求和问题

WoW
Shanghai Jiaotong University

日期：2024 年 8 月 13 日

摘　要

本文为研究一组求和问题.

关键词: 求和

1　引言

本文主要研究函数

$$S_m(N) := \sum_{n=1}^{N} n^m. \tag{1}$$

$$T_{m,N}(q) := \sum_{n=1}^{N} n^m q^{n-1}, \tag{2}$$

其中 $m \in \mathbb{Z}$， $N \in \mathbb{N}_+$， $q \in \mathbb{R}$.

1.1　等差数列

1.1.1　一般方法

定义数列 $\{a_n\}$, $a_n = a_1 + (n-1)d$, 计算前 N 项和 $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n$. 一般的做法是通过首尾项配对, 这样得到了 N 个常数相加

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} a_n &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=1}^{N} a_n\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N}^{1} a_n\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(a_n + a_{N+1-n}) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(a_1 + (n-1)d + a_1 + (N-n)d)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} 2a_1 + (N-1)d = Na_1 + \frac{1}{2}N(N-1)d.\end{aligned} \tag{3}$$

另一方面

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_1 + (n-1)d = (a_1 - d)\sum_{n=1}^{N} 1 + d\sum_{n=1}^{N} n, \tag{4}$$

等差数列本质上也就是计算 $\sum_{n=1}^{N} 1$ 和 $\sum_{n=1}^{N} n$, 前者又是平凡的研究的主要是

$$\sum_{n=1}^{N} 1 = N, \tag{5}$$

所以最根本的在于

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{1}{2} N(N+1), \tag{6}$$

这可以得到经典的

$$\sum_{n=1}^{100} n = \frac{1}{2} \times 100 \times 101 = 5050. \tag{7}$$

1.1.2 其它方法

为方便引出后续求解更高次的求和 $\sum_{n=1}^{N} n^m, m \in \mathbb{N} \cap [2, \infty)$, 引入以下方法计算 $\sum_{n=1}^{N} n$.

方法一: "离散幂"级数. 也就是对 $k^{(m)} = k \cdot (k+1) \cdots (k+m-1)$ 的求和, 规定 $k^{(0)} = 1$, $k^{(1)} = k$. 因为公式 (证明见 2.1节, 对于 $m = 0, 1$ 相当于直接验证故略)

$$\sum_{n=1}^{N} n^{(m)} = \frac{1}{m+1} N^{(m+1)}, \tag{8}$$

由此分别代入 $m = 0, 1$ 即可得到等差数列求和的结果.

方法二: 二项式展开. 特别的, 这里只用到了一次展开和平方展开, 因为

$$(n+1) = n + 1, \tag{9}$$

所以

$$1 = (n+1) - n \tag{10}$$

两边同时对 n 从 1 到 N 求和, 注意到右边相邻项相消, 所以

$$\sum_{n=1}^{N} 1 = \sum_{n=1}^{N} (n+1) - n = (N+1) - 1. \tag{11}$$

使用平方展开, 类似的操作再来一遍

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1, \tag{12}$$

所以

$$2n + 1 = (n+1)^2 - n^2, \tag{13}$$

两边同时对 n 从 1 到 N 求和, 注意到右边相邻项相消, 所以

$$2\sum_{n=1}^{N} n + \sum_{n=1}^{N} 1 = \sum_{n=1}^{N} 2n + 1 = \sum_{n=1}^{N} (n+1)^2 - n^2 = (N+1)^2 - 1. \tag{14}$$

再由已经得到的 $\sum_{n=1}^{N} 1$, 可以递推得到 $\sum_{n=1}^{N} n$.

方法三: 差分与组合数 对于 $a_n = f(n)$, 定义差分算子 $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$, 二阶差分算子 $\Delta^2 f(n) = \Delta f(n+1) - \Delta f(n)$. 分别取 $f(n) \equiv 1$ 和 $f(n) = n$ 可以得到如下的表格

Remark. 从 $n = 0$ 开始是为了使得首项为 0.

$\boldsymbol{n}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
$\boldsymbol{f(n)}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\boldsymbol{\Delta f(n)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-

表 1: $f(n) \equiv 1$

$\boldsymbol{n}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
$\boldsymbol{f(n)}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\boldsymbol{\Delta f(n)}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-
$\boldsymbol{\Delta^2 f(n)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-

表 2: $f(n) = n$

可以观察得到: 当 $f(n) \equiv 1 = n^0$ 时, $\Delta f(n) \equiv 0$; 当 $f(n) = n = n^1$ 时, $\Delta^2 f(n) \equiv 0$.

接下来定义移位算子 $Ef(n) = f(n+1)$, 与差分算子存在关系

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) = Ef(n) - If(n) = (E-I)f(n), \tag{15}$$

$$Ef(n) = f(n+1) = f(n) + (f(n+1) - f(n)) = (I+\Delta)f(n). \tag{16}$$

这里 I 是恒等算子 (identity). 上面的公式可以视作 $\Delta = E - I, E = I + \Delta$, 此外还可以验证

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(n) &= \Delta(f(n+1) - f(n)) = (f(n+2) - f(n+1)) - (f(n+1) - f(n)) \\ &= f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = E^2 f(n) - 2Ef(n) + f(n) \\ &= (E^2 - 2E + I)f(n) = (E-I)^2 f(n),\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}E^2 f(n) &= E(E(fn)) = E(f(n+1)) = f(n+2) \\ &= (f(n+2) - 2f(n+1) + f(n)) + 2(f(n+1) - f(n)) + f(n) \\ &= \Delta^2 f(n) + 2\Delta f(n) + f(n) = (\Delta^2 + 2\Delta + I)f(n) \\ &= (I+\Delta)^2 f(n).\end{aligned} \tag{18}$$

即 $\Delta^2 = (E-I)^2, E^2 = (I+\Delta)^2$, 更高次的同样可以验证, 简单来说就是可以将算子 I, Δ, E 当成特殊的字符进行代数运算 (加法交换率、加法结合律、乘法交换律、乘法结合率等等), 且满足 $\Delta = E - I$.

(1) 对于 $f(n) \equiv 1$

$$f(n) = E^n f(0) = (I+\Delta)^n f(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k f(0), \tag{19}$$

注意到 $\Delta f(n) \equiv 0$, 所以 $k \geq 1$ 时都有 $\Delta^k f(0) = 0$, 所以

$$f(n) = \binom{n}{0} f(0), \tag{20}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{N} 1 = \sum_{n=1}^{N} f(n) = \sum_{n=1}^{N} \binom{n}{0} f(0) = f(0) \sum_{n=1}^{N} \binom{n}{0} = f(0) \left(\binom{N+1}{1} - \binom{1}{1} \right). \tag{21}$$

(2) 对于 $f(n) \equiv 1$,

$$f(n) = E^n f(0) = (I+\Delta)^n f(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k f(0), \tag{22}$$

注意到 $\Delta^2 f(n)\equiv 0$, 所以 $k\geq 2$ 时都有 $\Delta^k f(0)=0$, 所以

$$f(n)=\binom{n}{0}f(0)+\binom{n}{1}\Delta f(0), \tag{23}$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} n &= \sum_{n=1}^{N} f(n)=\sum_{n=1}^{N}\binom{n}{0}f(0)+\binom{n}{1}\Delta f(0)=f(0)\sum_{n=1}^{N}\binom{n}{0}+\Delta f(0)\sum_{n=1}^{N}\binom{n}{1}\\ &=\underbrace{f(0)}_{=0}\left(\binom{N+1}{1}-\binom{1}{1}\right)+\underbrace{\Delta f(0)}_{=1}\left(\binom{N+1}{2}-\underbrace{\binom{1}{2}}_{=0}\right)\\ &=\binom{N+1}{2}.\end{aligned} \tag{24}$$

Remark. 这里用到了组合数恒等式

$$\sum_{n=1}^{N}\binom{n}{k}=\binom{N+1}{k+1}-\binom{1}{k+1}. \tag{25}$$

可用 $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}$ 证明.

方法四: 积分 与二项式展开类似也是使用的递推, 但是更加方便使用. 这里设

$$S_m(N):=\sum_{n=1}^{N} n^m, \tag{26}$$

$\{S_m\}$ 是关于 N 的一族函数, 将定义域从 $\mathbb{N}_+$ 延拓到整个 $\mathbb{R}$ 上: 虽然根据式 (26) 当 $x\in\mathbb{N}_+$ 才有意义, 但是若得到了最终的简化表达式, 如 $S_0(x)=x, S_1(x)=\frac{1}{2}x(x+1)$, 它们在 $\mathbb{R}$ 上都有定义. 而我们所要计算的目标也就是 S_m 的简化表达式, 寻找它们之间的递推关系: $S_0\to S_1\to\cdots$. 此处以 S_0, S_1 作为例简要介绍, 注意到

$$S_1(x)-S_1(x-1)=x, \tag{27}$$

两边对 x 求导

$$S_1'(x)-S_1'(x-1)=1, \tag{28}$$

两边对 x 从 1 到 N 求和

$$S_1'(N)-S_1'(0)=\sum_{n=1}^{N} S_1'(n)-S_1'(n-1)=\sum_{n=1}^{N}1=S_0(N). \tag{29}$$

其中 $S_1'(0)$ 是常数. 得到微分方程

$$S_1'(x)=S_0(x)+C, \tag{30}$$

所以

$$S_1(x)=\int_0^x S_0(t)\mathrm{d}t+Cx, \tag{31}$$

又根据定义, 对 $\forall m\in\mathbb{N}$ 都有 $S_m(1)=1$, 所以

$$1=S_1(1)=\int_0^1 S_0(t)\mathrm{d}t+C, \tag{32}$$

解得 $C=1-\int_0^1 S_0(t)\mathrm{d}t$, 所以得到递推式

$$S_1(x)=\int_0^x S_0(t)\mathrm{d}t+\left(1-\int_0^1 S_0(t)\mathrm{d}t\right)x. \tag{33}$$

在已知 $S_0(x) = x$ 时就可以得到 $S_1(x)$.

1.2 等比数列与错位相减

1.2.1 等比

定义数列 $\{a_n\}$ 为 $a_n := a_1 q^{n-1}, q \neq 0$, 其中 q 为公比, 要计算的等差数列和即

$$\sum_{n=1}^{N} a_1 q^{n-1}, \tag{34}$$

关于此类问题有一类通用的解法: 错位相减. 定义 $S := \sum_{n=1}^{N} a_1 q^{n-1}$, 那么

$$qS = q \sum_{n=1}^{N} a_1 q^{n-1} = \sum_{n=1}^{N} a_1 q^{n}, \tag{35}$$

可以这么看

$$\begin{array}{rcccccccc} S = & a_1 & +a_1 q & +a_1 q^2 & +a_1 q^3 & +\cdots & +a_1 q^{N-2} & +a_1 q^{N-1} & \\ qS = & & a_1 q & +a_1 q^2 & +a_1 q^3 & +\cdots & +a_1 q^{N-2} & +a_1 q^{N-1} & +a_1 q^N \end{array}$$

两式相减将次数相同的消去得到

$$(1-q)S = S - qS = a_1 - a_1 q^N = a_1(1-q^N), \tag{36}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{N} a_1 q^{n-1} = S = a_1 \cdot \frac{1-q^N}{1-q}. \tag{37}$$

特殊的, $|q| < 1$ 时 $\lim_{N\to\infty} q^N = 0$, 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q}. \tag{38}$$

Remark. 从因式分解的角度出发, 可以视作恒等式

$$a^N - b^N = (a-b)\left(a^{N-1} + a^{N-2}b + \cdots + b^{N-1}\right). \tag{39}$$

的特殊变形.

1.2.2 等差乘等比

定义数列 $\{a_n\}$ 为 $a_n = (a+bn)q^{n-1}$, 也就是等差数列 $\{a+bn\}$ 与等比数列 $\{q^{n-1}\}$ 之积. 计算该数列和的方法与等比数列一致, 均使用错位相减, 在高中数列题中常考. 这里不加叙述地给出推导过程

$$S := \sum_{n=1}^{N} (a+bn) q^{n-1}, \tag{40}$$

$$\begin{array}{rcccccc} S = & a+b & +(a+2b)q & +(a+3b)q^2 & +\cdots & +(a+Nb)q^{N-1} & \\ qS = & & (a+b)q & +(a+2b)q^2 & +\cdots & +(a+(N-1)b)q^{N-1} & +(a+Nb)q^N \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
(1-q)S = S - qS &= (a+b) + b\left(q + q^2 + \cdots q^{N-1}\right) - (a+Nb)q^N \\
&= a + b\cdot\frac{1-q^N}{1-q} - (a+Nb)q^N.
\end{aligned} \tag{41}
$$

化简得到

$$
\sum_{n=1}^{N}(a+bn)q^{n-1} = \frac{1}{1-q}\left[\left(a+\frac{b}{1-q}\right)(1-q^N) - bNq^N\right], \tag{42}
$$

特殊的

- 若 $b=0$ 退化为等比数列和; 若 $a=0$, 不妨取 $b=1$ 则有
$$
\sum_{n=1}^{N} nq^{n-1} = \frac{1}{1-q}\left(\frac{1-q^N}{1-q} - Nq^N\right), \tag{43}
$$
- 若 $|q|<1$, 令 $N\to\infty$ 那么
$$
\sum_{n=1}^{\infty}(a+bn)q^{n-1} = \frac{1}{1-q}\left(a+\frac{b}{1-q}\right). \tag{44}
$$

  即 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.

2 整数自然数次幂的有限和

本章延续等差数列和的部分, 考虑 m 次多项式 $P_m(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} c_k x^k$, 定义数列 $\{a_n\}$ 为 $a_n := P_m(n)$, 计算 $\{a_n\}$ 的前 N 项和. 注意到

$$
\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{m} c_k n^k = \sum_{k=0}^{m} c_k \sum_{n=1}^{N} n^k, \tag{45}
$$

可以简化为计算 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n^k$, 那么在得到 $k=0,\cdots,m$ 后和与 $c_0,\cdots,c_m$ 相乘求和即可. 所有方法在1.1.2节中已初步介绍.

2.1 "离散幂"级数

同1.1.2节中的方法一, 对于 $m\in\mathbb{N}$, 回顾定义

$$
k^{(m)} := \begin{cases} 1, & m=1; \\ k(k+1)\cdots(k+m-1), & m\in\mathbb{N}\cap[2,+\infty). \end{cases} \tag{46}
$$

更加一般地, 使用 Gamma 函数定义

定义 2.1. $x^{(m)} := \begin{cases} \dfrac{\Gamma(x+m)}{\Gamma(x)}, & \Re x > 0; \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

在 $x\in\mathbb{N}$ 上的取值与前者是一致的. 这里

$$
\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t \tag{47}
$$

后续证明均使用更一般的 Gamma 函数定义.

引理 2.1. $m \in \mathbb{N}$, $\Re x > 0$, $x^{(m+1)} - (x-1)^{(m+1)} = (m+1)x^{(m)}$.

证明. 代入定义

$$\begin{aligned} x^{(m+1)} - (x-1)^{(m+1)} &= \frac{\Gamma(x+m+1)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma(x-1+m+1)}{\Gamma(x-1)} \\ &= \frac{\Gamma(x+m)}{\Gamma(x-1)} \left(\frac{x+m}{x-1} - 1 \right) \\ &= \frac{\Gamma(x+m)}{\Gamma(x-1)} \cdot \frac{m+1}{x-1} \\ &= (m+1) \cdot \frac{\Gamma(x+m)}{\Gamma(x)} =: (m+1)x^{(m)}. \end{aligned} \tag{48}$$

即证. □

Remark. 该等式类似于幂函数求导的 $\left(x^{m+1}\right)' = (m+1)x^m$, 也叫做离散幂函数求导 (忘了出处, 也可能没有).

Remark. 如果不是 Gamma 函数定义, 证明也是类似的

$$k(k+1)\cdots(k+m) - (k-1)k\cdots(k+m-1) = (m+1)k(k+1)\cdots(k+m-1), \tag{49}$$

左边提取相同的因子 $k\cdots(k+m-1)$ 后只剩下 $k+m-(k-1)$.

Remark. **引理2.1**是一个常见裂项, 最早在初一竞赛书中见到. 该等式仅在 $m=-1$ 时不成立.

引理 2.2. $m \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{N} n^{(m)} = \frac{1}{m+1} N^{(m+1)}$.

证明. 由**引理2.1**, 取 $x = 1, 2, \cdots, N$

$$(m+1)1^{(m)} = 1^{(m+1)} - 0^{(m+1)}, \tag{50}$$

$$(m+1)2^{(m)} = 2^{(m+1)} - 1^{(m+1)}, \tag{51}$$

$$\vdots \tag{52}$$

$$(m+1)N^{(m)} = N^{(m+1)} - (N-1)^{(m+1)}, \tag{53}$$

左右两边分别求和

$$(m+1)N^{(m)} = N^{(m+1)}, \tag{54}$$

同除 $m+1$ 即证. □

例 2.1. $m=0$, $\sum_{n=1}^{N} 1 = \sum_{n=1}^{N} n^{(0)} = n^{(1)} = N$.

例 2.2. $m=1$, $\sum_{n=1}^{N} n = \sum_{n=1}^{N} n^{(1)} = \frac{1}{2} n^{(2)} = \frac{1}{2} N(N+1)$.

例 2.3. $m=2$, $\sum_{n=1}^{N} n(n+1) = \sum_{n=1}^{N} n^{(2)} = \frac{1}{3} n^{(3)} = \frac{1}{3} N(N+1)(N+2)$. 因为 $n(n+1) = n^2 + n$,

所以

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} n^2 &= \sum_{n=1}^{N} n(n+1) - n = \sum_{n=1}^{N} n(n+1) - \sum_{n=1}^{N} n \\
&= \sum_{n=1}^{N} n^{(2)} - \sum_{n=1}^{N} n^{(1)} = \frac{1}{3}N^{(3)} - \frac{1}{2}N^{(2)} \\
&= \frac{1}{6}N(N+1)\left(2(N+2)-3\right) = \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1).
\end{aligned} \tag{55}
$$

注意到 $n^{(m)}$ 中最高次项为 n^m，那么可以通过降次, 通过 $\sum_{n=1}^{N} n^{(m)}$ 与 $\sum_{n=1}^{N} n^1, \cdots, \sum_{n=1}^{N} n^{m-1}$ 计算得到 $\sum_{n=1}^{N} n^m$.

Remark. 该方法随着次数 m 增大, 复杂度会显著提高.

2.2 二项式展开

同**1.1.2**节中的方法二, 本小节记 $S_m(N) = \sum_{n=1}^{N} n^m$.

定理 2.3 (二项式定理)**.** $m \in \mathbb{N}$, $(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$, $\binom{m}{k} := \frac{m!}{k!(m-k)!}$.

引理 2.4. $m \in \mathbb{N}$, $(m+1)x^m = (1+x)^{m+1} - x^{m+1} - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} x^k$.

证明. 由二项式定理

$$
(1+x)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} x^k = x^{m+1} + \binom{m+1}{m} x^m + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} x^k. \tag{56}
$$

计算 $\binom{m+1}{m} = m+1$, 将 x^m 置于等式左边其余右边即证. □

引理 2.5. $m \in \mathbb{N}$, $(m+1)S_m(N) = (1+N)^{m+1} - 1 - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} S_k(N)$.

证明. 由**引理2.4**两边求和即证. □

我们已知 $S_0(N) = N$, 可以递推如下:

例 2.4. $m=1$, $2S_1(N) = (1+N)^2 - 1 - \binom{2}{0} S_0(N)$, 所以 $S_1(N) = \frac{1}{2}N(N+1)$.

例 2.5. $m=2$, $3S_2(N) = (1+N)^3 - 1 - \binom{3}{0} S_0(N) - \binom{3}{1} S_1(N)$. 所以

$$
\begin{aligned}
S_2(N) &= \frac{1}{3}\left((1+N)^3 - 1 - 1\cdot N - 3\cdot\frac{1}{2}N(N+1)\right) \\
&= \frac{1}{6}(N+1)\left(2(1+N)^2 - 2 - 3N\right) \\
&= \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1).
\end{aligned} \tag{57}
$$

剩下的引理以及递推式也可以类似得到.

引理 2.6. $m \in \mathbb{N}$, $(m+1)x^m = x^{m+1} - (x-1)^{m+1} + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m+1-k} \binom{m+1}{k} x^k$.

引理 2.7. $m \in \mathbb{N}$, $(m+1)S_m(N) = N^{m+1} + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m+1-k} \binom{m+1}{k} S_k(N)$.

引理 2.8. $m \in \mathbb{N}$, $2(m+1)x^m = (x+1)^{m+1} - (x-1)^{m+1} - 2\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{m+1}{m-2k} x^{m-2k}$.

证明. 由二项式定理

$$(x+1)^{m+1} = \binom{m+1}{0} + \cdots \binom{m+1}{m-1} x^{m-1} + \binom{m+1}{m} x^m + x^{m+1}, \tag{58}$$

$$(x-1)^{m+1} = (-1)^{m+1}\binom{m+1}{0} + \cdots \binom{m+1}{m-1} x^{m-1} - \binom{m+1}{m} x^m + x^{m+1}, \tag{59}$$

两式相减得到

$$\begin{aligned}(x+1)^{m+1} - (x-1)^{m+1} &= 2\binom{m+1}{m} x^m + 2\binom{m+1}{m-2} x^{m-2} + 2\binom{m+1}{m-4} x^{m-4} + \cdots \\ &= 2(m+1)x^m + 2\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{m+1}{m-2k} x^{m-2k}.\end{aligned} \tag{60}$$

移项即证. □

引理 2.9. $m \in \mathbb{N}$, $2(m+1)S_m(N) = (N+1)^{m+1} + N^{m+1} - 1 - 2\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{m+1}{m-2k} S_{m-2k}$.

例 2.6. $m = 2$, $6S_2(N) = (N+1)^3 + N^3 - 1 - 2 \cdot \binom{3}{0} \cdot S_0(N) = 2N^3 + 3N^2 + N$.

例 2.7. $m = 3$, $8S_3(N) = (N+1)^4 + N^4 - 1 - 2 \cdot \binom{4}{1} \cdot S_1(N) = 2N^4 + 4N^3 + 2N^2$.

例 2.8. $m = 4$,

$$\begin{aligned}10S_4(N) &= (N+1)^5 + N^5 - 1 - 2\binom{5}{2} S_2(N) - 2\binom{5}{0} S_0(N) \\ &= 2N^5 + 5N^4 + 10N^3 + 10N^2 + 5N - 2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{6}\left(2N^3 + 3N^2 + N\right) - 2 \cdot N \\ &= 2N^5 + 5N^4 + \frac{10}{3}N^3 - \frac{1}{3}N = \frac{1}{3}N(N+1)(6n^3 + 9N^2 + N - 1).\end{aligned} \tag{61}$$

Remark. 可以看出, 如果递推层数过多计算也会非常不方便, 与上一节的方法陷入了同样的问题.

2.3 差分方法

同1.1.2节中方法三, 定义恒等算子, 差分算子, 移位算子.

$$If(x) = f(x), \tag{62}$$

$$\Delta^n f(x) = \begin{cases} f(x), & n = 0, \\ \Delta^{n-1} f(x+1) - \Delta^{n-1} f(x), & n \geq 1. \end{cases} \tag{63}$$

$$E^n f(x) = \begin{cases} f(x), & n = 0, \\ E^{n-1} f(x+1), & n \geq 1. \end{cases} \tag{64}$$

根据前面的结果知 I, Δ, E 满足 $E = I + \Delta$, 且算子满足基本的代数运算法则.

引理 2.10. *$\forall m$ 阶多项式 $P_m(x)$ (即 $\deg P_m \leq m$), $\Delta^{m+1} f(x) = 0$.*

引理 2.11. *$m \in \mathbb{N}$, $n^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \Delta^k f(0)$.*

证明. 由 $E^n = (I + \Delta)^n$

$$f(x+n) = E^n f(x) = (I+\Delta)^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k f(x), \tag{65}$$

又 m 次多项式差分 m 次为常数, 差分 $m+1$ 次为 0, 即

$$\Delta^{m+1} f(x) = 0, \quad \Delta^m n^m = m!. \tag{66}$$

取 $f(x) = x^m$, 那么 $k > m$ 时 $\Delta^k f(0) = 0$, 从而 $n^m = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k f(0) = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \Delta^k f(0)$. □

引理 2.12. *$m \in \mathbb{N}$, $S_m(N) = \sum_{k=0}^{m} \Delta^k f(0) \binom{N+1}{k+1}$.*

证明. 由前面的引理

$$S_m(N) = \sum_{n=1}^{N} n^m = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=0}^{m} \binom{N}{k} \Delta^k f(0) = \sum_{k=0}^{m} \Delta^k f(0) \sum_{n=1}^{N} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{m} \Delta^k f(0) \binom{N+1}{k+1}, \tag{67}$$

即证. □

$m = 0, 1$ 可见1.1.2节 表1, 2.

例 2.9. $m = 2$, $f(n) = n^m = n^2$, 所以

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(n)$	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
$\Delta f(n)$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	-
$\Delta^2 f(n)$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	-	-
$\Delta^2 f(n)$	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-

表 3: $f(n) = n^2$

$$
\begin{aligned}
S_2(N) &= f(0)\binom{N+1}{1} + \Delta f(0)\binom{N+1}{2} + \Delta^2(0)\binom{N+1}{3} \\
&= 0 + 1\cdot\binom{N+1}{2} + 2\cdot\binom{N+1}{3}.
\end{aligned} \tag{68}
$$

Remark. 差分方法仅适用于 $m \in \mathbb{N}$.

2.4 积分方法

同**1.1.2节**中方法四, 同样的定义

$$
S_m(N) = \sum_{n=1}^{N} n^m, \tag{69}
$$

并将 $S_m(N), N \in \mathbb{N}$ 延拓为 $S_m(x), x \in \mathbb{R}$.

引理 2.13. $m \in \mathbb{N}_+$, $S_m(x) = \left(1 - m\int_0^1 S_{m-1}(t)\mathrm{d}t\right)x + m\int_0^x S_{m-1}(t)\mathrm{d}t.$

证明. 因为 $S_m(x) - S_m(x-1) = x^m$, 于是

$$
S'_m(x) - S'_m(x-1) = mx^{m-1}, \tag{70}
$$

两边对 x 从 1 到 N 求和, 所以

$$
S'_m(x) - S'_m(0) = mS_{m-1}(x), \tag{71}
$$

所以

$$
S_m(x) = S'_m(0)x + m\int_0^x S_{m-1}(t)\mathrm{d}t, \tag{72}
$$

由 $S_m(1) = 1$, 代入得

$$
1 = S_m(1) = S'_m(1)x + m\int_0^1 S_{m-1}(t)\mathrm{d}t, \tag{73}
$$

所以 $S'_m(1) = 1 - m\int_0^1 S_{m-1}(t)\mathrm{d}t$, 代回表达式

$$
S_m(x) = \left(1 - m\int_0^1 S_{m-1}(t)\mathrm{d}t\right)x + m\int_0^x S_{m-1}(t)\mathrm{d}t, \tag{74}
$$

即证. □

例 2.10. $m = 1$, 由 $S_0(x) = x$, 计算 $\int_0^x S_0(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^2$,

$$
\begin{aligned}
S_1(x) &= \left(1 - m\int_0^1 S_{m-1}(t)\mathrm{d}t\right)x + m\int_0^x S_{m-1}(t)\mathrm{d}t \\
&= \left(1 - 1\cdot\frac{1}{2}\right)x + 1\cdot\frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.
\end{aligned} \tag{75}
$$

例 2.11. $m = 2$, 由 $S_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$, 计算 $\int_0^x S_0(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2$,

$$
\begin{aligned}
S_2(x) &= \left(1 - m\int_0^1 S_{m-1}(t)\mathrm{d}t\right)x + m\int_0^x S_{m-1}(t)\mathrm{d}t \\
&= \left(1 - 2\cdot\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right)\right)x + 2\cdot\left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2\right) \\
&= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x.
\end{aligned} \tag{76}
$$

3 多项式乘等比的有限和

本章研究更加一般的数列, 同上一章的考虑, 主要计算数列 $\{a_n\}$ 的前 N 项和, 其中 $a_n = n^m q^{n-1}, m \in \mathbb{N}, q \neq 0$. 不妨设 $T_{m,N}(q) = \sum\limits_{n=1}^{N} n^m q^{n-1}$.

Remark. $T_{m,N}(1) = S_m(N)$.

Remark. 上一节的差分方法可以继续使用, 但是积分方法无法使用了, 因为这里当 $q \neq 1$ 时 $T_{m,N}(q)$ 不是一个关于 N 的多项式.

3.1 "离散幂"乘等比

计算数列 $\{a_n\}$ 的前 N 项和, 其中 $a_n := n^{(m)} q^{n-1}$, $m \in \mathbb{N}$, 这里的 $n^{(m)}$ 沿用**定义**2.1, 即 $x^{(m)} := \dfrac{\Gamma(x+m)}{\Gamma(x)}$.

引理 3.1. $m \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n=1}^{N} n^{(m+1)} q^{n-1} = \dfrac{1}{1-q}\left((m+1)\sum\limits_{n=1}^{N} n^{(m)} q^{n-1} - N^{(m+1)} q^N\right)$.

证明. 错位相减

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} n^{(m+1)} q^{n-1} - q\sum_{n=1}^{N} n^{(m+1)} q^{n-1} &= \sum_{n=1}^{N} n^{(m+1)} q^{n-1} - \underbrace{\sum_{n=0}^{N} n^{(m+1)} q^{n}}_{0^{(m+1)}=0} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \left(n^{(m+1)} - (n-1)^{(m+1)}\right) q^{n-1} - N^{(m+1)} q^N \\
&= \sum_{n=1}^{N} (m+1) n^{(m)} q^{n-1} - N^{(m+1)} q^N \\
&= (m+1)\sum_{n=1}^{N} n^{(m)} q^{n-1} - N^{(m+1)} q^N
\end{aligned} \tag{77}$$

用到了**引理** 2.1: $x^{(m+1)} - (x-1)^{(m+1)} = (m+1)x^{(m)}$. 移项即证. □

例 3.1. $\sum\limits_{n=1}^{N} n^{(0)} q^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{N} q^{n-1} = \dfrac{1-q^N}{1-q}$.

例 3.2. $\sum\limits_{n=1}^{N} n q^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{N} n^{(1)} q^{n-1} \overset{\text{Lemma}}{=} \dfrac{1}{1-q}\left(1 \cdot \sum\limits_{n=1}^{N} n^{(0)} q^{n-1} - N^{(1)} q^N\right) = \dfrac{1}{1-q}\left(\dfrac{1-q^N}{1-q} - Nq^N\right)$.

例 3.3. 计算 $\sum\limits_{n=1}^{N} n^2 q^{n-1}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} n(n+1) q^{n-1} = \sum_{n=1}^{N} n^{(2)} q^{n-1} &\overset{\text{Lemma}}{=} \frac{1}{1-q}\left(2 \cdot \sum_{n=1}^{N} n^{(1)} q^{n-1} - N^{(2)} q^N\right) \\
&= \frac{1}{1-q}\left(\frac{2}{1-q}\left(\frac{1-q^N}{1-q} - Nq^N\right) - N(N+1)q^N\right).
\end{aligned} \tag{78}$$

所以

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} n^2 q^{n-1} &= \sum_{n=1}^{N} n(n+1)q^{n-1} - \sum_{n=1}^{N} nq^{n-1} \\
&= \frac{1}{1-q}\left(\frac{2}{1-q}\left(\frac{1-q^N}{1-q} - Nq^N\right) - N(N+1)q^N\right) \\
&\qquad - \frac{1}{1-q}\left(\frac{1-q^N}{1-q} - Nq^N\right) \\
&= \frac{1}{1-q}\left(\frac{2}{1-q}\left(\frac{1-q^N}{1-q} - Nq^N\right) - N(N+1)q^N - \left(\frac{1-q^N}{1-q} - Nq^N\right)\right) \\
&= \frac{1}{1-q}\left(\frac{1}{1-q}\left(2\left(\frac{1-q^N}{1-q} - Nq^N\right) - (1-q^N)\right) - N^2q^N\right) \\
&= \frac{1}{1-q}\left(\frac{1}{1-q}\left((1+q)\frac{1-q^N}{1-q} - 2Nq^N\right) - N^2q^N\right).
\end{aligned} \tag{79}$$

引理 3.2. $m \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{N} n^{(m)} q^{n-1} = \frac{m!}{(1-q)^{m+1}}\left(1 - q^N \sum_{k=0}^{m} \frac{N^{(k)}}{k!} \cdot (1-q)^k\right)$.

证明. 采用数学归纳法证明, $m = 0$ 显然成立, 那么由**引理3.1**

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} n^{(m+1)} q^{n-1} &= \frac{1}{1-q}\left((m+1)\sum_{n=1}^{N} n^{(m)} q^{n-1} - N^{(m+1)} q^N\right) \\
=&\frac{1}{1-q}\left((m+1)\frac{m!}{(1-q)^{m+1}}\left(1 - q^N \sum_{k=0}^{m} \frac{N^{(k)}}{k!} \cdot (1-q)^k\right) - N^{(m+1)} q^N\right) \\
=&\frac{(m+1)!}{(1-q)^{m+2}}\left(1 - q^N \sum_{k=0}^{m} \frac{N^{(k)}}{k!} \cdot (1-q)^k\right) - \frac{N^{(m+1)} q^N}{1-q} \\
=&\frac{(m+1)!}{(1-q)^{m+2}}\left(1 - q^N \sum_{k=0}^{m} \frac{N^{(k)}}{k!} \cdot (1-q)^k - q^N \cdot \frac{N^{(m+1)}}{(m+1)!} \cdot (1-q)^{m+1}\right) \\
=&\frac{(m+1)!}{(1-q)^{m+2}}\left(1 - q^N \sum_{k=0}^{m+1} \frac{N^{(k)}}{k!} \cdot (1-q)^k\right),
\end{aligned} \tag{80}$$

所以若 m 成立则 $m+1$ 也成立, 综上可知原命题成立. □

3.2 错位相减递推

该方法对于 $m \in \mathbb{R}$ 都成立, 并且在**1.2**中已经给出了大致框架.

引理 3.3. $m \in \mathbb{N}_+$, $T_{m,N}(q) = \frac{1}{q-1}\left(\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-1-k} \binom{m}{k} T_{k,N}(q) - N^m q^N\right)$

证明. 乘公比错位相减

$$
\begin{aligned}
T_{m,N}(q)-qT_{m,N}(q) &= \sum_{n=1}^{N} n^m q^{n-1} - \sum_{n=1}^{N} n^m q^n \\
&= \sum_{n=1}^{N} \left[n^m-(n-1)^m\right] q^{n-1} - N^m q^N \\
&= -\sum_{n=1}^{N} q^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} n^k - N^m q^N \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-1-k} \binom{m}{k} T_{k,N}(q) - N^m q^N,
\end{aligned}
\tag{81}
$$

合并同除 $1-q$ 即证. □

例 3.4. $m=1$,

$$
\begin{aligned}
T_{1,N}(q) = \sum_{n=1}^{N} nq^{n-1} &= \frac{1}{1-q}\left((-1)^0\binom{1}{0}T_{0,N}(q) - N^1 q^N\right) \\
&= \frac{1}{1-q}\left(\frac{1-q^N}{1-q} - Nq^N\right).
\end{aligned}
\tag{82}
$$

例 3.5. $m=2$,

$$
\begin{aligned}
T_{2,N}(q) &= \sum_{n=1}^{N} n^2 q^{n-1} \\
&= \frac{1}{1-q}\left((-1)^1\binom{2}{0}T_{0,N}(q) + (-1)^0\binom{2}{1}T_{1,N}(q) - N^2 q^N\right) \\
&= \frac{1}{1-q}\left[\frac{1}{1-q}\left((1+q)\frac{1-q^N}{1-q} - 2Nq^N\right) - N^2 q^N\right],
\end{aligned}
\tag{83}
$$

3.3 差分方法

引理 3.4. $m \in \mathbb{N}$, $T_{m,N}(q) = \sum_{k=0}^{m} \Delta^k f(0) \sum_{n=1}^{N} q^{n-1}\binom{n}{k}$.

证明. 根据**引理**2.11知 $n^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \Delta^k f(0)$, 所以

$$
\begin{aligned}
T_{m,N}(q) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{N} n^m q^{n-1} &\overset{2.11}{=} \sum_{n=1}^{N} q^{n-1} \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \Delta^k f(0) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \Delta^k f(0) \sum_{n=1}^{N} q^{n-1}\binom{n}{k}.
\end{aligned}
\tag{84}
$$

即证. □

例 3.6. $m=1$, $T_{1,N}(q) = \Delta f(0) \cdot \sum_{n=1}^{N} q^{n-1}\binom{n}{1}$.

引理 3.5. $m \in \mathbb{N}_+$, $T_{m,N}(q) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\Delta^k f(0)}{(1-q)^{k+1}}\left(q^{k-1} - q^N \sum_{\ell=0}^{k} \frac{(N-k+1)^{(\ell)}}{\ell!} \cdot (1-q)^{\ell}\right)$.

证明. 当 $m>0$ 时, 对于 $f(x)=x^m$ 有 $f(0)=0$, 所以

$$T_{m,N}(q)=\sum_{k=1}^{m}\Delta^k f(0)\sum_{n=1}^{N}q^{n-1}\binom{n}{k}. \tag{85}$$

只需要考虑 $k\geq 1$. 注意到

$$\binom{n}{k}=\frac{(n-k+1)^{(k)}}{k!} \tag{86}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{N}q^{n-1}\binom{n}{k}=\frac{1}{k!}\sum_{n=1}^{N}(n-k+1)^{(k)}q^{n-1}=\frac{q^{k-1}}{k!}\sum_{n=1}^{N-k+1}n^{(k)}q^{n-1}. \tag{87}$$

Remark. 这一步导致 $m=0$ 无法适用.

再由**引理3.2**: $\sum_{n=1}^{N}n^{(m)}q^{n-1}=\frac{m!}{(1-q)^{m+1}}\left(1-q^N\sum_{k=0}^{m}\frac{N^{(k)}}{k!}\cdot(1-q)^k\right)$, 所以

$$\sum_{n=1}^{N}q^{n-1}\binom{n}{k}=\frac{q^{k-1}}{(1-q)^{k+1}}\left(1-q^{N-k+1}\sum_{\ell=0}^{k}\frac{(N-k+1)^{(\ell)}}{\ell!}\cdot(1-q)^{\ell}\right) \tag{88}$$

代回化简得到

$$T_{m,N}(q)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\Delta^k f(0)}{(1-q)^{k+1}}\left(q^{k-1}-q^N\sum_{\ell=0}^{k}\frac{(N-k+1)^{(\ell)}}{\ell!}\cdot(1-q)^{\ell}\right) \tag{89}$$

即证. □

例 3.7. $m=1$, $T_{1,N}(q)=\frac{\Delta f(0)}{(1-q)^2}\cdot\left(1-q^N\cdot(1+N(1-q))\right)=\frac{1}{1-q}\left(\frac{1-q^N}{1-q}-Nq^N\right)$.

例 3.8. $m=2$, 那么

$$\begin{aligned}
T_{2,N}(q)=&\frac{\Delta f(0)}{(1-q)^2}\left(1-q^N\left(1+\frac{N}{1!}\cdot(1-q)\right)\right)\\
&+\frac{\Delta^2 f(0)}{(1-q)^3}\left(q-q^N\left(1+\frac{N-1}{1!}\cdot(1-q)+\frac{(N-1)N}{2!}\cdot(1-q)^2\right)\right)\\
=&\frac{1-q+2q-q^N\left(1-q+N(1-q)^2+2+2(N-1)(1-q)+(N-1)N(1-q)^2\right)}{(1-q)^3}\\
=&\frac{1+q-q^N\left(2+(2N-1)(1-q)+N^2(1-q)^2\right)}{(1-q)^3}\\
=&\frac{1+q-q^N\left((1+q)+2N(1-q)+N^2(1-q)^2\right)}{(1-q)^3}\\
=&(1+q)\frac{1-q^N}{(1-q)^3}-\frac{2Nq^N}{(1-q)^2}-\frac{N^2q^N}{1-q}.
\end{aligned}$$

Remark. 也可以写成 $T_{m,N}(q)=\sum_{k=0}^{m}\frac{\Delta^k f(0)}{(1-q)^{k+1}}\left(q^{k-1}-q^N\sum_{\ell=0}^{k}\binom{N-k+\ell}{\ell}\cdot(1-q)^{\ell}\right)$

3.4 微分关系

将 $T_{m,N}(q)$ 看作是对 q 的多项式，那么我们有微分关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}qT_{m,N}(q)=\sum_{n=1}^{N}n^{m+1}q^{n-1}=T_{m+1,N}(q), \tag{90}$$

这也得到了从 m 到 $m+1$ 的递推, 可以化简为

$$T_{m+1,1}(q) = T_{m,N}(q) + qT'_{m,N}(q). \tag{91}$$

但是在有限和的情形下, 并没有起到很好的化简作用.

4 多项式乘等比的无限和

本章可以视作前一章的扩展, 即 $N=\infty$ 的情形, 计算

$$T_{m,\infty}(q) = \sum_{n=1}^{\infty} n^m q^{n-1}, m \in \mathbb{N}. \tag{92}$$

因为 n^m 是单调增序列 ($m=0$ 时为常数列), 所以当且仅当 $|q|<1$ 时级数收敛. 根据前面结果令 $N\to\infty$, 即 $q^N \to 0$, 可以得到

$$T_{0,\infty}(q) = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}, \tag{93}$$

$$T_{1,\infty}(q) = \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}, \tag{94}$$

$$T_{2,\infty}(q) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^{N-1} = \frac{1+q}{(1-q)^3}. \tag{95}$$

4.1 ”离散幂” 乘等比

事实上由**引理3.2**可以很快得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n}{n} q^n = \frac{1}{(1-q)^{m+1}}, \quad m \geqslant 0, \tag{96}$$

Remark. 在 Taylor 展开中是显然的

$$(1-x)^{-\alpha-1} = 1 + (\alpha+1)x + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+n}{n} x^n. \tag{97}$$

4.2 差分方法

由**引理3.5**, $m>0$ 时, 令 $N\to\infty$ 得到

$$T_{m,\infty}(q) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\Delta^k f(0)}{(1-q)^{k+1}} \cdot q^{k-1} \tag{98}$$

4.3 微分方法

不同于有限和的情形, $T_{m,\infty}(q)$ 关于 q 的表达式较简单, 利用微分 (式90) 可以得到一组简洁的递推

$$T_{m+1,\infty}(q) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} qT_{m,\infty}(q) = T_{m,\infty}(q) + qT'_{m,\infty}(q), \tag{99}$$

从而

$$T_{m+1,\infty}(q)=\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}q\left(\cdots\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}q\frac{1}{1-q}\right)\right)}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}q\text{ m 次}} \tag{100}$$

5 负指数或分数

5.1 整数的负次幂有限和

没有具体的解析表达式.

5.2 ζ 函数

$$\zeta(s):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}, \tag{101}$$

当 $\Re s>1$ 时收敛, 其中 $\zeta(2k),k\in\mathbb{N}_+$ 的值可以表示.

也可以延拓到整个复平面, 其中 $\zeta(2k)=0,k\in\mathbb{Z}_-$ 时平凡零点.

5.3 “离散幂”级数

2.1节说过当 $x^{(m)}$ 中 $m<0$ 时并不影响结论, 所以3.1节的大部分结论同样成立.

5.4 负指数乘等比

当 $m<0$ 的时候，求和的在 $q=-1$ 也收敛了，实际上，我们有求和公式

$$\begin{aligned}T_{m,\infty}(q)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n-1}}{n^{-m}}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n-1}}{n^{-m}}\cdot\frac{1}{\Gamma(-m)}\int_0^{\infty}e^{-x}x^{-m-1}\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}\cdot\frac{1}{\Gamma(-m)}\int_0^{\infty}e^{-nt}t^{-m-1}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\Gamma(-m)}\int_0^{\infty}t^{-m-1}\cdot e^{-t}\cdot\frac{1}{1-qe^{-t}}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\Gamma(-m)}\int_0^{\infty}\frac{t^{-m-1}}{e^t-q}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

再次强调这里 $m<0$。对于 $m<0$，仅有 $m=-1$ 可以求出初等表达式

$$T_{-1,\infty}(q)=-\frac{-\ln(1-q)}{q}, \tag{102}$$

该式也满足 (式90)。

实际上，这里有个额外定义的函数 $\mathrm{Li}_{-m}(x)$，也就是

$$\mathrm{Li}_{-m}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n-1}}{n^{-m}}=T_{m,\infty}(q), \tag{103}$$

同时对于 $m<-1$ 时，有

$$\zeta(-m)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{-m}}=T_{m,\infty}(1) \tag{104}$$

此外还有

$$\eta(-m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{-m}} = T_{m,\infty}(-1), \tag{105}$$

这个函数对 $m < -1$ 都收敛。