Homework #10

Due: 10:00, June 12, 2020

학과	소프트웨어	학번	2016039069	성명	함윤지

Note: 풀이과정이 없는 답은 0점 처리됨. 간결하고 읽을 수 있도록 정자체로 쓸것.

1. **(page 329) 5.2 연습문제 5**

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

nxn 행렬이므로 $\det(A-\lambda I)=0$ 으로 푼다

$\det(A-\lambda I) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 6 & -\lambda \end{bmatrix}$

$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 6 & -\lambda \end{vmatrix}$

$=(1-\lambda)[-3\lambda+\lambda^2+6]-0-1[12-0]$ 이식을전개하면

$=(-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+6)-12$

$=\lambda^2-3\lambda+6-\lambda^3+3\lambda^2-6\lambda-12$

$=-\lambda^3+4\lambda^2-9\lambda-6$

즉, $P=-\lambda^3+4\lambda^2-9\lambda-6$

2. **(page 329) 5.2 연습문제 13**

① R^2의 기저구하자

첫문제로 A의고유값과 고유공간의 기저를 구한다.

∴ A의 특성방정식

$0=\det\begin{vmatrix} .6-\lambda & .3 \\ .4 & .7-\lambda \end{vmatrix} = (.6-\lambda)(.7-\lambda)-(0.3)(0.4)$

$=\frac{42}{100}-\frac{6}{10}\lambda-\frac{7}{10}\lambda+\lambda^2-\frac{12}{100}$

$=\frac{30}{100}-\frac{13}{10}\lambda+\lambda^2$

$=\lambda^2-\frac{13}{10}\lambda+\frac{30}{100}$

$=(\lambda-\frac{10}{10})(\lambda-\frac{3}{10})$

$=(\lambda-1)(\lambda-0.3)$

고유값은 1, 0.3이다

$\{v_1, v_2\}$는 R^2의 기저이다

$Av_1 = \begin{bmatrix} .6 & .3 \\ .4 & .7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} \frac{1.8}{7}+\frac{1.2}{7} \\ \frac{1.2}{7}+\frac{2.8}{7} \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} \frac{3.0}{7} \\ \frac{4.0}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{bmatrix} = v_1$

고유값 1에 대응하는 고유벡터는

$=\begin{bmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{bmatrix}$ 이다

$(A-0.3I)x=0$ 으로 0.3의기저를 찾자

$A-0.3I = \begin{vmatrix} .6-.3 & .3 \\ .4 & .7-.3 \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} .3 & .3 \\ .4 & .4 \end{vmatrix}$

식을 풀기위해 첨가행렬로 만들어 행연산하면

$\begin{vmatrix} .3 & .3 & 0 \\ .4 & .4 & 0 \end{vmatrix} \overset{①}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ .4 & .4 & 0 \end{bmatrix} \overset{②}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

① $\times \frac{1}{.3}$ (0.4)① − (②)

→ $\lambda=3$에 대응하는 고유벡터는

$V_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이다

즉, R^2 기저

$\left\{\begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

(b)

풀이) x_0를 v_1, v_2로 표현하자 $\{v_1, v_2\}$는 $\mathbb{R}^2$의 기저이다. 따라서

$$x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 = [v_1\ v_2]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$ 를 만족한다

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = [v_1, v_2]^{-1} x_0$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -1 \\ \frac{4}{7} & 1 \end{bmatrix}^{-1} x_0$$

$$= 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$+\frac{3}{7}+\frac{4}{7}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-4+3}{14} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{14} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x_0 = v_1 - \frac{1}{14} v$ 이다

즉, $x_0 = v_1 + c v_2$를 만족한다

~~$Av_1 = v_1$이므로~~

$x_0 = v_1 + c v_2$ 를 확인해보면

$$\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} - c \\ \frac{4}{7} + c \end{bmatrix} \begin{matrix} ① \\ ② \end{matrix}$$

②-①하면

$$0 = 2c + \frac{1}{7}$$

$\therefore c = -\frac{1}{14}$ 이다. 가 나오므로

$x_0 = v_1 - \frac{1}{14} v$ 이다

(c) 1일때

$x_k = A^k x_0$

$x_0 = v_1 + c v_2$ 니까 $x_k = A^k(v_1 + c v_2)$

$$x_1 = A(v_1 + c v_2)$$

$$= \underbrace{Av_1}_{} + c\underbrace{Av_2}_{}$$

$$= v_1 + c(0.3)v_2$$

고유벡터에 의해
$Av_1 = v_1$
$Av_2 = 0.3v_2$

2일때

$$x_2 = Ax_1 = A(v_1 + c(0.3)v_2)$$

$$= Av_1 + c(0.3)(A)(v_2)$$

$$= v_1 + c(0.3)(0.3)v_2$$

$$\rightarrow v_1 + c(0.3)^2 v_2$$

즉, x_k에 대한 일반적인 공식은

$x_k = A^k(v_1 + c v_2)$ 이고

$x_k = v_1 + c(0.3)^k v_2$ 이므로

k가 증가하면 $c(0.3)^k v_2$ 사라져서

v_1만 남는다.

3. $A = PDP^{-1}$임을 이용하여 A^k을 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 12 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$P=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$이고 $D=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$이다. $P^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$이다.

행렬의 곱셈의 결합법칙에 의해

$A^2=(PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD\underbrace{(P^{-1}P)}_{I}DP^{-1} = PDDP^{-1}$

$=PD^2P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 1^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

다음을 연속수 얻다

$A^3 = (PDP^{-1})A^2 = (PD\underbrace{P^{-1})P}_{I}D^2P^{-1} = PDD^2P^{-1} = PD^3P^{-1}$

$k \geq 1$에 대해 일반적으로 $A^k = PD^kP^{-1}$

$= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3\times2^k & 1^k \\ 2^k & 1^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -3\times2^k + 1^k & 12\cdot2^k - 3\cdot1^k \\ -2^k + 1^k & 4\cdot2^k - 3\cdot1^k \end{bmatrix}$

4. **(page 337) 5.3 연습문제 7, P, D만 구함**

$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

① A의 고유값을 구한다.

문제에서 $\lambda = 5, 1$이다.

3×3 행렬이므로 나머지 고유값 찾자

$1+5+\underbrace{\text{나머지고유값}}_{=x} = 2+3+2$

$6+x=7$

$x=1$, 고유값 1은 중복된다.

② 고유벡터를 구하자 $\lambda=1$일때

$(A-I)x=0$ 이므로 이를 이용하면

$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$ ① ② ③ 첨가행렬 정연산하면

①-②

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

①+③=③

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{array}{r} 1\ 2\ -1\ 0 \\ -1\ -2\ 1\ 0 \\ \hline 0\ 0\ 0\ 0 \end{array}$

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2, x_3 \text{ 자유변수} \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3$$

따라서 고유벡터는 $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이다 (중복이라 2개)

$\lambda = 5$ 일때 벡터 찾자

~~$(A-5\lambda I)$~~ $(A-5I)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-5 & 2-0 & -1-0 \\ 1-0 & 3-5 & -1-0 \\ -1-0 & -2-0 & 2-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

즉 $\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

첨가행렬 계산하자

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \end{array} \end{array}$$

$2 \leftrightarrow 1$

$$\sim \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} -1 \\ -2 \\ \end{array} \end{array}$$

$3 \times 1 + 2$

$$\begin{array}{rrrr} 3 & -6 & -3 & 0 \\ +) \ -3 & 2 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -4 & -4 & 0 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ \\ 3 \end{array} \end{array}$$

$3 + 1$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ \hline 0 & -4 & -4 & 0 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

$2 \times 4 + 3$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 \text{자유변수} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 + x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_3 + x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} x_3$$

$x_2 = -x_3$ 따라서 $v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

x_3 자유변수

③ 2단계에서 얻은 벡터들로 행렬 P를 구성한다.

$$P = [v_1, v_2, v_3] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

④ 대응하는 고유값들로 행렬 D 구성한다.

($\lambda = 1$ 이 중복) 이므로 한번씩 사용한다

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

5. **(page 345) 5.4 연습문제 6**

정리8에의해
P는 b_1, b_2로 이루어진다.
$A=PDP^{-1}$
$\therefore P^{-1}$ 을구하자
$$P^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1\\1&2\end{bmatrix}\times\frac{1}{(4)-(-1)}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2&-1\\1&2\end{bmatrix}$$
$A=PDP^{-1}$ 이므로 $D=$ ~~$A=PA$~~ $P^{-1}AP$이다
$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2&-1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&4\\-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2&-1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6-4&3+8\\-2+1&-1-2\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2&-1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&11\\-1&-3\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4+1&22+3\\2-2&11-6\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}5&25\\0&5\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1&5\\0&1\end{bmatrix}=D$$

A의 고유값은 대각 요소에있으므로
B 행렬표현은 $\begin{bmatrix}1&5\\0&1\end{bmatrix}$이다.

6. 변환 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$는 $T(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$와 같이 주어진다. $[T]_{\mathcal{B}}$가 대각 행렬이 되는 성질을 가지는 $\mathbb{R}^2$의 기저 $\mathcal{B}$를 구하라.
$$A=\begin{bmatrix}5&-3\\-7&1\end{bmatrix}$$

1) 고유값 찾자
$$\det(A-\lambda I)=\begin{bmatrix}5-\lambda&-3\\-7&1-\lambda\end{bmatrix}$$
$$(5-\lambda)(1-\lambda)+21=0$$
$$-5+21-6\lambda+\lambda^2=0$$
$$\lambda^2-6\lambda+16=0$$
$$(\lambda-8)(\lambda+2)=0$$
$$\therefore \lambda=8,\ \lambda=-2$$

$\lambda=8$일때 고유벡터
$(A-8I)x=0$ 풀자
$$\begin{bmatrix}5-8&-3\\-7&1-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&-3\\-7&-7\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}-3&-3\\-7&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$
첨가행렬 행연산
$$\begin{bmatrix}-3&-3&0\\-7&-7&0\end{bmatrix}\begin{matrix}①\\②\end{matrix}$$
$①\times\frac{1}{3}$; $②\times\frac{1}{7}$
$$\sim\begin{bmatrix}-1&-1&0\\-1&-1&0\end{bmatrix}\begin{matrix}①\\②\end{matrix}$$
$①\times -1$
$$\sim\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&-1&0\end{bmatrix}\begin{matrix}①\\②\end{matrix}$$
$①+②$
$$\sim\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$x_1+x_2=0$
$x_1=-x_2$
$$\begin{cases}x_1=-x_2\\x_2=\text{자유변수}\end{cases}$$
$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_2\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}x_2$$
$$\therefore v_1=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$
고유벡터

$\lambda = 2$일때

$$(A+2I) = \begin{bmatrix} 2+5 & -3 \\ -7 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

$(A+2I)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 \\ -7 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} ① \\ ② \end{matrix}$$ 첨가행렬 연산하자

①+②

$$\sim \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_2 \text{는 자유변수} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{7}x_2 \\ x_2 \text{는 자유변수} \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} \frac{3}{7}x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ 1 \end{bmatrix} = v_2$$

행렬 A는 고유벡터 v_1 v_2 가 있다. 그리고 스칼라배가 아니므로 선형독립이다,

따라서 A는 대각화 가능하다,

그래서 P는 A 고유벡터를 열로가진다 $P = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{7} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $[T]_B$가 대각행렬이 되는성질을 가지는 $\mathbb{R}^2$ 기저 B는 $\therefore \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{7} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$