上节课主要内容

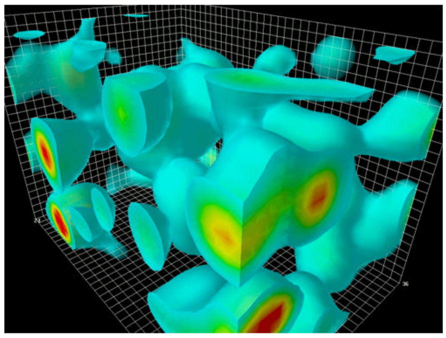
静电屏蔽
- 腔外不影响腔内
- 腔内影响腔外
- 接地空腔，腔内腔外互不影响

$$C=\frac{Q}{U}$$

$$\frac{1}{C}=\sum_{i}^{n}\frac{1}{C_i}$$ 串联

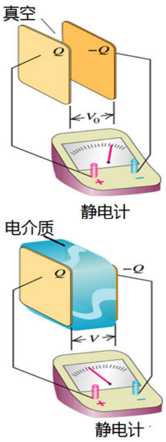
$$C=\sum_{i=1}^{N}C_i$$ 并联

§ 2-3 静电场中的介质



§ 2.3.1 电介质材料

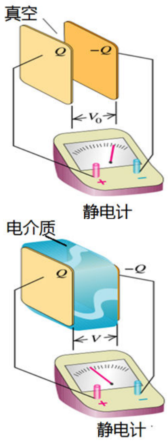
- 电容器的两极板间隙中常填充电介质，目的是增加电容值和电击穿强度。
- 将已充电的平行板电容器的两极板用导线分别接到静电计上，静电计的指针便显示出电容器两极板间的电势差。
- 保持一切条件不变(已断开电源)，在极板间插入电介质，实验发现静电计指示的电势差减小。
- 抽出电介质，读数恢复到原来的大小。



极板间增加电介质后：
- 电量 Q 未变
- 电压 U 减小, E(=U/d)减小
- C=Q/U, 电容 C 增大

电介质与电场发生相互作用，
改变了两极板间电场*E*的分布，
改变了两极板间的电势差*U*

Q **不变，*E*** **减小，*U*** **减小，*C*** **增大**



1. 相对介电常量 ε_r

- 电容器两极板间为真空时，电容器的电容为 C，当电容器内部充满同一种均匀的电介质后，则电容为 C′，比值 C′/C 只与绝缘介质的特性有关：

$$\frac{C'}{C}=\varepsilon_r \qquad \varepsilon_r>1 \qquad \varepsilon_r\ \text{无量纲}$$

- 介质电容器的电容C′为真空电容器电容C的 ε_r倍。
- ε_r：反映电介质特性的物理量，称为电介质的相对介电常数，是电介质材料的一个主要指标。

$$\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r,\quad \varepsilon_0=8.85\times10^{-12}\left(F/m\right)$$

ε：绝对介电常数，ε_0 是真空介电常数

2. 介电强度

- 当两个极板间充满电介质时，给两个极板之间加一个电压，电压升高到一定程度时，电介质会被击穿。
- 介电强度：材料作为绝缘体时能承受的最大场强，又称为击穿电场强度或击穿场强;
- 介电强度大小为：单位厚度的绝缘材料击穿前能承受的最大电压，即电场强度最大值，单位**KV/mm**;

介电强度 $$E_{\max}=\frac{U_{\max}}{d}$$

- 物质的介电强度越大，它作为绝缘体的质量越好。

几种常见材料的相对介电常数和介电强度

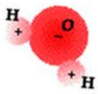
电介质	相对介电常数 ε_r	介电强度 kV/mm
干燥空气	1.0006	4.7
蒸馏水	81.0	30
硬纸	5.0	15
玻璃	7.0	15
石英玻璃	4.2	25
云母	6.0	80
聚乙烯	2.3	18
聚四氟乙烯	2.0	35

§ 2.3.2 电介质的极化

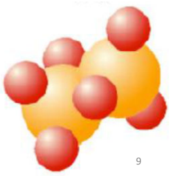
- 电介质是绝缘介质，不导电；
- 理想的绝缘介质内部无自由电荷；
- 绝缘介质中的电子做绕核运动而不是自由运动。
- 但绝缘介质中可能有因电介质极化而形成的束缚电荷，约束在分子、原子范围内。
- 纸张、空气、熔石英、琥珀、云母等都属于电介质。




原子、分子中的电偶极矩



- 实验表明，电介质在电场中会出现宏观分布的束缚电荷。
- 电介质中的原子或分子，其体积只有10^{-30}m^3，但内部的结构复杂。
- 原子或分子系统的净电荷为零。但正、负电荷中心并不都是集中在一点。
- 一级近似下，可以把原子或分子当做电偶极子，此时将会有电偶极矩 $p=ql$。
- 微观上的电偶极矩将导致宏观上的电场分布的改变。

一、极化强度

1. 极化强度的定义

- 极化强度矢量 P的定义：介质内单位体积中电偶极矩的矢量和

$$\vec{P}=\frac{\sum_i \vec{p}_{mi}}{\Delta V}=n\vec{p}_m$$

单位C/m^2

p_{mi}是体积元ΔV_i内原子或分子的电偶极矩，n是电偶极子密度，p_m是一个电偶极子的平均(电)偶极矩

- 极化强度矢量 P的物理意义：描述电介质与外电场相互作用的强弱程度。
- 极化强度表征了电介质的极化程度。

对各向同性电介质，实验表明，极化强度的方向与外电场相同，大小与电场强度 $\bar{E}$ 成正比关系

$$\vec{P}=\chi\varepsilon_0\vec{E} \qquad \varepsilon_r=1+\chi$$

ε_0是真空介电常数，ε_r是电介质的相对介电常数，χ是电介质的极化率。

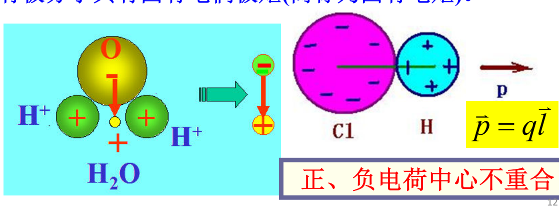
2. 电介质的分类

根据分子极化机理，电介质通常分为三类：极性电介质、非极性电介质和铁电体。

(1) 极性电介质

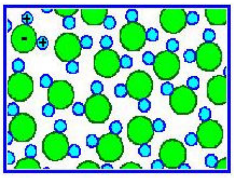
一些分子，如H_2O、NaCl、HCl、CO等，即使在没有外加电场的情况下，它们的电荷分布也不是对称的，这类分子的净电荷ΣQ虽为零，但其正、负电荷中心不重合，整个分子的电偶极矩 p 不为零。这类分子称为有极分子，这类介质称为极性电介质。

有极分子具有固有电偶极矩(简称为固有电矩)。

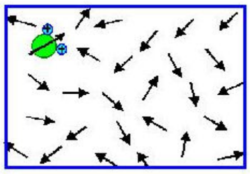


正、负电荷中心不重合

- 对极性电介质，虽然每个分子具有一定的固有电矩，但由于分子的不规则热运动，各个电偶极子的方向是随机的。
- 不加外电场时：在任何微观大、宏观小的区域内各分子电偶极矩的总和为零，整个电介质不表现出电极化现象，在宏观上亦不产生电场。



水分子

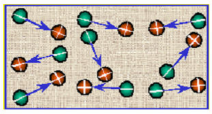


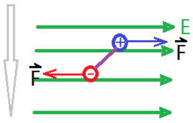
无外场

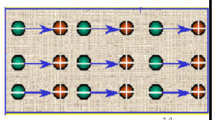
$$\sum_i \vec{p}_{mi} = 0$$

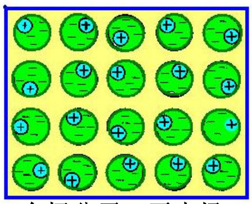
$$\sum_i \vec{p}_{mi} \neq 0$$

- 外加电场时：电场对电偶极子有力矩作用，使各分子固有电偶极矩都有转向电场方向的趋势。
- 外加电场越强，分子电偶极矩沿电场方向排列越整齐。
- 由于极化是分子固有电偶极矩在电场力作用下趋向电场方向的结果，所以极性电介质分子的极化称为取向极化。

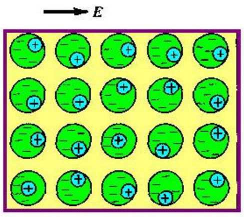




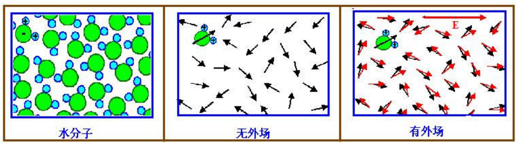




有极分子，无电场



有极分子在电场下的极化

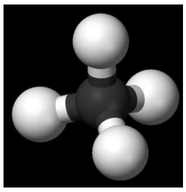


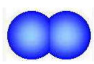
有极分子的极化机制：取向极化

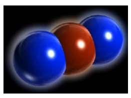
(2) 非极性电介质

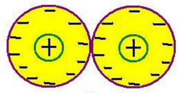
非极性电介质的分子，如 O_2，H_2，N_2，CCl_4，CO_2 等，分子没有固有电偶极矩。

除净电荷为零外，由于电子云分布的对称性，整个分子系统的正、负电荷中心重合，分子的电偶极矩为零，整体上没有电极化现象。

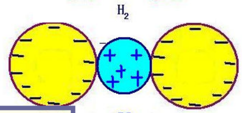








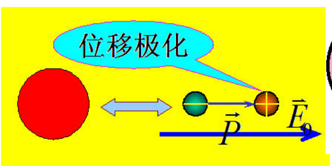
H_2

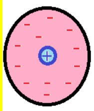


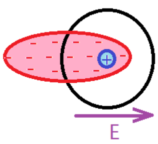
正、负电荷中心重合

CO_2

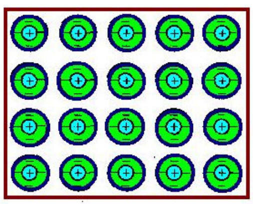
- 非极性电介质，每个分子都没有固定的电偶极矩，故整个电介质不产生电场。
- 当介质处在外电场中时，正、负电荷中心被拉开一定的距离，形成一个电偶极子，具有一定的电偶极矩(也称为感应电矩)，这种极化称为位移极化。
- 感应电偶极矩的方向与外电场的方向相同，外电场越强，感应电偶极矩越大。

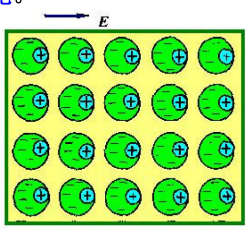






- 原子核的质量 M 比电子质量 m_e 大几千倍，无极分子在电场作用下，原子核的移动极其微小
- 感应电矩几乎完全是因为电子在外场作用下发生位移的结果，所以无极分子组成的电介质的极化称为电子位移极化。





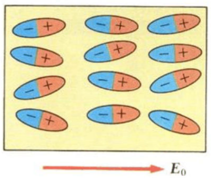
无极分子的极化机制：电子位移极化

- 实际上，即使是有极分子组成的电介质，在电场作用下，分子也有感应电矩，发生电位移极化，不过一般来说，取向极化的效应比电子位移极化的效应强得多(大一个数量级)。
- 只有在外场的频率很高时，由于分子惯性大，跟不上外场变化时，才只有电子的位移极化。
- 有些电介质是离子晶体，在电场作用下，正、负离子将发生位移，从而使介质极化，这种极化称为离子位移极化。
- 电介质极化的实际过程相当复杂，且原子或分子系统是一个量子力学系统，只有用量子力学，才能对系统作出更为准确的描述。

(3) 铁电体

- 铁电体有自发的电极化强度，即使没有外电场，这种物质本身也会有电极化强度。
- 钛酸钡($BaTiO_3$)就是其中一例，其极化机理比较复杂，后面会专门讨论。

二、极化电荷

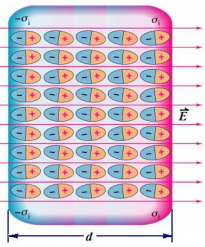


- 处于外场中的电介质，它的原子或分子因受到外电场作用而发生位移极化或取向极化，产生附加电场；
- 附加电场又会对原子或分子中的电荷产生作用，进一步改变极化的程度；
- 两者相互作用、相互影响，直到达到静电平衡为止。

- 弛豫时间：介质的极化过程需要约10^{-13}~10^{-15} s时间，非常短暂。
- 达到静电平衡时，已经极化了的电介质等效于大量大体沿电场方向排列的电偶极子的集合。
- 电介质极化的程度：不仅与每个分子的电偶极矩的大小有关，而且依赖于各分子电偶极矩排列的整齐程度。

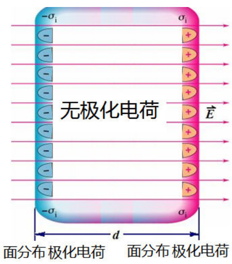
1. 极化电荷

- 理想情况下，假定电介质是均匀的，电场是均匀的，各分子电偶极矩完全沿电场方向排列。
- 介质内部：每个电偶极子的头部紧挨着另一个电偶极子的尾部，正负电荷的效应相互抵消。



- 但在与场强方向相垂直的介质表面上：一侧表面聚集了电偶极子的头部，因而表面上有正电荷分布；另一侧表面上聚集着电偶极子的尾部，因而有负电荷分布。

- 所以，均匀极化后的电介质，在远处的电效应相当于在介质表面的薄层内分布了一些电荷，它们是一种面电荷，束缚在介质表面上。
- 这种电荷是因介质的极化产生的，称为极化电荷。

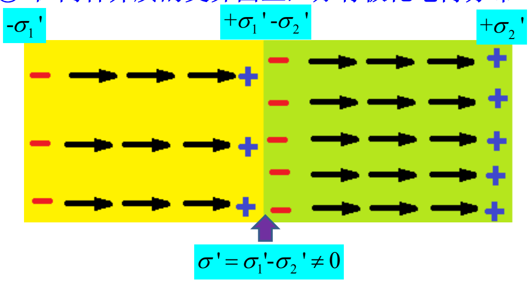


- 当介质均匀极化时，极化电荷只分布在介质的表面上，在介质内部，没有极化电荷分布。
- 实际上，即使极化不均匀，只要介质本身是均匀的这一结论亦是正确的。

- 对于两种不同(包括密度不同) 的均匀介质，

① 介质的表面上束缚着一层面分布的极化电荷;

② 在两种介质的交界面上，亦有极化电荷分布。

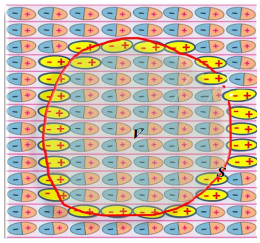


介质界面上，面电荷密度不同，正、负电荷不能完全抵消

设电介质中有一假想的体积V

① 完全处在体积V内的那些电偶极子：对 V 内的净电荷是没有贡献的；

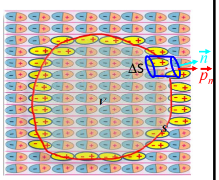
② 全部位于V外的电偶极子：对 V 内的净电荷也无贡献；



③ 在体积V的边界上，被边界面S切割的偶极子：它们中有的正电荷在 S 面的外部，因而对 V 贡献一负电荷；有的负电荷则在 S 面的外部，因而对 V 内贡献一正电荷。

- V 内的净电荷，正是由边界上的电偶极子提供的。

- 在边界面S上任取一面积元 ΔS，以ΔS为底，设电偶极子正负电荷之间的距离为 l，则在ΔS两侧各作一个 $l/2$ 高的圆柱，圆柱的中心轴与 p_m 平行，则圆柱体的体积为



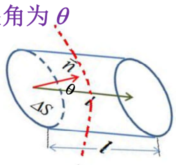
S 面的外法线方向为正

$$\Delta V = l\Delta S\cos\theta$$

ΔS的法线方向与 p_m间的夹角为 θ

- 若单位体积内的分子数为 n，则ΔV内的电偶极子数：

$$\Delta N = n\Delta V = nl\Delta S\cos\theta$$

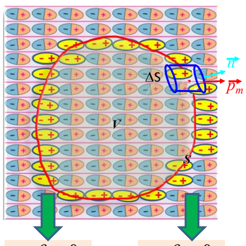


- 这些电偶极子对 S 内部贡献的电荷为 $-q\Delta N$，即

$$\Delta Q' = -qnl\Delta S\cos\theta$$

$$p_m = ql, P = np_m = nql$$

$$\Delta Q' = -P\Delta S\cos\theta = -\vec{P}\cdot\Delta\vec{S}$$



S 面的外法线方向为正

$\cos\theta < 0$ $\quad -q\Delta N > 0$

$\cos\theta > 0$ $\quad -q\Delta N < 0$

- 把上式对整个闭曲面 S 积分，便得到包围在 S 面内的极化电荷的净电量

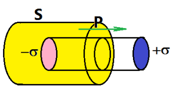
$$Q_p = -\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}$$

$$Q_p = -\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}$$

- 介质内部任何体积 V 内的极化电荷的电量，等于极化强度 P 对包围 V 的表面 S 的通量的负值

- 极化强度P是n个电偶极矩p_m的和，因此P相当于一个大电偶极矩，其头部带正电，尾部带负电。

- 当 $\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S} > 0$ 时，表明 P 的头部伸出 S 面，留在 S 面内的是 P 的尾部，故包围在 S 面内的电荷是负的。



2. 极化电荷的体密度 ρ_P

$$Q_p = -\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}$$

$$Q_p = \iiint_V \rho_p dV \qquad \oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla\cdot\vec{P}dV$$

$$\iiint_V \rho_p dV = -\iiint_V \nabla\cdot\vec{P}dV$$

极化电荷的体密度 ρ_P 与极化强度 P 的关系

$$\rho_p = -\nabla\cdot\vec{P}$$

$$\rho_p = -\nabla\cdot\vec P$$

直角坐标系中，有 $\rho_P = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x}+\frac{\partial P_y}{\partial y}+\frac{\partial P_z}{\partial z}\right)$

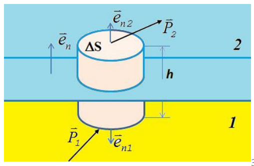
- 均匀介质均匀极化时，则 $\vec P$ 是与坐标无关的常矢量，$\vec P$ 的散度为 *0*，即均匀极化的介质内部不存在极化电荷

$$\rho_P = 0$$

- 不均匀介质内部，有极化体电荷分布

3. 极化电荷的面密度 σ_P

- 两种极化介质的交界面，或介质的表面(即介质与真空的交界面)，存在面分布的极化电荷。
- 若两种极化强度分别为 $\vec P_1$ 和 $\vec P_2$ 的电介质，假定极化强度在每一种电介质中都是位置的连续函数，仅在两种介质的交界面上才发生突变。
- 在两种介质的交界面处作一圆柱体，取圆柱体高 ***h→0***。



则圆柱体内的极化电荷的电量为：

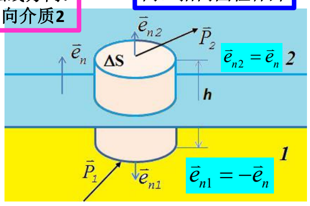
$\Delta\vec S_2 = \Delta S\,\vec e_{n2} = \Delta S\,\vec e_n$

$$Q_p = -\oint_S \vec P\cdot d\vec S$$

e_n界面法线方向：介质1指向介质2

e_{n1}, e_{n2}表面法线方向：指向圆柱体外

$$= -\left\{\oint_{\Delta S_1}\vec P_1\cdot d\vec S+\oint_{\Delta S_2}\vec P_2\cdot d\vec S+\delta\right\}$$
$$= -\left(\vec P_1\cdot\Delta\vec S_1+\vec P_2\cdot\Delta\vec S_2+\delta\right)$$
$$= -\left[\Delta S\left(\vec P_2-\vec P_1\right)\cdot\vec e_n+\delta\right]$$
$$= \rho_p h\Delta S$$



ρ_p为体极化电荷密度

$\Delta\vec S_1 = \Delta S\,\vec e_{n1} = -\Delta S\,\vec e_n$

$$h\to0\Rightarrow\begin{cases}\rho_p h=\sigma_p\\ \delta\to0\end{cases}$$

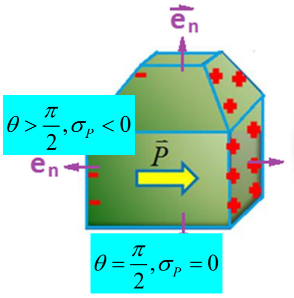
$$\sigma_P = \left(\vec P_1-\vec P_2\right)\cdot\vec e_n = P_{1n}-P_{2n}$$

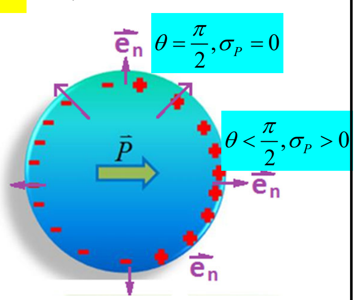
$$\sigma_P = \left(\vec P_1-\vec P_2\right)\cdot\vec e_n = P_{1n}-P_{2n}$$

$\vec e_n$ 界面法线方向：介质1指向介质2

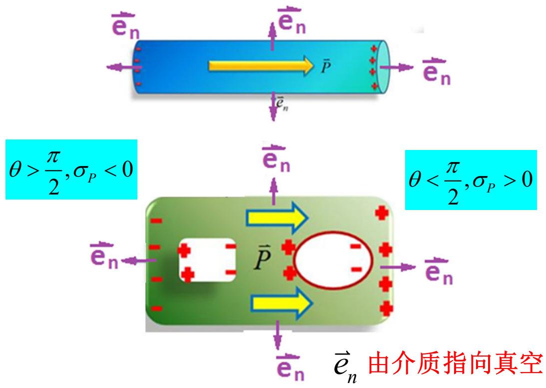
- 在两介质交界面上，极化电荷的面密度等于两种电介质极化强度的法向分量之差。
- 若$P_{1n}>P_{2n}$，则$\sigma_p>0$，交界面上有正的极化电荷；
- 若$P_{1n}<P_{2n}$，则$\sigma_p<0$，交界面上有负的极化电荷；
- 当$P_{1n}=P_{2n}$，即法向分量在交界面上连续时，交界面上无极化电荷；
- 若第二种介质是真空，则 $P_2=0$，$\vec e_n$ 由介质指向真空，这时：$\sigma_P = P_n = P\cos\theta$ θ是极化强度矢量与界面法线的夹角
- 在介质与真空的交界面上，极化电荷的面密度等于极化强度的法向分量。

$\sigma_P = P_n = P\cos\theta$ $\quad\vec e_n$ 由介质指向真空





$\theta=\frac{\pi}{2},\sigma_P=0$ $\quad\sigma_P = P_n = P\cos\theta$



$\vec e_n$ 由介质指向真空

4.关于极化电荷的几点说明

A. 极化电荷与自由电荷的区别

- 起源不同　介质上的极化电荷：源于原子或分子的极化；
  导体上的自由电荷：源于原子的价电子。
- 转移性能不同

极化电荷为束缚电荷：它们总是牢固地束缚在介质上

(a) 不能从介质的一处转移到另一处；

(b) 不能从一个物体传递给另一个物体；

(c) 介质与导体接触时，极化电荷不会与导体上的自由电荷中和。

自由电荷为可移动的电荷：(a)可在导体内自由移动，(b)也可从一个导体转移到另一个导体上。

B. 极化电荷与绝缘体上电荷的区别

- 共同点：都是束缚电荷。
  - 极化电荷是束缚电荷；
  - 用摩擦等方法使绝缘体带电，绝缘体上的电荷也被束缚在绝缘体内。
- 起源不同，性质不同
  - 极化电荷起源于极化，不能与自由电荷中和。
  - 绝缘体上的电荷是一种束缚在绝缘体上的自由电荷，可与自由电荷中和。
- 流动性能不同
  - 在随时间变化的电场作用下，由极化产生的束缚电荷能移动，并产生外电流——极化电流；
  - 束缚在绝缘体上的自由电荷不会引起电流。

C. 体分布的极化电荷

- 对于极化强度P为恒量的均匀极化来说，介质内部无体分布的极化电荷；

$$\vec{P}=C \Rightarrow \rho_P=-\nabla\cdot\vec{P}=0$$

- 但介质内部无体分布的极化电荷，并不要求介质一定是均匀极化，即 P 可以不是恒量；
- 只要介质是均匀的，不论极化是否均匀，一般在介质中都无体分布的极化电荷。

D. 极化电荷和自由电荷的电场

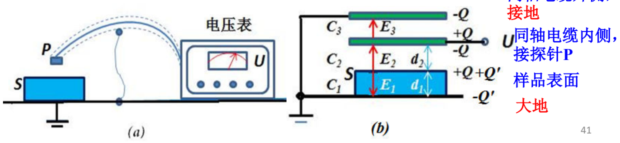
- 电荷的产生与外电场关系
  - 外电场是产生极化电荷的必要条件，没有外场作用，就不会有极化电荷(永久磁体除外)
  - 自由电荷的产生不需要外加电场(如摩擦起电)
- 电荷激发的电场

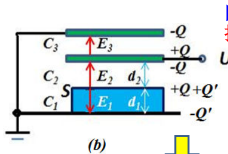
相同电量、同样分布的极化电荷和自由电荷激发(产生)的电场完全相同

5.介质表面电荷密度的测量

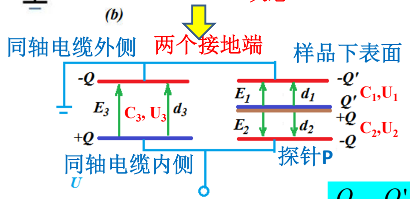
【例39】用微米量级的探针P在接地样品(介质)表面进行二维移动，探针通过一同轴电缆与电压表联结，同轴电缆外侧接地。已知待测样品厚度为 d_1，表面积为S，相对介电常数为ε_r，探针与表面间距离为 d_2，样品表面与大地间电容为C_1，探针与样品表面间电容为 C_2，同轴电缆的电容为 C_3。电压表读数为 U，求样品表面电荷密度σ。

【解】样品表面带电，在其他极板(电缆、探针等)上由于感应带电有电荷分布，右图是相应的等效电路图。





同轴电缆内侧与探针P相连，由电荷守恒，一个带Q，另一个必定带-Q



样品表面电荷由两部分组成，密度为σ，

$$\sigma S=Q+Q'$$

电容并联　$U=U_3=U_1-U_2$

$$\frac{Q}{C_3}=\frac{Q'}{C_1}-\frac{Q}{C_2}$$

$$Q'=Q\left(\frac{C_1}{C_2}+\frac{C_1}{C_3}\right)$$

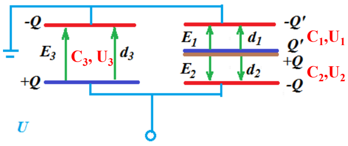
$$\sigma S=Q+Q'=Q\left(1+\frac{C_1}{C_2}+\frac{C_1}{C_3}\right)$$

$$Q = C_3 U$$

$$\sigma = \left(C_1 + C_3 + \frac{C_1 C_3}{C_2}\right)\frac{U}{S}$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d_1},\ C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_2}$$

$$\sigma = \left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d_1} + \frac{C_3}{S} + \frac{\varepsilon_r C_3}{S}\frac{d_2}{d_1}\right)U$$



C_1是待测样品表面与大地间的电容

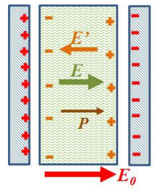
C_2探针与样品表面间电容

C_3是同轴电缆的电容。

表面电荷密度
- 同轴电缆的电容C_3
- 探针与表面间的间距d_2
- 介质的厚度d_1
- 介质的介电常数
- 电压表的读数

三、极化强度与电场的关系

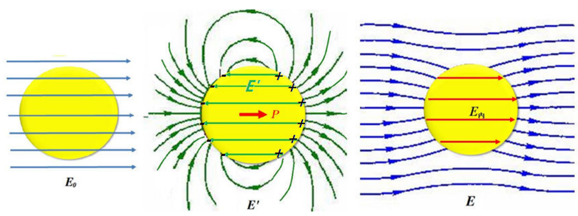
1. 退极化场



- 电介质在外电场 $\vec{E}_0$ 中极化，出现极化电荷Q'，极化电荷将产生电场 $\vec{E}'$，空间任一点的电场由两者叠加而成 $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$
- 极化电荷在介质以外空间的电场：很复杂
- 在电介质内：极化电荷产生的电场*E'*总是与外场E_0方向相反，故总电场*E*随之减弱，极化强度亦减弱，故 *E'* 称退极化场。

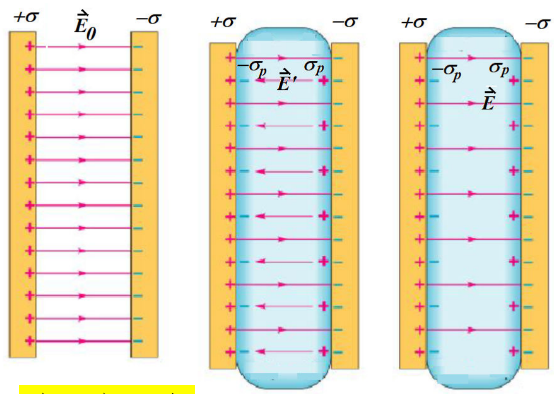
$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

E' 退极化场



$\vec{P}$ 与外电场方向一致，$\vec{E}'$与外电场方向相反

均匀介质球在外电场中的极化



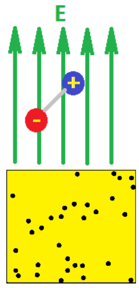
$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$ $\quad$ $\vec{E}'$与 $\vec{E}_0$ 方向相反

2. *P* 与 *E* 的关系

- 电介质的极化状态由极化强度 $\vec{P}$来描述；
- 电介质的极化是电场对电介质作用的结果，电介质中任何一点的极化强度$\vec{P}$是由该点的总电场$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$ 来决定，而不是仅由外场 $\vec{E}_0$决定，即 $\vec{P} = \vec{P}\left(\vec{E}\right)$ 。
- 当极化达到稳定后，介质中$\vec{E}$和$\vec{P}$是确定的，两者之间存在一定的联系$\vec{P}\left(\vec{E}\right)$;
- 不同电介质，$\vec{P}\left(\vec{E}\right)$关系不一样，极化规律不同。

- 统计物理和固体物理能根据介质极化的微观特性，从理论上建立 *P* 与 *E* 的关系。
- 在宏观电磁学中，无法从理论上建立 *P* 与 *E* 的联系，这种关系只能通过实验来建立.
- *P* 和 *E* 的关系与电介质的性质有关，根据 *P* 和 *E* 的关系可对电介质分类。

(1)各向同性电介质



- 电偶极子(电偶极矩 p_0)在外电场 E 中具有的势能

$$W=-\vec{p}_0\cdot\vec{E}+C=-p_0E\cos\theta+C$$

- 由于分子的热运动及由此引起的分子间的碰撞，每个电偶极子的方向并不一定是和电场方向完全一致的，电偶极矩的方向在空间中呈现一定的分布。
- 根据统计物理学，在温度为 T 时，电场中的电偶极子具有某个势能的几率为波耳兹曼分布

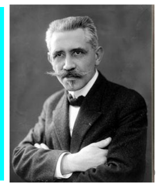
$$e^{-W/K_BT}$$

郎之万根据波尔兹曼分布定律，给出外场作用下，气体和液体的电介质取向极化所导致的极化强度：

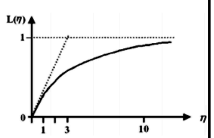
$$P=Np_0\langle\cos\theta\rangle$$

p_0为分子固有电偶极矩，N 为单位体积内被取向极化的分子数，$\langle\cos\theta\rangle$ 是热平衡分布下 $\cos\theta$ 的平均值，称为郎之万函数，记为 L。

$$L=\langle\cos\theta\rangle=\frac{\int_0^{\pi}e^{p_0E\cos\theta/k_BT}\cos\theta\,d\Omega}{\int_0^{\pi}e^{p_0E\cos\theta/k_BT}\,d\Omega}$$



$$L=\langle\cos\theta\rangle=\coth\left(\frac{p_0E}{k_BT}\right)-\frac{k_BT}{p_0E}$$



令 $\eta\equiv p_0E/k_BT$ 双曲余切

$$L=\langle\cos\theta\rangle=\coth\eta-\frac{1}{\eta}$$

当 $p_0E<<KT$ (弱场作用下)，即 $\eta<<1$时，可以近似地认为曲线呈线性关系

$$L=\langle\cos\theta\rangle=\frac{p_0E}{3k_BT}$$

$$\therefore P=Np_0\langle\cos\theta\rangle=Np_0\frac{p_0E}{3k_BT}=N\frac{p_0^2}{3k_BT}E=N\alpha_0E$$

其中 $\alpha_0=\dfrac{p_0^2}{3k_BT}$

- α_0称为分子的平均取向极化率
- 在同时出现电子极化、离子极化和取向极化的一般情形下，对气体和液体电介质，分子的平均极化率有：

$$\alpha=\alpha_e+\alpha_i+\alpha_0$$

- α_e，α_i为电子极化率和离子极化率

$$\vec{P}=N_ep_e+N_ip_i+N_0p_0=\left(N_e\alpha_e+N_i\alpha_i+N_0\alpha_0\right)\vec{E}$$

电子极化
离子极化
取向极化

- 总之，当场强不太强时，极化强度 P 与介质中的场强 E 方向相同，并有简单的正比关系：

$$\vec{P}=\varepsilon_0\chi\vec{E}$$

χ为介质的极化率

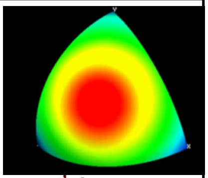
上式就是各向同性介质的物态方程

气体(H_2, O_2,N_2)、大部分液体(水、氨、液态苯)、许多非晶体和某些晶体，都是各向同性的介质。

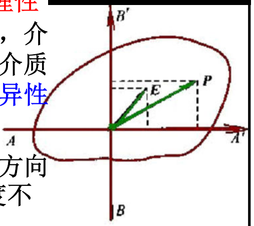
$$\vec{P}=\varepsilon_0\chi\vec{E}\qquad \varepsilon_r=1+\chi$$

- 介质的极化率χ：由电介质的性质决定，是一个无量纲的量，反映了介质极化难易的程度，对于不同的介质，极化率是不同的。
- 均匀介质：χ=常数，与位置无关
- 非均匀介质：$\chi=\chi(x,y,z)$，与位置有关
- 场强不太大时，χ与E无关，属于线性介质；
- 场强很大时，χ与E有关，属于非线性介质；
- 取向极化电介质，χ还与温度有关 χ (T)。

(2) 各向异性电介质



- 有些晶体(如石英)，晶体的物理性质与方向有关，如沿某个方向，介质较易极化，而沿另一方向，介质较难极化，这种晶体称为各向异性介质。
- 例如某晶体在两个相互垂直的方向AA’和BB’方向，极化难易程度不同，即极化与方向有关。



- 形式上仍可P和E的关系仍可写为：

$$\vec{P}=\varepsilon_0\bar{\chi}\vec{E}$$

在直角坐标中，可将 P 和 E 的关系写为：

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}=\varepsilon_0\begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

这时χ有9个分量，通常称为极化率张量

- 线性介质：极化率张量χ与E无关，且为对称张量，即

$$\chi_{xy}=\chi_{yx}$$
$$\chi_{xz}=\chi_{zx}$$
$$\chi_{yz}=\chi_{zy}$$

- 若极化率χ与E无关，且可忽略介质损耗(如发热损耗)，则与线性各向同性电介质一起统称为线性无损耗电介质。

(3) 非线性电介质

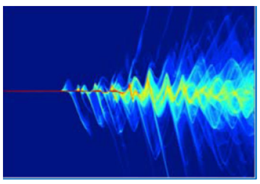
- 非线性介质：P与E成非线性关系的介质
- 场强很大时，P不仅与E有关，还与E^2，E^3等有关，这时P与E成非线性关系。
- 非线性介质的物态方程一般可表示为：

$$P_i=\varepsilon_0\sum_j\chi_{ij}^{(1)}E_j+\varepsilon_0\sum_j\sum_k\chi_{ijk}^{(2)}E_jE_k+\ldots$$

- $\chi_{ij}^{(1)}$称为一阶非线性极化率，$\chi_{ijk}^{(2)}$为二阶非线性极化率，还可以有三阶、四阶等高阶非线性极化率
- 各阶极化率的大小与介质的结构和性质有关，在通常情况下极化率的阶数越高，其值越小。

- 若 E_a 为原子内部的平均场强，则各阶极化率有下面的关系：

$$\frac{\chi^{(2)}}{\chi^{(1)}}=\frac{\chi^{(3)}}{\chi^{(2)}}=\cdots\frac{1}{E_\alpha}$$



- E_a的数量级为 $10^{10}\ V/m$。当 $E \ll E_a$ 时，这些非线性项可忽略。

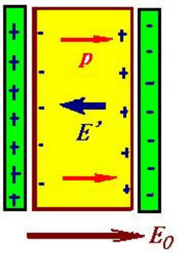
- 对于某些各向同性的介质，如气体、液体以及一些具有反演对称中心的晶体，偶阶非线性极化率皆为零。P与E的关系为：

$$P=\varepsilon_0\chi^{(1)}E+\varepsilon_0\chi^{(3)}E^3+\cdots$$
$$=\varepsilon_0\left(\chi^{(1)}+\chi^{(3)}E^2+\cdots\right)E=\varepsilon_0\chi E$$

式中

$$\chi=\chi^{(1)}+\chi^{(3)}E^2+\cdots$$

【例40】平板电容器中有极化率为χ的电介质，外场为E_0，求介质表面极化电荷面密度σ_P、总电场E、电容C。



【解】设极化强度为P，则介质表面的极化电荷面密度为

$\sigma_P = P_n = P\cos\theta$ $\xrightarrow{\theta=0,\pi}$ $\sigma_{p-right} = P$, $\sigma_{p-left} = -P$

极化电荷产生的场强 $E' = \sigma_p/\varepsilon_0 = P/\varepsilon_0$

退极化场E'与外场E_0方向相反，写成矢量形式

$$\vec{E}' = -\vec{P}/\varepsilon_0 = -\chi\vec{E} \qquad \vec{P} = \varepsilon_0\chi\vec{E}$$

χ 电介质的极化率

总场强E是外场E_0和退极化场E'的叠加

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = \vec{E}_0 - \chi\vec{E}$$

由上式可得 $\vec{E} = \dfrac{\vec{E}_0}{1+\chi} = \dfrac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}$ $\quad \varepsilon_r = 1+\chi$

$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$

ε_r称相对介电常数，通常有

ε为绝对介电常数，ε是电介质的一个重要指标

电容器两极板充满介质前后：

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= E_0 d \\ U &= Ed = E_0 d/\varepsilon_r \end{aligned}\right\} \Rightarrow U = \frac{U_0}{\varepsilon_r}$$

$$C = \frac{q}{U} = \varepsilon_r\frac{q}{U_0} = \varepsilon_r C_0$$

C_0为真空时的电容值

ε_r总是大于1，故电介质的填充可增大电容!

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E} \Leftarrow \begin{aligned} \varepsilon_r &= 1+\chi \\ \varepsilon &= \varepsilon_0\varepsilon_r \end{aligned}$$

$$\vec{P} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0\vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}$$ E是总场强

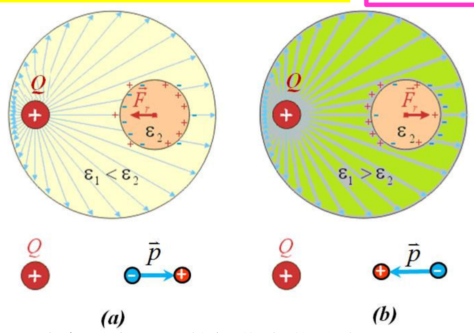
两种介质交界面

$$\begin{aligned} \sigma_P &= (\vec{P}_1 - \vec{P}_2)\cdot\vec{e}_n \\ &= \left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\vec{E} - (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\vec{E}\right]\cdot\vec{e}_n \\ &= (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\vec{E}\cdot\vec{e}_n \end{aligned}$$

两种介质交界面的极化电荷分布和两种材料的介电常数有关

$$\sigma_P = (\vec{P}_1 - \vec{P}_2)\cdot\vec{e}_n = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\vec{E}\cdot\vec{e}_n$$

$\vec{e}_n$界面法线方向：介质1指向介质2



两种介质交界面的极化电荷分布和两种材料的介电常数有关

问 题

1. 不同形状（细长型，扁平型，球型等）的电介质放入均匀外场和非均匀外场（如场由点电荷或电偶极子产生）中表面的极化电荷分布。

2. 电泳现象。

作 业 2.15