[예17] 첨가행렬이 다음과 같을때 선형계의 일반해를구하라

$$\begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 7 & -4 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{array}{l} -① \\ -② \\ -③ \end{array}$$

① + ③ → ③

$$\begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ -㉠ \\ -㉡ \end{array}$$

㉠ × 4 + ㉡ → ㉡

→ 추축 위치

$$\begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

첨가행렬과 동치인 선형계는

$$\begin{aligned} x_1 - 7x_2 + 6x_4 &= 5 \\ x_3 - 2x_4 &= -3 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$\begin{cases} x_1 = 7x_2 - 6x_4 + 5 \\ x_2 \text{는 자유변수이다} \\ x_3 = 2x_4 - 3 \\ x_4 \text{는 자유변수이다} \end{cases}$

[#2]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

A의 열벡터를

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} \text{라하자}$$

$x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 = b$ 를

벡터합과 스칼라 배의 정의로 다시써보면

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

은

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2x_2 \\ 3x_2 \\ -2x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6x_3 \\ 7x_3 \\ 5x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

이 ~~필요충분조건은~~ 위식을 만족하는 필요충분조건은 ~~다음식을 만족~~ * x_1, x_2, x_3 가 다음식을 만족하는것이다.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 11 \\ 0 + 3x_2 + 7x_3 = -5 \\ x_1 + (-2x_2) + 5x_3 = 9 \end{cases}$$

이방정식은 첨가행렬로 하면

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 & 11 \\ 0 & 3 & 7 & -5 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ -① \\ -③ \end{array}$$

$\sim$ ① $\times \frac{1}{3} \to$ ①

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 & 11 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} -ㄱ \\ \\ -ㄴ \end{array}$$

~~③+①~~ $(-ㄱ)+ㄴ \to ㄴ$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 & 11 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 11 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -ㄷ \end{array}$$

$\sim$ ㄷ $\times \frac{1}{11}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 & 11 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{23}{3} \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{11} \end{bmatrix} \begin{array}{l} -ㅋ \\ -ㅈ \\ -ㄷ \end{array}$$

$\left(-\frac{7}{3} \times ②\right) + ㅈ \to ㅈ$, $\left(\frac{4}{3}ㄷ\right) + ㅋ \to ㅋ$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{245}{33} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{41}{33} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

이므로 해는 $x_1 = \frac{245}{33}$, $x_2 = -\frac{41}{33}$, $x_3 = -\frac{2}{11}$ 이다

따라서 A의 열벡터의 일차결합으로 b로나타낼수있다.

[#3]

$A = \{v_1\ v_2\ v_3\}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & -1 \\ -2 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

A의 열들이 $\mathbb{R}^{3}$을 생성한다는 것은 모든 $b \in \mathbb{R}^3$가 A의 열들의 일차결합으로

표현된다는것을의미한다

A는 3×3 행렬이고 ~~$v_1 v_2 v_3$가~~

생성하고 $\mathbb{R}^3$을 생성하지 $\mathbb{R}^4$는 생성하지 않는다

CamScanner로 스캔하기

[#7]

$$A=\begin{bmatrix}3 & -9 & 6\\ -1 & 3 & -2\end{bmatrix}$$

$Ax=0$ 의 첨가행렬의 행을 사다리꼴로 변환하자

$$\begin{bmatrix}3 & -9 & 6 & 0\\ -1 & 3 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}-1 & 3 & -2 & 0\\ 3 & -9 & 6 & 0\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & -3 & +2 & 0\\ 3 & -9 & 6 & 0\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & -3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

ㄴ자유변수 존재

~~x_2 : 자유변수~~

자유변수가 존재하므로, $Ax=0$은 자명하지 않은해를 갖는다.

~~위 행 축약과정에서~~

$$\begin{cases}x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0\\ x_2,\ x_3 \text{는 자유변수}\end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases}x_1 = 3x_2 - 2x_3\\ x_2, x_3 \text{는 자유변수다}\end{cases}$$

$Ax=0$의 일반해를 벡터형식으로 나타내면

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x_2-2x_3\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3x_2\\x_2\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2x_3\\0\\x_3\end{bmatrix}$$

$$=x_2\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$$ (x_2, x_3 : 자유변수)