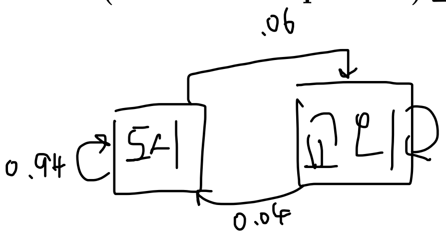
Homework #4

Due: 10:00, April 17, 2020

학과	소프트웨어	학번	2016039069	성명	황운지

Note: 풀이과정이 없는 답은 0점 처리됨. 간결하고 읽을 수 있도록 정자체로 쓸것.

1. **어떤 특정지역에서 매년 약** 6%**의 도시 인구가 교외로 이동하고,** 4%**의 교외인구가 도시로 이주 한다고 하자.** 2018**년 도시에는** 10,000,000**명, 교외에는** 800,000**명의 거주자가 있었다.** x_0**를** 2018**년도의 인구라할 때 이러한 인구이동에 대한 현상을 기술할 수 있는 차등방정식 (difference equation)을 세우고,** 2020**년 도시와 교외인구의 추정값은 어떻게 되는가?**



초기해를 2018 고정 하고

$$x_0 = \begin{bmatrix} r_0 \\ s_0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{도시인구, 2018} \\ \text{교외인구, 2018} \end{matrix}$$

1년후 r_0는

$$\begin{bmatrix} 0.94\ r_0 \\ 0.06\ r_0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{도시에남음} \\ \text{교외로이동} \end{matrix}$$

1년후 S_0는

$$\begin{bmatrix} 0.04\ S_0 \\ 0.94\ S_0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{도시로이동} \\ \text{교외에남음} \end{matrix}$$

로분포됨

1년후 전체인구를 X_1이라 하면

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ S_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.94 & 0.04 \\ 0.06 & 0.96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ S_0 \end{bmatrix}$$

즉, $X_1 = M X_0$ 이고

M은 이동행렬 이다.

$\begin{bmatrix} 0.94 & 0.04 \\ 0.06 & 0.96 \end{bmatrix}$에 정해지는

차등 방정식을 쓰면

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} .94 & .04 \\ .06 & .96 \end{bmatrix} X_k \ (k=0,1,2)$$

차등방정식에 의해

2019년 인구 추정값은

$$\begin{bmatrix} 0.94 & 0.04 \\ 0.06 & 0.96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10\,000\,000 \\ 800\,000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9400000 + 32\,000 \\ 600000 + 768\,000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9432000 \\ 1368000 \end{bmatrix}$$

∴ 2020년 도시, 교외 인구 추정값은

$$\begin{bmatrix} 0.94 & 0.04 \\ 0.06 & 0.96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9432000 \\ 1368000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8920{,}800 \\ 1879200 \end{bmatrix}$$

2020년

도시인구 추정값은 8920800

교외인구 추정값은 1879200 이다

2. **(page 121) 2.1 연습문제 3**

a. B를 $B=[b_1 b_2]$라두고 계산하면

$$Ab_1 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4-6 \\ 8-8 \\ 20+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 26 \end{bmatrix}$$

$$Ab_2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+9 \\ -4+12 \\ -10-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \\ -19 \end{bmatrix}$$

∴곱 $AB = [Ab_1\ Ab_2]$

$$= \begin{bmatrix} -10 & 11 \\ 0 & 8 \\ 26 & -19 \end{bmatrix}$$

b. $$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1\times4+3\times(-2) & -1\times(-2)+3\times3 \\ 2\times4+4\times(-2) & 2\times(-2)+4\times3 \\ 5\times4+(-3)\times(-2) & 5\times(-2)+(-3)\times3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -10 & 11 \\ 0 & 8 \\ 26 & -19 \end{bmatrix} = \therefore AB$$

3. (page 121) 2.1 연습문제 12

$CA = I_n$ 이고 $Ax=0$이 자명한 해를 갖는 것은

A의 열개수는 행의 개수보다 작다는 것이다

$CA=I_n$에서 CA가 가능한 것은 C의 열개수 = A의 행개수

C가 $x \times y$ 행렬이라두면

A는 $y \times x$ 행렬이다.

$AX=0$이므로

$C(AX)=C0 \rightarrow \underbrace{(CA)}_{=I_n}X = C0$ (결합법칙)

$I_n X = 0$ (항등행렬이므로) $\therefore X=0$ 이므로 방정식 $AX=0$은 오직 자명한 해를 갖는다

4. (page 132) 2.2 연습문제 4

a. $A^{-1} = \dfrac{1}{12-10}\begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

$= \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$\therefore$ $AX=b_1$의 양변에 A^{-1}을 곱하면 $X=A^{-1}b_1$

$X=\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6-3 \\ \frac{5}{2}+\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \end{bmatrix}$

$AX=b_2$의 양변에 A^{-1}을 곱하면 $X=A^{-1}b_2$

$\therefore X=A^{-1}b_2$

$= \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+5 \\ -\frac{5}{2}-\frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \end{bmatrix}$

$AX=b_3$의 양변에 A^{-1}을 곱하면 $X=A^{-1}b_3$

$\therefore X=A^{-1}b_3$

$= \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12-6 \\ -\frac{10}{2}+\frac{6}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$

$AX=b_4$의 양변에 A^{-1}곱하면 $X=A^{-1}b_4$

$\therefore X=A^{-1}b_4 = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -5 \end{bmatrix}$

(b). $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 12 & 3 & -5 & 6 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -① \\ -② \end{matrix}$

$①\cdot(-5)+② \Rightarrow ②$ 에 넣으면

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -58 & -16 & 26 & -28 & -22 & 0 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -29 & -8 & 13 & -14 & -11 & 0 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 29 & 8 & -13 & 14 & 11 & 0 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{16}{29} & \frac{-26}{29} & \frac{28}{29} & \frac{22}{29} & 0 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-13}{29} & \frac{55}{29} & 1\frac{1}{29} & 2\frac{7}{29} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{8}{29} & \frac{-13}{29} & \frac{14}{29} & \frac{11}{29} & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{13}{29}x_3 + \frac{55}{29}x_4 + \frac{30}{29}x_5 + \frac{65}{29}x_6 = 0 \\ x_2 + \frac{8}{29}x_3 - \frac{13}{29}x_4 + \frac{14}{29}x_5 + \frac{11}{29}x_6 = 0 \end{cases}$$

$\therefore$
$$\begin{cases} x_1 = \frac{13}{29}x_3 - \frac{55}{29}x_4 - \frac{30}{29}x_5 - \frac{65}{29}x_6 \\ x_2 = -\frac{8}{29}x_3 + \frac{13}{29}x_4 - \frac{14}{29}x_5 - \frac{11}{29}x_6 \end{cases}$$

x_3, x_4, x_5, x_6은 자유 변수

5. **(page 133) 2.2 연습문제 16**

역행렬을 구하기 위해서 $[A\,I]$ 를 이용하자

$$[A\,I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} -① \\ -② \\ -③ \end{array}$$

$\sim$ ②에 ②+3·①

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \therefore A = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

6. **(page 133) 2.2 연습문제 18**

A는 3×3행렬

즉, I는 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$만 추가해서 첨가행렬을 구하자

$$\begin{bmatrix} -1 & -7 & -3 & 0 \\ 2 & 15 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 15 & 6 & 0 \\ -1 & -7 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \therefore A^{-1}\text{의 3열은 } \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\text{이다}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

7. **행렬** A, B, C**가** $n \times n$ **행렬이고, 가역적이라면, 다음 방정식을 만족하는** X**를 구하라.**

$$C^{-1}(A+X)B^{-1} = I_n$$

A, B, C가 모두 가역행렬이므로 A^{-1}, B^{-1}, C^{-1}은 존재한다.

$C^{-1}(A+X)B^{-1} = I_n$

양변×C

$(A+X)B^{-1} = CI_n$

양변에 B를 곱한다

$(A+X)B^{-1}B = CI_nB$

$(A+X) = CI_nB$

$A+X = CB$

$\therefore X = CB - A$

8. **(page 139) 2.3 연습문제 4**

A를 축약하자

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A는 4개의 추축위치를 가지고 4×4 행렬이다.
즉, A는 가역이다

9. **(page 139) 2.3 연습문제 6**

a. A는 n×n 항등행렬과 행동치이면 AX=0이 자명한 해만을 가진다. (정리 8) (p.124) ∴참

b. p.124 정리 8에 의해 동치인 명제를 알 수 있다.
A의 열들이 $\mathbb{R}^n$을 생성한다와 A의 열들이 일차독립이다는 동치이다
즉, A의 열들이 $\mathbb{R}^n$을 생성하면 열들은 일차독립이다 ∴참

c. A는 n×n 행렬이고 가역 행렬이어야 c 명제는 거짓이다 ∴거짓

d. AX=0이 자명하지 않는 해를 가진다는 것은 모든 행에 추축의 위치가 있지 않은 것, 즉 추축이 없는 행이 있는 것이고 즉, n보다 적은 추축의 개수를 가진다. ∴참

e. 정리 8에 의해 A는 가역행렬이다 와 A^T는 가역행렬이다가 동치이므로 (e) 문장은 참이다 ∴참