Homework #8

Due: 10:00, May 29, 2020

학과	소프트웨어	학번	2016039069	성명	황은지

Note: 풀이과정이 없는 답은 0점 처리됨. 간결하고 읽을 수 있도록 정자체로 쓸것.

1. **부분공간에서의 기저와 차원을 계산하라.**

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3a+6b-c \\ 6a-2b-2c \\ -9a+5b+3c \\ -3a+b+c \end{bmatrix} : \text{a, b, c in } \mathbb{R}^n \right\}$$

$\parallel$ H라두자

$$H = \begin{bmatrix} 3a \\ 6a \\ -9a \\ -3a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6b \\ -2b \\ +5b \\ +b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -c \\ -2c \\ +3c \\ c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \\ +1 \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ +3 \\ 1 \end{bmatrix} c$$

이므로

$$H = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}_4$$

→ H는 $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ 의 선형결합이다.

$= v_1, v_2, v_3$ 라하자

$v_1 = (-3) v_3$

↳ 스칼라배, 선형독립이 아니다

v_2, v_3는 선형독립

→ H의 기저 → $\dim H = 2$

$\therefore$ 차원 $= 2$

$\therefore$ 기저는 $\left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

2. **(page 271) 4.5 연습문제 6**

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ 에 의해 형성되는 부분공간 차원 구하라

을 열로 가지는 행렬 A를 축소하자 (사다리꼴로)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -① \\ -② \\ -③ \end{matrix}$$

③ + (−2)①

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -5 & -20 & +15 \end{bmatrix} \begin{matrix} -② \\ -④ \end{matrix}$$

④ + (5)②

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

↳ 추축열 2개

→ 추축열 2개이므로 부분공간의 차원은 2다.

3. **(page 280) 4.6 연습문제 9: 근거와 이유를 간략하게 기술하라.**

a: A가 $m\begin{bmatrix}\ \end{bmatrix}^{n}$ 이면 A^T는 $n\begin{bmatrix}\ \end{bmatrix}^{m}$ $n\times m$ 행렬, A의 행공간 m 다, A^T의 열 m 이므로 두 공간은 동일함 (참)

b: (X) B가 사다리 꼴 이면, B가 0이 아닌 세개의 행과 대응하는 A의 행이 Row A의 기저를 형성하고, 이 행들이 서로 스칼라배가 아니어야 한다.

c: (O) A 열공간 차원은 A의 계수고 A의 행공간 차원은 A^T 계수인데, A, A^T 계수는 같으므로 참이다. 계수정리에 의해 서로 같음.

D: (X) A의 행공간 차원은 A^T의 계수다 (=A의 계수), 영공간 차원은 A의 퇴화차수다 (= dim Nul A). 계수정리에 의해. rank A + dim Nul A = n 이고, n은 A의 열의 개수다.

e: (O) 행연산을 어떻게 하는지에 따라서 어떤 사다리꼴이 나올지 모르고, A와 동치인 사다리꼴 행렬은 여러개 간서 행렬의 계수에 영향을 미칠수 없다.

4. A**와** B**가 행 동등하다고 가정하고 rank** A**, dim Nul** A **계산하고, Col** A**, Row** A**, Nul** A **의 기저를 찾아라.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 & 9 \\ -2 & 6 & -6 & -1 & -10 \\ -3 & 9 & -6 & -6 & -3 \\ 3 & -9 & 4 & 9 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A와 B는 행동등하므로

B을 보면

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

주축열

B의 0이 아닌 행은 Row A의 기저를 형성한다.

즉, Row A = {(1, −3, 0, 5, −7), (0, 0, 2, −3, 8), (0, 0, 0, 0, 5)} 이다

행렬 A의 주축열은 3개이므로 rank A = 3 이다.

행렬 A는 5개의 열을 가지므로 dim Nul A = 5 − 3 = 2 이다

A의 주축열은 1, 3, 5번째 열이므로

Col A의 기저는

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ -10 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$ 다

Nul A를 구하려면 축소된 사다리꼴이 필요하다.

Ax=0은 Bx=0과 동일

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} ② \\ ③ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

② ÷ 2, ③ ÷ 5

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \\ \end{matrix}$$

$R_2 - 4\cdot R_3$, $R_1 + 7R_3$.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_4 = 0 \\ x_3 - \frac{3}{2}x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

x_2, x_4는 자유변수

$$\rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_2 - 5x_4 \\ x_2 \\ \frac{3}{2}x_4 \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4$$

이므로

Nul A의 기저는

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$ 이다

5. $\mathcal{D} = \{\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}, \mathbf{d_3}\}, \mathcal{F} = \{\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \mathbf{f_3}\}$가 벡터공간 V의 기저들 들이다. $\mathbf{f_1} = 2\mathbf{d_1} - \mathbf{d_2} + \mathbf{d_3}$, $\mathbf{f_2} = 3\mathbf{d_2} + \mathbf{d_3}$, $\mathbf{f_3} = -3\mathbf{d_1} + 2\mathbf{d_3}$이라 할 때 $\mathcal{F}$에서 $\cancel{\mathcal{B}}$로의 좌표변환 행렬을 구하고, $\mathbf{x} = \mathbf{f_1} - 2\mathbf{f_2} + 2\mathbf{f_3}$에 대한 $[\mathbf{x}]_\mathcal{D}$를 구하라.

D? ?

$P_{D\leftarrow F}$ 가 존재한다(D, F의는 기저이므로)

$P_{D\leftarrow F}$ 의 열들은 기저 F에 속한 벡터들의 D-좌표계 벡터이다.

$f_1 = 2d_1 - d_2 + d_3$
$f_2 = 3d_2 + d_3$
$f_3 = -3d_1 + 2d_3$ 이므로

$[f_1]_D = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $[f_2]_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ $[f_3]_D = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ 이다

즉,

$P_{D\leftarrow F} = \left[[f_1]_D, [f_2]_D, [f_3]_D \right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 이다, 즉, 행렬 $P_{D\leftarrow F}$는, F에서 D로의 좌표 변환행렬 이다,

$x = f_1 - 2f_2 + 2f_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\therefore [x]_D = P_{D\leftarrow F}\, x$ 이므로

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2+0-6 \\ -1-6+0 \\ 1-2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\therefore [x]_D = \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \\ +3 \end{bmatrix}$

6. **(page 287) 4.7 연습문제 7**

$B = \{1-2t+t^2, 3-5t+4t^2, 2t+3t^2\}$

표준기저 $C = \{1, t, t^2\}$

$P_{C\leftarrow B}$ 를 구하자.

$B = \{b_1, b_2, b_3\}$ 라 두면
$b_1 = 1-2t+t^2$
$b_2 = 3-5t+4t^2$
$b_3 = 2t+3t^2$ 이므로

$[b_1]_C = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$[b_2]_C = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$

$[b_3]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

즉, $P_{C\leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

= B에서 C로의 좌표 변환행렬,

$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

$-1+2t^2$를 x라 하자,

$x = 2t^2 - 1$

$\left(P_{C\leftarrow B} \right) \times (x$의 B좌표계벡터$) = x$. 이므로

$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & -5 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ 를 계산하자

$R_2 + 2R_3$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 8 & 2 \end{bmatrix}$

$2(R_1) + R_2$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$-3R_2 + R_3 = R_3$

0 -3 -6 0

$6R_3 + R_1 = R_1$

$\therefore -1+2t^2$의 B좌표계 벡터는 $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이다.