渐变分析

asymptotic analysis

当n→∞时，函数f(n)的极限行为

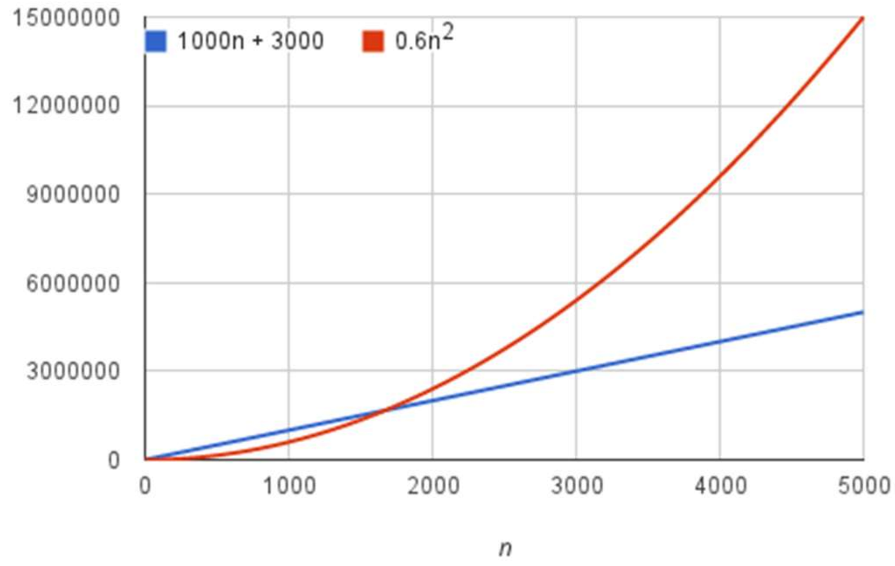
Youtube频道：hwdong

渐变分析

- 设$f(n) = n^2 + 3n$，当n变得非常大时，与n^2 相比，3n变得微不足道，因此，当$n \to \infty$时，$f(n)$ 和n^2渐进相等。即 $f(n) \sim n^2$。
- 当$n \to \infty$时，

  $1000n+3000$和$0.6n^2$

  比较可以忽略不计。



渐变分析

- 通过去掉不那么重要的项和常数系数，我们可以专注于算法运行时间的重要部分，即增长率，而不会陷入使我们的理解更加复杂的细节中。
- 如$0.01n^2+700n$和n^2是同一个数量级，它们是同介无穷大量。
- 当去掉常数系数和不太重要的项时，使用**渐变符号**表示增长的数量级。

渐变符号

- 上界**O**、下界**Ω**、紧界**Θ**、非紧上界**o**、非紧下界**ω**。

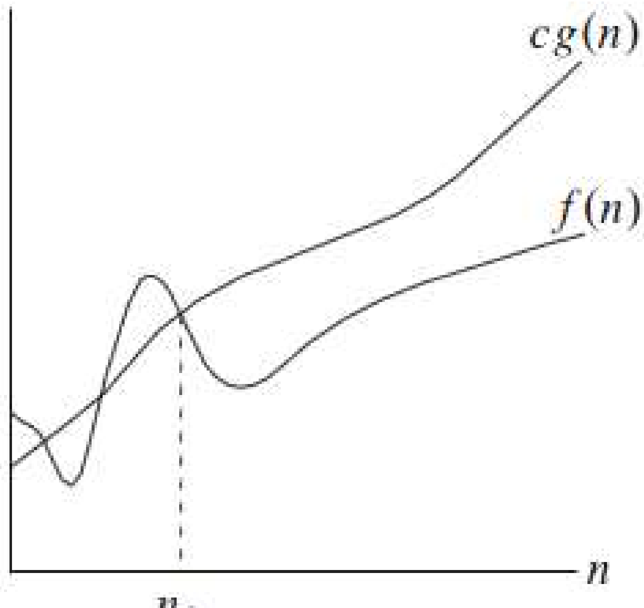
上界O

- 若存在正数c和n_0，使得对所有$n \geq n_0$有：

$$0 \leq f(n) \leq cg(n)\ ,$$

则称f(n)的渐进上界是g(n)，记作

$$f(n)=O(g(n))$$



$f(n) = O(g(n))$

上界O

- 如$f(n) = n^2+2n$,则：

$f(n)=O(n^2)$,可取$c = 2, n_0 = 2$

$f(n)=O(n^3)$,可取$c = 1, n_0 = 2$

$f(n)=O(0.1n^3)$,可取$c = 10, n_0 = 2$

- 如果$f(n)=O(g(n))$，说明$g(n)$的阶等于或高于$f(n)$.

$\boxed{\text{上界的阶越低，则评估就越精确，就越有价值。}}$

求证：所有度为k的多项式的上界是O(n^k)。

证明：设 $T(n) = a_k n^k + \ldots + a_1 n + a_0$ where $a_k \neq 0$.

Let $n_0 = 1$ and let $a^* = \max_i |a_i|$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= a_k n^k + \ldots + a_1 n + a_0 \\
&\le a^* n^k + \ldots + a^* n + a^* \\
&\le a^* n^k + \ldots + a^* n^k + a^* n^k \\
&= (k+1) a^* \cdot n^k
\end{aligned}
$$

Let $c = (k+1)a^*$ which is a constant

练习

- 请证明： 对函数$f(x) = 2x^2 - 5x + 1$, $f(x) = O(x^2)$
- 请证明：$For\ any\ k \geq 1,\ n^k\ is\ not\ O(n^{k-1})$.

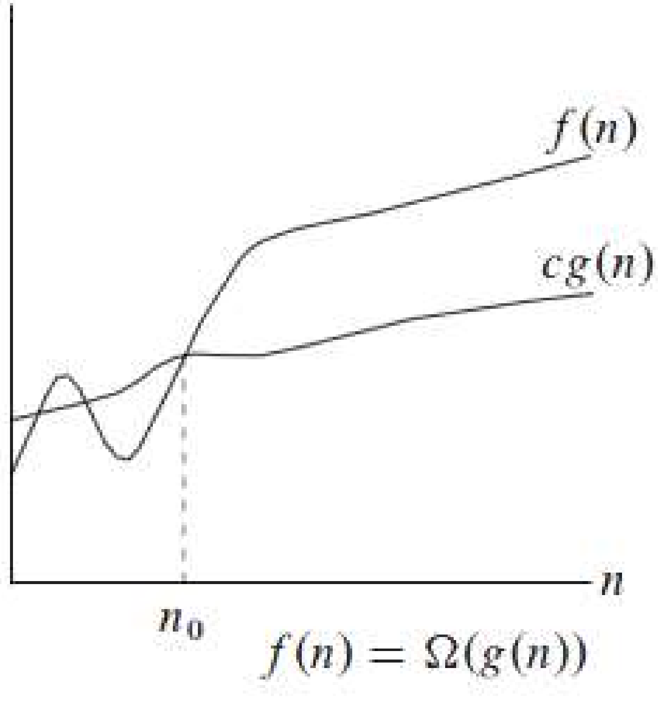
下界Ω

- 若存在正数c和n_0，使得对所有$n\geq n_0$有：

  $0\leq cg(n) \leq f(n)$ ，

则称f(n)的渐进下界是g(n)，记作

$f(n)= \Omega\ (g(n))$



下界Ω

- 如$f(n) = n^2+2n$,则：

$f(n)= \Omega(n^2)$,可取$c = 1, n_0 = 1$

$f(n)= \Omega(100n)$,可取$c = 0.01, n_0 = 1$

$f(n)= \Omega(10n^2+5n)$,可取$c = 0.1, n_0 = 1$

- 如果$f(n)= \Omega(g(n))$，说明$g(n)$的介等于或低于$f(n)$.

下界的阶越高，则评估就越精确，就越有价值。

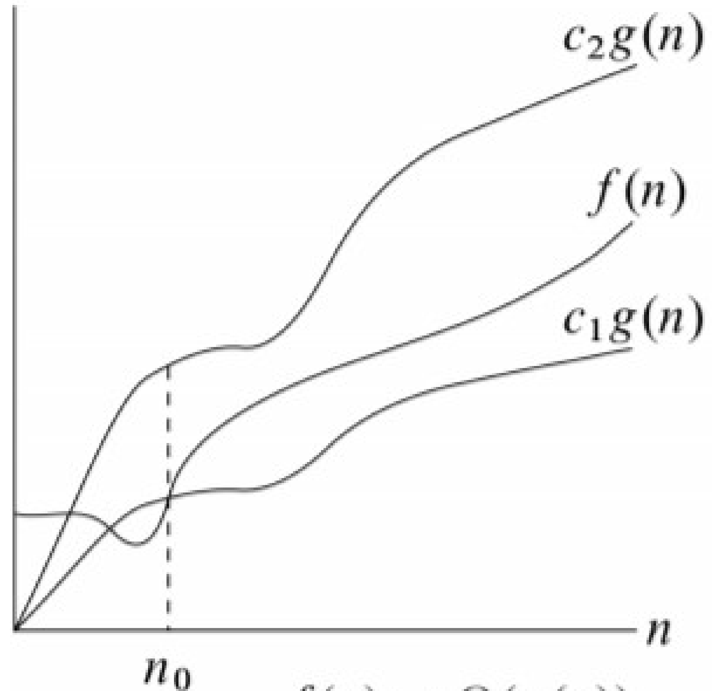
紧界Θ

- 若正数c_1,c_2和n_0使得对所有$n \geq n_0$有：

$$c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \},$$

则称f(n)的紧界是g(n)，记作

$$f(n)= \Theta(g(n))$$



$f(n) = \Theta(g(n))$

紧界Θ

- 如$f(n) = n^2+2n$, $g(n) = n^2$,则$f(n)= \Theta(n^2)$
- 如果$f(n)= \Theta(g(n))$，说明f(n)和g(n)是同阶无穷大量。
- 定理：$\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = c$ $(c>0)$, 则$f(n)= \Theta(g(n))$

如：

$\lim_{n\to\infty} (n^2/3-4n)/(n^2) = 1/3$，因此$(n^2/3-4n) = \Theta(n^2)$

练习

- $f(n) = 0.1n^2+3n-7$和n, n^2, n^3的关系

非紧上界o

- 若对**任何**正数c>0，存在正数n_0 >0使得对所有n≥ n_0有：

  $0 \leq f(n)<cg(n)$ }

则称f(n)的非紧上界是g(n)，记作

$f(n)= o(g(n))$

- 等价于 $f(n) / g(n) \to 0$ ，as $n \to \infty$。

如： $\lim_{n \to \infty}(5n^2+9n)/(n^3) = 0$，因此$(5n^2+9n) = o(n^3)$

非紧上界o

- $\log n = o(n^c)$
- $n^c = o(a^n)$

非紧下界ω

- 若对**任何**正数$c>0$，存在正数$n_0>0$使得对所有$n \geq n_0$有：

  $0 \leq cg(n) < f(n)$ }

$f(n) = n^2$

$g(n) = 10n$

则称f(n)的非紧下界是g(n)，记作

  $f(n) = \omega(g(n))$

- 等价于 $f(n) / g(n) \to \infty$， as $n \to \infty$。

性质：

(1) 传递性

- 如果f=O(g),g= O(h)，则f= O(h)　　$f \le g, g \le h$, 则$f \le h$
- 如果f= Ω(g),g= Ω(h)，则f= Ω(h)　　$f \ge g, g \ge h$, 则$f \ge h$
- 如果f= Θ(g),g= Θ(h)，则f= Θ(h)
- 如果f= o(g),g= o(h)，则f= o(h)
- 如果f= ω(g),g= ω(h)，则f= ω(h)

（2）反身性：

- $f(n)=\Theta(f(n))$；
- $f(n)=O(f(n))$；
- $f(n)=\Omega(f(n))$.

（3）对称性：

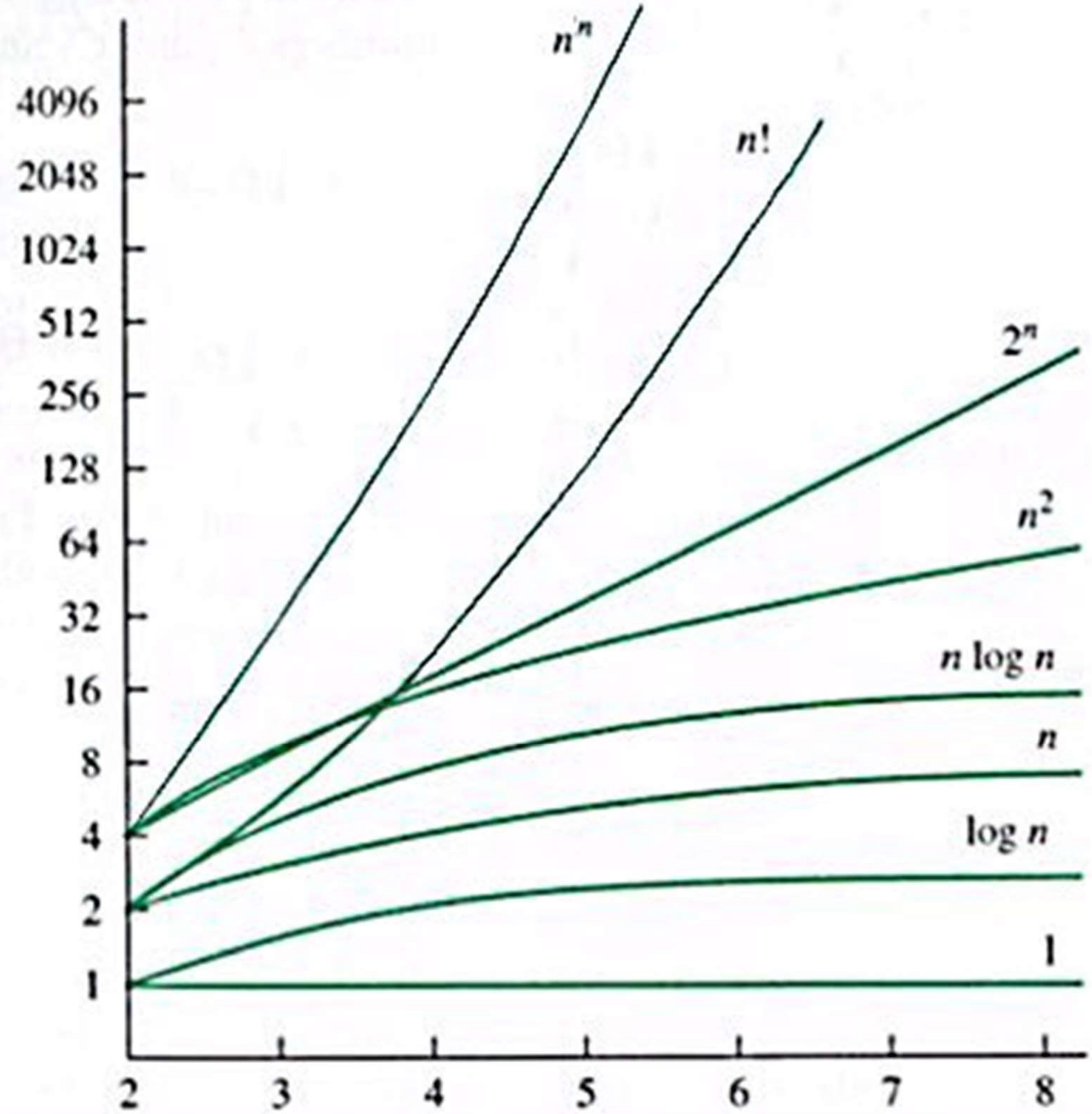
- $f(n)=\Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n)=\Theta(f(n))$

（4）互对称性：

- $f(n)=O(g(n)) \Leftrightarrow g(n)=\Omega(f(n))$；
- $f(n)=o(g(n)) \Leftrightarrow g(n)=\omega(f(n))$；

算法分析中常见的复杂性函数

Function	Name		
c	Constant	常数	
$\log N$	Logarithmic	对数	
$\log^2 N$	Log-squared		
N	Linear	线性	
$N \log N$	N log N		
N^2	Quadratic	二次	多项式
N^3	Cubic	三次	
2^N	Exponential	指数	



n^n
$n!$
2^n
n^2
$n \log n$
n
$\log n$
1
4096
2048
1024
512
256
128
64
32
16
8
4
2
1
2
3
4
5
6
7
8

- 哪种增长最能体现这些函数的特点？

	Constant	Linear	Polynomial	Exponential
$(3/2)^n$	○	○	○	○
1	○	○	○	○
$(3/2)n$	○	○	○	○
$2n^3$	○	○	○	○
2^n	○	○	○	○
$3n^2$	○	○	○	○
1000	○	○	○	○
$3n$	○	○	○	○

常见的时间复杂度

例子

Youtube频道： hwdong

线性时间linear time : O(n)

- 运行时间最多是输入规模的常数倍，如cn。
- 如：求一组数的$(a_1,a_2,\ldots a_n)$最大值。

```
max = a_1
for i=2 to n:
    if a_i >max:
        max = a_i
return max
```

线性时间linear time : O(n)

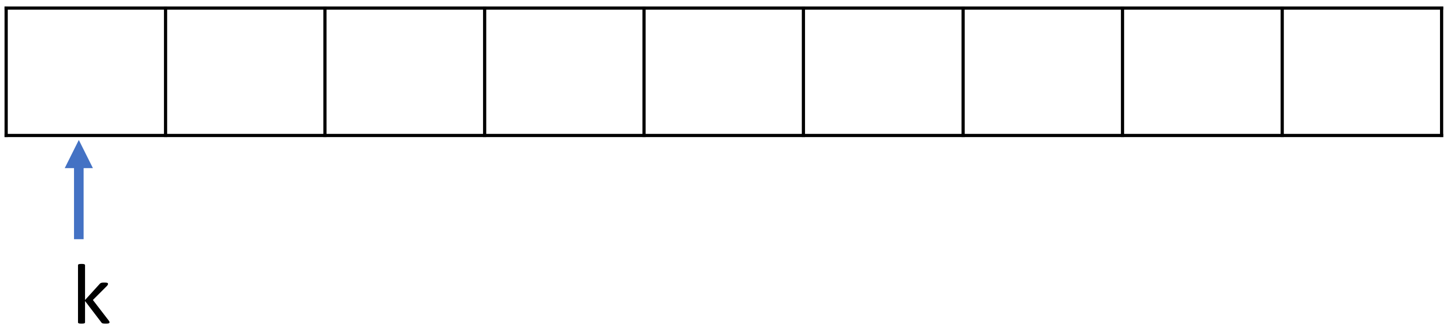
- 2个有序数组的合并(merge)：

  $a = (a_1, a_2, \ldots a_m)$, $b = (b_1, b_2, \ldots b_n)$

如： $a = (2,5,8,9)$, $b = (3,4,6,10,13)$

i　　　　　　j

c =

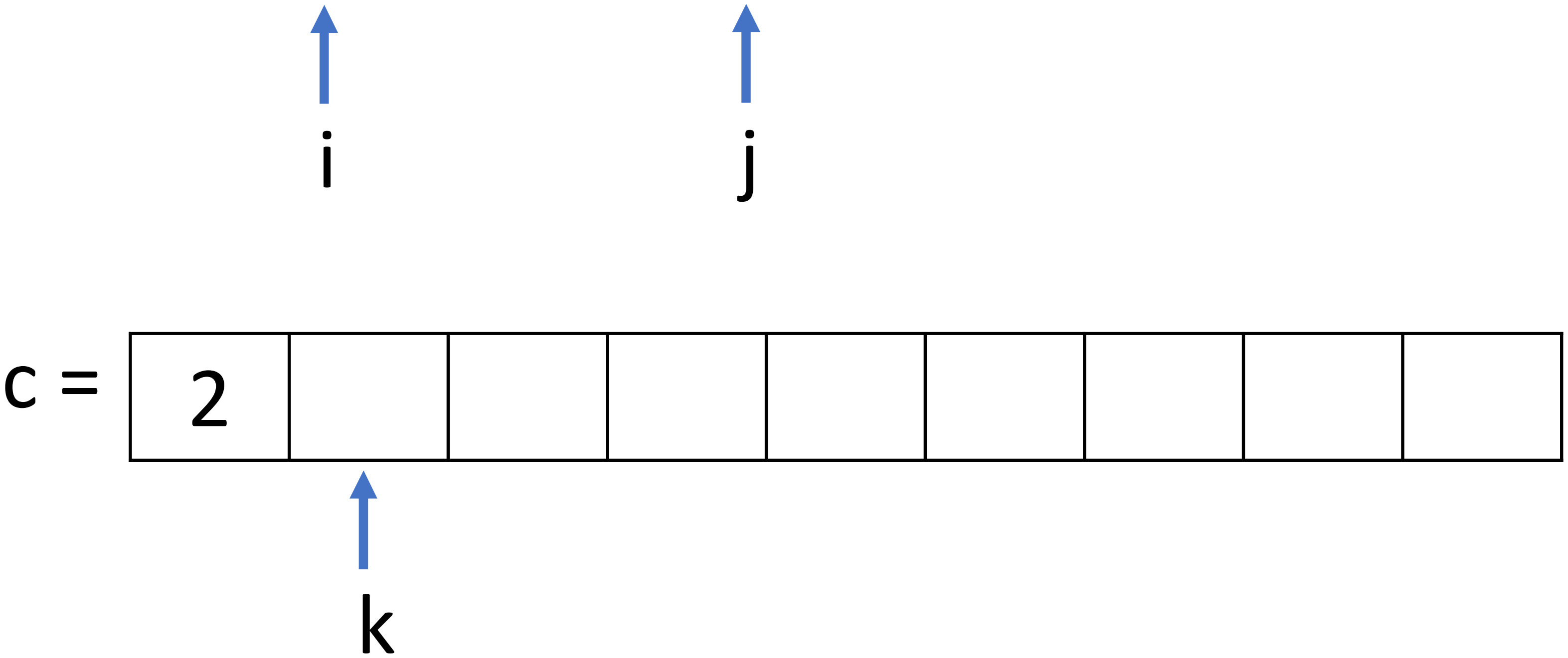


线性时间linear time : O(n)

- 2个有序数组的合并(merge)：

  $a = (a_1,a_2,\ldots a_m)$, $b = (b_1,b_2,\ldots b_n)$

如： a = (2,5,8,9) , b = (3,4,6,10,13)



线性时间linear time : O(n)

- 2个有序数组的合并(merge)：

  $a = (a_1, a_2, \ldots a_m)$, $b = (b_1, b_2, \ldots b_n)$

如： $a = (2,5,8,9)$, $b = (3,4,6,10,13)$

i

j

c =

2	3							

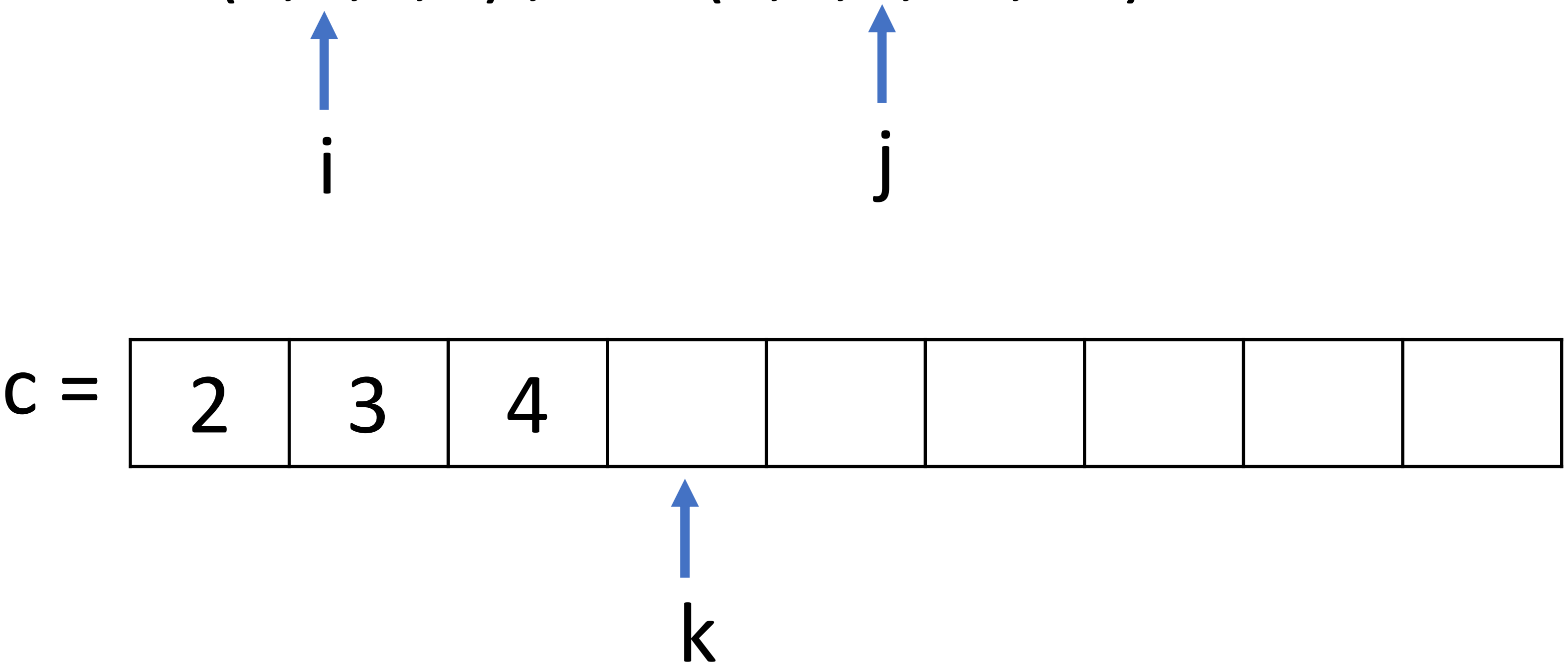
k

线性时间linear time : O(n)

- 2个有序数组的合并(merge)：

  $a = (a_1,a_2,\ldots a_m)$, $b = (b_1,b_2,\ldots b_n)$

如： $a = (2,5,8,9)$, $b = (3,4,6,10,13)$



merge(a,b)

$i=1, j=1$

while $i \le m$ and $j \le n$:

  if $a_i \le b_j$:

    $\boxed{c_k = a_i, i{+}{+}, k{+}{+}}$ 基本操作

  else:

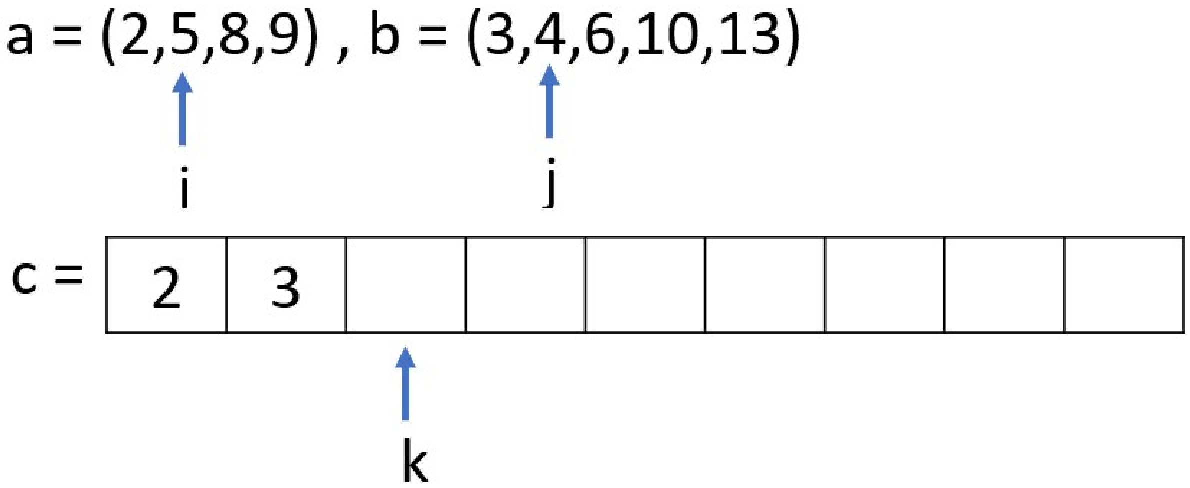
    $c_k = b_j, j{+}{+}, k{+}{+}$

while $i \le m$:

  $c_k = a_i, i{+}{+}, k{+}{+}$

while $j \le n$:

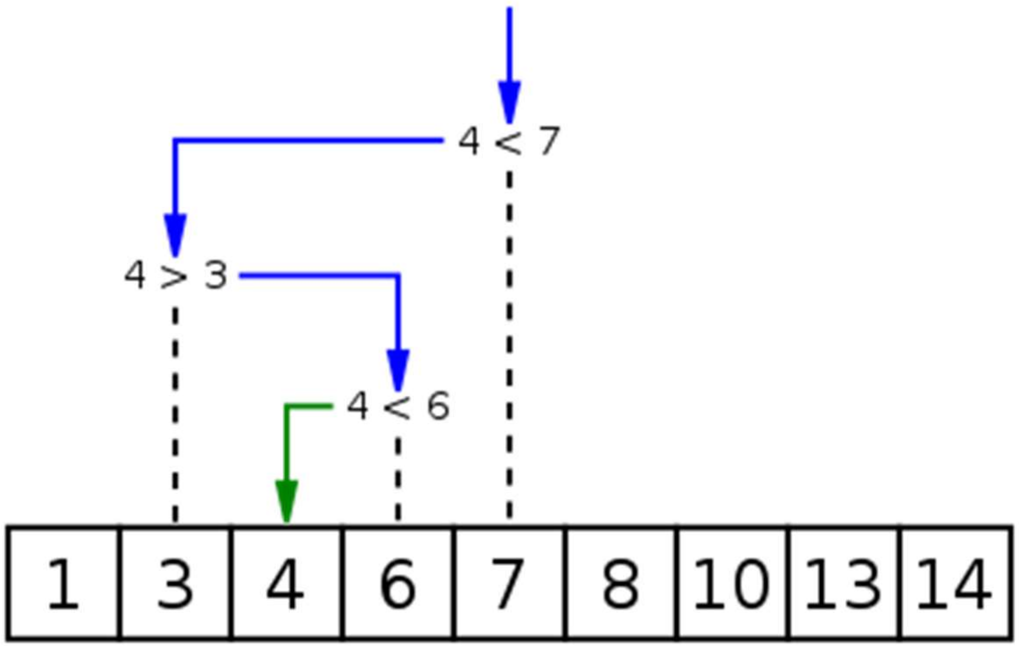
  $c_k = b_j, j{+}{+}, k{+}{+}$



O(m+n)

O(logn)

- 有序数组的二分查找

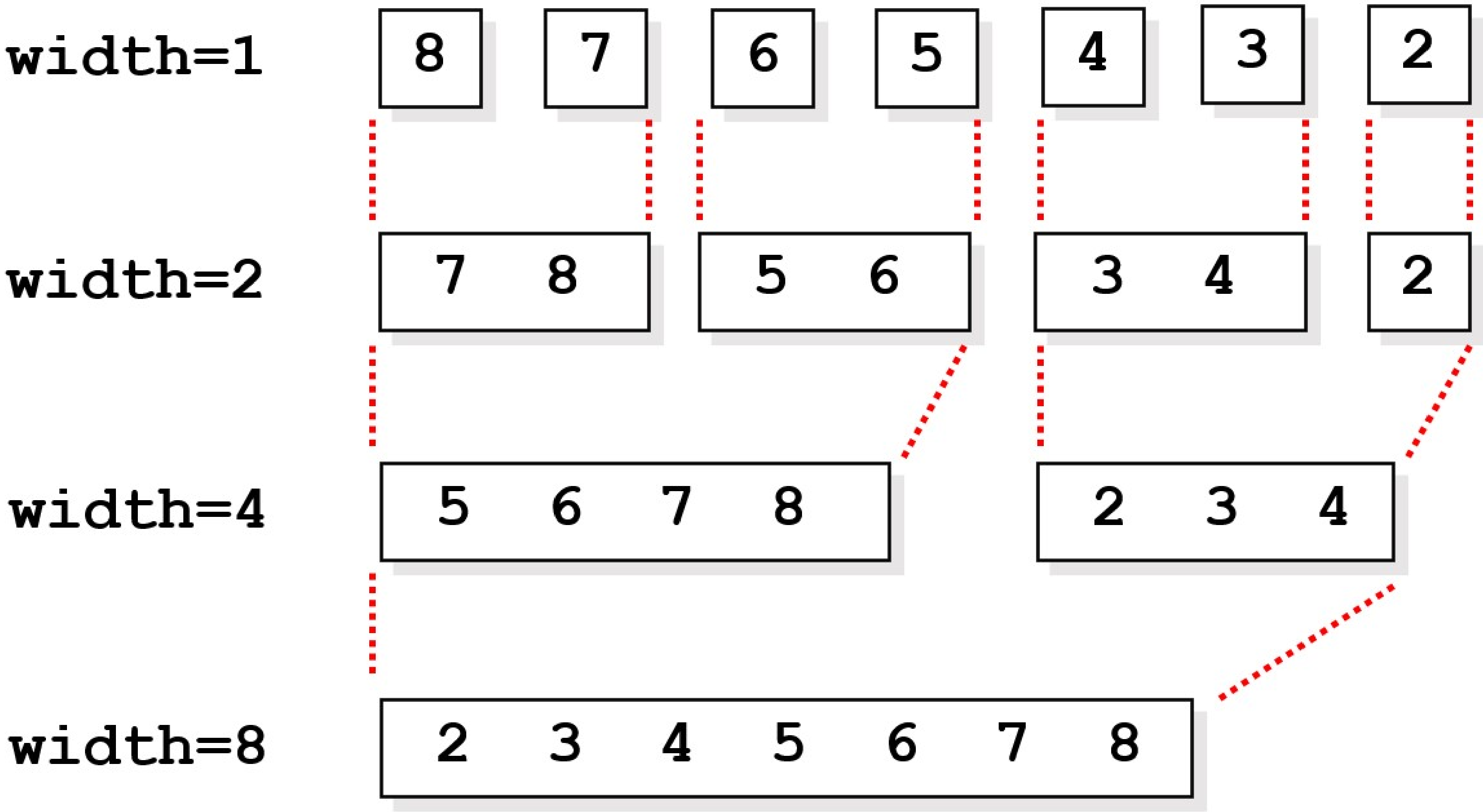


复杂度	
平均时间复杂度	$O(\log n)$
最坏时间复杂度	$O(\log n)$
最优时间复杂度	$O(1)$
空间复杂度	迭代：$O(1)$ 递归：$O(\log n)$

O(nlogn)

$2^k \geq n \Rightarrow k \geq \log n$

- 归并排序、快速排序



Quadratic: $O(n^2)$

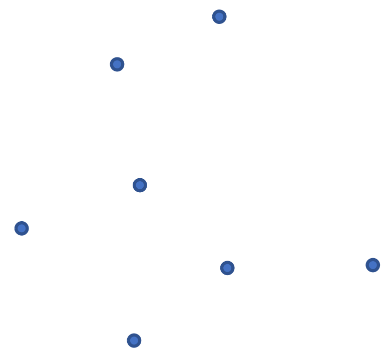
- 插入排序

$$\sum_{i=2}^{n} i = (n+2)(n-1)/2$$

Quadratic: $O(n^2)$

- 平面点集的最短点对

```
min = dist(p1,p2)
for each point p:
      for each point q:
            d= dist(p,q)
            if d < dist:
                  dist  = d
return min
```



Quadratic: $O(n^3)$

- 矩阵的乘积：如2个n阶方阵相乘

```
for i=1 to n:
    for j=1 to n:
        cij = 0
        for k=1 to n:
            cij = cij+ aik*bkj
```

exponential: $O(a^n)$

- Hanoi汉诺塔问题：$O(2^n)$

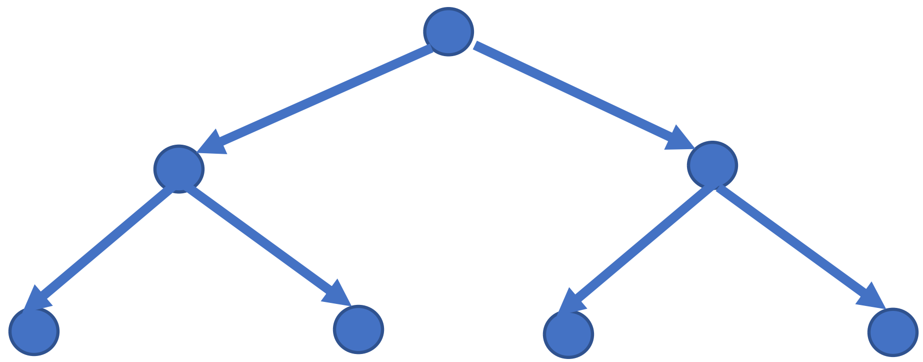
```
Hanoi(n,A,B,C)
    if n==1:        move(n, A,C)
    Hanoi(n-1,A,C,B)
    move(n, A,C)
    Hanoi(n-1,B,C,A)
```

$$T(n) = 2T(n-1)+1$$
$$T(1) = 1$$

$$\Rightarrow T(n) = 2^n-1$$

exponential: $O(a^n)$

- 背包问题(Knapsack problem)：给定一组物品，每种物品都有自己的重量和价格，在限定的总重量内，我们如何选择，才能使得物品的总价格最高。
- 穷举法：每个物体选或不选，一共有2^n。

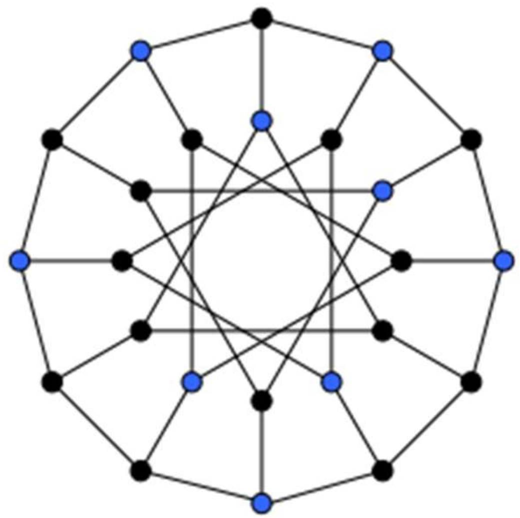


n个物品的背包问题:

```
int knapSack(int W, int w[], int v[],int n):
    if n==0:
        return 0
    if w_n>W:
        return knapsack(W,w,v,n-1)
    return
         max( w_n +knapsack(W-w_n,w,v,n-1),
              knapsack(W,w,v,n-1),
            )
```

exponential: $O(a^n)$

- 独立集是指图G 中两两互不相邻的顶点构成的集合。
- 问题：求图的最大独立集



图的子集有2^n个，

检查一个子集是否有边相连n^2。

$O(n^2 2^n)$

常见函数

1）取整函数

$\lfloor x \rfloor$：不大于x的最大整数；

$\lceil x \rceil$：不小于x的最小整数。

2）指数函数

对于正整数m,n和实数a>0:

$a^0=1$;

$a^1=a$;

$a^{-1}=1/a$;

$(a^m)^n = a^{mn}$;

$(a^m)^n = (a^n)^m$;

$a^m a^n = a^{m+n}$;

$a>1 \Rightarrow$ $\Rightarrow n^b = o(a^n)$，即a^n是n^b的非紧上界

3）对数函数

$\log n = \log_2 n$;

$\lg n = \log_{10} n$;

$\ln n = \log_e n$;

$\log^k n = (\log n)^k$;

$\log \log n = \log(\log n)$;

for a>0,b>0,c>0

$$a = b^{\log_b a}$$

$$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$$

$$\log_b a^n = n \log_b a$$

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

$$\log_b(1/a) = -\log_b a$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \qquad a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$$

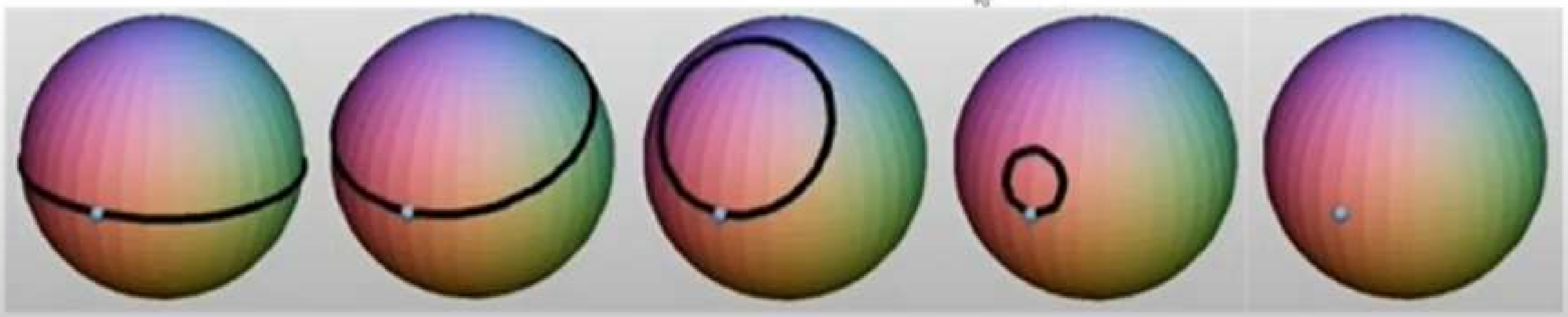
P vs NP

- 能在多项式时间(polynomial time)内求解的一类问题称为 “类**P** ”或“P问题“,简称 "P"。
- 虽然不知道多项式时间的解，但一旦给了一个解，可以在多项式时间内验证这个解的一类问题称为**NP**，NP是 “非确定多项式时间 ” (“nondeterministic polynomial time“)的缩写。如：寻找一个大数的质因数
- 显然， $P \subseteq NP$，
- 但P=NP? 这个问题的意思是：“如果一个问题的解可以在多项式时间内验证，那么能否在多项式时间内找到它？ "
- Clay数学研究所悬赏百万美元的7个千禧年大奖难题之一

庞加莱猜想

每个闭n维流形，如果与n维球面Sn具有相同的同伦形，则同胚于Sn。

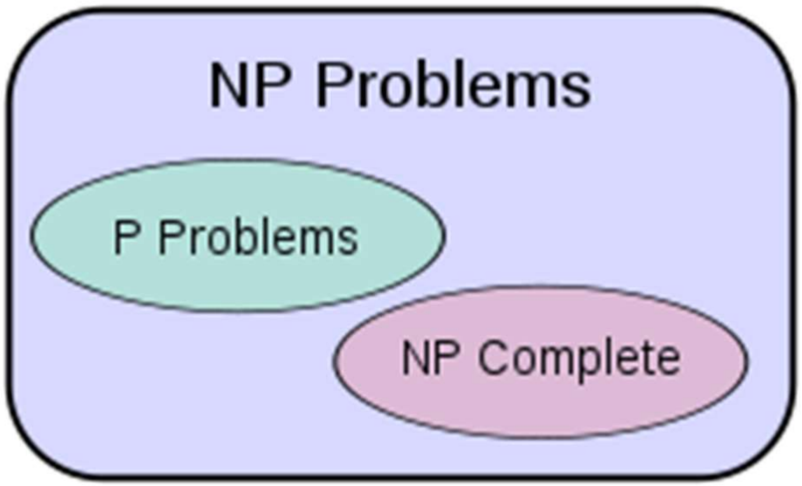
任一单连通的、封闭的三维流形与三维球面同胚。



- 格里戈里·佩雷尔曼

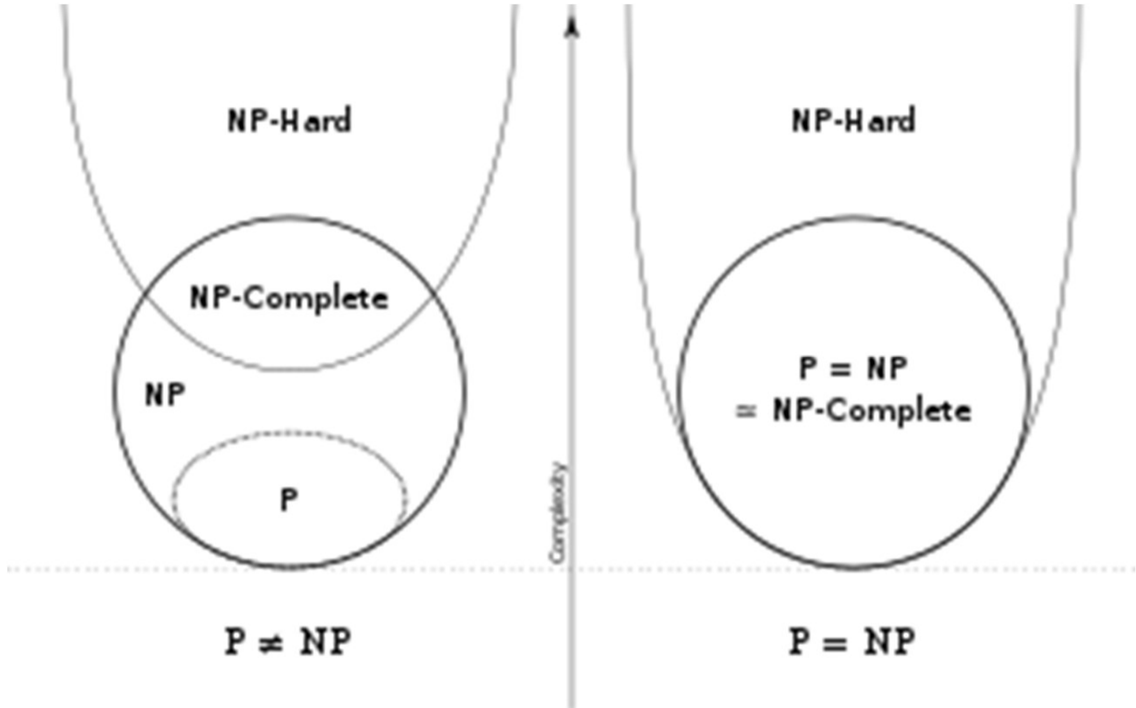
NP-Complete（NP 完备性）

- 为了攻克P=NP问题，NP-完备性的概念非常有用。NP-完备性问题是一组问题，其他的NP问题都可以在多项式时间内还原为该组问题的一个问题，而且其解仍然可以在多项式时间内得到验证。



NP-Hard（NP难问题）

- 如果解决某问题的算法可以转化为解决任何 NP 问题（非确定性多项式时间）问题的算法，则该问题是 **NP-Hard**问题。 NP-hard 意味着“至少与任何 NP 问题一样难”，尽管实际上它可能更难。



关注我

https://hwdong-net.github.io

Youtube频道:hwdong