Homework #11

학과	소프트웨어	학번	2016039069	성명	황윤리

Note: 풀이과정이 없는 답은 0점 처리됨. 간결하고 읽을 수 있도록 정자체로 쓸것.

1. **(page 397) 6.1 연습문제 12**

먼저 u.v의 내적을 구하자

$u\cdot v = u^T v = [2\ -5\ -1] \begin{bmatrix}-7\\-4\\6\end{bmatrix}$

$=(2)(-7)+(-5)(-4)+(-1)(6)$

$=-14+20-6=0$

$\|u\|^2 = u\cdot u$ 를 이용해 $\|u\|^2$ 구하자

$\|u\|^2 = u\cdot u = [2\ -5\ -1]\begin{bmatrix}2\\-5\\-1\end{bmatrix}$

$=(2)(2)+(-5)(-5)+(-1)(-1)$

$=4+25+1=30$

$\|v\|^2$ 을 구하자

$\|v\|^2 = v\cdot v$ 이다

$v\cdot v = [-7, -4, 6]\begin{bmatrix}-7\\-4\\6\end{bmatrix}$

$=(-7)(-7)+(-4)(-4)+(6)(6)$

$=49+16+36=101$

$\|u+v\|^2$ 은 $(u+v)\cdot(u+v)$ 다

그러므로 $(u+v)$ 구하자

$u+v = \begin{bmatrix}2\\-5\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-7\\-4\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2-7\\-5-4\\-1+6\end{bmatrix}$

$\therefore = \begin{bmatrix}-5\\-9\\+5\end{bmatrix}$

$\therefore \|u+v\|^2 = (u+v)\cdot(u+v)$

$= [-5, -9\ 5]\begin{bmatrix}-5\\-9\\5\end{bmatrix}$

$(5)(5)$

$=(-5)(-5)+(-9)(-9)+(25)$

$=25+81+25=131$

2. **(page 407) 6.2 연습문제 5**

$\{u_1, u_2, u_3\}$ 가 $\mathbb{R}^3$의 기저?

u_1, u_2, u_3의 가능한 조합은 $\{u_1,u_2\}\ \{u_1,u_3\}\ \{u_2,u_3\}$다

그들의 내적을 보면

$u_1\cdot u_2 = [1\ 0\ 1]\begin{bmatrix}-1\\4\\1\end{bmatrix}$

$=(1)(-1)+(0)(4)+(1)(1)$

$=-1+0+1=0$

$u_1\cdot u_3$은 $[1\ 0\ 1]\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}$

$(1)(2)+(0)(1)+(1)(-2)$

$=2+0+(-2)=0$

$u_2\cdot u_3 = [-1\ 4\ 1]\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}$

$=(-1)(2)+(4)(1)+(1)(-2)$

$=-2+4-2=0$

각 벡터 쌍이 서로 직교하므로 $\{u_1, u_2, u_3\}$는 직교집합이다.

$\{u_1, u_2, u_3\}$가 0 이아닌 벡터들로 이루어진 직교집합이고, 이 집합은 일차독립이고 따라서 $\{u_1, u_2, u_3\}$는 $\mathbb{R}^3$ 에 의해 생성된 부분공간의 기저이다.

벡터 x를 u 들의 일차 결합으로 나타내자

정리5 에 의해

직교기저에 속하는 임의의 벡터를 유일한 일차결합으로 ~~나타~~ 나타냈을때 ($\hookrightarrow x$)

각 계수는 $c_j = \dfrac{x\cdot u_j}{u_j\cdot u_j}$

즉,

$x = \left(\frac{x\cdot u_1}{u_1\cdot u_1}\right)u_1 + \left(\frac{x\cdot u_2}{u_2\cdot u_2}\right)u_2 + \left(\frac{x\cdot u_3}{u_3\cdot u_3}\right)u_3$

$x\cdot u_1 = [8\ -4\ -3]\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = (8)(1)+(-4)(0)+(-3)(1) = 8+0-3=5$

$x\cdot u_2 = [8\ -4\ -3]\begin{bmatrix}-1\\4\\1\end{bmatrix} = (8)(-1)+(-4)(4)+(-3)(1) = -8-16-3=-27$

$x\cdot u_3 = [8\ -4\ -3]\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix} = (8)(2)+(-4)(1)+(-3)(-2) = 16-4+6=18$

$u_1\cdot u_1 = [1\ 0\ 1]\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = (1)(1)+(0)(0)+(1)(1) = 1+0+1=2$

$u_2\cdot u_2 = [-1\ 4\ 1]\begin{bmatrix}-1\\4\\1\end{bmatrix} = (-1)(-1)+(4)(4)+(1)(1) = 1+16+1=18$

$u_3\cdot u_3 = [2\ 1\ -2]\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix} = (2)(2)+(1)(1)+(-2)(-2) = 4+1+4=9$

즉,

$x = \left(\frac{5}{2}\right)u_1 - \left(\frac{\cancel{27}^{\,3}}{\cancel{18}_{\,2}}\right)u_2 + \frac{\cancel{18}^{\,2}}{\cancel{9}}u_3$

$=\frac{5}{2}u_1 - \frac{3}{2}u_2 + \frac{2}{1}u_3$

$=\frac{5}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{3}{2}\begin{bmatrix}-1\\4\\1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}$

$\therefore \frac{5}{2}u_1 - \frac{3}{2}u_2 + 2u_3 = x$

3. **(page 407) 6.2 연습문제 8**

거리를 구하기 위해 먼저

1) u위로의 y 직교 사영 구한다. u에 직교인 y의성분은

$$\hat{y} = \frac{y \cdot u}{u \cdot u}u = \frac{[3\ 1]\begin{bmatrix}8\\6\end{bmatrix}}{[8\ 6]\begin{bmatrix}8\\6\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}8\\6\end{bmatrix} = \frac{(3)(8)+(1)(6)}{(8)(8)+(6)(6)}\begin{bmatrix}8\\6\end{bmatrix} = \frac{24+6}{64+36}\begin{bmatrix}8\\6\end{bmatrix} = \frac{30}{100}\begin{bmatrix}8\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{10}\cdot 8\\\frac{3}{10}\cdot 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{12}{5}\\\frac{9}{5}\end{bmatrix}$$

$$y-\hat{y} = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\frac{12}{5}\\\frac{9}{5}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{15-12}{5}\\\frac{5-9}{5}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\-\frac{4}{5}\end{bmatrix}$$

거리는. y와 그 직교사영 $\hat{y}$를 잇는선분의 길이고, 벡터 $y-\hat{y}$와 같다.

그러므로 $\|y-\hat{y}\|$다

$$\|y-\hat{y}\| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{-4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1 \quad \therefore 1$$

4. **(page 416) 6.3 연습문제 5**

$$y=\begin{bmatrix}4\\3\\3\\-1\end{bmatrix}\quad u_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}\quad u_2=\begin{bmatrix}-1\\3\\1\\-2\end{bmatrix}\quad u_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$\{u_1 u_2 u_3\}$에서 세 u_1, u_2, u_3로 나올수있는 조합은 아래와같이 3개다.

$$u_1 \cdot u_2 = [1\ 1\ 0\ 1]\begin{bmatrix}-1\\3\\1\\-2\end{bmatrix} = (1)(-1)+(1)(3)+(0)(1)+(1)(-2) = -1+3+0+(-2) = 0$$

$$u_2 \cdot u_3 = [-1\ 3\ 1\ -2]\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\1\end{bmatrix} = (-1)(-1)+(3)(0)+(1)(1)+(-2)(1) = (1)+0+1+(-2) = 0$$

$$u_3 \cdot u_1 = [-1\ 0\ 1\ 1]\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix} = (-1)(1)+(0)(1)+(1)(0)+(1)(1) = -1+0+0+1 = 0$$

각벡터 쌍이 서로 직교하므로 $\{u_1, u_2, u_3\}$는 직교집합이다.

$\{u_1, u_2, u_3\}$가 0 이아닌 벡터들로 이루어진 직교집합이고, 이 집합은 일차독립이고

따라서 $\{u_1, u_2, u_3\}$는 $\mathbb{R}^3$에 의해 생성된 부분공간의 기저이다.

부분공간 W위로의 y 직교 사영은

$$\hat{y} = \frac{y\cdot u_1}{u_1\cdot u_1}u_1 + \frac{y\cdot u_2}{u_2\cdot u_2}u_2 + \frac{y\cdot u_3}{u_3\cdot u_3}u_3 \text{ 다.}$$

이를 계산하기위해 다음을 계산하자

$$y\cdot u_1 = [4\ 3\ 3\ -1]\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix} = (4)(1)+(3)(1)+(3)(0)+(-1)(1) = 4+3+0-1 = 6$$

$$y\cdot u_2 = [4\ 3\ 3\ -1]\begin{bmatrix}-1\\3\\1\\-2\end{bmatrix} = (4)(-1)+(3)(3)+(3)(1)+(-1)(-2) = -4+9+3+2 = 10$$

$$u_1\cdot u_1 = 1^2+1^2+0^2+1^2 = 3$$

$$u_2\cdot u_2 = (-1)^2+3^2+1^2+(-2)^2 = 15$$

$$u_3\cdot u_3 = (-1)^2+0^2+1^2+1^2 = 3$$

$$y\cdot u_3 = [4\ 3\ 3\ -1]\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\1\end{bmatrix} = (4)(-1)+(3)(0)+(3)(1)+(-1)(1) = -4+0+3+(-1) = -2$$

$$\hat{y} = \frac{y\cdot u_1}{u_1\cdot u_1}u_1 + \frac{y\cdot u_2}{u_2\cdot u_2}u_2 + \frac{y\cdot u_3}{u_3\cdot u_3}u_3 = \frac{\cancel{6}\,2}{3}u_1 + \frac{\cancel{10}\,2}{\cancel{15}\,3}u_2 - \frac{2}{3}u_3 = 2\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix} + \frac{2}{3}\begin{bmatrix}-1\\3\\1\\-2\end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2 \cdot 3}{3} \\ \frac{2}{3} \cdot 1 \\ \frac{2}{3} \cdot (-2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (-1) \cdot \frac{2}{3} \\ (0) \cdot \frac{2}{3} \\ (1) \cdot \frac{2}{3} \\ (1) \cdot \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 2 \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \\ 2 + 2 - 0 \\ 0 + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \\ 2 - \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 2 - \frac{6}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ Y = 2u_1 + \frac{2}{3} u_2 - \frac{2}{3} u_3.$$

5. **(page 416) 6.3 연습문제 7**

~~z의 최적근사값은 Span{v1, v2}~~

$\{v_1, v_2\}$가 W의 직교 기저인지 보자

$v_1 \cdot v_2 = [2\ -1\ -3\ 1]\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\end{bmatrix}$

$= (2)(1)+(-1)(1)+(-3)(0)+(1)(-1)$

$= 2-1+0-1 = 0$

즉 $\{v_1, v_2\}$는 W의 직교 기저이다.

$\therefore W = \text{Span}\{v_1, v_2\}$

그러면 z에 가장 가까운 W의 점.

즉, z의 최적근사값은 다음과 같이 계산 할수있다.

부분공간 W위로의 z의 직교 사영은 z의 최적근사값이 된다.

$\hat{z} = \dfrac{z \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \dfrac{z \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2$

$z \cdot v_1 = [3\ -7\ 2\ 3]\begin{bmatrix}2\\-1\\-3\\1\end{bmatrix} = (3)(2)+(-7)(-1)+(2)(-3)+(3)(1) = 6+7-6+3 = 10$

$v_1 \cdot v_1 = 2^2+(-1)^2+(-3)^2+1^2 = 4+1+9+1 = 15$

$v_2 \cdot v_2 = 1^2+1^2+0^2+(-1)^2 = 1+1+0+1 = 3$

$z \cdot v_2 = [3\ -7\ 2\ 3]\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\end{bmatrix} = (3)(1)+(-7)(1)+(2)(0)+(3)(-1) = 3-7+0-3 = -7$

즉 $\hat{z} = \dfrac{10}{15} v_1 + \dfrac{(-7)}{3} v_2$

$= \frac{2}{3} v_1 - \frac{7}{3} v_2 = \frac{2}{3}\begin{bmatrix}2\\-1\\-3\\1\end{bmatrix} - \frac{7}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}\frac{4}{3}\\-\frac{2}{3}\\-\frac{6}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\frac{7}{3}\\-\frac{7}{3}\\0\\\frac{7}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{4}{3}-\frac{7}{3}\\-\frac{2}{3}-\frac{7}{3}\\-\frac{6}{3}+0\\\frac{2}{3}+\frac{7}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{3}{3}\\-\frac{9}{3}\\-2\\\frac{9}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-3\\-2\\3\end{bmatrix}$

$\therefore = \hat{z}$

6. $\mathbf{y} = \begin{bmatrix}7\\9\end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1/\sqrt{10}\\-3/\sqrt{10}\end{bmatrix}$, $W = \text{Span}\{\mathbf{u}_1\}$이라 할 때,

(a) U는 $\mathbf{u}_1$을 열로 갖는 2×1 행렬이다. U^TU와 UU^T를 계산하라.

(b) $\text{proj}_W\mathbf{y}$와 $(UU^T)\mathbf{y}$를 계산하라.

(a)

$U = [u_1] = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\\-\frac{3}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}$ $\qquad U^T = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}$

① $U^TU = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\\-\frac{3}{\sqrt{10}}\end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{10} + \frac{9}{10} = 1$

② $UU^T = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\\-\frac{3}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} \times \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \left(\frac{-3}{\sqrt{10}}\right)\\ -\frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) & \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{10} & -\frac{3}{10}\\ -\frac{3}{10} & \frac{9}{10}\end{bmatrix}$

(b) ~~proj_w~~ u_1 하나이므로

$\text{proj}_W y = \dfrac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1$ 이다.

이를 계산하기위해

$y \cdot u_1 = y^T u_1 = [7\ 9]\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\\-\frac{3}{\sqrt{10}}\end{bmatrix} = (7)\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + (9)\left(\frac{-3}{\sqrt{10}}\right)$
$= \frac{7}{\sqrt{10}} - \frac{27}{\sqrt{10}} = \frac{-20}{\sqrt{10}} = \frac{-20\sqrt{10}}{10} = -2\sqrt{10}$

$u_1 \cdot u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{-3}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{1}{10} + \frac{9}{10} = 1$

즉. $\dfrac{-2\sqrt{10}}{1} u_1$

$\text{proj}_W y = -2\sqrt{10}\, u_1$

$= -2\sqrt{10}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\\-\frac{3}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}-2\sqrt{10}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\\-2\sqrt{10}\left(\frac{-3}{\sqrt{10}}\right)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\+6\end{bmatrix} \therefore \begin{bmatrix}-2\\+6\end{bmatrix}$

(b)

$(UU^T)Y$를 구하자

$$(UU^T)Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{9}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{10}\right)(7) + \left(-\frac{3}{10}\right)(9) \\ \left(-\frac{3}{10}\right)(7) + \left(\frac{9}{10}\right)(9) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{7}{10} - \frac{27}{10} \\ -\frac{21}{10} + \frac{81}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{20}{10} \\ +\frac{60}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$