1 留数

1.1 留数定理

设f在a 的去心邻域内解析，在a 点不解析，则我们有洛朗展开

$$f(z) = \sum a_n (z-a)^n.$$

从而当$\rho > 0$ 充分小的时候

$$\int_{|z-a|=\rho} f(z)dz = 2\pi i a_{-1}.$$

我们发现在计算积分的时候a_{-1} 起了决定性的作用。称a_{-1} 为f 在孤立奇点a 点的留数，记作

$$Res[f(z), a].$$

于是由柯西积分定理，任意将a 围起来的简单闭曲线C，有

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i Res[f(z), a].$$

进一步我们有以下定理。

定理1 (留数定理)**.** *如果函数$f(z)$ 在闭路C 上解析，在C 内部除了有限个孤立奇点$a_1, \cdots, a_n$ 外也解析，则*

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res[f(z), a_k].$$

证明是显然的，我么在此略过。有了该定理，我们经常会把求积分转化为求留数。可去奇点的留数为0；本性奇点的留数一般用洛朗展开；极点的留数除了用洛朗展开求还有以下办法：

定理2. *如果a 是$f(z)$ 的m-阶极点，则*

$$Res[f(z), a] = \lim_{z\to a} \frac{1}{(m-1)!} \left((z-a)^m f(z)\right)^{(m-1)}.$$

特别地，当$m=1$ 地时候，$Rex[f(z), a] = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$.

证明. 设洛朗展开为

$$f(z) = \sum_{k\geq -m} a_k (z-a)^k.$$

则

$$\frac{1}{(m-1)!} \left((z-a)^m f(z)\right)^{(m-1)} |_{z=a} = a_{-1}.$$

推论1. 设$P(z), Q(z)$ 在a 点解析，$P(a) \neq 0$，a 为Q 的一级零点。则

$$Res[\frac{P}{Q}, a] = \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

证明.

$$Res[\frac{P}{Q},a]=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{P(z)}{Q(z)}=\lim_{z\to a}\frac{P(z)}{\frac{Q(z)-Q(a)}{z-a}}=\frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

例子1. 求留数：$f(z)=\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}+\frac{e^z}{z-1}$。

解. f 有两个奇点，$z=1$ （*1*阶极点）以及$z=-1$ （*3*阶极点）。

$$Res[f(z),1]=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=e^1.$$

$$Res[f(z),-1]=\lim_{z\to -1}\frac{1}{2!}((z+1)^3f(z))^{(2)}=2\sin 2.$$

例子2. 求积分

$$\int_{|z|=n}\tan(\pi z)dz.$$

解. $\tan(\pi z)=\frac{\sin\pi z}{\cos\pi z}$。其所有奇点为

$$z=k+\frac{1}{2},k\in\mathbb{Z}.$$

且均为一阶极点，所以

$$Res[\tan(\pi z),k+\frac{1}{2}]=\frac{\sin((k+\frac{1}{2})\pi)}{-\pi\sin((k+\frac{1}{2})\pi)}=-\frac{1}{\pi}.$$

所以

$$\int_{|z|=n}\tan(\pi z)dz=-\frac{4n\pi i}{\pi}=-4ni.$$

例子3. $\int_{|z|=3}\frac{z+5}{1-\cos(z-2)}dz.$

解. 首先我们求出所有的奇点。即解方程

$$1-\cos(z-2)=0.$$

解得

$$z_k=2k\pi+2,k\in\mathbb{Z}.$$

在$|z|<3$ 内有且只有一个孤立奇点为

$$z_0=2.$$

计算留数：在$z=2$点的留数，将$1-cos(z-2)$ 在$z=2$ 泰勒展开

$$1-\cos(z-2)=(z-2)^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+2)!}(z-2)^{2k}=(z-2)^2\varphi(z).$$

$z=2$为*2*阶极点。所以

$$Res[\frac{z+5}{1-\cos(z-2)},2]=\lim_{z\to 2}\left(\frac{z+5}{1-\cos(z-2)}(z-2)^2\right)'=\lim_{z\to 2}\left(\frac{z+5}{\varphi(z)}\right)'=\frac{\varphi-(z+5)\varphi'}{\varphi^2}|_{z=2}=2.$$

所以

$$\int_{|z|=3}\frac{z+5}{1-\cos(z-2)}dz=2\pi iRes[\frac{z+5}{1-\cos(z-2)},2]=4\pi i.$$

当然我们可以用更直接的办法求留数：在$z=2$ 的洛朗展开为

$$\frac{z+5}{1-\cos(z-2)}=\frac{z+5}{\frac{1}{2}(z-2)^2-(z-2)^4\phi}=\frac{2}{(z-2)^2}((z-2)+7)(1+(z-2)^2\phi+\cdots).$$

显然$a_{-1}=2$ 即$Res[\frac{z+5}{1-\cos(z-2)},2]=2$。

例子4. 求积分

$$I=\int_{|z|=1}\frac{z\sin z}{(1-e^z)^3}dz.$$

解. 首先把所有奇点都找出来

$$z_k=2k\pi i,k\in\mathbb{Z}.$$

除了$z_0=0$ 为一阶极点外其余都是三阶极点。但求积分只要考虑零就行了。

$$Res[\frac{z\sin z}{(1-e^z)^3},0]=\lim_{z\to 0}\frac{z^2\sin z}{(1-e^z)^3}=-1.$$

故积分为$-2\pi i$。

1.2 定积分的计算

1.2.1 $I=\int_0^{2\pi}R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$ 类型积分

这里$R(a,b)$ 是关于a,b 的有理函数。变换

$$z=e^{i\theta},\theta\in[0,2\pi].$$

则有

$$d\theta=\frac{dz}{iz},\cos\theta=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}),\sin\theta=\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}).$$

可以把积分变为

$$I=\int_{|z|=1}R\left(\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}),\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})\right)\cdot\frac{1}{iz}dz.$$

例子5. 求积分$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2},(0<p<1)$.

解. 变换

$$z=e^{i\theta},\theta\in[0,2\pi].$$

得到

$$I=\int_{|z|=1}\frac{1}{1+p^2-p(z+z^{-1})}\cdot\frac{1}{iz}dz=\int_{|z|=1}\frac{idz}{pz^2+p-z(1+p^2)}.$$

注意到

$$pz^2+p-z(1+p^2)=(pz-1)(z-p).$$

因而有两个奇点$z=p$(1阶极点)，$z=\frac{1}{p}$(1阶极点)。只有$z=p$ 在$|z|<1$ 内，所以

$$Res[\frac{idz}{pz^2+p-z(1+p^2)},p]=\lim_{z\to p}\frac{idz}{pz^2+p-z(1+p^2)}(z-p)=\frac{i}{p^2-1}.$$

所以

$$I=2\pi iRes[\frac{idz}{pz^2+p-z(1+p^2)},p]=\frac{2\pi}{1-p^2}.$$

例子6. 求积分
$$I=\int_0^\pi \frac{\cos mx}{5-4\cos x}dx.$$

解. 注意到
$$\int_0^\pi \frac{\cos mx}{5-4\cos x}dx=\int_{-\pi}^0 \frac{\cos mx}{5-4\cos x}dx.$$
所以
$$I=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \frac{\cos mx}{5-4\cos x}dx.$$
把另一半补上
$$J=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \frac{\sin mx}{5-4\cos x}dx.$$
则
$$I+iJ=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \frac{z^m}{5-4\cos x}dx=\frac{1}{2i}\int_{|z|=1}\frac{z^m}{5z-2z^2-z}dz.$$
有两个孤立奇点$2,\frac{1}{2}$，均为一阶。
$$Res[\frac{z^m}{5z-2z^2-z},\frac{1}{2}]=\frac{1}{2^m}\cdot\frac{1}{5-4\times 1/2}=\frac{1}{3\times 2^m}.$$
所以
$$I+iJ=\frac{1}{2i}\times 2\pi i Res[\frac{z^m}{5z-2z^2-z},\frac{1}{2}]=\frac{\pi}{3\times 2^m}.$$
对照实部与虚部，我们有
$$I=\frac{\pi}{3\times 2^m}.$$

例子7. 求积分$I=\int_{|z|=2}\frac{|dz|}{|z-i|^2}$.

解. 先做一个变换
$$z=2e^{i\theta},\theta\in[0,2\pi).$$
则
$$|dz|=2d\theta,\theta\in[0,2\pi).$$
所以
$$I=\int_{|z|=2}\frac{|dz|}{|z-i|^2}=\int_0^{2\pi}\frac{2d\theta}{(2e^{i\theta}-i)(2e^{-i\theta}+i)}.$$
再做一个变换$\xi=e^{i\theta},\theta\in[0,2\pi)$. 得到
$$I=\int_{|\xi|=1}\frac{2dz}{iz(2z-i)(2z^{-1}+i)}=\int_{|\xi|=1}\frac{2dz}{i(2z-i)(2+iz)}.$$
有两奇点$2i,\frac{i}{2}$ 都是一阶。我们仅需要考虑$\frac{i}{2}$
$$Res[\frac{2}{i(2z-i)(2+iz)},i/2]=\frac{2}{3i}.$$
所以
$$I=\frac{4\pi}{3}.$$

1.2.2 $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$型积分

这一小节我们将计算

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx.$$

其中，P，Q 均为多项式，Q 的次数比P 至少高二次，Q 的所有零点都不在实轴上。我们需要以下引理：

引理1. 设当R 充分大得时候，复函数f 在圆弧$C_R=Re^{i\theta},\alpha<\theta<\beta$ 上连续，并且

$$\lim_{z\to\infty}zf(z)=A.$$

则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)dz=i(\beta-\alpha)A.$$

证明. 设$z=Re^{i\theta}$，则$dz=iRe^{i\theta}d\theta=izd\theta$。所以

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)dz=\int_{\alpha}^{\beta}f(z)izd\theta=i(\beta-\alpha)A.$$

现在我们计算I，补上一个$C_R:|z|=R,argz\in[0,\pi]$。则

$$I=\lim_{R\to\infty}\left(\int_{C_R\cup[-R,R]}\frac{P(z)}{Q(z)}dz-\int_{C_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz\right).$$

注意到Q 的次数比P 至少高二次，所以

$$\lim_{|z|\to\infty}z\frac{P(z)}{Q(z)}=0.$$

根据引理，我们有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz=0.$$

所以仅需要计算

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R\cup[-R,R]}\frac{P(z)}{Q(z)}dz.$$

由留数定理

$$I=\lim_{R\to\infty}\int_{C_R\cup[-R,R]}\frac{P(z)}{Q(z)}dz=2\pi i\sum_{z_i}Res[\frac{P(z)}{Q(z)},z_i],$$

其中z_i 为Q 所有位于上半复平面的零点。

例子8. 计算积分

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^3}\quad(a>0).$$

解. $\frac{1}{(x^2+a^2)^3}$ 在上半平面只有一个奇点$z=ai$（三阶极点）。所以

$$2\pi iRes[\frac{1}{(x^2+a^2)^3},ai]=2\pi i\frac{1}{2}\lim_{z\to ai}\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^3}(z-ai)^2\right)''=\frac{3\pi}{8a^5}.$$

1.2.3 $I_1=\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\cos mxdx$ 和$I_2=\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\sin mxdx$，$(m>0)$ 型积分

这里$R=\frac{P}{Q}$，P,Q 都是多项式，Q的零点不在实轴上，Q 的次数至少比P 高一次。显然我们仅需求

$$I_1+iI_2=\int_{-\infty}^{\infty}R(x)e^{imx}dx.$$

要求这个积分，我们也要一个引理

引理2 (若当引理). 当R 充分大的时候$g(z)$ 在$C_R:|z|=R,Im(z)>-a\ (a\geq 0)$ 上连续，并且$\lim_{z\to\infty}g(z)=0$. 则对任意正数λ，我们有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}g(z)e^{i\lambda z}dz=0.$$

我们先默认该引理是对的，补上一个$C_R:|z|=R,argz\in[0,\pi]$。则

$$I_1+iI_2=\lim_{R\to\infty}\left(\int_{C_R\cup[-R,R]}R(z)e^{imz}dz-\int_{C_R}R(z)e^{imz}dz\right).$$

注意到

$$\lim_{z\to\infty}R(z)=0.$$

所以由若当引理，我们有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}R(z)e^{imz}dz=0.$$

所以

$$I_1+iI_2=\lim_{R\to\infty}\int_{C_R\cup[-R,R]}R(z)e^{imz}dz=2\pi i\sum_{z_i}Res[R(z)e^{imz},z_i].$$

$$I_1=Re\left(2\pi i\sum_{z_i}Res[R(z)e^{imz},z_i]\right).$$

$$I_2=Im\left(2\pi i\sum_{z_i}Res[R(z)e^{imz},z_i]\right).$$

其中z_i 为所有$R(z)$ 位于上半复平面的奇点，也就是$Q(z)$ 所有位于上半平面的零点。 我们证明若当引理：

证明. 图见书：首先是侧面的小弧，当R 很大的时候

$$|\int_{\widehat{AB}}g(z)e^{i\lambda z}dz|\leq\int_{-\alpha}^{0}M_Re^{-\lambda R\sin\theta}Rd\theta\leq\int_{-\alpha}^{0}M_Re^{\lambda a}Rd\theta=M_Re^{\lambda a}R\alpha\leq 2M_Re^{\lambda a}R\sin\alpha=\frac{\pi}{2}M_Re^{\lambda a}a.$$

即

$$|\int_{\widehat{AB}}g(z)e^{i\lambda z}dz|\to 0(R\to\infty).$$

然后是最上面的大弧，

$$|\int_{\widehat{BC}}g(z)e^{i\lambda z}dz|\leq\int_{0}^{\pi}M_Re^{-\lambda R\sin\theta}Rd\theta=2\int_0^{\pi/2}M_Re^{-\lambda R\sin\theta}Rd\theta\leq 2\int_0^{\pi/2}M_Re^{-\frac{2}{\pi}\lambda R\theta}Rd\theta.$$

所以

$$|\int_{\widehat{BC}}g(z)e^{i\lambda z}dz|\leq-\frac{M_R}{\lambda}e^{-\frac{2}{\pi}\lambda R\theta}|_0^{\frac{\pi}{2}}\to 0.$$

例子9. 计算积分

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2}dx \quad (a>0).$$

解. $\frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)^2}$ 在上半复平面只有一个奇点$z=ai$（二阶极点）。所以

$$Res[\frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)^2},ai]=\lim_{z\to ai}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)^2}(z-ai)^2\right)'=-\frac{e^{-a}i}{4a^2}-\frac{e^{-a}i}{4a^3}.$$

$$I=Re\left(2\pi iRes[\frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)^2},ai]\right)=\frac{\pi e^{-a}}{2a^2}+\frac{\pi e^{-a}}{2a^3}.$$

最后我们举个例子说明孤立奇点在实轴上的情形。此时往往会用到以下引理：

引理3. 设当r 充分小的时候，复函数f 在圆弧$C_r=a+re^{i\theta},\alpha<\theta<\beta$ 上连续，并且

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=A.$$

则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_r}f(z)dz=i(\beta-\alpha)A.$$

例子10. 计算积分$\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2(x^2+9)}dx$.

解. 仅需求

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2(x^2+9)}dx.$$

这题目和前面的很像，但不能代公式，因为实轴上有个奇点$z=0$。

补上一个大圆弧$C_R:|z|=R,argz\in[0,\pi]$ 和一个小圆弧$C_r:|z|=R,argz\in[0,\pi]$。设C 是由实轴和圆弧形成的简单闭曲线。则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2(x^2+9)}dx=Re\left(\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_C-\int_{C_R}+\int_{C_r}\frac{1-e^{iz}}{z^2(z^2+9)}dz\right).$$

每一段我们都能求出来：

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_C\frac{1-e^{iz}}{z^2(z^2+9)}dz=2\pi i\frac{1-e^{-3}}{(3i)^2(3i+3i)}=\frac{\pi(e^{-3}-1)}{27}.$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{z^2(z^2+9)}dz=0.$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z^2(z^2+9)}dz=0.$$

因为

$$\lim_{r\to 0}z\frac{1-e^{iz}}{z^2(z^2+9)}=-\frac{i}{9}.$$

所以

$$\int_{C_r}\frac{1-e^{iz}}{z^2(z^2+9)}dz=\frac{\pi}{9}.$$

所以结果为

$$\frac{\pi(e^{-3}+2)}{54}.$$

例子11. 计算积分$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx$.

解. 同样地，我们仅需要计算

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x(x^2+1)}dx.$$

补上一个大圆弧$C_R:|z|=R,argz\in[0,\pi]$ 和一个小圆弧$C_r:|z|=R,argz\in[0,\pi]$ 。设C 是由实轴和圆弧形成的简单闭曲线。则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin}{x(x^2+1)}dx=Im\left(\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_C-\int_{C_R}+\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}dz\right).$$

每一段我们都能求出来：

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_C\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}dz=2\pi i\frac{e^{i^2}}{i(2i)}=-\frac{\pi i}{e}.$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}dz=0.$$

因为

$$\lim_{r\to 0}z\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}=1.$$

所以

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}dz=\pi i.$$

所以结果为

$$\pi-\frac{\pi}{e}.$$

1.2.4 杂例

例子12. 计算积分$\int_0^{\infty}(\frac{\sin x}{x})^2dx$.

解. 我们仅需要计算

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{\sin x}{x})^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(2x)}{2x^2}dx.$$

补上一个大圆弧$C_R:|z|=R,argz\in[0,\pi]$ 和一个小圆弧$C_r:|z|=R,argz\in[0,\pi]$ 。设C 是由实轴和圆弧形成的简单闭曲线。则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(2x)}{2x^2}dx=Re\left(\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_C-\int_{C_R}+\int_{C_r}\frac{1-e^{2zi}}{2z^2}dz\right).$$

每一段我们都能求出来：

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_C\frac{1-e^{2zi}}{2z^2}dz=0.$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1-e^{2zi}}{2z^2}dz=0.$$

因为

$$\lim_{r\to 0}z\frac{1-e^{2zi}}{2z^2}=-i.$$

所以

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{1-e^{2zi}}{2z^2}dz=\pi.$$

所以结果为

$$\frac{\pi}{2}.$$

例子13 (弗雷涅积分)**.** *$I=\int_0^\infty \cos x^2 dx$.*

解. 考察全平面解析函数$\cos(z^2)+i\sin z^2=e^{iz^2}$。画折线$C:0\to R\overset{C_1}{\to}R+Ri\overset{C_2}{\to}0$（见书本)。则

$$J=\int_0^\infty e^{iz^2}dz=\lim_{R\to\infty}\int_C-\int_{C_1}-\int_{C_2}e^{iz^2}dz.$$

每一段我们都能求出来：

$$\lim_{R\to\infty}\int_C e^{iz^2}dz=0.$$

$$\lim_{R\to\infty}|\int_{C_1}e^{iz^2}dz|\le\lim_{R\to\infty}\int_0^R|e^{(R+it)^2i}i|dt\le\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-2Rt}dt=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2R}=0.$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_2}e^{iz^2}dz=\lim_{R\to\infty}\int_R^0 e^{(1+i)^2t^2i}(1+i)dt=-\lim_{R\to\infty}(1+i)\int_0^R e^{-2t^2}dt=-\frac{1+i}{2\sqrt{2}}\sqrt{\pi}.$$

所以$J=\frac{1+i}{2\sqrt{2}}\pi$. 即

$$\int_0^\infty\cos x^2dx=\int_0^\infty\sin x^2dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

例子14. *计算$I_1=\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2}\cos bx dx$ 和$I_2=\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2}\sin bx dx$ $(a>0)$.*

解. 仅需要计算$J=I_1+iI_2$。

$$J=\int_{-\infty}^\infty e^{az^2+ibz}dz=\int_{-\infty}^\infty e^{-a(z-\frac{bi}{2a})^2-\frac{b^2}{4a}}dz=\int_{-\infty-\frac{bi}{2a}}^{\infty+\frac{bi}{2a}}e^{-az^2-\frac{b^2}{4a}}dz.$$

画一个矩形的闭曲线$-R\to R\overset{C_1}{\to}R-\frac{bi}{2a}\to -R-\frac{bi}{2a}\overset{C_2}{\to}-R$（见书本)。

$$\lim_{R\to\infty}|\int_{C_1}e^{-az^2-\frac{b^2}{4a}}dz|\le\lim_{R\to\infty}\int_{C_1}|e^{-az^2-\frac{b^2}{4a}}||dz|\le\lim_{R\to\infty}e^{-R^2+\frac{b^2}{4a}}\times\frac{b}{2a}=0.$$

所以$\lim_{R\to\infty}\int_{C_1}e^{-az^2-\frac{b^2}{4a}}dz=0$；同理$\lim_{R\to\infty}\int_{C_2}e^{-az^2-\frac{b^2}{4a}}dz=0$。所以

$$J=\int_{-\infty-\frac{bi}{2a}}^{\infty+\frac{bi}{2a}}e^{-az^2-\frac{b^2}{4a}}dz=\int_{-\infty}^\infty e^{-az^2-\frac{b^2}{4a}}dz=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

即$I_1=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{-\frac{b^2}{4a^2}}$, $I_2=0$。书上是$\int_0^\infty$，所以是一半。

1.2.5 多值情形：只要求了解。

计算某些积分的时候，我们会碰到多值的情形。

例子15. 计算积分

$$I=\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2+1)^2}dx.$$

解. 复函数$\frac{Lnz}{(z^2+1)^2}$，$Ln(z)=ln|z|+iArgz, Argz\in(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ 解析区域为全复平面去掉负虚轴；围道$C:-R\xrightarrow{C_1}-r\xrightarrow{\text{小圆弧}C_r}r\xrightarrow{C_2}R\xrightarrow{\text{大圆弧}C_R}-R$。

$$\int_{C_1}\frac{Lnz}{(z^2+1)^2}dz=\int_R^r\frac{Ln(-x)}{((-x)^2+1)^2}(-1)dx=-\int_R^r\frac{\ln x+i\pi}{(x^2+1)^2}dx=\int_r^R\frac{\ln x+i\pi}{(x^2+1)^2}dx.$$

$$\int_{C_2}\frac{Lnz}{(z^2+1)^2}dz=\int_r^R\frac{\ln x}{(x^2+1)^2}dx.$$

$$\lim_{r\to0}\int_{C_r}\frac{Lnz}{(z^2+1)^2}dz=\lim_{z\to0}z\frac{Lnz}{(z^2+1)^2}\times(\pi i)=0.$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{Lnz}{(z^2+1)^2}dz=\lim_{z\to\infty}z\frac{Lnz}{(z^2+1)^2}\times(\pi i)=0.$$

最后当R 很大r 很小的时候，

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to0}}\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_r}+\int_{C_R}=2\pi iRes[\frac{Lnz}{(z^2+1)^2},i]=\frac{\pi+2i}{8}.$$

最后

$$I=\frac{\pi+2i}{16}-\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{i\pi}{(x^2+1)^2}dx=\frac{\pi+2i}{16}-\frac{1}{4}\int_{-\infty}^\infty\frac{i\pi}{(x^2+1)^2}dx=-\frac{\pi}{4}.$$

一般情形

$$2\int_0^\infty R(x)\ln xdx+\pi\int_0^\infty R(x)dx=2\pi i\sum_{z_i}Res[R(z)\ln z,z_i].$$

其中z_i 为所有上半平面奇点；其中$R(x)$ 为偶的有理多项式，分母比分子至少高二次，零点不在实轴上。

例子16. $I=\int_0^\infty z^pR(z)dz$，$p$ 不是整数；R 为有理多项式，奇点不在正实轴；并且满足

$$\lim_{z\to0}z^{p+1}R(z)=\lim_{z\to\infty}z^{p+1}R(z)=0.$$

解. 图见书本：画围道$C:r\xrightarrow{\text{实轴上沿}C_1}R\xrightarrow{\text{大圆}C_R}R\xrightarrow{\text{实轴下沿}C_2}r\xrightarrow{\text{小圆}C_r}r$。

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to0}}\int_C z^pR(z)dz=2\pi i\sum_i Res[z^pR(z),z_i].$$

其中z_i 表示所有奇点。

$$\int_{C_2}z^pR(z)dz=-\int_{C_1}e^{2\pi p}z^pR(z)dz.$$

由两个引理：

$$\lim_{r\to0}\int_{C_r}z^pR(z)dz=\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}z^pR(z)dz=0.$$

所以
$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_{C_1} z^pR(z)dz = \frac{1}{1-e^{2\pi p}}2\pi i\sum_i Res[z^pR(z), z_i].$$
其中z_i 表示所有奇点。

1.3 罗歇定理

在这一节中，我们主要关心一个解析函数在简单闭曲线内部的零点个数。设$C:[0,1]\to\mathbb{C}$（逆时针）是简单闭曲线并且$f|_C$ 恒不为零，f 在C 和C 所围城的曲线内部除了极点（$b_1,\cdots,b_l$，阶数相应为$n_1,\cdots,n_l$）解析，我们不妨用指数形式表示
$$f(z)=r(z)e^{i\theta(z)}.$$
其中$r(z)$ 是模，$\theta(z)$ 是幅角（每个点取一个幅角但要保证连续，首尾取值可以不相等）。所以限制在C 上，
$$\frac{f'}{f}=\frac{r'e^{i\theta}+rie^{i\theta}\theta'}{re^{i\theta}}=\frac{r'}{r}+i\theta'.$$
所以
$$\int_C\frac{f'}{f}dz=\ln r(z)|_{z_1}^{z_2}+i\int_C 1d\theta,.$$
所以
$$\int_C\frac{f'}{f}dz=i\int_C 1d\theta.$$
又设f 在C 内部的所有零点为$a_1,\cdots,a_k$相应阶数为$m_1,\cdots,m_k$，则在C 内部f 可以写为
$$f=(z-a_1)^{m_1}\cdots(z-a_k)^{m_k}(z-b_1)^{-n_1}\cdots(z-b_l)^{-n_l}g$$
$g(z)$ 在C 和C 内没有零点且解析。所以
$$\int_C\frac{f'}{f}dz=\int_C\sum_i\frac{m_i}{z-a_i}-\sum_i\frac{n_i}{z-b_i}+\frac{g'}{g}dz.$$
由柯西积分定理和柯西积分公式，我们有
$$\int_C\frac{f'}{f}dz=2\pi i\sum_i m_i-2\pi i\sum_i n_i.$$
比较得到

定理3.
$$\sum_i m_i-\sum_i n_i=\frac{\int_C 1d\theta}{2\pi}=\frac{\Delta_C\, arg[f]}{2\pi}.$$
换句话说就是零点个数（计重数）减去极点个数（计算重数）等于曲线在f 下的象围绕0 点的圈数。显然有以下性质
$$\Delta_C\, arg[fg]=\Delta_C\, arg[f]+\Delta_C\, arg[g].$$

但是呢直接数曲线的象围绕0 点的圈数并不容易。我们往往用到以下定理来找零点个数：

定理4. 假设解析函数f,φ 在简单闭曲线C 上满足

$$|f| > |\varphi|.$$

则f 和$f\pm\varphi$ 在C 内有相同的零点个数。

证明.

$$\Delta_C arg[f\pm\varphi] = \Delta_C arg[f(1\pm\frac{\varphi}{f})] = \Delta_C arg[f] + \Delta_C arg[1\pm\frac{\varphi}{f}].$$

仅需要说明$\Delta_C arg[1\pm\frac{\varphi}{f}]=0$。实际上$1\pm\frac{\varphi}{f}$ 将曲线C 映入$Re(z)>0$，其围绕0的圈数必定是零，所以$\Delta_C arg[1\pm\frac{\varphi}{f}]=0$。

例子17. 求$z^{2020}+z^{20}=20$ 在$1<|z|<2$ 内部的零点个数。

解. 设$f_1=z^{2020}$、$\varphi_1=z^{20}-20$ 则在$|z|=2$ 上

$$|f_1| > |\varphi_1|.$$

所以$f_1+\varphi_1$ 在$|z|<2$ 有2020 个零点。

又设$f_2=20$、$\varphi_2=z^{2020}+z^{20}$，则在$|z|=1$ 上

$$|f_2| > |\varphi_2|.$$

所以φ_2-f_2 在$|z|\le 1$ 没有零点。所以f 在$1<|z|<2$ 有2020 个零点。