603134/01 <Mathematics for Artificial Intelligence> Dec 7, 2021
SW, Hallym, Fall 2021 Due: 11:00am, Dec 7

Problem Set #3

경고: 숙제는 마감일 이후에는 채점하지 않습니다. 답을 작성할 때에는, 본인이 생각한 과정과 이유를 가장 자세하게 작성하세요.

이름: 황명원

학번: 20185309

1.1 Probability of Events

1. (Probability) 다음 sample space

$$\Omega = \{s_1, \ldots, s_n\}$$

이 주어진 상황에서 event $E = \{s_1, \ldots, s_m\}$, $m \leq n$을 고려합니다. 우리는 수업에서

$$P(E) = \sum_{i=1}^{m} P(\{s_i\})$$

가 된다는 것을 배웠습니다 (이유를 생각해보세요). 이 사실과 함께, 만약 모든 $P(\{s_i\}), i = 1, \ldots, n$ 가 동일한 확률값을 갖는다면,

$$P(E) = \frac{m}{n} \tag{1}$$

와 같이 됩니다. 아래 문제를 풀이과정과 함께 작성하세요.

(a) 위 수식 (1)을 증명하세요

(b) 다음 실험을 가정합니다. 먼저 4개의 면이 있는 $\{1, 2, 3, 4\}$ 주사위를 던지고, 다음에 5개의 면이 있는 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 주사위를 던진다. 4면, 5면 주사위는 모두 각각 동일한 확률로 결과가 나온다고 가정했을때, sample space Ω는 어떻게 되나요? 각 outcome 확률은?

(c) 두 주사위의 결과가 홀수 일 확률을 구하세요

(d) 두 주사위 결과의 합이 6이 되는 확률을 구하세요

(e) 두 주사위의 결과가 홀수 *이거나* 합이 6이될 확률을 구하세요

Answer)

(a) 모든 $P(\{s_i\}), i = 1, \ldots, n$ 가 동일한 확률을 가지고 있으므로

$$P(\{s_1\}) = P(\{s_2\}) = \ldots = P(\{s_n\}) = \frac{1}{n}$$

즉

$$P(E) = \sum_{i=1}^{m} P(\{s_i\})$$

에 의해 $P(E)$ 는 $\frac{1}{n}$ 을 m번 더하는 것이므로 $P(E) = \frac{m}{n}$ 이 성립한다.

(b) sample space $\Omega =$
$\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),$
$(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),$
$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),$
$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5)\}$

각 outcome 확률은 모두 각각 동일한 확률로 결과가 나온다고 가정했고 4개의 면이 있는 주사위 던지는 사건과 5개의 면이 있는 주사위 던지는 사건이 서로 독립이므로

각 outcome 확률은
$$\frac{1}{20}$$

(c) sample space에서 둘다 홀수인 경우를 A라고 하고 찾으면 6개가 나오므로 두 주사위 결과가 홀수 일 확률은
$$P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

(d) sample space에서 두 주사위 결과의 합이 6이 되는 경우를 B라고 하고 찾으면 4개가 나오므로 두 주사위 결과의 합이 6이될 확률은
$$P(B) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

(e) 두 주사위의 결과가 홀수 이거나 합이 6이될 확률은
$$P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
이고 실제로
$$P(A \cap B) = \frac{2}{20}$$
이므로
$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{20} + \frac{4}{20} - \frac{2}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

2. (Probability axioms) 아귀(도박사이름)는 6면 주사위를 짝수가 홀수에 비해서 2배의 확률로 나오도록 변형하였다. 짝수 끼리는 동일한 확률 a를 갖고, 홀수끼리는 동일한 확률 b로 결과가 나온다고 가정합니다. (풀이 과정을 작성하세요)

(a) 확률함수의 성질을 이용하여 a와 b 값을 구하세요

(b) 짝수 결과가 나올 확률은?

(c) 3보다 크거나 같은 값이 나올 확률은?

Answer)

(a) 짝수가 나올 확률은 a , 홀수가 나올 확률은 b이고 짝수가 홀수에 비해 2배의 확률로 나오므로
$$a = 2b \tag{2}$$
짝수는 3번 나오고 홀수도 3번나오므로 모든확률은 1이므로
$$3a + 3b = 1$$
이때 (2)에서 구한 식을 위 식에 대입해 풀면
$$a = \frac{2}{9}, b = \frac{1}{9}$$

(b) 짝수가 나올확률을 모두 더하면 되므로

$$3a = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

(c) 3보다 크거나 같은 값은 짝수는 2개,홀수도 2개가 나올수 있으므로

$$2a + 2b = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

3. (Baye's Rule) Baye's rule을 증명하세요

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

Answer)
조건부 확률 $P(X|Y)$ 라는 뜻은 $P(Y)$중 $P(X \cap Y)$ 라는 뜻이다.

즉

$$P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} \tag{3}$$

마찬가지로 $P(Y|X)$ 도 구하면

$$P(Y|X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} \tag{4}$$

(3)식에다가 양변에 $P(Y)$를 곱하고 (4)식에다가 $P(X)$를 곱하면

$$P(X|Y)P(Y) = P(X \cap Y)$$
$$P(Y|X)P(X) = P(X \cap Y)$$

$$\therefore P(X|Y)P(Y) = P(Y|X)P(X)$$

양변을 $P(Y)$로 나누면

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

즉 위 식은 성립한다.

4. (Harry Potter) 호그와트에 학생들이 덤블도어편(D)이 될지 볼드모트(V)의 편이 될지, 중립이 될지 (N) 확률을 알고자 한다. 호그와트에는 4개의 기숙사가 있고, 각 이름이 Gryffindor (G), Hufflepuff (H), Ravenclaw (R), Slytherin (S)이다. 아래 왼쪽 그림은 마법 모자가 각 학생을 기숙사로 배정할 확률을 나타낸다. 예를들어서 Gryffindor로 배정될 확률은

$$P(G) = 0.3$$

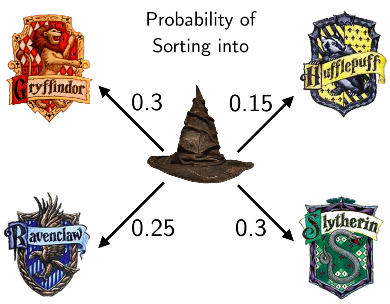
이 된다. 우측 그림은 각 기숙사 학생이 덤블도어편 (Dumbledore's army) 또는 볼드모트 편 (Voldemort's death eater) 또는 중립 (Neither)이 될 (조건부) 확률을 나타낸다. 예를 들어서, Gryffindor 학생중에서 덤블도어편에 있을 확률은:

$$P(D|G) = 0.4$$

이고, Slytherin 기숙사 학생이 Voldemort's death eater가 될 확률은

$$P(V|S) = 0.4$$

이다.



Conditional Probability of a House Member Fighting for	Gryffindor	Hufflepuff	Ravenclaw	Slytherin
Dumbledore's Army	0.4	0.25	0.2	0.1
Voldemort's Death Eaters	0.1	0	0.1	0.4
Neither	0.5	0.75	0.7	0.5

풀이과정과 함께 다음 문제를 푸세요.

(a) Gryffindor 학생이면서 Dumbledore편에 있을 확률 $P(G \cap D)$은?

(b) 호그와트 학생중에서 덤블도어편에 있을 확률 $P(D)$은? 볼드모트 편에 있을 확률$P(V)$은?

(c) 중립 (N)인 학생중에서 Ravenclaw 기숙사 학생일 확률 $P(R|N)$?

hint)

(a) $P(G \cap D) = P(G)P(D|G)$를 이용함

(b) $D = (D \cap G) \cup (D \cap H) \cup (D \cap R) \cup (D \cap S)$ 인 관계와, 각 합집합하는 event들 (예, $(D \cap G)$와 $(D \cap H)$)은 disjoint하다는 사실 이용 (즉, 교집합이 공집합임)

(c) Bayes Rule을 이용 $P(N|R) = P(R|N)P(N)/P(R)$

Answer)

(a) $P(G \cap D) = P(G)P(D|G)$ 이고 $P(G)$=0.3이고,$P(D|G)$=0.4이므로

$$P(G \cap D) = 0.3 \times 0.4 = 0.12$$

(b) $D = (D \cap G) \cup (D \cap H) \cup (D \cap R) \cup (D \cap S)$ 에서
한 학생이 두개이상의 기숙사를 들어가 볼드모트편이 될 경우가 없으므로
$(D \cap G)$와$(D \cap H)$와$(D \cap R)$와$(D \cap S)$은 disjoint 하다.

즉 D는 각 event들의 합으로 구할수 있고 (a)에서 구한 방식처럼 나머지
$P(D \cap H)$,$P(D \cap R)$,$P(D \cap S)$를 구하면

$$P(D \cap H) = 0.0375, P(D \cap R) = 0.05, P(D \cap S) = 0.03$$

$$\therefore P(D) = P(D \cap G) + P(D \cap H) + P(D \cap R) + P(D \cap S) = 0.2375$$

마찬가지의 방식으로 P(V)도 구해주면

$$P(V \cap G) = 0.03, P(V \cap H) = 0, P(V \cap R) = 0.025, P(V \cap S) = 0.12$$

$$\therefore P(V) = P(V \cap G) + P(V \cap H) + P(V \cap R) + P(V \cap S) = 0.175$$

(c)

$$P(N|R) = P(R|N)P(N)/P(R)$$

$$\therefore P(R|N) = P(R)P(N|R)/P(N)$$

위에서 $P(R) = 0.25, P(N|R) = 0.7$라고 나왔고 $P(N) = 1 - \{P(D) + P(V)\}$ 이므로
$P(N) = 0.5875$

$\therefore P(R|N) = 0.25 \times 0.7/0.5875 = 0.29787234042$

1.2 Random variables

5. (True or False) 다음 관계들이 참(T)인지 거짓 (F)인지 판별하세요.

(a) $P_{X|Y}(x|y) = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)}$

(b) $P_X(a) = \sum_{b \in Val(Y)} P_{X,Y}(a,b)$

(c) $P_{X|Z}(a|c) = \sum_{b \in Val(Y)} P_{X,Y|Z}(a,b|c)$

(d) $P_{X,Y,Z}(x,y,z) = P_{Y|X,Z}(y|x,z)P_{X,Z}(x,z)$

(e) $P_{X,Y|Z}(x,y|z) = P_{Y|X,Z}(y|x,z)P_{X|Z}(x|z)$

Answer)

(a) T

(b) T

(c) T

(d) T

(e) T

6. (Chain rule) 다음 관계를 증명하세요.

$$P_{W,X,Y,Z}(w,x,y,z) = P_W(w)P_{X|W}(x|w)P_{Y|W,X}(y|w,x)P_{Z|W,X,Y}(z|w,x,y)$$

hint) $P_{A,B}(a,b) = P_A(a)P_{B|A}(b|a)$를 여러번 적용 하면 됩니다.
Answer)

$$\begin{aligned}P_{W,X,Y,Z}(w,x,y,z) &= P_{W,X,Y}(w,x,y)P_{Z|W,X,Y}(z|w,x,y)\\ &= P_{W,X}(w,x)P_{Y|W,X}(y|w,x)P_{Z|W,X,Y}(z|w,x,y)\\ &= P_W(w)P_{X|W}(x|w)P_{Y|W,X}(y|w,x)P_{Z|W,X,Y}(z|w,x,y)\end{aligned}$$

즉 위 관계는 성립한다.

7. (Dice) 6면 주사위가 2개 있다고 가정합니다. 첫번째 주사위의 결과를 X_1이라는 random variable로 X_2 는 두번째 주사위의 결과를 대변하는 random variable이라고 가정합니다. 두 주사위를 던지는 행위는 각각 독립사건이며,

$$\begin{aligned}P_{X_1}(x_1) &= \frac{1}{6}, \quad x_1 \in \{1,\dots,6\}\\ P_{X_2}(x_2) &= \frac{1}{6}, \quad x_2 \in \{1,\dots,6\}\end{aligned}$$

의 분포를 갖는다. 다음 문제들에 대해서 풀이와 과정과 함께 작성하세요.

(a) Joint distribution $P_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ 를 구하세요.

(b) Conditional distribution $P_{X_1|X_2}(x_1|x_2)$를 구하세요.

Answer)

(a) $x1$과$x2$가 동시에 일어나면서 나올수있는 경우들의 확률은 모두 동일하게 $\frac{1}{36}$이므로

$$P_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{36}$$

(b) 두 주사위를 던지는 행위는 각각 독립이므로

$$P_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = P_{X_1}(x_1)$$

모든 $x1$에 대해서 나오는 경우들은 다 동일하게 $\frac{1}{6}$ 이므로

$$\therefore P_{X_1}(x_1) = \frac{1}{6}$$

8. (Dice part 2) 위 문제와 동일한 상황을 가정하고, 새로운 random variable Y를 다음과 같이 정의합니다:

$$Y = X_1 + X_2,$$

즉, Y는 두 주사위 결과의 합이라고 가정합니다.

(a) $Val(Y) =?$

(b) $P_{Y|X_1,X_2}(5|2,1) =?$

(c) $P_{Y|X_1,X_2}(3|2,1) =?$

(d) $P_{X_1,X_2,Y}(1,1,3) =?$

(e) $P_Y(y)$, $y \in Val(Y)$를 구하세요

Answer)

(a) Y는 2부터 12까지 나올수있으므로

$$Val(Y) = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

(b) $x1 = 2$ 이고$x2 = 1$이면서 합이 5인확률은 없으므로

$$P_{Y|X_1,X_2}(5|2,1) = 0$$

(c) $x1 = 2$ 이고$x2 = 1$이면서 합이 3인 확률은 1이므로

$$P_{Y|X_1,X_2}(3|2,1) = 1$$

(d)

$$\begin{aligned} P_{X_1,X_2,Y}(1,1,3) &= P_{X_1,X_2}(1,1)P_{Y|X_1,X_2}(3|1,1) \\ &= \frac{1}{36} \times 0 \end{aligned}$$
$$\therefore P_{X_1,X_2,Y}(1,1,3) = 0$$

(e)

$$P_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{36}, & \text{if } y = 2 \text{ or } y = 12 \\ \frac{2}{36}, & \text{if } y = 3 \text{ or } y = 11 \\ \frac{3}{36}, & \text{if } y = 4 \text{ or } y = 10 \\ \frac{4}{36}, & \text{if } y = 5 \text{ or } y = 9 \\ \frac{5}{36}, & \text{if } y = 6 \text{ or } y = 8 \\ \frac{6}{36}, & \text{if } y = 7 \end{cases}$$