电磁学期末复习

考试时间：12月27号 14:30-16:30

考试教室：3C203, 3C204

一、麦克斯韦方程组及介质本构方程

1. 麦克斯韦方程组

积分形式

$$\begin{cases} \oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum q_0 \\ \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \\ \oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I_0 + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \end{cases}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_{静} + \vec{E}_{旋}$$

静电磁场

$$\begin{cases} \oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum q_0 \\ \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \\ \oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I_0 \end{cases}$$

$$\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},\ I_D = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

微分形式

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D} = \rho_0 \\ \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ \nabla\times\vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

静电磁场

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D} = \rho_0 \\ \nabla\times\vec{E} = 0 \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ \nabla\times\vec{H} = \vec{j}_0 \end{cases}$$

有源无旋 （$\vec{E}$）

无源有旋 （$\vec{B}$）

用于对称性较好的问题，简单、明确、重要！

- 电场高斯定理：由库仑定律导出，说明存在自由电荷，自由电荷是电场的源，静电场是有源场。 $\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum q_0$
- 电场环路定理：“法拉第电磁感应定律+涡旋电场假说”导出，涡旋电场假说指随时间变化的磁场产生涡旋电场，涡旋电场是闭合的。 $\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$
- 磁场高斯定理：毕奥—萨伐尔定律的结果，说明没有自由磁荷(磁单极子)存在，磁力线是闭合的。 $\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$
- 磁场环路定理：“安培环路定理+位移电流假说”的结果，位移电流假说是指随时间变化的电场产生磁场。 $\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I_0 + \iint_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$

2. 介质的本构方程

磁场强度 H $\quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$

磁化强度M $\quad \vec{M} = \chi_m \vec{H}$

χ_m： 磁化率

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$
$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

线性各向同性均匀介质

$$\begin{cases} \vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu\vec{H} \\ \vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} = \varepsilon\vec{E} \\ \vec{j}_0 = \sigma\vec{E} \end{cases}$$

$\mu_r \equiv \mu/\mu_0 = 1 + \chi_m$

μ_r： 相对磁导率

μ ： 绝对磁导率

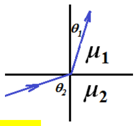
3. 边 值 关 系

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_0 \\ \vec{n}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \vec{n}\cdot(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \\ \vec{n}\times(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{i}_0 \end{cases}$$

σ_0是界面上的自由面电荷密度

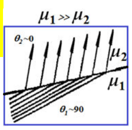
i_0是界面上的传导面电流密度

n为界面单位法向矢量，由介质1 指向介质2



若磁介质界面 i_0=0

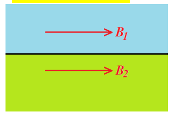
$$\left.\begin{aligned} B_{2n} &= B_{1n} \\ H_{1t} &= H_{2t} \\ \vec{B} &= \mu_0\mu_r\vec{H} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{tg\theta_1}{tg\theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$



分区均匀各向同性介质

$\vec{B}//\vec{H}//\vec{M}$

(1)介质界面与磁感应线重合(平行)，且介质界面上没有传导电流 i_0=0，则：



$B_n = 0, H_n = 0 \Rightarrow \vec{B} = B_t\vec{\tau},\ \vec{H} = H_t\vec{\tau}$

i_0=0 $\Rightarrow H_{1t} = H_{2t} = H$

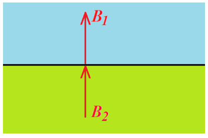
$\vec{H} \equiv \vec{B}_0 / \mu_0$ 界面两边的H连续(相等)

$\vec{B}_i = \mu_0\mu_{ri}\vec{H} = \mu_i\vec{B}_0$ 界面两边的B是B_0的u_r倍

B_0:传导电流在真空中产生的磁感应强度

(2) 介质界面与磁感应线垂直

$$B_t = 0,\ H_t = 0,\ M_t = 0$$
$$\vec{B} = B_n\vec{n},\ \vec{H} = H_n\vec{n},\ \vec{M} = M_n\vec{n}$$



$B_{1n} = B_{2n}$ ➡ $B_1 = B_2$ 界面两边的B连续(相等)

$\vec{i}' = \vec{n}\times\left(\vec{M}_2 - \vec{M}_1\right) = 0$ $i' = \frac{I'}{L}$ 界面无磁化面电流

$\vec{B} = \alpha\vec{B}_0,\ \alpha = \Sigma I_0 / \oint_L \frac{\vec{B}_0}{\mu_0\mu_r}\cdot d\vec{l}$ B和B_0具有相同的构形，大小上差一常数

$\vec{H}_i = \frac{1}{\mu_0\mu_{ri}}\vec{B}$ 界面两边的H不相等

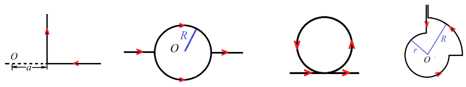
二、磁场感应强度B和磁场强度H

1. 用毕奥－萨法尔定律求磁感应强度

电流元产生的磁感应强度 $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} Id\vec{l}\times\frac{\vec{R}}{R^3}$

磁感应强度满足叠加原理 $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{Id\vec{l}\times\vec{R}}{R^3}$

其中电流元可以是： $Id\vec{l},\ id\vec{S},\ \vec{j}dV$



2. 用安培环路定理求磁感应强度B和磁场强度H

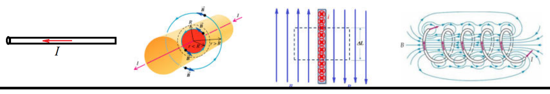
静磁场 传导电流 I_0 磁化电流 I' 真空中 $I'=0$

$$\oint_L B\cdot d\vec{l} = \mu_0\sum I$$
$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I_0$$

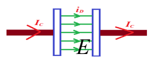
$$I = I_0 + I'$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$
$$\vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H}$$
$$\vec{M} = \chi_m\vec{H}$$

传导电流 I_0 和磁化电流 I' 激发产生的磁场是等效的，空间一点的磁场是所有电流产生的磁场



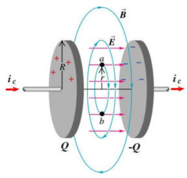
时变电磁场 $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I_0 + \iint_S\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$



位移电流 I_D 也可激发磁场 $\vec{j}_D = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t},\ I_D = \iint_S\vec{j}_D\cdot d\vec{S} = \iint_S\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$

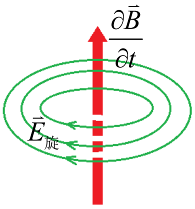
- 位移电流并非自由电荷的定向运动产生，而是由随时间变化的电场产生；
- 真空和电介质中也存在位移电流(传导电流只存在于导体中)；
- 位移电流不伴随焦耳热效应，不满足欧姆定律；
- 位移电流与外磁场无安培力的关系。

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \Rightarrow I_D \Rightarrow \vec{H}$$



3.由涡旋电场求磁场

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\nabla\times\vec{E}$$



$$\vec{B} = -\int\left(\nabla\times\vec{E}\right)dt$$

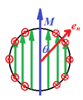
三、磁化强度 M 和磁化电流 I'

由定义求M $\vec{M} = \sum_i\vec{\mu}_i/\Delta V$ 真空中：$M=0$

由B、H求M $\vec{M} = \chi_m\vec{H} = (\mu_r - 1)\vec{H}$ $\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}$ $\vec{M} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r}\frac{\vec{B}}{\mu_0}$

由 M 求 I', i', j' $\sum I' = \oint_L\vec{M}\cdot d\vec{l}$ 真空中：$I'=0$

n由介质1指向介质2 $\vec{i}' = \vec{n}\times\left(\vec{M}_2 - \vec{M}_1\right)$ $\vec{j}' = \nabla\times\vec{M}$



磁化电流的性质：1）没有宏观的电荷定向移动；2）没有焦耳热效应；3）磁化电流只会出现在介质内非均匀磁化处及介质界面上，均匀介质内部磁化电流体密度为零。

四、感应电动势和涡旋电场

总感应电动势（通用） $\varepsilon=-\dfrac{d\Phi}{dt}$，$\Phi=\vec{B}\cdot\vec{S}=BS\cos\theta$

动生电动势(导体运动产生) $\varepsilon_{动}=\int_a^b(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$　　$\vec{K}_{动-非}=\vec{v}\times\vec{B}$

感生电动势(磁场变化产生) $\varepsilon_{感}=-\iint\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}=\oint\vec{E}_{旋}\cdot d\vec{l}$　　$\vec{K}_{感-非}=\vec{E}_{旋}$

自感电动势(自身电流变化产生) $\varepsilon_{自}=-\dfrac{d\Phi}{dt}=-L\dfrac{dI}{dt}$

互感电动势(其他线圈电流变化产生) $\varepsilon_{互1}=-\dfrac{d\Phi_{12}}{dt}=-M\dfrac{dI_2}{dt}$

涡旋电场

$$\oint_L\vec{E}_{旋}\cdot d\vec{l}=-\iint\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}\qquad \nabla\times\vec{E}_{旋}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\oiint_S\vec{E}_{旋}\cdot d\vec{S}=0\qquad \nabla\cdot\vec{E}_{旋}=0$$

$\vec{F}=q\vec{E}$　　$\vec{E}=\vec{E}_{静}+\vec{E}_{旋}$　　涡旋电场和静电场对电荷都能施加力的作用

$\oint_L\vec{E}_{旋}\cdot d\vec{l}\neq0$　　$\nabla\times\vec{E}_{旋}\neq0$　　$E_{旋}$由变化的磁场激发，不是由q产生。电力线是闭合曲线，环量不为零，不是保守力场或有势场，称为有旋场

$\oint_L\vec{E}_{静}\cdot d\vec{l}=0$　　$\nabla\times\vec{E}_{静}=0$　　静电场是由电荷产生，电力线不闭合，是保守力场，即有势场

五、自感 L 和互感 M

$$\begin{cases}L=\dfrac{\Phi}{I} & \text{由定义求}\\ L=-\dfrac{\varepsilon}{dI/dt} & \text{由自/互感电动势求}\\ L=\dfrac{2W_m}{I^2} & \text{由能量求}\end{cases}\qquad \begin{cases}M_{21}=\dfrac{\Phi_{21}}{I_1}\\ M_{21}=-\dfrac{\varepsilon_{21}}{dI_1/dt}\end{cases}$$

***M* 可正可负，*L* 总取正值**

串联 $L_{顺}=L_1+L_2+2M$，$L_{反}=L_1+L_2-2M$

并联 $L_{同}=\dfrac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}$，$L_{异}=\dfrac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2+2M}$

六、磁 能 W_m

由磁场求磁能 $W_m=\dfrac{1}{2}\iiint_V\vec{B}\cdot\vec{H}dV$　通用

由磁能密度求磁能 $W_m=\iiint_V\omega_m dV$　　$\omega_m=\dfrac{W_m}{V}=\dfrac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$

由磁通量求线圈系统的磁能 $W_m=\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^N I_i\Phi_i$

由L/M求线圈系统的磁能：

自感磁能 $W_m=\dfrac{1}{2}LI^2$　　互感磁能 $W_m=MI_1I_2$　　两个线圈系统的磁能 $W_m=\dfrac{1}{2}L_1I_1^2+\dfrac{1}{2}L_2I_2^2\pm MI_1I_2$

线圈在外磁场中的磁能 $W_m=\vec{m}_t\cdot\vec{B}$　无1/2　　$\vec{m}=I\vec{S}$，$\vec{m}_t=\sum_i\vec{m}_i$

m_t为所有线圈磁矩的矢量和

七、能量密度、能流密度、动量密度、光压

能量密度(单位体积内的能量 J/m^3) $\omega=\dfrac{W}{V}=\omega_e+\omega_m=\dfrac{1}{2}\left(\vec{D}\cdot\vec{E}+\vec{B}\cdot\vec{H}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\varepsilon E^2+\dfrac{1}{\mu}B^2\right)$

能流密度(单位时间、单位面积流出的能量，或单位面积流出的功率，W/m^2) $S_{能流密度}=\dfrac{W_{流出}}{t\cdot S_{面积}}=\dfrac{P_{辐射功率}}{S_{面积}}=\omega v$

又叫玻印廷矢量 $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$　　真空中 $v=c$

总电磁能量守恒方程 $-\oiint_S\vec{S}\cdot d\vec{s}=\dfrac{\partial W}{\partial t}+\iiint_V\vec{j}\cdot\vec{E}dV$　　$-\nabla\cdot\vec{S}=\dfrac{\partial\omega}{\partial t}+\vec{j}\cdot\vec{E}$

通过闭合边界曲面S流入V内的电磁能量　　V内电磁场能量的增加　　V内导体上消耗的能量(焦耳热)　　$\vec{j}=\sigma\vec{E}$

$动量=\dfrac{能量}{c}$

动量密度(单位体积内的动量) $g=\dfrac{\omega}{c}=\dfrac{S}{c^2}=\dfrac{|\vec{E}\times\vec{H}|}{c^2}$　　真空中 $\omega=\dfrac{S}{c}$

光压：光施加在物体表面压强(由冲量定理推得) $p=(1+R)\omega$　　R为反射系数　　$\begin{cases}全反射：R=1\\ 全吸收：R=0\end{cases}$

平面电磁波按时间的平均值：$\bar{\omega}=\dfrac{1}{T}\int_0^T\omega(t)dt=\dfrac{1}{2}\varepsilon_0E_0^2=\dfrac{1}{2}\mu_0H_0^2$

八、力和力矩

洛仑兹力 $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$

$i = \frac{I}{L}, j = \frac{I}{S}$

安培力 $\vec{F} = \int d\vec{F} = \begin{cases} \int_L I d\vec{l} \times \vec{B} \\ \iint_S \vec{i} dS \times \vec{B} \\ \iiint_V \vec{j} dV \times \vec{B} \end{cases}$

$\vec{B} = \vec{B}_t - d\vec{B}$ 面电流元

$\vec{B} \approx \vec{B}_t$ 体电流元

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L1} \int_{L2} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times \left(I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}\right)}{r_{12}^3}$$

力矩 $\vec{L} = \int d\vec{L} = \int \vec{r} \times d\vec{F}$ $\vec{L} = \vec{m} \times \vec{B}$ $\vec{m} = I\vec{S}$

m为载流线圈的磁矩

九、平面电磁波

$k = 2\pi / \lambda$
$\nabla = i\vec{k}$
$\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$
$\omega = 2\pi f$

自由空间(ρ₀=0，j=0)
定态平面电磁波

$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \\ \vec{H} = \vec{H}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \end{cases}$

$\begin{cases} \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{H} = 0 \\ \vec{k} \times \vec{E} = \mu_0 \mu_r \omega \vec{H} \\ \vec{k} \times \vec{H} = -\varepsilon_0 \varepsilon_r \omega \vec{E} \end{cases}$

$\vec{k} \perp \vec{E}, \vec{k} \perp \vec{H}, \vec{E} \perp \vec{H}$

$\vec{H} \Rightarrow \vec{E}$
$\vec{E} \Rightarrow \vec{H}$

k是波矢，方向为电磁波的传播方向

$\frac{E_0}{B_0} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}} = \frac{c}{n}$ $v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n}$ $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}, n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$

十、磁路定理

基尔霍夫第一定律 $\sum_i \Phi_i = 0$ $\sum_i I_i = 0$

$U_m = Hl$ 磁位差

基尔霍夫第二定律 $\sum U_m = \sum \varepsilon_m$

$\varepsilon_m = NI$ 磁动势

欧姆定律 $U_m = \Phi_m R_m$
$\varepsilon_m = \Phi_m (R_m + r_m)$

$U = IR$
$\varepsilon = I(R + r)$

$R_m = \int \frac{dl}{\mu_0 \mu_r S}$