선형대수학
2020년도 1학기

Homework #1

소프트웨어학과
Due: 10:30, March 27, 202

학과	소프트웨어	학번	2016039069	성명	황준지

Note: 풀이과정이 없는 답은 0점 처리됨. 간결하고 읽을 수 있도록 정자체로 쓸것.

1. (page 12) 1.1 연습문제 8

주어진 선형계를 방정식과 행렬의 형태로 나란히 쓰고, 소거 과정을 수행하여 결과를 비교하자

$$\begin{aligned} x_1 \quad + 3x_3 \quad &= 2 \\ x_2 \quad - 3x_4 &= 3 \\ -2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 3x_1 \quad + 7x_4 &= -5 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 7 & -5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} -① \\ -② \\ -③ \\ -④ \end{array}$$

첫번째 방정식의 x_1항을 이용해 나머지 방정식의 x_1항을 소거하자

$$\begin{array}{rl} -3\cdot① : & -3x_1 + 0 - 9x_3 + 0 = -6 \\ + \ ④ : & 3x_1 + 0 + 0 + 7x_4 = -5 \\ \hline \text{새로운 ④} : & -9x_3 + 7x_4 = -11 \end{array}$$

새로운 ④와 교체하면
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 7 & -11 \end{bmatrix}$$
이 된다

두번째 방정식의 x_2항을 이용해 나머지 방정식의 x_2항을 소거하자

$$\begin{array}{rl} 2\cdot② : & 0 + 2x_2 + 0 - 6x_4 = 6 \\ + \ ③ : & 0 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ \hline \text{새로운 ③} : & 0 \quad 0 + 3x_3 - 4x_4 = 7 \end{array}$$

새로운 ③과 기존 ③ 교체하면
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & -9 & 7 & -11 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{1로 만들기}]{③\text{의 } x_3\text{계수}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -9 & 7 & -11 \end{bmatrix}$$

4번째 방정식의 x_3를 소거하기 위해 3번째 방정식 이용하면

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$
이 되고

4 방정식의 x_4 계수를 1로 만들면

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$
가 된다

이 선형계는 삼각형 형태를 가지므로 $x_4 = -2$ 임을 알 수 있어 이를 대입하면 x_1, x_2, x_3의 값을 구할 수 있으므로 해는 존재한다

2. (page 13) 1.1 연습문제 13

주어진 첨가행렬

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & -9 & k \end{bmatrix} \begin{array}{l} -① \\ -② \\ -③ \end{array}$$
이라 하자

먼저 ②의 x_2의 계수를 1로 만들고

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{h}{3} \\ -2 & 5 & -9 & k \end{bmatrix}$$

①의 x_1을 이용해 ③의 x_1을 소거하면

$$\begin{array}{rl} 2\times① & 2 \quad -8 \quad 14 \quad 2g \\ + \ ③ : & -2 \quad 5 \quad -9 \quad k \\ \hline \text{새로운 ③} & 0 \quad -3 \quad 5 \quad 2g+k \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{h}{3} \\ 0 & -3 & 5 & 2g+k \end{bmatrix}$$
가 된다

3번째 방정식의 x_2를 소거하기 위해 ②와 계산하면

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{h}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 2g+k+h \end{bmatrix}$$
가 된다.

$$x_1 - 4x_2 + 7x_3 = g$$
$$x_2 - \frac{5}{3}x_3 = \frac{h}{3}$$
$$0 = 2g+k+h$$

의 선형계로 연계되어 만일 $2g+k+h$가 0이 아니면 선형계는 해를 갖지 않는다

즉 $2g+k+h=0$을 만족하는 모든 g, k, h에 대해 선형계는 해를 갖는다

∴ 즉 첨가행렬이 해를 갖는 선형계에 대응되도록 g, h, k를 포함하는 방정식은 $2g+k+h=0$이 된다

Homework #1

3. (page 27) 1.2 연습문제 2

주어진 행렬 $\begin{bmatrix} 1&2&3&4 \\ 4&5&6&7 \\ 6&7&8&9 \end{bmatrix}$ 을 --① --② --③ 이라하자.

0이 아닌 성분이 왼쪽 맨위에 있기때문에

주축 $\begin{bmatrix} 1&2&3&4 \\ 4&5&6&7 \\ 6&7&8&9 \end{bmatrix}$ 이된다

주축열

② 의 x_1을 소거하기위해 ①을 이용하자

$$\begin{array}{r} -4 \times ① \\ +\quad ② \\ \hline \text{새로운 ②} \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1&2&3&4 \\ 0&-3&-6&-9 \\ 6&7&8&9 \end{bmatrix}$$ 가된다.

③의 x_1을 소거하기위해 ①을 이용하면

$$\begin{array}{r} -6 \times ① \\ +\quad ③ \\ \hline \text{새로운 ③} \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1&2&3&4 \\ 0&-3&-6&-9 \\ 0&-5&-10&-15 \end{bmatrix}$$ 가된다

→ 주축1의 아래성분이 모두 0이므로 -3이 두번째 주축이 된다

$\begin{bmatrix} 1&2&3&4 \\ 0&-3&-6&-9 \\ 0&-5&-10&-15 \end{bmatrix}$ → 주축 --③

다음주축열

두번째 행에 $-\frac{5}{3}$을 곱하고 ③과 더하면

$\begin{bmatrix} 1&2&3&4 \\ 0&-3&-6&-9 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$ 이된다 3번째 열에서 주성분을 만들수없으므로

일반적 형태: $\begin{bmatrix} \blacksquare&*&*&* \\ 0&\blacksquare&*&* \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$ 이되어

$\begin{bmatrix} 1&2&3&4 \\ 0&-3&-6&-9 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$ → 주축

주축열

처음 행렬에서 $\begin{bmatrix} 1&2&3&4 \\ 4&5&6&7 \\ 6&7&8&9 \end{bmatrix}$ → 주축위치

주축열이된다

→ 주어진 행렬을 기약사다리꼴로 만들기위해

$\begin{bmatrix} 1&2&3&4 \\ 0&-3&-6&-9 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$ —ㄱ —ㄴ —ㄷ 이라하자

ㄴ × $-\frac{1}{3}$을 하면 $\begin{bmatrix} 1&2&3&4 \\ 0&1&2&3 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$ 이되고

ㄱ + (두번째행 × -2) 하면 $\begin{bmatrix} 1&0&-1&-2 \\ 0&1&2&3 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$

이되어 $\begin{bmatrix} 1&0&-1&-2 \\ 0&1&2&3 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$ 이

기약사다리꼴 행렬이다.

마지막행렬에서 $\begin{bmatrix} 1&0&-1&-2 \\ 0&1&2&3 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$

주축위치

주축열이다

4. (page 27) 1.2 연습문제 6

먼저 주어진 첨가행렬을 기약사다리꼴로 변형하자

$\begin{bmatrix} 3&-4&2&0 \\ -9&12&-6&0 \\ -6&8&-4&0 \end{bmatrix}$ —① —② —③ 이라하면

①을 이용해 ②와 ③의 x_1을 소거하자

$$\begin{array}{r} +3 \times ① \\ +\quad ② \\ \hline \text{새로운 ②} \end{array} , \quad \begin{array}{r} 2 \times ① \\ +\quad ③ \\ \hline \text{새로운 ③} \end{array}$$ 을 하면

$\begin{bmatrix} 3&-4&2&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$ 이된다.

①의 x_1계수를 1로 만들기위해

$\frac{1}{3}$을 곱하면

$\begin{bmatrix} 1&-\frac{4}{3}&\frac{2}{3}&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$ ~~일치~~ 가된다

→ 행렬의 주축 열에 있는 변수 x_1은 기본변수이다, 첨가행렬과 동치인 선형계는

x_2, x_3는 자유변수이다.

$$x_1 - \frac{4}{3}x_2 + \frac{2}{3}x = 0$$

기본변수에 관하여 풀면 다음과 같은 일반해를 얻는다.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ x_2 \text{는 자유변수이다} \\ x_3 \text{는 자유 변수이다.} \end{cases}$$