值, 只要证 $\mathbf{Ax} = 0$ 没有非零解. 采用反证法, 假设 $\mathbf{Ax} = 0$ 存在非零解, 设为 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)^T$, 首先说明不可能 $|x_1| = \cdots = |x_n|$, 如果成立, 那么会有对 $\forall i$ 都有

$$|a_{ii}||x_i| = |a_{ii}x_i| = \left|\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j\right| \leqslant \sum_{j\neq i} |a_{ij}||x_j| = |x_i| \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \leqslant |a_{ii}||x_i|, \tag{11}$$

那么等号全部成立, 即对 $\forall i$ 都有 $|a_{ii}| = \sum\limits_{j\neq i} |a_{ij}|$, 这与 $\mathbf{A}$ 为对角占优矩阵矛盾, 所以假设不成立. 接下来其中绝对值最大元下标构成的集合为 I, 即

$$I = \{i \mid |x_i| = \|\mathbf{x}\|_\infty\}, \tag{12}$$

显然 I 非空, 因为 $|x_i|$ 不会全部相同, 所以 $\{1, 2, \cdots, n\}\backslash I$ 也非空. $\forall i \in I$, 有

$$|a_{ii}| \cdot |x_i| = |a_{ii}x_i| = \left|\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j\right| \leqslant \sum_{j\neq i} |a_{ij}||x_j|, \tag{13}$$

于是

$$\sum_{j\neq i} |a_{ij}| \leqslant |a_{ii}| \leqslant \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \cdot \frac{|x_j|}{|x_i|} \leqslant \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \tag{14}$$

第一个不等号是对角占优, 最后一个不等号是因为 $|x_i|$ 为绝对值最大元, 从而上式取到等号. 对于任意的非绝对值最大元 x_k(或者说 $\forall k \notin I$), 只能 $a_{ik} = 0$. 这里的 $i \in I$ 和 $k \notin I$ 都是任意的, 所以可以取到排列矩阵 $\mathbf{P}$ 使得 $\mathbf{P}^T\mathbf{AP}$ 成为分块上三角阵, 进而可约, 矛盾. 综上可知不可约对角占优矩阵正定.

(b) 设 $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{L}^T$, 其中 $\mathbf{D}$ 为对角矩阵, $\mathbf{L}$ 为下三角矩阵, 二者元素非负. Jacobi 方法迭代矩阵为

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \mathbf{E} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}, \tag{15}$$

设 $\lambda, \mathbf{x}$ 为任意一对特征向量与特征值, 有 $\mathbf{Bx} = \lambda\mathbf{x}$, 那么有

$$(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{Dx} \Rightarrow (\lambda\mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{L}^T)\mathbf{x} = 0, \tag{16}$$

若存在 $\lambda \geqslant 1$, 因为 $\forall \mathbf{y}$

$$\mathbf{y}^T(\lambda\mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{L}^T)\mathbf{y} \geqslant \mathbf{y}^T(\mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{L}^T)\mathbf{y} \geqslant \mathbf{y}^T\mathbf{Ay} > 0, \tag{17}$$

所以 $\lambda\mathbf{D}-\mathbf{L}-\mathbf{L}^T$ 正定, 不存在非零齐次解, 所以 $\lambda<1$ 恒成立. 从而 $\rho(\mathbf{B})<1$, Jacobi 方法收敛.[1] □

Question 0.5. *The symmetric Gauss-Seidel method is obtained by combining an iteration of Gauss-Seidel method with an iteration of backward Gauss-Seidel method. Precisely, the k-th iteration of the symmetric Gauss-Seidel method for solving $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$, with $\mathbf{A}=\mathbf{D}-\mathbf{L}-\mathbf{U}$ is*

$$\mathbf{x}_{k+1/2}=\mathbf{x}_k+(\mathbf{D}-\mathbf{L})^{-1}(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}_k), \tag{18}$$

$$\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{x}_{k+1/2}+(\mathbf{D}-\mathbf{U})^{-1}(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}_{k+1/2}), \tag{19}$$

i.e., the iteration method can be written as

$$\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{x}_k+\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}_k), \tag{20}$$

If $\mathbf{A}$ is a symmetric positive definite matrix:

(a) Compute the preconditioner $\mathbf{P}$ of the symmetric Gauss-Seidel method, and show that $\mathbf{P}$ is symmetric positive definite.

(b) Show that the spectral radius of the iteration matrix is less than 1.

证明. (a) 根据题意

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1}&=\mathbf{x}_k+(\mathbf{D}-\mathbf{L})^{-1}(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}_k)+(\mathbf{D}-\mathbf{U})^{-1}(\mathbf{b}-\mathbf{A}(\mathbf{x}_k+(\mathbf{D}-\mathbf{L})^{-1}(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}_k)))\\&=\mathbf{x}_k+((\mathbf{D}-\mathbf{L})^{-1}+(\mathbf{D}-\mathbf{U})^{-1}-(\mathbf{D}-\mathbf{U})^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{D}-\mathbf{L})^{-1})(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}_k)\\&=\mathbf{x}_k+((\mathbf{D}-\mathbf{L})^{-1}+(\mathbf{D}-\mathbf{U})^{-1}-(\mathbf{D}-\mathbf{U})^{-1}((\mathbf{D}-\mathbf{L})+(\mathbf{D}-\mathbf{U})-\mathbf{D})(\mathbf{D}-\mathbf{L})^{-1})(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}_k)\\&=\mathbf{x}_k+(\mathbf{D}-\mathbf{U})^{-1}\mathbf{D}(\mathbf{D}-\mathbf{L})^{-1}(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}_k),\end{aligned}$$

所以 $\mathbf{P}=(\mathbf{D}-\mathbf{L})\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{D}-\mathbf{U})$, 注意到 $\mathbf{L}^T=\mathbf{U},\mathbf{D}^T=\mathbf{D}$, 所以

$$\mathbf{P}^T=(\mathbf{D}-\mathbf{U})^T(\mathbf{D}^{-1})^T(\mathbf{D}-\mathbf{L})^T=(\mathbf{D}-\mathbf{L})\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{D}-\mathbf{U})=\mathbf{P}, \tag{21}$$

所以 $\mathbf{P}$ 对称. 因为 $\mathbf{A}$ 正定, 所以对角元均为正, 所以 $\mathbf{D}$ 正定, 所以 $\mathbf{D}^{-1}$ 正定. 而 $\mathbf{D}^{-1}$ 与 $\mathbf{P}$ 合同, 所以 $\mathbf{P}$ 正定.

(b) 迭代矩阵

$$\mathbf{B}=\mathbf{E}-\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}, \tag{22}$$

设 λ 是 $\mathbf{B}$ 的一个特征值, 对应特征向量 $\mathbf{x}\neq 0$, 那么有

$$\mathbf{B}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}\Rightarrow(1-\lambda)\mathbf{P}\mathbf{x}=\mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{23}$$

与 $\mathbf{x}$ 内积得到

$$1-\lambda=\frac{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}}>0, \tag{24}$$

所以 $\lambda<1$. 另一方面, 有 $\mathbf{P}=\mathbf{A}+\mathbf{L}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}$, 从而

$$(1-\lambda)\mathbf{L}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{25}$$

所以

$$\frac{\lambda}{1-\lambda}=\frac{\mathbf{x}^T\mathbf{L}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}}>0, \tag{26}$$

[1] 没用到 $a_{i,j}\leqslant 0,\forall i\neq j$ 的条件.

所以 $\lambda > 0$. 于是 $0 < \lambda < 1$, 迭代矩阵收敛.

$\square$

Question 0.6. *Consider the linear system*

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \cdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \cdots \\ f_n \end{bmatrix} \tag{27}$$

where, $h = 1/n$, $f_i = (3x_i + x_i^2)e^{x_i}$ and $x_i = i/n$ for $i = 1, 2, \cdots, n$.

(a) Given a real matrix $\mathbf{A}$, show that

$$\rho(\mathbf{A}) = \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{A}^k\|^{1/k}, \tag{28}$$

where $\rho(\mathbf{A})$ is the spectral radius of $\mathbf{A}$ and $\|\cdot\|$ is any matrix norm.

(b) Define the asymptotic convergence rate of an iteration method as $R_\infty = -\ln\rho(\mathbf{B})$ where $\mathbf{B}$ is the iteration matrix. Let $\mathbf{B}_{Jacobi}$ and $\mathbf{B}_{GS}$ be the iteration matrices of the Jacobi method and the Gauss-Seidel method, respectively. Calculate $\rho(\mathbf{B}_{Jacobi})$, $\rho(\mathbf{B}_{GS})$ and the corresponding asymptotic convergence rates.

(c) Write a computer program to numerically verify the asymptotic convergence rates.

(d) Write a computer program to solve the linear system with the SOR method. For each n = 1000, 2000, 4000, 8000, chose different relaxation parameter $\omega_k = 1 + k/101$ for k = 1, 2, $\cdots$, 100 to collect the required iteration numbers until convergence. Plot your results with x-axis for ω and y-axis for iteration number. Use double precision in your computation and set the relative residual tolerance as $\varepsilon_{rel} = 1 \times 10^{-8}$.

证明. (a) 根据谱半径定义, 取 $\lambda = \rho(\mathbf{A})$, $\mathbf{x}$ 为 λ 对应特征向量, 同时任取 $\mathbf{y}$ 使得 $\mathbf{x}\mathbf{y}^T$ 的矩阵范数非 0, 那么

$$\rho(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\mathbf{y}^T\| = \|\lambda\mathbf{x}\mathbf{y}^T\| = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{y}^T\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\mathbf{y}^T\|, \tag{29}$$

所以 $\rho(\mathbf{A}) \leqslant \|\mathbf{A}\|$, 所以 $\rho(\mathbf{A}) \leqslant \|\mathbf{A}^k\|^{1/k}$. 另一方面 $\forall\varepsilon > 0$, 定义

$$\mathbf{A}_\varepsilon = [\rho(\mathbf{A}) + \varepsilon]^{-1}\mathbf{A}, \tag{30}$$

显然有 $\rho(\mathbf{A}_\varepsilon) < 1$, 于是 $\lim\limits_{k\to} \mathbf{A}_\varepsilon^k = 0$, 这会得到 $\|\mathbf{A}_\varepsilon^k\| < 1$, 所以 $\|\mathbf{A}^k\|^{1/k} \leqslant \rho(\mathbf{A}) + \varepsilon$, 根据任意性得到 $\rho(\mathbf{A}) \geqslant \|\mathbf{A}^k\|^{1/k}$. 综上 $\rho(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}^k\|^{1/k}$.

(b) 对于 $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$, 有

$$\mathbf{B}_{Jacobi} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}), \tag{31}$$

$$\mathbf{B}_{GS} = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}, \tag{32}$$

代入本题得到

$$\mathbf{B}_{Jacobi} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} & 1 & & & & \\ 1 & & 1 & & & \\ & \ddots & & \ddots & & \\ & & & 1 & & 1 \\ & & & & 1 & \end{bmatrix}, \tag{33}$$

$$\mathbf{B}_{GS} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^{n-2}} & \cdots & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^{n-1}} & \cdots & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \tag{34}$$

(c) 对 4 阶矩阵迭代结果如下

```
Jacobi:
>>> k= 1, rho= 1.000
>>> k= 2, rho= 0.866
>>> k= 3, rho= 0.855
>>> k= 4, rho= 0.841
>>> k= 5, rho= 0.835
>>> k= 6, rho= 0.831
>>> k= 7, rho= 0.827
>>> k= 8, rho= 0.825
>>> k= 9, rho= 0.823
>>> k=10, rho= 0.822
>>> k=11, rho= 0.821
>>> k=12, rho= 0.820
>>> k=13, rho= 0.819
>>> k=14, rho= 0.818
>>> k=15, rho= 0.818
>>> k=16, rho= 0.817
>>> k=17, rho= 0.817
>>> k=18, rho= 0.816
>>> k=19, rho= 0.816
>>> k=20, rho= 0.815
Gauss-Siedel:
>>> k= 1, rho= 0.875
>>> k= 2, rho= 0.791
```

```
>>> k= 3, rho= 0.750
>>> k= 4, rho= 0.726
>>> k= 5, rho= 0.711
>>> k= 6, rho= 0.701
>>> k= 7, rho= 0.694
>>> k= 8, rho= 0.689
>>> k= 9, rho= 0.685
>>> k=10, rho= 0.682
>>> k=11, rho= 0.680
>>> k=12, rho= 0.677
>>> k=13, rho= 0.676
>>> k=14, rho= 0.674
>>> k=15, rho= 0.673
>>> k=16, rho= 0.672
>>> k=17, rho= 0.671
>>> k=18, rho= 0.670
>>> k=19, rho= 0.669
>>> k=20, rho= 0.668
```

(d) 根据定义, SOR 法迭代为

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \tag{35}$$

于是写出代码为

```
void SOR_METHOD_ITER(int n, double* A, double* b, double* x, double omega){
    double sum;
    int j;
    for(int i=0;i<n;i++){
        sum=0.0;
        for(j=0;j<i;j++){
            sum += A[i*n+j]*x[j];
        }
        for(j=i+1;j<n;j++){
            sum += A[i*n+j]*x[j];
        }
        x[i] = (1-omega)*x[i]+omega*(b[i]-sum)/A[i*n+i];
    }
}
```

□