

Semesteraufgabe Analytische und Numerische Methoden

SS2016

Numerischer Aufgabenteil

Inhaltsverzeichnis

1	Verfahrensgrundgerüst	1
1.1	1-Dimensionales Differentialgleichungssystem.....	1
1.2	1-Dimensionaler Lax-Friedrichs Fluss.....	1
1.3	Diskrete Form des Differentialgleichungssystems.....	1
1.4	2-Dimensionaler Lax-Friedrichs Fluss.....	2
2	Implementierung und Validierung 1D.....	3
2.1	Einstellungen der Simulation	3
2.2	Ergebnisse	3
3	Implementierung und Validierung 2D.....	5
3.1	Einstellungen der Simulation	5
3.2	Ergebnisse	6
4	2D Dammbbruch Simulation.....	8
4.1	Einstellungen der Simulation	8
4.2	Ergebnisse	9

In der Semesteraufgabe sollen die zweidimensionalen Flachwassergleichungen mit Hilfe des Finite-Volumen-Verfahrens explizit auf einem kartesisches Gitter diskretisiert und implementiert werden. Die Flachwassergleichungen lauten

$$\underline{U}_t + \underline{F}_x + \underline{G}_y = \underline{S} \quad (1)$$

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \underline{F} = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + 1/2 gh^2 \\ huv \end{pmatrix}, \underline{G} = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + 1/2 gh^2 \end{pmatrix}, \underline{S} = \begin{pmatrix} S_a \\ S_b \\ S_c \end{pmatrix} \quad (2)$$

mit der Wasserhöhe $h = f(x, y, t)$, den horizontalen und vertikalen Geschwindigkeiten $u, v = f(x, y, t)$, den Quelltermen $S_a, S_b, S_c = f(x, y, t)$ und der Gravitationskonstante $g = 10$.

Zunächst wird das notwendige Verfahrensgrundgerüst hergeleitet. Anschließend wird das FV Verfahren für das eindimensionale Differentialgleichungssystem implementiert und validiert. Danach wird die Implementierung für das zweidimensionale Differentialgleichungssystem erweitert und mit „Manufactured Solution“ validiert. Schließlich wird ein 2D Dammbruch simuliert.

1 Verfahrensgrundgerüst

1.1 1-Dimensionales Differentialgleichungssystem

Für den eindimensionalen Fall lässt sich Gl. (2) zu Gl. (3) vereinfachen.

$$\begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + 1/2 gh^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_a \\ S_b \end{pmatrix} \quad (3)$$

1.2 1-Dimensionaler Lax-Friedrichs Fluss

Der Lax-Friedrichs-Fluss wird als Gl. (5) angegeben.

$$g(u_L, u_R)^n = \frac{1}{2} (f_L^n + f_R^n) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} (u_R^n - u_L^n) \quad (4)$$

$$\underline{g}_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + 1/2 gh^2 \end{pmatrix}_i^n + \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + 1/2 gh^2 \end{pmatrix}_{i+1}^n \right) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \left(\begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}_{i+1}^n - \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}_i^n \right) \quad (5)$$

1.3 Diskrete Form des Differentialgleichungssystems

Um die diskrete Form des Differentialgleichungssystems für zweidimensionalen Fall wird die Gl.(1) über $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]$ integriert.

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \underline{U}_t + \underline{F}_x + \underline{G}_y dt dy dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \underline{S} dt dy dx \quad (6)$$

Die Mittelwerte der Integrale wird durch folgende Abkürzungen ersetzt.

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \underline{U}_t dt dy dx = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \underline{U}_{i,j}^{n+1} - \underline{U}_{i,j}^n dy dx \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \underline{F}_x dt dy dx &= \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \underline{F}_{i+1/2,j}^n - \underline{F}_{i-1/2,j}^n dt dy \\ &= (\underline{F}_{i+1/2,j}^n - \underline{F}_{i-1/2,j}^n) \Delta t \Delta y \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \underline{G}_y dt dy dx &= \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \underline{G}_{i,j+1/2}^n - \underline{G}_{i,j-1/2}^n dt dx \\ &= (\underline{G}_{i,j+1/2}^n - \underline{G}_{i,j-1/2}^n) \Delta t \Delta x \end{aligned} \quad (9)$$

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \underline{S} dt dy dx = \underline{S} \Delta t \Delta y \Delta x \quad (10)$$

Anschließend werden Gl. (7) bis (10) in Gl. (6) eingesetzt und nach \underline{U}_j^{n+1} aufgelöst. Es ergibt sich die explizite, diskrete Form der Differentialgleichungssystems.

$$\underline{U}_j^{n+1} = \underline{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\underline{F}_{i+1/2,j}^n - \underline{F}_{i-1/2,j}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (\underline{G}_{i,j+1/2}^n - \underline{G}_{i,j-1/2}^n) + \underline{S} \Delta t \quad (11)$$

1.4 2-Dimensionaler Lax-Friedrichs Fluss

Lax-Friedrichs-Fluss für die horizontale Zellkante $\underline{g}(\underline{U}_L, \underline{U}_R)$ und die vertikale Zellkante $\underline{h}(\underline{U}_L, \underline{U}_R)$.

$$\underline{g}_{i+1/2,j}^n = \frac{1}{2} (\underline{F}_{i-1,j}^n + \underline{F}_{i,j}^n) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} (\underline{U}_{i,j}^n - \underline{U}_{i-1,j}^n) \quad (12)$$

$$\underline{h}_{i,j+1/2}^n = \frac{1}{2} (\underline{G}_{i,j-1}^n + \underline{G}_{i,j}^n) - \frac{\Delta y}{2\Delta t} (\underline{U}_{i,j}^n - \underline{U}_{i,j-1}^n) \quad (13)$$

2 Implementierung und Validierung 1D

2.1 Einstellungen der Simulation

Im 1D-Fall lautet das diskrete Differentialgleichungssystem

$$\underline{U}_j^{n+1} = \underline{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\underline{g}_{i+1/2}^n - \underline{g}_{i-1/2}^n) \quad (14)$$

und den numerischen Fluss \underline{g} lässt sich durch Gl. (12) berechnen, wobei $j = 1$ für 1D Fall ist.

Das Berechnungsgitter wird in Abbildung 2.1 schematisch dargestellt. Es hat N Zellen und $N+1$ Zellkanten. Zur Implementierung der Randbedingungen wird das Gitter mit N Zellen auf $N_{ghost} = N+2$ erweitert. Die Randbedingungen werden in der ersten und letzten Zelle (rot markiert in Abbildung 2.1) gesetzt.

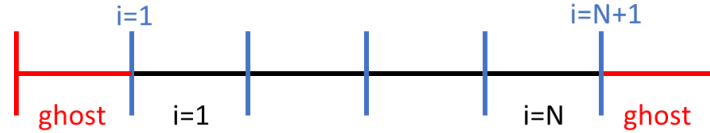


Abbildung 2.1 Darstellung des Gitters und Index der Zellen und Zellkanten

Für den 1D Fall werden Ausströmrandbedingungen verwendet.

$$h_{ghost} = h_r, \quad u_{ghost} = u_r$$

Für den linken Rand gilt

$$h_{g,links} = h_{i=1}, \quad u_{g,links} = u_{i=1}$$

Für den rechten Rand gilt

$$h_{g,rechts} = h_{i=N}, \quad u_{g,rechts} = u_{i=N}$$

Drei Gitter mit unterschiedlicher Auflösung werden verwendet, die eine Ausdehnung von $\Omega = [-1,1]$ und jeweils die Anzahl von $N = 25, 50, 100$ Zellen haben.

Die Abschätzung der Zeitschritten lautet

$$\Delta t_{1D} \leq CFL \frac{\Delta x}{\max(|u| + \sqrt{gh})}; \quad CFL = 0.8 \quad (15)$$

Die Simulation wird mit folgenden Zuständen initialisiert und bis $t_{end} = 0.2s$ berechnet.

$$\underline{U} = \begin{cases} \underline{U} = (1.0, 0.0)^T, & x \leq 0 \\ \underline{U} = (0.5, 0.0)^T, & x > 0 \end{cases} \quad (16)$$

2.2 Ergebnisse

Die Ergebnisse der Simulation mit drei Gitterauflösungen mit Zellenanzahl von $N = 25, 50, 100$ werden in Abbildung 2.2 und Abbildung 2.3 dargestellt. Aus dem Vergleich wird es festgestellt, dass

sich die numerische Lösung gegen die quasi-exakte Lösung mit zunehmender Zellenanzahl konvergiert.

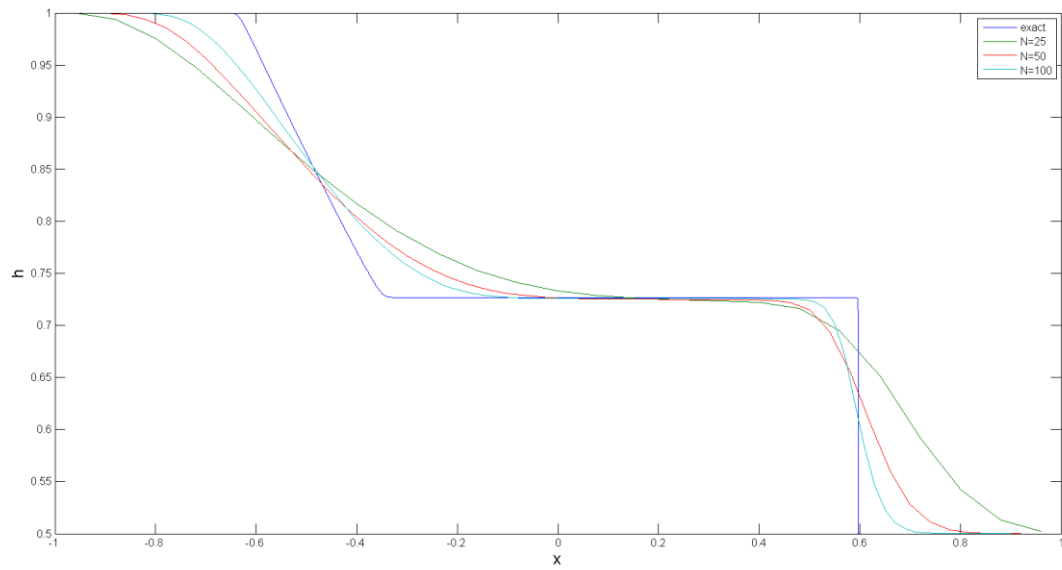


Abbildung 2.2 Ergebnisse der h mit $N = 25, 50, 100$ im Vergleich zur quasi-exakten Lösung.

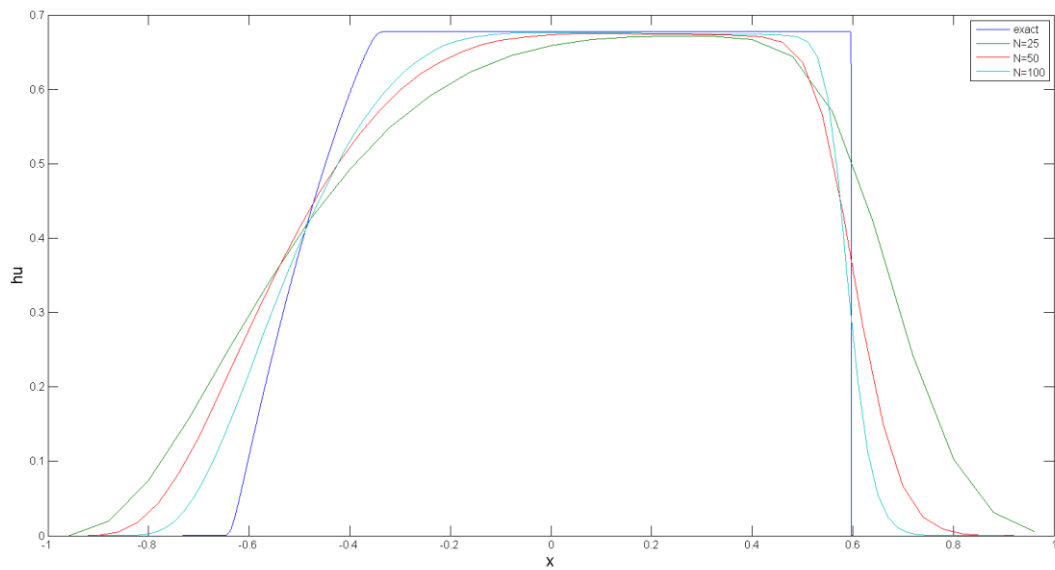


Abbildung 2.3 Ergebnisse der hu mit $N = 25, 50, 100$ im Vergleich zur quasi-exakten Lösung.

3 Implementierung und Validierung 2D

3.1 Einstellungen der Simulation

In diesem Aufgabenteil wird das FV-Verfahren für das zweidimensionale Differentialgleichungssystem mit Gl. (11) bis (13) implementiert. Die CFL-Bedingung zur Abschätzung des globalen Zeitschritts im 2D Fall lautet

$$\Delta t_{2D} \leq \frac{CFL}{2} \min \left(\frac{\Delta x}{\max(|u| + \sqrt{gh})}, \frac{\Delta y}{\max(|v| + \sqrt{gh})} \right); CFL = 0.8 \quad (17)$$

Zur Berechnung der numerischen Flüsse mit Gl. (13) und (14) muss der Zeitschritt für 1D-Fall verwendet werden. Mit der Annahme, dass Gl. (17) eindimensional ist und Gleichsetzen zu Gl. (15) ergibt sich

$$\Delta t_{1D} = 2\Delta t_{2D} \quad (18)$$

Zur Validierung wird im 2D Fall die sogenannte „Manufactured Solution“ verwendet. Die gegebenen exakten Lösungen und ihre Ableitungen lauten

$$h_{ex}(x, y, t) = \cos(\pi(x + y + t)) + 2 \quad (19)$$

$$u_{ex}(x, y, t) = v_{ex}(x, y, t) = \cos(\pi(x + y + t)) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{ex}}{\partial x} &= \frac{\partial h_{ex}}{\partial y} = \frac{\partial h_{ex}}{\partial t} = \frac{\partial u_{ex}}{\partial x} = \frac{\partial u_{ex}}{\partial y} = \frac{\partial u_{ex}}{\partial t} = \frac{\partial v_{ex}}{\partial x} = \frac{\partial v_{ex}}{\partial y} = \frac{\partial v_{ex}}{\partial t} \\ &= -\pi \sin(\pi(x + y + t)) \end{aligned} \quad (21)$$

Die Quellen lauten

$$S_a = h_t + (hu)_x + (hv)_y$$

$$S_b = (hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right)_x + (huv)_y$$

$$S_c = (hv)_t + (huv)_x + \left(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right)_y$$

Mit der Produktregel lassen sich die Quellen wie folgt schreiben

$$S_a = h_t + (hu_x + h_xu) + (hv_y + h_yv) \quad (22)$$

$$S_b = (hu_t + h_tu) + (2huu_x + h_xu^2 + gh h_x) + (huv_y + hu_yv + h_yuv) \quad (23)$$

$$S_c = (hv_t + h_tv) + (huv_x + hu_xv + h_xuv) + (2huu_y + h_yu^2 + gh h_y) \quad (24)$$

Durch Einsetzen der exakten Lösungen und deren Ableitungen ergibt sich

$$S_a = -\pi \sin(\pi(x + y + t))(4 \cos(\pi(x + y + t)) + 5) \quad (25)$$

$$S_b = -\pi \sin(\pi(x + y + t)) \left((10 + g) \cos(\pi(x + y + t)) + 6 \cos^2(\pi(x + y + t)) + 2 + 2g \right) \quad (26)$$

$$S_c = S_b \quad (27)$$

Drei kartesische Gitter werden für die Simulation verwendet. Sie haben eine Ausdehnung von $\Omega = [-1,1] \times [-1,1]$ und jeweils eine Anzahl von $N_{x,y} = 25, 50, 100$ Zellen in jede Raumrichtung. Als Anfangsbedingungen werden $h_0 = h_{ex}(x,y,0)$, $u_0 = u_{ex}(x,y,0)$, $v_0 = v_{ex}(x,y,0)$ verwendet. Für die Fehlerberechnung werden die Norm des quadratisch gemittelten Fehlers (RMS) und die Maximumsnorm (Maximalfehler) verwendet.

Periodische Randbedingung wird für alle Ränder verwendet.

$$h_{r,rechts} = h_{N_x,j} \quad (28)$$

$$h_{r,links} = h_{i=1,j} \quad (29)$$

$$h_{r,unten} = h_{i,N_y} \quad (30)$$

$$h_{r,oben} = h_{i,j=1} \quad (31)$$

Die Simulation wird bis $t_{end} = 1s$ berechnet.

3.2 Ergebnisse

Abbildung 3.1 stellt das Endergebnis der Simulation mit $N = 25$ graphisch dar.

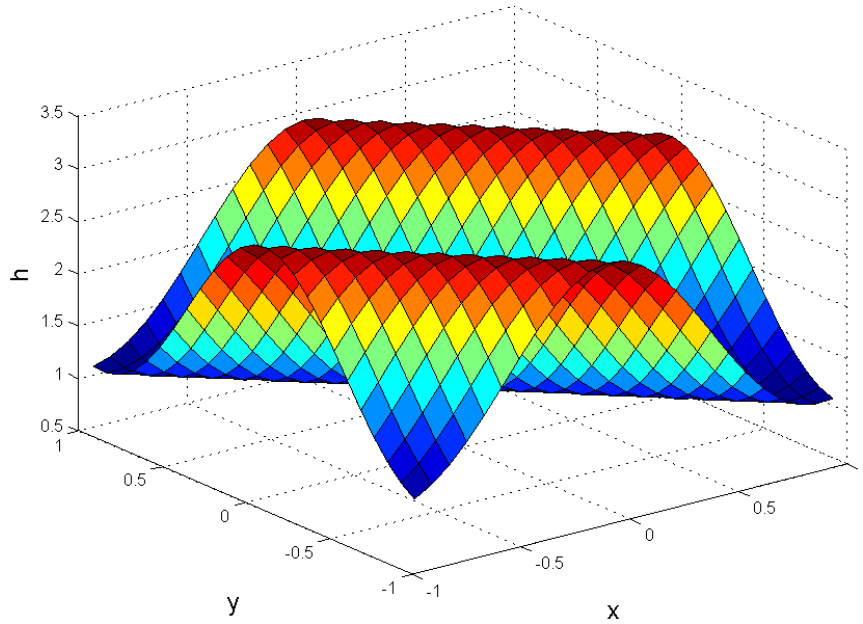


Abbildung 3.1 Endergebnis ($t=0.2s$) der 2D Validierungssimulation mit $N = 25$.

Die Ergebnisse der Maximalfehler und quadratisch gemittelten Fehler werden in Tabelle 3.1 dokumentiert und die Genauigkeitsordnung des Verfahrens wird wie folgt berechnet

$$O = \frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)}{\ln\left(\frac{N_2}{N_1}\right)} \quad (32)$$

N	E_{\max}	E_{rms}	Ordnung (E_{\max})	Ordnung (E_{rms})
25	0.1418	0.0951		
50	0.0659	0.0422	1.1055	1.1722
100	0.0275	0.016	1.2608	1.3992

Tabelle 3.1 Maximalfehler und RMS-Fehler der Simulationen und Verfahrensordnung.

Abbildung 3.2 stellt die Verfahrensordnung mit feinerer Gitterauflösung dar.

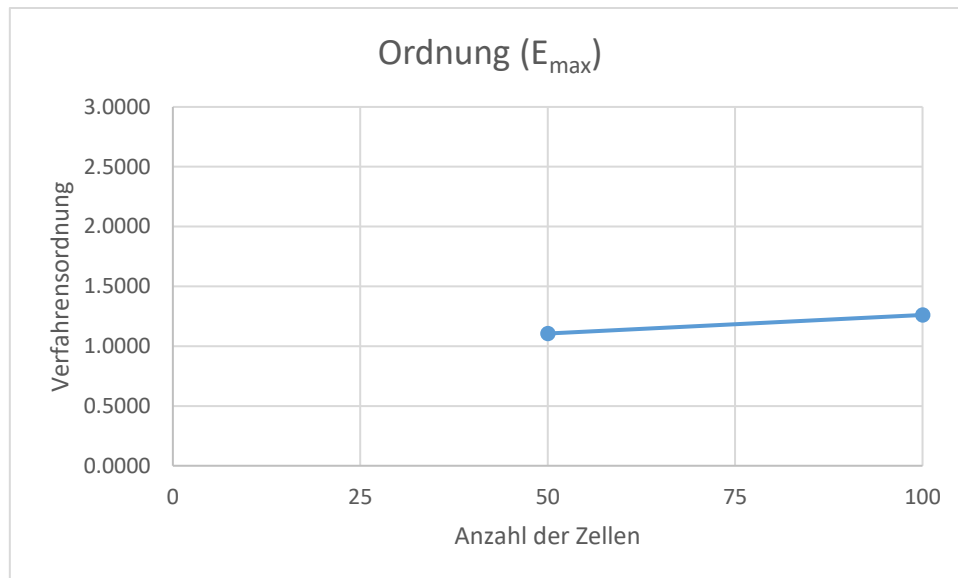


Abbildung 3.2 Verfahrensordnung

4 2D Dammbrech Simulation

4.1 Einstellungen der Simulation

Ein 2D Dammbrech wird in diesem Aufgabenteil simuliert. Das Gitter mit $N_{x,y} = 100$ wird verwendet. Die Geometrie und Randbedingungen sind in Abbildung 4.1 dargestellt.

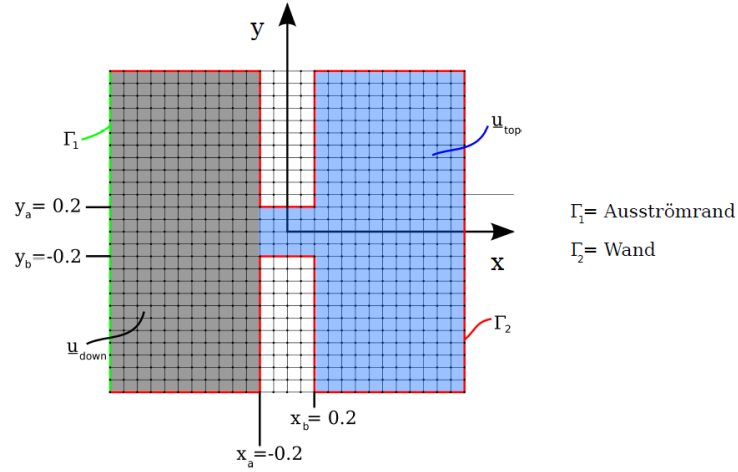


Abbildung 4.1 Randbedingungen des 2D Dammbrech

Die Randbedingungen werden wie folgt implementiert

Horizontale Wand	$h_{ghost} = h_r,$	$u_{ghost} = u_r$	$v_{ghost} = -v_r$
Vertikale Wand	$h_{ghost} = h_r,$	$u_{ghost} = -u_r$	$v_{ghost} = v_r$
Horizontale Wand	$h_{ghost} = h_r,$	$u_{ghost} = u_r$	$v_{ghost} = v_r$

Die Simulation wird mit folgenden Zuständen initialisiert

$$h_{top} = 1.0, \quad h_{down} = 0.5 \quad (33)$$

$$u_{top} = 0.0, \quad u_{down} = 0.0 \quad (34)$$

$$v_{top} = 0.0, \quad v_{down} = 0.0 \quad (35)$$

und bis $t_{end} = 0.5s$ berechnet.

4.2 Ergebnisse

Ein Diagramm des Endergebnisses (Höhe h) wird in Abbildung 2.1 dargestellt und die maximalen bzw. minimalen Werte der Höhe und Geschwindigkeiten werden in Tabelle 4.1 angegeben.

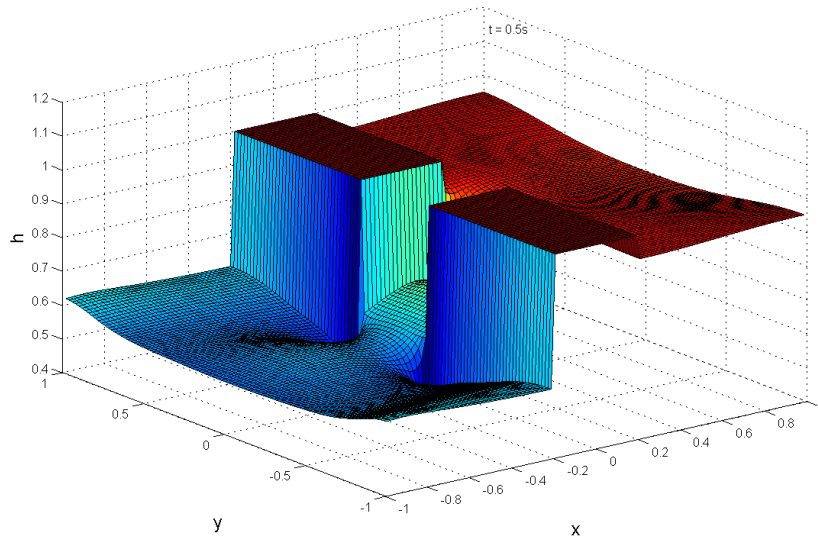


Abbildung 4.2 Endergebnis der Dammbrechsimulation.

h_{max}	h_{min}	u_{max}	u_{min}	v_{max}	v_{min}
0.9499	0.4126	0.0275	-1.9057	0.8400	-0.8400

Tabelle 4.1 Maximale und minimale Werte der Höhen und Geschwindigkeiten.