선형대수학
2020년도 1학기

Homework #2

소프트웨어학과
Due: 10:00, April 3, 2020

학과	소프트웨어	학번	2016039069	성명	황윤지

Note: 풀이과정이 없는 답은 0점 처리됨. 간결하고 읽을 수 있도록 정자체로 쓸것.

1. (page 40) 1.3 연습문제 7

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
a_1 a_2 a_3라하자

$$a_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix},\ a_2=\begin{bmatrix}-4\\3\\8\end{bmatrix},\ a_3=\begin{bmatrix}2\\5\\4\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}3\\-7\\-3\end{bmatrix}$$

b가 a_1과 a_2 a_3의 일차결합으로 표현할수 있는지 알아보는것이 문제
$[a_1\ a_2\ a_3\ b]$에 대응하는 선형계가 해를 가지면 b는 a_1, a_2, a_3의 일차결합으로 나타낼수 있다.

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & -7 \\ -2 & 8 & -4 & -3 \end{bmatrix} \leftarrow 행1\times2 \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

~~사다리~~ 사다리꼴행렬이 $[0 \dots 0\, b]$ $b \neq 0$의형태의 행을 가지므로
→ $[0\,0\,0\,3]$ 행을가져 $0 \neq 3$이므로 선형계는 해를 갖지 않는다.

즉, b는 행렬 A의 열로 이루어진 벡터들의 일차결합으로 나타낼수없다.

2. (page 41) 1.3 연습문제 14

a. v_1은 광산1에서의 '하루 생산량'이기 때문에
벡터 $5v_1$은 ∴ 광산1에서 5일동안 생산하는 생산량이다.

b. 광산1 하루생산량이 $v_1=\begin{bmatrix}20\\550\end{bmatrix}$이고
광산2하루생산량이 $v_2=\begin{bmatrix}30\\500\end{bmatrix}$이므로
목표 생산량을 $\begin{bmatrix}150\\2825\end{bmatrix}$로 쓸수있다.

그래서, 구리 150t과 2825kg을 생산하기위한
각 광산을 운영해야하는 일수를 나타내는 벡터방정식은
다음과 같다.

$$x_1\begin{bmatrix}20\\550\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}30\\500\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}150\\2825\end{bmatrix}$$

c. b에서구한 벡터방정식은

$$\begin{bmatrix}20x_1+30x_2\\550x_1+500x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}150\\2825\end{bmatrix}$$라 쓸수 있다.

x_1, x_2가 위 벡터방정식의 해가되기 위해선 다음선형계의 해가되면된다

$$20x_1+30x_2=150$$
$$550x_1+500x_2=2825$$

주어진 선형계의 첨가행렬을 축약하자

$$\begin{bmatrix} 20 & 30 & 150 \\ 550 & 500 & 2825 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{15}{2} \\ 550 & 500 & 2825 \end{bmatrix} \leftarrow 행1\times(-550)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & -325 & -1300 \end{bmatrix} \leftarrow 행2\times\frac{1}{(-325)} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \leftarrow 행2\times\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$ 즉, $x_1=\frac{3}{2}$, $x_2=4$이므로,

∴ 광산1은 $\frac{3}{2}$일 광산2는 4일을 운영해야 구리150t과 은2825kg을 생산할수있다.

선형대수학
2020년도 1학기

Homework #2

소프트웨어학과
Due: 10:00, April 3, 2020

3. (page 50) 1.4 연습문제 8

Ax=b에 대한 첨가행렬을 축약하라

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & b_1 \\ -6 & 3 & b_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{b_1}{2} \\ -6 & 3 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{b_1}{2} \\ 0 & 0 & b_2+3b_1 \end{bmatrix}$$

$Ax=b$가 가능한 모든 b에 대해 해를 가지는 것은 아니다, 왜냐하면 적당한 b에 대해서 $3b_1+b_2$가 영이 아닐 수 있기 때문이다.

b의 성분은 다음을 만족해야 한다

$3b_1+b_2=0$.

이것은 $\mathbb{R}^2$에서 원점을 지나는 직선의 방정식이다.

즉, $Ax=b$가 해를 갖기 위한 가능한 모든 b 이다.

4. (page 50) 1.4 연습문제 12

a. 하나의 열만을 갖는 행렬은 열벡터, 벡터라고 한다.
이런 벡터들으로 이루어진 벡터 방정식과 구별하기 위해
A가 $a_1 \cdots a_n$을 열로 갖는 $m\times n$ 행렬이고 $x\in\mathbb{R}^n$이라 할때
$Ax=b$ ~~형태로 보고~~ 인 형태의 방정식은 벡터방정식과 구별하기 위해
∴ 행렬 방정식이라한다 (※) (거짓)

b. (참)
방정식 $Ax=b$가 해를 갖기 위한 필요충분조건이 b가 A의 열의 일차결합인 것이므로

c. (거짓)
계수행렬 A에 대해 $[A, b]$ 모든 행에 추축위치가 있다면
정리4 명제에 의해 방정식 $Ax=b$가 해를 가지나
첨가행렬 $[A\ b]$ 라면, 방정식 $Ax=b$는 해를 가질수도 안가질수도 있다.

d. (거짓)
곱 Ax의 1번째 성분은 A의 1번째 행과 벡터 x의 성분들을 대응하는 것끼리 곱하여 더한 것으로
즉 Ax의 첫번째 성분은 A의 첫번째 행과 x성분들의 곱의 합이다

e, f (참)

A가 $m\times n$ 행렬일때, 다음 명제들은 모두 동치이다

ㄱ. A의 열들이 $\mathbb{R}^m$을 생성한다

ㄴ. 임의의 $b\in\mathbb{R}^m$에 대해, 방정식 $Ax=b$가 해를 갖는다

ㄷ. A의 모든 행에 추축위치가 있다.

e에서 ㄱ 명제가 참이면 명제 ㄴ이 참이므로, e는 참이다.

f에서 ㄴ이 거짓이므로 ㄷ도 거짓이다

즉, f는 참이다.

Homework #2

5. **(page 58) 1.5 연습문제 4**

$Ax=0$ 이므로 ~~다음의 같은 첨가행렬로 한다.~~

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$ 의 행렬을 기약사다리꼴로 변환하자

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{행}2\times -3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$ 기약사다리꼴

기본변수는 x_1, x_2 이고. x_3 x_4는 자유변수다

$x_1 = -9x_3 + 8x_4$

$x_2 = 4x_3 - 5x_4$

x_3. x_4는 자유변수

해집합을 해개변수 벡터 형식으로 나타내기위해

x_3, x_4로 x를 벡터들의 일차결합으로 분해하자

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9x_3+8x_4 \\ 4x_3-5x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9x_3 \\ 4x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8x_4 \\ -5x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix} -9 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ (x_3, x_4 ; 자유 변수)

6. 벡터 $\mathbf{v}$가 $A\mathbf{x}=0$의 해가 되도록 하는, 영행렬이 아닌 3×3 행렬 A를 구하라.

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

동차방정식 $Ax=0$을 만족하는 벡터 v가 존재하므로, v는 자명하지 않은 해다,

$Ax=0$이 자명하지 않은해를 가지므로 적어도 하나의 자유변수를 갖는다,

자유변수가 존재한다는것은, 첨가행렬 $[A\ 0]$를 행축약해 기약사다리꼴로 변경할수 있다는것.

즉, 구한 기약사다리꼴이 벡터 v가 $Ax=0$의 해가되도록하는 행렬 A가 된다.

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 라 하면, x_1, x_2, x_3 중하나는 자유변수이다,

1) x_1이 자유변수일때 $[A\ 0]$의 기약사다리꼴은 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ a_4 & a_5 & a_6 & 0 \end{bmatrix}$ 이라하자, 민첫열 첫번째항이 1이아니므로 x_1은 자유변수가 아니다.

2) x_2가 자유변수일때 $[A\ 0]$ 기약사다리꼴은 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & a_5 & a_6 & 0 \end{bmatrix}$ 라하자,

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 v = \begin{bmatrix} x_2 \\ -2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 이므로

$x_1 = x_2$
$x_2 = -2x_2$
$x_3 = x_2$

$x_2 = -2x_2$에서 즉 $x_2 = 0$이되어 x_2는 자유변수가 아니다

3) x_3가 자유변수일때 $[A\ 0]$ 기약사다리꼴은 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ a_4 & a_5 & a_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 이라하자

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 v = \begin{bmatrix} x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$x_1 = x_3$
$x_2 = -2x_3$
$x_3 = x_3$.

x_3는 자유변수

$x_1 - x_3 = 0$

$x_2 + 2x_3 = 0$ 이므로

$[A\ 0]$ 기약사다리꼴은

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ 이된다,

즉, 벡터 v가 $Ax=0$의 해가 되도록 하는, 영행렬이 아닌 행렬 A는

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ 이다.