一、 1~5: CBCCB

1. 由条件 $\Rightarrow f'(1)=0,\ f''(1)=-2$

$\therefore K=\dfrac{|f''(1)|}{(1+[f'(1)]^2)^{3/2}}=\dfrac{2}{1}=2$，选 (C)

2. $\ln(1-x\sin x)\sim(-x\sin x)\sim(-x^2)\quad(x\to0)$

由Taylor公式 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$

由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\ln(1-x\sin x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{-x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)}{-x^2}=-3$

分母用等价无穷小代换

$\Rightarrow f(0)$、$f'(0)$都为0（否则上式极限为∞，不可能为-3）

且 $-\dfrac{f''(0)}{2!}=-3\Rightarrow f''(0)=6$

由 $f'(0)=0,\ f''(0)=6>0\Rightarrow f(0)$为极小值，选(B)

3. A. $y=\ln(x+1)$ 在 $x=-1$ 不连续（$\because\lim\limits_{x\to-1}\ln(x+1)=\infty$，不存在）

B. $\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 处不连续

C. $y=|x|^2+1=x^2+1$ 在 $[-1,1]$ 上满足拉氏朗日中值定理条件

D. $y=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导

$\therefore$ 选 C.

4. $f(x)=x|x|=\begin{cases}x^2, & x\geq0\\ -x^2, & x<0\end{cases}$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0}|x|=0$

$\Rightarrow f'(0)=0\Rightarrow f(x)$在$x=0$处可导，由可导一定连续

$\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 处也连续

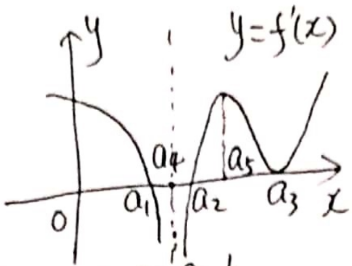
$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x, & x\geq0\\ -2x, & x<0\end{cases}\Rightarrow f''_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x-0}{x-0}=2$

$f''_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-2x-0}{x-0}=-2$

$\Rightarrow f''(0)$ 不存在，故选 (C)

5. 由图 $f'(x)$ 有3个零点 $a_1、a_2、a_3$

$f'(x)$ 还有一个不存在的点 a_4.



$\therefore f(x)$ 可能的极值点为 $a_i\ (i=1,\cdots,4)$

$a_1、a_2$ 两侧 $f'(x)$ 符号不同. $\therefore a_1、a_2$ 是 $f(x)$ 的极值点

a_3 两侧 $f'(x)$ 都大于0, $\therefore a_3$ 不是 $f(x)$ 的极值点

a_4 两侧 $f'(x)$ 都小于0. $\therefore a_4$ 不是 $f(x)$ 的极值点

$\therefore f(x)$ 有2个极值点.

曲线 $y=f(x)$ 可能的拐点是 $f''(x)=0$ 或 $f''(x)$ 不存在的点

对应的曲线上的点.

$f''(x)=0$ 的点对应到图中 $a_5、a_3$

a_5 左侧 $(x<a_5)$, $f''(x)>0$, a_5 右侧 $(x>a_5)$, $f''(x)<0 \Rightarrow (a_5, f(a_5))$ 是拐点

$x<a_3$, $f''(x)<0$, $x>a_3$, $f''(x)>0 \Rightarrow (a_3, f(a_3))$ 是拐点

$x<a_4$, $f''(x)<0$, $x>a_4$ 时. $f''(x)>0 \Rightarrow (a_4, f(a_4))$ 是拐点

$\therefore$ 选(B)

二. 1. $y=\pm1$ 2. $\dfrac{\sqrt{2}}{2+e^{2x}}$. 3. $y+2e^{-2}=(e^{-2}-2e^{-2})(x+2)$ 4. $f(2)=20$ 5. 2

二. 1. $y=|x|\sin\frac{1}{x}=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\geq0 \\ -x\sin\frac{1}{x} & x<0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to0} y=0$, $\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\frac{1}{x}=1}_{①}$ $\left(\sin\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}\right)_{x\to+\infty}$

$\underbrace{\lim\limits_{x\to-\infty} -x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} -x\cdot\frac{1}{x}=-1}_{②}$ $\left(\sin\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}, x\to-\infty 时\right)$

又 $\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x}=0, \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-0\cdot x)=1}_{③}$,

$\underbrace{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\sin\frac{1}{x}=0, \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-0\cdot x)=-1}_{④}$

①②③④ $\Rightarrow$ 渐近线 $y=\pm1$

2. 令 $e^x=u$，$d(\arctan\frac{e^x}{\sqrt{2}})=d(\arctan\frac{u}{\sqrt{2}})$

$$=\frac{1}{1+\frac{u^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}du$$

$$\overset{u=e^x}{=}\frac{1}{1+\frac{e^{2x}}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}d(e^x)$$

$\Rightarrow$ 填：$\frac{\sqrt{2}}{2+e^{2x}}$

3. $y'=e^x+xe^x$，$y''=e^x+e^x+xe^x=e^x(2+x)=0\Rightarrow x=-2$

可能的拐点：二阶导等于0的点和二阶导不存在的点（无二阶导不存在的点）

$x>-2$，$y''>0$，$x<-2$，$y''<0$

$\Rightarrow A(-2,-2e^{-2})$ 为拐点．$y'|_{x=-2}=e^{-2}+(-2)e^{-2}$

$\therefore$ A处切线方程

$y+2e^{-2}=(e^{-2}-2e^{-2})(x+2)$

4. $y'=24x^2-12x^3=12x^2(2-x)=0\Rightarrow x=0$ 或 2

$x=0$ 左右两侧，导数始终为正，$\Rightarrow f(0)$ 不是极值

$\left.\begin{array}{l}x=2 \text{ 左侧，一阶导} >0 \\ x=2 \text{ 右侧，一阶导} <0\end{array}\right\}\Rightarrow f(2)=4+64-48=20$ 为极大值

5. $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-\frac{x}{e}+k)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e\frac{\ln x}{x}-1+\frac{ke}{x}}{e\frac{1}{x}}=-\infty$$

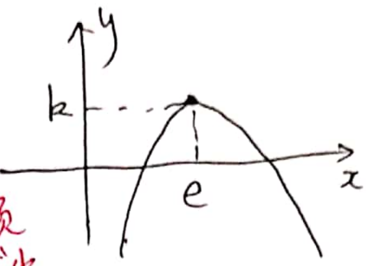
分子 $\to -1$

分母 $\to 0^+$

$\left.\begin{array}{l}f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}=\frac{e-x}{ex}=0\Rightarrow x=e \\ f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0\ (x>0)\end{array}\right\}\Rightarrow f(e)=k>0$ 为 $f(x)$

的唯一极大值点，又 $f''(x)<0$，∴ $f(e)$ 为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的最大值 $=k>0$

⇒ $f(x)$ 有两个零点



填 2

极限为非0常数的乘积项可先求出

三、1. ① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\boxed{e^x}(e^{\tan x - x}-1)}{x^3}$

$\left(\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1 \text{ 可先求出} \\ x\to 0,\ e^x-1\sim x \\ \quad e^{\tan x - x}-1 \sim \tan x - x\end{array}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^3}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{3x^2\cdot\cos^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{3x^2\cdot\cos^2 x}$

$\overset{1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2\cdot(1+\cos x)}{3x^2\cdot\cos^2 x} = \dfrac{1}{3}$

2. 幂指函数 $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$

化成指数型

$\lim\limits_{x\to 1}(2e^{x-1}-1)^{\frac{x^2}{x-1}} = \lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{x^2}{x-1}\ln(2e^{x-1}-1)}$

先求指数部分极限 → 极限为非0常数的乘积项可先求.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2e^{x-1}-1)}{x-1}\boxed{x^2} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2e^{x-1}-1)}{x-1}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{2e^{x-1}-1}\cdot 2e^{x-1} = \dfrac{2}{2-1} = 2$ ⇒ 所求 $=e^2$

③ $\ln(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}(\frac{1}{x})^2 + o(\frac{1}{x^2})$

$$\lim_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right] = \lim_{x\to\infty}\left[x - x^2(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}) - \frac{o(\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^2}}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{2} - \frac{o(\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^2}}\right] = \frac{1}{2}$$

2. $e^y + xy = \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$，两边对$x$求导.

$$e^y \cdot y' + y + xy' = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}\cdot y'$$

$$(e^y + x + \frac{1}{y})y' = \frac{1}{x} - y \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{x} - y}{e^y + x + \frac{1}{y}}$$

$$= \frac{y - xy^2}{xye^y + x^2y + x}$$

[illegible]. $f(x) = xe^x$，$f'(x) = xe^x + e^x = (x+1)e^x$

$f''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$，

设 $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$，则 $f^{(n+1)}(x) = e^x + (x+n)e^x$

$$= (x+n+1)e^x$$

$f^{(n)}(0) = n$

$$\therefore f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$= x + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^n + o(x^n)$$

$$= \frac{x}{0!} + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{(n-1)!} + o(x^n)$$

五. $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2}=\frac{1}{2}\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}\cdot 2t}=\frac{1}{t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{d(\frac{1}{t})}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}\cdot 2t}$$

$$=-\frac{1+t^2}{t^3}$$

六 $\frac{\tan x_2}{\tan x_1}>\frac{x_2}{x_1} \Leftarrow \frac{\tan x_2}{x_2}>\frac{\tan x_1}{x_1}$ $(\because x_1<x_2\in(0,\frac{\pi}{2}))$

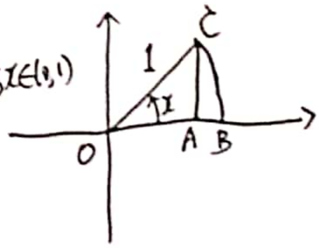
只要证明 $f(x)=\frac{\tan x}{x}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单增.

证明 $f'(x)=\frac{\sec^2 x\cdot x-\tan x}{x^2}=\frac{\frac{x}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos x}}{x^2}$

$$=\frac{x-\sin x\cos x}{x^2(\cos x)^2}$$

$$>0\ (\forall x\in(0,\frac{\pi}{2}))$$

(如图 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, $\cos x\in(0,1)$



则 $\sin x=CA$

$<\overset{\frown}{BC}=x$

故 $\sin x\cdot\cos x<x$)

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单增.

由 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$, 故 $f(x_1)<f(x_2)$

即 $\frac{\tan x_1}{x_1}<\frac{\tan x_2}{x_2} \Rightarrow \frac{\tan x_2}{\tan x_1}>\frac{x_2}{x_1}$

七、$f(x)=\begin{cases} \dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$，$g(x)$ 有二阶连续导数

$g(0)=1$，

(1) 要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，则

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=a$，即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}=a$

$\xRightarrow[\text{洛必达}]{\text{左边应用}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)+\sin x}{1}=a$

由 $g(x)$ 有二阶连续导数 $\Rightarrow$ $g'(x)$ 在0点可导 $\Rightarrow$ $g'(x)$ 在0点连续 $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0} g'(x)=g'(0)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} g'(x)+\lim\limits_{x\to 0}\sin x=a$

$\Rightarrow g'(0)=a \Rightarrow a=g'(0)$

(2) $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{(g'(x)+\sin x)x-(g(x)-\cos x)}{x^2}$

$f(0)=a=g'(0)$

$x=0$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{g(x)-\cos x}{x}-g'(0)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-\cos x-g'(0)x}{x^2}$ （$\frac{0}{0}$型，洛必达）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)+\sin x-g'(0)}{2x}$ （$\frac{0}{0}$型，洛必达）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g''(x)+\cos x}{2}=\dfrac{g''(0)+1}{2}$

八. $f(x)\in C[0,3]\cap D(0,3)$, $f(0)+f(1)+f(2)=3$, $f(3)=1$

证: $\exists\xi\in(0,3)$, 使 $f'(\xi)=0$

证明: 思路分析: 条件提示要对 $f(x)$ 要用Rolle定理.

$f(3)=1$, 若能再找到某点 c, $f(c)=1$, 即可在 $[c,3]$ 上应用Rolle定理.

证明 ① 若 $f(0)=1$ 或 $f(1)=1$ 或 $f(2)=1$, 由Rolle定理

对 $\exists\xi\in(0,3)$ 或 $(1,3)$ 或 $(2,3)\subseteq(0,3)$, 使 $f'(\xi)=0$

② 若 $f(0)\neq1$ 且 $f(1)\neq1$ 且 $f(2)\neq1$, 由于 $f(0)+f(1)+f(2)=3$,

故 $f(0)$、$f(1)$、$f(2)$ 这3个数中至少有一个数大于1, 有一个数小于1 (若都大于1, 则和大于3, 若都小于1, 则和小于3)

不妨设 $f(0)>1$, $f(1)<1$, 由介值定理 $\exists u\in(0,1)$, 使 $f(u)=1$, 对 $f(x)$ 在 $[u,3]$ 上应用Rolle定理.

$\Rightarrow \exists\xi\in(u,3)\subseteq(0,3)$, 使 $f'(\xi)=0$

九. $$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$$, 求 a,b 使 $f(x)$ 处处可导, 并求 $f'(x)$.

解: 分析: 由于定义 $f(x)$ 的极限式子为数列极限.

要求出此极限, 需要按照 x 的不同取值范围分类讨论才能求出极限.

① $x>1$ 时，$n(x-1) \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$，分子中 $x^2e^{n(x-1)}$ 趋于 $+\infty$ 速度最快

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{a}{xe^{n(x-1)}}+\frac{b}{x^2e^{n(x-1)}}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2e^{n(x-1)}}}$$

($n\to+\infty$ 时，分子 $\to 1$，分母 $\to \frac{1}{x^2}$)

$$=x^2$$

$x<1$ 时，$n(x-1)\xrightarrow{n\to+\infty}-\infty$，$e^{n(x-1)}\xrightarrow{n\to+\infty}e^{-\infty}=0$

此时

数列极限运算法则

$$f(x)=\frac{x^2\cdot 0+ax+b}{0+1}=ax+b$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$$

$x=1$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{1+1}\overset{x=1}{=}\dfrac{1+a+b}{2}$

故 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x>1\\ ax+b, & x<1\\ \frac{1+a+b}{2}, & x=1\end{cases}$

要使 $f(x)$ 处处可导，则 $f(x)$ 在1处可导即可

$\Rightarrow \begin{cases} f(x)\text{在1处连续} \Rightarrow \lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1)\Rightarrow 1=\frac{1+a+b}{2}=a+b \\ f(x)\text{在1处可导} \Rightarrow f'_+(1)=f'_-(1). \end{cases}$

$\Rightarrow \quad a+b=1$，此时 $f(1)=\dfrac{a+b+1}{2}=1$，且 $a+b=f(1)$

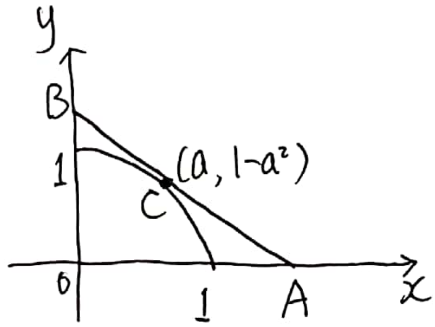
$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

$f(1)=a+b$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{ax+b-(a+b)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{a(x-1)}{x-1}=a$$

$f'_+(1)=f'_-(1)$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow a=2,\\ a+b=1\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-1\end{cases}\quad f(x)=\begin{cases}x^2, & x>1\\ 2x-1, & x\le 1\end{cases},\quad f'(x)=\begin{cases}2x, & x>1\\ 2, & x\le 1\end{cases}$$



十. 设 $C(a,1-a^2)$ 为 $y=1-x^2$ 上任一点，其中 $0<a<1$.

在C处作曲线的切线交x轴于A，y轴于B，

$$y'\big|_{x=a}=-2x\big|_{x=a}=-2a$$

切线AB方程为：$\quad y-(1-a^2)=-2a(x-a) \qquad (1)$

(1)中，令 $x=0 \Rightarrow y=1-a^2-2a(-a)=1+a^2 \Rightarrow OB=1+a^2$

(1)中，令 $y=0 \Rightarrow -(1-a^2)=-2a(x-a)$

$$\Rightarrow x=\frac{1-a^2}{2a}+a=\frac{1}{2a}+\frac{a}{2},\ \Rightarrow OA=\frac{1}{2a}+\frac{a}{2}$$

记 $S=S_{\triangle OAB}$，则 $S=\dfrac{1}{2}OA\cdot OB=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2a}+\dfrac{a}{2}\right)(1+a^2)$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2a}+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{a^3}{2}\right)$$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+2a+a^3\right)$

$S'(a)=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{a^2}+2+3a^2\right)=\frac{-1+2a^2+3a^4}{4a^2}$

令 $S'(a)=0 \Rightarrow 3a^4+2a^2-1=0 \Rightarrow 3(a^2)^2+2a^2-1=0$

$\Rightarrow a^2=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{6}=\frac{-2\pm4}{6}=\frac{1}{3}$ 或 -1 (-1舍去)

$\Rightarrow a=\sqrt{\frac{1}{3}}$ 或 $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ (舍去)

又 $S''(a)=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{a^3}+6a\right)\overset{(a>0)}{>}0$，$\therefore a=\sqrt{\frac{1}{3}}$ 为 $S(a)$ 的极小值点，

即 $S(a)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+2a+a^3\right)$ 在 $(0,1)$ 上有唯一的极小值点 $a=\sqrt{\frac{1}{3}}$

$\therefore S\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}}}+2\sqrt{\frac{1}{3}}+\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3\right)$ 为 $S(a)$ 在 $(0,1)$ 上的最小值

$=\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$

$=\frac{1}{4}\cdot\frac{9+6+1}{3\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$

$\Rightarrow$ 所求点为 $\left(\sqrt{\frac{1}{3}},\frac{2}{3}\right)$

最小面积为 $=\frac{4\sqrt{3}}{9}$