

上节课主要内容

真空中电荷间的相互作用能

$$W_{\text{互}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i U_i = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

U_i 表示除自身 q_i 外, 所有其它点电荷在 q_i 处产生的电势

单个带电体的静电能 (自能)

体电荷 $W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \rho_e(r) U(r) dV$

$$Q_e = \iiint_V \rho_e(r) dV$$

$$Q_e = \iint_S \sigma_e(r) dS$$

$U(r)$: 整个体电荷或面电荷在该处产生的电势 (电荷元 dq 的电势很小, 可以忽略)

面电荷 $W_e = \frac{1}{2} \iint_S \sigma_e(r) U(r) dS$

点电荷、线电荷无自能的概念, 它们只是理想模型, 实现它们需要外界做无限大的功

1

多个带电体的静电能

$$W_{\text{静}} = W_{\text{自}} + W_{\text{互}}$$

$$W_{\text{自}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \iiint_{V_i} \rho_e(r) U^{(i)}(r) dV$$

$U^{(i)}(r)$ 表示第 i 个带电体在 r 处产生的电势

$$W_{\text{互}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \iiint_{V_i} \rho_e(r) U_i(r) dV$$

$U_i(r)$ 表示除第 i 个带电体外, 所有其它带电体在 r 处产生的电势

面带电体和线带电体将 $\rho(r)dV$ 换成 σdS 或 λdl

2

电介质中的静电能

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \rho_0(\bar{r}) U(\bar{r}) dV$$

✓ 建立给定自由电荷分布 $\rho_0(r)$ 过程中外界对系统所做的功 $A = W_e$ 。
✓ $U(r)$ 是 $\rho_0(r)$ 和 $\rho'(r)$ 的共同贡献。

宏观静电能 W_{e0} : 建立宏观电荷分布 $[\rho_0(r)$ 和 $\rho'(r)]$ 系统储存的静电能

$$W_{e0} = \left[\frac{1}{2} \iiint_V \rho_0(\bar{r}) U(\bar{r}) dV + \frac{1}{2} \iiint_V \rho'(\bar{r}) U(\bar{r}) dV \right]$$

极化能 $W_{\text{极}}$: 使介质极化所作的功, 极化功, 转为介质的极化能

$$W_{\text{极}} = W_e - W_{e0} = -\frac{1}{2} \iiint_V \rho'(\bar{r}) U(\bar{r}) dV$$

$$W_e = W_{e0} + W_{\text{极}}$$

3

电荷体系在外电场中的静电能(电势能)

$$W_e = \iiint_V \rho(r) U(r) dV = W_{\text{互}} \quad \text{没有 } 1/2$$

$U(r)$: r 处的电势是外电场提供的, 不是 ρ 产生的

点电荷体系在外电场中的静电能

$$W_e = \sum_{i=1}^N q_i U(r_i) \quad \text{没有 } 1/2$$

$U(r_i)$: 是外电场在点电荷 q_i 处 (位置 r_i) 的电势, 不是点电荷体系在 r_i 处产生的电势

4

电偶极子 p 在外电场 E 中的电势能

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

N 个电偶极子的相互作用能为:

$$W = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \vec{E}_i$$

重复计算, 所以有 $1/2$

E_i 是除了 i 之外的其他电偶极子在第 i 个电偶极子处产生的电场

5

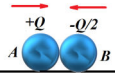
【例56】 在一个绝缘的水平光滑平面上, 放置两个带电的坚硬金属球 A 和 B , 两球的质量和半径均相等, 分别为 m 和 a 。 A 球上带电量为正 Q , B 球带电量为 $-Q/2$ 。 初始时两球相距很远, 自静止开始释放, 两球, 因相互吸引, 沿同一直线运动而致碰撞。 试问两球最后的速度为若干? 两球总共损失的能量为多少? (不考虑感应电荷影响!)



【解】(1) 两球相距很远时，相互作用能为零，静电能=自能，为： U_1, U_2 是孤立带电球在自身的电势

$$E_1 = \frac{1}{2} q_1 U_1 + \frac{1}{2} q_2 U_2 = \frac{1}{2} Q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{1}{2} \left(-\frac{Q}{2} \right) \left(-\frac{Q/2}{4\pi\epsilon_0 a} \right) = \frac{5Q^2}{32\pi\epsilon_0 a}$$

(2) 两球相互接触，但电荷还没发生中和时



$$E_2 = \frac{1}{2} q_1 U_1 + \frac{1}{2} q_2 U_2 + E_{\text{相互}} + 2E_{\text{动}} = \frac{5Q^2}{32\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q(-Q/2)}{4\pi\epsilon_0 (2a)} + 2\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

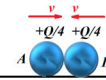
保守体系，总能量守恒

$$E_1 = E_2$$

$$\frac{Q(Q/2)}{4\pi\epsilon_0 (2a)} = 2\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 ma}}$$

(3) 当两球接触并发生电荷中和，两球带电量为+Q/4



$$U_1 = U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q/4}{a}$$

$$q_1 = q_2 = Q/4 \quad \text{互能} \quad \text{动能}$$

$$E_3 = \frac{1}{2} q_1 U_1 + \frac{1}{2} q_2 U_2 + E_{\text{相互}} + 2E_{\text{动}}$$

$$= 2 \times \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{(Q/4)^2}{a} + (Q/4) \frac{(Q/4)}{4\pi\epsilon_0 (2a)} + 2\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{3Q^2}{128\pi\epsilon_0 a} + 2\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

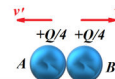
电场的能量损失转化为热能

$$\Delta E = E_2 - E_3 = \frac{3Q^2}{32\pi\epsilon_0 a} - \frac{3Q^2}{128\pi\epsilon_0 a} = \frac{3Q^2}{32\pi\epsilon_0 a} = \frac{9Q^2}{128\pi\epsilon_0 a}$$

(4) 两球碰撞后分离，完全弹性碰撞。

$$|v| = |v'|$$

$$q_1 = q_2 = +Q/4$$



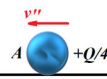
$$E_4 = \frac{1}{2} q_1 U_1 + \frac{1}{2} q_2 U_2 + E_{\text{相互}} + 2E_{\text{动}}$$

$$= 2 \times \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{(Q/4)^2}{a} + (Q/4) \frac{(Q/4)}{4\pi\epsilon_0 (2a)} + 2\left(\frac{1}{2}mv'^2\right)$$

$$2\left(\frac{1}{2}mv'^2\right) = \frac{Q(Q/2)}{4\pi\epsilon_0 (2a)}$$

$$= \frac{Q^2}{64\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q^2}{128\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 a} = \frac{11Q^2}{128\pi\epsilon_0 a}$$

(5) 当两球相距很远时，相互作用能为零



$$E_5 = \frac{1}{2} q_1 U_1 + \frac{1}{2} q_2 U_2 + E_{\text{相互}} + 2E_{\text{动}} = 2 \times \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{(Q/4)^2}{a} + 2\left(\frac{1}{2}mv''^2\right)$$

$$\text{能量守恒} \quad E_4 = E_5$$

$$\frac{11Q^2}{128\pi\epsilon_0 a} = \frac{1}{64\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a} + 2\left(\frac{1}{2}mv''^2\right)$$

$$v'' = \sqrt{\frac{9Q^2}{128\pi\epsilon_0 ma}}$$

(6) 损失的总能量为

$$\Delta E = E_1 - E_5 = \frac{9Q^2}{128\pi\epsilon_0 a}$$

静电能贮存在哪里？

- 前面导出的静电能公式都与电荷 q (ρ 、 σ) 相联系。那么静电能贮存在电荷上吗？
- “超距作用”认为：电相互作用不需要媒介，静电能贮存在电荷上。
- “近距作用”认为：电相互作用通过电场传递，静电能贮存在电场中，而不是在电荷上。
- 电磁波（电磁场在空间的传播）传递能量被实验证实后，近距作用的观点被广泛采纳。

§ 2.4.4 电场的能量

一、静电能密度

1. 从平行板电容器推导静电能密度

$$W_e = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

$$Q = \sigma_e S = DS, \quad U = Ed$$

$$W_e = \frac{1}{2} DSEd = \frac{1}{2} DEV$$

式中 $V=Sa$ 为两极板间的体积，即电场空间的体积

电场能量密度：单位体积内的静电能

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{1}{2} DE$$

上式写成矢量形式:

$$\omega_e = \frac{W_e}{V} = \frac{1}{2} \bar{D} \cdot \bar{E} \quad \text{该式对各向同性、各向异性的、无损耗介质都适用}$$

即电场的能量是存储于有电场的空间中。

虽然该式是从平行板电容器中推出, 但它是**普遍适用**的。当空间电场不均匀时, 总静电能为:

$$W_e = \iiint_V \omega_e dV = \frac{1}{2} \iiint_V \bar{D} \cdot \bar{E} dV \quad \text{积分体积 } V \text{ 遍及电场分布的全部空间}$$

这样定义的静电能密度和静电能**计入了介质的极化能, 对真空情况和有介质情况都适用。**

13

2. 电场能量密度公式的一般推导

电介质中的静电能

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \rho_0(\bar{r}) U(\bar{r}) dV = \frac{1}{2} \iiint_V \rho_0(\bar{r}) U(\bar{r}) dV \quad V \text{ 外 } \rho_0 = 0$$

$$\rho_0 = \nabla \cdot \bar{D}$$

$$= \frac{1}{2} \iiint_V \nabla \cdot \bar{D} U(\bar{r}) dV \quad \nabla \cdot (U \bar{D}) = U \nabla \cdot \bar{D} + \bar{D} \cdot \nabla U$$

$$= \frac{1}{2} \iiint_V \nabla \cdot (U \bar{D}) dV - \frac{1}{2} \iiint_V \bar{D} \cdot \nabla U dV \quad E = -\nabla U$$

$$= \frac{1}{2} \oint_{S \rightarrow \infty} U \bar{D} \cdot d\bar{S} + \frac{1}{2} \iiint_V \bar{D} \cdot \bar{E} dV$$

0 (证明见下页)

14

$$\left. \begin{array}{l} U \propto \frac{1}{r} \\ D \propto \frac{1}{r^2} \\ S \propto r^2 \end{array} \right\} \quad \text{当 } r \rightarrow \infty, S \rightarrow \infty \text{ 的边界上}$$

$$\bar{D}|_{S \rightarrow \infty} = 0, U|_{S \rightarrow \infty} = 0$$

$$\oint_{S \rightarrow \infty} \bar{D} U \cdot d\bar{S} \propto \frac{1}{r} \rightarrow 0$$

$$\text{所以 } W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \bar{D} \cdot \bar{E} dV \quad \text{即} \quad \omega_e = \frac{1}{2} \bar{D} \cdot \bar{E}$$

该式具有非常简洁的魅力! 且比用电荷表示的公式更加普遍!

$$W_e = \iiint_V \omega_e dV$$

15

静电能

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \bar{D} \cdot \bar{E} dV$$

在静电学范围内两者等效

- ① 在**静电场**中, 因为电荷与电场总是相伴而生, 同时存在, 无法分辨能量是与电场相联系, 或是与电荷相联系; **两个公式都可用。**
- ② 在**随时间变化的电场** $E(t)$ 中, **电场可以脱离电荷而存在!** 此时, 用**前一个公式**。

16

二、宏观静电能与极化能密度

$$\text{因为 } \omega_e = \frac{1}{2} \bar{D} \cdot \bar{E} \quad \text{又} \quad \bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$$

$$\text{所以 } \omega_e = \frac{1}{2} (\epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}) \cdot \bar{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \bar{P} \cdot \bar{E} = \omega_{e0} + \omega_{\text{极}}$$

静电能密度 ω_e = 宏观静电能密度 ω_{e0} + 极化能密度 $\omega_{\text{极}}$

$$\text{即 } W_{e0} = \iiint_V \omega_{e0} dV = \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon_0 E^2 dV \quad \text{与前面计算宏观静电能密度和极化能密度的公式等效}$$

$$W_{\text{极}} = \iiint_V \omega_{\text{极}} dV = \frac{1}{2} \iiint_V \bar{P} \cdot \bar{E} dV$$

17

【例57】从电场的能量公式出发, 重新计算**孤立带电导体球** (电量为 q , 半径为 R) 的静电能。

【解】由高斯定理可得导体球的电场强度:

$$E = 0, \quad (r < R)$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (r \geq R)$$

$$\omega_e = \frac{1}{2} \bar{D} \cdot \bar{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4}, \quad (r \geq R)$$

$$W_e = \iiint_V \omega_e dV = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

$$W_e = \frac{1}{2} qU = \frac{1}{2C} q^2 = \frac{q^2}{2 \times 4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \quad \text{两者一致}$$

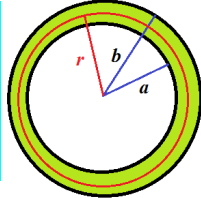
18

【例58】电荷量 Q 均匀分布在一球壳体内，壳的内外半径分别为 a 和 b ，试求这个系统产生的电场的能量。

【解】由高斯定理可求得三个区域的电场强度

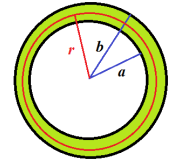
$$\begin{aligned}\bar{E}_1 &= 0 & (r < a) \\ \bar{E}_2 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(b^3 - a^3)} \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right) \bar{e}_r & (a < r < b) \\ \bar{E}_3 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \bar{e}_r & (r > b)\end{aligned}$$

$$\bar{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \bar{E} = \epsilon_0 \bar{E} \quad \epsilon_r = 1$$



19

$$\begin{aligned}W_e &= \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_V E^2 dV \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^b E_2^2 4\pi r^2 dr + \frac{\epsilon_0}{2} \int_b^\infty E_3^2 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{3(3a^3 + 6a^2b + 4ab^2 + 2b^3)Q^2}{40\pi\epsilon_0(a^2 + ab + b^2)^2}\end{aligned}$$



当 $a=b$ 时，带电导体球壳 $W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 b}$

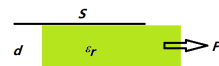
当 $a=0$ 时，均匀带电球体 $W = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 b}$

带电导体球壳能量 < 均匀带电球体能量

20

【例59】平行板电容器极板面积为 S ，极板间距为 d ，其间充满相对介电常数为 ϵ_r 的介质。在下列两种情况下，介质从电容器极板间完全抽出，外力需做多少功。(1) 电容器的电压 U 不变；(2) 电容器的电量 Q 不变。

【解】(1) 电容器的电压 U 不变， C 变化，则 Q 变化，电源与电容器相连。外力做功，电源也做功，两者之和等于电容器储能的增加。



$$\Delta W = A_F + A_{\text{电源}}$$

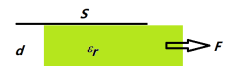
$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}, C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

$$\Delta W = \frac{1}{2} C_2 U^2 - \frac{1}{2} C_1 U^2 \quad A_{\text{电源}} = Q_2 U - Q_1 U = (C_2 - C_1) U^2$$

$$A_F = \Delta W - A_{\text{电源}} = -\frac{1}{2} (C_2 - C_1) U^2 = \frac{\epsilon_r - 1}{2d} \epsilon_0 S U^2$$

21

(2) 电容器的电量 Q 不变，则极板不需要连接电源，电源不做功，外力做功等于电容器静电能的增加



$$\Delta W = A_F'$$

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}, C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

$$A_F' = \Delta W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_2} - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_1} = \frac{1}{2} Q^2 \left(\frac{d}{\epsilon_0 S} - \frac{d}{\epsilon_0 \epsilon_r S} \right) = \frac{1}{2} Q^2 \frac{d(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_0 \epsilon_r S}$$

$$A_F' = \frac{1}{2} Q^2 \frac{d(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_0 \epsilon_r S} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r (\epsilon_r - 1)}{2d} S U^2$$

$$Q = C_1 U$$

$$A_F \neq A_F'$$

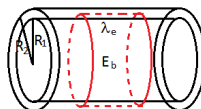
两种情况物理过程不同，外力做功也不同

22

【例60】由两共轴金属圆柱构成一电容器，中间填充相对介电常数为 ϵ_r 的介质，介质击穿场强为 E_b ，内外导体圆柱半径为 R_1 、 R_2 。圆柱外半径 R_2 固定，在介质不致击穿的前提下，应如何选择 R_1 使：(1) 两导体间的电势差最大，最大电势差为多少；(2) 电容器的储能最大，最大储能是多少？

【解】设圆柱单位长度带电量为 λ_e ，由介质下的高斯定理求

$$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = Q_0 \quad \bar{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \bar{E}$$



$$\begin{aligned}\bar{E}_1 &= 0 & (r < R_1) \\ \bar{E}_2 &= \frac{\lambda_e}{2\pi\epsilon r} \bar{e}_r & (R_1 < r < R_2) \\ \bar{E}_3 &= 0 & (r > R_2)\end{aligned}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \bar{E} \cdot d\bar{r} = \frac{\lambda_e}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$E_{\text{max}} = E_{R1} = \frac{\lambda_e}{2\pi\epsilon R_1} \leq E_b \Rightarrow \frac{\lambda_e}{2\pi\epsilon} \leq R_1 E_b \Rightarrow U \leq R_1 E_b \ln \frac{R_2}{R_1}$$

(1) 选择 R_1 使得两导体间的电势差最大

$$U \leq R_1 E_b \ln \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow U_{\text{max}} = R_1 E_b \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{\partial U_{\text{max}}}{\partial R_1} = E_b \left(\ln \frac{R_2}{R_1} - 1 \right) = 0 \Rightarrow R_1 = R_2 / e, U_{\text{max}} = E_b R_2 / e$$

(2) 选择 R_1 使得电容器的储能最大

$$w_e = \frac{W_e}{l} = \iiint_V \left(\frac{1}{2} \bar{D} \cdot \bar{E} \right) dV = \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 \right) 2\pi r dr = \frac{\lambda_e^2}{4\pi\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{\lambda_e}{2\pi\epsilon} \leq R_1 E_b \Rightarrow w_e \leq \pi\epsilon E_b^2 R_1^2 \ln \frac{R_2}{R_1} \quad w_{e\text{max}} = \pi\epsilon E_b^2 R_1^2 \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{\partial w_{e\text{max}}}{\partial R_1} = 0 \Rightarrow R_1 = \frac{R_2}{\sqrt{e}}, w_{e\text{max}} = \frac{\pi\epsilon E_b^2 R_2^2}{2e}$$

三、非线性介质及电滞损耗

以平板电容器填满均匀介质的情况为例，充电过程中，电源所做的功为：

$$U = El$$

$$q = \sigma_{e0} S = D_n S$$

$$dq = d(D_n S) = S dD_n$$

l 、 S 为极板间距和面积

$$\therefore dA' = Udq = ElSdD_n = (\vec{E} \cdot d\vec{D})V$$

25

对单位体积的电介质，电源所作的功为：

$$da' = \frac{dA'}{V} = \vec{E} \cdot d\vec{D}$$

$$\therefore \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\therefore da' = d\left(\frac{\epsilon_0}{2} E^2\right) + \boxed{\vec{E} \cdot d\vec{P}}$$

宏观静电能密度的变化

电场对单位体积电介质所做的极化元功

26

1. 线性无损耗介质

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad P_i = \sum_{j=1}^3 \chi_{ij} \epsilon_0 E_j$$

对线性无损耗介质，有

$$\chi_{ij} = \chi_{ji}$$

$$\therefore \vec{E} \cdot d\vec{P} = \sum_{i=1}^3 E_i dP_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \chi_{ij} \epsilon_0 E_i dE_j$$

$$= \sum_{j=1}^3 \left(dE_j \sum_{i=1}^3 \chi_{ji} \epsilon_0 E_i \right) = \sum_{j=1}^3 P_j dE_j = \vec{P} \cdot d\vec{E}$$

即

$$d(\vec{P} \cdot \vec{E}) = \vec{E} \cdot d\vec{P} + \vec{P} \cdot d\vec{E} = 2\vec{E} \cdot d\vec{P}$$

$$\therefore \vec{E} \cdot d\vec{P} = \frac{1}{2} d(\vec{P} \cdot \vec{E})$$

$$W_{\text{电}} = \frac{1}{2} \iiint \vec{P} \cdot \vec{E} dV$$

极化功全部转化为介质的极化能

27

$$\vec{E} \cdot d\vec{P} = d\left(\frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{E}\right)$$

$$\therefore da' = d\left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2\right) + d\left(\frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{E}\right)$$

电源对电容做功，一部分转化为宏观静电能，一部分转化为极化功。

$$\text{静电能密度} \quad \omega_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{E}$$

$$\therefore da' = d\omega_e$$

对线性无损耗介质，电源做功全部转化为电容的静电能

28

2. 各向异性介质

$$P_i = \sum_{j=1}^3 \epsilon_0 \chi_{ij} E_j, \quad i=1,2,3$$

$$D = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad D_i = \sum_{j=1}^3 \epsilon_0 \epsilon_{ij} E_j, \quad i=1,2,3$$

$$\epsilon_{ij} = \begin{cases} 1 + \chi_{ij}, & i=1,2,3 \\ \chi_{ij}, & i \neq j \end{cases} \quad \text{各向异性介质}$$

$$\omega_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 D_i E_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_0 \epsilon_{ij} E_i E_j$$

29

3. 非线性损耗介质

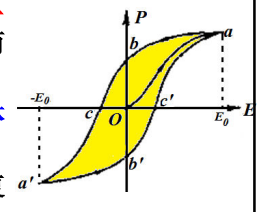
极化功 $\left\{ \begin{array}{l} \text{极化能} \\ \text{热量} \end{array} \right.$

P 和 E 的关系不仅是非线性，而且是非单值的。

E 所对应的 P 值大小依赖于具体的极化过程，不是固定大小。

当电场强度在 $-E_0$ 和 E_0 之间反复变化时，铁电体的极化状态将沿图所示的电滞回线周期变化。

上述极化过程是不可逆过程。



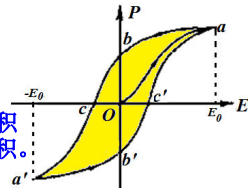
铁电体的电滞回线

30

- 沿电滞回路循环一周，电源对单位体积铁电体所做的功为：

$$a' = \oint da' = \oint EdP$$

- 上式右边沿电滞回路的闭路积分等于电滞回线所围成的面积。



- 这部分功既不改变电场 E ，又不改变介质的极化状态 P ，而是转化为热能，使介质发热。
- 这部分因电滞现象而消耗的能量，称为电滞损耗。
- 非线性介质存在电滞损耗。
- 线性介质没有电滞损耗。

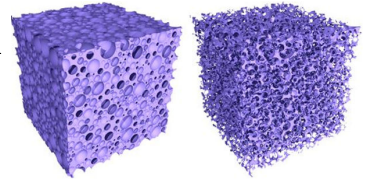
31

§ 2.3.4 低介电常数和低介电常数材料

信息工业用 K 表示相对介电常数 ϵ_r

传统半导体工业使用 SiO_2 ($K=4$) 作为介电材料

- $K > 4$, High-k 材料
- $K = 4$, SiO_2
- $K < 4$, Low-k 材料



32

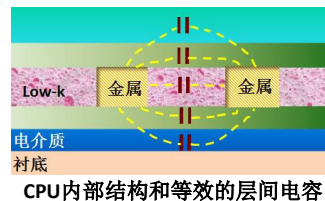
1. 低介电常数(Low-K) 材料

$$R = \rho L / S \quad C = \epsilon_r C_0$$

- 随着信息工业和计算机工业的飞速发展，集成电路的特征尺寸将降低到 $0.1\mu\text{m}$ 以下时，这时器件内部金属连线的电阻和绝缘介质层的电容所造成的延时、串扰、功耗成为限制器件性能的主要因素。
- 目前集成电路的金属连线主要是 Al ，介质层材料主要是 SiO_2 。
- 用电阻率 ρ 更小的 Cu 取代 Al ，用低介电常数材料 (Low-k 材料) 取代传统半导体中的 SiO_2 是一个重要的发展方向。

33

- Low-K 材料 代替 SiO_2
- $K = \epsilon_r$
- 降低集成电路的漏电电流
- 降低导线间的电容
- 降低集成电路发热



$$C = \epsilon_r C_0 = K C_0$$

使用 Low-K 材料来减少层间电容

CPU 内部结构和等效的层间电容

根据 K 值差异，层间介质基本分为三类：

$$\begin{aligned} K &> 3.0 \\ K &= 2.5 \sim 3.0 \\ K &< 2.2 \end{aligned}$$

34

不同的集成电路技术节点对 K 值的要求

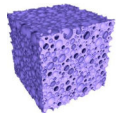
线宽 nm	材料	介电常数 $K(\epsilon_r)$
250	SiO_2	3.9
130-180	氟化 SiO_2 (FSG)	3.6
90	CVD low-K	2.9~2.7
65	CVD low-K	2.9~2.5
45	介孔超低 low-K	<2.2

尺寸越小，要求 $K(\epsilon_r)$ 越小

35

Low-K 材料——多孔介质

$$\bar{P} = \frac{\sum \bar{p}_{mi}}{\Delta V} = n \bar{p}_m \quad \bar{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \bar{E}$$



- 电介质分子极化 (p_{mi}) 的降低是有限的，单位体积中极化分子数目 n 的减少，可大大降低介电常数 ϵ_r 。
- 因此减少薄膜密度对降低极化率的效应比减少分子极化的影响更强。
- 在薄膜中引入空隙减小薄膜密度的重要途径；
- 介孔薄膜材料通常被看作是双相材料，一相是由基质构成的骨架，另一相是空气间隙 ($\epsilon_r = K = 1$)。这样形成的多孔介质，其相对极化率直接决定于孔隙率。

36

设 K_1 和 K_2 分别为基底和空隙材料的相对介电常数, η 为介孔率, 则多孔材料薄膜的相对介电常数 K_r 由下式决定,

$$\frac{K_r - 1}{K_r + 2} = \eta \frac{K_1 - 1}{K_1 + 2} + (1 - \eta) \frac{K_2 - 1}{K_2 + 2}$$

如果空隙为空气, 则 $K_2=1$, 第二项为零, 则

$$\frac{K_r - 1}{K_r + 2} = \eta \frac{K_1 - 1}{K_1 + 2}$$

如果基底为二氧化硅 $K_1=4$, 为达到相对介电常数为 $K_r=2$, 则孔隙率 η 需达到50%。

37

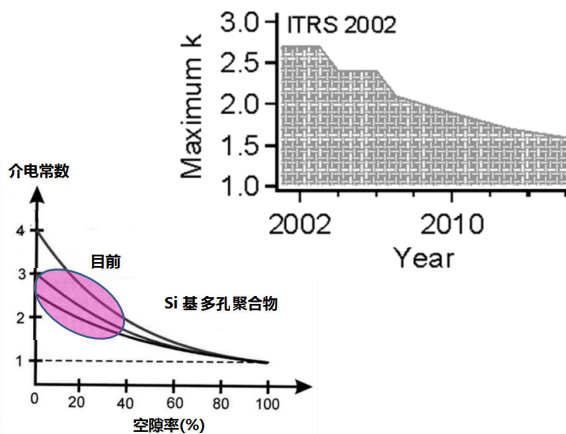
多孔介质分类

- (1) 根据 K 值大小分类
 - Low-K: $2 < K < 4$
 - Ultra Low-K: $1 < K < 2$
- (2) 根据孔径大小分类
 - 微孔 $r < 2 \text{ nm}$
 - 介孔 $r = 2 \sim 50 \text{ nm}$
- (3) 根据基底材料分类
 - Si基多孔介质
 - C基多孔介质

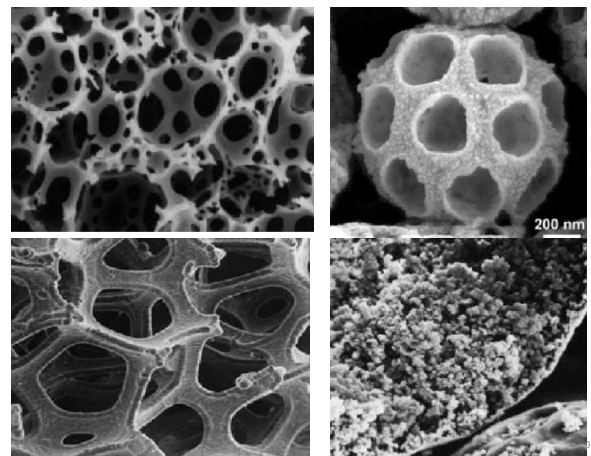
多孔材料的制备

主要采用**甩胶技术**和**化学气相沉积(CVD)**方法, 通过汽化或溶解后处理工艺形成空隙。

38



39



(2) 高介电常数(High-K, $K > 4$) 材料

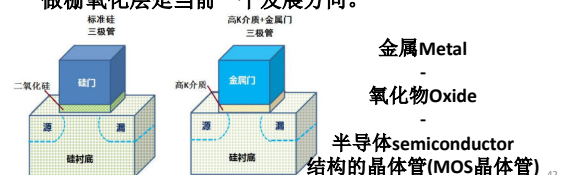
高介电常数介质材料: 相对介电常数(ϵ_r 或 K)大于 SiO_2 的介电材料的泛称。

常用的高 K 材料因物理特性、化学组成不同大致可分为三类: **铁电材料、金属氧化物、氮化物**。

高K材料	制备方法	K
SiO_2	氧化法	3.9
Si_3N_4	凝胶气相沉积法	6~7
ZnO	溶胶-凝胶法或射频溅射法	8~12
Ta_2O_5	金属有机化学气相沉积法	25~50
HfO_2	金属有机物分解法	21
ZrO_2	真空蒸发法	25
BST	金属有机化学气相沉积法或分子束外延法	180
PZT(铁电材料)	金属有机化学气相沉积法或分子束外延法	400~800

41

- ✦ **金属-氧化物-半导体结构的晶体管**简称**MOS晶体管**, 其栅电极常是多晶硅Si, 在多晶硅栅和掺杂硅衬底间插入薄薄一层氧化物绝缘介质如 SiO_2 , 这样形成的**典型的平板电容器**结构是MOS器件的工作基础。
- ✦ 栅氧化层的**厚度 d 越薄, 电容 C 越大**, 电荷数量变化对栅压的变化越敏感。
- ✦ 但栅氧化层越薄, 氧化层中的**场强 E 越大**($E=U/d$), **栅氧化层越容易被击穿**。
- ✦ 选高介电常数介质材料如 Si_3N_4 ($k \sim 7$)代替 SiO_2 ($k=4$)做栅氧化层是当前一个发展方向。



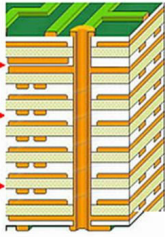
42



嵌入电容：介质厚度12μm

芯板

半固化片



为了减少元件所占的空间，电路设计中使用**嵌入**式电容来代替表面安装电容。

由于嵌入式电容面积有限，在大功率电容器中必须**填充高介电常数和低损耗的材料**。 $C = \epsilon_r C_0$

43

§ 2.3.5 铁电体介质和压电效应

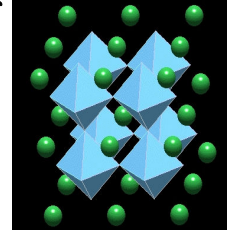
有一些电介质，如钛酸钡(BaTiO_3)、钛酸锶(SrTiO_3)、酒石酸钾钠($\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$)等，它的极化规律非常复杂，**存在滞后现象**，这种介质叫**铁电体介质**。

铁电体的极化性质与温度有独特的关系。**任何铁电材料都存在一个转变温度，称居里温度或居里点 T_c** 。如钛酸钡的居里温度为120°C。

温度低于居里点时，材料呈**铁电性**；

温度高于居里点时，铁电体和普通电介质性质相同。

BaTiO_3



44

1. 铁电体的极化规律

居里温度 T_c 以下，铁电体材料中出现自发极化，此时晶体中形成**电畴**。

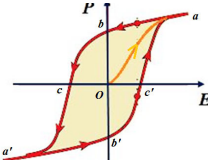
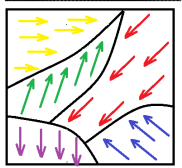
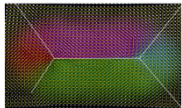
自发极化可以随外电场反向而反向；

在交变电场作用下，显示**电滞回线**。

$$\epsilon_r(E) = 1 + \chi_e^{(1)} \equiv 1 + \frac{dP(E)}{dE}$$

$$\chi_e^{(2)} \equiv \frac{d^2P(E)}{dE^2}$$

铁电体的极化过程和电滞回线



45

2. 压电体和压电效应

1880年法国科学家居里兄弟(弟弟: 皮埃尔·居里, 哥哥: 雅克斯·居里)发现**压电效应**。

皮埃尔·居里和夫人于1898年一年之内发现了钋(Po)和镭(Ra)两种新元素，获得了**1903年度诺贝尔物理学奖**。

居里夫人**1911年**又因放射化学方面的成就获得**诺贝尔化学奖**。

玛丽亚·斯克洛多夫斯卡-居里
(1867—1934)



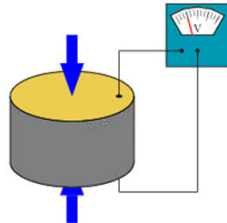
46

1894年，**福克特 (W. Voigt)** 更严谨地给出**晶体结构与压电性的关系**，他发现32种晶类(class)具有压电效应。

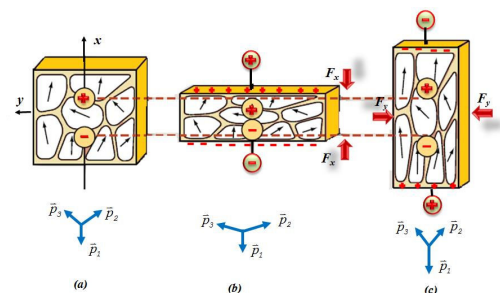
某些各向异性的晶体在机械力作用下发生**形变**时，晶体的表面上会出现**极化电荷**。

压电效应：没有外电场存在时，仅由形变(压力引起的)而导致的极化现象，称为压电效应。

压电效应：压力→极化电荷→电场



47



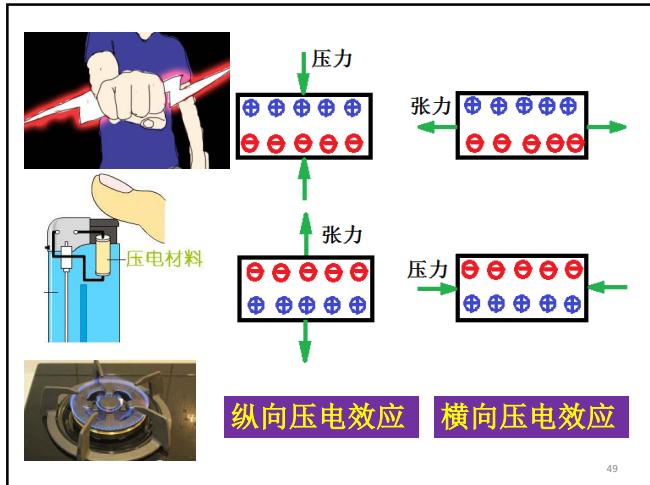
$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$$

无外力时(a)，晶体各电畴的总电偶极矩之和为0，表面无极化电荷

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \neq 0$$

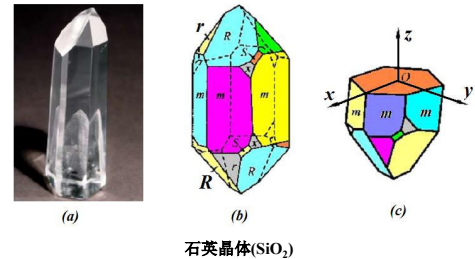
有外力时(b) (c)，总电偶极矩之和不为0，表面出现极化电荷

48



49

- 铁电体同时也是压电体，具有压电效应；
- 有压电效应的介质(压电体)不一定是铁电体，如石英晶体(SiO_2)是压电体，但不是铁电体。
- 晶体的压电效应与晶体内部原子结构有关。



50

- 压电效应还有逆效应—电致伸缩，即当在晶体两面加上电场时，晶体会发生机械形变，如伸长或缩短。
- 逆压电效应也有广泛的应用，例如，石英和其他压电晶体薄片，在交变电场的作用下，晶体机械形变引起的振动有极稳定的频率，可用来制造钟表、精密电子仪表、受话器的耳机和激发超声波(频率大于 $2 \times 10^4 \text{Hz}$ 的声波)等。

电致伸缩：电场→压力→机械形变

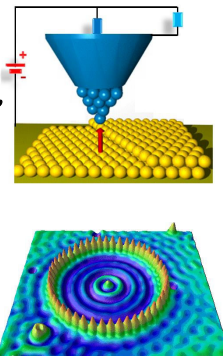
51

- 获1986年诺贝尔奖的扫描隧道显微镜STM中，探头移动步长100-1000Å，是由电致伸缩完成的；

- 外加电场作用下，电子从针尖出发，穿过样品间的绝缘层，达到样品表面，形成隧道电流。

- 由于隧道电流的强度非常敏感于针尖和样品间的距离，所以可以进行极高灵敏度的检测。

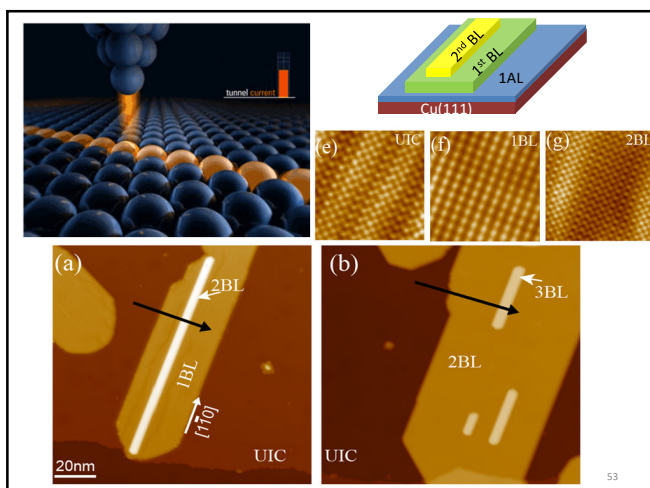
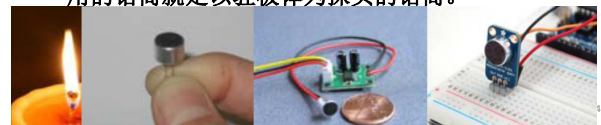
- STM可直接观察到原子在物质表面的排列状态，使在纳米尺度上研究物质表面的原子和分子结构以及电子行为有关的物理化学性质成为可能。



52

3. 永电体或驻极体电介质

- 1922年日本物理学家江口元太郎发现永电体。
- 将石蜡熔解成液态，加电场使其极化，并让它凝固。当撤去外场后，石蜡将保留极化特性，固态石蜡表面保持有极化电荷。类似这样的固体称为永电体或驻极体。
- 驻极体具有长期保持极化电荷的功能，它可以产生很强的电场。
- 驻极体薄膜制成的话筒已商品化，如一般录音机中用的话筒就是以驻极体为探头的话筒。



53

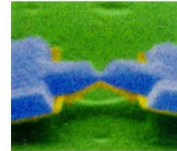
§ 2-5 介观体系的电学特性

- 介观系统：指尺度介于微观和宏观尺度之间的系统，可看成是尺度缩小的宏观物体。
- 物理意义上讲，尺度与相位相干长度接近的电子系统就是介观的。
- 介观系统的标志特征：其物理可观测性质中明确地呈现出量子相位相干的效应。
- 介观物理：研究这类尺度缩小的宏观物体中量子相干性引起的物理问题。
- 在介观尺度上，一些电学特性与宏观材料的电学特性有很大的不同。

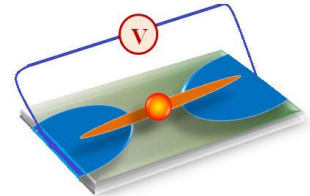
55

§ 2.5.1 量子化电导(量子点接触)

量子点接触：两个大的导电区域之间，由于突然收缩而变成狭窄通道，在收缩区域的宽度小到电子波长(nm~μm量级)的接触，此时会产生一些特殊的导电效应。



(a)



(b)

56

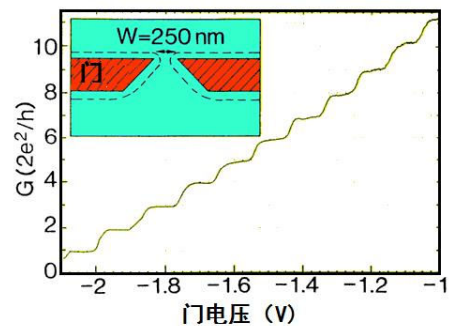
- 实验室中人们利用力学的方法，能够以可控的方式制备出单个原子的接触结。
- 若施加电压在量子点接触，诱导电流的流动，这种规模的电流由欧姆定律 $I=GU$ 给出，这里 G 是量子点接触处的电导。
- 1988年荷兰和英国研究者独立发现：在低的温度和电压下，二维电子气上实验测出的点接触的电导是以 $2e^2/h$ 为单位量子化的；
- 表明对量子点接触，电导是一个直接与量子力学相联系的概念。

$$G = G_0 N$$

$$N = 1, 2, 3, \dots$$

$$G_0 = \frac{2e^2}{h} = 7.75 \times 10^{-5} \Omega^{-1}$$

57



$$I = GU$$

$$G = G_0 N$$

$$G_0 = \frac{2e^2}{h}$$

$$N = 1, 2, 3, \dots$$

量子点接触系统造成了电导的量子化，这正是量子力学的典型特征！

58

§ 2.5.2 库仑阻塞和单电子隧穿

- 库仑阻塞概念最早是1951年Goeter等人为解释金属电阻 R 随温度 T 下降所表现出来的反常增加行为而提出的；
- 在提出库仑阻塞概念的36年以后，即直到1987年，才在由两个微型金属隧穿结串联组成的系统上，直接观察到电导的库仑阻塞振荡。
- 库仑阻塞效应是20世纪80年代所发现的极其重要的物理现象之一。

59

- 当体系(金属微粒)的尺度进入到纳米量级时，充电、放电过程是不连续的。
- 单个电子从外面隧穿进入金属微粒时(也称为孤立的库仑岛)，它给库仑岛附加的充电能(又称为库仑阻塞能)为

$$W = e^2 / 2C$$

可见体系越小，即 C 越小， W 越大。

- 库仑阻塞能：是前一个电子对后一个电子的库仑排斥能。

60

- 此时一旦某个电子隧穿进入了金属微粒，由于库仑阻塞能较大，它将阻止随后的第二个电子再进入同一金属微粒。
- 即只有等待第一个电子离开库仑岛以后，岛外的另一个电子才有可能再进入。
- 因此电子不能集体传输，而必须一个一个的传输。
- 通常把小体系的这种单电子输运行为称为库仑阻塞效应。

61

电子隧穿前，电容器的能量为

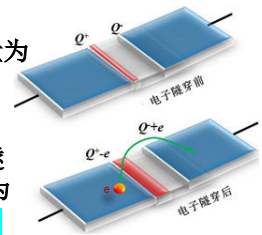
$$W_1 = Q^2 / 2C$$

若 $Q > 0$ ，一个电子从负极隧穿到正极，电容器的能量为

$$W_2 = (Q - e)^2 / 2C$$

隧穿前后的能量改变为

$$\Delta W = W_1 - W_2 = \frac{e \left(Q - \frac{e}{2} \right)}{C}$$



62

隧穿后体系能量不可能增加，即 $W_2 < W_1$, $\Delta W > 0$, 解之得：

$$Q > \frac{e}{2}$$

电容器隧穿前的电压 U ，则

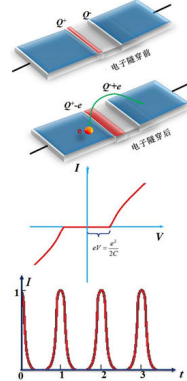
$$U = \frac{Q}{C}$$

$$Q = C|U| > e/2$$

即

$$U > \frac{e}{2C} \quad \text{or} \quad U < -\frac{e}{2C}$$

这就是电子隧穿发生的条件



63

$Q > 0$ 时，电子隧穿发生的条件：

$$Q > \frac{e}{2} \quad \text{or} \quad U > \frac{e}{2C}$$

$Q < 0$ 时，电子隧穿发生的条件：

$$Q < -\frac{e}{2} \quad \text{or} \quad U < -\frac{e}{2C}$$

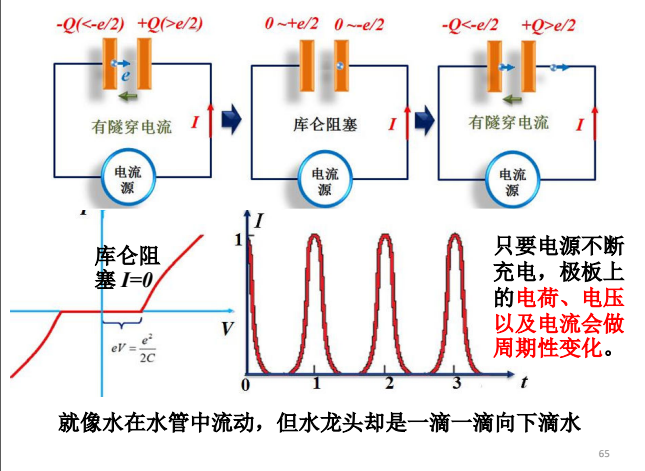
而当

$$-\frac{e}{2} < Q < \frac{e}{2} \quad \text{or} \quad -\frac{e}{2C} < U < \frac{e}{2C}$$

电子不能发生隧穿(即发生了库仑阻塞)!

通常在低温下的量子点中可观测到这种现象，但如果量子点的尺度小到 10nm ，即电容达到 10^{-15}F 时，单电子效应就可以在室温下观测到。

64



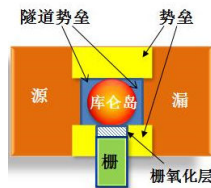
65

§ 2.5.3 单电子存储器

- 当器件的尺寸接近纳米尺度时，量子效应对器件工作的影响变得越来越重要，因此，可能需要采用新概念的晶体管结构。此结构中的一个典型例子是单电子晶体管 (SET)。
- 单电子晶体管是单电子存储器的最主要的组成部分。这样的结构使得存储的工作只需要控制很少的电子就可以完成。
- 单电子晶体管的特性一定程度上决定了基于它制备的存储器的性能，所以它的发展在很大程度上制约单电子存储器的发展。

66

单电子晶体管一般由五部分组成：



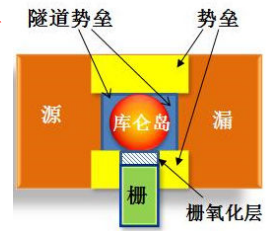
- (1) **库仑岛（或量子点）**：由三维被势垒包围的极微小金属或半导体颗粒构成，它在某一方向上分别通过两侧的隧道势垒与源、漏区相连接；
- (2) **隧道势垒**：它可由极薄的绝缘层构成，也可由构成库仑岛的窄禁带半导体材料与构成源、漏区的宽禁带半导体材料之间形成的异质结势垒构成，还可以由界面态或外加电压等引起的势场构成；

67

- (3) **势垒区**：由较厚的绝缘层或宽禁带半导体材料构成；

- (4) **栅氧化层**：由几十纳米厚的氧化层或电介质层构成；

- (5) **源、漏、栅极**：由金属或掺杂半导体构成，与外部连接。



68

通过控制栅极的偏压，调节量子点中的静电能。量子点中的电荷 Q_g 和 Q_0 分别为：

$$Q_g = C_g (V_g - V_0)$$

$$Q_0 = C_0 V_0$$

栅极电容和隧穿结电容中储存的能量为：

$$W = \frac{Q_0^2}{2C_0} + \frac{Q_g^2}{2C_g}$$

目前制备单电子存储器的材料主要有三类：即金属材料、有机或生物材料和半导体材料

69

问题

1. High-K 和 Low-K 材料的发展
2. 非线性介质的极化规律和非线性光学
3. 铁电体及其应用
4. STM 的在表面物理中的应用

作业 2.34, 2.36 2.37, 2.38

Thank you!

70