Computer Graphics

Prof. Jibum Kim

Department of Computer Science & Engineering

Incheon National University

- **NDC에서 Viewport 로의 mapping**

- **OpenGL 좌표계 변환 순서**

1. Local coordinate (모델 좌표계)

2. World coordinate (세계 좌표계)

3. Eye coordinate (view coordinate)

4. Clip coordinate (절단 좌표계)

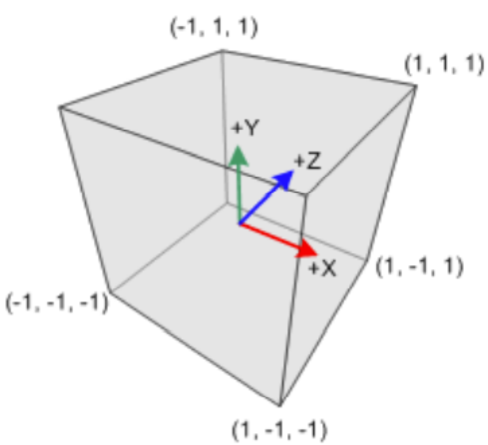
5. Normalized device coordinate (NDC)

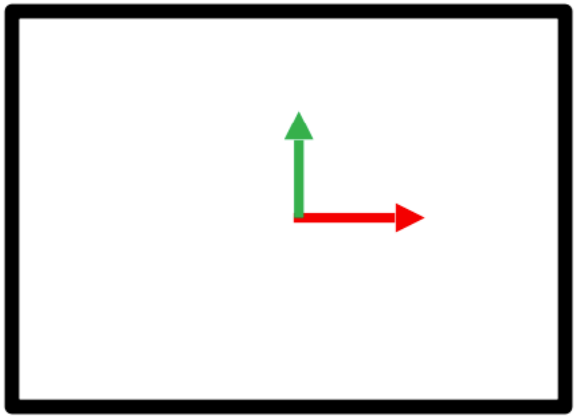
6. Screen coordinate (화면 좌표계, 2D)

- **Projection transformation** brings all potentially visible objects into a cube centered at the origin in **clip coordinates**
- Perspective division yields 3D representation in **normalized device coordinates (NDC)**
- The final transformation takes a position in NDC and taking into account the viewport, creates a 3D representation in **window coordinates**
- Window coordinates are measured in units of pixels on the display but retain depth information
- If we remove depth coordinates, we are working with **2D screen coordinates**

인천대학교

- 마지막 단계: glViewport(left ,bottom, width, height) transforms NDC to window coordinates
- X and Y coordinates of NDC map to screen width and height
- Z used for depth (예: hidden surface removal)

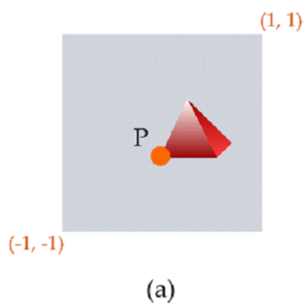


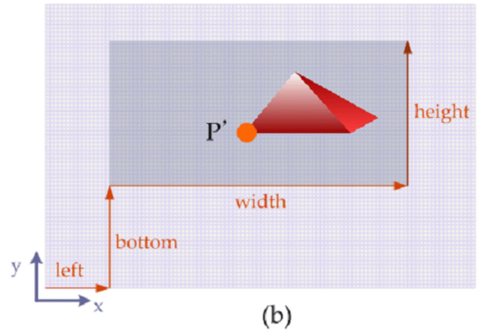


(a) NDC의 좌표 범위: x:[-1, 1], y:[-1, 1]

(b) viewport에서의 좌표 범위:x’:[left ~ left+width], y’:[bottom ~ bottom+height] (glViewport(left ,bottom, width, height) 사용시)

- 1. x축에서 NDC→Viewport mapping
- (a) NDC : x:[-1, 1], y:[-1, 1]
- (b) viewport: x’:[left, left+width], y’:[bottom, bottom+height]
- $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{x}', \ \boldsymbol{x}' = \frac{\boldsymbol{width}}{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{1}) + \boldsymbol{left}$



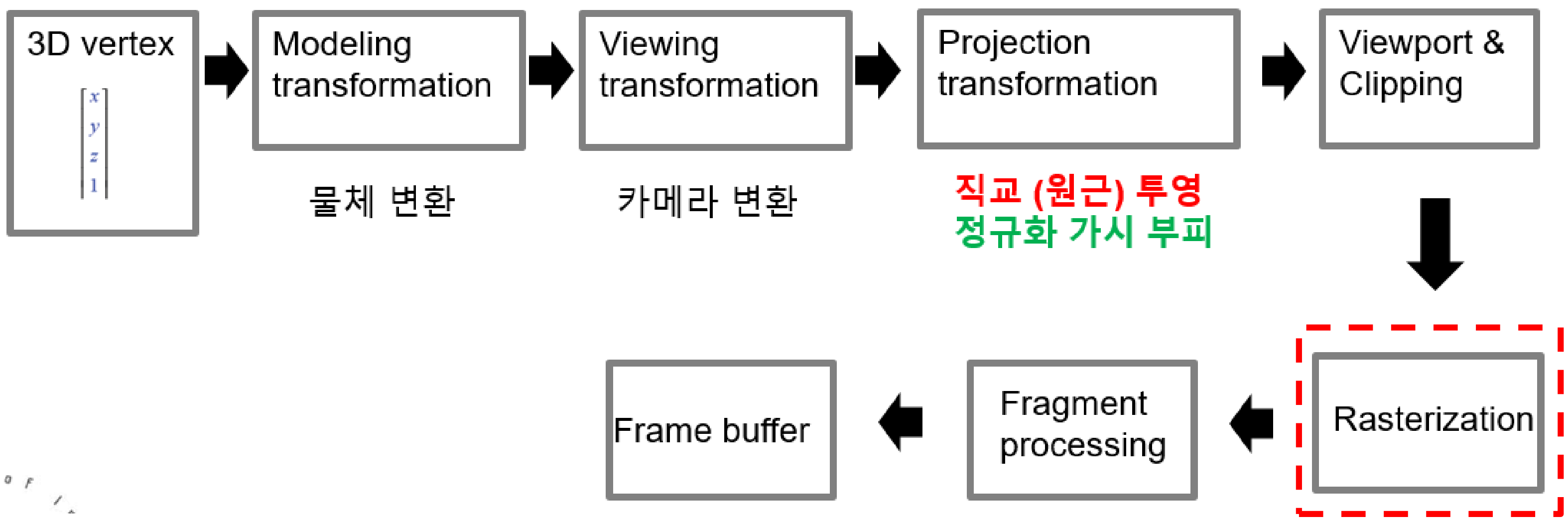


인천대학교

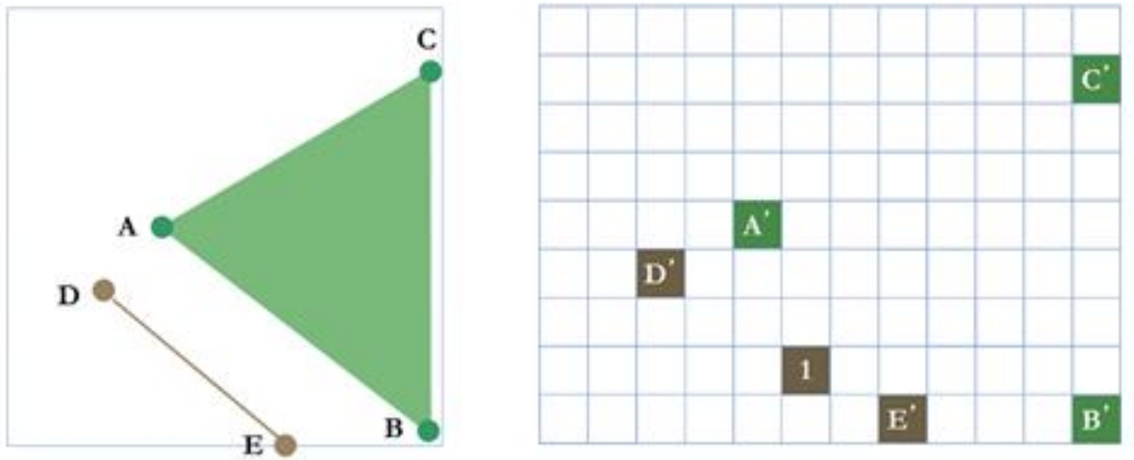
- 2. y축에서 NDC→Viewport mapping
- (a) NDC : x:[-1 ,1], y:[-1 ,1]
- (b) viewport: x’:[left, left+width], y’:[bottom, bottom+height]
-
- $\boldsymbol{f: y \to y',\ y' = \frac{height}{2}(y+1) + bottom}$

- **Rasterization (래스터 변환)**

■ Graphics pipeline (OpenGL pre-shader)

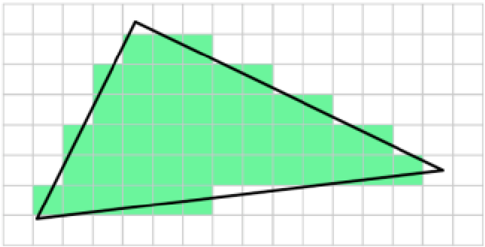


- The primitives that emerge from the clipper are still represented in terms of their vertices and must be converted to pixels in the framebuffer
- For example, if three vertices specify a triangle with a solid color, the rasterizer must determine which pixels in the framebuffer are inside the polygon
- Rasterization: Determine which pixels are drawn into the framebuffer (to represent a given primitive)

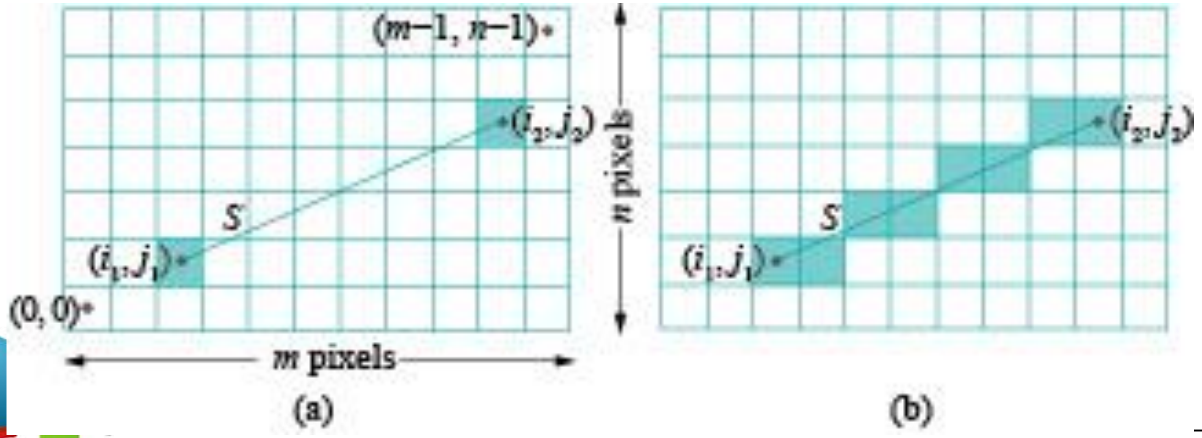


- **The output of the rasterizer is a set of fragments for each primitive**
- **A fragment can be thought of as a potential pixel that carries with it information, including its color and location, that is used to update the corresponding pixel in the frame buffer**

- **Triangle rasterization**

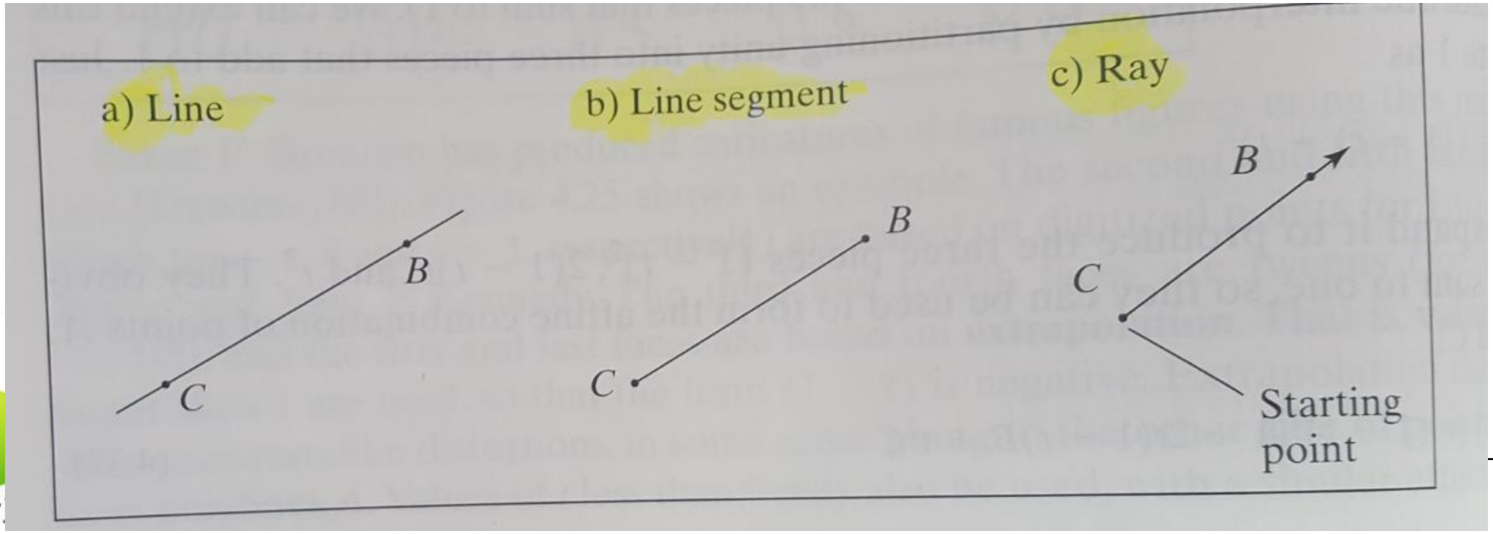


- **선분의 rasterization**

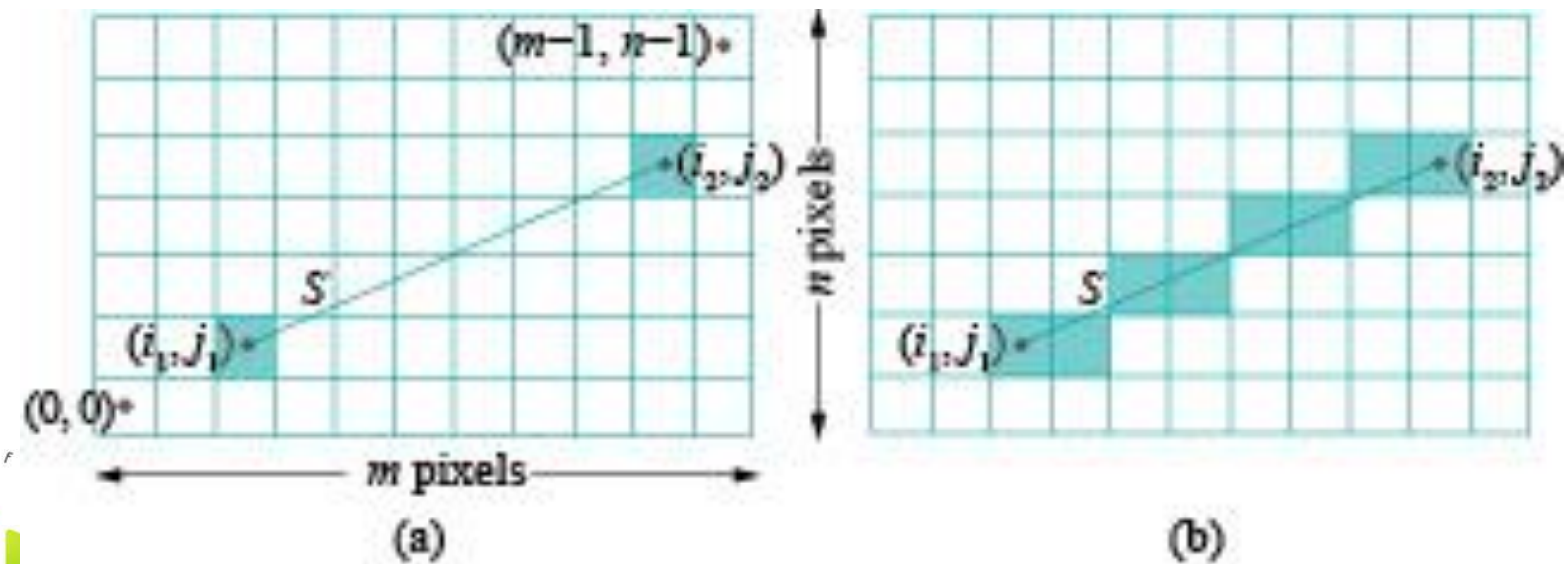


- **선분의 Rasterization**

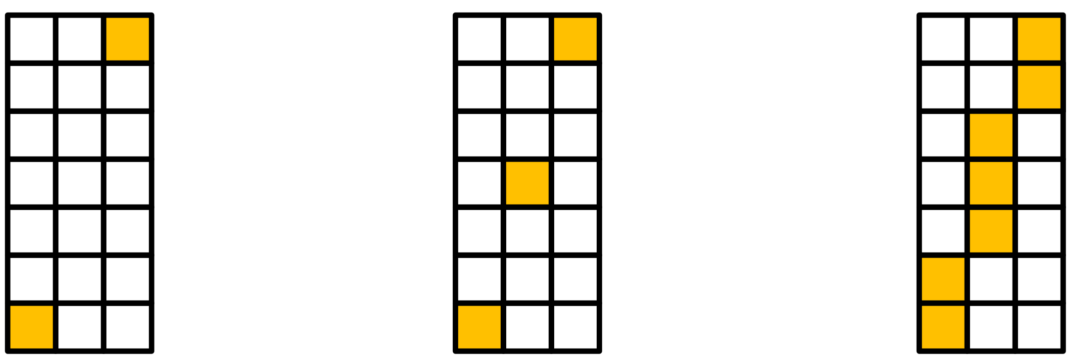
- **Line (직선):** **a line is defined by two points, say C and B. It is infinite in length, passing through the points and extending forever in both directions**
- **Line segment (segment, 선분):** **defined by two points (called endpoints) but extends only from one endpoint to the other**
- **Ray (반직선):** **it is specified by a point and a direction. A ray starts at a point and extends infinitely far in a given direction. A ray is semi-infinite. Ray tracying에 사용**



- **Line segment (선분) 의 raster 변환 문제**
- 가로 m개의 픽셀, 세로 n개의 픽셀이 주어져 있고 시작점 (i_1,j_1)과 끝점 (i_2,j_2)가 주어져 있을 때 이 둘을 연결하는 line segment (밑의 오른쪽 그림 S)를 잘 표현하는 픽셀들을 선택하는 문제



- 선분의 시작 pixel과 끝 pixel이 주어져 있을 때 선분의 rasterization 문제
- 이 경우에는 선분의 기울기가 1보다 크다 (기울기=3). Pixel은 정수 단위이므로 아래의 (a) (b)중에 한가지 방법을 선택해서 선분의 rasterization을 수행해 보고자 한다
- (a) x좌표를 1씩 증가시키면서 선분과 교차하는 화소를 선택, y=3x
- 1) x=0, y=0 2) x=1, y=3 3) x=2, y=6
- (b) y좌표를 1씩 증가시키면서 선분과 교차하는 화소를 선택, y=3x
- 1) x=0, y=0 2) y=1, x=1/3 (rounding, x=0) 3) y=2, x=2/3 (x=1) 4) y=3, x=1 …..
- Q) (a)와 (b)중에 어떠한 래스터 변환이 실제 선분에 가까운가? Why?



- **Observation**

1. Line의 slope (기울기)가 1보다 크면 (앞 페이지와 같이) y좌표를 하나씩 증가시키는 것이 좋다

2. Line의 slope가 1보다 작으면 x좌표를 하나씩 증가시키는 것이 좋다

즉, line을 rasterization을 할 때에는 line의 slope를 고려해야 한다

- **Digital Differential Analyzer Algorithm (DDA algorithm)**

Digital Differential Analyzer Algorithm (DDA algorithm): Line segment를 래스터 변환하는 간단한 알고리즘

- 가정: 선분의 기울기가 1보다 작다. 즉, x를 하나씩 증가
- Line의 slope (m)= $\frac{y\text{의 증가량}(dy)}{x\text{의 증가량}(dx)} = y\text{의 변화량}$
- y의 변화량 (증가량)= m (기울기) 이다

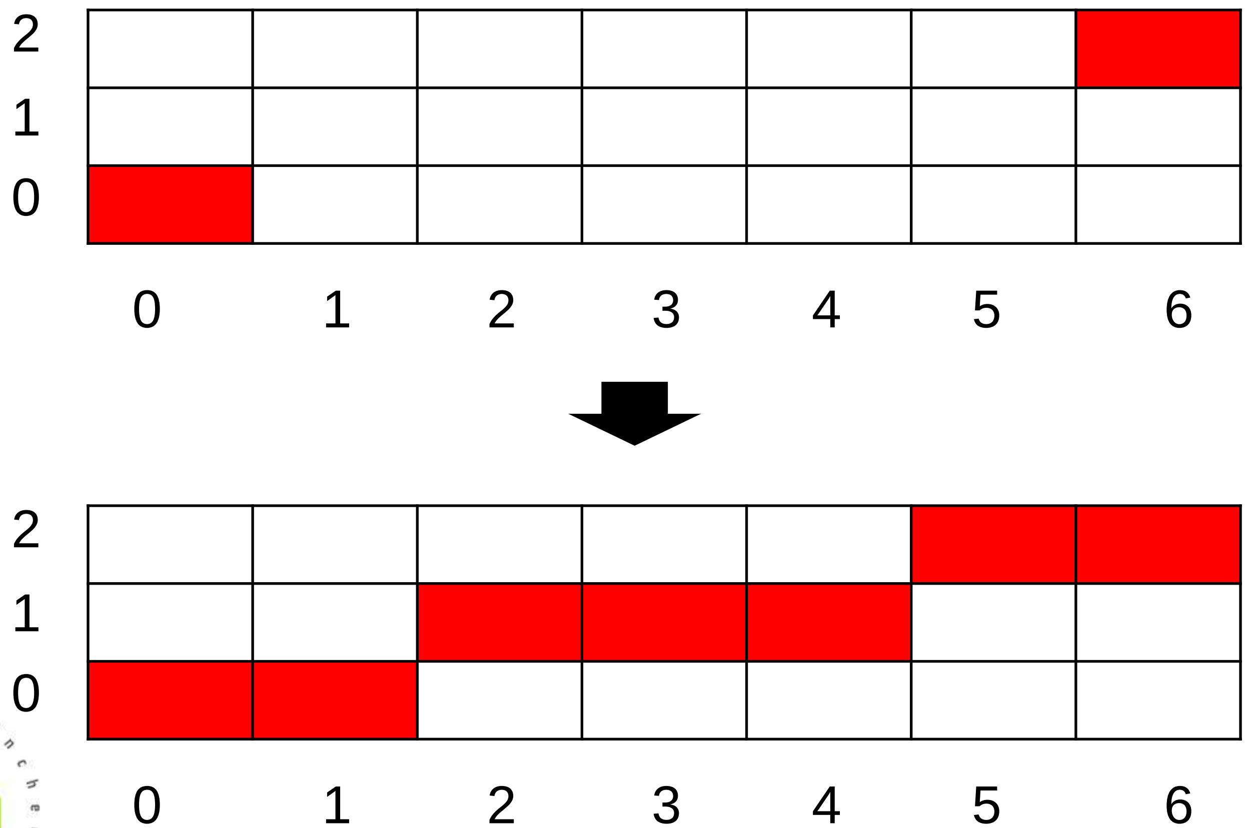
- // DDA algorithm
- // 선분: (x1,y1) - (x2, y2) 단, // x2> x1, // y2> y1 , m (기울기)<1
- void LineDraw(int x1, int y1, int x2, int y2){
-     float m, y;   int dx, dy;
-     dx = x2 - x1; //x 변화량
-     dy = y2 - y1; //y 변화량
-     m = dy / dx;   // slope (기울기)
-     y = y1;
-     for (int x = x1; x <= x2; x++) {
-         DrawPixel(x, round(y));   // rounding (반올림)
-         y += m;   // y값에 기울기 만큼 더해줌
-     }

}

- // Line rasterization using DDA algorithm
- // (x1,y1)=(0,0),   (x2,y2)=(6,2), m(slope)=2/6≈0.33

x	y	DDA rasterization
x=0	y=0	(0, 0)
x=1	y=0.33	(1, 0)
x=2	y=0.66	(2, 1)
x=3	y=1	(3, 1)
x=4	y=1.33	(4, 1)
x=5	y=1.66	(5, 2)
x=6	y=2	(6, 2)

- // DDA algorithm을 이용한 선분 래스터 변환
- // (x1,y1)=(0,0),   (x2,y2)=(6,2), m(slope)=2/6≈0.33, 총 7개의 픽셀 선택



- **https://www.dropbox.com/s/w5vd1ieul2thvof/DDA.txt?dl=0**

- 지금까지는 기울기가 1보다 작은 경우의 line rasterization을 행하는 DDA 알고리즘을 살펴보았다
- 만일, 기울기가 1보다 크면 앞의 코드를 어떻게 바뀌어야 할지 생각해 보자
- https://en.wikipedia.org/wiki/Digital_differential_analyzer_(graphics_algorithm)

인천대학교

- **DDA algorithm의 문제점**
- **1.Rounding (반올림) 연산**
  - round( ) 함수 연산을 매번 수행해야 함
  - round() 함수 실행에 걸리는 시간

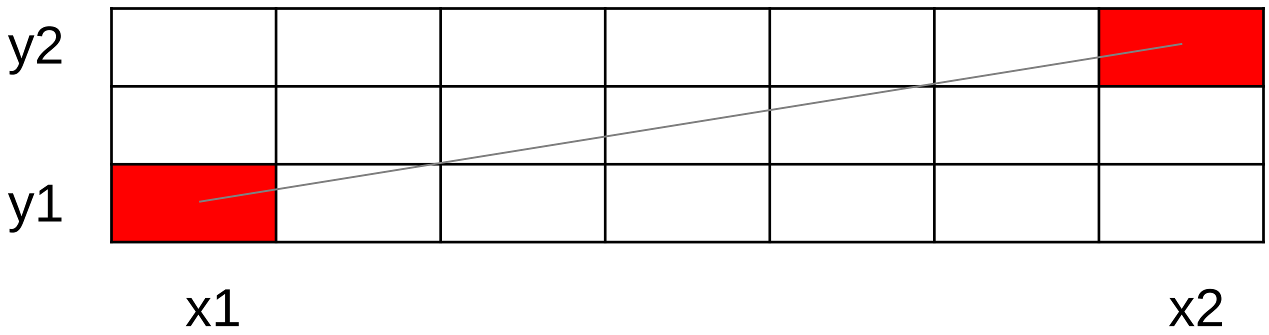
- **2.** 앞에서 기울기 **1/3**을 유효숫자로 인하여 **0.33**으로
- 근사화 하였다. 연속적인 덧셈시 오류가 누적될 수 있다

- **3.** 부동 소수점 연산은 정수 연산에 비해서 느리다

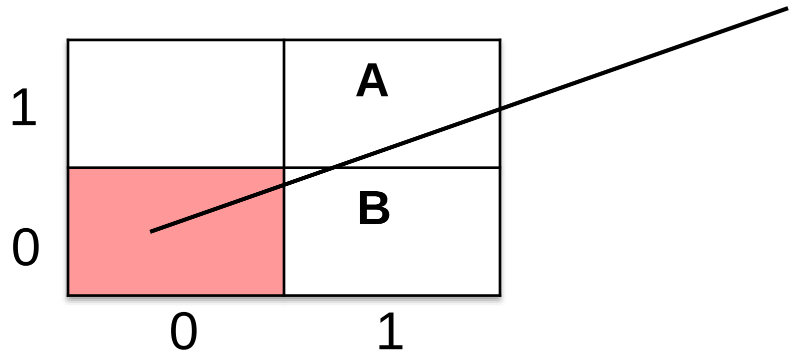
- **Bresenham Algorithm**
- **(브레스넘 알고리즘)**

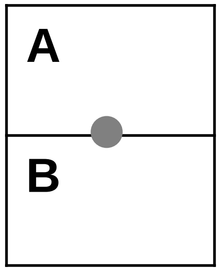
- 브레스넘 알고리즘은 DDA 알고리즘 처럼 선분을 래스터화 하는 알고리즘이다
- 브레스넘 알고리즘의 동기
- 곱셈이 나눗셈보다는 빠르다
- 1. DDA 알고리즘의 나눗셈 연산
- => 브레스넘 알고리즘에서는 곱셈연산으로 바꿈
- 정수 연산이 float 연산보다는 빠르다
- 2. DDA 알고리즘 float 연산 (예: 기울기) 및 round 연산
- => 브레스넘 알고리즘에서는 정수 연산으로 바꿈

- 가정: 선분의 양 끝점 (x1, y1), (x2, y2)가 주어져 있을 때 이 선분을 래스터 변환하려고 한다
- 편의상, x1<x2 이고 선분의 기울기는 0에서 1사이라고 가정하자
- 예:

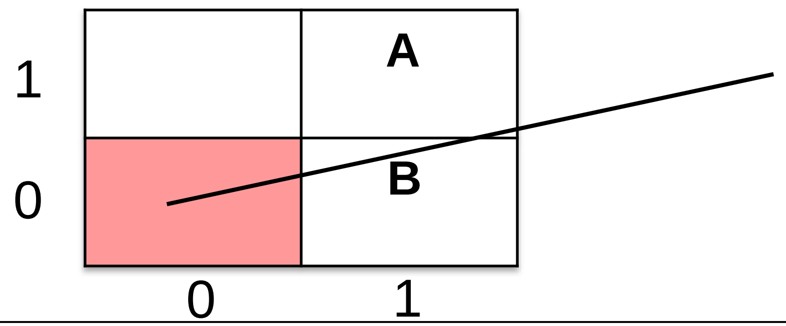


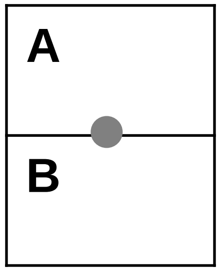
- **기울기가 [0, 1] 사이인 선분에 대하여 (0,0) pixel이 칠해져 있으면 다음 pixel을 칠할 후보는 pixel A (1, 1) 혹은 B (1,0) 이다.**
- **A, B중에 어떤 pixel을 칠하는 것이 실제 line에 더 가깝게 보일까?**
- **브레스넘 알고리즘: 다음 후보 A, B 중간 점 (1, ½)을 이용하자**
- **Case 1:**



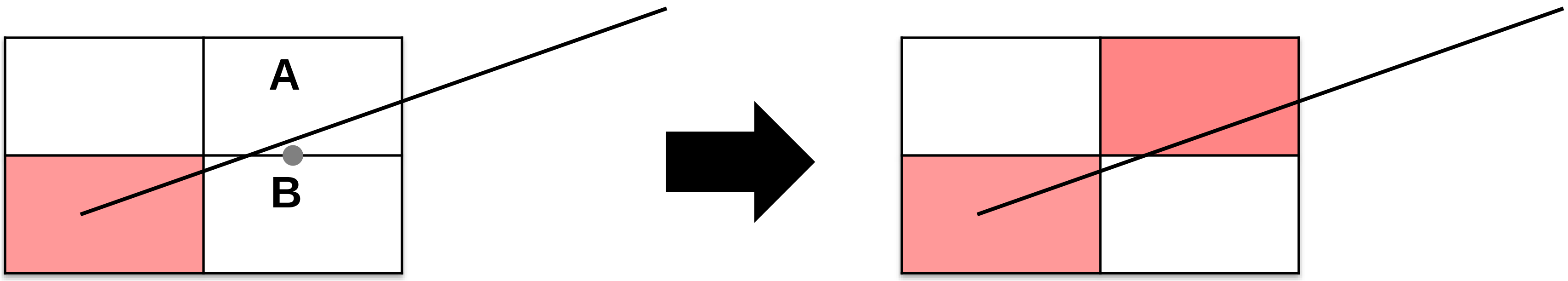


- **Case 2:**

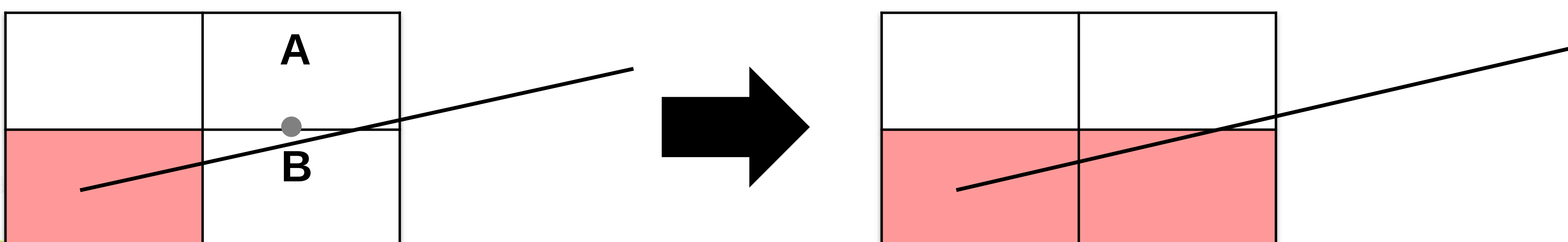




- 브레스넘 알고리즘(Bresenham Algorithm)
- Case 1: 다음 pixel 후보들의 중간점이 선분 아래에 있으면 Pixel A 칠함
-



- Case 2: 다음 pixel 후보들의 중간점이 선분 위쪽에 있으면 Pixel B 칠함

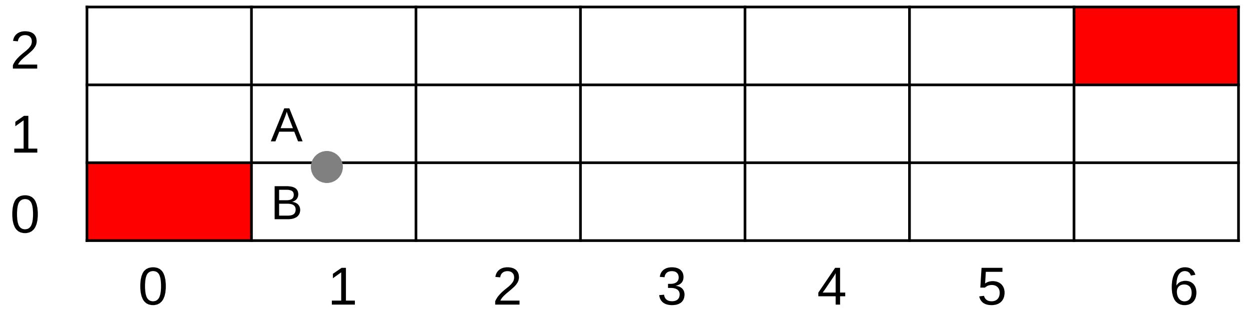


- 일반적인 직선 (선분)의 Implicit representation
- dx: x의 변화량, dy: y의 변화량 , 기울기=$\frac{dy}{dx}$
- $y = \frac{dy}{dx}x + b$
- $(dx)y = (dy)x + (dx)b$
- $f(x, y) = Ax + By + C,$ 단, $A = dy, B = -dx, C = (dx)b$
- 이런 implicit 표현의 장점은 뭘까?
- 1. 어떤 점이 이 선분 위쪽 에 있다면 $f(x, y) < 0$
- 2. 어떤 점이 이 선분 아래쪽에 있다면 $f(x, y) > 0$
- 또 다른 장점은? 정수 연산 (DDA 알고리즘과의 차이)

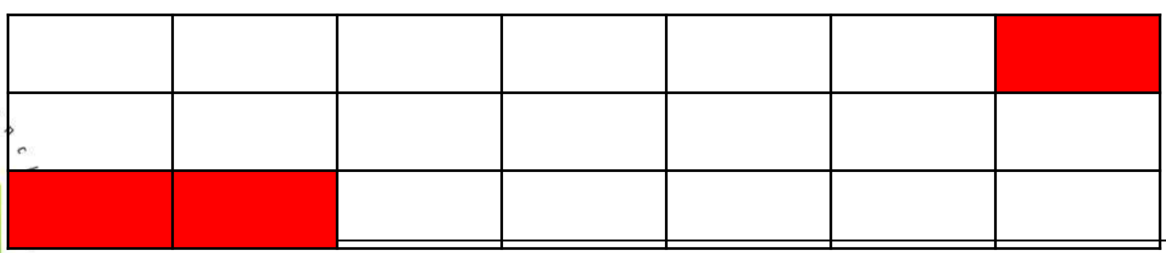
- **예: 선분의 양 끝점 (1, 1), (6, 2)일때**
- **1. 이 선분의 implicit form인 $f(x, y)$를 구해보자**
- $f(x, y) = x - 5y + 4$

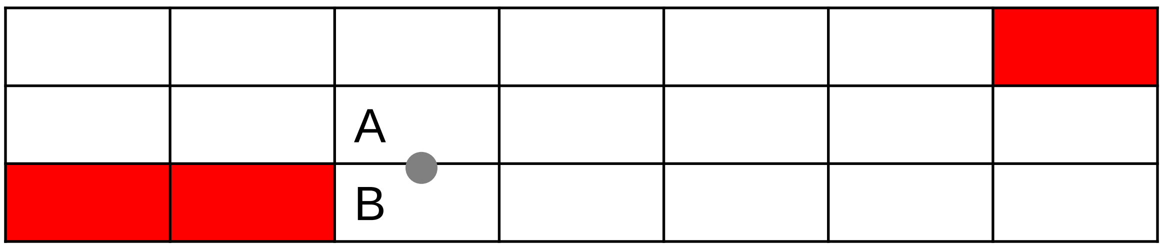
- **2. $(3, 10)$이 선분의 위쪽에 있는지 아래쪽에 있는지 $f(x, y)$의 부호로 판단해 보자**

- // 양 끝점이 주어진 선분에 대하여 브레스넘 알고리즘으로 선분 래스터 변환
- // $(x_1,y_1)=(0,0)$, $(x_2,y_2)=(6,2)$, Implicit equation $f(x, y)=2x-6y$, 선분 기울기?



- 두 후보 PIXEL (A, B)의 중점 $M=(1,1/2)$
- $f(x,y)=2x-6y$
- 중점 (1, 1/2) 대입, $f(x,y)<0$, 중점이 선분 위쪽에 있음 => 동쪽 픽셀 (B) 칠함

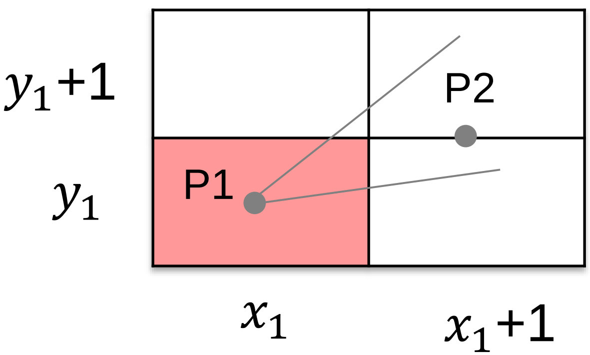


- 다음 두 후보 PIXEL (A, B)의 중점 M=(2, 0.5) 선택
- 

- f(x, y)=2x-6y
- 중점 (2, 0.5) 대입, f(x,y)>0, 중점이 선분 아래에 있음 => A (동북쪽 픽셀) 칠함
- 계속 반복한다 (x=6인 pixel까지)

- **브레스넘 알고리즘의 코드 작성**

- 직선 (선분)의 Implicit representation
- dx: x의 변화량, dy: y의 변화량 , 기울기=$\frac{dy}{dx}$, 기울기 는 0에서 1사이
- $f(x, y) = Ax + By + C = 0$, 단, $A = dy, B = -dx, C = (dx)b$ ....(1)
- P1: 최초 점 위치 (x_1 ,y_1), P2:다음 후보 픽셀들의 중간 위치 ($x_1 + 1$, y_1+1/2)



1. P1 지남, (1)에 대입

$f(x_1, y_1) = dy \cdot x_1 - dx \cdot y_1 + (dx)b = 0$...(2)

2. P2를 (1)에 대입 후 부호로, P2가 선분 위,아래인지 판별

$f\left(x_1 + 1, y_1 + \frac{1}{2}\right) = dy(x_1 + 1) - dx\left(y_1 + \frac{1}{2}\right) + (dx)b$...(3)

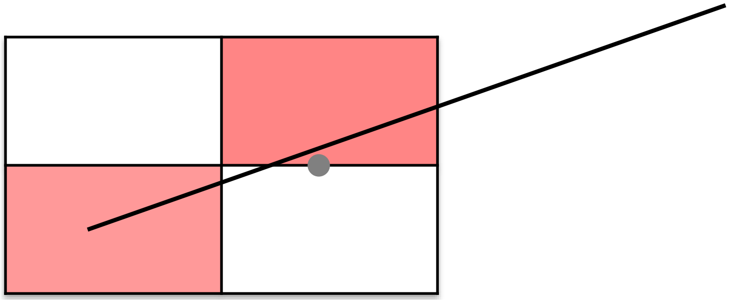
(2)와 (3)을 합치면, $dy - dx \cdot \frac{1}{2}$ 의 부호로 P2가 선분 위, 아래에 있다 판별

- $dy - dx \cdot \frac{1}{2}$ 의 부호로 판단가능
- 어차피 부호로 판단하므로, 위의 식에 2배 (float 계산을 피하려고)
- 이를 결정 변수 (decision variable, D)라고 한다
- $D = 2 \cdot dy - dx$

- D값 계산

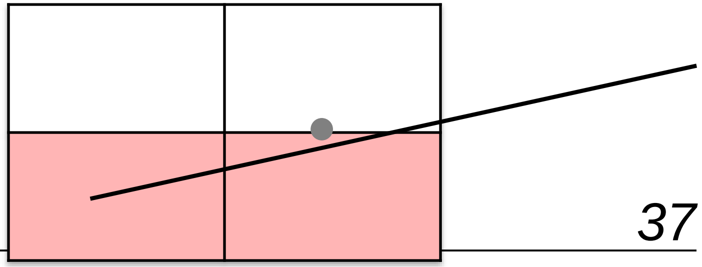
if D > 0 // 중점이 선분 아래 있다

동북쪽 픽셀 선택



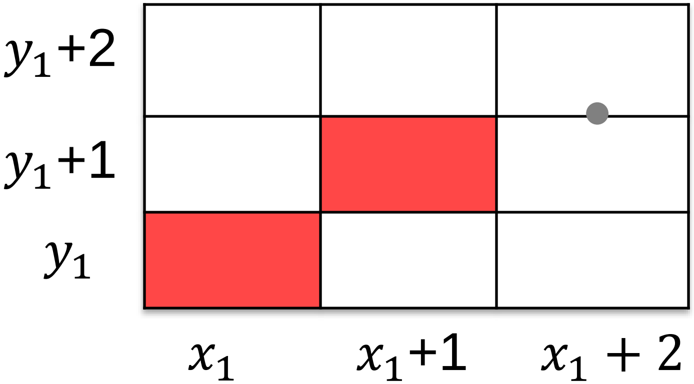
else // 중점이 선분 위에 있다

동쪽 픽셀 선택



- 다음 후보 픽셀들의 위치는 계속 변한다. 따라서, 결정 변수 D 값도 update 해주어야 함

Case 1: 최초 위치 (x_1 ,y_1)의 동북쪽 픽셀 선택 시, 다음 후보픽셀들의 중점 (x_1+2 ,$y_1 + 3/2$)

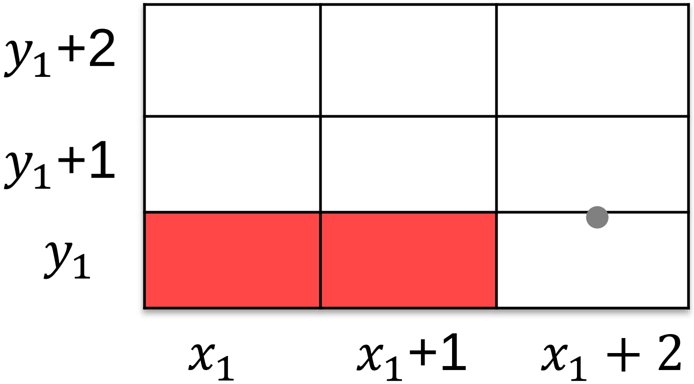


- 1. (x_1 ,y_1) 지남, $f(x, y) = dy \cdot x_1 - dx \cdot y_1 + (dx)b = 0$
- 2. $f(x_1$+2 ,$y_1 + 3/2) = dy(x_1 + 2) - dx\left(y_1 + \frac{3}{2}\right) + (dx)b$ 의 부호로 판별
- 1을 2에 대입하면, $2dy - \frac{3}{2}dx$ 부호로 판별, 최초: $dy - \frac{1}{2}dx$ 의 부호로 판별
- 차이 =$dy - dx$, D값 update: $incNE = (2 * dy - 2 * dx)$ <= 차이에 2배 해줌

인천대학교

- 다음 후보 픽셀들의 위치는 계속 변하므로 결정 변수 값도 update 해주어야 함

Case 2: 최초 위치 (x_1 ,y_1)의 동쪽 픽셀 선택 시, 다음 후보픽셀들의 중점 (x_1+2 ,$y_1+1/2$)



- **1. (x_1 ,y_1) 지남, $f(x,y) = dy \cdot x_1 - dx \cdot y_1 + (dx)b = 0$**
- **2. $f(x,y) = dy(x_1+2) - dx\left(y_1 + \frac{1}{2}\right) + (dx)b$ 의 부호로 판별**
- **1을 2에 대입하면, $f(x,y) = 2dy - \frac{1}{2}dx$ 부호로 판별, 최초: $dy - \frac{1}{2}dx$ 부호로 판별**
- **차이 =dy, D값 업데이트: $incE = (2 * dy)$ <= 차이에 2배 해줌**

- 브레스넘 알고리즘

1. 처음 화소 위치에서 $f(x, y) = D = 2 \cdot dy - dx$ 계산한다

2. if   D > 0   // 중점이 선분 아래 있다

    동북쪽 픽셀 선택

    D=D+incNE   // D값 업데이트

   else   // 중점이 선분 위에 있다

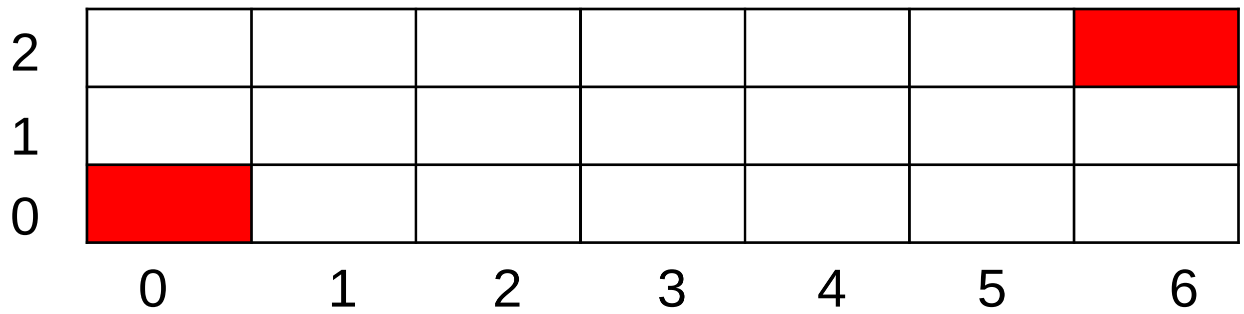
    동쪽 픽셀 선택

    D=D+incE   // D값 업데이트

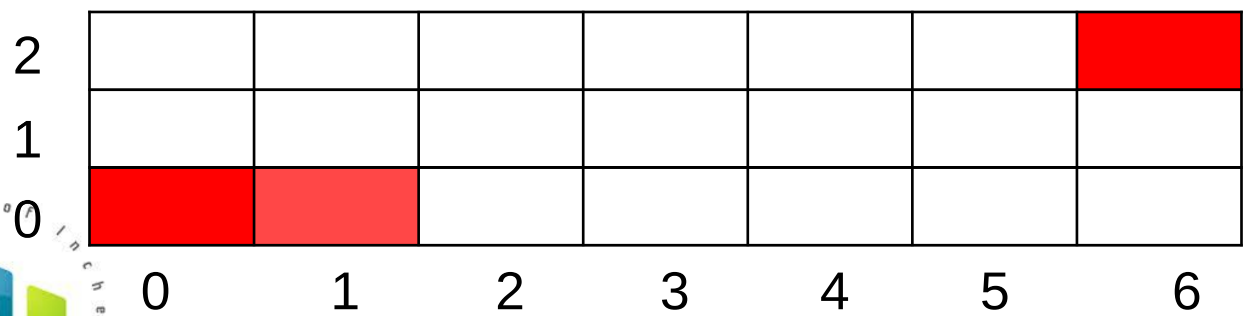
- // 브레스넘 알고리즘 코드
- void MidpointLine(int x1, int y1, int x2, int y2){
-     int dx, dy, incrE, incrNE, D, x, y;
-     dx = x2 - x1; dy = y2 - y1;
-     D = 2*dy - dx;   //결정변수 값을 초기화
-     incrE = 2*dy;   //동쪽 화소 선택시 증가분
-     incrNE = 2*dy - 2*dx;   //동북쪽 화소 선택시 증가분
-     x = x1;   y = y1;   //첫 화소
-     DrawPixel(x, y)   //첫 화소 그리기
-     while (x < x2) {
-         if (D <= 0) {   //결정변수가 음수. 동쪽화소 선택
-             D += incrE;   //결정변수 증가
-             x++;   //다음 화소는 동쪽
-         }
-         else{   //결정변수가 양수. 동북쪽 화소 선택
-             D += incrNE;   //결정변수 증가
-             x++; y++;   //다음 화소는 동북쪽
-         }
-         DrawPixel (x, y);   //화소 그리기
-     }
- }

- 예: 앞의 브레스넘 알고리즘의 코드를 이용하여

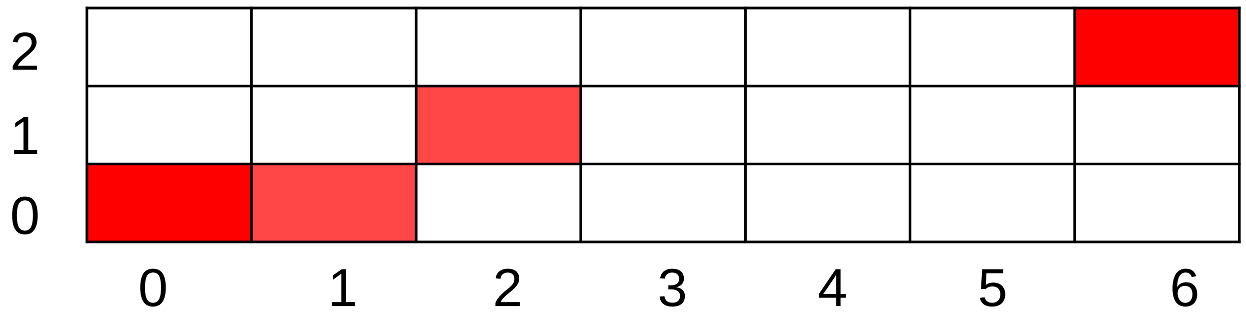
(x1,y1)=(0,0),   (x2,y2)=(6,2) 의 래스터 변환을 수행하여 보자



1. dx=6, dy=2, D=2*dy-dx=-2<0 (동쪽), incrE=2*dy=4, D=D+incrE=2



- **2. D=2,   D>0 (동북쪽 화소선택), incrNE=2*dy-2*dx=-8, D=D+incrNE=-6**



- **계속 반복 언제까지**
- **x=x2 (즉, x=6일때 까지)**

- 브레스넘 알고리즘의 장점
- 1. 선분의 implicit 표현을 사용하여 정수 사이의 연산으로만 되어 있다
- 정수 연산이 부동 소수점 연산보다 빠르다
- 2. round 연산이 없다