中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

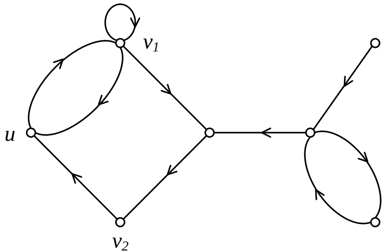
第 8 章 有向图

赵功名

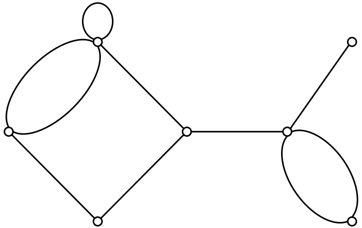
中国科学技术大学计算机科学与技术学院

目录

对于一个有向图 D，忽略每条有向边的方向，得到的无向图 G 称为 D 的**底图**；反之，对于任意一个无向图 G，给每条边指定一个方向，得到的有向图 D 称为 G 的**定向图**. 显然，有向图的底图唯一，但无向图的定向图不唯一. 如图所示，图 (b) 是有向图 (a) 的底图，图 (a) 是无向图 (b) 的一个定向图. 下面的定义是有向图特有的.



(a) 有向图 D



(b) D 的底图 G

定义 8.1 若 D 中存在有向边 (u, v)，则称 v 是 u 的**外邻顶点**，称 u 是 v 的**内邻顶点**. 对于顶点 $u \in V(D)$，分别用 $N_D^+(u)$ 和 $N_D^-(u)$ 表示 D 中 u 的所有外邻顶点和所有内邻顶点构成的集合，简称 u 的内邻集和外邻集，即

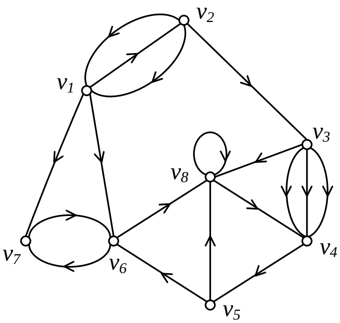
$$N_D^+(u) = \{v | e = (u, v) \in E(D)\}, \quad N_D^-(u) = \{v | e = (v, u) \in E(D)\}.$$

定义 8.2 设 D 是有向图，若存在从 u 到 v 的有向路径，则称 u **可达**v. 若 $\forall u, v \in V(D)$，u 可达 v 而且 v 可达 u 时，即 u 与 v 双向可达，则称 D 是**强连通的**；若 $\forall u, v \in V(D)$，u 可达 v 或 v 可达 u 时，则称 D 是**单向连通的**；若 D 的底图是连通的无向图，则称 D 是**弱连通的**.

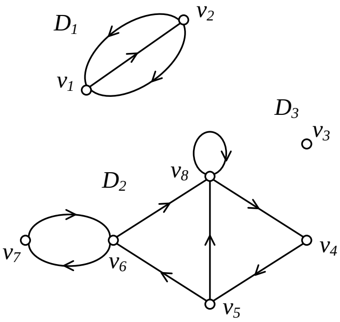
注 我们规定顶点自身可达自身，即 $\forall u \in V(D)$，u 可达 u.

与无向图的连通类似，双向可达在有向图 D 的顶点集 $V(D)$ 上也是一个等价关系. 根据双向可达关系可以确定 $V(D)$ 的一个划分 $(V_1, V_2, \cdots, V_\omega)$，由它们导出的有向子图 $D[V_1], D[V_2] \cdots, D[V_\omega]$，称为 D 的**强连通片**. 如果 D 只有一个强连通片，则它是强连通的.

图 (a) 所示的有向图不是强连通的，是单向连通的，也是弱连通的，它有如图 (b) 所示的三个强连通片.

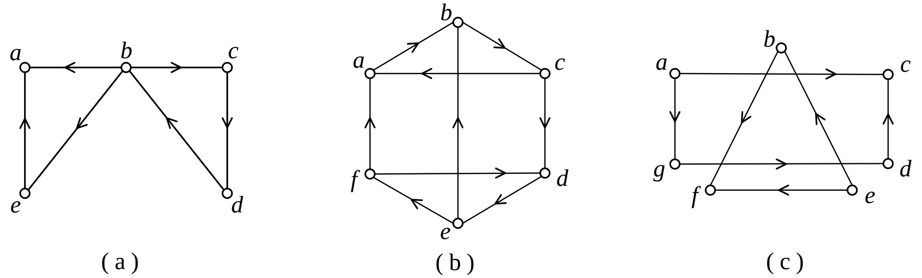


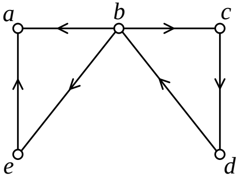
(a) 有向图 D



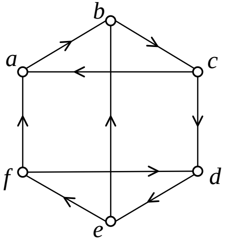
(b) D 的三个强连通片

例 判断图中的各有向图是否强连通，如果不是，再判断是否单向连通，是否弱连通。

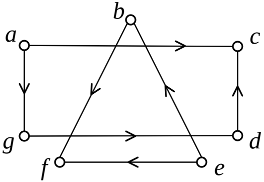




(a)



(b)



(c)

(a) 不是强连通的，a 不可达 b，是单向连通和弱连通的

(b) 是强连通的，存在有向生成回路 $abcdefa$（见下页定理 8.1）是单向连通和弱连通的

(c) 显然不连通

定理 8.1 D 是强连通有向图当且仅当 D 中存在有向生成回路，即存在含有 D 中所有顶点的有向回路.

证明 设 D 中存在有向生成回路 C，则 $\forall u, v \in V(D)$，都有 $u, v \in V(C)$. 于是在 C 上有 u、v 之间双向的有向路径 $P_1(u, v)$ 和 $P_2(v, u)$，所以 D 是强连通有向图.
反之，若 D 是强连通有向图，设 $V(D) = \{v_1, v_2, \cdots, v_\nu\}$，$D$ 中存在有向路径 $P(v_1, v_2), P(v_2, v_3), \cdots, P(v_{\nu-1}, v_\nu), P(v_\nu, v_1)$. 这 ν 条有向路径首尾相接形成一个有向生成回路. 证毕.

定理 8.2 连通无向图 G 可以定向成强连通有向图，当且仅当 G 中没有桥.

证明 若 G 是无桥连通图，由于树的每条边都是桥，所以 G 不是树. 因此 G 有圈 C_1.

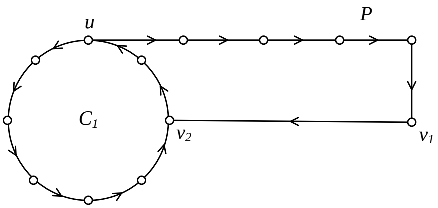
若 C_1 是 Hamilton 圈，则把 C_1 定向成有向圈，不在 C_1 上的边任意定向，由定理 8.1 可知，G 被定向成了强连通有向图.

若 C_1 不是 Hamilton 圈，由于 G 是连通图，所以存在顶点 $v_1 \notin V(C_1)$，$v_2 \in V(C_1)$，使得 v_1v_2 是 G 的一条边. 由于 G 中无桥，故 $G - v_1v_2$ 是连通图.

任给 $u \in V(C_1) - v_2$，$G - v_1v_2$ 中存在轨道 $P(u, v_1)$，使得边 $v_1v_2 \notin E(P(u, v_1))$.

将 C_1 定向成有向圈（例如图所示的逆时针方向）；再把边 v_1v_2 定向成以 v_1 为起点的有向边；把轨道 $P(u, v_1)$ 定向成起点为 u 的有向轨，则 C_1 与有向边 (v_1, v_2)、有向轨 $P(u, v_1)$ 并在一起成为一个有向回路 C_2. 对 C_2 类似推理可得有向回路序列 $C_1, C_2, \cdots, C_k$，使得最后得到的 C_k 含有 G 的所有顶点. 把不在 C_k 上的边任意定向，G 被定向成了包含有向生成回路 C_k 的有向图. 由定理 8.1 可知，G 被定向成了强连通有向图.

反之，若无向图 G 可定向成强连通有向图，但 G 中有桥 $e = uv$，则边 e 定向后两个顶点 u 和 v 只能单向可达，与强连通定义矛盾，故 G 中无桥. 证毕.



引理 8.1 若 D 单向连通，则 $\forall S \subseteq V(D)$，$S \neq \emptyset$，都存在顶点 $v \in S$，v 可达 S 中所有的顶点.

证明 通过对 $|S|$ 作归纳来证明引理成立. 若 $|S| = 1$，S 中仅有一个顶点，显然成立. 若 $|S| = 2$，设 $S = \{u, v\}$，由于 D 是单向连通的，所以 u 可达 v，或者 v 可达 u，引理成立.

假设对所有 k 元顶点子集，引理都成立. 现假设 $|S| = k + 1$. 任取 $u \in S$，$|S - \{u\}| = k$. 由归纳假设，存在 $v \in S - \{u\}$，使得 v 可达 $S - \{u\}$ 中所有的顶点. 因为 D 是单向连通的，所以 u 可达 v，或者 v 可达 u. 若 v 可达 u，则 v 可达 S 中所有的顶点；否则 u 可达 v，而 v 可达 $S - \{u\}$ 中所有的顶点，从而 u 可达 S 中所有的顶点. 证毕.

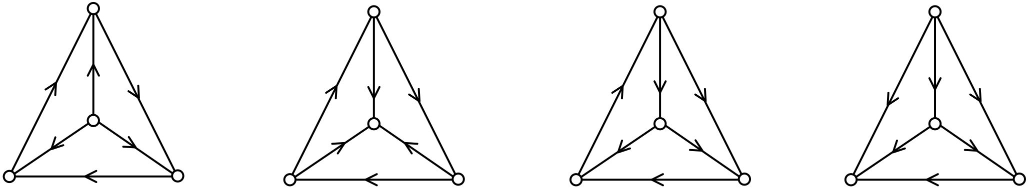
定理 8.3 D 是单向连通有向图，当且仅当 D 中存在有向生成路径.

证明 如果 D 中有包含所有顶点的有向路径 W，则 $\forall u, v \in V(D)$，由于 u 与 v 都在 W 上，沿着 W，u 可达 v，或者 v 可达 u. 于是 D 单向连通的.
若 D 是单向连通的，根据引理 8.1，取 $S_1 = V(D)$，存在 $v_1 \in S_1$，使得 v_1 可达 D 中任意顶点；再取 $S_2 = V(D) - \{v_1\}$，则有 $v_2 \in S_2$，使得 v_2 可达 S_2 中任意顶点；再取 $S_3 = V(D) - \{v_1, v_2\}$，则有 $v_3 \in S_3$，使得 v_3 可达 S_3 中任意顶点. 依此类推，可知 v_1 可达 v_2，v_2 可达 v_3，$\cdots$，$v_{\nu-1}$ 可达 v_ν，$V(D) = \{v_1, v_2, \cdots, v_\nu\}$. 于是找到了一条有向生成路径. 定理证毕.

例题 求证，对有向强连通图 D，若 D 的底图中有奇圈，则 D 中也含有向奇圈。

证明 反证, 假设 D 中没有奇圈. 设 D 的底图中的奇圈为 C, 将其沿任一方向定向为有向奇圈 C'. 对于 D 中任一和 C' 中方向不同的边 $e=(u,v)\in D$, 由于 D 是强联通图, 所以存在 v 到 u 的轨道 $P(v,u)$. 根据假设 D 中没有奇圈, $P(v,u)$ 的长度为奇数, 所以将 C' 中的边 vu 替换为 $P(v,u)$ 后回路的长度仍为奇数. 对 C' 中所有和 D 中反向的边进行替换, 可以得到奇数顶点的有向回路，而长度为奇数的回路中一定存在有向奇圈（偶数顶点的有向圈不可能构成奇数顶点的回路），故假设不成立，所以 D 中含有向奇圈.

完全图的定向图称为**竞赛图**. 具有四个顶点且不同构的竞赛图如图所示，其中每个竞赛图都可以看作是四个运动员在循环赛中比赛的结果，从 u 到 v 的有向边 (u, v) 表示 u 胜了 v. 例如，图中第一个竞赛图表示有一个运动员在三次比赛中都获胜，而另外三个运动员每人各胜一次.



定理 8.4（Roy，Gallai） 有向图 D 中含有长度为 $\chi(G)-1$ 的有向轨道，其中 G 为 D 的底图.

证明 设 $E' \subseteq E(D)$ 是使得 $D' = D - E'$ 不含有向圈的最小边集 (至少 E' 可以在 D 的每个有向圈上取一条边)，并设 D' 中最长有向轨道的长度为 k. 现在把颜色 $1, 2, \cdots, k+1$ 分配给 D' 的顶点：当 D' 中以 v 为起点的最长有向轨道的长度是 $i-1$ 时，给顶点 v 分配颜色 i. 用 V_i 表示颜色为 i 的顶点集合，下面证明 $(V_1, V_2, \cdots, V_{k+1})$ 是 G 的正常 $k+1$ 顶点着色. 首先证明 D' 中任何有向轨道的起点和终点都分配了不同的颜色. 设 $P(u,v)$ 是 D' 中一条从 u 到 v 的有向轨道，并假设 $v \in V_i$，则在 D' 中存在一条以 v 为起点的长为 $i-1$ 的有向轨道 Q. 由于 D' 不含有向圈，P 与 Q 首尾相连就是一条以 u 为起点并且长度至少为 i 的有向轨道，于是 $u \notin V_i$.

其次证明 D 中任何有向边的两个端点异色. 设 $(u,v)\in E(D)$. 若 $(u,v)\in E(D')$, 则边 (u,v) 自身就是 D' 中的一条有向轨道, 因此 u 和 v 异色. 若 $(u,v)\in E'$, 由 E' 的极小性可知, $D'+(u,v)$ 包含一个有向圈 $C.C-(u,v)$ 是 D' 中一条从 v 到 u 的有向轨道, 因此 u 和 v 仍然异色.

对于 G 中任意两个相邻的顶点 u 和 v, 在 D 中有一条相应的有向边 (u,v) 或 (v,u), 因此 u 和 v 不同色. 于是, $(V_1,V_2,\cdots,V_{k+1})$ 是 G 的一个正常顶点着色, 由此可知, $\chi(G)\le k+1$, 所以 D 中有长为 $k\ge\chi(G)-1$ 的有向轨道. 证毕.

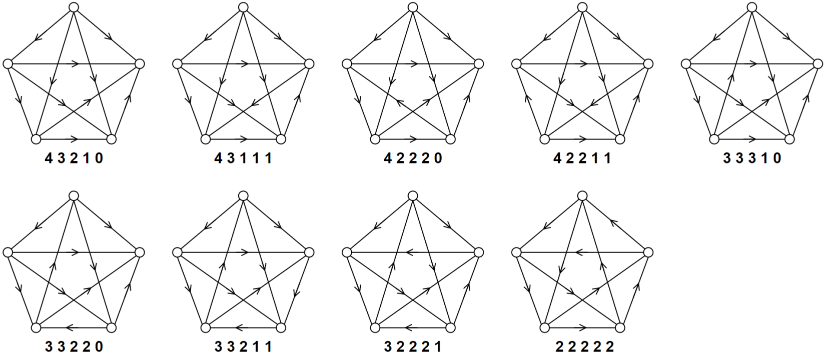
例 G 是无向图，则可对 G 的边定向，使得到的有向图中的最长有向轨长为 $\chi(G)-1$。

证明 设对无向图 G 的顶点用 $\chi(G)$ 正常顶着色时，i 色顶点子集为 V_i；当 $u\in V_i, v\in V_j; i<j$ 时，$uv\in E(G)$，则把边 uv 定向成 u 为尾，v 为头。由定理 8.4，上述定向方式得到的有向图中有长 $\chi(G)-1$ 的有向轨道，这种定向方式下，没有有向轨道能含有 $\chi(G)+1$ 个项点。所以此有向图中的最长轨恰长 $\chi(G)-1$。证毕。

例 请针对考虑同构和不考虑同构两种情况，分别给出将 K_5 定向成竞赛图的方案数；并针对考虑同构时，将 K_5 定向成竞赛图的所有方案.

解 考虑同构时，定向方案和度数序列一一对应. 共有以下 9 种:

4,3,2,1,0
4,3,1,1,1
4,2,2,2,0
4,2,2,1,1
3,3,3,1,0
3,3,2,2,0
3,3,2,1,1
3,2,2,2,1
2,2,2,2,2



不考虑同构时，每条边可以有两种定向的方案，所以共有 $2^{10} = 1024$ 种方案.

推论 8.1 每个竞赛图都有有向 Hamilton 轨道.

基于此推论，可以近似求解工序问题. 设有 ν 种工作 $J_1, J_2, \cdots, J_\nu$ 需要在同一台机器上进行，从 J_i 转为 J_j 的机器调整时间为 t_{ij}，试把这 ν 项工作排序，使得总的调整时间 $\sum t_{ij}$ 最小. 这是一个现实问题，至今没有有效算法. 下面给出一个近似算法.

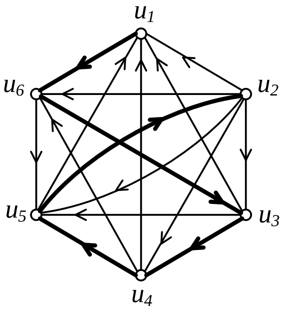
(1) 以 $V(D) = \{v_1, v_2, \cdots, v_\nu\}$ 为顶点集合构造一个有向图 D，其中顶点 v_i 代表工作 J_i. 当 $t_{ij} < t_{ji}$ 时，从 v_i 到 v_j 连一条有向边；若 $t_{ij} = t_{ji}$，则在 v_i 和 v_j 之间连一对对称边. 显然 D 中含有一个生成竞赛图.

(2) 在 D 中求取有向 Hamilton 轨道，按照所求有向 Hamilton 轨道上顶点的顺序来安排各项工作的顺序.

例 8.2 设工序问题的机器调整时间矩阵为 $T=(t_{ij})_{6\times 6}$，把这 6 项工作排序，使总加工时间最短，其中

$$T=\begin{array}{c} \\ J_1\\ J_2\\ J_3\\ J_4\\ J_5\\ J_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} J_1 & J_2 & J_3 & J_4 & J_5 & J_6 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 4 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2\\ 2 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 4 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 4 & 5 & 0 & 5\\ 4 & 4 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

解 构造有向图 D，如图所示，$V(D)=\{u_1,u_2,\cdots,u_6\}$，当且仅当 $t_{ij}\leq t_{ji}$ 时，连一条有向边 (u_i,u_j). 从 D 中求得一条有向 Hamilton 轨道 $P=u_1u_6u_3u_4u_5u_2$，参见下图中的粗实线所示. 如此，6 项工作的顺序为：$J_1J_6J_3J_4J_5J_2$，所需机器调整时间为 $T_0=1+2+1+1+3=8$. 若用自然顺序 $J_1J_2J_3J_4J_5J_6$，则需机器调整时间为 $T_1=5+1+1+1+5=13$，比求得的近似解大了 $\frac{13-8}{8}=62.5\%$.



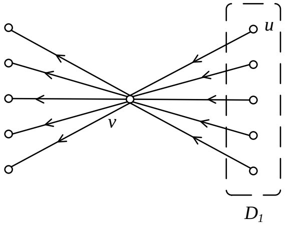
关于竞赛图的另一个有趣现象是：总存在一个顶点，从它出发，最多两步即可到达其他任何一个顶点. 这样的顶点称为竞赛图中的**王**. 直观地，若 v_0 是王，则其它运动员败给了 v_0 或者败给了曾经败给过 v_0 的运动员.
下面我们来证明，在竞赛图中，王是存在的. 假定从 u 到 v 的有向边 (u,v) 表示 u 胜了 v，此时我们记 u 得一分，v 得零分. 假设竞赛图中没有平局.

定理 8.5 竞赛图中得分最多的顶点是王.

证明 设竞赛图 G 有 ν 个顶点，其中 u 得分最多. 若 u 得分为 $\nu-1$，则从 u 出发只通过长为 1 的有向轨道即可达其他每个顶点，由王的定义，u 是王. 若 u 得分低于 $\nu-1$，设它胜了 $v_1, v_2, \cdots, v_k$，而败给了 $v_{k+1}, v_{k+1}, \cdots, v_{\nu-1}$，则 u 得了 k 分，且任意 $v_j(k+1 \leq j \leq \nu-1)$ 不可能胜过所有的 $v_1, v_2, \cdots, v_k$，否则 v_j 得分至少比 u 多一分，与 u 得分最多矛盾. 因此，v_j 败给了 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ 中的某个，于是通过长为 2 的有向轨道，u 可达 $v_j(k+1 \leq j \leq \nu-1)$，故 u 是王. 证毕.

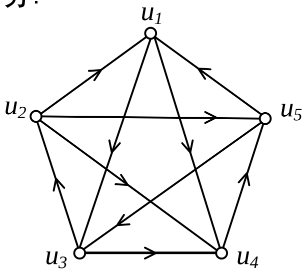
定理 8.6 竞赛图 D 中 v 是唯一的王，当且仅当 v 的得分是 $\nu-1$，其中 $\nu=|V(D)|$.

证明 必要性：反证. 若 v 是唯一的王，且 v 的得分低于 $\nu-1$，则存在以 v 为终点的有向边，所以 v 的内邻顶点集合 $N^-(v)\neq\emptyset$. 构造顶点导出子图 $D_1=D[N^-(v)]$，则 D_1 是 D 的一个子竞赛图. 由定理 8.5，D_1 有它的王 u，即 u 到 D_1 中其他顶点有长为 1 或 2 的有向轨道；而从 u 到 v 有长为 1 的有向轨道；通过 v，u 至多 2 步可以到达 v 的外邻顶点，也就是 $V(G)-N^-(v)-\{v\}$ 的顶点，所以 u 也是 D 的王，参见下图，与 v 是 D 的唯一的王矛盾，故 v 的得分是 $\nu-1$.



充分性：若 v 得分为 $\nu-1$，由定理 8.5，v 是王. 若这时还有另一个王 v'，根据王的定义，存在从 v' 到 v 的有向边 (v', v) 或长为 2 的有向轨道 $v'wv$，使得 v 是某有向边的终点，即 $deg^{-}(v) > 0$，因此 v 的得分至多 $\nu-2$，与 v 的得分为 $\nu-1$ 矛盾. 证毕.

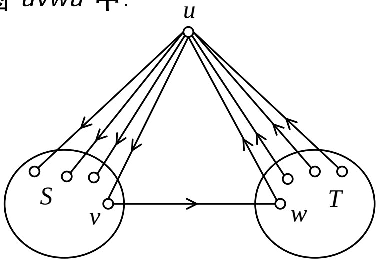
由此定理可知，若竞赛图中没有得分为 $\nu-1$ 的顶点，则至少有两个王. 如图，得分最多的是 u_2，它得 3 分，不是满分 4，所以 u_2 不是唯一的王. 事实上图中还有一个王 u_1，尽管 u_1 的得分只有 2 分.



目录

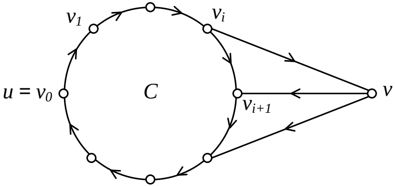
定理 8.7 假定 $\nu \geq 3$ 阶竞赛图 D 是强连通的，则任给 $3 \leq k \leq \nu$，D 中每个顶点都在某个 k 阶有向圈中.

证明 设 u 是 D 的任意顶点. 令 $S = N^+(u)$，$T = N^-(u)$. 对 k 用归纳法来证明这个定理. 首先证明 u 在一个有向 3 圈中. 由于 D 是强连通的，所以 $S \neq \emptyset$，$T \neq \emptyset$，并且 $(S, T) \neq \emptyset$，参见下图. 于是，在 D 中存在一条有向边 (v, w)，使得 $v \in S$ 且 $w \in T$，因而 u 在有向 3 圈 $uvwu$ 中.

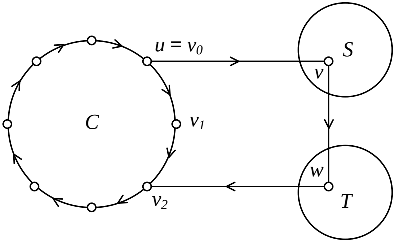


假设 u 在 D 的长为 $3,4,\cdots,n$ 的有向圈中，其中 $n<\nu$. 下面证明 u 也在某个长为 $n+1$ 的有向圈中. 设 u 在一个有向 n 圈 $C=v_0v_1\cdots v_n$ 中，其中 $v_0=v_n=u$. 因为 $n<\nu$，所以 $V(D)-V(C)\neq\emptyset$. 又因为 D 是竞赛图，所以 C 上每个顶点与 $V(D)-V(C)$ 中每个顶点间都有一条有向边.

(1) 若 $V(D)-V(C)$ 中存在一个顶点 v，C 上既有它的内邻顶点，也有它的外邻顶点，参见下图，则 C 中存在相邻的两个顶点 v_i 和 v_{i+1}，使得 $(v_i,v),(v,v_{i+1})\in E(D)$. 于是找到包含 u 长度为 $n+1$ 的有向圈 $C_1=v_0v_1\cdots v_ivv_{i+1}v_{i+2}\cdots v_n$.



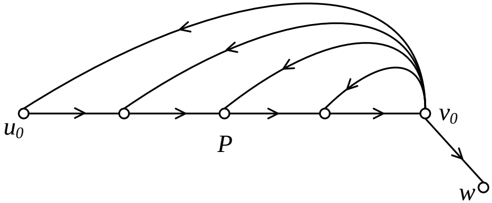
(2) 否则，对 $V(D)-V(C)$ 中的任意顶点，C 上顶点都是它的内邻顶点或者都是它的外邻顶点. 令 $S=\{v|v\in V(D)-V(C)$且$V(C)\subseteq N^-(v)\}$，$T=\{v|v\in V(D)-V(C)$且$V(C)\subseteq N^+(v)\}$，参见下图. 由于 D 是强连通竞赛图，所以 $S\neq\emptyset$，$T\neq\emptyset$，且 $(S,T)\neq\emptyset$. 存在有向边 $(v,w)\in E(D)$，使得 $v\in S$ 且 $w\in T$. 因此，u 在一个有向 $n+1$ 圈 $C_2=v_0vwv_2v_3\cdots v_n$ 中. 证毕.



这个定理给出了强连通竞赛图 D 的一个十分强的性质：$\forall v \in V(D)$，都可以在 D 上找到一个包含 v 的有向 3 圈、有向 4 圈、$\cdots$、和有向 Hamilton 圈. 由定理 8.1，也可以得知，竞赛图 D 是强连通图的充要条件是 D 是有向 Hamilton 图. 强连通竞赛图不仅有有向 Hamilton 圈，而且有从 3 到 $|V(D)|$ 各种长度的有向圈，此即泛圈性质.

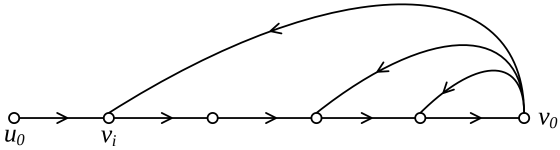
定理 8.8 设 $P(u_0, v_0)$ 是严格有向图 D 中的最长有向轨道，则其长度 $|E(P(u_0, v_0))| \geq \max\{\delta^-, \delta^+\}$. 其中，$\delta^-, \delta^+$ 分别为 D 的最小入度与最小出度.

证明 不妨设 $\max\{\delta^-, \delta^+\} = \delta^+$. 若 $P(u_0, v_0)$ 的长度小于 δ^+，由于在严格有向图 D 中 v_0 有 $deg^+(v_0) \geq \delta^+$ 个外邻顶点，而有向轨道 $P(u_0, v_0)$ 上除了 v_0 以外的顶点数小于 δ^+，所以必有 v_0 的外邻顶点落在 $P(u_0, v_0)$ 之外，即存在有向边 (v_0, w)，使得 $w \notin V(P(u_0, v_0))$，见下图. 这样，D 的有向轨道 $P(u_0, v_0)$ 可延长成 $u_0 \cdots v_0 w$，与 $P(u_0, v_0)$ 是 D 中的最长有向轨道矛盾. 证毕.



推论 8.2 若 $\max\{\delta^-, \delta^+\} > 0$，则严格有向图中有长度大于 $\max\{\delta^-, \delta^+\}$ 的有向圈.

证明 不妨设 $\max\{\delta^-, \delta^+\} = \delta^+$. 由定理 8.8 知，严格有向图 D 中存在一条最长有向轨道 $P(u_0, v_0)$，其长度不小于 $\max\{\delta^-, \delta^+\} = \delta^+$，而 v_0 的所有外邻顶点都在 $P(u_0, v_0)$ 上，又 $deg^+(v_0) \geq \delta^+$，设 v_i 是沿 $P(u_0, v_0)$ 到 v_0 最远的外邻顶点，$P(v_i, v_0)$ 的长度 $\geq \delta^+$，故有长度至少为 $\delta^+ + 1$ 的有向圈 $v_iP(v_i, v_0)v_i$，如图，证毕.



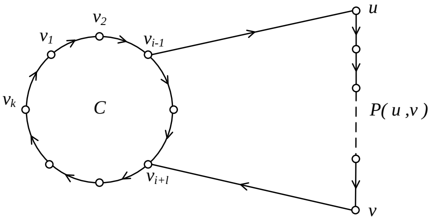
定理 8.9 设 D 是 ν 阶严格有向图，若 $\min\{\delta^-,\delta^+\} \geq \frac{\nu}{2} > 1$，则 D 是有向 Hamilton 图.

证明 反证. 假设 D 满足定理条件，但不包含 Hamilton 圈. 设 k 是 D 中最长有向圈的长度，并设 $C = v_1 v_2 \cdots v_k v_1$ 是 D 中长为 k 的有向圈. 由推论 8.2 知，$k > \max\{\delta^-,\delta^+\} \geq \frac{\nu}{2}$. 设 $P(u,v)$ 是 $D - V(C)$ 中的最长有向轨道，起点为 u，终点为 v，长为 m，参见下图.

显然 $\nu \geq k + m + 1 > \frac{\nu}{2} + m + 1$,
所以 $m < \frac{\nu}{2}$. 令

$$S = \{i | (v_{i-1}, u) \in E(D)\},\ T = \{i | (v, v_i) \in E(D)\},$$

其中 v_{i-1}, v_i 是有向圈 C 上的顶点.



我们首先证明：S 和 T 不相交. 设 $C_{j,k}$ 表示 C 中起点为 v_j、终点为 v_k 的有向弧. 若 $i \in S \cap T$，即 $(v_{i-1}, u), (v, v_i) \in E(D)$，则 D 中包含一个长为 $k + m + 1$ 的有向圈 $C_{i,i-1}P(u, v)v_i$，与 C 是最长有向圈矛盾. 因此

$$S \cap T = \emptyset.$$

因为 $P(u, v)$ 是 $D - V(C)$ 中的最长有向轨道，所以 $N^-(u) \subseteq V(P) \cup V(C)$，从而 u 在 D 中的内邻顶点个数 $deg_D^-(u) = deg_P^-(u) + |S|$. 由 S 的定义知，u 在 C 上的内邻顶点个数为 $|S|$；而 P 的长度为 m，所以 u 在 P 上的内邻顶点个数 $deg_P^-(u) \le m$，而且 $deg_D^-(u) \ge \delta^- \ge \frac{\nu}{2}$，所以

$$|S| \ge \frac{\nu}{2} - m.$$

同理，

$$|T| \ge \frac{\nu}{2} - m.$$

所以，$|S|+|T|\geq \nu-2m$，且因为 $m<\frac{\nu}{2}$，所以 S 和 T 都是非空的. 利用 $\nu\geq k+m+1$，得

$$|S|+|T|\geq k-m+1,$$

加之 $S\cap T=\emptyset$，所以

$$|S\cup T|\geq k-m+1.$$

由于 $S\neq\emptyset, T\neq\emptyset, S\cap T=\emptyset$，故存在 $i,l\in N$，使得 $i\in S, i+l\in T$，且 $i+j\notin S\cup T, 1\leq j\leq l-1$，这里的加法是模 k 的加法.
根据 $|S\cup T|\geq k-m+1$ 和 $i+j\notin S\cup T, 1\leq j\leq l-1$，得 $l\leq m$. 于是，我们得到一个有向圈 $C_{i+l,i-1}uP(u,v)v_{i+l}$，其长度为 $k+m-l+1>k$，比 C 长，矛盾. 证毕.

定理 8.1 D 是强连通有向图当且仅当 D 中存在有向生成回路，即存在含有 D 中所有顶点的有向回路.

定理 8.2 连通无向图 G 可以定向成强连通有向图，当且仅当 G 中没有桥.

定理 8.3 D 是单向连通有向图，当且仅当 D 中存在有向生成路径.

定理 8.4 有向图 D 中含有长度为 $\chi(G)-1$ 的有向轨道，其中 G 为 D 的底图.

推论 8.1 每个竞赛图都有有向 Hamilton 轨道.

定理 8.5 竞赛图中得分最多的顶点是王.

定理 8.6 竞赛图 D 中 v 是唯一的王，当且仅当 v 的得分是 $\nu-1$，其中 $\nu=|V(D)|$.

定理 8.7 假定 $\nu\geq 3$ 阶竞赛图 D 是强连通的，则任给 $3\leq k\leq\nu$，D 中每个顶点都在某个 k 阶有向圈中.

定理 8.8 设 $P(u_0,v_0)$ 是严格有向图 D 中的最长有向轨道，则其长度 $|E(P(u_0,v_0))|\geq\max\{\delta^-,\delta^+\}$. 其中，$\delta^-,\delta^+$ 分别为 D 的最小入度与最小出度.

推论 8.2 若 $\max\{\delta^-,\delta^+\}>0$，则严格有向图中有长度大于 $\max\{\delta^-,\delta^+\}$ 的有向圈.

定理 8.9 设 D 是 ν 阶严格有向图，若 $\min\{\delta^-,\delta^+\}\geq\frac{\nu}{2}>1$，则 D 是有向 Hamilton 图.