선형대수학
2020년도 1학기

Homework #3

소프트웨어학과

학과	소프트웨어	학번	2016039069	성명	황윤지

Note: 풀이과정이 없는 답은 0점 처리됨. 간결하고 읽을 수 있도록 정자체로 쓸것.

1. (page 67) 1.6 연습문제 7

(a) 교차로의 유입량과 유출량을 같게두자

	유입	유출
A	x_2+30	$=x_1+80$
B	x_3+x_5	$=x_2+x_4$
C	x_6+100	$=x_5+40$
D	x_4+40	$=x_6+90$
E	x_1+60	$=x_3+20$
	230	230

선형계를 얻으면

$$x_1-x_2=-50$$
$$x_2-x_3+x_4-x_5=0$$
$$x_5-x_6=60$$
$$x_4-x_6=50$$
$$x_1-x_3=-40$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1&-1&0&0&0&0&-50\\ 0&1&-1&1&-1&0&0\\ 0&0&0&0&1&-1&60\\ 0&0&0&1&0&-1&50\\ 1&0&-1&0&0&0&-40 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1&0&-1&0&0&0&-40\\ 0&1&-1&1&-1&0&0\\ 1&-1&0&0&0&0&-50\\ 0&0&0&0&1&-1&60\\ 0&0&0&1&0&-1&50 \end{array}\right] \begin{array}{l} -①\\ \\ -②\\ \\ \\ \end{array}$$

①-②를 ③에 넣으면

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1&0&-1&0&0&0&-40\\ 0&1&-1&1&-1&0&0\\ 0&1&-1&0&0&0&10\\ 0&0&0&0&1&-1&60\\ 0&0&0&1&0&-1&50 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 1&0&-1&0&0&0&-40\\ 0&1&-1&0&0&0&10\\ 0&1&-1&1&-1&0&0\\ 0&0&0&0&1&-1&60\\ 0&0&0&1&0&-1&50 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 1&0&-1&0&0&0&-40\\ 0&1&-1&0&0&0&10\\ 0&0&0&1&-1&0&0\\ 0&0&0&0&1&-1&60\\ 0&0&0&1&0&-1&-50 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 1&0&-1&0&0&0&-40\\ 0&1&-1&0&0&0&10\\ 0&0&0&1&0&-1&50\\ 0&0&0&0&1&-1&60\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{array}\right]$$

x_3, x_6 = 자유변수

~~기약~~ 축약된 첨가행렬을 풀면

$$\begin{cases} x_1=x_3-40\\ x_2=x_3+10\\ x_4=x_6+50\\ x_5=x_6+60\\ x_3, x_6 \text{는 자유변수} \end{cases}$$

가 일반적인 흐름 패턴 이다

(b).

x_1은 양수이어야하므로 $\therefore x_1 \ge 0$

$x_1=x_3-40 \ge 0$ $\therefore x_3 \ge 40$

x_2에서 $x_2=x_3+10$인데 $x_3 \ge 40$이므로

$x_3=x_2-10 \ge 40$

$\therefore x_2 \ge 50$ 이다

$x_6 \ge 0$ 이어야한다. (일방통행이므로)

~~$x_6 = x_1+10 \ge 0$~~

$x_6=x_5-60 \ge 0$ $\therefore x_5 \ge 60$ 이다

$x_6=x_4-50 \ge 0$ $\therefore x_4 \ge 50$

즉, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 50$, $x_3 \ge 40$, $x_6 \ge 0$, $x_5 \ge 60$, $x_4 \ge 50$ 이므로 가장 작은 흐름은 (각 가지에 대한)

$\therefore x_1=0$, $x_2=50$, $x_3=40$, $x_6=0$, $x_5=60$, $x_4=50$

이다.

Homework #3

2. (page 75) 1.7 연습문제 5

벡터 w가 Span$\{u,v\}$에 포함되는 필요충분조건은 $\{u,v,w\}$가 일차종속인 것이다.

$\{v_1,v_2,v_3\}$가 일차종속인지 보자

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 9 & -7 \\ 2 & -6 & h \end{bmatrix} \begin{matrix} -① \\ -② \\ -③ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & h-10 \end{bmatrix}$$

①×3+② 를 ②에
①×2 −③ 을 ③에
넣으면

→ 해가 없다는 것을 알 수 있다

즉, v_3가 Span$\{v_1,v_2\}$에 속하기 위한 h값은 없다.

(b) $[v_1 v_2 v_3] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 9 & -6 \\ 5 & -7 & h \end{bmatrix}$

$v_1\ v_2 v_3$ 사이의 일차종속관계를 구하기 위해 첨가행렬을 축약하자

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & h-10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ +3\times① \\ -5\times① \end{matrix}$$

x_3는 자유변수이다

$\begin{cases} x_1 = 3x_2 - 2 \\ x_2 \text{는 자유변수} \end{cases}$

$8x_2 = h-10$

$x_2 = \frac{h-10}{8}$ 이다

자명하지 않은 해를 가지므로 $v_1, v_2 v_3$는 일차종속이다.

즉, x_3는 자유변수므로 일차종속이 되기 위한 h값은 없다.

3. (page 75) 1.7 연습문제 11

a. 거짓, 행렬 A의 열들이 일차독립이기 위한 필요충분조건은 방정식 $Ax=0$이 자명한 해만 갖는 것이다.
즉, $Ax=0$이 자명한 해만을 가져야 행렬 A의 열들이 일차독립이다.

b. 거짓, 집합 S가 일차종속인 필요충분조건은 S의 벡터 중 적어도 하나가 다른 벡터들의 일차결합이 되는 것이다.
즉, S가 일차종속결합이라고 S의 각각의 벡터들이 다른 벡터의 일차결합은 아니다.

c. 참 4×5행렬은 벡터의 수가 각 벡터에 있는 성분의 개수보다 많기 때문에 일차종속이다.

d. 참, 만약 $\{x,y,z\}$가 ~~일차독립이면~~, 일차종속이면 이 벡터 중 하나는 다른 벡터의 일차결합이어야 한다. 즉, z가 Span$\{x,y\}$에 속하거나, y가 Span$\{x,z\}$에 속하거나 x가 Span$\{y,z\}$에 속해야 한다.

그때, x,y가 일차독립이므로 $\{x,y,z\}$가 일차종속이면 z가 Span$\{x,y\}$에 속한다.

4. (page 85) 1.8 **연습문제 5**

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & -6 & 6 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

이되는 x를 구해야한다.

x는 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ 라하자

방정식에 따라서

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & 6 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & -6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 9x_3 - 7x_4 \\ x_2 = 4x_3 - 3x_4 \\ x_3, x_4 \text{는 자유변수} \end{cases}$$

즉 $x = \begin{bmatrix} 9x_3 - 7x_4 \\ 4x_3 - 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ 이다.

즉 $x_3\begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (x_3 x_4는 자유변수)

5. (page 85) 1.8 **연습문제 10**

~~벡터 T(x)는 A라고 정의하자.~~

$T(e_1) \to y_1$
$T(e_2) \to y_2$가 된다.
$T(u)+T(v)=T(u+v)$고 $cT(u)=T(cu)$이다.
즉 $T(e_1)+T(e_2)=T(e_1+e_2)$이므로
따라서 e_1 과 e_2로 나누자
$\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} = 5e_1 - 3e_2$
$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1e_1 + x_2e_2$

$\therefore \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$의 상은 $T(5e_1 - 3e_2)$

$= 5\underset{y_1}{T(e_1)} - 3\underset{y_2}{T(e_2)}$

$\therefore 5y_1 - 3y_2$

$= 5\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$의 상은 $T(x_1e_1 + x_2e_2)$

$= x_1\underset{y_1}{T(e_1)} + x_2\underset{y_2}{T(e_2)}$

$= x_1\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \end{bmatrix}$

6. (page 95) 1.9 연습문제 3

$e_1=(1,0),\ e_2=(0,1)$

$T(e_1)=e_1-2e_2$ $T(e_2)=e_2$ 이다

$T(e_1)=e_1-2e_2$ $T(e_2)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$

즉 선형변환 T의 표준행렬은

$\therefore [T(e_1)\ T(e_2)]$ 즉

$\begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & 1\end{bmatrix}$ 이다

7. (page 95) 1.9 연습문제 8

~~$\begin{bmatrix}? & ? & ?\\? & ? & ?\\? & ? & ?\end{bmatrix}=T\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=X$~~

$\begin{bmatrix}? & ? & ?\\? & ? & ?\\? & ? & ?\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b & c\\d & e & f\\k & z & Y\end{bmatrix}$

이라하면.

$ax_1+bx_2+cx_3=3x_1-2x_3$

$dx_1+ex_2+fx_3=4x_1$

$kx_1+zx_2+Yx_3=x_1-x_2+x_3$

$\therefore a=3\quad b=0\quad c=-2$

$d=4\quad e=0\quad f=0$

$k=1\quad z=-1\quad Y=1$

$\therefore \begin{bmatrix}3 & 0 & -2\\4 & 0 & 0\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ 이 표준행렬이다