선형대수학 소프트웨어학과
2020년도 1학기

Homework #7

Due: 10:00, May 22, 2020

학과	소프트웨어	학번	2016039069	성명	황운기

Note: 풀이과정이 없는 답은 0점 처리됨. 간결하고 읽을 수 있도록 정자체로 쓸것.

1. **W를 형성하는 집합 S를 찾거나 W가 벡터 공간아님을 보이는 반례를 제시하라.**

$$W = \begin{bmatrix} 4a+3b \\ 0 \\ a+b+c \\ c-2a \end{bmatrix}$$

W에 속한 임의의 벡터는 다음과 같다

$$w = a\underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}}_{v_1} + b\underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2} + c\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_3}$$

$W = \mathrm{span}(v_1, v_2, v_3)$ $\mathbb{R}^4$

이므로 v_1, v_2, v_3에 의해

생성되는 $\mathbb{R}^4$의 부분 공간에 속한다.

2. **주어진 집합이 Col A가 되는 행렬 A를 찾아라.** 열

$$\left\{ \begin{bmatrix} b-c \\ 2b+c+d \\ 5c-4d \\ d \end{bmatrix} : b, c, d real \right\}$$

를 선형 결합으로 나타내면

$$b\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1} + c\underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2} + d\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_3}$$

$$= \mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3\}$$

이 생성집합의 벡터들은 열로 사용한다

그게 Col A가 되는 행렬 A다

$$\rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. **(page 244) 4.2 연습문제 12**

$A = \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ $w = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

* Col A : 행연산으로 해의 존재 찾는다

$[A\ w] = \begin{bmatrix} -6 & 12 & 2 \\ -3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to ① \\ \to ② \end{matrix}$

② × (-2) + ① 하면

$\sim \begin{bmatrix} -6 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 해가없다

벡터 w는 A의 열공간에 있다(Col A) 속해

* Nul A : Aw가 0이냐? 판단

$Aw = \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -12+12 \\ -6+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

w는 Nul A도 속한다.

* w는 둘다 속한다.
Nul A와 Col A,

4. **(page 254) 4.3 연습문제 8**

$v_1 \sim v_5$는 다음과같다

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}$ 를 열으로하는 행렬을 A라하자

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & +1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -8 & -6 \\ 2 & -3 & 6 & 7 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} ① \\ ② \\ ③ \\ \end{matrix}$

a 행연산해서 추출하자

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 12 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

③ ← ③ + 3×①

② ← ② + (-2)×①

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 8 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 는

추축이 있는 열의 선형결합

∴즉, v_1, v_2, v_4는

Col A를 생성 한다

따라서 생성하는공간의 기저는 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$

5. **(page 264) 4.4 연습문제 4**

$b_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\\-3\end{bmatrix}$ $b_2 = \begin{bmatrix}-3\\4\\9\end{bmatrix}$ $b_3 = \begin{bmatrix}2\\-2\\4\end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix}8\\-9\\6\end{bmatrix}$

x의 β 좌표 c_1, c_2, c_3는 다음을 만족한다

$$c_1\begin{bmatrix}1\\-1\\-3\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}-3\\4\\9\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}2\\-2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\-9\\6\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\-1 & 4 & -2\\-3 & 9 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\-9\\6\end{bmatrix}$$

행연산을 해서 c_1, c_2, c_3 를 구하자

$$\sim \begin{bmatrix}1 & -3 & 2 & 8\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & 10 & 30\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -3 & 2 & 8\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 5\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

$\therefore$ $c_1 = -1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 3$ 이므로 $[x]_\beta$는 $\begin{bmatrix}-1\\-1\\3\end{bmatrix}$이다

6. **다항식 집합의 선형 독립성을 좌표 벡터를 이용해서 판별하고 설명하라.**

$1 - 2t^2 - t^3, \quad t + 2t^3, \quad 1 + t - 2t^2$

$1 - 2t^2 - t^3 = 1\times 1 + 0\times t + (-2)\times t^2 + (-1)\times t^3$

$t + 2t^3 = 0\times 1 + 1\times t + (0)\times t^2 + (2)\times t^3$

$1 + t - 2t^2 = 1\times 1 + 1\times t + (-2)\times t^2 + (0)\times t^3$

좌표사상은 좌표벡터로 $(1, 0, -2, -1)$
$(0, 1, 0, 2)$
$(1, 1, -2, 0)$ 을 생성한다

이 벡터를 행렬 A 열로 쓰고 $Ax=0$ 을 행연산하라

2020

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\-2 & 0 & -2 & 0\\-1 & 2 & 0 & 0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

A 열들은 선형 종속이므로 대응하는 다항식은 선형 종속이다