Билеты по матану

Автор1, ..., АвторN

19 июня 2020 г.

Содержание

1. Интегральное исчисление 1

1.1 Билет 1: ! Дробление, ранг, оснащение, сумма Римана. 1

1.2 Билет 2: Оценка разности интеграла и интегральной суммы. Интеграл как предел интегральных сумм. Интегрируемость по Риману. 2

1.3 Билет 3: Эквивалентная для суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} k^p$. Формула трапеций. 3

1.4 Билет 4: Формула Эйлера-Маклорена (для второй производной). 4

1.5 Билет 5: NAME 5

1.6 Билет 6: NAME 5

1.7 Билет 7: NAME 5

1.8 Билет 8: NAME 5

1.9 Билет 9: Несобственные интегралы от неотрицательных функций. Признак сравнения. Следствия. 5

1.10 Билет 10: Абсолютная сходимость. Признак Дирихле. 7

1.11 Билет 11: NAME 7

2. Метрические и нормированные пространства 8

2.1 Билет 12: Метрические пространства. Примеры. Шары в метрических пространствах. 8

2.2 Билет 13: Открытые множества: определение и свойства. 9

2.3 Билет 14: Внутренние точки и внутренность множества. Свойства. 10

2.4 Билет 15: Замкнутые множества: определение и свойства. Замыкание множества, связь со внутренностью. 11

2.5 Билет 16: Свойства замыкания. Предельные точки. Связь с замыканием множества. 13

2.6 Билет 17: Индуцированная метрика. Открытые и замкнутые множества в пространстве и в подпространстве. 16

2.7 Билет 18: Скалярное произведение и норма. Свойства и примеры. Неравенство Коши–Буняковского. 17

2.8 Билет 19: Предел последовательности в метрическом пространстве. Определение и основные свойства. 20

2.9 Билет 20: Арифметические свойства пределов последовательности векторов. Покоординатная сходимость. 21

2.10 Билет 21: Фундаментальные последовательности. Свойства. Полнота. Полнота $\mathbb{R}^d$ 23

2.11 Билет 22: Покрытия. Компактность. Компактность в пространстве и в подпространстве. Простейшие свойства компактных множеств. 24

2.12 Билет 23: Теорема о пересечении семейства компак- тов. Следствие о вложенных компактах. 25

2.13 Билет 24: Секвенциальная компактность. Компактность и предельные точки. Секвенциальная компактность компакта. 26

2.14 Билет 25: Лемма Лебега. Число Лебега. Связь между компактностью и секвенциальной компактностью. 27

2.15 Билет 26: ε-сети и вполне ограниченность. Свойства. Связь с компактностью (теорема Хаусдорфа). Теорема о характеристике компактов в $\mathbb{R}^d$. Теорема Больцано-Вейерштрасса. 27

2.16 Билет 27: NAME 29

2.17 Билет 28: NAME 29

2.18 Билет 29: NAME 29

2.19 Билет 30: NAME 29

2.20 Билет 31: NAME 29

2.21 Билет 32: NAME 29

2.22 Билет 33: NAME 29

2.23 Билет 34: NAME 29

2.24 Билет 35: NAME 29

2.25 Билет 36: NAME 29

2.26 Билет 37: NAME 29

2.27 Билет 38: NAME 29

2.28 Билет 39: NAME 29

3. Числовые и функциональные ряды **30**

3.1 Билет 40: NAME 30

3.2 Билет 41: NAME 30

3.3 Билет 42: NAME 30

3.4 Билет 43: Признак Коши (с $\overline{\lim}$). Примеры. 30

3.5 Билет 44: Признак Даламбера. Примеры. Связь между признаками Коши и Даламбера. 31

3.6 Билет 45: NAME 33

3.7 Билет 46: NAME 33

3.8 Билет 47: NAME 33

3.9 Билет 48: NAME 33

3.10 Билет 49: NAME 33

3.11 Билет 50: NAME 33

3.12 Билет 51: NAME . . . 33
3.13 Билет 52: NAME . . . 33
3.14 Билет 53: NAME . . . 33
3.15 Билет 54: NAME . . . 33
3.16 Билет 55: Критерий Коши для равномерной сходимости последовательностей. . . 33
3.17 Билет 56: Пространство ℓ^∞ и его полнота . . . 34
3.18 Билет 57: NAME . . . 35
3.19 Билет 58: NAME . . . 35
3.20 Билет 59: NAME . . . 35
3.21 Билет 60: NAME . . . 35
3.22 Билет 61: NAME . . . 35
3.23 Билет 62: NAME . . . 35
3.24 Билет 63: NAME . . . 35
3.25 Билет 64: NAME . . . 35
3.26 Билет 65: NAME . . . 35
3.27 Билет 66: NAME . . . 35
3.28 Билет 67: Равномерная сходимость степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда. Теорема Абеля. . . . 35
3.29 Билет 68: Почленное интегрирование суммы степенного ряда. . . . 36
3.30 Билет 69: Комплексная диффернцируемость. Дифференцирование степенного ряда. 37
3.31 Билет 70: Формула для коэффициентов разложения в ряд аналитической функции. Несовпадение классов бесконечно дифференцируемых и аналитических функций. . . . 38
3.32 Билет 71: NAME . . . 39
3.33 Билет 72: NAME . . . 39

4. Функции нескольких переменных 40

4.1 Билет 73: NAME . . . 40
4.2 Билет 74: NAME . . . 40
4.3 Билет 75: NAME . . . 40
4.4 Билет 76: NAME . . . 40
4.5 Билет 77: NAME . . . 40
4.6 Билет 78: NAME . . . 40
4.7 Билет 79: Теорема Лагранжа для векторнозначных функций. . . . 40
4.8 Билет 80: Связь частных производных и дифференцируемости. . . . 40
4.9 Билет 81: NAME . . . 42
4.10 Билет 82: NAME . . . 42
4.11 Билет 83: NAME . . . 42
4.12 Билет 84: NAME . . . 42
4.13 Билет 85: NAME . . . 42

4.14 Билет 86: NAME 42
4.15 Билет 87: Теорема Банаха о сжатии. Следствие. Метод касательных для решения уравнения 42
4.16 Билет 88: Оценка на норму разности значений дифференцируемого отображения. Оценка на норму обратного отображения. Теорема об обратимости отображений, близких к обратимым 44
4.17 Билет 89: NAME 45
4.18 Билет 90: NAME 45
4.19 Билет 91: NAME 45
4.20 Билет 92: NAME 45
4.21 Билет 93: NAME 45
4.22 Билет 94: NAME 45
4.23 Билет 95: NAME 45
4.24 Билет 96: NAME 45
4.25 Билет 97: NAME 45
4.26 Билет 98: NAME 45

5. Теория меры **46**
5.1 Билет 99: NAME 46
5.2 Билет 100: NAME 46
5.3 Билет 101: NAME 46
5.4 Билет 102: NAME 46

1. Интегральное исчисление

А разве можно всё упростить, всё обобщить? И вообще, разве по чужому желанию можно обобщать и упрощать?

Джером Дэвид Сэлинджер, "Над пропастью во ржи"

Привет, Путник! Я рад сопровождать тебя в начале твоего долгого и тяжёлого пути к (не) отчислению. Запасись терпениеим. А лучше корвалолом.

1.1. Билет 1: ! Дробление, ранг, оснащение, сумма Римана.

***Определение* 1.1.**

Дробление отрезка $[a, b]$ – это набор точек τ, такой что

$\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n} : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$

Ранг (мелкость) дробления – $\max\limits_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) = |\tau|$

Оснащение – набор точек, такой что

$\{\xi_k\}_{k=0}^{n-1} : \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$

Пара (τ, ξ) – оснащённое дробление

***Определение* 1.2.**

Сумма Римана (интегральная сумма)

$f : [a, b] \mapsto R$ и оснащённое дробление (τ, ξ)

$S(f, \tau, \xi) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$

Какой короткий и классный билет :)

Ну, удачи...

1.2. Билет 2: Оценка разности интеграла и интегральной суммы. Интеграл как предел интегральных сумм. Интегрируемость по Риману.

Теорема 1.1.

$|S(f,\tau,\xi) - \int\limits_a^b f| \leqslant (b-a)\omega_f(|\tau|)$

(ω_f – модуль непрерывности)

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\Delta &:= S(f,\tau,\xi) - \int\limits_a^b f \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) - \int\limits_a^b f \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) - \sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) - \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(\xi_k) - \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (f(\xi_k) - f(t))\, dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\Delta| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (f(\xi_k) - f(t))\, dt| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} |f(\xi_k) - f(t)|\, dt \qquad \text{по определению } \omega_f : |\xi_k - t| < |\tau| \Rightarrow |f(\xi_k) - f(t)| < |\omega_f(|\tau|)| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \omega_f(|\tau|)\, dt \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \omega_f(|\tau|)(x_{k+1}-x_k) \\
&\leqslant \omega_f(|\tau|)(b-a)
\end{aligned}$$

□

Следствие.

$f \in C([a,b])$, тогда

Для любой последовательности оснащённых дроблений $(\tau,\xi)_n$, такой что $|\tau_n| \to 0$, верно:

$\lim S(f,\tau_n,\xi_n) = \int\limits_a^b f$

Доказательство.

$f \in C([a,b]) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \omega_f(x) = 0 \Rightarrow \lim \omega_f(|\tau_n|)(b-a) = 0$

□

***Определение* 1.3.**

Функция интегрируема по Риману, если:

Для любой последовательности оснащённых дроблений $(\tau,\xi)_n$, такой что $|\tau_n| \to 0$, верно:

$\lim S(f,\tau_n,\xi_n) = I$

И для всех последовательностей I – одинаковый

I – интеграл Римана

1.3. Билет 3: Эквивалентная для суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} k^p$. Формула трапеций.

Пример.

$S_n(p) = 1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p$

Ограничим $S_n(p)$ сверху: $S_n(p) < n \cdot n^p = n^{p+1}$

Чтобы ограничить снизу, возьмем только вторую половину слагаемых. Заметим, что каждое слагаемое $\geq \frac{n}{2}$. Получаем: $S_n(p) > \frac{n}{2}(\frac{n}{2})^p = \frac{n^{1+p}}{2^{1+p}}$

$\frac{n^{1+p}}{2^{1+p}} < S_n(p) < n^{p+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n(p)}{n^{p+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n}(\frac{k}{n})^p = \int\limits_0^1 f(t)\,dt$

$f : [0,1] \to \mathbb{R}\ \ f(t) = t^p$

$\xi_k = \frac{k}{n}$

Мелкость дробления $\frac{1}{n} \to 0$.

$\implies \frac{S_n(p)}{n^{p+1}} \to \int\limits_0^1 t^p\,dt = \frac{1}{p+1} \implies S_n(p) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}$

При $p = -1$ считаем, что $\frac{1}{p+1} = \infty$.

Лемма.

$f \in C^2[a,b]$. Тогда:

$\int\limits_\alpha^\beta f(t)\,dt - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta - \alpha) = -\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)\,dt$

Доказательство.

$\gamma := \frac{\alpha+\beta}{2}$

$\int\limits_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int\limits_\alpha^\beta f(t)(t-\gamma)'\,dt = f(t)(t-\gamma)\Big|_\alpha^\beta - \int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma)\,dt = f(\beta)(\beta-\gamma) - f(\alpha)(\alpha-\gamma) - \int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma)\,dt = \frac{f(\beta)+f(\alpha)}{2}(\beta-\alpha) - \int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t - \frac{\alpha+\beta}{2})\,dt$

$((t-\alpha)(\beta-t))' = \alpha + \beta - 2t = -2(t-\gamma)$

$\Delta = -\int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma)\,dt = -\int\limits_\alpha^\beta f'(t)(-\frac{1}{2})((t-\alpha)(\beta-t))'\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f'(t)((t-\alpha)(\beta-t))'\,dt =$

$= \frac{1}{2}f'(t)(t-\alpha)(\beta-t)\Big|_\alpha^\beta - \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)\,dt = -\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)\,dt$ □

Теорема 1.2 (оценка погрешности в ф-ле трапеций)**.**

$f \in C^2[a,b]$ и $\tau-$ дробление. Тогда:

$\left|\int\limits_a^b f - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})\right| \leqslant \frac{|\tau|^2}{8}\int\limits_a^b |f''|$

В частности, если дробление на равные отрезки

$$\left|\int\limits_a^b f - \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(x_n)}{2}\right)\right| S \leqslant \frac{(b-a)^2}{8n^2}\int\limits_a^b |f''|$$

Доказательство.

$$\Delta := \int\limits_a^b f - \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}\left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f - \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t)(t-x_{k-1})(x_k-t)\,dt$$

$$|t-x_{k-1}|\,|x_k-t| \leqslant \frac{(x_k-x_{k-1})^2}{4} \leqslant \frac{|\tau|^2}{4}$$

$$|\Delta| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)|\,(t-x_{k-1})(x_k-t)\,dt \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)|\,\frac{|\tau|^2}{4}\,dt = \frac{|\tau|^2}{8}\int\limits_a^b |f''|$$

□

1.4. Билет 4: Формула Эйлера-Маклорена (для второй производной).

Теорема 1.3. (Формула Эйлера-Маклорена для второй производной)

$f \in C^2[m,n]$ $m,n \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int\limits_m^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_m^n f''(t)\cdot\{t\}(1-\{t\})\,dt$$

Доказательство.

Подставим в формулу $m = k, n = k+1$. Получим:

$$f(k) + f(k+1) = \frac{f(k)+f(k+1)}{2} + \int\limits_k^{k+1} f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_k^{k+1} f''(t)\cdot\{t\}(1-\{t\})\,dt$$

Выразим отсюда $f(k)$:

$$f(k) = \int\limits_k^{k+1} f(t)\,dt + \frac{f(k)-f(k+1)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_k^{k+1} f''(t)\cdot\{t\}(1-\{t\})\,dt$$

Просуммируем от m до $n-1$.

$$\sum_{k=m}^{n-1} f(k) = \frac{f(m)-f(n)}{2} + \int\limits_m^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_m^n f''(t)\cdot\{t\}(1-\{t\})\,dt$$

$$f(n) + \sum_{k=m}^{n-1} f(k) = f(n) + \frac{f(m)-f(n)}{2} + \int\limits_m^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_m^n f''(t)\cdot\{t\}(1-\{t\})\,dt =$$

$$= \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int\limits_m^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_m^n f''(t)\cdot\{t\}(1-\{t\})\,dt$$

Т.е. достаточно лишь проверить формулу для $f(k) = ...$

Заметим, что выражение не зависит от k $(f(t+k) = g(t)) \implies$ можно "сдвинуть". Будем считать, что $k = 0$. Тогда $\{t\} = t$.

$$f(0) = \int\limits_0^1 f(t)\,dt + \frac{f(0)-f(1)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f''(t)\cdot t(1-t)\,dt$$

$$\int\limits_0^1 f(t)\,dt - \frac{f(0)+f(1)}{2} = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f''(t-0)\cdot t(1-t)\,dt$$

Верно по лемме из билета 3: $\alpha = 0, \beta = 1$. □

1.5. Билет 5: NAME

1.6. Билет 6: NAME

1.7. Билет 7: NAME

1.8. Билет 8: NAME

1.9. Билет 9: Несобственные интегралы от неотрицательных функций. Признак сравнения. Следствия.

Теорема 1.4.

$f \geqslant 0 \;\; f \in C[a, b)$

Тогда сходимость $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ равносильна ограниченности сверху первообразной F.

Доказательство.

$F(y) := \int\limits_a^y f$

$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{c \to b-} F(c) - F(a)$, $F(a) = 0$ (из утверждения выше)

$F(z) = F(y) + \int\limits_y^z f \geqslant F(y)$, где $\int\limits_y^z f \geqslant 0$ при $y < z \implies F(y)$ монотонно возрастает.

Итого, $F(y)$ имеет предел и монотонно возрастает. Для монотонно возрастающих функция существование предела равносильно ограниченности сверху

$\square$

Следствие.

$f, g \in C[a, b) \;\; 0 \leqslant f \leqslant g$

1. Если $\int\limits_a^b g$ сходится, то $\int\limits_a^b f$ сходится.
2. Если $\int\limits_a^b f$ расходится, то $\int\limits_a^b g$ расходится.

Доказательство.

$G(y) := \int\limits_a^y g, \;\; F(y) := \int\limits_a^y f \implies F \leqslant G$

1. $\int\limits_a^b g$ сходится $\implies$ G ограничена сверху $\implies$ F ограничена сверху $\implies \int\limits_a^b f$ сходится.
2. От противного. Пусть $\int\limits_a^b g$ сходится, тогда и $\int\limits_a^b f$ сходится по первому пункту. Противоречие.

$\square$

Замечание. 1. Неравенству $f \leqslant g$ достаточно выполнения для аргументов, близких к b.

Доказательство.
$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$
Для второго слагаемого $f \leqslant g$, используем следствие. $\square$

2. Вместо $f \leqslant g$ можно использовать и $f = O(g)$

Доказательство.
$\int\limits_a^b Cg = C\int\limits_a^b g$ – сходится. $\square$

3. Если $f \geqslant 0$, $f \in C[a, +\infty)$ и $f = O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}})$ при $\varepsilon > 0$, то $\int\limits_a^{+\infty} f$ сходится.

Доказательство.
$f \in O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}) \implies f \leqslant M \cdot \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} =: g$

Надо доказать, что $\int\limits_a^{+\infty} g$ сходится.

$\int\limits_a^{+\infty} M \cdot \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} = M \int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$ – сходится. $\square$

Следствие.
$f, g \geqslant 0 \;\; f, g \in C[a, b)$ и $f \sim g$ при $x \to b-$

Тогда $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ ведут себя одинаково.

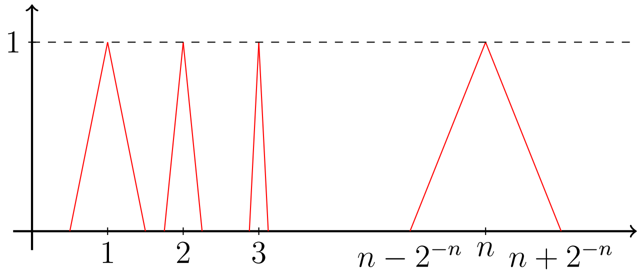
Доказательство.
$f \sim g \implies$ найдется такое c, что $\frac{g}{2} \leqslant f \leqslant 2g$ при $x > c$

Если $\int\limits_a^b g$ сходится, то $f \leqslant 2g \implies \int\limits_a^b f$ сходится.

Если $\int\limits_a^b f$ сходится, то $g \leqslant 2f \implies \int\limits_a^b g$ сходится. $\square$

Замечание.
$f \geqslant 0 \;\; f \in C[a, +\infty)$ и $\int_a^{+\infty} f$ сходится.
Это НЕ значит $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$

Дана функция, изображенная на графике (спасибо за это Герману). Площади треугольников убывают: $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{4}$, $S_3 = \frac{1}{8}$, …, $S_n = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2^{-n} = \frac{1}{2^n}$



1.10. Билет 10: Абсолютная сходимость. Признак Дирихле.

***Определение* 1.4** (Абсолютная сходимость.)**.**

$f \in C[a, b)$

$\int\limits_a^b f$ абсолютно сходится, если $\int\limits_a^b |f|$ сходится.

Теорема 1.5.

Если $\int\limits_a^b f$ абсолютно сходится, то $\int\limits_a^b f$ сходится.

Доказательство.

$0 \leqslant f_\pm \leqslant |f|$

$\int\limits_a^b f$ абсолютно сходится $\implies \int\limits_a^b |f|$ сходится $\implies \int\limits_a^b f_\pm$ сходится

$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b (f_+ - f_-) = \int\limits_a^b f_+ - \int\limits_a^b f_- \implies \int\limits_a^b f$ сходится.

□

Теорема 1.6 (признак Дирихле)**.**

$f, g \in C[a, +\infty)$

1. $\exists M: \ |\int\limits_a^c f| \leqslant M$ при всех $c > a$.

2. g – монотонная функция.

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} fg$ сходится.

Доказательство.

Лишь для $g \in C^1[a, +\infty)$.

Пусть $F(y) := \int\limits_a^y f$

По условию $|F| \leqslant M$

$\int\limits_a^c fg = \int\limits_a^c F'g = Fg|_a^c - \int\limits_a^c Fg'$

Надо доказать, что существует предел при $c \to +\infty$

Распишем первое слагаемое как: $F(c)g(c) - F(a)g(a)$. Тогда $F(c)g(c) \to 0$ при $c \to +\infty$, так как это произведение бесконечно малой на ограниченную.

Надо доказать, что $\int\limits_a^c Fg'$ сходится. Докажем, что он абсолютно сходится, то есть, что $\int\limits_a^c |F| \cdot |g'|$ сходится.

$\int\limits_a^c |F| \cdot |g'| \leqslant M \int\limits_a^c |g'| = M |\int\limits_a^c g'| = M |\ g|_a^c\ | = M|g(c) - g(a)| \leqslant M|g(a)| \implies \int\limits_a^{+\infty} |F'g|$ сходится.

□

1.11. Билет 11: NAME

2. Метрические и нормированные пространства

2.1. Билет 12: Метрические пространства. Примеры. Шары в метрических пространствах.

***Определение* 2.1.**

Метрическое пространства - пара $\langle X, \rho \rangle$, где X - множество, $\rho : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ - метрика, ρ обладает следующими свойствами:

1. $\rho(x, y) \geqslant 0$, и $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника, $\triangle$)

Пример.

Обычная метрика на $\mathbb{R}$: $\langle \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y| \rangle$.

Пример.

«Метрика лентяя» на произвольном множестве: $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$

Пример.

Обычная метрика на $\mathbb{R}^2$ - длина отрезка: $\rho(\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Пример.

Множество - точки на поверхности сферы, метрика - кратчайшая дуга межту точками.

Пример.

Манхэттанская метрика на $\mathbb{R}^2$: $\rho(\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

Пример.

Французкая железнодорожная метрка: Есть центральный объект, от него есть несколько «лучей».

Если A и B на одном луче, то $\rho(A, B) = AB$

Если на разных: $\rho(A, B) = AP + PB$, где P - центральный объект.

Доказательство.

При условии что расстояния между объектами на одном луче являются метрикой, докажем что ФЖМ - метрика:

Если A и B находятся на одном луче, всё тривиально следует из того, что расстояние на луче - метрика.

Пусть A, B - на разных лучах $\implies A \neq B$, $A, B \neq P$.

$$\rho(A, B) = AP + PB > 0 \impliedby AP, PB > 0.$$
$$\rho(A, B) = AP + PB = PB + AP = BP + PA = \rho(B, A).$$

Пусть C лежит на одной ветке с A:

$$\rho(A,C)+\rho(C,B)=AC+(CP+PB)=(AC+CP)+PB\geqslant AP+PB=\rho(A,B).$$

Пусть C лежит на собственной ветке:

$$\rho(A,C)+\rho(C,B)=(AP+PC)+(CP+PB)\geqslant AP+PB=\rho(A,B).$$ □

***Определение* 2.2.**

Пусть $\langle X,\rho\rangle$ - метрическое пространство.

Открытым шаром радиуса $r\in\mathbb{R}_{>0}$ с центром в $a\in X$ называется $B_r(a)=\{x\in X\mid\rho(a,x)<r\}$.

Замкнутым шаром радиуса $r\in\mathbb{R}_{>0}$ с центром в $a\in X$ называется $\overline{B}_r(a)=\{x\in X\mid\rho(a,x)\leqslant r\}$.

Свойства.

$B_{r_1}(a)\cap B_{r_2}(a)=B_{\min\{r_1,r_2\}}(a)$

Если $a\neq b$, то $\exists r>0\quad B_r(a)\cap B_r(b)=\varnothing$.

Доказательство.

Возьмём $r=\frac{\rho(a,b)}{2}$.

Пусть $x\in B_r(a)\cap B_r(b)$.

Тогда $\rho(a,x)<\frac{\rho(a,b)}{2}$ и $\rho(x,b)<\frac{\rho(a,b)}{2}$.

Но тогда $\rho(a,x)+\rho(x,b)<\rho(a,b)$, противоречие с $\triangle$. □

Аналогичная пара свойств есть и у $\overline{B}$.

2.2. Билет 13: Открытые множества: определение и свойства.

***Определение* 2.3.**

Пусть $\langle X,\rho\rangle$ - метрическое пространство, $A\subset X$.

Точка $a\in A$ называется внутренней если $\exists r>0\quad B_r(a)\subset A$.

Множество внутренних точек называется внутренностью множества, и обозначается $\operatorname{Int}A$.

***Определение* 2.4.**

Пусть $\langle X,\rho\rangle$ - метрическое пространство, $A\subset X$.

A называется открытым, если все его точки внутренние.

Свойства.

Пусть $\langle X,\rho\rangle$ - метрическое пространство.

1. $\varnothing$, X - открытые множества.

2. Объединение любого количества открытых множеств открыто

   Доказательство.

   Пусть $\forall\alpha\in I\quad A_\alpha$ - открытое множество. $A:=\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$. Возьмём точку a, $\exists\beta\in I\quad a\in A_\beta$.

   Так-как A_β открытое, $\exists r>0\quad B_r(a)\subset A_\beta\subset A$. □

3. Пересечение конечного количества открытых множеств открыто

   Доказательство.
   Пусть $I = [1; n]$, $\forall k \in I \quad a \in A_k$, A_k - открытое.

   Тогда $\forall k \in I \quad \exists r_k > 0 \quad B_{r_k}(a) \subset A_k$.

   Пусть $r = \min\limits_k r_k > 0$.

   Тогда $\forall k \in I \quad B_r(a) \subset B_{r_k}(a) \subset A_k \implies B_r(a) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$. □

4. $\forall a \in X \quad \forall r \in \mathbb{R} \quad B_r(a)$ - открытое множество.

   Доказательство.
   Пусть $x \in B_r(a)$, $\tilde{r} = r - \rho(x, a)$.

   Покажем что $B_{\tilde{r}}(x) \subset B_r(a)$:

$$\begin{aligned} y \in B_{\tilde{r}}(x) &\implies \rho(y, x) < \tilde{r} \\ &\implies \rho(y, x) < r - \rho(x, a) \\ &\implies \rho(y, x) + \rho(x, a) < r \\ &\overset{\triangle}{\implies} \rho(y, a) < r \\ &\implies y \in B_r(a) \end{aligned}$$
□

2.3. Билет 14: Внутренние точки и внутренность множества. Свойства.

***Определение* 2.5** (повтор)**.**
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

Точка $a \in A$ называется внутренней если $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset A$.

Множество внутренних точек называется внутренностью множества, и обозначается $\operatorname{Int} A$.

Свойства.
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

1. $\operatorname{Int} A \subset A$

2. $\operatorname{Int} A$ - объеденение всех открытых множеств содержащихся в A.

   Доказательство.
   Пусть $G = \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$, где $U_\alpha \subset A$ - открытое.

   $G \subset \operatorname{Int} A$:

$$\begin{aligned} x \in G &\implies \exists \alpha \in I \quad x \in U_\alpha \\ &\implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset U_\alpha \subset A \\ &\implies x \in \operatorname{Int} A \end{aligned}$$

   $\operatorname{Int} A \subset G$: $x \in \operatorname{Int} A \implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset A$. $B_r(x)$ - открытое множество, значит $\exists \alpha \in I \quad U_\alpha = B_r(x) \implies x \in G$. □

3. $\operatorname{Int} A$ - откртое множество

   Доказательство.
   A - объединение открытых множеств, значит открыто. $\square$

4. $\operatorname{Int} A = A \iff A$ - открыто

   Доказательство.
   Необходимость ($\implies$): $\operatorname{Int} A$ открыто.

   Достаточность ($\impliedby$): A открыто $\implies$ все точки внутренние $\implies$ $A = \operatorname{Int} A$. $\square$

5. $A \subset B \implies \operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$

6. $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$

   Доказательство.
   В сторону $\subset$:

$$\left.\begin{aligned} A \cap B \subset A &\implies \operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} A \\ A \cap B \subset B &\implies \operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} B \end{aligned}\right\} \implies \operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$$

   В сторону $\supset$:

$$x \in \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \implies \left\{\begin{aligned} x \in \operatorname{Int} A &\implies \exists r_1 : B_{r_1}(x) \subset A \\ x \in \operatorname{Int} B &\implies \exists r_2 : B_{r_2}(x) \subset B \end{aligned}\right\} \implies B_{\min\{r_1, r_2\}}(x) \subset A \cap B \implies$$
$$\implies x \in \operatorname{Int}(A \cap B)$$

   $\square$

7. $\operatorname{Int} \operatorname{Int} A = \operatorname{Int} A$

   Доказательство.
   Заметим, что $\operatorname{Int} A$ - открытое по 3, дальше по 4 видно равенство. $\square$

2.4. Билет 15: Замкнутые множества: определение и свойства. Замыкание множества, связь со внутренностью.

***Определение* 2.6.**
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

A называется замкнутым, если $X \setminus A$ - открыто.

Свойства.

1. $\varnothing, X$ - замкнуты.

2. Пересечение любого количества замкнутых множеств замкнуто

   Доказательство.

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$$

   $\square$

Так как $\forall\alpha \quad X \setminus A_\alpha$ - открытое, то $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ - открытое, значит $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ - замкнутое.

3. Объединение конечного количества замкнутых множеств замкнуто

   Доказательство.

$$X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcap_{k=1}^{n} (X \setminus A_k)$$

□

   $X \setminus A_k$ открыто, значит их конечное пересечение открыто, значит $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ - замкнуто.

4. $\forall a \in X \quad \forall r > 0 \quad \overline{B}_r(a)$ - замкнутое множество.

   Доказательство.
   Покажем что $X \setminus \overline{B}_r(a) = \{x \in X \mid \rho(x,a) > r\}$ - открыто.

   Пусть $x \in X \setminus \overline{B}_r(a)$. $\tilde{r} = \rho(x,a) - r$. Тогда докажем что $B_{\tilde{r}}(x) \cap B_r(a) = \varnothing$:

   Пусть $y \in B_{\tilde{r}}(x) \cap \overline{B}_r(a)$, тогда $\rho(x,y) < \tilde{r}$, $\rho(y,a) < r$.

$$\rho(x,a) \overset{\triangle}{\leqslant} \rho(x,y) + \rho(y,a) < \tilde{r} + r = \rho(x,a).$$

   Получили противоречие, значит $B_{\tilde{r}}(x) \cap B_r(a) = \varnothing \implies B_{\tilde{r}}(x) \subset X \setminus \overline{B}_r(a)$, значит $X \setminus \overline{B}_r(a)$ - открытое. □

***Определение* 2.7.**
Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространство.

Замыкание множества $A \subset X$ - пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A. Обозначается $\operatorname{Cl} A$ или $\overline{A}$.

Теорема 2.1.

$$\operatorname{Cl} A = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A).$$

Доказательство.
Будем доказывать в виде $X \setminus \operatorname{Cl} A = \operatorname{Int}(X \setminus A)$:

Знаем, что $\operatorname{Int}(X \setminus A) = \bigcup_\alpha U_\alpha$ по всем U_α таким, что $U_\alpha \subset (X \setminus A)$ и U_α открыто.

Пусть C - замкнутое множество, такое, что $A \subset C$. Тогда $X \setminus C$ - открытое, и $(X \setminus A) \subset (X \setminus C) \implies \exists\alpha \quad U_\alpha = X \setminus C$.

Аналогично в другую сторону - $\forall\alpha \quad X \setminus U_\alpha$ - замкнутое надмножество A.

Пусть $C_\alpha = X \setminus U_\alpha$.

$$X \setminus \operatorname{Cl} A = X \setminus \bigcap_\alpha C_\alpha = \bigcup_\alpha (X \setminus C_\alpha) = \bigcup_\alpha U_\alpha = \operatorname{Int}(X \setminus A).$$

□

2.5. Билет 16: Свойства замыкания. Предельные точки. Связь с замыканием множества.

Свойства.

1. $A \subset \operatorname{Cl} A$
2. $\operatorname{Cl} A$ - замкнутое множество

   Доказательство.
   По определению, $\operatorname{Cl} A$ - пересечение замкнутых множетв. □

3. $\operatorname{Cl} A = A \iff A$ замкнуто

   Доказательство.

$$\begin{aligned} A = \operatorname{Cl} A &\iff X \setminus A = X \setminus \operatorname{Cl} A \\ &\iff X \setminus A = \operatorname{Int}(X \setminus A) \\ &\iff X \setminus A \text{ открыто} \\ &\iff A \text{ замкнуто} \end{aligned}$$
□

4. $A \subset B \implies \operatorname{Cl} A \subset \operatorname{Cl} B$

   Доказательство.

$$\begin{aligned} A \subset B &\implies (X \setminus B) \subset (X \setminus A) \\ &\implies \operatorname{Int}(X \setminus B) \subset \operatorname{Int}(X \setminus A) \\ &\implies X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A) \subset X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus B) \\ &\implies \operatorname{Cl} A \subset \operatorname{Cl} B \end{aligned}$$
□

5. $\operatorname{Cl}(A \cup B) = \operatorname{Cl} A \cup \operatorname{Cl} B$

   Доказательство.

$$\begin{aligned} \operatorname{Cl}(A \cup B) &= X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus (A \cup B) \\ &= X \setminus \operatorname{Int}((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) \\ &= X \setminus (\operatorname{Int}(X \setminus A) \cap \operatorname{Int}(X \setminus B)) \\ &= (X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A)) \cup (X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus B)) \\ &= \operatorname{Cl} A \cup \operatorname{Cl} B \end{aligned}$$
□

6. $\operatorname{Cl}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{Cl} A$

   Доказательство.
   $\operatorname{Cl} A$ замкнуто по свойству 2, равенство следует из свойства 3. □

Теорема 2.2.
Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

$$a \in \operatorname{Cl} A \iff \forall r > 0 \quad B_r(a) \cap A \neq \varnothing.$$

Доказательство.
Необходимость ($\implies$):

Предположим что $\exists r > 0 \quad B_r(a) \cap A = \varnothing$.

Тогда $a \notin A$ и $B_r(a) \subset X \setminus A$, значит $a \in \operatorname{Int}(X \setminus A) \implies a \notin X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A) \implies a \notin \operatorname{Cl} A$.

Достаточность ($\impliedby$):

Пусть $a \notin \operatorname{Cl} A$, тогда $\exists F$ - замкнутое надмножество A, такое, что $a \notin F \implies a \in X \setminus F$. При этом, $X \setminus F$ открыто.

Тогда $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset X \setminus F \subset X \setminus A$.

Но тогда $B_r(a) \cap A = \varnothing$. □

Следствие.
Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$, а $U \subset X$ - открытое множетсво. При этом $A \cap U = \varnothing$.

Тогда $\operatorname{Cl} A \cap U = \varnothing$

Доказательство.

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Cl} A \cap U &\implies x \in U \\ &\implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset U \\ &\implies B_r(x) \cap A \subset U \cap A = \varnothing \\ &\implies x \notin \operatorname{Cl} A \\ &\implies x \notin \operatorname{Cl} A \cap U \end{aligned}$$

Получили противоречие, значит таких x не существует. □

***Определение* 2.8.**
Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространство.

Проколотой окрестностью радиуса $r \in \mathbb{R}_{>0}$ с центров в $a \in X$ называется $\mathring{B}_r(a) := B_r(a) \setminus \{a\} = \{x \in X \mid 0 < \rho(x, a) < r\}$.

***Определение* 2.9.**
Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

$a \in A$ называется предельной точкой, если $\forall r > 0 \quad \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing$.

Множества предельных точек множества A обозначается A'.

Свойства.

1. $\operatorname{Cl} A = A \cup A'$

   Доказательство.

$$
\begin{aligned}
a \in \operatorname{Cl} A &\iff \forall r > 0 \quad B_a(a) \cap A \neq \varnothing \\
&\iff \left[\begin{aligned} &a \in A \\ &\mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing \end{aligned}\right. \\
&\iff \left[\begin{aligned} &a \in A \\ &a \in A' \end{aligned}\right.
\end{aligned}
$$

□

2. $A \subset B \implies A' \subset B'$

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
a \in A' &\implies \forall r \quad \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing \\
&\implies \mathring{B}_r(a) \cap B \neq \varnothing \\
&\implies a \in B'
\end{aligned}
$$

□

3. $(A \cup B)' = A' \cup B'$

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
A \subset A \cup B &\implies A' \subset (A \cup B)' \\
B \subset A \cup B &\implies B' \subset (A \cup B)' \\
&\implies A' \cup B' \subset (A \cup B)'
\end{aligned}
$$

Покажем другое включение: возьмём $x \in (A \cup B)'$.

Пусть $x \notin A'$: Тогда $\exists R > 0 \quad \mathring{B}_R(x) \cap A = \varnothing$.

Заметим, что $\forall 0 < r \leqslant R \quad \mathring{B}_r(x) \cap A \subset B_R(x) \cap A = \varnothing$, значит $\forall r > 0 \quad \exists 0 < R_r < r \quad B_{R_r}(x) \cap A = \varnothing$.

Так-как $\mathring{B}_{R_r}(x) \cap (A \cup B) \neq \varnothing$, значит $\mathring{B}_{R_r}(x) \cap B \neq \varnothing$. Тогда

$$\forall r > 0 \quad \mathring{B}_r(x) \cap B \supset \mathring{B}_{R_r}(x) \cap B \neq \varnothing.$$

Значит, $x \in B'$ □

4. $A' \subset A \iff A$ - замкнутое

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
A \text{ - замкнутое} &\iff A = \operatorname{Cl} A \\
&\iff A = A \cup A' \\
&\iff A' \subset A
\end{aligned}
$$

□

Теорема 2.3.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

$$a \in A' \iff \forall r > 0 \quad B_r(a) \cap A \text{ содержит бесконечно много точек.}$$

Доказательство.

Необходимость ($\Longrightarrow$):

Знаем, что $\mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing$, возьмём точку $x_1 \in \mathring{B}_r(a) \cap A$, возьмём $r_2 = \rho(x_1, a)$, знаем, что $\mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing$, можем взять точку оттуда, и вообще повторять бесконечное число раз.

Достаточность ($\leqslant$): $B_r(a) \cap A$ содержит бесконечно много точек $\Longrightarrow$ $\mathring{B}_r(a) \cap A$ содержит бесконечно много точек $\Longrightarrow$ $\mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing$ $\Longrightarrow$ $a \in A'$. □

2.6. Билет 17: Индуцированная метрика. Открытые и замкнутые множества в пространстве и в подпространстве.

***Определение* 2.10.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $Y \subset X$.

Тогда пара $\left\langle Y, \rho|_{Y \times Y} \right\rangle$ называется метрическим подпростраством X.

Далее, при разговое о подпростравах обычно будет указываться только множество, а метрика использоваться та-же что и для основного пространства.

Теорема 2.4.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, Y - его подпространство.

$A \subset Y$ открыто в Y тогда и только тогда, когда $\exists G$ открытое в X, такое, что $A = G \cap Y$

Доказательство.

Необходимость ($\Longrightarrow$):

$$\begin{aligned} A \text{ - открыто в } Y &\Longrightarrow \forall a \in A \quad \exists r_a > 0 \quad B^Y_{r_a}(a) \subset A \\ &\Longrightarrow A = \bigcup_{a \in A} B^Y_{r(a)}(A) \subset \bigcup_{a \in A} B^X_{r(a)}(a) =: G \end{aligned}$$

G - подходящее множество - оно открыто как объединение открытых, покажем что $A = G \cap Y$:

$$B^Y_r(x) = B^X_r(x) \cap Y.$$

$$G \cap Y = Y \cap \bigcup_{a \in A} B^X_{r(a)}(a) = \bigcup_{a \in A} B^Y_{r(a)}(a) = A.$$

Достаточность ($\Longleftarrow$):

Пусть $A = G \cap Y$. Возьмём $a \in A$.

$$\begin{aligned} G \text{ открыто в } X &\Longrightarrow \exists r > 0 \quad B^X_r(a) \subset G \\ &\Longrightarrow B^X_r(a) \cap Y \subset G \cap Y \\ &\Longrightarrow B^Y_r(a) \subset A \\ &\Longrightarrow A \text{ открыто в } Y \end{aligned}$$

□

Теорема 2.5.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, Y - его подпространство.

$A \subset Y$ замкнуто тогда и только тогда, когда $\exists F$ замкнутое в X, такое, что $A = F \cap Y$.

Доказательство.

$F := X \setminus G$, где G - открытое в X такое, что $G \cap Y = Y \setminus A$ существование которого экивалентно открытости $Y \setminus A \iff$ замкнутости A.

$$\begin{aligned} F \cap Y &= (X \setminus G) \cap Y \\ &= (X \cap Y) \setminus G \\ &= Y \setminus G \\ &= Y \setminus (G \cap Y) \\ &= Y \setminus (Y \setminus A) \\ &= A \end{aligned}$$

□

2.7. Билет 18: Скалярное произведение и норма. Свойства и примеры. Неравенство Коши–Буняковского.

***Определение* 2.11.**

Нормированным пространством над $\mathbb{R}$ называется пара $\langle X, \|\cdot\| \rangle$, где X - линейное пространство над $\mathbb{R}$ (далее одно и тоже обозначение используется для линейного пространства и его множества векторов), а $\|\cdot\| : X \mapsto \mathbb{R}$ - норма, обладающая следующими свойствами $\forall x, y \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad$.

1. $\|x\| \geqslant 0$ и $\|x\| = 0 \iff x = \vec{0}$
2. $\|\lambda x\| = \lambda \|x\|$
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ $(\triangle)$

Пример.

$X = \mathbb{R}$, $\|x\| = |x|$

Пример.

На $X = \mathbb{R}^d$ можно задать бесконечно много норм:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|.$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2}.$$

$$\|x\|_n = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{d} |x_i|^n}.$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i \in 1,\ldots,d} |x_i|.$$

Пример.

$X = C[a, b]$, $\|f\| = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

Доказательство.

Докажем неравенство треугольника:

$$\begin{aligned}\|f+g\| &= \max_{x\in[a,b]} |f(x)+g(x)| \\ &= |f(x_0)+g(x_0)| \\ &\leqslant |f(x_0)+|g(x_0)| \\ &\leqslant \max_{x\in[a,b]} |f(x)| + \max_{x\in[a,b]} |g(x)| \\ &= \|f\|+\|g\|\end{aligned}$$

□

***Определение* 2.12.**

Пусть X - линейное пространство, тогда функция $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ называется скалярным произведением, если удовлетворяет следующим свойствам $\forall x, y, z \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad :$

1. $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ и $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = \vec{0}$.
2. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$
3. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
4. $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

Замечание.

Аналогичные определения можно дать над $\mathbb{C}$, тогда надо ещё потребовать $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$, и третий пункт примет вид $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

Пример.

$X = \mathbb{R}^d$, $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{d} x_i y_i$

Пример.

Пусть $w_1, \ldots, w_d > 0$, тогда

$X = \mathbb{R}^d$, $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{d} w_i x_i y_i$

Пример.

$X = C[a,b]$, $\langle f, g\rangle = \int\limits_a^b f(t)g(t)dt$

Свойства.

1. $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda \langle x, z\rangle + \mu \langle y, z\rangle$ и $\langle x, \lambda y + \mu z\rangle = \lambda \langle x, y\rangle + \mu \langle x, z\rangle$
2. Неравенство Коши-Буняковского: $\langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$

   Доказательство.

   Пусть $t \in \mathbb{R}$.

   $$\langle x+ty, x+ty\rangle \geqslant 0.$$

   $$\langle x+ty, x+ty\rangle = \langle x, x\rangle + 2t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle .$$

   Это квадратное уровнение имеет корень только если $x + ty = 0$, значит не более одного корня. Его дискриминат $\leqslant 0$:

   $$(2\langle x, y\rangle)^2 - 4\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle \leqslant 0 \implies \langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle .$$

   □

3. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ - норма

Доказательство.

(a) Первое свойство переносится напрямую, из аналогичных свойств для $\langle x, x\rangle$ и $\sqrt{}$.

(b) $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x, x\rangle} = \lambda\|x\|$

(c)

$$\begin{aligned} \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| &\iff \sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle} \\ &\overset{\cdot^2}{\iff} \langle x+y, x+y\rangle \leqslant \langle x, x\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} + \langle y, y\rangle \\ &\iff \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ &\iff \langle x, y\rangle \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} \\ &\iff \langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle \end{aligned}$$

Последнее неравенство - неравенство Коши-Буняковского. □

Свойства.

1. $\rho(x, y) = \|x - y\|$ - метрика

Доказательство.

(a) Первое свойство переходит прямо

(b) $\rho(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |(-1)|\|x - y\| = \rho(x, y)$

(c) $\|x - y\| \leqslant \|x - z\| + \|z - y\|$ ($\triangle$ для нормы).

□

2. $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$

Доказательство.

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \overset{\triangle}{\leqslant} \|x - y\| + \|y\|.$$

$$\|y\| = \|(y - x) + x\| \overset{\triangle}{\leqslant} \|y - x\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\|.$$

$$\|x\| \leqslant \|x - y\| + \|y\| \implies \|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|.$$

$$\|y\| \leqslant \|x - y\| + \|x\| \implies \|y\| - \|x\| \leqslant \|x - y\|.$$

□

2.8. Билет 19: Предел последовательности в метрическом пространстве. Определение и основные свойства.

***Определение* 2.13.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $x_n \in X$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon.$$

***Определение* 2.14.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $E \subset X$.

E называется ограниченным если $\exists r > 0 \quad \exists a \in X \quad E \subset B_r(a)$.

Свойства.

1. Предел единственнен

   Доказательство.
   Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $a \neq b$.

   Возьмём $\varepsilon = \frac{\rho(a,b)}{2}$, $a \neq b \implies \varepsilon > 0$, возьмём $N = \max\{N_a, N_b\}$, где N_a, N_b - N из соответствующих определений предела при подстановке ε.

   Тогда, $\rho(x_N, a) < \varepsilon$ и $\rho(x_N, b) < \varepsilon$.

   Но тогда $\rho(a, b) \overset{\triangle}{\leqslant} \rho(a, x_N) + \rho(x_N, b) < 2\varepsilon = \rho(a, b)$. Противоречие, значит предел единственненн. $\square$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0$

   Доказательство.
   Определения посимвольно совпадают. $\square$

3. Если последовательность имеет предел, она ограничена

   Доказательство.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_n = a &\implies \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0 \\ &\implies \rho(x_n, a) \text{ - ограниченная последовательность вещественных чисел} \\ &\implies \exists R > 0 \quad \rho(x_n, a) < R \\ &\implies \{x_n\} \subset B_R(a)\end{aligned}$$

   $\square$

4. Если a - предельная точка множества A, то можно выбрать последовательность $x_n \in A$, такую что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, и $\rho(x_n, a)$ строго монотонно убывает.

   Доказательство.
   По определению предельной точки, $\forall r > 0 \quad \mathring{B}_r(a) \neq \varnothing$.

   Пусть $r_1 = 1$, $r_n = \min\{\frac{1}{n}, \rho(x_{n-1}, a)\}$, $x_n \in \mathring{B}_{r_n}(a)$ - такой x_n всегда можно выбрать, так-как окрестность непуста. Тогда $\rho(x_n, a) < r \implies \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \implies \rho(x_n, a) \to 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, и при этом $\rho(x_n, a) < r_n < \rho(x_{n-1}, a)$. $\square$

5. $A \subset X$, $x_n \in A$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \implies a \in A \cup A' = \operatorname{Cl} A$.

Доказательство.
Если $a \notin A$:

Предположим что $a \notin A' \implies \exists \varepsilon > 0 \quad \mathring{B}_\varepsilon(a) \cap A = \varnothing \implies \nexists x \in A \quad 0 < \rho(x, a) < \varepsilon$.

Но, если подставить этот ε в определение предела, то получим что $\exists N \quad \rho(x_N, a) < \varepsilon$ и $x_N \in A \implies x_N \neq a \implies \rho(x_N, a) > 0$. Противоречие, значит $a \in A'$. □

2.9. Билет 20: Арифметические свойства пределов последовательности векторов. Покоординатная сходимость.

Теорема 2.6.
Пусть $\langle X, \|\cdot\|\rangle$ - нормированное пространство, $x_n, y_n, a, b \in X$, $\lambda_n, \lambda \in \mathbb{R}$, $x_n \to a$, $y_n \to b$, $\lambda_n \to \lambda$.

Тогда:

$$\|x_n - a\| \to 0.$$
$$\|y_n - b\| \to 0.$$

1. $x_n + y_n \to a + b$

Доказательство.

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \|(x_n + y_n) - (a + b)\| \\ &= \|(x_n - a) + (y_n - b)\| \\ &\overset{\triangle}{\leqslant} \|x_n - a\| + \|y_n - b\| \\ &\to 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$ □

2. $\lambda_n x_n \to \lambda a$

Доказательство.

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \|\lambda_n x_n - \lambda a\| \\ &= \|\lambda_n x_n - \lambda_n a + \lambda_n a - \lambda a\| \\ &= \|\lambda_n (x_n - a) + (\lambda_n - \lambda) a\| \\ &\leqslant \|\lambda_n (x_n - a)\| + \|(\lambda_n - \lambda) a\| \\ &= |\lambda_n| \|x_n - a\| + |(\lambda_n - \lambda)| \|a\| \\ &\to |\lambda| \cdot 0 + 0 \cdot \|a\| = 0 \end{aligned}$$ □

3. $x_n - y_n \to a - b$

Доказательство.
$-y_n = -1 \cdot y_n \implies -1 \cdot b = -b$, $x_n + (-y_n) \to a + (-b) = a - b$. □

4. $\|x_n\| \to \|a\|$

   Доказательство.

$$0 \leqslant |\|x\| - \|a\|| \leqslant \|x - a\| \to 0.$$ □

5. Если задано скалярное произведение и $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, то $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle a, b\rangle$.

   Доказательство.
   Заметим следующий факт:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) &= \frac{1}{4}\left(\langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle - (\langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle)\right)\\
&= \frac{1}{4}\cdot 4\langle x, y\rangle\\
&= \langle x, y\rangle
\end{aligned}$$

   Теперь:

$$\begin{aligned}
\langle x_n, y_n\rangle - \langle a, b\rangle &= \langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, b\rangle + \langle x_n, b\rangle - \langle a, b\rangle\\
&= \langle x_n, y_n - b\rangle - \langle x_n - a, y_n\rangle\\
&= \frac{1}{4}\left(\|x_n + y_n - b\|^2 - \|x_n - y_n + b\|^2 - \|x_n - a + y_n\|^2 + \|x_n - a - y_n\|^2\right)\\
&\to \frac{1}{4}\left(\|a\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2 + \|b\|^2\right) = 0
\end{aligned}$$ □

***Определение* 2.15.**
Пусть $x_n \in \mathbb{R}^d$, $x_n = (x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(d)})$.

Тогда x_n покоординатно сходится к x_0, если

$$\forall k \in [1, d] \quad \lim_{n\to\infty} x_n^{(k)} = x_0^{(k)}.$$

Теорема 2.7.
В $\mathbb{R}^d$ с евклидовой нормой сходимость по норме эквивалентна координатной.

Доказательство.
Необходимость (норма $\implies$ коорд):

$$\forall k \in [1, d] \quad 0 \leqslant (x_n^{(k)} - x_0^{(k)})^2 \leqslant \sum_{j=1}^{d}(x_n^{(j)} - x_0^{(j)})^2 = \|x_n - x_0\|^2 \to 0.$$

Достаточноость (коорд $\implies$ норма)

$$0 \leqslant \|x - x_0\|^2 = \sum_{k=1}^{d}(x_n^{(k)} - x_0^{(k)}) \to 0.$$ □

2.10. Билет 21: Фундаментальные последовательности. Свойства. Полнота. Полнота $\mathbb{R}^d$

Тут что-то странное с порядком билетов, рекомендуется сначала прочитать билет 22

***Определение* 2.16.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространоство.

Последовательность x_n называется фундаментальной

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geqslant N \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Лемма.

Фундаментальная последовательность ограничена

Доказательство.

Подставим $\varepsilon = 1$, получим $\forall n \geqslant N \quad \rho(x_N, x_n) < 1 \implies x_n \in B_1(N)$, пусть

$$r = \max\{1, \max_{k<N}\{\rho(x_N, x_k)\}\}.$$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in B_r(x_N)$. □

TODO: Это все свойства фундаментальной последовательнсоти?

***Определение* 2.17.**

Метрическое пространство называется полным, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Лемма.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

Пусть $x_n \in X$ - фундаментальна, а $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = a \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall k \geqslant M \quad \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon.$$

$$x_n \text{ - фундаментальна} \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geqslant N \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Пусть $L = \max\{N, n_M\}$.

Тогда $\forall n > L \quad \exists k \quad \rho(x_n, a) < \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < 2\varepsilon$.

Значит, $\rho(x_n, a) \to 0 \implies x_n \to a$. □

Следствие.

1. $\mathbb{R}^d$ - полное

   Доказательство.

   Пусть $x_n \in \mathbb{R}^d$ - фундаментальная последовательность.

   Тогда x_n ограничена $\implies \exists x_{n_k}$ - сходящаяся к точке из $\mathbb{R}^d$ подпоследовательность (Больцано-Вейерштрасс из следующего билета), пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

   Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}^d$. □

2. K - компакт в $\langle X, \rho\rangle \implies \langle K, \rho\rangle$ - полное.

Доказательство.
K - компакт, $x_n \in K$ - фундаментальна.
$\exists x_{n_k} \in K \quad \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a \in K \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in K.$ □

2.11. Билет 22: Покрытия. Компактность. Компактность в пространстве и в подпространстве. Простейшие свойства компактных множеств.

***Определение* 2.18.**
Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространство.

Семейство множеств $U_\alpha \subset X$ называется открытым покрытием множества A (покрытием A открытыми множествами), если

1. $A \subset \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$
2. $\forall \alpha \in I \quad U_\alpha$ - открытое.

***Определение* 2.19.**
Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространство.

$K \subset X$ называется компактом, если из любого отркытого покрытия можно выбрать конечное открытое покрытие.

Теорема 2.8.
Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространтсво, $Y \subset X$ - подпространство.

Тогда компактность $K \subset Y$ в Y и в X равносильны.

Доказательство.
$Y \implies X$:

Пусть $G_\alpha \subset X$ - открытое покрытие K в X.

Тогда $U_\alpha = G_\alpha \cap Y$ - открытое покрытие K в Y.

Можем выбрать конечное U_{α_k}.

$U_{\alpha_k} \subset G_{\alpha_k} \implies G_{\alpha_k}$ - конечное открытое покрытие.

$X \implies Y$:

Пусть $U_\alpha \subset Y$ - открытое покрытие K в Y.

Тогда $\exists G_\alpha$ открытое в $X \quad U_\alpha = G_\alpha \cap Y$.

$U_\alpha \subset G_\alpha \implies G_\alpha$ - открытое покрытие K в X.

Значит, можем выбрать конечное G_{α_k}. Тогда

$$\bigcup_{k=1}^{n} U_{\alpha_k} = \bigcup_{k=1}^{n} (G_{\alpha_k} \subset Y) = Y \cap \bigcup_{k=1}^{n} G_{\alpha_k} \supset Y \cap K = K.$$

Значит, U_{α_k} - конечное покрытие K в Y. □

Теорема 2.9.
Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространство, K - компакт. Тогда

1. K - замкнуто

   Доказательство.
   Возьмём $a \in X \setminus K$.

   Заметим, что $\forall x \in K \quad B_{\frac{\rho(x,a)}{2}} \cap B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(x) = \varnothing$.

   Возьмём открытое покрытие K: $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(x)$.

   Выберем конечное: $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_{\frac{\rho(a,x_k)}{2}}(x_k)$.

   Тогда, при $r := \min\limits_k\{\frac{\rho(x_k,a)}{2}\}$, $B_r(a) \cap K = \varnothing \implies B_r(a) \subset X \setminus K \implies a \in \mathrm{Int}(X \setminus K) \implies X \setminus K$ открыто $\implies K$ замкнуто. $\square$

2. K - ограничено

   Доказательство.
   Возьмём $a \in K$.

   Тогда $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(a)$ - открытое покрытие.

   Выберем конечное: $K \subset \bigcup_{k=1}^{m} B_{n_k}(a) = B_r(a)$, $r := \max\limits_k\{n_k\}$. $\square$

Следствие.
Если K - компакт и $\tilde{K} \subset K$ - замкнуто, то $\tilde{K}$ - компакт.

Доказательство.
Пусть U_α - открытое покрытие $\tilde{K}$.

Тогда, если добавить к нему $X \setminus \tilde{K}$ (которое открыто так-как $\tilde{K}$ замкнуто), получится открытое покрытие K. Выберем конечное.

$$\bigcup_{k=1}^{n} U_{\alpha_k} \cup (X \setminus \tilde{K}) \supset K \supset \tilde{K} \implies \bigcup_{k=1}^{n} U_{\alpha_k} \supset \tilde{K} \qquad \square.$$

2.12. Билет 23: Теорема о пересечении семейства компак- тов. Следствие о вложенных компактах.

Теорема 2.10.
Пусть K_α - семейство компактов, и для любого конечного набора компактов пересечение непусто.

Тогда $\bigcap\limits_{\alpha \in I} K_\alpha \neq \varnothing$.

Доказательство.
Предположим $\bigcap\limits_{\alpha \in I} K_\alpha = \varnothing$.

Тогда $\exists \alpha_0 \in I \quad K_{\alpha_0} \subset X \setminus \bigcap\limits_{\alpha \in I}^{\alpha \neq \alpha_0} K_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \in I}^{\alpha \neq \alpha_0} (X \setminus K_\alpha)$ - получилось открытое покрытие.

Выберем конечное: $K_{\alpha_0} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} (X \setminus K_{\alpha_k}) = X \setminus \bigcap\limits_{k=1}^{n} K_{\alpha_k}$.

Но тогда $\bigcap\limits_{k=0}^{n} K_{\alpha_k} = \varnothing$, противоречие. $\square$

Следствие.

Пусть $K_1 \supset K_2 \supset K_3, \dots$ - непустые компакты.

Тогда $\bigcap_{k=1}^{\infty} K_k \neq \varnothing$.

Доказательство.

Пересечение конечного числа компактов - компакт с максимальным номером $\neq \varnothing$. $\square$

2.13. Билет 24: Секвенциальная компактность. Компактность и предельные точки. Секвенциальная компактность компакта.

***Определение* 2.20.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

$K \subset X$ называется секвенциально компактным, если из любой последовательности точек из K можно выбрать подпоследовательность сходящуюся к точке из K.

Теорема 2.11.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $K \subset X$ секвенциально компактно.

Тогда всякое бесконечное множество точек из K имеет хотя-бы одну предельную точку в K.

Доказательство.

Выберем последовательность x_n из этого подмножества, $x_n \in K$, значит можем выбрать сходящуюся подпоследовательность, а сходится она может только к предельной точке. $\square$

Теорема 2.12.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $K \subset X$ - компакт.

Тогда K секвенциально компактно.

Доказательство.

Пусть $x_n \in K$ - последовательность. $D = \{x_n\}$ (множество элементов).

Если D конечно, то какая-то точка встречается в последовательности бесконечное количество раз, выберем подпоследовательность состоящую только из этой точки, она сходится.

Заметим, что в D обязательно есть предельная точка:

Пусть нету. Тогда $D = D \cup \varnothing = D \cup D' = \operatorname{Cl} D \implies D$ замкнуто. Замкнутое подмножество компакт - компакт.

Так-как $\forall n \quad x_n$ не предельная в D, можем выбрать r_n, такие, что $\mathring{B}_{r_n}(x_n) \cap D = \varnothing \implies B_{r_n}(x_n) \cap D = \{x_n\}$.

Покроем D такими шарами. Каждый шар покрывает ровно одну точку и точек бесконечно $\implies$ нельзя выбрать конечное покрытие. Противоречие.

Значит, $\exists a \in D'$.

Возьмём произвольную точку из последовательности x_{n_1}. Пусть $r_k := \min\{\frac{1}{k}, \min\limits_{n<k}\{x_n\}\}$.

Будем брать x_{n_k} как произвольную точку из $\mathring{B}_{r_{k-1}}(a)$. Так-как он ближе к a чем все предыдущие, $n_k > n_{k-1}$, значит получится подпоследовательность.

При этом, $\rho(x_{n_k}, a) < \frac{1}{k-1} \implies \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. При этом, $D \subset K \implies \operatorname{Cl} D \subset \operatorname{Cl} K = K$. А $a \in D' \subset \operatorname{Cl} D \subset K \implies a \in K$. $\square$

2.14. Билет 25: Лемма Лебега. Число Лебега. Связь между компактностью и секвенциальной компактностью.

TODO: Не могу найти ни у себя ни у Ани ничего про это.

2.15. Билет 26: ε-сети и вполне ограниченность. Свойства. Связь с компактностью (теорема Хаусдорфа). Теорема о характеристике компактов в $\mathbb{R}^d$. Теорема Больцано-Вейерштрасса.

TODO: Сети и Хаусдорфа опять не видно не у меня не у Ани.

***Определение* 2.21.**
Пусть $a, b \in \mathbb{R}^d$.

Замкнутый параллелепипед: $[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_d, b_d]$.

Открытый параллелепипед: $(a, b) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_d, b_d)$.

Теорема 2.13 (О вложенных параллелепипедах)**.**
Пусть $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \ldots$ - замкнутые параллелепипеды.

Тогда $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} P_n \neq \varnothing$.

Доказательство.
Обозначим $P_n =: [a^{(n)}, b^{(n)}]$.

По теореме о вложенных отрезках:

$$\forall k \in [1, n] \quad \exists c_k \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_k^{(n)}, b_k^{(n)}] \quad .$$

Тогда, $c = (\forall n \quad c_1, \ldots, c_d) \in P_n$ □

Теорема 2.14.
Замкнутый куб (замкнутый параллелепипед, все координаты углов которого равны для данного угла) в $\mathbb{R}^d$ - компакт.

Доказательство.
Пусть K - замкнутый куб и U_α - его открытое покрытие. Предположим что выбрать конечное нельзя.

Разобьём K на 2^d кубов, со стороной равной половине стороны K. U_α - открытое покрытие каждого такого куба.

Хотя-бы один маленький куб нельзя будет покрыть конечным покрытием, назовём его K_1, повторим для него, получим последовательность $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$.

По теореме о вложенных параллелепипедах, $\exists c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$.

$\exists \alpha_0 \quad c \in U_{\alpha_0}$, U_{α_0} открытое $\implies \exists r > 0 \quad B_r(c) \subset U_{\alpha_0}$.

Заметим, что длина ребра $K_n = \frac{l}{2^n} \to 0$ (l - длина ребра K) $\implies$ максимальное расстояние между точками - $\sqrt{d}\frac{l}{2^n} \to 0$ (какой-то факт о евклидовой метрике).

Тогда, $\exists n \quad \sqrt{d}\frac{l}{2^n} < r$. Значит, $\exists n \quad K_n \subset B_r(c) \subset U_{\alpha_0}$. Но это противоречит тому, что для K_n нельзя выбрать конечное покрытие. Значит K - компакт.

$\square$

Теорема 2.15.

Пусть $K \subset \mathbb{R}^d$ с евклидовой метрикой. Тогда следующие услвия эквивалентны:

1. K - компакт
2. K - замкнуто и ограничено
3. K секвенциально компактно.

Доказательство.

$1 \implies 2$ и $1 \implies 3$ уже были.

$2 \implies 1$: K ограничено $\implies K \subset B_r(a) \subset$ куб. K - замкнутое подмножество компакта $\implies$ K - компакт.

$3 \implies 2$:

Пусть K не замкнуто. Тогда есть предельная точка не в K. Можем выбрать сходящуюся к ней последовательность, но тогда любая подполседовательность сходится к ней $\implies$ не можем выбрать сходящуюся к точке из K. Противоречие $\implies K$ замкнуто.

Пусть K не ограничено $\implies \forall n > 0 \quad K \not\subset B_n(0)$.

Тогда, можем выбрать последовательность вида $x_n \in K \setminus B_n(0)$. Тогда $\rho(0, x_n) \geqslant n$.

Выберем сходящуюся к $a \in K$ подпоследовательность x_{n_k}. Тогда x_{n_k} ограничена, причём ограничивающий шар с центром в a точно существует: $x_{n_k} \in B_r(a) \implies \rho(x_{n_k}, a) < r \overset{\triangle}{\implies} \rho(x_{n_k}, 0) < r + \rho(0, a)$. Противоречине, значит K ограничено. $\square$

Замечание.

$3 \implies 1$ верно для произвольного пространства, но доказательство сложное.

$2 \implies 1$ в общем случае неверно:

Рассмотрим $\mathbb{R}$ с метрикой лентяя. $[0, 1] \subset B_2(0)$, и есть замкнутость.

Но из $\bigcup_{x \in [0,1]} B_{\frac{1}{2}}(x)$ нельзя выбрать конечное покрытие, так-как каждый шар содержит лишь одну точку.

Теорема 2.16 (Больцано-Вейерштрасса)**.**

Из всякой ограниченной последовательности в $\mathbb{R}^d$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство.

$\{x_n\}$ ограничено $\implies \{x_n\} \subset B_R(a) \subset \overline{B}_R(a)$ - замкнуто и ограничено $\implies$ компакт $\implies$ секвенциально компактно $\implies$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. $\square$

2.16. Билет 27: NAME

2.17. Билет 28: NAME

2.18. Билет 29: NAME

2.19. Билет 30: NAME

2.20. Билет 31: NAME

2.21. Билет 32: NAME

2.22. Билет 33: NAME

2.23. Билет 34: NAME

2.24. Билет 35: NAME

2.25. Билет 36: NAME

2.26. Билет 37: NAME

2.27. Билет 38: NAME

2.28. Билет 39: NAME

3. Числовые и функциональные ряды

3.1. Билет 40: NAME

3.2. Билет 41: NAME

3.3. Билет 42: NAME

3.4. Билет 43: Признак Коши (с $\overline{\lim}$). Примеры.

Теорема 3.1 (признак Коши).

$a_n \geqslant 0$

1. Если $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ начиная с некоторого места, то ряд расходится
2. Если $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$ начиная с некоторого места, то ряд сходится
3. $q' := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$

   Если $q' < 1$ сходится, то и ряд сходится.

   Если $q' > 1$ расходится, то и ряд расходится.

Доказательство.

Судя по формулировке билета, первые два пункта доказывать не нужно, но доказательство у них быстрое, так что пусть тоже будет.

1. $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1 \implies a_n \geqslant 1 \implies a_n \not\to 0$, не выполняется необходимое условие. ‘
2. $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1 \implies a_n \leqslant q^n$

   Воспользуемся признаком сравнения с $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$. Это сумма геометрической прогрессии, знаменатель которой меньше 1, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится. Значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

3. (a) $\overline{\lim} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q' > 1 \implies$ найдется подпоследовательность a_{n_k}, такая что $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = q' > 1$

   $\implies$ найдется такая окрестность, что при достаточно больших k все $a_{n_k} \in (1, \dots)$ (важно, что промежуток точно больше 1)

   $\implies a_{n_k} > 1$

   $\implies a_n \not\to 0$, ряд расходится

   (b) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q' < 1$

   $\implies$ (по определению верхнего предела) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geqslant n} \sqrt[k]{a_k} = q' < 1$

   $\implies$ можно выбрать окрестность $(\dots, \frac{q'+1}{2}) \subset (\dots, 1)$, такую что начиная с некоторого момента все $\sup\limits_{k\geqslant n} \sqrt[k]{a_k}$ попадают в эту окрестность, то есть $\sup\limits_{k\geqslant n} \sqrt[k]{a_k} < \frac{q'+1}{2} < 1$

   $\implies \sqrt[k]{a_k} < \frac{q'+1}{2} < 1$ при достаточно больших k, тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по доказанному в пункте 2.

□

Пример.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, при $x > 0$

$\sqrt[n]{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{\sqrt[n]{n!}}$

Воспользуемся формулой Стирлинга:

$\frac{x}{\sqrt[n]{n!}} \sim \frac{x}{\sqrt[n]{n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}}} \sim \frac{x}{\frac{n}{e}} = \frac{xe}{n} \to 0$

$\Longrightarrow$ ряд сходится

Замечание.

Если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится

   $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ – сходится

   $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n+1}} = 1$

3.5. Билет 44: Признак Даламбера. Примеры. Связь между признаками Коши и Даламбера.

Теорема 3.2 (признак Даламбера)**.**

$a_n > 0$

1. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, то ряд расходится.
2. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant d < 1$, то ряд сходится.
3. Пусть $d^* = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

   Если $d^* < 1$, то ряд сходится.

   Если $d^* > 1$, то ряд расходится.

Доказательство.

1. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 \implies a_n \leqslant a_{n+1}$

   $\Longrightarrow$ начиная с некоторого места члены ряда возрастают, $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant ...$

   $\Longrightarrow a_n \not\to 0 \implies$ ряд расходится

2. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant d \implies a_{n+1} \leqslant d \cdot a_n$ начиная с некоторого места.

   $\Longrightarrow a_{n+k} \leqslant d^k \cdot a_n$ при всех k

   $\Longrightarrow$ при всех $k \geqslant n$ $a_k \leqslant d^{k-n} \cdot a_n = d^k \cdot \frac{a_n}{d^n} = d^k \cdot const$

   $\Longrightarrow a_k = \mathcal{O}(d^k)$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} d^k$ – это сумма геометрической прогрессии, знаменатель которой меньше 1, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d^k$ сходится, тогда по признаку сравнения $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится.

3. (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^* < 1$

   $d := \frac{d^*+1}{2} < 1$

   $\implies$ начиная с некоторого номера $\frac{a_{n+1}}{a_n} < d < 1 \implies$ попали в первый пункт, сходится

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^* > 1$

   $\implies$ с некоторого номера $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$

   $\implies$ ряд расходится.

□

Замечание.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ – сходится

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1$$

Пример.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, при $x > 0$

<u>По Даламберу.</u>

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \to 0$

$\implies$ ряд сходится

<u>По Коши.</u>

$\sqrt[n]{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{\sqrt[n]{n!}}$

Воспользуемся формулой Стирлинга:

$\frac{x}{\sqrt[n]{n!}} \sim \frac{x}{\sqrt[n]{n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}}} \sim \frac{x}{\frac{n}{e}} = \frac{xe}{n} \to 0$

$\implies$ ряд сходится

Теорема 3.3 (Связь между признаками Коши и Даламбера)**.**

$a_n > 0$

Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: d$, то существует и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ и он равен d

Доказательство.

Будем рассматривать не сами выражения, а их логарифмы.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d \iff \lim\limits_{n\to\infty} \ln(\frac{a_{n+1}}{a_n}) = \ln d$

Хотим доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{a_n} = \ln d$

Применяем Штольца!

$\lim\limits_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{(n+1)-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(\frac{a_{n+1}}{a_n}) = \ln d$

□

3.6. Билет 45: NAME

3.7. Билет 46: NAME

3.8. Билет 47: NAME

3.9. Билет 48: NAME

3.10. Билет 49: NAME

3.11. Билет 50: NAME

3.12. Билет 51: NAME

3.13. Билет 52: NAME

3.14. Билет 53: NAME

3.15. Билет 54: NAME

3.16. Билет 55: Критерий Коши для равномерной сходимости последовательностей.

Теорема 3.4. (Критерий Коши для равномерной сходимости последовательностей)

Пусть $f_n : E \mapsto \mathbb{R}$. Тогда f_n равномерно сходится на E к некоторой функции

$$\iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n \geqslant N \quad \forall x \in E \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство.

"$\Longrightarrow$"

Знаем, что $f_n \to f$ на E. Тогда возьмем $\dfrac{\varepsilon}{2}$ вместо ε в определение равномерной сходимости и найдем по нему соотвествующее N.

$$\forall n \geqslant N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall m \geqslant N \quad \forall x \in E \quad |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда по неравенству треугольника $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| =$

$= |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$" \Longleftarrow "$

Знаем, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n \geqslant N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Зафиксируем некоторый произвольный $x \in E$ и рассмотрим числовую последовательность $f_n(x)$.

Замечание. Воспоминание из 1 семестра : последовательность x_n называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n \geqslant N \quad \Longrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$

Тогда $f_n(x)$ - фундаментальная последовательность. Тогда по критерию Коши для числовых последовательностей она имеет конечный предел : пусть $f(x) := \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$

Берем неравенство $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ и устремим m к ∞. При переходе к пределу потеряется строгость знака $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.

Перебрав $\forall x \in E$ получаем, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Это и есть определение равномерной сходимости $f_n \rightrightarrows f$ на E □

3.17. Билет 56: Пространство ℓ^∞ и его полнота

***Определение* 3.1.** Пространство $\ell^\infty(E)$.

$$\ell^\infty(E) := \{f : E \mapsto \mathbb{R} \mid \sup_{x \in E} |f(x)| < +\infty\}$$

с нормой $||f||_{\ell^\infty(E)} := \sup\limits_{x \in E} |f(x)|$

Другими словами, нормированное пространство $\ell^\infty(E)$ состоит из ограниченных на E функций.

Замечание. $\sup\limits_{x \in E} |f(x)|$ действительно норма

1. $||f|| \geqslant 0$ и $||f|| = 0 \iff \sup\limits_{x \in E} |f(x)| \geqslant 0$ и $\sup\limits_{x \in E} |f(x)| = 0 \iff f \equiv 0$
2. $\sup\limits_{x \in E} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup\limits_{x \in E} f(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X$
3. Неравенство треугольника

   $||f + g|| = \sup\limits_{x \in E} |f(x) + g(x)| \leqslant \sup\limits_{x \in E} (|f(x)| + |g(x)|) \leqslant \sup\limits_{x \in E} |f(x)| + \sup\limits_{x \in E} |g(x)| = ||f|| + ||g||$

В доказательстве нер-ва треугольника пользовались тем, что $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ и $\sup(f + g) \leqslant \sup(f) + \sup(g)$

Замечание. Связь нормы с равномерной сходимостью

$f_n \rightrightarrows f$ на $E \iff \lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0 \iff \lim\limits_{n \to +\infty} ||f_n - f|| = 0 \iff$

f_n сходится к f в пространстве $\ell^\infty(E)$

То есть про равномерную сходимость можно думать как про сходимость в специальном нормированном пространстве.

Теорема 3.5.

$\ell^\infty(E)$ - полное нормированное пространство.

Доказательство.

Надо доказать, что каждая фундаментальная последовательность из ℓ^∞ сходится к элементу этого же пространства.

Пусть f_n фундаментальная последовательность из ℓ^∞. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n \geqslant N \quad ||f_n - f_m|| < \varepsilon$$

Заметим, что $||f_n - f_m|| = \sup\limits_{x \in E} |f_n(x) - f_m(x)| \geqslant |f_n(x) - f_m(x)|$ при $x \in E$.

То есть $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Тогда по критерию Коши для равномерной сходимости $f_n \rightrightarrows f$, где $f : E \mapsto \mathbb{R}$ - некоторая функция.

Осталось понять, что $f \in \ell^\infty(E)$, т.е. что f - ограниченная функция.

Подставим $\varepsilon = 1$ в определение равномерной сходимости. Для него найдется N, т.ч. при $n \geqslant N$ $|f_n(x) - f(x)| < 1$ при всех $x \in E$. Тогда по неравенству треугольника :

$$|f(x)| \leqslant |f_n(x)| + |f(x) - f_n(x)| < |f_n(x)| + 1 \leqslant ||f_n|| + 1$$

Но т.к. n - фиксированное число, то $|f(x)|$ не превосходит какого-то фиксированного выражения. Значит f - ограниченная функция. $\square$

3.18. Билет 57: NAME

3.19. Билет 58: NAME

3.20. Билет 59: NAME

3.21. Билет 60: NAME

3.22. Билет 61: NAME

3.23. Билет 62: NAME

3.24. Билет 63: NAME

3.25. Билет 64: NAME

3.26. Билет 65: NAME

3.27. Билет 66: NAME

3.28. Билет 67: Равномерная сходимость степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда. Теорема Абеля.

Теорема 3.6.

R – радиус сходимости, $0 < r < R$. Тогда в круге $|z| \leqslant r$ ряд сходится равномерно.

Доказательство.

$r < R \implies \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ сходится абсолютно. Для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\ |z| \leqslant r$ воспользуемся признаком Вейерштрасса. $|a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n$, $|a_n| r^n$ сходится $\implies$ по признаку Вейерштрасса $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\ |z| \leqslant r$ сходится равномерно. □

Замечание.

Равномерной сходимости во всем круге может не быть.

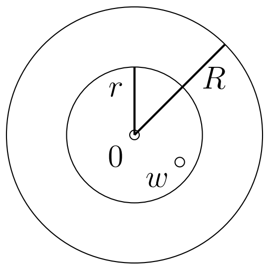
Контрпимер $R = 1$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, хвост ряда $\sum\limits_{k=n}^{\infty} z^k = \frac{z^n}{1-z} \not\rightrightarrows 0$, т.к. можем одновременно приблизить числитель к единице, а знаминатель к нулю, и дробь получается сколь угодно большой.

Следствие.

Сумма степенного ряда непрерывна в круге сходимости.

Доказательство.

Возьмем произвольную точку w из круга сходимости, достаточно доказать лишь непрерывность в окресности. Берем r, т.ч. $|w| < r < R$. Знаем, что в круге $|z| < r$ ряд равномерно сходится. Есть равномерная сходимость и каждое слагаемое это непрерывная функция $\implies$ в круге $|z| < r$ сумма непрерывна $\implies$ есть непрерывность суммы и в w. В силу произольности w сумма непрерывна в любой точке $|z| < R$.



□

Теорема 3.7 (Абеля)**.**

Пусть R – радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и ряд сходится при $z = R$. Тогда на отрезке $[0, R]$ ряд сходится равномерно.

Доказательство.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$. Применим признак Абеля. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится равномерно (нет зависимости от x), $\left(\frac{x}{R}\right)^n \in [0, 1] \implies$ равномерно огранич., $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ монотонно убывает, тогда по признаку Абеля $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно. □

Следствие.

$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, если выполнены условия теоремы, то $f(x) \in C[0, R]$, т.к. равномерная сходимость влечет непрерывность. В частности, $\lim\limits_{x \to R-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$.

3.29. Билет 68: Почленное интегрирование суммы степенного ряда.

Лемма.

$x_n, y_n \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n \in (0, +\infty)$. Тогда $\overline{\lim}\, x_n y_n = \lim x_n \,\overline{\lim}\, y_n$.

Доказательство.

$A = \lim x_n, B = \overline{\lim} y_n, C = \overline{\lim} x_n y_n$. (Напоминание: верхний предел это наибольший из частичных).

$\exists n_k$, т.ч. $x_{n_k} y_{n_k} \to C$. $\lim x_{n_k} y_{n_k} = \lim x_{n_k} \lim y_{n_k}$, равенство есть, т.к. существует предел слева и предел x_{n_k}. Из равенства следует, что $\lim y_{n_k} = \frac{C}{A} \leqslant B \implies C \leqslant AB$.

$\exists m_k$, т.ч. $y_{n_k} \to B$. $\lim x_{m_k} y_{m_k} = \lim x_{m_k} \lim y_{m_k} \implies \lim x_{m_k} y_{m_k} = AB \leqslant C$.

Итого равенство. □

Следствие.

Радиусы сходимости рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}$ совпадают.

Доказательство.

Домножение на z не влияет на радиус, поэтому докажем для рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n+1}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n z^n$.

$$R_1 = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}, R_2 = \frac{1}{\overline{\lim} \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\sqrt[n]{n+1}}}, R_3 = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \sqrt[n]{n}}$$

$\lim \sqrt[n]{n+1} = \lim \sqrt[n]{n} = 1$, по лемме можем вытащить из под верхнего предела и окажется, что $R_1 = R_2 = R_3$. □

Теорема 3.8 (Почленное интегрирование степенного ряда)**.**

R – радиус сходимости ряда $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. Тогда при $|x - x_0| < R$ $\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$ и полученный ряд имеет тот же радиус сходимости.

Доказательство.

На $[x_0, x]$ ряд сходится равномерно (теорема из билета 67) $\implies f \in C[x_0, x]$ и можно интегрировать почленно $\int\limits_{x_0}^{x} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (t - x_0)^n dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \int\limits_{x_0}^{x} (t - x_0)^n dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$. □

3.30. Билет 69: Комплексная дифференцируемость. Дифференцирование степенного ряда.

***Определение* 3.2.**

$f : E \mapsto \mathbb{C}$, $E \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathrm{Int}E$. Если существует $k \in \mathbb{C}$, такое что $f(z) = f(z_0) + k(z - z_0) + o(z - z_0)$ при $z \to z_0$, то f – **комплексно-дифференцируема в точке** z_0 и k – **производная** f в точке z_0.

Замечание.

1. $k = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$
2. Существование производной равносильно дифференцированию

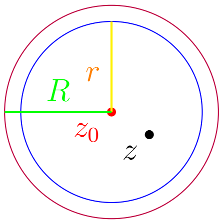
Теорема 3.9.

R – радиус сходимости ряда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

Тогда f – бесконечно дифференцируема в круге $|z-z_0|<R$ и

$f^{(m)}(z)=\sum\limits_{n=m}^{\infty}n(n-1)\dots(n-m+1)a_n(z-z_0)^{n-m}$

Доказательство.



Докажем индукцию по m. Рассмотрим $m=1$ и $z_0=0$ (про z_0 для простоты). Возьмем $|z|<R$ и подберем такое r, что $|z|<r<R$ (картинка выше для пояснения). Возьмем $|w|<r$

$$f'(z)=\lim_{w\to z}\frac{f(w)-f(z)}{w-z}=\lim_{w\to z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_nw^n-a_nz^n}{w-z}=\lim_{w\to z}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(w^{n-1}+w^{n-2}z+\dots+z^{n-1})$$

Первое равенство – просто вынесли ряд. Второе – просто поделили (что-то похожее на алгебре делали). Осталось доказать равномерную сходимость по $|w|<r$ последнего ряда, чтобы поменять местами предел и сумму. Проверять будем с помощью признака Вейерштрасса:

$$|a_n(w^{n-1}+w^{n-2}z+\dots+z^{n-1})|\leqslant|a_n|(|w|^{n-1}+|w|^{n-2}|z|+\dots+|z|^{n-1})\leqslant|a_n|nr^{n-1}$$

Второе неравенство, так как $|w|<r$ и $z<r$. Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|nr^{n-1}$ сходится, так как у ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nnz^{n-1}$ радиус сходимости $R>r$. Значит применился признак сходимости и мы можем поменять местами сумму с предлом.

$$\lim_{w\to z}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(w^{n-1}+w^{n-2}z+\dots+z^{n-1})=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{w\to z}a_n(w^{n-1}+w^{n-2}z+\dots+z^{n-1})=\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}$$

Если применить эту форму m раз, то получим искомую формулу. □

3.31. Билет 70: Формула для коэффициентов разложения в ряд аналитической функции. Несовпадение классов бесконечно дифференцируемых и аналитических функций.

Теорема 3.10 (единственность разложения функции в степенной ряд)**.**
Пусть $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ при $|z-z_0|<R$ – радиус сходимости.

Тогда ряд раскладывается единственным образом, причем коэффициенты в этом ряду будут выглядеть так: $a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Доказательство.
По предыдущей теореме:

$$f^{(m)}(z)=\sum_{n=m}^{\infty}n(n-1)\dots(n-m+1)a_n(z-z_0)^{n-m}$$

Подставим $z = z_0$. Тогда все слагаемые кроме первого занулятся и получим:

$$f^{(m)}(z_0) = m(m-1)\dots 1 \cdot a_m = m!a_m$$

. Отсюда $a_m = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. □

***Определение* 3.3.**

Ряд Тейлора функции f в точке z_0 называется ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

***Определение* 3.4.**

Функция называется **аналитической** в точке z_0, если она является суммой своего ряда Тейлора для точки z_0 в окрестности точки z_0.

Ряд Тейлора мы можем писать только, если функция бесконечно дифферинцируема. Но бывают бесконечно дифференцируемые функции, которые не являются аналитическими, например:

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{при } x \neq 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим точки $x \neq 0$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$$

Идем по индукции ($n \to n+1$), проверяем есть ли формула для разных производных:

База: Для f: $f = P_0 e^{-1/x^2}$, то есть $P_0 \equiv 1$

Переход:

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = (P_n(x)x^{-3n}e^{-1/x^2})' =$$

$$= P_n(x)x^{-3n}e^{-1/x^2}\frac{1}{x^3} + P_n'(x)x^{-3n}e^{-1/x^2} + P_n(x)(-3n)x^{-3n-1}e^{-1/x^2} = \frac{e^{-1/x^2}}{x^{3n+3}}P_{n+1}(x)$$

Найдем $f^{(n)}(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x}$ Докажем по индукции ($n-1 \to n$), что $f^{(n)}(0) = 0$.

Переход:

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}}{x} = \lim_{x\to 0} e^{-1/x^2}\frac{P_n(x)}{x^{3n+1}} \underset{y=1/x}{=} \lim_{y\to\infty} e^{-y^2}y^{3n+1}P_n\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

$P_n\left(\frac{1}{y}\right) \xrightarrow[y\to\infty]{} P_n(0)$ – константа

$e^{-y^2}y^{3n+1} \xrightarrow[y\to\infty]{} 0$, так как e^{-y^2} убывает быстрее.

Значит ряд Тейлора равен 0, но функция не 0 в точках $x \neq 0$. Значит функция не аналитическая.

3.32. Билет 71: NAME

3.33. Билет 72: NAME

4. Функции нескольких переменных

4.1. Билет 73: NAME

4.2. Билет 74: NAME

4.3. Билет 75: NAME

4.4. Билет 76: NAME

4.5. Билет 77: NAME

4.6. Билет 78: NAME

4.7. Билет 79: Теорема Лагранжа для векторнозначных функций.

Теорема 4.1.

$f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^m$ непрерывна и дифференцируема на (a,b). Тогда $\exists c \in (a,b)$, такая что $\|f(b) - f(a)\| \leqslant \|f'(c)\| (b-a)$

Доказательство.

$\varphi(x) := \langle f(x), f(b) - f(a) \rangle : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$

$\varphi(x)$ удовлетворяет условию одномерной теоремы Лагранжа

$\exists c \in (a,b)$, т.ч. $\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi(c')(b-a) = \langle f'(c), f(b) - f(a) \rangle (b-a)$

$\varphi'(x) = \langle f'(x), f(b) - f(a) \rangle + \langle f(x), (f(b) - f(a))' \rangle = \langle f'(x), f(b) - f(a) \rangle$

$\varphi(b) - \varphi(a) = \langle f(b), f(b) - f(a) \rangle - \langle f(a), f(b) - f(a) \rangle = \langle f(b) - f(a), f(b) - f(a) \rangle = \|f(b) - f(a)\|^2$

$\|f(b) - f(a)\|^2 = \langle f'(c), f(b) - f(a) \rangle (b-a) \leqslant \|f'(c)\| \|f(b) - f(a)\| (b-a)$ (Коши-Буняковский)

$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \|f'(c)\| (b-a)$ $\square$

Замечание. Равенство может никогда не достигаться

$f(x) = (\cos x, \sin x) : [0, 2\Pi] \mapsto \mathbb{R}^2$

$f(0) = (1,0) = f(2\Pi)$

$f(2\Pi) - f(0) = (0,0) \implies \|f(2\Pi) - f(0)\| = 0$

$f'(x) = ((\cos x)', (\sin x)') = (-\sin x, \cos x)$

$\|f'(x)\| = 1 \implies \|f'(c)\| (2\Pi - 0) = 2\Pi > \|f(2\Pi) - f(0)\| = 0$

4.8. Билет 80: Связь частных производных и дифференцируемости.

Теорема 4.2.

$f : E \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, a \in IntE.$

В окрестности точки а существуют все частные производные и они непрерывны в точке а.

Тогда f дифференцируема в точке а.

Доказательство.

По сути, мы знаем, как должно быть устроено линейное отображение из определения дифференцируемости, т.к. нам известны частные производные (подробнее об этом расписано в билете 76)

$R(h) := f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(a)h_k$

Надо доказать, что $\frac{R(h)}{\|h\|} \to 0$ при $h \to 0$

Заведем вспомогательные вектора: $b_k = (a_1 + h_1, ..., a_k + h_k, a_{k+1}, ..., a_n)$, заметим, что тогда получается $b_0 = a, b_n = a + h$

Рассмотрим вспомогательные функции одной переменной $F_k(t) := f(b_{k-1} + th_k e_k)$, здесь e_k - это стандартный вектор

Запишем в координатном виде: $F_k(t) := f(a_1 + h_1, ..., a_{k-1} + h_{k-1}, a_k + th_k, a_{k+1}, ..., a_n)$

Применим одномерную теорему Лагранжа: $\underbrace{F_k(1) - F_k(0)}_{f(b_k)-f(b_{k-1})} = F'_k(\Theta_k) = h_k f'_{x_k}(a_1 + h_1, ..., a_{k-1} + h_{k-1}, a_k + \Theta_k h_k, a_{k+1}, ..., a_n) = h_k f'_{x_k}(c_k)$ для некоторой $\Theta_k \in (0,1)$

Получили, что $f(b_k) - f(b_{k-1}) = h_k f'_{x_k}(c_k)$. Сложим все получившиеся равенства: $f(b_n) - f(b_0) = f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} h_k f'_{x_k}(c_k) = \sum_{k=1}^{n} h_k f'_{x_k}(a) + \sum_{k=1}^{n} h_k (f'_{x_k}(c_k) - f'_{x_k}(a))$

Заметим, что $\sum_{k=1}^{n} h_k(f'_{x_k}(c_k) - f'_{x_k}(a))$ - формула для остатка $R(h)$

$|R(h)| \leqslant \|h\| \left(\sum_{k=1}^{n} (f'_{x_k}(c_k) - f'_{x_k}(a))^2\right)^{\frac{1}{2}}$(КБШ)

$\iff \frac{R(h)}{\|h\|} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} (f'_{x_k}(c_k) - f'_{x_k}(a))^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0$ при $h \to 0$ по непрерывности частных производных

□

Замечание 1. В формулировке теоремы интересуемся дифференцируемостью скалярной функции, но дифференцируемость векторнозначной функции равносильна дифференцируемости каждой ее координатной функции, которая есть скалярная функция.

Замечание 2. Можно не требовать непрерывность ровно одной из частных производных

Доказательство.

Не требуем непрерывность f'_{x_1} в точке а. Необходимо, чтобы $f'_{x_1}(c_1) - f'_{x_1}(a) \to 0$.

Нас интересует разность $f(b_1) - f(b_0) = f(a_1 + h, a_2, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n)$. То есть получили функцию, у которой последние координаты зафиксированы, а первую меняем. Такая функция дифференцируема в точке a_1 по определению частной производной.

$f(a_1 + h, a_2, ..., a_n) = f(a_1, ..., a_n) + f'_{x_1}(a_1, ..., a_n)h_1 + o(h_1)$

$f(b_1) - f(b_0) = f'_{x_1}(a)h_1 + o(h_1)$ □

Замечание 3. Дифференцируемость в точке не дает существование част.производных в окрестности и тем более их непрерывность

Пример.

$f(x,y) = x^2 + y^2$, если ровно одно из чисел x или y рационально

$f(x,y) = 0$ иначе

f непрерывна только в точке (0, 0), в остальных точках нет непрерывности ни по какому направлению

Проверим дифференцируемость в (0, 0): $f(h,k) = \underbrace{f(0,0)}_{=0} + Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$

$f(h,k) = o(\sqrt{h^2 + k^2})$, верно, т.к. $0 \leqslant f(h,k) \leqslant h^2 + k^2$

4.9. Билет 81: NAME

4.10. Билет 82: NAME

4.11. Билет 83: NAME

4.12. Билет 84: NAME

4.13. Билет 85: NAME

4.14. Билет 86: NAME

4.15. Билет 87: Теорема Банаха о сжатии. Следствие. Метод касательных для решения уравнения

Теорема 4.3 (Теорема Банаха о сжатии)**.**

X – полное метрическое пространство. $f : X \mapsto X,\ \ 0 < \lambda < 1$ и $\rho(f(x), f(y)) \leqslant \lambda\rho(x, y)$ $\forall x, y \in X$.

Тогда существует единственная неподвижная точка, такая что $f(x) = x$.

Доказательство.

- Единственность. От противного. Пусть неподвижных точек две: $\widetilde{x}$ и x. Тогда $\rho(x,\ \widetilde{x}) = \rho(f(x),\ f(\widetilde{x})) \leqslant \lambda\rho(x,\ \widetilde{x})$. Но $\lambda < 1$. Противоречие.

- Существование.

  Возьмем произвольную начальную точку $x_0 \in X$ и $x_{n+1} = f(x_n)$. Докажем, что это фундаментальная последовательность.

  $$\rho(x_n,\ x_{n+k}) = \rho(f(x_{n-1}),\ f(x_{n-1+k})) \leqslant \lambda\rho(x_{n-1},\ x_{n-1+k}) \leqslant ... \leqslant \lambda^n\rho(x_0, x_k)$$

  Попытаемся оценить $\rho(x_0, x_k)$ по неравенству треугольника.

  $\rho(x_0,\ x_k) \leqslant \rho(x_0,\ x_1) + \rho(x_1,\ x_2) + ... + \rho(x_{k-1},\ x_k) \leqslant \rho(x_0,\ x_1) + \lambda\rho(x_0,\ x_1) + ... + \lambda^{k-1}\rho(x_0,\ x_1)$

  А это убывающая геометрическая прогрессия. Тогда,
  $\rho(x_0,\ x_k) < \frac{\rho(x_0,\ x_1)}{1-\lambda}$. Вернемся к $\rho(x_n,\ x_{n+k})$. Теперь мы можем это оценить:

  $$\rho(x_n,\ x_{n+k}) < \lambda^n\frac{\rho(x_0,\ x_1)}{1-\lambda} \longrightarrow 0$$

  Значит, рассматриваемая последовательность фундаментальна. Значит, $\exists \lim_{n\to\infty} x_n =: x^*$.

  $$f(x^*) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*$$

  По непрерывности функции f. Откуда непрерывность? Рассмотрим: $\rho(f(x),\ f(y)) \leqslant \lambda\rho(x, y)$ $\forall x, y \in X$. f это функция, уменьшающая расстояния. Поэтому, если $y \to x$, то $\rho(x,\ y) \to 0$. Тогда и $f(y) \to f(x)$. Значит, x^* и есть неподвижная точка. Что и требовалось доказать.

□

Утверждение 4.4.

$$\rho(x_n, x^*) \leqslant \lambda^n \frac{\rho(x_0, x_1)}{1-\lambda}$$

Доказательство.

Это следует из $\rho(x_n,\ x_{n+k}) < \lambda^n \frac{\rho(x_0,\ x_1)}{1-\lambda}$. Возьмем и устремим k к бесконечности. □

Следствие.

X - полное метрическое пространство, $f, g : X \mapsto X$ - сжатия с коэф. $\lambda \in (0, 1)$. $x = f(x)$ и $y = g(y)$ - неподвижные точки.

Тогда $\rho(x,\ y) \leqslant \frac{\rho(f(x),\ g(x))}{1-\lambda}$

Доказательство.

$$\rho(x,\ y) = \rho(f(x),\ g(y)) \leqslant \rho(f(x),\ g(x)) + \rho(g(x),\ g(y)) \leqslant \rho(f(x), g(x)) + \lambda\rho(x, y).$$

Добавили и вычли $g(x)$, расскрыли по нер-ву треугольника, оценили расстояние через сжатие, получили то, что нам нужно. □

Пример Метод касательных (метод Ньютона).

$f \in C^2[a, x_0]$, $f'(a) =: \mu > 0$, $f(a) = 0$ и f строго выпукла и строго монотонна. Хотим найти корень функции(быстрее чем бинпоиск).

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)} : [a, x_0] \mapsto [a, x_0]$.

Почему она действует в тот же самый отрезок?

Понятно, что $g(x) \leqslant x$, так как из x мы постоянно что-то вычитаем + f f' не отрицаительны. Более того:

$$f(x) = f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) < f'(x)(x - a), c \in [a, x_0]$$

$f(a) == 0$ + теорема Лагранжа + монотонное убывание производной

Значит, $\frac{f(x)}{f'(x)} < x - a \implies g(x) > a$

Далее докажем, что g - сжатие. Как это можно понять? По теореме Лагранжа. Мы знаем, что разница двух образов есть произведение производной в какой-либо точке t на разницу прообразов. Возьмем производную. Воспользуемся Лагранжем и тем, что производные возрастают. Пусть $M := max(f''(t))$, $t \in [a, x_0]$

$$g'(t) = 1 - \frac{f'(t)f'(t) - f(t)f''(t)}{(f'(t))^2} = \frac{f''(t)f(t)}{(f''(t))^2} < \frac{f''(t)f'(t)(t-a)}{(f''(t))^2}$$

$$\frac{f''(t)f'(t)(t-a)}{(f''(t))^2} = \frac{f''(t)(t-a)}{f'(t)} \leqslant \frac{f''(t)(t-a)}{\mu} \leqslant \frac{M}{\mu}(t-a) \leqslant \frac{M}{\mu}(x_0 - a) < 1$$

Значит, нужно добавить в условие, что $\frac{M}{\mu} < 1$.

Запустим процесс из предыдущей теоремы о сжатии. Пусть $x_n := g(x_{n-1}) \implies \lim x_n =: x^*$ и x^* - неподвижная точка.

$$x^* = g(x^*) = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)} \implies f(x^*) = 0 \iff x^* = a$$

Вот мы и получили способ поиска корня a, причем у нас есть контроль скорости.

Замечание.

Откуда взялась функция g? Пусть y - касательная графика в точке x_0, тогда $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Рассмотрим точку, когда касательная пересечет ось абсцисс, то есть $y = 0$. Тогда $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0 \implies x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. А это и есть наша функция g.

4.16. Билет 88: Оценка на норму разности значений дифференцируемого отображения. Оценка на норму обратного отображения. Теорема об обратимости отображений, близких к обратимым

Теорема 4.5 (Оценка на норму обратного отображения).

Если $A : R^n \mapsto R^n$ линейное, $\|Ax\| \geqslant m\|x\|$ $\forall x \in R^n$ и $m > 0$, тогда A - обратим и $\|A^{-1}\| \leqslant \frac{1}{m}$

Доказательство.

Нужно проверить иньективность (точки не склеиваются). Так как A линейно, нужно проверить, что A ничего не переводит в ноль, кроме нуля. То есть доказать, что $Ax = 0 \iff x = 0$.

Если $Ax = 0$, то $\|Ax\| = 0 \geqslant m\|x| \implies x = 0$.

Раз точки не склеиваются, значит $\exists A^{-1}$. Осталось оценить ее норму. Пусть $y = A^{-1}x$, тогда...

$$\|A^{-1}\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|} = \sup_{y \neq 0} \frac{\|y\|}{\|Ay\|} \leqslant \sup_{y \neq 0} \frac{\|y\|}{m\|y\|} = \frac{1}{m}$$

Что и требовалось доказать. □

Теорема 4.6 (Оценка на норму разности значений дифференцируемого отображения).

$f : R^n \mapsto R^m$ дифференцируема в $B_r(a)$ и $\|f'(x)\| \leqslant \alpha \quad \forall x \in B_r(a)$, тогда $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \alpha\|x - y\|$

Доказательство.

$\varphi(t) := \langle f(x + t(y - x)), f(y) - f(x)\rangle$.

Воспользуемся линейностью скалярного произведения. Далее применим формулу Лагранжа и возьмем $\xi \in (0, 1)$.

$$\|f(y) - f(x)\|^2 = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\xi)$$

$$\varphi'(\xi) = \langle ... \rangle' = \langle (f(x + t(y - x)))', f(y) - f(x)\rangle = \langle f'(x + t(y - x))(x + t(y - x))'_t, f(y) - f(x)\rangle =$$
$$= \langle f'(x + t(y - x))(y - x), f(y) - f(x)\rangle$$

Подставим функцию. Оценим скалярное произведение. Замечание: точка $(x + \xi(y - x))$ находится между x и y, а значит живет в шаре $B_r(a)$. Тогда $f'(x + \xi(y - x))$ - это произведение матрицы на вектор.

$$\varphi'(\xi) = \langle f'(x + \xi(y - x), f(y) - f(x))\rangle \leqslant \|f'(x + \xi(y - x))\|\|f(y) - f(x)\| \leqslant \alpha\|y - x\|\|f(y) - f(x)\|$$

Вспомним, откуда мы начинали.

$$\|f(y) - f(x)\|^2 = \varphi'(\xi) \leqslant \alpha\|y - x\|\|f(y) - f(x)\|$$

Тогда можно сократить $\|f(y) - f(x)\|$ и теорема будет доказана. □

Теорема 4.7 (Об обратимости оператора близкого к обратимому).

$A : R^n \mapsto R^n$ обратим и $\|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Тогда B - обратим, $\|B^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\|A^{-1}\| - \|B-A\|}$ и $\|B^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|\|B-A\|}{\|A^{-1}\|^{-1} - \|B-A\|}$

Доказательство.

Воспользуемся неравенством треугольника.

$$\|Bx\| \geqslant \|Ax\| - \|(B-A)x\| \geqslant \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|} - \|B-A\|\|x\| = \|x\|(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B-A\|)$$

Откуда взялся предпоследний переход? Заметим, что $\|(B-A)x\| \leqslant \|B-A\|\|x\|$. Так же подметим, что

$$\|A^{-1}\|\|Ax\| \geqslant \|A^{-1}Ax\| = \|x\| \iff \|Ax\| \geqslant \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|}$$

Пусть $m := (\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B-A\|)$. Тогда $\|Bx\| \geqslant m\|x\|, \forall x \in R^n \implies B$ - обратима и $B^{-1} \leqslant \frac{1}{m}$ по предыдущим теоремам.

Воспользуемся линейностью.

$$B^{-1} = B^{-1}(AA^{-1} - BA^{-1}) = B^{-1}(A-B)A^{-1}.$$

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| = \|B^{-1}(A-B)A^{-1}\| \leqslant \|B^{-1}\|\|A-B\|\|A^{-1}\| \leqslant \frac{\|A-B\|\|A^{-1}\|}{m}$$

Что и требовалось доказать. $\square$

Замечание.

Замечание: самое главное в этой формуле то, что $\|B-A\|$ находится в числителе. Это означает, что при $B \to A$ последовательность обратных будет стремится к обратным. Остальное в этой формуле маловажно.

4.17. Билет 89: NAME

4.18. Билет 90: NAME

4.19. Билет 91: NAME

4.20. Билет 92: NAME

4.21. Билет 93: NAME

4.22. Билет 94: NAME

4.23. Билет 95: NAME

4.24. Билет 96: NAME

4.25. Билет 97: NAME

4.26. Билет 98: NAME

5. Теория меры

5.1. Билет 99: NAME

5.2. Билет 100: NAME

5.3. Билет 101: NAME

5.4. Билет 102: NAME