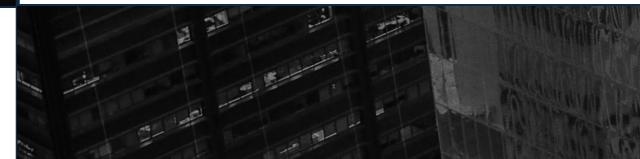


Volatility Smile Optimization via SVI Model Utilizing NLP Algorithms

Establishing an Arbitrage-Free Trading Environment
Using Convex Duality in Options



Contents

- I. Research Background
- II. Research Objective
- III. Theoretical Background
- IV. SVI Model
- V. Methodology
- VI. Data
- VII. Modeling
- VIII. Optimization
- IX. Results
- X. Conclusion

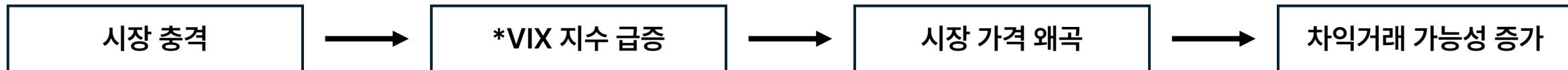


I. Research Background

i. Price Distortion으로 인한 Arbitrage 기회 증가

* VIX 지수

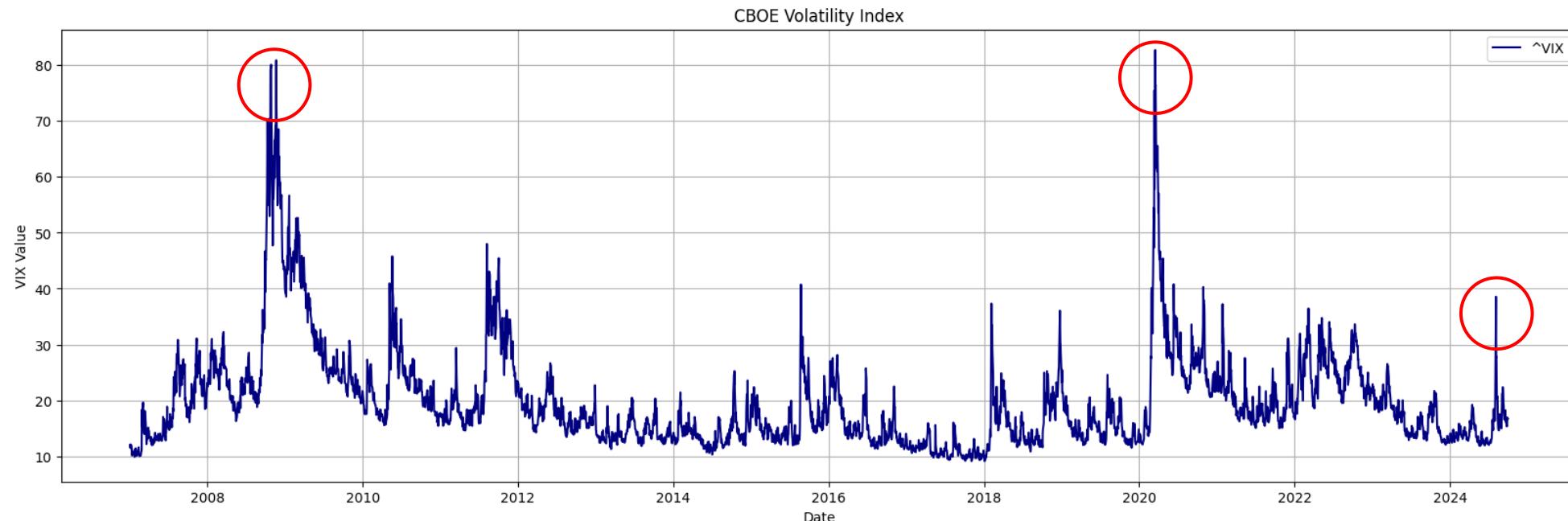
CBOE 거래소에서 거래되는 Volatility Index로,
S&P500 지수 옵션의 변동성을 수치화한 지표



2008 글로벌 금융위기

2020 코로나 팬데믹

8/5 블랙 먼데이



II. Research Objective

ii. BSM 한계 극복

Black-Scholes Model

$$C(S, t) = S_0 N(d_1) - K e^{-rt} N(d_2)$$

$$P(S, t) = K e^{-rt} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

$$\text{where } d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

가정 1. 기초자산의 수익률이 정규분포를 따름

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim \phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right], \quad S_T = S_0 e^{xT}, \quad x = \frac{1}{T} \ln \frac{S_T}{S_0}$$

$$\therefore x \sim \phi\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T}\right)$$

- 실제 시장에서 발생하는 비대칭적인 수익률 변동을 반영하지 못함

가정 2. 기초자산의 변동성(σ)이 시간에 따라 변화하지 않고 일정함

- 실제 시장에서 발생하는 극단적인 변동성을 반영하지 못함

✓ 시장에서 발생하는 비대칭적 변동성 패턴이나 급격한 변동성 변화에 대응하는 데 한계를 드러냄

✓ 옵션 미스프라이싱 및 차익거래 기회를 제공하여 금융 시스템의 불안정성을 초래

II. Research Objective

ii. SVI 모델 활용한 옵션 무차익거래

Stochastic Volatility Inspired (SVI) Model

$$w(k) = a + b(\rho(k - m) + \sqrt{(k - m)^2 + \sigma^2})$$

- 옵션의 내재변동성을 동적으로 모델링
- 극단적인 변동성 상황에서 나타나는 비대칭적 변동성 패턴을 효과적으로 설명
- BSM : 결정론적 접근 \leftrightarrow SVI : 확률적 변동성 도입
- SVI 모델의 한계
 1. 변동성 미소의 비대칭성이나 시간에 따른 변동성 변화를 완벽하게 설명하지 못함
 2. 이로 인해 극단적 변동성 상황에서 SVI 모델도 옵션 미스프라이싱을 피하지 못할 가능성이 높음
 3. 이에 따라 시장 참여자들은 정확한 리스크 평가와 효과적인 헤징 전략을 수행하기 어렵게 됨

⇒ 본 연구는 기존 SVI 모델을 최적화하고, 'Convex Duality' 개념을 추가하여
무차익거래 환경에서의 옵션 pricing을 진행하고자 함

III. Theoretical Background

i. Background Situation

상황	옵션 미스프라이싱	비대칭적인 변동성
정의	이론적 가격 (BSM) \neq 실제 시장 가격	옵션 가격에 반영된 내재변동성이 기초자산의 상승과 하락에 따라 다르게 나타나는 현상
이유	기초자산 가격의 비대칭성 및 변동성 클러스터링	변동성 피드백 효과 : 주가 $\downarrow \rightarrow$ 변동성 $\uparrow \rightarrow$ 요구 위험 프리미엄 $\uparrow \rightarrow$ 변동성 $\uparrow\uparrow$
	내재변동성 \leftrightarrow 실제변동성	시장 심리 : 하락 시장 공포 $>$ 상승 시장 공포
	거래량/유동성 부족, 비합리적인 투자자 행동	레버리지 효과 : 주가 \downarrow , 부채비율 \uparrow , 변동성 $\uparrow\uparrow$

ii. Volatility Smile

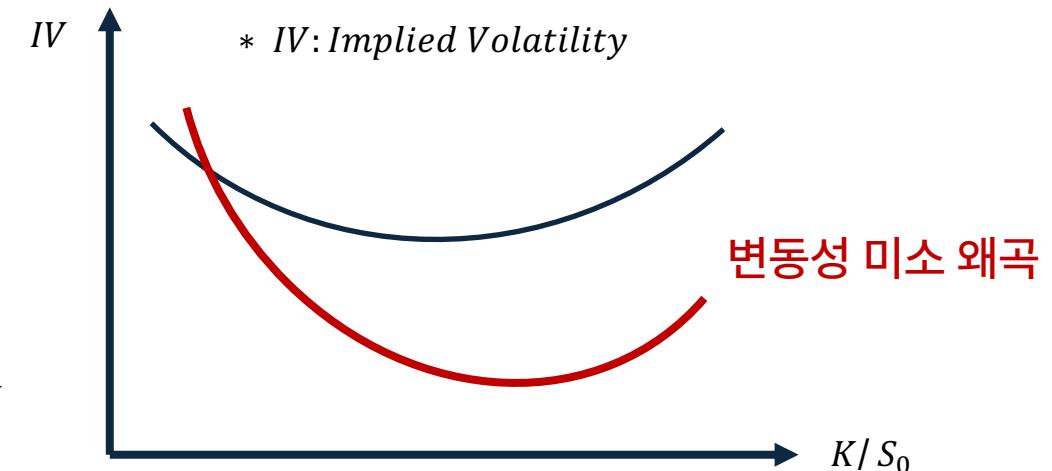
내재변동성 = f (행사가격)

정보의 비대칭성 \rightarrow **변동성 미소 왜곡** \rightarrow 차익거래 기회 발생

발생 이유 1. Convexity 조건 위반

발생 이유 2. 풋-콜 패리티(Put-Call Parity) 위반

발생 이유 3. 변동성의 비대칭성



III. Theoretical Background

iii. Arbitrage

1) Calendar Spread Arbitrage

- 동일한 기초자산 및 행사가격(K)과 다른 만기($t_1 < t_2$)를 가진 두 옵션 간의 가격 비대칭성 이용
 - 만기가 더 긴 옵션(c_2) 가격 > 만기가 짧은 옵션(c_1) 가격
 - 그러나 만기에 따라 가격이 단조롭게 변하지 않을 때($c_2 < c_1$) 차익거래 발생
 - 투자자는 c_1 매도, c_2 매수함으로써 무위험 수익 얻음

2) Butterfly Arbitrage

- 세 개의 다른 행사가격 ($k_1 < k_2 < k_3$) 을 가진 옵션을 이용해 단일 시간 구간에서 이루어지는 차익거래 전략
 - 옵션의 행사가격에 따른 내재변동성의 비정상적인 곡률로 인해 발생
 - k_2 매도(매수) + k_1, k_3 매수(매도) → 중간 행사가격(k_2)의 옵션 가격이 불합리하게 높거나 낮다면 차익거래 가능

IV. SVI Model

i. SVI (Stochastic Volatility Inspired) Model

5가지 파라미터를 통해 옵션의 변동성 미소를 매끄러운 형태로 피팅하는 모델

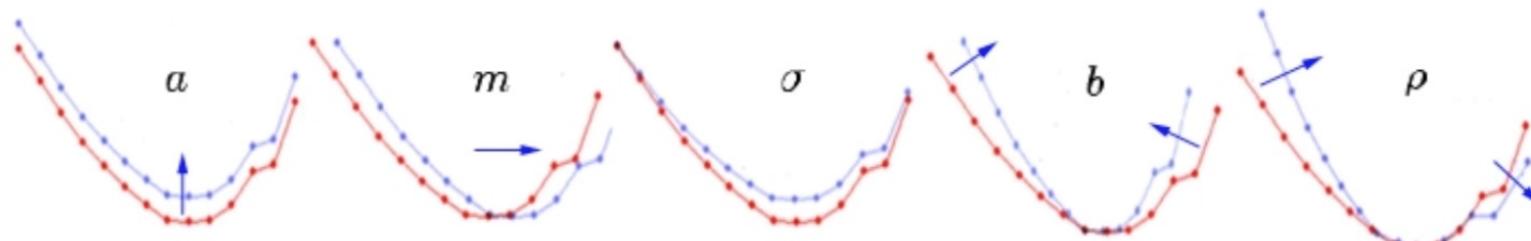
→ 다양한 행사가격과 만기일에 따른 옵션의 **내재변동성을 더 정확하게 반영**

$$w(k) = a + b(\rho(k - m)) + \sqrt{(k - m)^2 + \sigma^2}$$

k : 로그로 변환된 옵션의 행사가격
 $w(k)$: 변동성 구조 함수 (내재변동성의 제곱)

Parameters

- a : 곡선의 최소값 (오프셋, 변동성의 최소값에 해당)
- m : 곡선의 중심 (가장 낮은 변동성이 나타나는 지점)
- σ : 곡선의 넓이를 결정하는 파라미터 (변동성 곡선의 스케일)
- b : 곡선의 경사도, 변동성 곡선의 기울기
- ρ : 비대칭 정도를 나타내는 상수 (smile의 좌우 비대칭성)



IV. SVI Model

i. SVI Model

1) SVI & Convexity(볼록성)

- 일관적이고 안정적인 내재 변동성 제공 → 옵션 프라이싱 정확도 향상
- 만약 변동성 미소가 불규칙한 패턴을 갖는다면 차익거래 기회 발생

→ 변동성 미소를 볼록하게 만들면 **정적 차익거래 기회 탐지 및 제거 가능**

* 본 연구에서는 '정적 차익거래'를 butterfly arbitrage로 제한함

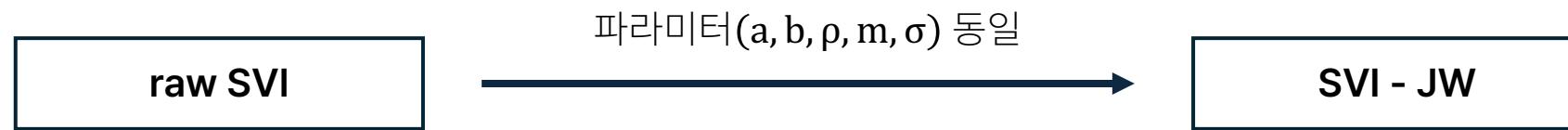
2) 정적 차익거래를 방지하기 위한 3가지 제약

1. 만기에 따른 내재변동성이 너무 빠르게 하락하지 않도록 제한
2. 행사가격에 따른 내재변동성이 너무 빠르게 상승하거나 하락하지 않도록 제한
3. 내재변동성이 너무 오목해지지 않도록 제한

IV. SVI Model

ii. SVI-JW(SVI Jump-Wings)

기존의 SVI 모델을 변형하여 시간을 독립변수로 둔 변동성 함수



$$\omega(k) = \textcolor{red}{a} + \textcolor{red}{b}\{\rho(k - \textcolor{red}{m}) + \sqrt{(k - \textcolor{red}{m})^2 + \sigma^2}\}$$

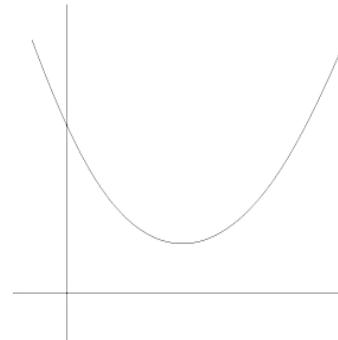
$$v_t = \frac{\textcolor{red}{a} + \textcolor{red}{b}\{-\rho m + \sqrt{m^2 + \sigma^2}\}}{t}$$

IV. SVI Model

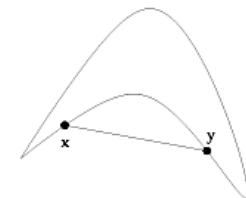
iii. Convex Duality

1) Convexity

- 함수 f 가 볼록할 때, local minimum x' 는 global minimum이기도 하다.
- 함수 f 가 미분 가능하다면, f 의 도함수 $f'(x)$ 는 단조 증가 함수이다.
- 함수 f 가 두 번 미분 가능하다면, $f''(x) > 0$ 일 때 그 함수는 볼록 함수다.



A convex function



A non-convex set

2) Duality

- 어떤 실수 값 함수 f 에 대해 그것의 dual 함수 g 를 정의하는 하나의 방법
- 즉, 최적화 문제를 풀 때 primal 문제와 dual 문제의 관계 ($\text{Primal} \Leftrightarrow \text{Dual}$)

예시)

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 12x_1 + 9x_2 \\ \text{Subject to} \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Primal Problem

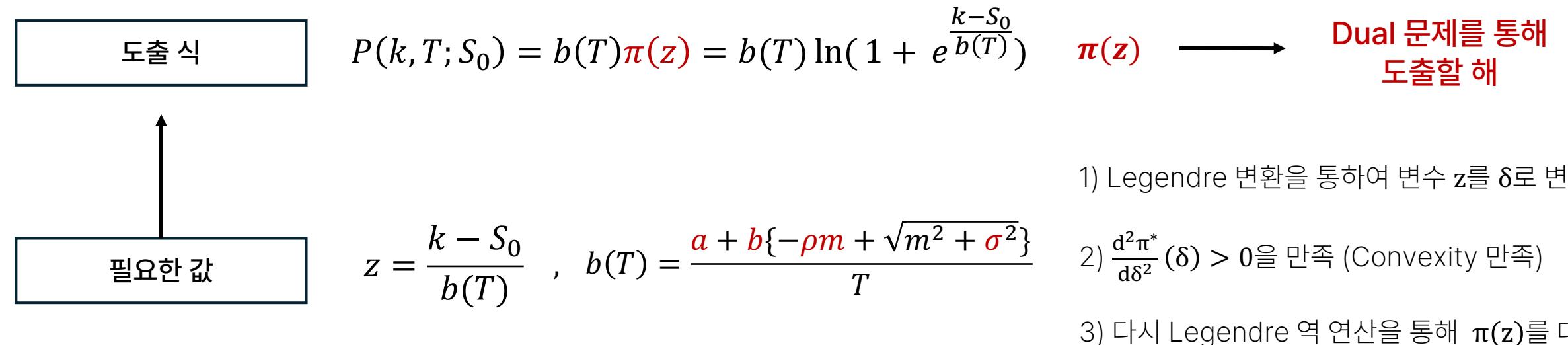
$$\begin{aligned} \min W &= 5y_1 + 12y_2 \\ \text{Subject to} \\ y_1 + 3y_2 &\geq 5 \\ 3y_1 + 2y_2 &\geq 12 \\ y_1 &\geq 0, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dual Problem

V. Methodology

i. Convex Duality를 고려한 Put Option의 가격

최종 도출하고자 하는 이상적인 put option의 가격 도출 과정



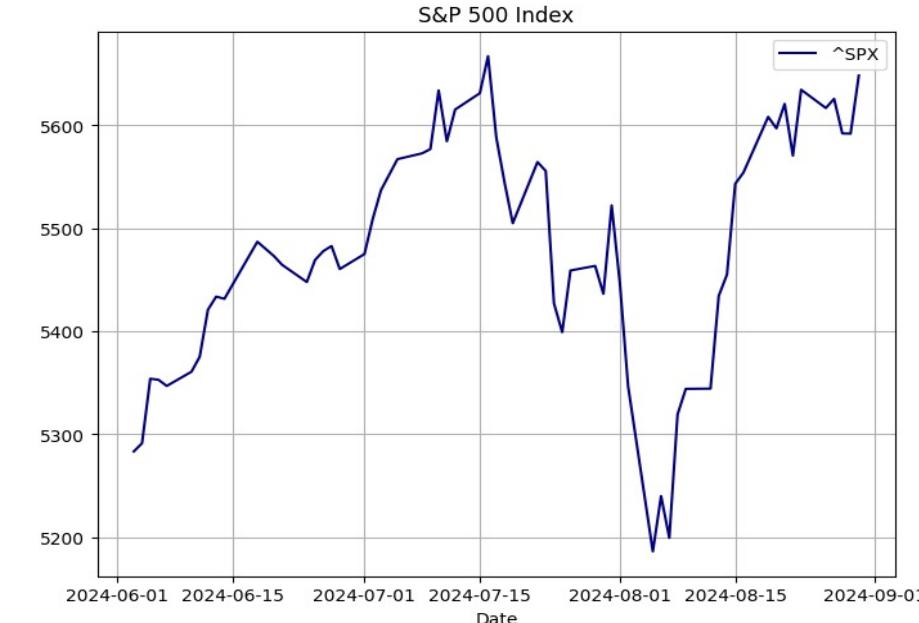
결론적으로, SVI 모델의 **파라미터 5개**(a, b, ρ, m, σ)를 최적화하여,
안정적인 내재변동성이 적용된 **이상적인 Option**의 가격을 도출하는 것이 주된 목적

VI. Data

i. Data Information & Source

1. S&P 500 Index Options

- 거래량이 많은 지수(S&P 500)의 옵션 → 정밀한 변동성 분석 가능
- 변동성 미소(혹은 곡면)을 구현하기 위해서 필수적인 정보 (**옵션 가격, 행사가격, 만기, 내재변동성** 등)을 포함하는 데이터



2. CBOE DataShop Option Quotes

- SPX 옵션 거래소(시카고 거래소, CBOE)의 공식 DataShop에서 유료로 확보
- 하루 동안 제시된 콜/풋옵션의 호가 데이터 (1분 간격)
- 특히 유동성이 높고 극심한 변동성 점프를 보여준 지난 8월 5일의 옵션 호가 제시 데이터 확보
→ 하루 동안의 변동성 국면을 탐구하여 차익거래와 시장 비효율성에 대해 분석



VI. Data

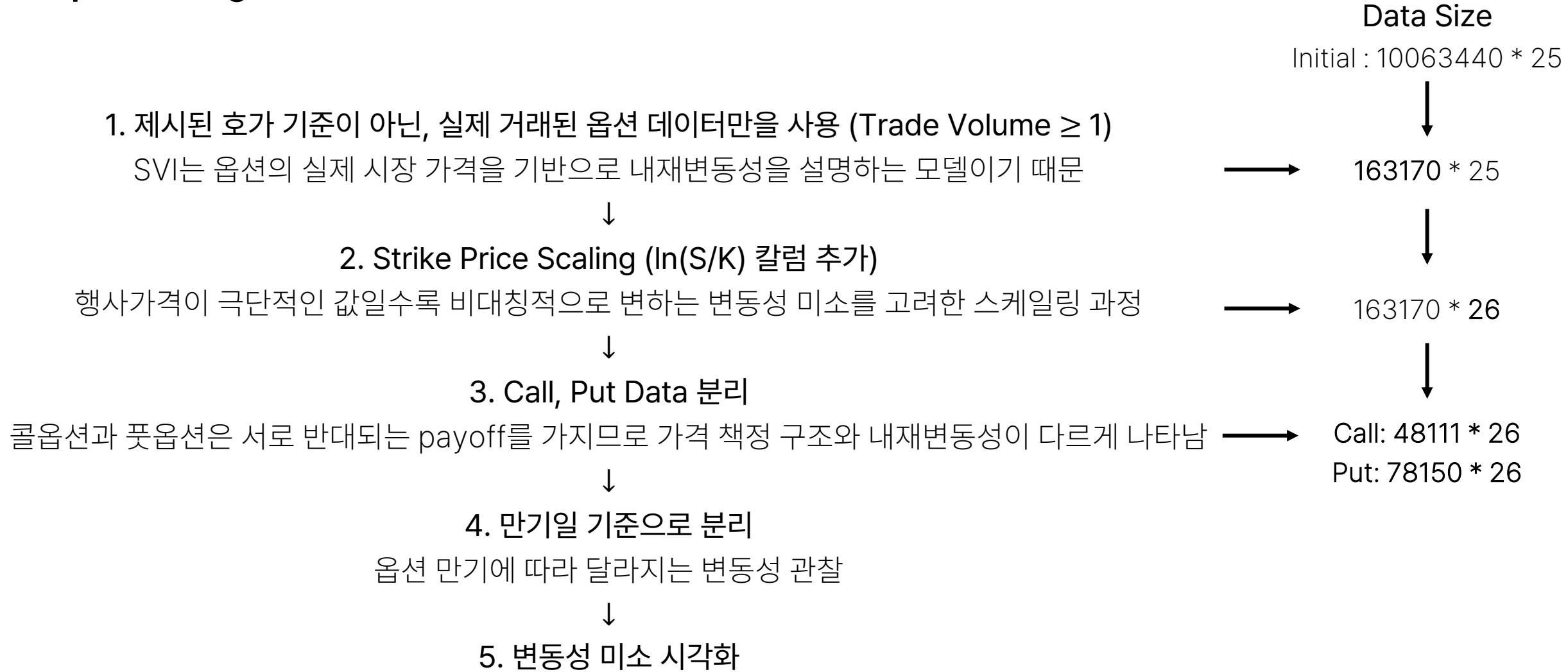
ii. Data Columns

B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
underlying_symbol	quote_datetime	root	expiration	strike	option_type	open	high	low	close	trade_volume	bid_size	bid	ask_size	ask
^SPX	13:10:00	SPX	8/16/24	200 C		5005.19	5005.19	5005.19	5005.19	2	28	5001.5	28	5007.9
^SPX	13:11:00	SPX	8/16/24	200 C		5010.21	5010.21	5007.09	5007.09	10	28	5005.3	28	5011.8
^SPX	10:05:00	SPX	8/16/24	3200 C		2015.9	2015.9	2015.9	2015.9	1	12	2008	12	2022.4
^SPX	10:33:00	SPX	8/16/24	3200 C		1983.55	1983.55	1983.55	1983.55	1	12	1968.1	12	1976
^SPX	10:49:00	SPX	8/16/24	4000 C		1186.71	1186.71	1186.71	1186.71	700	12	1197.4	12	1204.8
^SPX	11:34:00	SPX	8/16/24	4250 C		979.51	979.51	979.09	979.09	2	28	977.5	30	986.5
호가 제시 시각			만기일	행사가	옵션종류	시가	고가	저가	종가	거래량	매수 사이즈 & 호가 매도 사이즈 & 호가			

Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
underlying_bid	underlying_ask	implied_underlying_price	active_underlying_price	implied_volatility	delta	gamma	theta	vega	rho
5207.27	5211.33	0	5209.3	7.4902	0.9993	0	0	0.0229	0.05
5210.03	5214.08	0	5212.055	6.8423	0.9997	0	0	0.0123	0.051
5204.06	5211.07	0	5207.565	1.2937	0.9889	0	-1.0856	0.2654	0.9462
5161.6	5167.1	0	5164.35	1.2731	0.9888	0	-1.0653	0.2638	0.9439
5184.16	5189.19	0	5186.675	0.8814	0.9623	0.0001	-2.6043	0.7387	1.1386
5219.17	5223.86	0	5221.515	0.6786	0.9649	0.0001	-1.8668	0.7006	1.2117
기초자산 매수호가	기초자산 매도호가	기초자산 내재가격	기초자산 시장가격	내재변동성				그릭스	

VI. Data

iii. Preprocessing

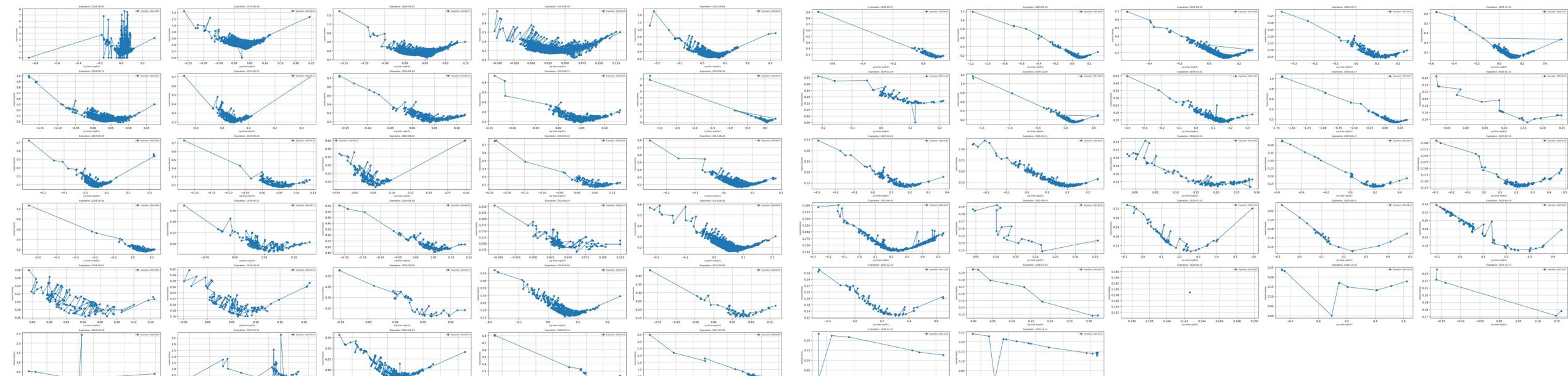


VI. Data

iii. Preprocessing

앞선 전처리 과정을 마친 데이터를 활용하여 콜옵션 변동성 미소 시각화

Raw Vol Smile (Call Options)



만기일 2024/08/05 – 2024/09/20

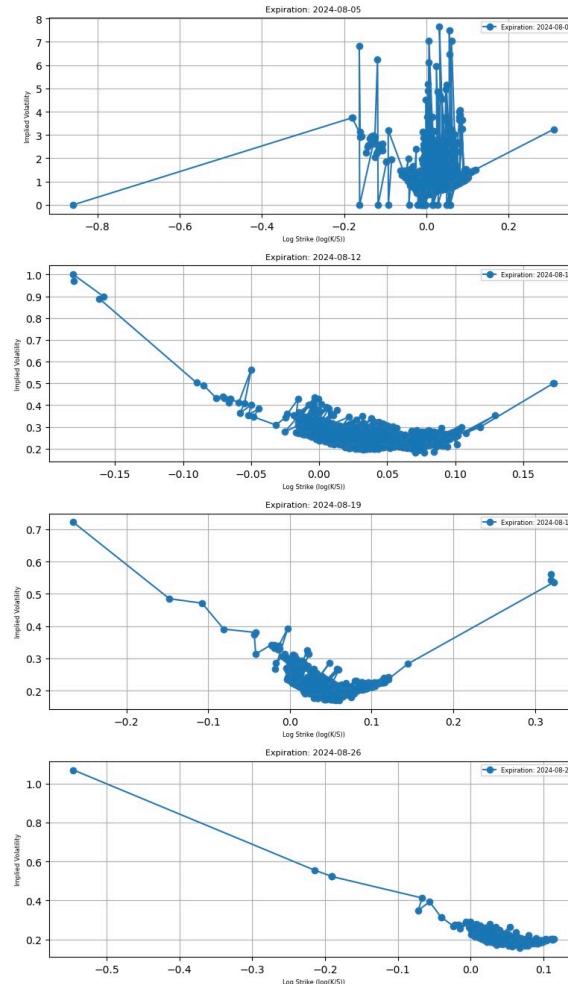
만기일 2024/09/27 - 2029/12/21

전처리를 거쳤음에도 일반적으로 알려진 변동성 미소의 형태에 비해 다소 많은 노이즈가 관찰됨

VI. Data

iii. Preprocessing

앞선 전처리 이후 결과의 한계를 반영한 추가 전처리 방안 고안



만기일에 따라 분류한 옵션의 거래량

expiration	18827	2024-08-20	209
2024-08-05	9018	2024-08-28	205
2024-08-16	4805	2025-02-21	189
2024-08-09	4566	2024-08-22	187
2024-09-20	4556	2024-08-27	186
2024-08-07	3468	2024-08-29	158
2024-08-12	2456	2025-09-19	156
2024-10-18	1963	2024-09-04	154
2024-08-30	1623	2024-09-03	139
2024-08-08	1565	2025-05-16	138
2024-08-23	1017	2025-03-31	132
2024-12-20	1016	2025-04-17	106
2024-11-15	852	2025-12-19	104
2024-08-19	751	2024-11-29	92
2024-09-06	595	2025-07-18	72
2024-09-30	527	2024-09-16	65
2025-06-20	489	2024-09-09	64
2024-08-14	476	2024-09-11	57
2024-08-13	394	2024-09-10	48
2024-08-15	382	2024-09-05	42
2025-03-21	360	2025-08-15	30
2024-10-31	309	2025-01-31	27
2025-01-17	306	2025-06-30	19
2024-08-26	301	2026-12-18	19
2024-12-31	281	2029-12-21	19
2024-09-13	275	2026-01-16	8
2024-08-21	220	2028-12-15	7
2024-09-27	212	2027-12-17	5
		2026-06-18	1

* ODTE(Zero Day to Expiration).

: 옵션 만기일이 당일(오늘)인 경우

변동성 미소 시각화 분석

- 2024-08-05의 데이터의 경우, *ODTE 옵션의 영향으로 변동성이 매우 높고 불안정함 (다수의 노이즈가 관측됨)
- 거래량이 1 이상일지라도 절대적인 수(거래량)가 적은 옵션 데이터의 경우, 특정 행사가격 구간에서 변동성 추정이 부정확하게 이루어짐

추가 전처리 방안

차익거래 방지를 위해 변동성 미소의 왜곡을 해결하고 convex하게 피팅하기 위해서는, 단순히 실제 거래된 데이터를 사용하는 것이 아니라, **특정 거래량 임계치를 초과하는 옵션 거래 데이터 활용**

VI. Data

iii. Preprocessing

IQR과 MAD의 적용을 통한 데이터 *추가 전처리

IQR Method

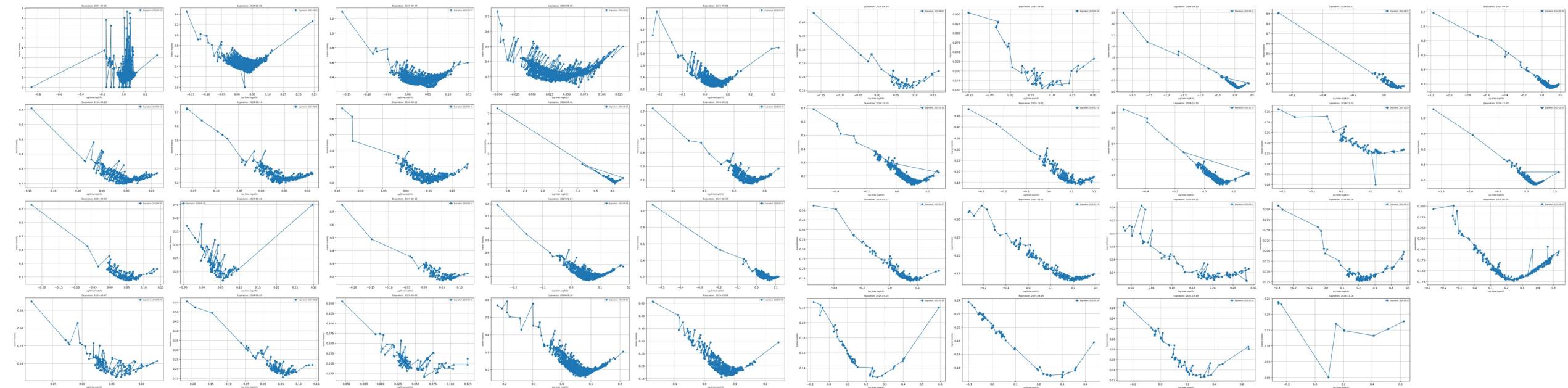
전체 분포의 극단적 이상치 제거
하방보다 작은 거래량을 보인 만기 옵션 삭제

IQR 적용 이후 MAD 추가 적용

MAD Method

거래량 낮은 데이터 미세 조정
IQR 적용 이후에도 남아있는 이상치 제거

Filtered Vol Smile (Call Options)



이전보다 비교적 개선된 개형을 보이지만, 여전히 유통불통한 부분 다수 존재 → SVI 모델 적용 후 최적화 진행

* 추가 전처리 방안

IQR (Inter-Quartile Range)

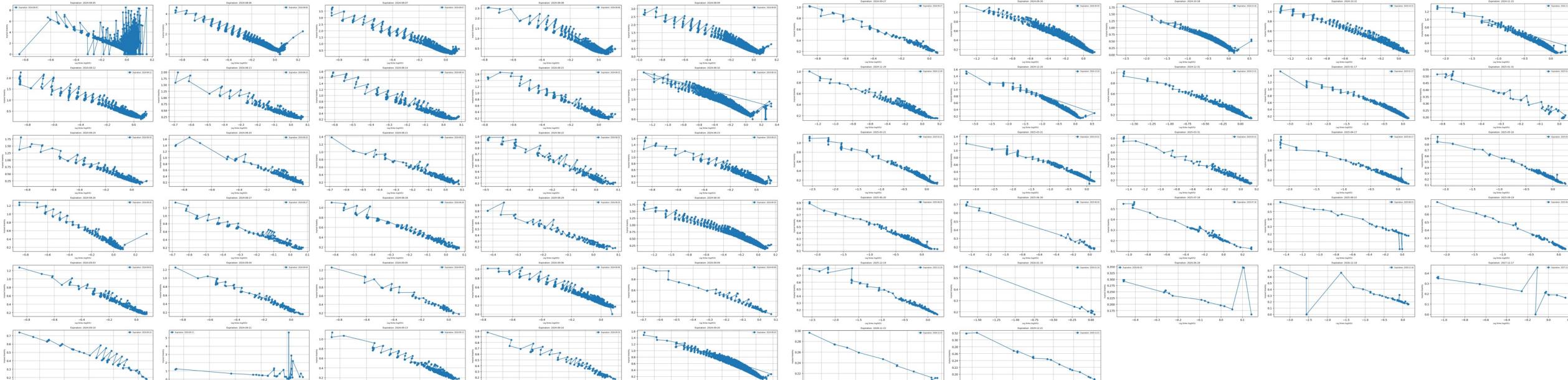
MAD (Median Absolute Deviation)

VI. Data

iii. Preprocessing

풋옵션의 경우에도 동일한 방법을 거쳐 전처리 진행

Raw Vol Smile (Put Options)



만기일 2024/08/05 – 2024/09/20

만기일 2024/09/27 - 2029/12/21

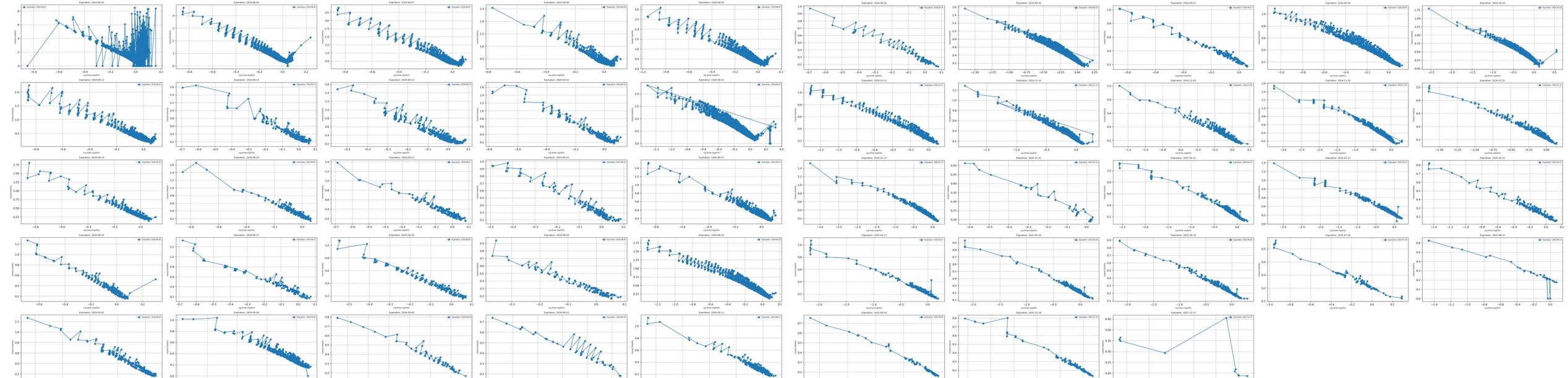
전처리 과정을 거치기 전 풋옵션의 변동성 미소

VI. Data

iii. Preprocessing

전처리 이후의 풋옵션 변동성 미소 시각화

Filtered Vol Smile (Put Options)



만기일 2024/08/05 – 2024/09/13

만기일 2024/09/16 - 2027/12/17

전처리 이후 풋옵션의 변동성 미소

VII. Modeling

i. What We Want to Derive From SVI

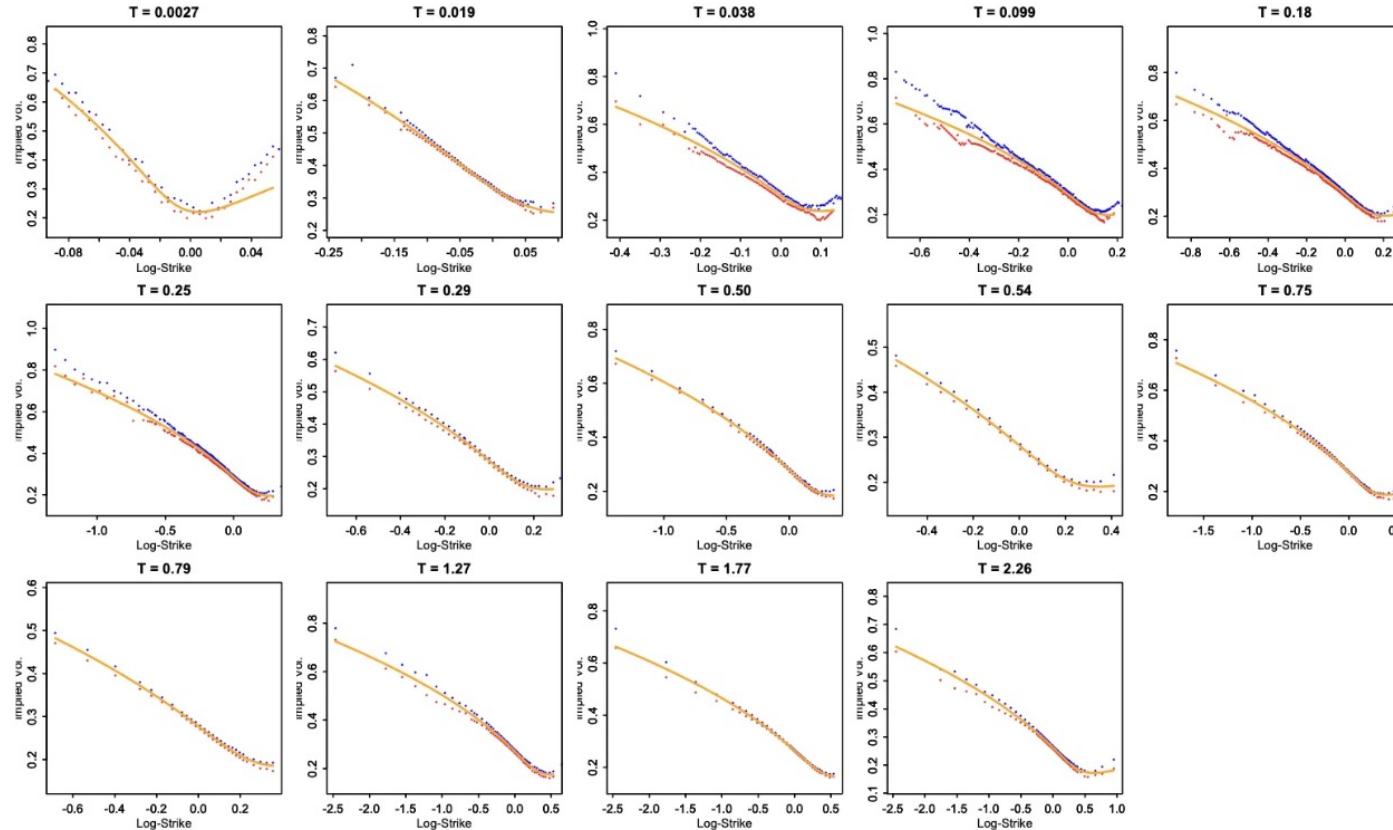


Figure 4: Red dots are bid implied volatilities; blue dots are offered implied volatilities; the orange solid line is the SVI fit following recipe of Section 5.2

SVI 모델을 활용하면 위와 같은 (깔끔, 매끈, 스무스, convex 등등 모든 좋은 수식어를 다 갖다붙인) 변동성 미소가 도출되어야 한다.

VII. Modeling

ii. Objective Function (NLP)

Non Linear Programming: 목적함수나 제약 조건 중 하나라도 비선형인 경우 취할 수 있는 최적화 방법론

$\hat{w}(k_i)$: 시장에서 추정된 총 변동성

$w(k_i)$: SVI 모델을 통해 추정된 변동성

N : 변동성 데이터 포인트의 개수

$$w(k) = a + b (\rho (k - m) + \sqrt{(k - m)^2 + \sigma^2}) \quad \xrightarrow{\text{비선형구조}} \quad \min_{a,b,\rho,m,\sigma} \sum_{i=1}^N (\hat{w}(k_i) - w(k_i))^2$$

SVI Model

NLP 목적식

실제 시장 변동성과 SVI를 통해 추정한 변동성 간의 괴리를 최소화

VII. Modeling

iii. Constraints

NLP 최적화 과정에서의 초기값 및 제약식 설정

Initial Value

$$a = -0.041$$

$$b = 0.1331$$

$$\rho = 0.306$$

$$m = 0.3586$$

$$\sigma = 0.4153$$

Constraints

$$b > 0, |\rho| < 1, \sigma > 0$$

Convexity 및 무차의거래 보장을 위한 제약식

Objective Function

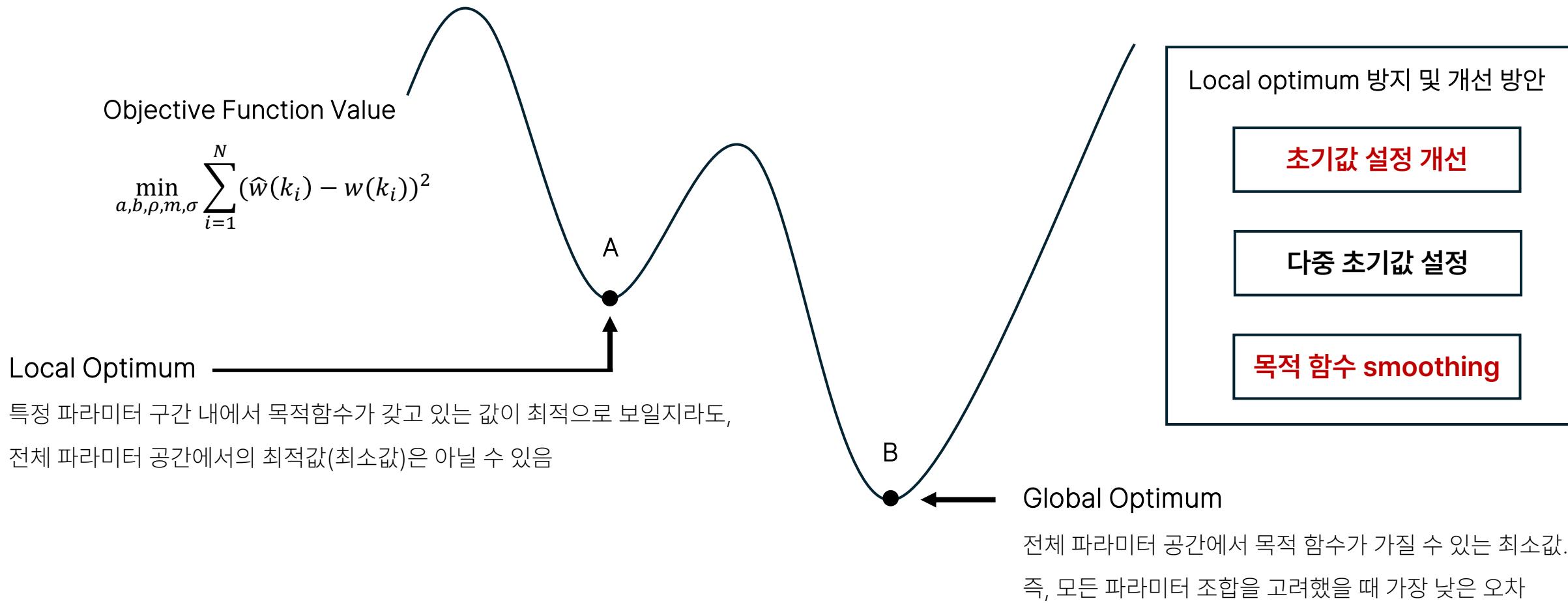
$$\min_{a,b,\rho,m,\sigma} \sum_{i=1}^N (\hat{w}(k_i) - w(k_i))^2$$

논문에서 주로 차용된 초기값 활용

VII. Modeling

iv. Local Optimum vs Global Optimum

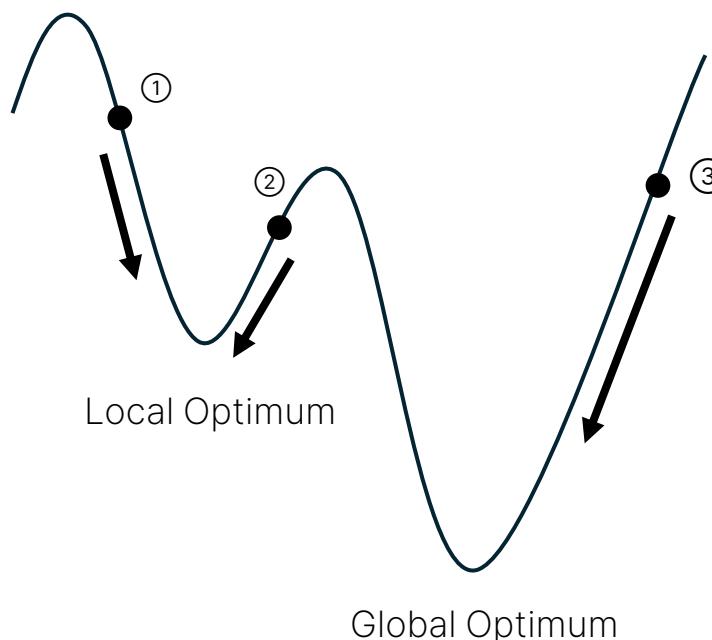
비선형 최적화에서 목적함수 값의 최적 여부를 판단하기 위해서는, local optimum이 아닌 global optimum이 달성되었는지를 보장해야 한다.



VIII. Optimization

i. Gradient Descent(경사하강법)

목적함수의 값이 낮아지는 방향으로 각 파라미터의 값을 변형시키면서 함수가 전역 최적해(global optimum)를 갖도록 하는 탐색 알고리즘



Gradient Descent 방법론의 한계

- 설정한 초기값에 따라 local optimum에 빠지게 될 가능성이 큼
- 적절한 step size(또는 학습률(learning rate)) 설정의 어려움

학습률(learning rate) = 0.001

반복 횟수(iterations) = 5000

수렴 조건(tolerance) = 1e-6

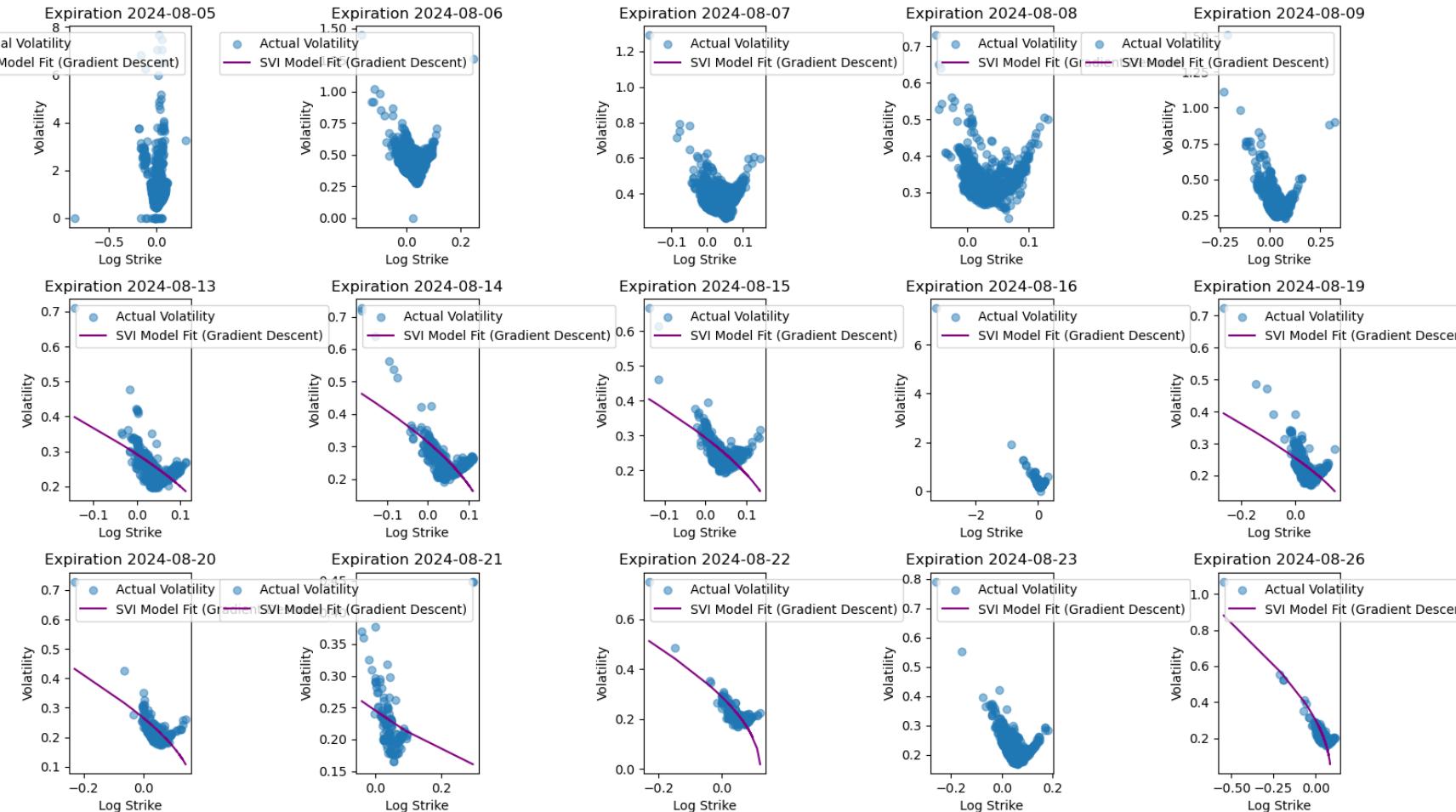
수치 안정성을 위한 극소값(epsilon) = 1e-8

위와 같은 설정값을 두고 최적화 → 설정값 변경을 통한 추가 최적화 (반복)

VIII. Optimization

i. Gradient Descent(경사하강법)

옵션 거래데이터를 만기일별로 분류한 뒤, Gradient descent를 적용하여 최적화한 변동성 미소



학습률(learning rate) = 0.001
반복 횟수(iterations) = 5000
수렴 조건(tolerance) = 1e-6
수치 안정성을 위한 극소값(epsilon) = 1e-8

분석

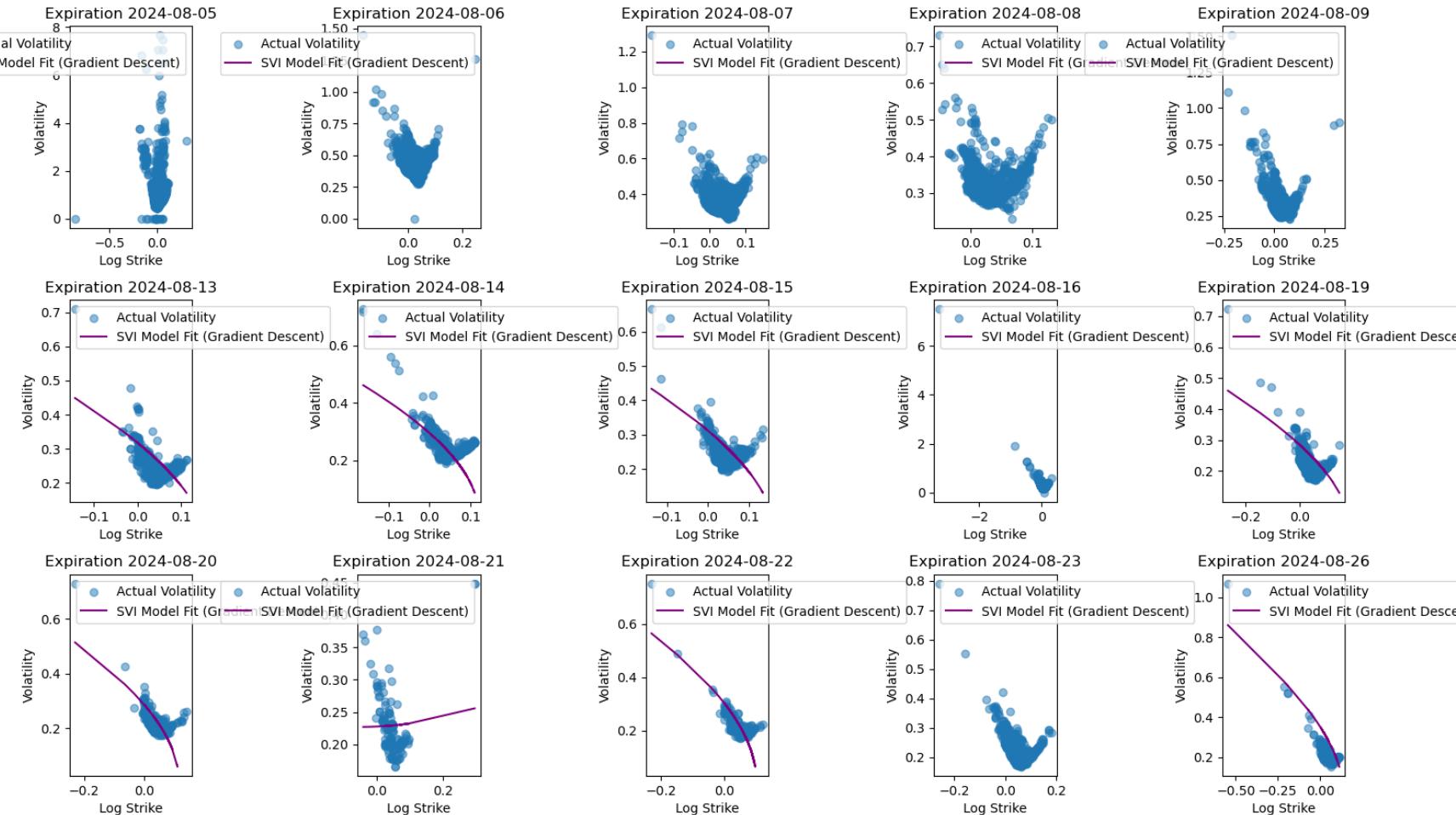
- 변동성 미소 자체가 도출되지 않는 경우 존재
- 도출된 변동성 미소 역시 convexity 미충족
- 적절한 피팅(회귀) 역시 이루어지지 않음

→ 반복 횟수를 늘려서 최적화 후 재평가

VIII. Optimization

i. Gradient Descent(경사하강법)

옵션 거래데이터를 만기별로 분류한 뒤, Gradient descent(증가된 learning rate)를 적용하여 최적화한 변동성 미소



학습률(learning rate) = 0.001
반복 횟수(iterations) = 20000
수렴 조건(tolerance)= 1e-6
수치 안정성을 위한 극소값(epsilon) = 1e-8

분석

1. 이전 최적화 결과와 거의 비슷한 양상을 보임
2. 일부 만기일의 경우 convexity 충족
(Expiration: 2024-08-21)

→ 알고리즘 설정값 조정보다는 다른 알고리즘
시도가 필요하다고 판단

VIII. Optimization

ii. L-BFGS-B

Gradient descent을 보완하여 최적화 문제를 해결하기 위한 알고리즘

Limited-memory

효율적인 메모리 사용

대규모 문제를 처리할 때 효율적으로 메모리 사용 최소화
파라미터 공간이 크거나 데이터 포인터가 많은 경우 효과적

①

②

②

48109	48109	^SPX	2024-08-05 09:43:00	SPX	2026-12-18	8600.0
48110	48110	^SPX	2024-08-05 09:43:00	SPX	2026-12-18	9600.0
48111 rows × 27 columns						

BFGS

근사치 사용

이차 도함수를 직접 계산하지 않고 근사치 사용
일반적인 gradient descent 알고리즘보다 효율적으로 수렴

③

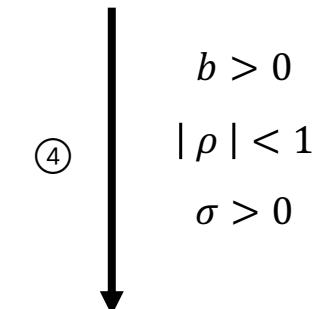
78148	78148	^SPX	2024-08-05 15:04:00	SPX	2027-12-17	5200.0
78149	78149	^SPX	2024-08-05 15:47:00	SPX	2027-12-17	5600.0
78150 rows × 27 columns						

Box constraints

경계 조건 제약 처리

변수의 범위를 직접 제어하여 최적화 과정에서의 부적절한 값 생성 방지
이를 통해 최적화 변수에 경계 조건 부여

④

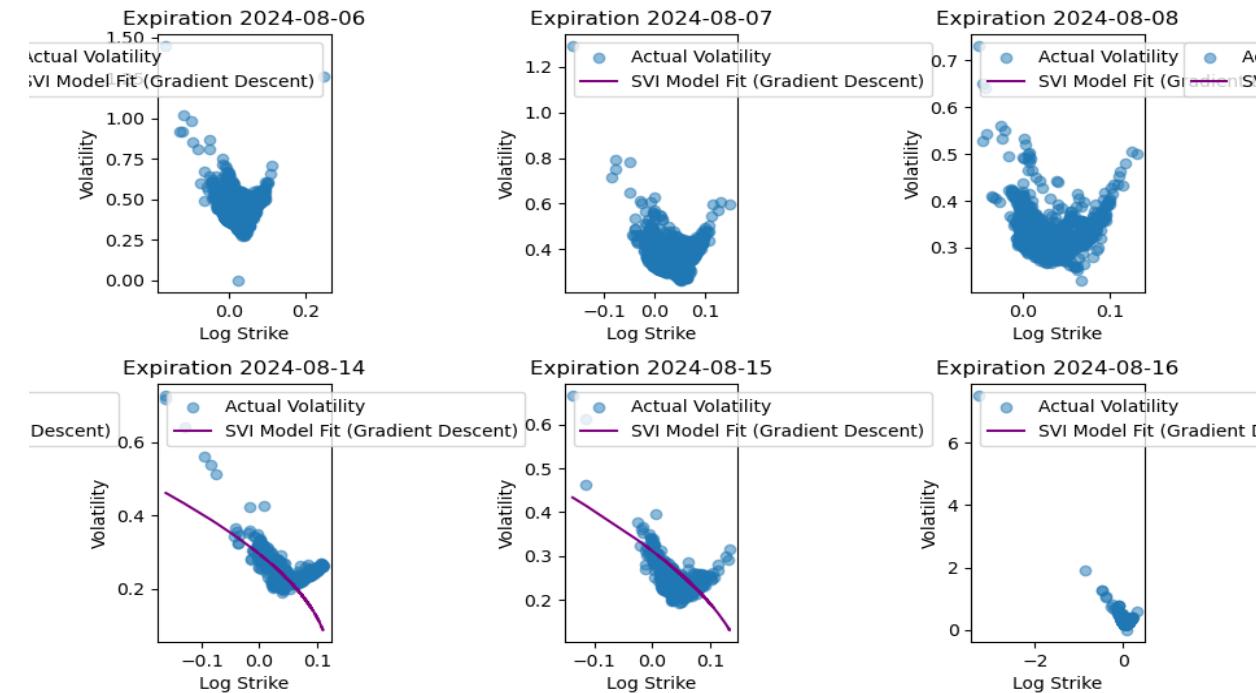
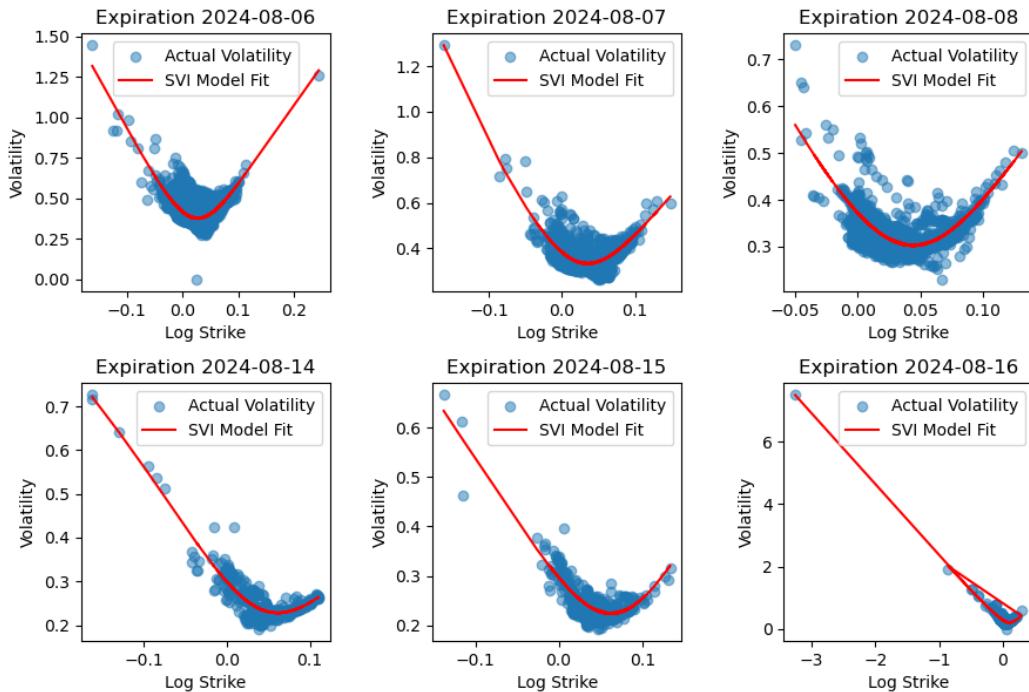


① a, b, ρ, m, σ (5차원 공간)

VIII. Optimization

ii. L-BFGS-B

Gradient descent 알고리즘 적용 시 최적화한 결과와의 비교



L-BFGS-B 적용

Gradient Descent 적용

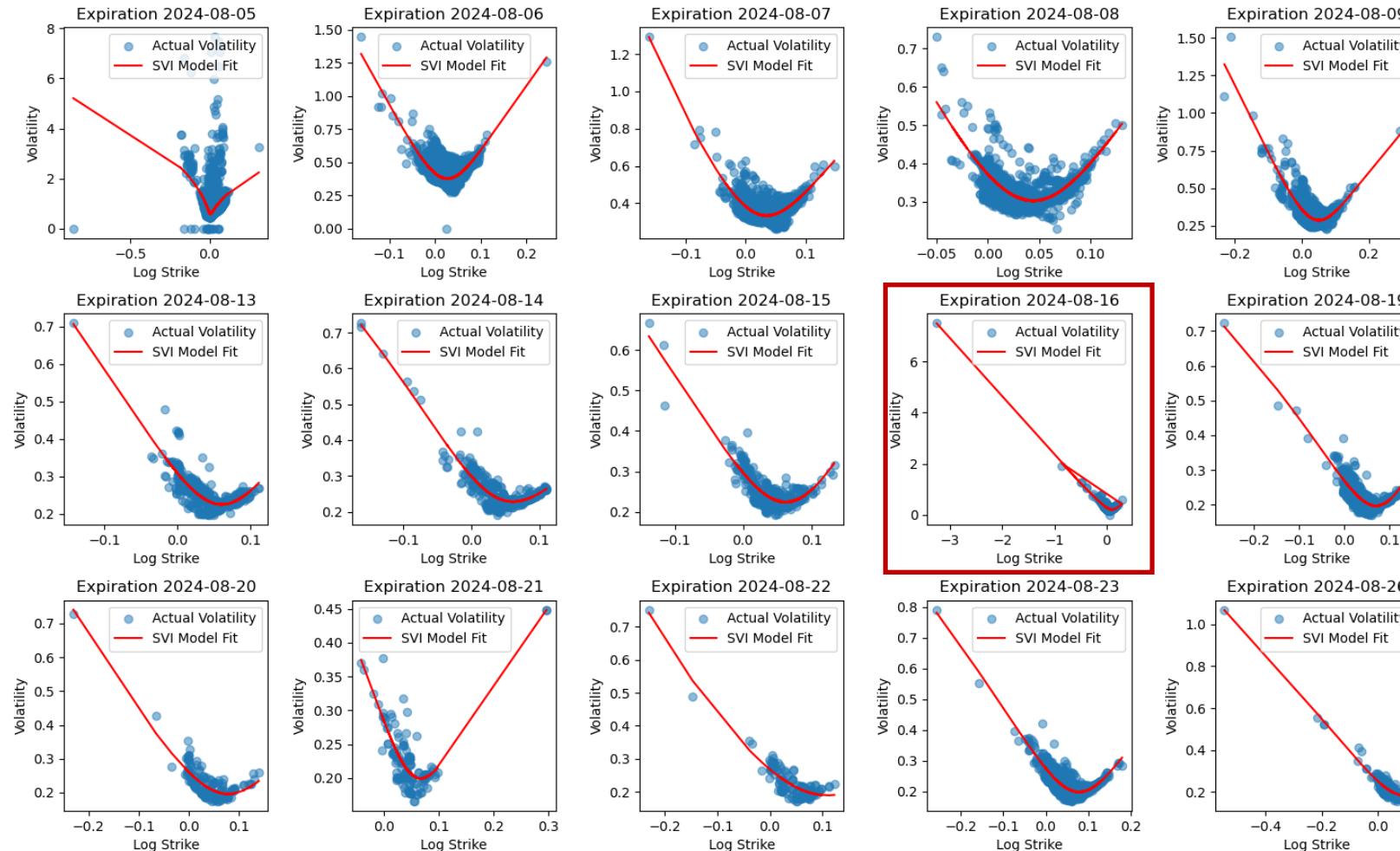
* 거래 데이터에 대한 실제 변동성에 해당하는 파란색 점(dot)의 경우 두 알고리즘에서 동일한 배치를 보인다.

이를 감안했을 때, L-BFGS-B 적용시 동일한 데이터 포인트에 대해 훨씬 더 잘 피팅되었다는 것을 육안으로도 확인할 수 있다.

VIII. Optimization

ii. L-BFGS-B

옵션 거래데이터를 만기일별로 분류한 뒤, L-BFGS-B를 적용하여 최적화한 변동성 미소



분석

- Gradient descent 알고리즘에 비해 좋은 성능을 보인다. (육안으로도 확인 가능한 수준)
- 일부 만기일 데이터의 경우 피팅이 과도하게 적용된 듯한 양상을 보인다. (**Expiration: 2024-08-16**)

→ 다음의 세 가지 방법을 통해 추가 최적화 진행

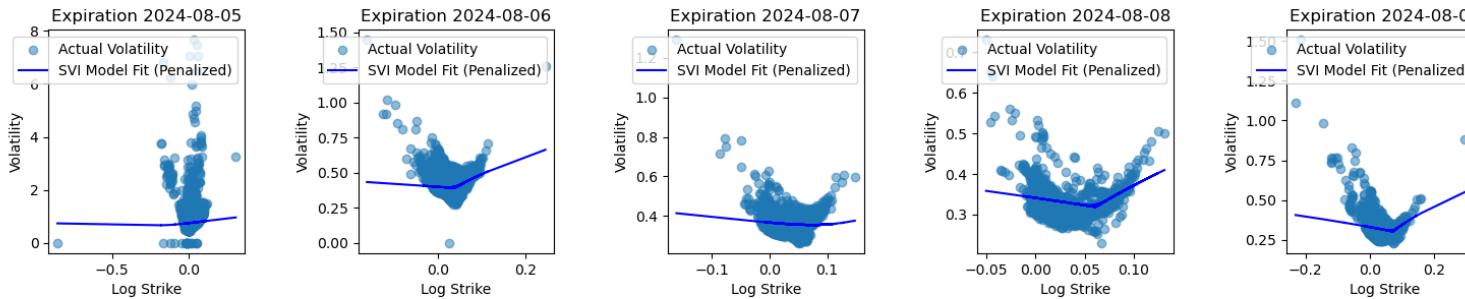
- a. 모든 log strike에 대해 convexity 제약 적용
- b. 곡선 평활화(smoothing)
- c. 이차미분값의 하한 설정

VIII. Optimization

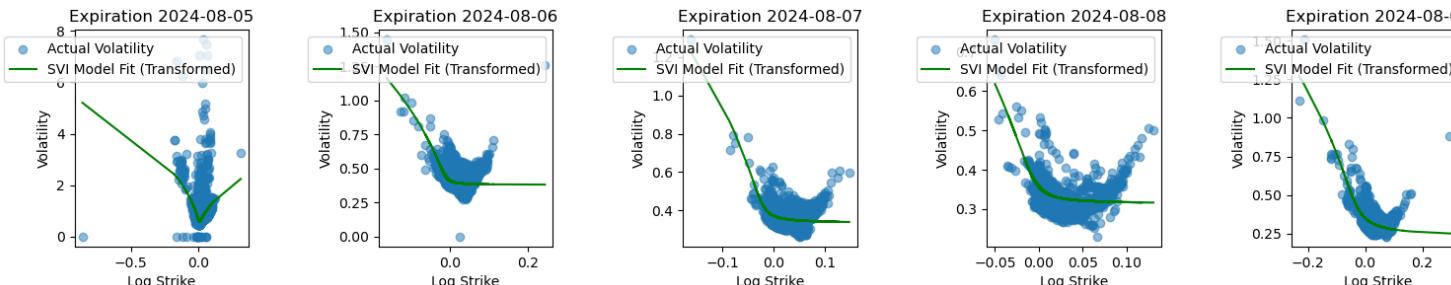
ii. L-BFGS-B 추가 최적화

L-BFGS-B를 통해 최적화한 변동성 미소에 추가 최적화(이전 페이지의 추가 최적화 방법 a, b)를 진행한 결과

1. 모든 log strike에 대해 convexity 제약 적용



2. 곡선 평활화(smoothing) 적용



추가 최적화 목적

k의 모든 값에 대해 convex한지를 확인하기 위해 k의 모든 가능한 값을 사용하는 대신, 미리 일정한 간격으로 k의 샘플링된 점들을 만들어 convexity 확인

결과

안 좋다

추가 최적화 목적

SVI 모델의 과적합 방지를 위해 목적 함수에 평활화(smoothing) 항을 추가하여 모델의 변동성을 줄이는 방식으로 convexity 강화

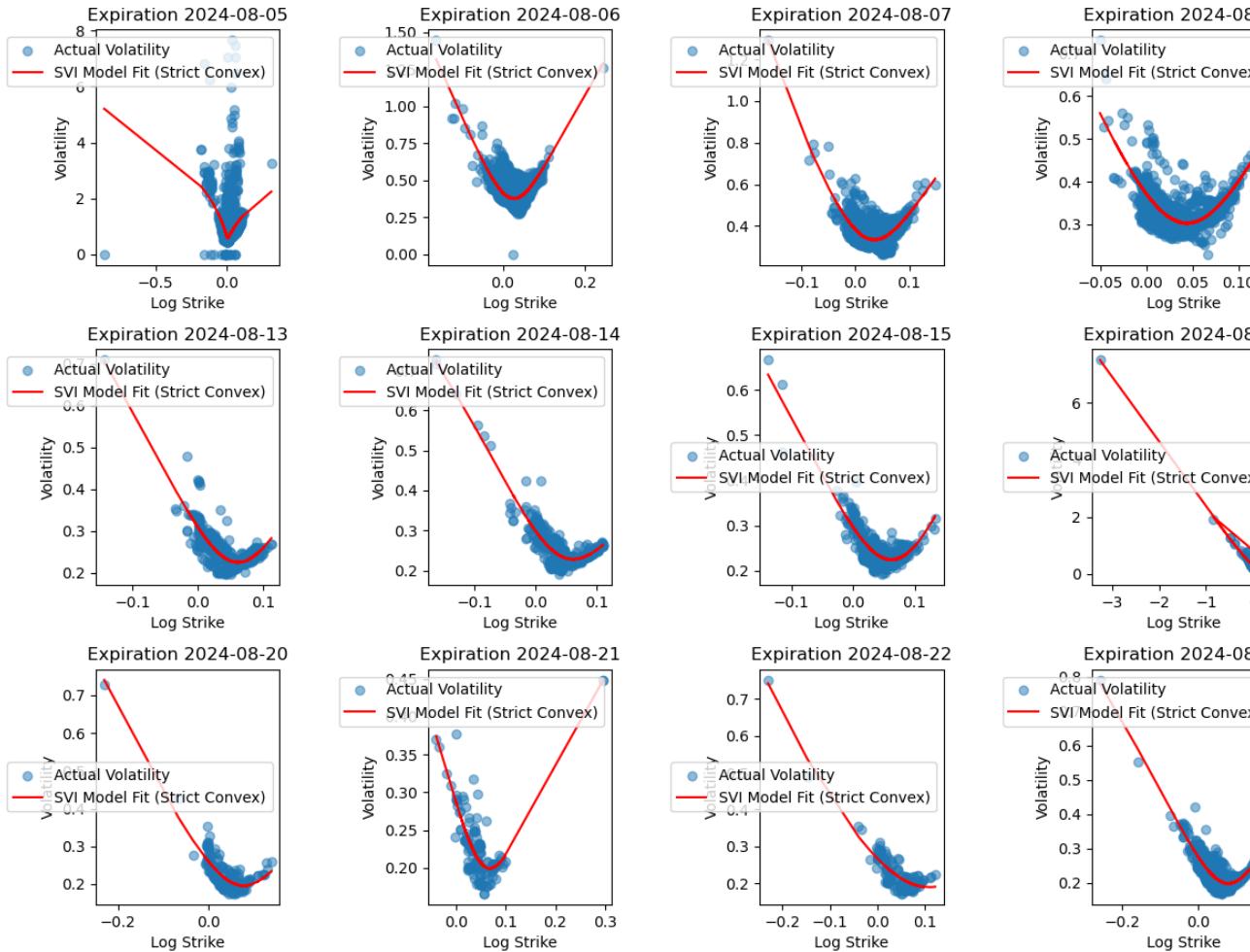
결과

안 좋다

VIII. Optimization

ii. L-BFGS-B 추가 최적화: 이차미분값의 하한 설정

L-BFGS-B를 통해 최적화한 변동성 미소에 추가 최적화(방법 c)를 진행한 결과



추가 최적화 목적

- 곡선이 완전한 convex 형태를 띠도록 이차 미분값이 단순히 0 이상이 아닌, 특정 작은 값(ε) 이상이 되도록 설정한다.
- 곡선이 거의 flat해지지 않고 항상 convex를 유지하도록 강제한다.

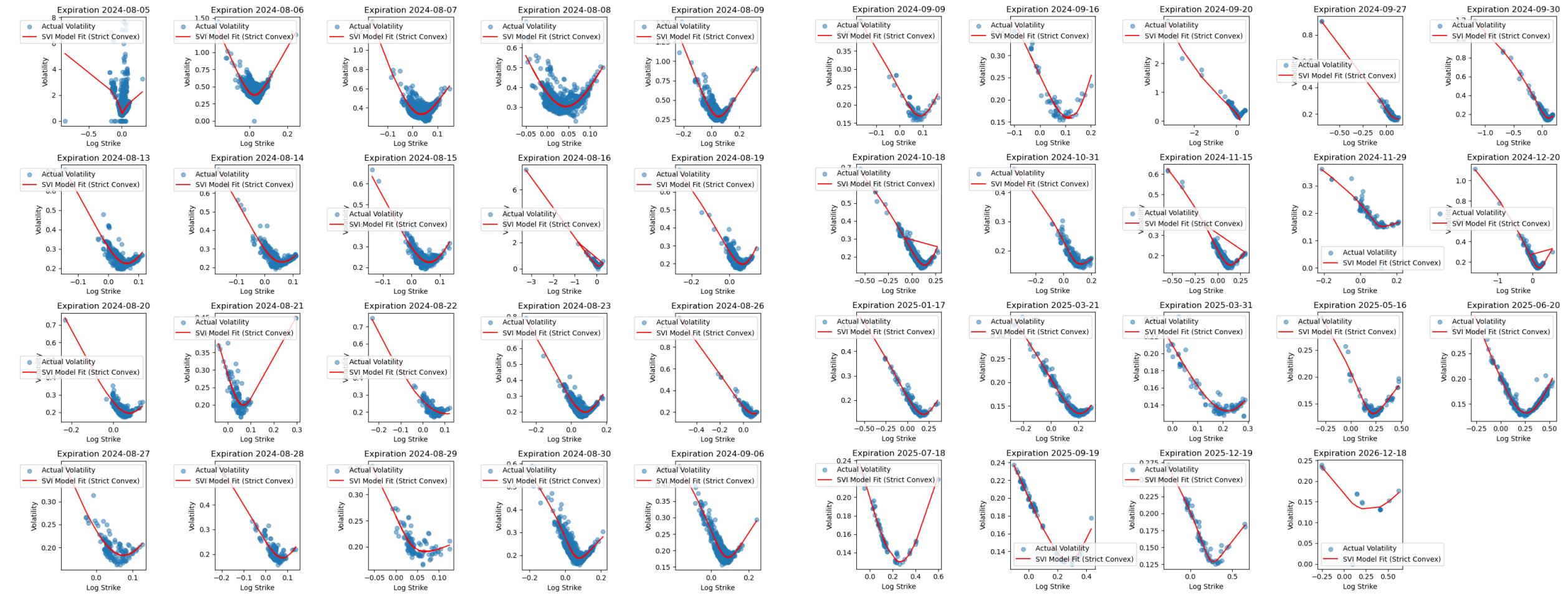
분석

- 대체로 변동성 미소의 convexity가 충족된다.
- 여전히 제대로 피팅되지 않는 부분이 존재한다.
- 다른 최적화 방식에 비해 더 잘 최적화되는 것으로 보인다.

VIII. Optimization

ii. L-BFGS-B 추가 최적화: 이차미분값의 하한 설정

모든 만기일에 대해 추가 최적화한 결과



일부 만기일 옵션 거래 데이터를 제외하고, 대체로 convex한 피팅 결과를 보인다.

VIII. Optimization

iii. Parameter Optimization

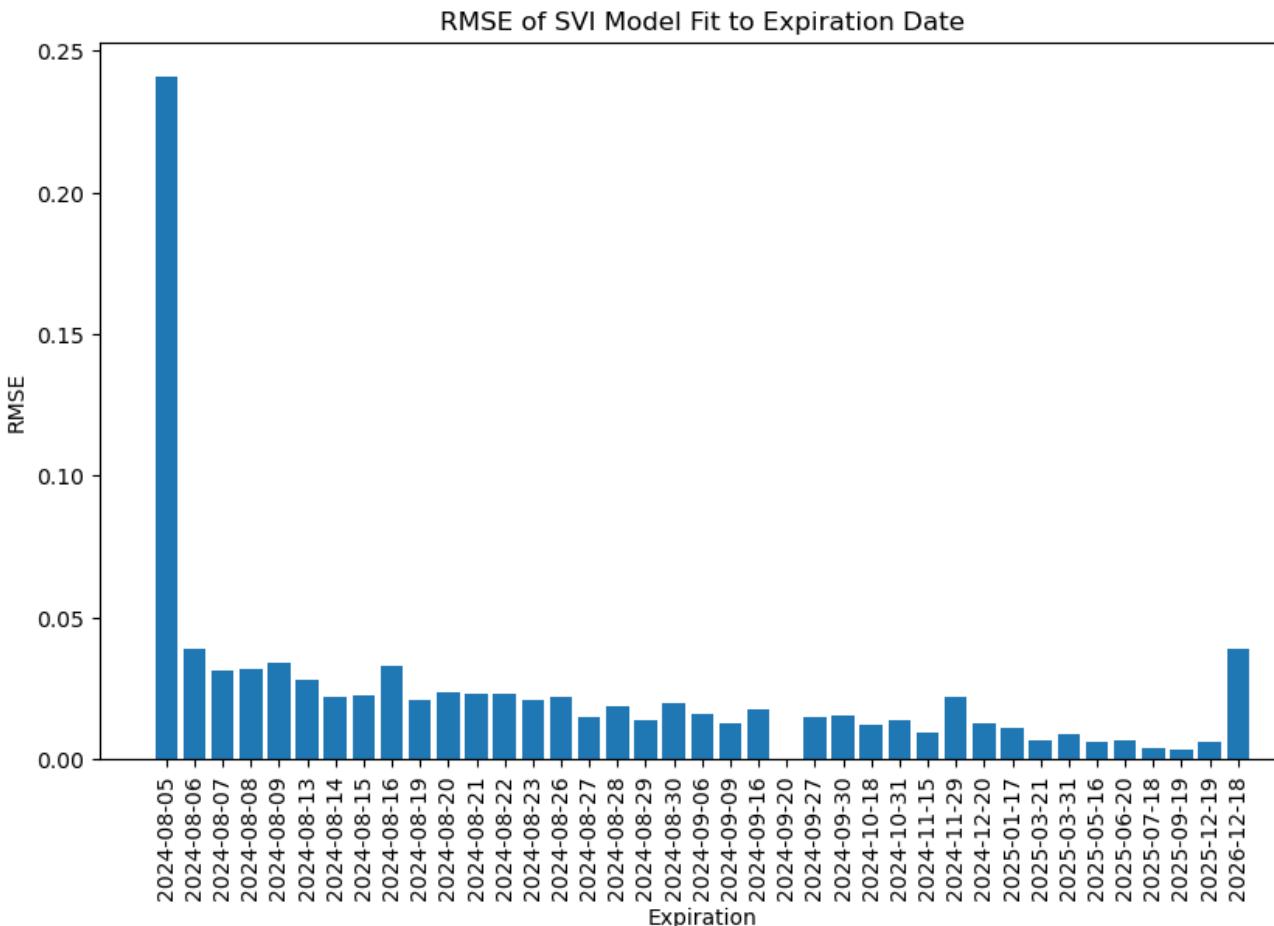
앞선 L-BFGS-B 최적화를 통해 도출한 만기일 별 파라미터 최적화 값

IX. Results

iv. Performance Analysis: RMSE

RMSE (Root Mean Squared Error): 예측 모델과 실제 값 간의 차이를 측정하는 지표

RMSE가 낮을수록 모델의 예측과 실제 값 간의 차이가 적으며, 최적화의 성능이 좋다는 것을 의미한다.



분석 1: 8월 5일의 높은 RMSE

본 연구에서 활용한 데이터는 8월 5일에 거래된 만기별 옵션 데이터이다. 따라서 시장 변동성이 다른 만기일에 비해 매우 크고, 해당 데이터에서 계산된 loss 값이 높게 나올 수 있다. 특히, 거래량이 많다면 더 많은 데이터 포인트를 포함하므로, 해당 데이터에서의 loss가 더 크게 보일 수 있다.

분석 2: 전반적으로 낮은 RMSE

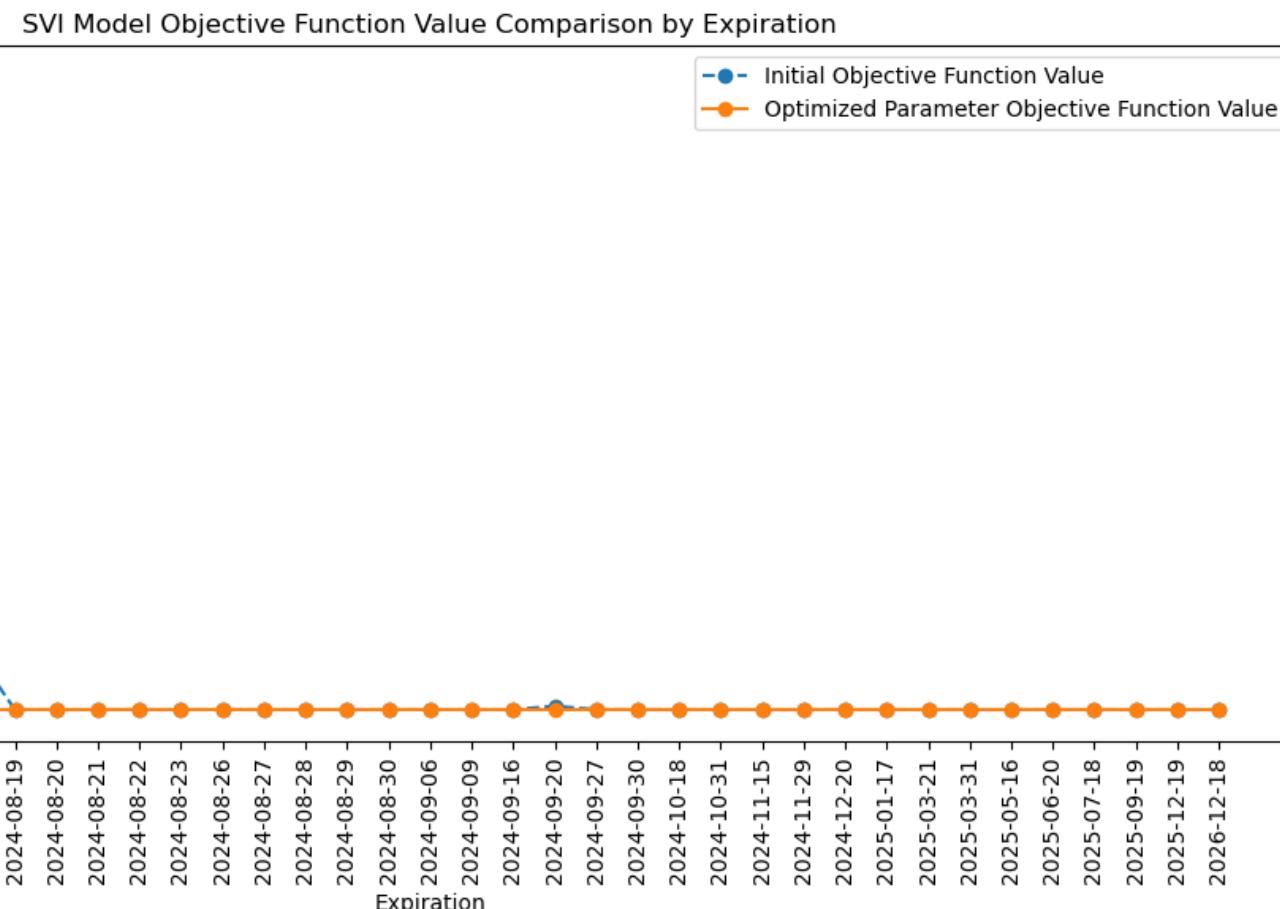
8월 5일 역시, RMSE가 약 0.24 정도의 수치를 보이며, 다른 만기일을 가진 옵션 거래 데이터의 경우엔 그에 비해 현저히 낮은 RMSE를 보인다. 이를 통해 전반적으로 최적화가 잘 되었음을 확인할 수 있다.

IX. Results

iv. Performance Analysis: Objective Function Value

반복적인 최적화를 통해 초기 목적식, 즉 $\sum_{i=1}^N (\hat{w}(k_i) - w(k_i))^2$ 의 값이 얼마나 감소했는지 확인함으로써 최적화 성과를 분석한다.

감소된 부분의 크기가 클수록 최적화의 성능이 좋다는 것을 의미한다.



분석 1. 파란색 밑에 주황색

파란색 점선은 최초의 목적함수 값, 주황색 실선은 반복적인 최적화 이후의 목적함수 값이다. 두드러지는 만기일 데이터(8월 5일, 8월 16일) 상으로는 최적화 이후의 목적함수 값이 최적화 이전보다 더 감소했음을 알 수 있다.

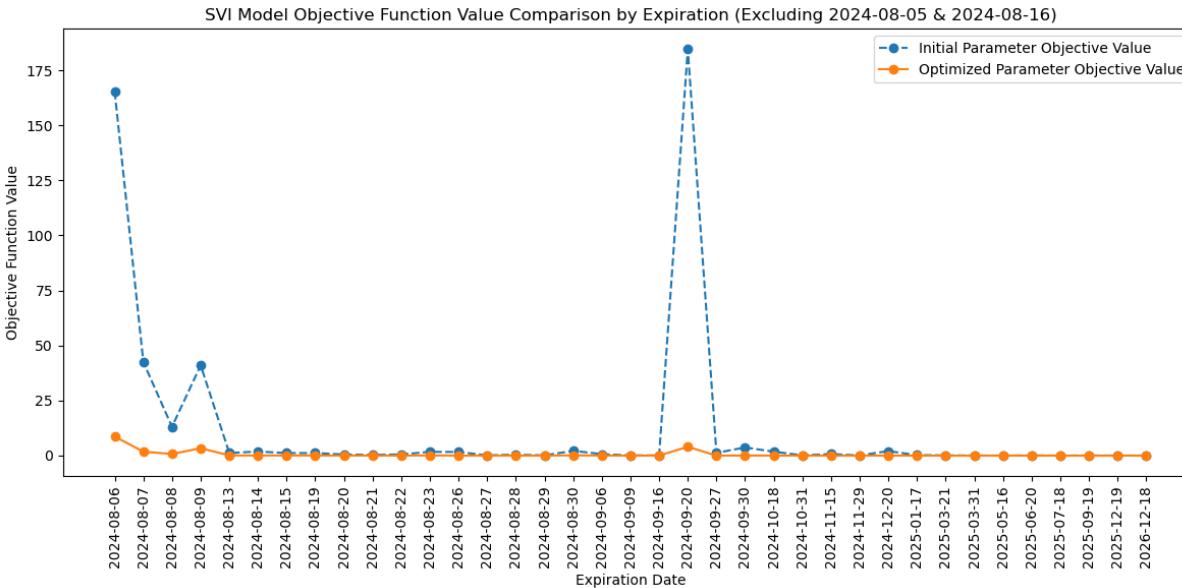
분석 2. 다른 날은?

두드러지는 만기일 데이터를 제외하고 다른 만기일 옵션의 경우 목적함수 값이 어떻게 변화했는지 제대로 식별되지 않는다. 두 날짜를 만기일로 갖는 데이터를 제외 후 다시 시각화하여 확인한다.

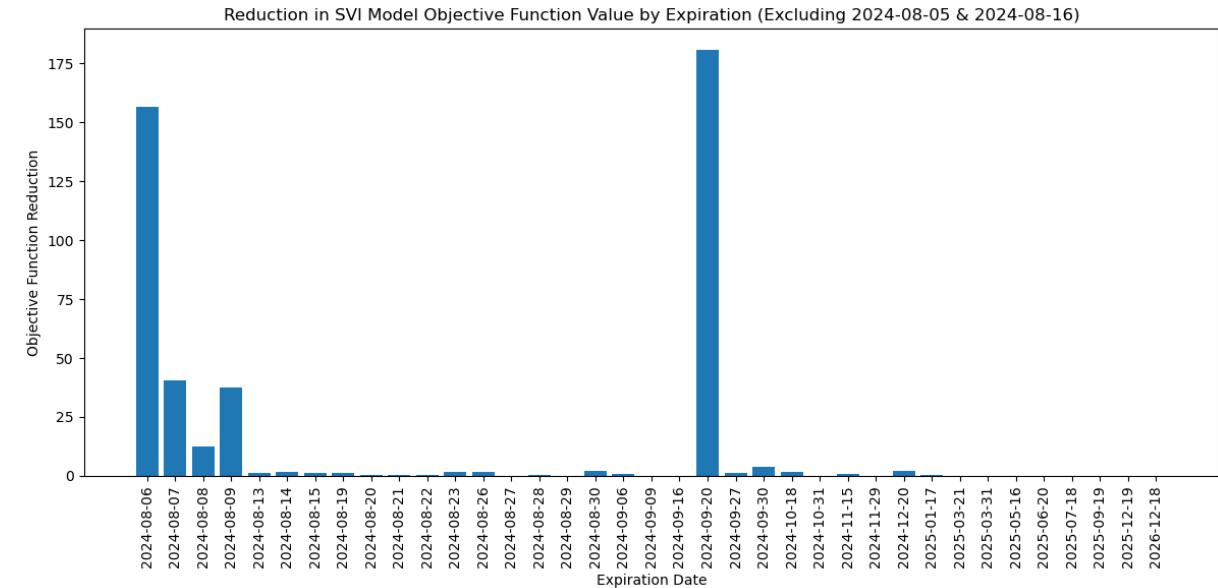
IX. Results

iv. Performance Analysis: Objective Function Value

두드러지는 만기일 데이터(2024-08-05, 2024-08-16)를 제외한 뒤, 나머지 만기일 옵션 거래 데이터를 대상으로 목적함수 값의 감소를 파악한다.



< 최적화 전후의 목적함수 값 비교 >



< 목적함수 감소분 시각화 >

최적화 과정을 통해 목적함수 값이 확실히 감소했음을 확인할 수 있다.

- ① 음(-)의 감소분이 없다는 것은, 최적화 과정을 통해 목적함수 값이 오히려 증가한(최적화가 역의 효과를 산출한) 데이터가 없음을 의미한다.
- ② 목적함수 값이 0에 가까운 옵션 거래 데이터 역시도 미미하지만 조금씩은 목적함수 값이 감소했음을 확인할 수 있다.

IX. Results

v. Arbitrage-Free Condition

변동성 미소의 최적화를 통해 옵션 무차익 거래 상황이 조성되었는지 확인한다.

본 연구에서는 <문헌 연구>에 언급한 문헌에 기재되어 있는 butterfly arbitrage의 발생 유무를 확인했다.

Butterfly Arbitrage Check by Expiration:		
	Expiration	Arbitrage Free
0	2024-08-05	True
1	2024-08-06	True
2	2024-08-07	True
3	2024-08-08	True
4	2024-08-09	True
5	2024-08-13	True
6	2024-08-14	True
7	2024-08-15	True
8	2024-08-16	True
9	2024-08-19	True
10	2024-08-20	True
11	2024-08-21	True
12	2024-08-22	True
13	2024-08-23	True
14	2024-08-26	True
15	2024-08-27	True
16	2024-08-28	True
17	2024-08-29	True
18	2024-08-30	True
19	2024-09-06	True

Butterfly Arbitrage Check by Expiration:		
	Expiration	Arbitrage Free
20	2024-09-09	True
21	2024-09-16	True
22	2024-09-20	True
23	2024-09-27	True
24	2024-09-30	True
25	2024-10-18	True
26	2024-10-31	True
27	2024-11-15	True
28	2024-11-29	True
29	2024-12-20	True
30	2025-01-17	True
31	2025-03-21	True
32	2025-03-31	True
33	2025-05-16	True
34	2025-06-20	True
35	2025-07-18	True
36	2025-09-19	True
37	2025-12-19	True
38	2026-12-18	True

분석 1. 직관적 분석

결과적으로, 분석 대상으로 삼은 모든 만기일 옵션 데이터에 대해서, butterfly arbitrage는 관측되지 않았다. 다시 말해, SVI 모델을 통해 추정한 변동성 미소가 모든 로그 행사가격에 대해서 convex하게 최적화 되었음을 확인할 수 있다.

분석 2. 수리적 분석

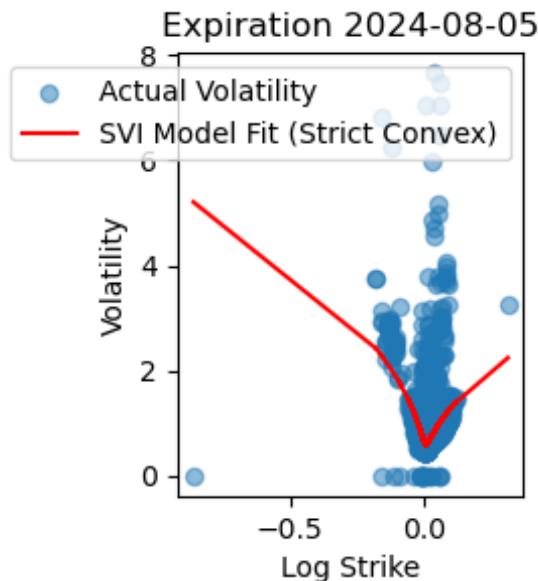
SVI 모델의 수식을 고려했을 때, 각 k 에 대해 $w(k)$ 의 2차 미분 값이 모든 k 에서 양수임을 의미 한다. 즉, 미분 가능하다는 것은 변동성 미소가 모든 데이터포인트에서 연속적이며 첨점이 없음을 나타내고, 미분값이 양수라는 것은 미소가 convex함을 나타낸다.

X. Conclusion

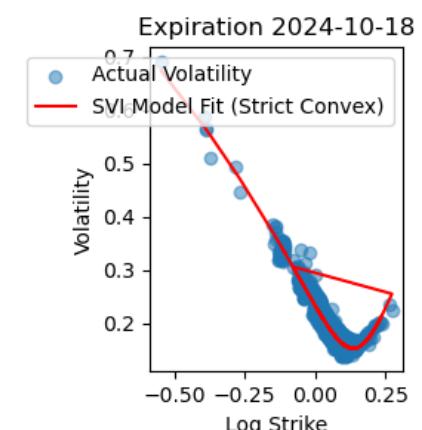
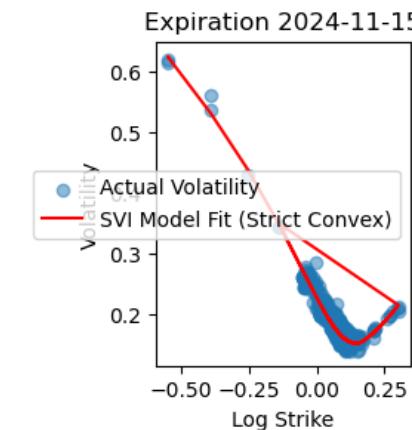
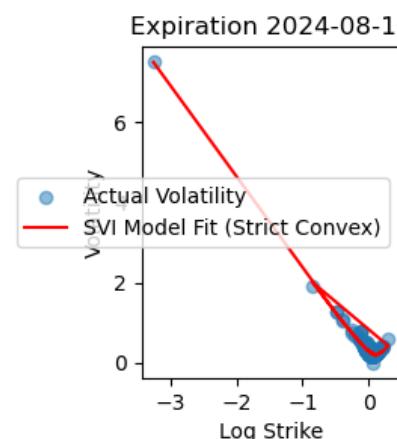
i. Limitations

SVI 적용 과정에서 달성하지 못한 피팅 한계

1) 데이터 수에 따라 저하되는 성능



2) 곡선 꺾임 현상



다른 데이터에 비해 훨씬 많은 데이터 포인트를 갖고 있는 2024-08-05 데이터의 경우, convexity가 제대로 달성되지 않았음을 확인했다.

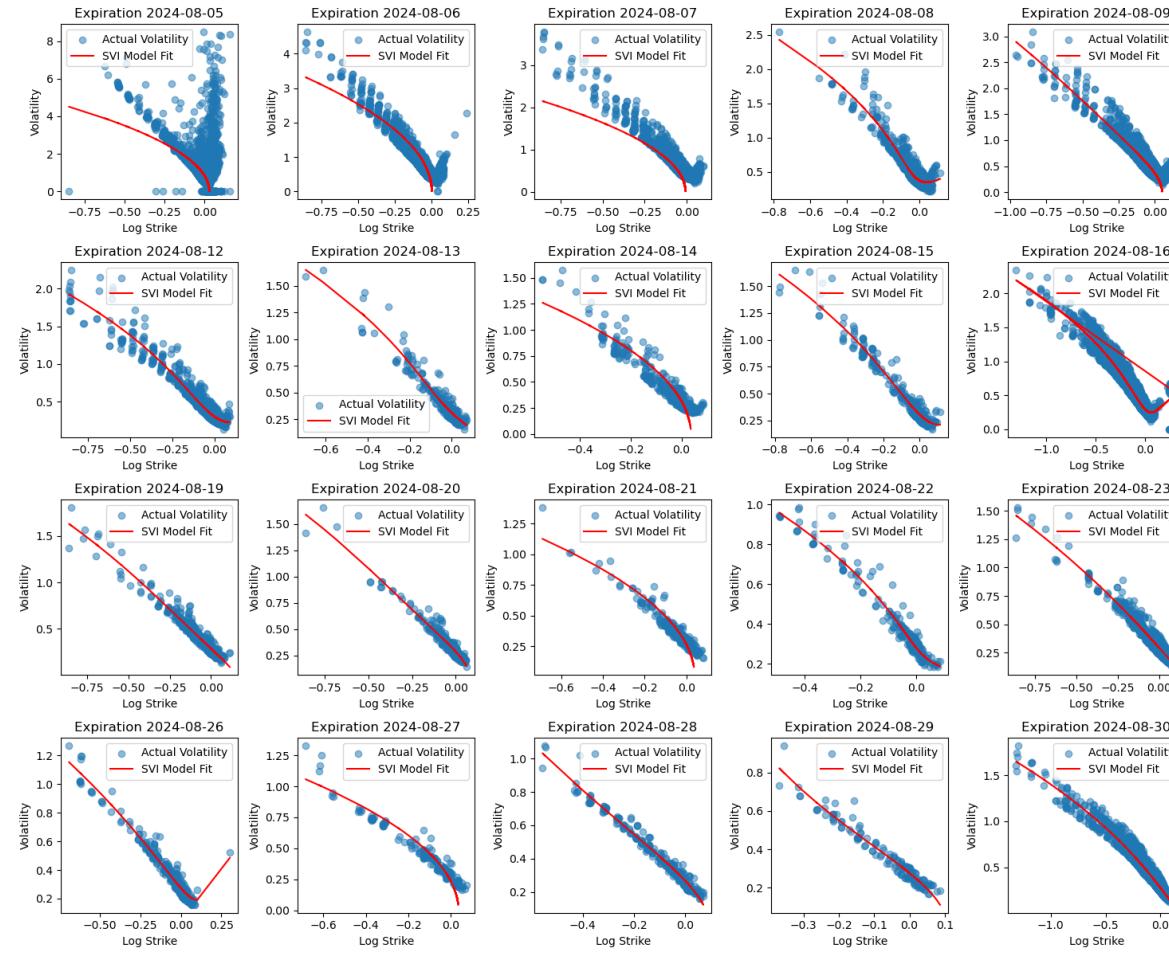
특정 데이터 포인트에서 곡선이 이전의 위치로 되돌아가 연결되는 현상이 발생한다. Convexity 달성을 위한 추가 제약 조건 및 수리적 분석 시도해보았으나 이유가 명확히 확인되지 않는다. Overfitting일 수도 있고, 추가 제약 조건 적용을 통해 추후 개선 가능할 것으로 사료된다.

X. Conclusion

i. Limitations

3) 애증의 풋 옵션

Dual 식의 수리 변환을 하지 못해 콜옵션으로 연구 수행. 풋옵션의 경우, 변동성 미소의 convexity를 충족시키지 못하여 arbitrage free 상황도 달성하지 못했다.



Butterfly Arbitrage Check by Expiration:		Butterfly Arbitrage Check by Expiration:	
Expiration	Arbitrage Free	Expiration	Arbitrage Free
0 2024-08-05	True	25 2024-09-16	False
1 2024-08-06	True	26 2024-09-20	False
2 2024-08-07	False	27 2024-09-27	False
3 2024-08-08	False	28 2024-09-30	False
4 2024-08-09	False	29 2024-10-18	False
5 2024-08-12	False	30 2024-10-31	False
6 2024-08-13	False	31 2024-11-15	False
7 2024-08-14	False	32 2024-11-29	False
8 2024-08-15	False	33 2024-12-20	False
9 2024-08-16	False	34 2024-12-31	False
10 2024-08-19	False	35 2025-01-17	True
11 2024-08-20	False	36 2025-01-31	False
12 2024-08-21	False	37 2025-02-21	True
13 2024-08-22	False	38 2025-03-21	True
14 2024-08-23	False	39 2025-03-31	False
15 2024-08-26	False	40 2025-04-17	True
16 2024-08-27	False	41 2025-05-16	False
17 2024-08-28	False	42 2025-06-20	True
18 2024-08-29	False	43 2025-07-18	True
19 2024-08-30	False	44 2025-08-15	True
20 2024-09-03	False	45 2025-09-19	True
21 2024-09-06	False	46 2025-12-19	True
22 2024-09-09	False	47 2027-12-17	True
23 2024-09-10	False		
24 2024-09-13	False		

References

Aurell, Alexander. The SVI Implied Volatility Model and Its Calibration. 2014년 9월.

Carr, Peter and Torricelli, Lorenzo. Convex Duality in Continuous Option Pricing Models. 2022년 12월 12일.

Carr, Peter and Pelts, Greg. Duality, Deltas, and Derivatives Pricing. NYU/Blackrock, 2015년 6월 4일.

Dahl, Kristina Rognlien. Convex Duality and Mathematical Finance. University of Oslo, 2012년 5월.

Gatheral, Jim. Arbitrage-Free SVI Volatility Surfaces. 2013년 3월 17일.

김미현. Portfolio Optimization with Stochastic Volatility and Stochastic Interest Rate. 연세대학교, 2011년 6월.

이민구. Pricing under Delayed Stochastic Volatility. 연세대학교, 2009년 12월 28일.

최선용. Option Pricing with a Hybrid Stochastic and Local Volatility Model. 연세대학교, 2013년 12월.

Appendix

i. Dual Problem의 수식 정의 (= $\pi(z)$ 를 구하기 위한 과정)

$$H(\delta) = -\sum_{i=1}^n \delta_i \ln \delta_i$$

- 정보의 확률이 불확실할수록(작을수록) $H(\delta)$ 값 ↑
- 샤논 엔트로피를 활용하여 dual 문제의 해($\pi(z)$) 도출

$$\delta \text{ (베르누이 확률변수)} \quad P(X) = \begin{cases} \delta & (\text{if } X = 1) \\ (1 - \delta) & (\text{if } X = 0) \end{cases} \quad \longrightarrow \quad H(\delta) = -(\delta \ln \delta + (1 - \delta) \ln(1 - \delta))$$

$$\eta_\delta(\delta) = \sqrt{H(\delta)\delta(1 - \delta)}$$

- Dual delta의 함수를 샤논 엔트로피와 베르누이 확률변수의 기하평균으로 가정

ii. Neumann Boundary Problem의 유일해 찾기(= Dual 문제 풀이를 통한 Primal 문제 해결)

1) $\eta^2(z)\pi''(z) + z\pi'(z) - \pi(z) = 0$ 를 만족하는 $\pi(z)$ 가 dual 문제의 해

2) Dual delta 함수인 $\eta_\delta(\delta)$ 를 이용하기 위해 Legendre 변환을 통하여 변수를 δ 로 변환

3) $\delta = \frac{1}{1+e^{-z}}$ (지정) δ 를 베르누이 변수의 확률로 이용하기 때문에 0~1 사이 값 반환할 수 있는 시그모이드 함수 이용

4) $\pi^*(\delta) = z \frac{\partial \pi(z)}{\partial z} - \pi(z)$ Legendre 변환을 통해 바꿈. 이를 통해 dual 문제 역시 $\eta^2 \delta(\delta) \frac{d^2 \pi^*}{d\delta^2}(\delta) + \pi^*(\delta) = 0$ 을 만족하는 해로 바꿈

5) $\pi^*(\delta) = -H(\delta)$ 로 두고 위 조건을 만족하는 해가 맞는지 확인

Appendix

iii. Dual Problem 해 도출 및 Put Option의 가격함수 증명

$\eta_\delta^2(\delta) = H(\delta)\delta(1 - \delta)$ 를 대입하면 $H(\delta)\delta(1 - \delta) \frac{d^2\pi^*}{d\delta^2}(\delta) + \pi^*(\delta) = 0$ (*)이 만족해야 하는 조건이 되고,

$$\frac{d\pi^*}{d\delta}(\delta) = \frac{d}{d\delta}(-H(\delta)) = \frac{d}{d\delta}(\delta \ln \delta + (1 - \delta) \ln(1 - \delta)) = \ln \frac{\delta}{1 - \delta}$$

$$\frac{d^2\pi^*}{d\delta^2}(\delta) = \frac{1}{\delta} - \frac{-1}{1 - \delta} = \frac{1}{\delta} + \frac{1}{1 - \delta} = \frac{1}{\delta(1 - \delta)} > 0$$

∴ 위 조건 식(*)을 0으로 만드는 $\pi^*(\delta) = -H(\delta)$ 가 됨을 확인할 수 있음

다시 Legendre 역 연산을 통해 $\pi(z) = \delta \frac{\partial \pi^*(\delta)}{\partial \delta} - \pi^*(\delta) = -\ln(1 - \delta) = \ln e^z + 1$, ($z = \frac{k - S_0}{b(T)}$ 기억하기)

∴ $\pi(z)$ 를 대입하면 $P(k, T; S_0) = b(T)\pi(z) = b(T) \ln(1 + e^{\frac{k - S_0}{b(T)}})$