Problem Set #3

경고: 숙제는 마감일 이후에는 채점하지 않습니다. 답을 작성할 때에는, 본인이 생각한 과정과 이유를 가장 자세하게 작성하세요.

이름: 황명원

학번: 20185309

1. (Vector subspace) Subset $V \subset \mathbb{R}^3$는

$$V = \left\{ v : v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & 0 \end{bmatrix}^T, v_1, v_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

와 같다고 가정합니다. Set V는 vector subspace임을 보이세요.

Sol) V가 vector subspace임을 보이기 위해서, V가 닫혀있다는 것을 보인다. 먼저, 일반적 vector $x \in V, y \in V$ 를 가정하면, 다음과 같이 표현 가능하다:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

이를 위해서 $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$을 계수로 하는 선형 결합을 하면,

$$c_1 x + c_2 y = \begin{bmatrix} c_1 x_1 + c_2 y_1 \\ c_1 x_2 + c_2 y_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

가 되어, $c_1 x + c_2 y \in V$. 즉, V는 닫혀있다.

$\therefore$ Set V is vector subspace

2. (Basis) 다음 3가지 경우에 대해서, basis인지 판단하고 이유를 작성하세요. Basis 인 경우, 그 basis의 span의 dimension을 구하세요.

(a) $\{[1, 0]^T, [0, 1]^T\}$ is a basis for $\mathbb{R}^2$?

(b) $\{[1, 1]^T\}$ is a basis for $V = \{v \in \mathbb{R}^2 : v_1 = v_2\}$?

(c) $\{[1, 0]^T, [0, 1]^T, [1, 1]^T\}$ is a basis for $\mathbb{R}^3$?

Sol)

(a) $\mathbb{R}^2$의 모든 vector는 $[a, b]^T$, $a, b \in \mathbb{R}$로 나타낼 수 있다. 일반적으로,

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

의 선형결합으로 나타낼 수 있고, 두 vector는 선형 독립이기 때문에 basis가 됨. Basis set의 크기가 2임으로 dimension은 2가 된다.

True, dimension = 2

(b) V의 모든 vector는 $[a, a]^T$, $a \in \mathbb{R}$로 나타낼 수 있다. 일반적으로,

$$\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

의 선형결합으로 나타낼 수 있고, 한개의 vector로 이루어진 셋이기때문에, 선형독립 조건은 무조건 성립하여 basis가 됨. Basis set의 크기가 1임으로 dimension은 1가 된다.

True, dimension = 1

(c) 선형 독립이 아니기 때문에, False

3. (Span) 다음 vector들을 고려하여 문제를 푸세요:

$$v_1 = [1, 0, 0]^T, \quad v_2 = [1, 1, 1]^T, \quad v_3 = [2, 1, 1]^T$$

다음 조건이 성립하는지 보이고, 이유 (증명)을 하세요.

(a) $\text{span}(\{v_1, v_2, v_3\}) = \text{span}(\{v_1, v_2\})$

(b) $\text{span}(\{v_1, v_2\}) = \text{span}(\{v_2, v_3\}) = \text{span}(\{v_1, v_3\})$

Sol)

(a) 첫번째로, $\{v_1, v_2\} \subset \{v_1, v_2, v_3\}$와 span의 정의에 의해서 $\text{span}(\{v_1, v_2\}) \subseteq \text{span}(\{v_1, v_2, v_3\})$는 성립함. 다음 $\text{span}(\{v_1, v_2, v_3\}) \subseteq \text{span}(\{v_1, v_2\})$을 증명하기 위해서, 문제의 가정에 의해서

$$v_3 = v_1 + v_2$$

임을 확인한다. 또한, $\text{span}(\{v_1, v_2, v_3\})$의 일반적 vector w를 살펴보면,

$$\begin{aligned} w &= (c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3) \\ &= (c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 (v_1 + v_2)) \\ &= (c_1 + c_3) v_1 + (c_2 + c_3) v_2 \in \text{span}(\{v_1, v_2\}) \end{aligned}$$

즉,

$$\text{span}(\{v_1, v_2, v_3\}) \subseteq \text{span}(\{v_1, v_2\}).$$

(b) $v_2 = v_3 - v_1$인 관계와 $v_1 = v_3 - v_2$인 관계를 이용해서 위 (a)번과 같은 방법으로

$$\text{span}(\{v_1, v_2, v_3\}) = \text{span}(\{v_2, v_3\}),$$

와

$$\text{span}(\{v_1, v_2, v_3\}) = \text{span}(\{v_1, v_3\}),$$

를 보일 수 있음. 즉,

$$\text{span}(\{v_1, v_2\}) = \text{span}(\{v_2, v_3\}) = \text{span}(\{v_1, v_3\}).$$

4. (Range and Null space)

Matrix $V = [v_1, v_2]$와 vector $v_1 = [2, 5, 3]^T$, $v_2 = [1, 1, 1]^T$를 고려하여 문제를 푸세요. Matrix V의 range는 다음과 같이 정의 됩니다:

$$\mathcal{R}(V) = \text{span}(\{v_1, v_2\}).$$

(a) Vector $v_3 = [2, 1, -3]^T$이 V^T의 nullspace에 들어 있음을 보이세요

(b) $\mathcal{N}(V^T) = \text{span}(v_3)$ 임을 보이세요

Sol)

(a) Nullspace의 정의는

$$\mathcal{N}(V^T) = \{x \in \mathbb{R}^3 : V^T x = 0\}$$

과 같다. v_3가 $\mathcal{N}(V^T)$에 원소임을 확인하기 위해서:

$$V^T v_3 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

즉, vector $v_3 \in \mathcal{N}(V^T)$

(b)

첫번째 단계로, $\mathcal{N}(V^T) \supseteq \text{span}(v_3)$임을 보인다.

다음 vector $w \in \text{span}(v_3)$임을 가정하면, 일반적으로 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$w = (c_1 v_3) = \begin{bmatrix} 2 \times c_1, & 1 \times c_1, & -3 \times c_1 \end{bmatrix}^T \ , c_1 \in \mathbb{R}$$

또한,

$$V^T w = \begin{bmatrix} 2 \times 2 \times c_1 + 5 \times 1 \times c_1 + 3 \times -3 \times c_1 \\ 2 \times c_1 + 1 \times c_1 + -3 \times c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

이 성립하여

$$\begin{aligned} w \in \text{span}(v_3) &\implies V^T w = 0 \\ &\implies w \in \mathcal{N}(V^T) \\ &\implies \mathcal{N}(V^T) \supseteq \text{span}(v_3). \end{aligned}$$

반대 경우인 $\mathcal{N}(V^T) \subseteq \text{span}(v_3)$ 증명을 위해서, $x \neq 0$, $x \in \mathcal{N}(V^T)$을 고려한다.

$$\mathcal{R}(V) \cap \mathcal{N}(V^T) = \{0\}$$

에 의해서, $x \notin \mathcal{R}(V) = \text{span}(\{v_1, v_2\})$인 이유로, x는 $\{v_1, v_2\}$와 선형 독립임을 알 수 있다. 또한, $\{v_1, v_2, v_3\}$는 선형 독립임을 확인할 수 있다. $\text{span}(\{v_1, v_2, v_3\}) = \mathbb{R}^3$와 $x \notin \text{span}(\{v_1, v_2\})$인 이유로, $x \in \text{span}(v_3)$.