학과	소프트웨어	학번	2016039069	성명	황윤지

Note: 풀이과정이 없는 답은 0점 처리됨. 간결하고 읽을 수 있도록 정자체로 쓸것.

1. **(page 297) 4.8 연습문제 4**

$1^k, 2^k, (-2)^k$; $y_{k+3} - y_{k+2} - 4y_{k+1} + 4y_k = 0$

Casorati 행렬을 조사하면 ∵ $1^k, 2^k, (-2)^k$가 수식을 만족하므로 casorati 행렬 사용 가능하다.

$$\begin{bmatrix} 1^k & 2^k & (-2)^k \\ 1^{k+1} & 2^{k+1} & (-2)^{k+1} \\ 1^{k+2} & 2^{k+2} & (-2)^{k+2} \end{bmatrix}$$

k=0 으로하고 행렬을 행축소 한다

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} -ⓐ \\ -① \\ -② \end{matrix}$$

~~①-②~~ ①-ⓐ, ②-ⓐ

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} -ⓐ \\ -ⓑ \\ -ⓒ \end{matrix} \quad ⓒ-3\cdot ⓑ$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$ ⇒ 이 결과로 casorati 행렬이 k=0일때 가역행렬을 만족한다. 따라서 $1^k, 2^k, (-2)^k$는 선형독립이다.

3개의 신호가 있으므로 정리17에 의해 3차 방정식의 해집합은 3차이다.

'3차 동차 선형 차분 방정식의 모든 해집합 H는 3차원 벡터공간이므로 기저정리에 의해서 주어진 신호들은 H의 기저를 형성한다.

2. **(page 297) 4.8 연습문제 7**

$y_{k+2} - y_{k+1} + \frac{2}{9} y_k = 0$, ...

보조 방정식으로 나타내면 $y_k = r^k$로 한다

$r^2 - r + \frac{2}{9} = 0 \quad \times 9$

$9r^2 - 9r + 2 = 0$

$r = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4(9)(2)}}{2(9)}$ $\quad 8 \times 9 = 72,\ 81 - 72 = 9$

$r = \frac{9 \pm \sqrt{9}}{18}$

$r = \frac{9 \pm 3}{18}$ $\quad \frac{9-3}{18}, \frac{9+3}{18}$

$r = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ 이 방정식의 해이다

r이 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$이므로 동차 방정식의 두 해는 $(\frac{1}{3})^k, (\frac{2}{3})^k$다

둘은 스칼라 배가 아니므로 이들은 선형독립이다

정리 17에 의해, 2차 선형 동차 차분 방정식의 모든 해집합 H는 2차원 벡터공간이므로 해공간 2차원이다. 기저정리(n차원 벡터공간에 속한 n개의 선형독립 인벡터들은 자동적으로 기저를 형성한다) 이 두 정리에 의해 $(\frac{1}{3})^k, (\frac{2}{3})^k$는 해 공간을 위한 기저를 형성한다. (기저정리)

즉, 방정식의 해들이 해집합을 형성한다

3. (page 307) 4.9 연습문제 4

$\begin{bmatrix} .7 & .1 & .1 \\ .2 & .8 & .2 \\ .1 & .1 & .7 \end{bmatrix}$

방정식 $PX = X$ 를 풀면

$PX - X = 0$

$PX - IX = 0.\ (IX = X)$

$(P-I)X = 0$ —①

주어진 P를 이용해 P−I를 계산하자

$\begin{bmatrix} .7 & .1 & .1 \\ .2 & .8 & .2 \\ .1 & .1 & .7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & -0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & -0.3 \end{bmatrix}$

①식의 해를 찾기위해 첨가행렬을 만들고 행연산한다

$\begin{bmatrix} -0.3 & 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & -0.2 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & -0.3 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{matrix}$

1 ⟷ 3 변경

$\sim \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & -0.3 & 0 \\ 0.2 & -0.2 & 0.2 & 0 \\ -0.3 & 0.1 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -ⓐ \\ -ⓑ \\ -ⓒ \end{matrix}$

ⓑ−2ⓐ, ⓒ+3ⓐ

$\sim \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & -0.3 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.4 & -0.8 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -ⓑ \\ -ⓒ \end{matrix}$

$\begin{array}{rrrr} & 0.2 & -0.2 & 0.2 & 0 \\ - & 0.2 & 0.2 & -0.6 & 0 \\ \hline & 0 & -0.4 & 0.8 & 0 \end{array}$ $\begin{array}{rrrr} & -0.3 & 0.1 & 0.1 & 0 \\ + & 0.3 & 0.3 & -0.9 & 0 \\ \hline & 0 & 0.4 & -0.8 & 0 \end{array}$

ⓑ+ⓒ

$\sim \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & -0.3 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

해를 구하면

$0.1x_1 + 0.1x_2 - 0.3x_3 = 0$

$-0.4x_2 + 0.8x_3 = 0$

$0.4x_2 = 0.8x_3$ (×10)

$x_2 = 2x_3$ (÷4)

$x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$

$x_2 = 2x_3$ 므로

$x_1 + 2x_3 - 3x_3 = 0$

$x_1 - x_3 = 0$

$x_1 = x_3$

$\therefore x_1 = x_3$

$x_2 = 2x_3$

벡터로 나타내면

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} x_3$

x_3는 자유변수

해공간의 기저를

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$로 선택하자 ($x_3 = 1$에 해당)

$PX = X$의 모든 해 집합에 있는 확률 벡터를 찾으면,

이, 확률벡터는 모든 해가 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$의 스칼라 배 이기때문에

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$을 이것의 요소들의 합으로 나눈것이 확률벡터가 된다.

즉 $q = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, 즉 정상상태 벡터는 $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이다

4. (page 307) 4.9 연습문제 6

(a) 연습문제1의 마르코프 연쇄를 구하자

뉴스 방송국 70%, 60% ↑ ↓ 30%, 음악 방송국 40%

청취자 이동률보면 ⇒ 행렬로 나타내면

$\begin{array}{c|cc|c} & \text{뉴스} & \text{음악} & \\ & \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} & & \begin{matrix} \text{뉴스} \\ \text{음악} \end{matrix} \end{array}$

(으로부터 / 으로)

이제이 마르코스 연쇄에 대한 정상 벡터를 구하자, 마르코 연쇄에 대한 행렬 $\begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$를 P로주자

우선 방정식 $PX = X$를 풀면

$PX - X = 0$

$PX - IX = 0 \quad (IX = X)$

$(P - I)X = 0$

P−I를 구하면

$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.6 \\ 0.3 & -0.6 \end{bmatrix}$

$(P - I)X = 0$ 의해를 구하기위해 첨가행렬을 구하고 행축소를하자

$\begin{bmatrix} -0.3 & 0.6 & 0 \\ 0.3 & -0.6 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -① \\ -② \end{matrix}$

② = ① + ②

$\sim \begin{bmatrix} -0.3 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

해를구하면

$-0.3x_1 + 0.6x_2 = 0$

$x_1 = \frac{0.6x_2}{0.3}$

$x_1 = 2x_2$

x_2는 자유변수

벡터로 나타내면

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} x_2$

해공간의 기저를 선택하자

$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$이 선택 가능하다.

$w = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ($x_2 = 1$에 해당)

$PX = X$ 모든해집합의 확률벡터를

찾자, w를 2x1의 요소합으로 ($2+1=3$)

나눈다

$\therefore q = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

따라서 정상상태 벡터는 정리18에 의해 $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$이다.

(b)

q의요소들은 시간이 지난후 마을에서 청취자의 분포를 기술한다,

(확률행렬이 시간이지날때 청취 변화를 기술한다고 가정한다.)

따라서 결과적으로 $\frac{2}{3}$ 에해당하는 대략 66%의

$\left(q = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.66 \\ 0.33 \end{bmatrix} \right)$

청취자가 뉴스 방송을 듣는다.

주어진

5. **(page 319) 5.1 연습문제 4**

4가 행렬A의 고유값이라는 사실은 $AX=4X$가 영이아닌 해를 가지는것과 동치이다.

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$AX=4X$을 풀면

$AX-4X=0$

$(A-4I)X=0$

이므로 이 동차 방정식을 풀기 위해

$A-4I$ 를 계산하자

$$A-4I = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$(A-4I)X=0$을 풀기위해 첨가행렬을 행축소하자

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -① \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$① \times -1$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -① \\ -② \\ -③ \end{matrix}$$

$② - 2①$, $③ + 3①$

$$\begin{array}{r} 2\ -1\ \ 1\ \ 0 \\ -)\ 2\ \ \ 0\ \ 2\ \ 0 \\ \hline 0\ -1\ -1\ \ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -3\ \ 4\ \ 1\ \ 0 \\ +)\ 3\ \ 0\ \ 3\ \ 0 \\ \hline 0\ \ 4\ \ 4\ \ 0 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -② \\ \\ \end{matrix}$$

$② \times (-1)$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -② \\ -③ \end{matrix}$$

$③ - 4②$

$$\begin{array}{r} 0\ \ 4\ \ 4\ \ 0 \\ +)\ 0\ -4\ -4\ \ 0 \\ \hline 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(A-4I)X=0$ 자유변수를 가지므로, 4는 A의 고유값임을 알수있다.

$x_1 + x_3 = 0$

$x_2 + x_3 = 0$

x_3는 자유변수

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} x_3$$

일반해가 $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} x_3$ 형태이므로 $x_3 \neq 0$인 벡터들은 $\lambda=4$에 대응하는 고유벡터다.

~~대응하는 고유벡터는~~

6. **(page 319) 5.1 연습문제 8**

$\lambda=3$이 행렬 A의 고유값인것은 $AX-3X$가 영이 아닌해를가지는것이다.

$AX=3X$ 를풀면

$AX-3X=0$

$(A-3I)X=0$ 이므로 이 방정식을 풀기위해

$A-3I$ 를계산하자

$$A-3I = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-3 & 2 & 3 \\ -1-0 & 1-3 & -3-0 \\ 2-0 & 4-0 & 9-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$(A-3I)X=0$ 을풀기위해 첨가행렬을 행축약하자

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -㉠ \\ -㉡ \\ -㉢ \end{matrix}$$

$㉠ + ㉡ = ㉡$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$㉢ = 2㉠ - ㉢$

$$\begin{array}{r} \cancel{2\ 6\ 4} \\ 2\ 4\ 6\ 0 \\ -)\ 2\ 4\ 6\ 0 \\ \hline 0\ 0\ 0\ 0 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$

x_2, x_3는 자유변수

일반해를 구하면

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2-3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ 1x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3$$

x_2, x_3는 자유변수

따라서 고유공간은 $\mathbb{R}^3$의 2차원 부분공간이며

기저는 $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$이다