



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

图论第二次习题课

2025 年 12 月 9 日



- 1 四至六章作业讲解
- 2 四至六章知识点回顾



- 1 四至六章作业讲解
- 2 四至六章知识点回顾



习题 4.7

设 G 是 ν 个顶点、 ε 条边的简单平面图, $\varepsilon < 30$, 证明存在顶点 $v \in V(G)$, 使得 $\deg(v) \leq 4$ 。

考点: 反证法, 平面图性质

习题 4.7

设 G 是 ν 个顶点、 ε 条边的简单平面图, $\varepsilon < 30$, 证明存在顶点 $v \in V(G)$, 使得 $\deg(v) \leq 4$ 。

证明: 我们不妨设 G 是连通的 (不连通时, G 可以取为图中点数最少的连通分支)
当 $\nu \leq 3$ 时, 选取 G 中任意一点即可。

当 $\nu \geq 4$ 时, 反证: 假设 G 同时满足 $\varepsilon < 30$ 和 $\delta(G) \geq 5$, 则有

$2\varepsilon = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) \geq 5\nu$, 故 $\varepsilon \geq \frac{5\nu}{2}$, 即有 $\nu < 12$ 。

但根据 **推论 4.2**, 又有 $\varepsilon \leq 3\nu - 6$ 即 $\frac{5\nu}{2} \leq 3\nu - 6$, 解得 $\nu \geq 12$, 矛盾。

定理 (推论 4.2)

若 G 是 $\nu \geq 3$ 的连通简单平面图, 则 $\varepsilon \leq 3\nu - 6$ 。

Remark. $\varepsilon = 30$ 时结论是不成立的, 反例在课本 P76 最右边的图 (正二十面体图)。



习题 4.11

一个连通平面图是 2-连通的，当且仅当它的每个面的边界都是圈。

考点：反证法，平面图的性质，连通性

习题 4.11

一个连通平面图是 2-连通的，当且仅当它的每个面的边界都是圈。

证明：

(\Leftarrow) 若图 G 的每个面的边界都是圈，则 G 是 2-连通的。

采用逆否命题：假设 G 不是 2-连通（即 G 中存在割点），证明存在某个面的边界不是圈。

设 v 是 G 的一个割点，删除 v 后 G 分为至少两个连通分支 A 与 B 。在 v 的邻边在嵌入中的循环次序中（从某条边开始顺时针旋转得到一个 v 的邻边的次序），必存在两条相邻的边 e 和 f 分别属于 A 和 B 。这两条边所夹的面 F （即在 v 处由 e 和 f 所确定的面）的边界必然经过 v 至少两次：因为从 v 沿 e 进入 A ，在 A 中行走后必须回到 v ，然后才能沿 f 进入 B 。因此， F 的边界不是圈（顶点 v 重复出现），矛盾。
故 G 是 2-连通的。

(\Rightarrow) 若 G 是 2-连通的, 则每个面的边界都是圈。

任取 G 的一个面 F , 设 $e = (x_0, y)$ 是 F 边界上的一条边。由于 G 是 2-连通的, x_0 必有另一个异于 y 的邻居 x_1 也在 F 的边界上 (否则 x_0 会成为割点)。

构造边界行走: 从 x_0 出发, 沿 F 的边界依次选取顶点序列 x_0, x_1, x_2, \dots , 使得对每个 $n \geq 0$, x_{n+1} 是 x_n 在 F 边界上的邻居, 且 $x_{n+1} \neq x_{n-1}$ (当 $n \geq 1$)。继续直至首次遇到 $x_{n+1} = y$ 。

断言: 闭合路径 $C = x_0 x_1 \cdots x_n y x_0$ 是一个圈, 且恰为 F 的边界。

- ▶ 若存在 $j < n$ 使 $x_{n+1} = x_j$, 则路径 $x_j \rightarrow x_{j+1} \rightarrow \cdots \rightarrow x_n \rightarrow x_j$ 形成一条曲线, 将 F 分割, 矛盾。
- ▶ 若存在一边 e' 在 F 边界上但不在 C 中, 则由 2-连通性可找到连接 e' 两端且在 F 内部的路径, 同样分割 F , 矛盾。

因此 C 是圈且为 F 的边界。由 F 的任意性, 每个面的边界都是圈。



习题 4.12

在 $\nu \geq 7$ 的连通平面图 G 上可以选取不超过 5 个顶点, 把它们删除后得到的图不连通。

考点: 平面图性质



习题 4.12

在 $\nu \geq 7$ 的连通平面图 G 上可以选取不超过 5 个顶点, 把它们删除后得到的图不连通。

证明:

注意到由 **推论 4.3**, $\delta(G) \leq 5$, 所以存在点 $v \in V(G)$, $\deg(v) \leq 5$ 。删除 $N(v)$ 即可: 由于 $\nu \geq 7$, 删除 $N(v)$ 后图 G 至少包含两个节点, 且 v 不和图中别的任何点相邻, 所以 G 不连通。

定理 (推论 4.3)

若 G 是连通简单平面图, 则 $\delta(G) \leq 5$ 。

Remark. 注意审题。虽然之后很显然, 但是只说 $\delta(G) \leq 5$ 是不够的, 因为并没有直接解释题目的问题。



习题 5.2

树至多有一个完备匹配。

考点：匹配，树的性质，反证法



习题 5.2

树至多有一个完备匹配。

法一：

反证：假定树 T 中存在两个不同的完备匹配 $M_1, M_2 \in E(T)$ ，则考虑这两个边集的对称差 $M_1 \oplus M_2$ ，其对应的生成子图 H 中每个点度数要么为 0，要么为 2。

又因为 $M_1 \neq M_2$ ，故 $M_1 \oplus M_2$ 非空，对应的 H 的确有若干度数为 2 的点。我们知道这样的图一定是若干个圈的不交并。

又由于 $M_1 \oplus M_2 \subseteq M_1 \cup M_2 \subseteq E(T)$ ，所以 T 中含圈，和 T 是树矛盾。

Remark. 有不少同学尝试对边数归纳来证明这个命题，其实是可行的，不过大部分同学写的都有问题，下面是一种办法。

习题 5.2

树至多有一个完备匹配。

法二：

我们使用归纳法证明更强的命题：任意森林 F 至多有一个完备匹配。

- ※ 当 $|E(F)| = 0$ 时, F 全为孤立点, 没有完备匹配, 命题成立。
- ※ 假设对边数小于 $n(n \geq 1)$ 的森林, 至多有一个完备匹配。
- ※ 考虑边数为 n 的森林 F 。因为 $n \geq 1$, F 至少有一条边, 从而至少有一个叶子节点。取一个叶子节点 u , 设其唯一邻点为 v 。考虑以下两种情形:

1. 若 F 没有完备匹配: 结论自然成立。
2. 若 F 有完备匹配: 由于 u 是叶子, 在任意完备匹配中, u 必须被匹配, 且只能通过边 uv 匹配。因此, 任意完备匹配都包含边 uv 。设 M 是 F 的一个完备匹配, 则 $M = \{uv\} \cup M'$, 其中 M' 是森林 $F' = F - \{u, v\}$ 的一个完备匹配。由归纳假设, F' 至多有一个完备匹配, 故 M' 唯一, 从而 M 唯一。

归纳成立。由于树是森林, 因此树至多有一个完备匹配。



习题 5.4

两个人在图 G 上博弈，交替选择不同的顶点 v_0, v_1, v_2, \dots ，使得当 $i > 0$ 时， v_i 与 v_{i-1} 相邻，直到不能选到顶点为止。谁最后能选到一个顶点谁赢。证明：第一个选顶点的人有必胜的策略，当且仅当 G 中无完备匹配，并给出一个必胜的策略。

考点：匹配，博弈



习题 5.4

两个人在图 G 上博弈，交替选择不同的顶点 v_0, v_1, v_2, \dots ，使得当 $i > 0$ 时， v_i 与 v_{i-1} 相邻，直到不能选到顶点为止。谁最后能选到一个顶点谁赢。证明：第一个选顶点的人有必胜策略，当且仅当 G 中无完备匹配，并给出一个必胜的策略。

证明：（由于游戏信息公开、状态有限、无平局，必有一方有必胜策略。）

(\Rightarrow): 若 G 有完备匹配，则后手有必胜策略。

设 M 是 G 的一个完备匹配。后手的策略是：无论先手选哪个点 v ，后手下一步都选择 M 中与 v 匹配的点 u 。这样，后手总能在对方行动后继续行动，最后无法行动的一定是先手。所以此时先手无必胜策略。



(\Leftarrow): 若 G 无完备匹配, 则先手有必胜策略。我们给出一个先手必胜策略。
设 M 是 G 的一个最大匹配。由于其是非完备匹配, 则存在 M 未匹配的点。
先手第一步任取一个不被 M 匹配的点 v_0 。与 v_0 相邻的点一定都被许配 (否则未被许配的点 u 与 v_0 所连的边可以加进 M 中, 与 M 的最大性矛盾), 故无论后手选择哪个与 v_0 相邻的点作为 v_1 , 先手都可以选择 v_1 被 M 许配的点 v_2 。
此后, 每当后手进行选择, 如果他可以选到一个未被 M 许配的点 v_{2n+1} , 那么 $v_0 v_1 v_2 \cdots v_{2n+1}$ 构成一条可增广轨道, 与 M 的最大性矛盾。故后手能选择的一定是被 M 许配的点, 此时先手再选择 M 许配给该点的点即可。

综上, 先手有必胜策略当且仅当 G 中无完备匹配, 且上述构造即为一必胜策略。



习题 5.6

8×8 的正方形去除对角上的两个 1×1 的小正方形后, 不能用 1×2 的长方形覆盖。

考点: 匹配的应用



习题 5.6

8×8 的正方形去除对角上的两个 1×1 的小正方形后, 不能用 1×2 的长方形覆盖。

证明:

考虑一个 8×8 的正方形棋盘的每个格子的坐标 (记作 (a, b)), 不难看出两个格子能够被一个 1×2 的长方形覆盖一个必要条件是: 两个格子坐标之和 $a + b$ 奇偶性不同。根据 $a + b$ 的奇偶性, 我们将格子划分为两类 (类似国际象棋的黑格与白格)。以格子为点作图 G , G 中两点相邻当且仅当它们所对应的正方形格子在棋盘上相邻。由上得 G 是一个二分图。我们发现, 删去的对角的两个正方形属于同一个等价类, 又知道一种合理的覆盖方法会对应一个 G 的完备匹配。但是二分图 $G(A, B)$ 的两个部分点数不同, 一定不存在完备匹配, 所以也不存在合理的覆盖方法。故命题得证。



习题 5.15

证明：树 T 有完备匹配，当且仅当对任意 $v \in V(T)$ ，都有 $o(T-v) = 1$ 。

考点：Tutte 定理



习题 5.15

证明：树 T 有完备匹配，当且仅当对任意 $v \in V(T)$ ，都有 $o(T-v) = 1$ 。

证明： (\Rightarrow):

当树 T 有完备匹配时，由 Tutte 定理， $\forall S \subseteq V(T)$ ，都有 $o(T-S) \leq |S|$ 。令 $S = \{v\}$ ，则 $o(T-v) \leq 1$ ；又由于树 T 有完备匹配，则 $|T|$ 为偶数， $|T-v|$ 为奇数，所以 $o(T-v) \geq 1$ 综上， $o(T-v) = 1$

(\Leftarrow):

$\forall v \in V(T)$ ，都有 $o(T-v) = 1$ ，则 $V(T)$ 为偶数。

删去 v 后，树 T 被划分成若干个连通片，且只有一个连通片为奇片。

设奇片中与 v 相连的顶点为 u ，则 u 唯一存在， $e = uv$ 也被唯一确定的。

由对称性可知，若删去 u ， v 所在的连通片变成了奇片，也可以唯一确定 $e' = vu = e$ 。

因为 v 是任意的，所以对于树中的每个顶点都有如上的配对，这就构成了 T 中一个完备匹配。



习题 5.16

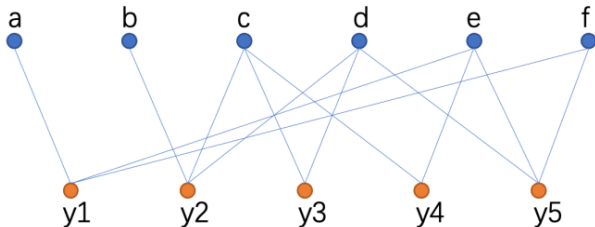
由 a, b, c, d, e, f 六个人组成检查团，检查 5 个单位的工作。若某单位与某人有过工作联系，则不能选派此人到该单位去检查工作。已知第一单位与 b, c, d 有过联系，第二单位与 a, e, f ，第三单位与 a, b, e, f ，第四单位与 a, b, d, f ，第五单位与 a, b, c 有过联系，请列出去各个单位进行检查的人员名单。

考点：匹配算法（匈牙利算法）

习题 5.16

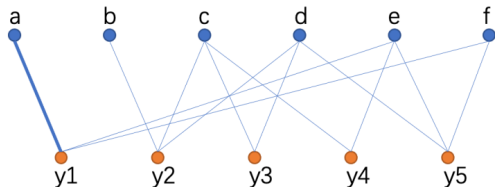
由 a, b, c, d, e, f 六个人组成检查团，检查 5 个单位的工作。若某单位与某人有过工作联系，则不能选派此人到该单位去检查工作。已知第一单位与 b, c, d 有过联系，第二单位与 a, e, f ，第三单位与 a, b, e, f ，第四单位与 a, b, d, f ，第五单位与 a, b, c 有过联系，请列出去各个单位进行检查的人员名单。

证明： 根据题意可以得到匹配问题的模型：

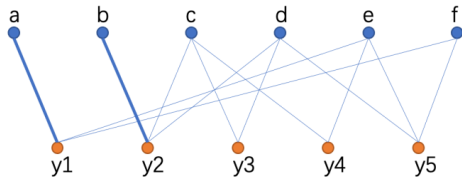


取初始匹配 $M = \emptyset$ 。

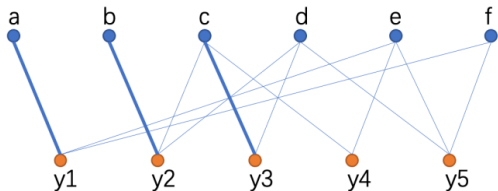
1. 选择未匹配节点 y_1 , 得到可增广轨道 $\{y_1 a\}$, $M = \{y_1 a\}$



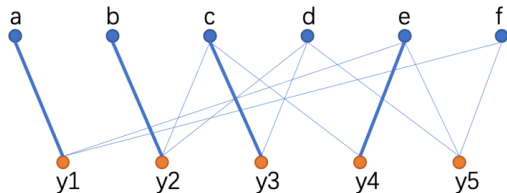
2. 选择未匹配节点 y_2 , 得到可增广轨道 $\{y_2 b\}$, $M = \{y_1 a, y_2 b\}$



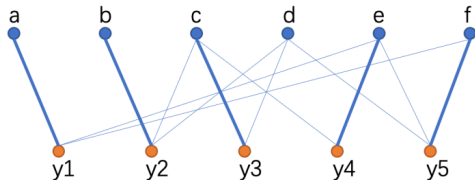
3. 选择未匹配节点 y_3 , 得到可增广轨道 $\{y_3c\}$, $M = \{y_1a, y_2b, y_3c\}$



4. 选择未匹配节点 y_4 , 得到可增广轨道 $\{y_4e\}$, $M = \{y_1a, y_2b, y_3c, y_4e\}$



5. 选择未匹配节点 y_5 , 得到可增广轨道 $\{y_5 f\}$, $M = \{y_1 a, y_2 b, y_3 c, y_4 e, y_5 f\}$



此时所有节点都被匹配, 算法停止。可以得到一种匹配方式为 $M = \{y_1 a, y_2 b, y_3 c, y_4 e, y_5 f\}$ 。



习题 5.19

证明：Kuhn-Munkreas 算法中修改顶标后， \hat{l} 仍然是可行顶标。

考点：Kuhn-Munkreas 算法，可行顶标



定义 5.6 给定边权二分图 $G = (X, \Delta, Y)$, 带有权值 $w: \Delta \rightarrow R$, 定义 $V(G) = X \cup Y$ 上的函数 $l: X \cup Y \rightarrow R$. 若 l 满足: 任给 $x \in X, y \in Y$, 都有 $l(x) + l(y) \geq w(xy)$, 则称 l 为一个**可行顶标**.

定义 5.7 给定边权二分图 $G = (X, \Delta, Y)$, 带有权值 $w: \Delta \rightarrow R$, 以及可行顶标 $l: X \cup Y \rightarrow R$. 定义 G 关于 l 的**相等子图** G_l 为:

- (1) $V(G_l) = V(G)$;
- (2) $E(G_l) = \{x_i y_j \mid l(x_i) + l(y_j) = w(x_i y_j)\}$.

定理 5.6 给定带有边权 $w: \Delta \rightarrow R$ 的二分图 $G = (X, \Delta, Y)$, 以及可行顶标 l . 若相等子图 G_l 有完备匹配, 设为 M , 则 M 是 G 的**最佳匹配**.

算法 5.3 (Kuhn-Munkres 算法)

输入: 二分图 $G = (X, \Delta, Y)$, $|X| = |Y|$, 边权函数 $w: \Delta \rightarrow R$.

输出: G 的最佳匹配 M .

步骤:

- (1) 选取 G 的一个可行顶标 l , 构造相等子图 G_l .
- (2) 用匈牙利算法求 G_l 的最大匹配 M . 若 M 是 G_l 的完备匹配, 则 M 是 G 的最佳匹配, 算法停止; 否则, 转 (3).
- (3) 设 u 是 G_l 中未被 M 匹配的顶点 (不妨设 $u \in X$). 令 $Z = \{v \mid v \in V(G_l), \text{ 且 } u, v \text{ 之间存在交错轨道}\}$, $S = X \cap Z$, $T = Y \cap Z$. 计算 $\alpha_l = \min\{l(x_i) + l(y_j) - w(x_i y_j) \mid x_i \in S, y_j \notin T\}$.
- (4) 修改可行顶标: $\hat{l}(v) = \begin{cases} l(v) - \alpha_l, & v \in S \\ l(v) + \alpha_l, & v \in T, \text{ 令 } l \leftarrow \hat{l}, \text{ 转 (1).} \\ l(v), & \text{其它} \end{cases}$

习题 5.19

证明：Kuhn-Munkres 算法中修改顶标后， \hat{l} 仍然是可行顶标。

证明：修改的可行顶标

$$\hat{l} = \begin{cases} l(v) - \alpha_l & v \in S \\ l(v) + \alpha_l & v \in T \\ l(v) & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\alpha_l = \min_{x \in S, y \notin T} \{l(x) + l(y) - \omega(x, y)\}$ 。

对 $\forall v \in S, u \in Y$,

1. 若 $u \in T$

$$\hat{l}(v) + \hat{l}(u) = l(v) - \alpha_l + l(u) + \alpha_l = l(v) + l(u) \geq \omega(u, v)$$

2. 若 $u \notin T$, 因为有 $\alpha_l \leq l(v) + l(u) - \omega(u, v)$

$$\hat{l}(v) + \hat{l}(u) = l(v) - \alpha_l + l(u) \geq l(v) + l(u) - (l(v) + l(u) - \omega(u, v)) = \omega(u, v)$$



若对 $\forall v \notin S, u \in Y$

$$\hat{l}(v) + \hat{l}(u) = l(v) + \hat{l}(u) \geq l(v) + l(u) \geq \omega(u, v)$$

综上, Kuhn-Munkreas 算法修改顶标后, \hat{l} 仍然是可行顶标。



习题 5.20

Kuhn-Munkreas 算法中修改顶标后, 由可行顶标 \hat{c} 得到相等子图 G_f 。证明: 在算法的第 (3) 步, 在 G_f 上找到的顶点子集 “ T ” 包含了在 G_f 上找到的顶点子集 “ T ”, 且至少多一个顶点。由此可知, Kuhn-Munkreas 算法最终能够找到某个相等子图, 该相等子图有完备匹配, 从而说明 Kuhn-Munkreas 算法的正确性。

考点: Kuhn-Munkreas 算法

习题 5.20

Kuhn-Munkreas 算法中修改顶标后, 由可行顶标 \hat{l} 得到相等子图 G_l 。证明: 在算法的第 (3) 步, 在 G_l 上找到的顶点子集 “ T ” 包含了在 G_l 上找到的顶点子集 “ T ”, 且至少多一个顶点。由此可知, Kuhn-Munkreas 算法最终能够找到某个相等子图, 该相等子图有完备匹配, 从而说明 Kuhn-Munkreas 算法的正确性。

证明: 对 $\forall x \in S, y \in T$, 有

$$\hat{l}(x) + \hat{l}(y) = l(x) - \alpha_l + l(y) + \alpha_l = l(x) + l(y)$$

故在交错轨道上的边仍然在 G_l 中, 而满足 $\alpha_l = l(x) + l(y) - \omega(x, y)$ 的边 xy (其中 $x \in S, y \notin T$) 会加入 $E(G_l)$, 则原来不在 T 中的顶点 y 会加入 T , 故 T 至少多一个顶点。

因此, Kuhn-Munkreas 算法最终能够找到某个相等子图, 该相等子图有完备匹配, 从而说明算法的正确性。



习题 6.3

设 G 是恰有 $2k$ 个奇度顶点的连通图, 证明: G 中存在 k 条边不重的行迹 P_1, P_2, \dots, P_k , 使得 $E(G) = \bigcup_{i=1}^k E(P_i)$ 。

考点: Euler 图, 行迹分解

习题 6.3

设 G 是恰有 $2k$ 个奇度顶点的连通图, 证明: G 中存在 k 条边不重的行迹 P_1, P_2, \dots, P_k , 使得 $E(G) = \bigcup_{i=1}^k E(P_i)$ 。

证明:

设 G 的奇度顶点为 v_1, v_2, \dots, v_{2k} 。将它们分为 k 组, 每组为 v_i 和 v_{i+k} ($i = 1, 2, \dots, k$)。在 G 中增加 k 条边 e_i , 连接 v_i 和 v_{i+k} , 得到新图 G' 。由于每条新边为两个奇度顶点各增加一度, 故 G' 中所有顶点度数均为偶数, 且 G' 连通, 因此 G' 是 Euler 图。

设 G' 的一条 Euler 回路为 C 。在 C 中删除新增的边 e_i ($i = 1, 2, \dots, k$), 则 C 被分割成 k 条行迹 P_1, P_2, \dots, P_k 。由于 C 包含了 G' 的所有边, 且新增边 e_i 被删除, 故 $E(G) = \bigcup_{i=1}^k E(P_i)$, 且这些行迹边不重。



习题 6.5

如何将 9 个 α , 9 个 β , 9 个 γ 排成一个圆形, 使得由这些 α, β, γ 产生的 27 个长为 3 的符号串在其中都出现且只出现一次?

考点: Euler 回路

习题 6.5

如何将 9 个 α , 9 个 β , 9 个 γ 排成一个圆形, 使得由这些 α, β, γ 产生的 27 个长为 3 的符号串在其中都出现且只出现一次?

解:

构造有向图 D , 其中顶点为所有长为 2 的符号串 (共 $3^2 = 9$ 个, 如 $\alpha\alpha, \alpha\beta, \dots, \gamma\gamma$)。对于任意两个顶点 u 和 v , 若 u 的后一个字符与 v 的前一个字符相同, 则从 u 到 v 连一条有向边。这样, D 中每个顶点的入度和出度均为 3, 故 D 存在 Euler 回路。一条 Euler 回路对应一个长为 27 的环形序列, 其中每个长为 3 的符号串恰好出现一次。例如, 一条可能的 Euler 回路产生的序列为:

$$\alpha\alpha\alpha\beta\alpha\beta\beta\alpha\gamma\alpha\beta\gamma\alpha\gamma\beta\alpha\alpha\gamma\gamma\beta\beta\beta\gamma\beta\gamma\gamma\gamma$$

此序列满足要求。



习题 6.16

若 G 是二分图，但其顶点的划分 X 与 Y 不均匀，即 $|X| \neq |Y|$ ，则 G 是不是 Hamilton 图，为什么？



习题 6.16

若 G 是二分图，但其顶点的划分 X 与 Y 不均匀，即 $|X| \neq |Y|$ ，则 G 是不是 Hamilton 图，为什么？

证明：不是。

假设 G 是二分图，划分 (X, Y) 满足 $|X| \neq |Y|$ 。若 G 存在 Hamilton 圈 C ，则 C 必须交替经过 X 和 Y 中的顶点。因此 C 上 X 和 Y 的顶点数相等，从而 $|X| = |Y|$ ，矛盾。所以， G 不是 Hamilton 图。



习题 6.17

设 G 是 ν 阶无向简单图, 边数 $\varepsilon = \frac{1}{2}(\nu - 1)(\nu - 2) + 2$ 。

(1) 证明: G 是 Hamilton 图。

(2) 举例说明, 当 $\varepsilon = \frac{1}{2}(\nu - 1)(\nu - 2) + 1$ 时, G 不一定是 Hamilton 图。

考点: Hamilton 图的充分条件

习题 6.17

设 G 是 ν 阶无向简单图, 边数 $\varepsilon = \frac{1}{2}(\nu - 1)(\nu - 2) + 2$ 。

(1) 证明: G 是 Hamilton 图。

(2) 举例说明, 当 $\varepsilon = \frac{1}{2}(\nu - 1)(\nu - 2) + 1$ 时, G 不一定是 Hamilton 图。

证明: (1) 我们使用定理 6.7。假设 G 不是 Hamilton 图。则存在两个顶点 u, v , 使得 $d(u) + d(v) \leq \nu - 1$ 。

考虑图 G 的边数上界: 与 u 或 v 相关联的边至多有 $d(u) + d(v) \leq \nu - 1$ 条; 其余 $\nu - 2$ 个顶点之间最多有 $\binom{\nu-2}{2}$ 条边。因此总边数满足:

$$\varepsilon \leq \frac{(\nu-2)(\nu-3)}{2} + (\nu - 1) = \frac{\nu^2 - 3\nu + 4}{2}. \text{ 但已知 } \varepsilon = \frac{1}{2}(\nu - 1)(\nu - 2) + 2 = \frac{\nu^2 - 3\nu + 6}{2}.$$

矛盾。故假设不成立, G 是 Hamilton 图。

定理 (定理 6.7)

设 $\nu(G) \geq 3$, 对 G 的任意一对顶点 u, v , 若 $\deg(u) + \deg(v) \geq \nu(G)$, 则 G 是 Hamilton 图。



习题 6.17

设 G 是 ν 阶无向简单图, 边数 $\varepsilon = \frac{1}{2}(\nu - 1)(\nu - 2) + 2$ 。

(1) 证明: G 是 Hamilton 图。

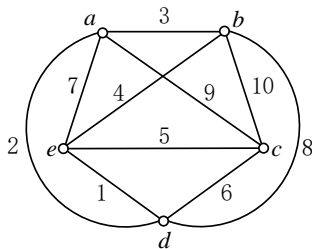
(2) 举例说明, 当 $\varepsilon = \frac{1}{2}(\nu - 1)(\nu - 2) + 1$ 时, G 不一定是 Hamilton 图。

(2) 举例: 取 G 为一个完全图 $K_{\nu-1}$, 再加上一个顶点 v , 且 v 仅与 $K_{\nu-1}$ 中的一个顶点 u 相连。则 $\varepsilon = \frac{1}{2}(\nu - 1)(\nu - 2) + 1$, 但 G 不是 Hamilton 图, 因为顶点 v 的度数为 1, 无法构成 Hamilton 圈。

习题 6.22

5 阶完全加权图如图所示,

- (1) 用最邻近法求以 a 为起点的旅行商问题的近似解;
- (2) 用最小生成树法求以 a 、 b 为起点的旅行商问题的近似解;
- (3) 用最小权匹配法求旅行商问题的近似解。



(1) 最邻近法从 a 出发:

最近邻 $a \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$ 。

总权: $2 + 1 + 4 + 10 + 9 = 26$ 。

(2) 最小生成树法:

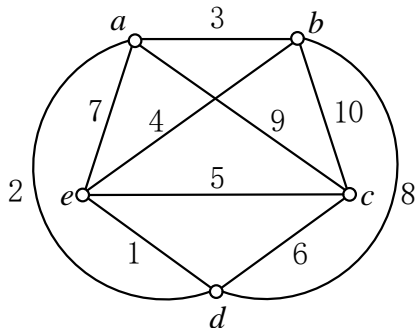
最小生成树: $b - a, a - d, d - e, e - c$ 。

从 a 出发的 Euler 回路: $abadececeda$, 抄近路可得: $abdeca$, 权 $3 + 8 + 1 + 5 + 9 = 26$ 。

从 b 出发的 Euler 回路: $badecedab$, 抄近路可得: $badecb$, 权 $3 + 2 + 1 + 5 + 10 = 21$ 。

(3) 最小权匹配法:

最小生成树: $b - a, a - d, d - e, e - c$ 。奇度顶点 b 和 c , 最小权匹配边 $bc = 10$, 得到 $abceda$, 权 $3 + 10 + 5 + 1 + 2 = 21$ 。





- 1 四至六章作业讲解
- 2 四至六章知识点回顾



定义 4.1 如果一个图可以画在平面上, 使得除了端点外, 它的任意两条边没有交点, 则称这个图为**可嵌入平面的**, 简称**平面图**。平面图 G 的这样一种画法 (图示) 称为 G 的一个**平面嵌入**。

平面图 G 把平面划分为若干连通的闭区域, 这些闭区域称为 G 的**面**。我们用 $b(f)$ 表示平面图 G 中面 f 的边界。

定义 4.2 称面 f 与它的边界上的顶点和边是**关联的**。若 e 是平面图的桥, 则只有一个面和 e 关联; 面 f 的**度数** $\deg(f)$ 是和它关联的边数, 即 $b(f)$ 中的边数, 其中桥被计算两次。

定理 4.3 任给平面图 G ,

$$\sum_{f \in F(G)} \deg(f) = 2|E(G)|$$



定理 4.4 (Euler 公式) 设 G 是连通平面图, 有 ν 个顶点, ε 条边, ϕ 个面, 则

$$\nu - \varepsilon + \phi = 2$$

平面图的性质:

推论 4.2 若 G 是 $\nu \geq 3$ 的连通简单平面图, 则 $\varepsilon \leq 3\nu - 6$ 。

推论 4.3 若 G 是连通简单平面图, 则 $\delta \leq 5$ 。

推论 4.4 K_5 是非平面图。

推论 4.5 $K_{3,3}$ 是非平面图。



定义 4.3 设 G 是 $\nu \geq 3$ 的平面图，若任给 $u, v \in V(G)$ ，当 $uv \notin E(G)$ 时， $G + uv$ 都不再是平面图，则称 G 是**极大平面图**。

定理 4.5 $\nu \geq 3$ 的平面图 G 是极大平面图，当且仅当 G 的平面嵌入的每个面都是三角形。

推论 4.6 假定 G 是 $\nu \geq 3$ 的平面图，则 G 是极大平面图，当且仅当 $\varepsilon = 3\nu - 6$ 。

定理 4.6 若 G 是 $\nu \geq 4$ 的极大平面图，则 $\delta \geq 3$ 。



定义 5.1 设 M 是图 G 的边子集, 且 M 的任意两条边在 G 中都不相邻, 则称 M 是 G 的一个**匹配**。 M 中同一条边的两个端点称为在 M 中**相配**。 M 中边的端点称为被 M **许配**。 若 G 中所有的顶点都被 M 许配, 则称 M 是 G 的**完备匹配**。 G 中边数最多的匹配称为 G 的**最大匹配**。 若 M 是 G 的最大匹配, 则称 M 中的边数 $|M|$ 为 G 的**匹配数**, 记作 $\alpha(G) = |M|$ 。

定义 5.2 设 M 是图 G 的匹配, $P = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_k v_k$ 是 G 中的一条轨道 (圈), 若 e_1, e_2, \cdots, e_k 在 M 与 $E(G) - M$ 中交替出现, 则称 P 是 G 中关于 M 的**交错轨道 (圈)**。

定义 5.3 设 $P = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_{2k+1} v_{2k+1}$ 是 G 中关于 M 的交错轨道, 若 $e_1, e_3, \cdots, e_{2k+1} \notin M$, $e_2, \cdots, e_{2k} \in M$, 且 v_0 与 v_{2k+1} 没有被 M 许配, 则称 P 是 G 中关于 M 的**可增广轨道**。



引理 5.1 M 是 G 的最大匹配, 当且仅当 G 中没有关于 M 的可增广轨道。

定理 5.1 (Hall) 设 G 是二分图, 其顶点集合划分为 $V(G) = X \cup Y$, $X \cap Y = \emptyset$, 则 G 中存在将 X 中顶点都匹配的匹配, 当且仅当任给 $S \subseteq X$, 都有 $|N(S)| \geq |S|$ 。其中, $N(S)$ 是与 S 中顶点相邻的顶点构成的集合, 简称为 S 的邻顶集合。

推论 5.1 对于正整数 $k > 0$, k 次正则二分图 G 有完备匹配。

定义 5.4 设 G 是一个图, C 是其顶点集合的子集, 即 $C \subseteq V(G)$, 若 G 中任意一条边都有一个端点属于 C , 则称 C 是 G 的一个**覆盖**。若 C 是 G 的覆盖, 但 C 的任何真子集都不是 G 的覆盖, 则称 C 是 G 的**极小覆盖**。若 C^* 是 G 的覆盖, 且不存在 G 的覆盖 C , 使得 $|C| < |C^*|$, 则称 C^* 是 G 的**最小覆盖**, 且称 $|C^*|$ 是 G 的**覆盖数**, 记作 $\beta(G)$ 。



定理 5.2 (König-Egerváry) 设 G 是二分图, 则 G 的匹配数等于其覆盖数, 即 $\alpha(G) = \beta(G)$ 。

定义 5.5 设 G' 是图 G 的连通片, 若 $\nu(G')$ 是奇数, 则称 G' 是 G 的**奇片**。否则, 称之为 G 的**偶片**。我们用 $o(G)$ 表示 G 中奇片的个数。

定理 5.3 (Tutte) G 有完备匹配, 当且仅当任给 $S \subseteq V(G)$, 都有 $o(G - S) \leq |S|$ 。

定理 5.4 (Petersen) 无桥的三次正则图有完备匹配。



定义 (交错树) 假设 G 是一个图, M 是 G 的一个匹配, u 是 G 的一个没有被 M 许配的顶点。对于 G 的子图 T , 如果 T 是树, $u \in V(T)$, 且满足任给 $v \in V(T)$, T 中从 u 到 v 的轨道是交错轨道, 则称 T 是 G 中关于 M 的 **u -交错树**。

若除了 u 之外, T 中所有的顶点均被 M 许配, 则称 T 为**被 M 许配的 u -交错树**;

否则, 除了 u 之外, T 中还有没有被 M 许配的顶点, 设为 v , 则 T 中从 u 到 v 的轨道就是一个可增广轨道。

输入：二分图 $G = (X, E, Y)$, G 的匹配 M , G 中没有被 M 匹配的点 u , 不妨 $u \in X$ 。

输出： G 中关于 M 的 u -交错树 $T_u = (U, E', V)$ 。

- (1) $U = \{u\}, E' = \emptyset, V = \emptyset$; 令 $l_{pre}(u) = *$; 对 G 中所有的顶点 $v \neq u$, 令 $l_{pre}(v) = null$; 对 G 中所有的顶点 v (包括 u), 令 $l_{visited}(v) = 0$ 。
- (2) 若上一步中没有新的顶点加入 U , 算法停止; 否则转第 (3) 步。
- (3) 若存在 $x \in X, l_{pre}(x) \neq null, l_{visited}(x) = 0$, 则对 Y 中所有满足 $xy \in E - M$ 且 $l_{pre}(y) = null$ 的顶点 y , 令 $l_{pre}(y) = x$; $E' \leftarrow E' \cup \{xy\}$; $V \leftarrow V \cup \{y\}$; 最后令 $l_{visited}(x) = 1$ 。
- (4) 若在第 (3) 步, 在 V 中加入一个新的顶点 y (同时也将 $l_{pre}(y)$ 从 $null$ 修改为 x), 且 y 没有被 M 匹配, 则已经找到可增广轨道, 算法停止; 若在第 (3) 步没有新的顶点加入 V , 算法停止; 否则转第 (5) 步。
- (5) 若存在 $y \in Y, l_{pre}(y) \neq null, l_{visited}(y) = 0$, 则对 X 中所有满足 $xy \in M$ 且 $l_{pre}(x) = null$ 的顶点 x , 令 $l_{pre}(x) = y$; $E' \leftarrow E' \cup \{xy\}$; $U \leftarrow U \cup \{x\}$; 最后令 $l_{visited}(y) = 1$ 。转第 (2) 步。



算法 5.2 匈牙利算法

输入：二分图 $G = (X, E, Y)$ 。

输出： G 的最大匹配 M 。

- (1) 取 G 的一个初始匹配 M ，比如说 $M = \emptyset$ 。 $G' \leftarrow G$ 。
- (2) 若 G' 为空，或者 G' 中顶点都被 M 许配，算法停止；否则转第 (3) 步。
- (3) 取 G 中没有被 M 许配的顶点 u ，用交错树算法搜索 u -交错树 T_u ，若找到可增广轨道，设为 P ，令 $M \leftarrow M \oplus E(P)$ ，转第 (2) 步；否则，令 $G' \leftarrow G' - V(T)$ ，转第 (2) 步。



定义 5.6 给定边权二分图 $G = (X, \Delta, Y)$, 带有权值 $w: \Delta \rightarrow R$, 定义 $V(G) = X \cup Y$ 上的函数 $l: X \cup Y \rightarrow R$. 若 l 满足: 任给 $x \in X, y \in Y$, 都有 $l(x) + l(y) \geq w(xy)$, 则称 l 为一个**可行顶标**.

定义 5.7 给定边权二分图 $G = (X, \Delta, Y)$, 带有权值 $w: \Delta \rightarrow R$, 以及可行顶标 $l: X \cup Y \rightarrow R$. 定义 G 关于 l 的**相等子图** G_l 为:

- (1) $V(G_l) = V(G)$;
- (2) $E(G_l) = \{x_i y_j \mid l(x_i) + l(y_j) = w(x_i y_j)\}$.

定理 5.6 给定带有边权 $w: \Delta \rightarrow R$ 的二分图 $G = (X, \Delta, Y)$, 以及可行顶标 l . 若相等子图 G_l 有完备匹配, 设为 M , 则 M 是 G 的**最佳匹配**.

算法 5.3 (Kuhn-Munkres 算法)

输入: 二分图 $G = (X, \Delta, Y)$, $|X| = |Y|$, 边权函数 $w: \Delta \rightarrow R$.

输出: G 的最佳匹配 M .

步骤:

- (1) 选取 G 的一个可行顶标 l , 构造相等子图 G_l .
- (2) 用匈牙利算法求 G_l 的最大匹配 M . 若 M 是 G_l 的完备匹配, 则 M 是 G 的最佳匹配, 算法停止; 否则, 转 (3).
- (3) 设 u 是 G_l 中未被 M 匹配的顶点 (不妨设 $u \in X$). 令 $Z = \{v \mid v \in V(G_l), \text{ 且 } u, v \text{ 之间存在交错轨道}\}$, $S = X \cap Z$, $T = Y \cap Z$. 计算 $\alpha_l = \min\{l(x_i) + l(y_j) - w(x_i y_j) \mid x_i \in S, y_j \notin T\}$.
- (4) 修改可行顶标: $\hat{l}(v) = \begin{cases} l(v) - \alpha_l, & v \in S \\ l(v) + \alpha_l, & v \in T, \text{ 令 } l \leftarrow \hat{l}, \text{ 转 (1).} \\ l(v), & \text{其它} \end{cases}$



定义 6.1 经过图 G 每条边的行迹称为 **Euler 迹**；经过图 G 每条边的闭行迹称为 **Euler 回路**。如果图 G 含有 Euler 回路，则称 G 为 **Euler 图**。

定理 6.1 设 G 是连通图，则下面三个命题等价：

1. G 是 Euler 图；
2. G 的每个顶点的度数都是偶数；
3. G 可以表示成无公共边的圈之并。

推论 6.1 连通图 G 有 Euler 迹，当且仅当 G 中最多有两个度数为奇数的顶点。



定理 6.2 设 D 是有向图, 且略去 D 中边的方向后, 对应的无向图连通, 则下面三个命题等价:

1. D 是 Euler 图;
2. $\forall v \in V(D), \deg^+(v) = \deg^-(v)$;
3. D 可以表示成无公共边的有向圈之并。

推论 6.2 连通有向图 D 有 Euler 有向迹但不是有向 Euler 图, 当且仅当 D 中恰有两个度数为奇数的顶点, 其中一个顶点入度比出度大 1, 另一个的出度比入度大 1, 其余顶点的入度均等于出度。

算法 6.1 (Fleury 算法)

输入: 图 $G = (V(G), E(G))$ 。

输出: 图 G 的一条行迹。

- (1) 任取 $v_0 \in V(G)$, 令 $P_0 = v_0$;
- (2) 假设沿 $P_i = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_i v_i$ 走到顶点 v_i , 按下面的方法从 $E(G) - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 中选 e_{i+1} :
 - (2.a) e_{i+1} 与 v_i 关联;
 - (2.b) 除非无边可选, 否则 e_{i+1} 不选 $G_i = G - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 的桥。若选不到这样的 e_{i+1} , 则算法停止。
- (3) 设 v_{i+1} 是 e_{i+1} 关联的另一个顶点, 令 $P_{i+1} = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_i v_i e_{i+1} v_{i+1}$, $i \leftarrow i + 1$, 转 (2)。

定理 6.3 设 G 是无向 Euler 图, 则 Fleury 算法终止时得到的行迹是 Euler 回路。

算法 6.2 (逐步插入回路算法)



中国邮递员问题 构造无向加权图 $G = (V, E, w)$, E 为街道集合, V 中的元素是街道的交叉点, 街道的长度为该街道对应的边的权。邮递员问题变为求 G 中一条经过每条边至少一次的回路 C , 使该回路的权 $\sum_{e \in E(C)} w(e)$ 最小。

算法 6.3 (Edmonds-Johnson 算法)

输入: 加权图 $G = (V(G), E(G), w(G))$ 。 **输出:** 图 G 的一条最优投递路线。

- (1) 若 G 中没有奇度顶点, 令 $G^* = G$, 转 (2), 否则求出 G 中度数为奇数的顶点集合 $V_o = \{v | v \in V(G), \deg(v) \equiv 1(\text{mod } 2)\}$, 转 (3);
- (2) 求 G^* 中的 Euler 回路, 停止;
- (3) 对 V_o 中的每对顶点 u 和 v , 用 Dijkstra 算法求出其在 G 中的最短距离 $\text{dist}_G(u, v)$ 以及最短路径;
- (4) 以 V_o 为顶点集合构造加权完全图 $K_{|V_o|}$, 每条边 uv 的权为 $\text{dist}_G(u, v)$;
- (5) 求加权完全图 $K_{|V_o|}$ 的总权最小的完备匹配 M ;
- (6) 针对第 (5) 步求得的最小完备匹配中的每条边, 给出其两个端点, 将这两个端点在 G 中的最短路径上的每条边重复一遍, 得到 Euler 图 G^* , 转 (2)。



定义 6.2 经过图 G 每个顶点的轨道称为 **Hamilton 轨道**; 经过图 G 每个顶点的圈称为 **Hamilton 圈**。如果图 G 含有 Hamilton 圈, 则称这个图为 **Hamilton 图**。

定理 6.4 设 G 是 Hamilton 图, 则对 $V(G)$ 的每个非空真子集 S , 均有 $\omega(G - S) \leq |S|$, 其中 $\omega(\cdot)$ 是连通片个数。

定理 6.5 (Dirac) 设 G 是简单图, 且 $\nu(G) \geq 3$, $\delta(G) \geq \nu(G)/2$, 则 G 是 Hamilton 图。

定理 6.7 设 $\nu(G) \geq 3$, 对 G 的任意一对顶点 u, v , 若 $\deg(u) + \deg(v) \geq \nu(G) - 1$, 则 G 有 Hamilton 轨道; 若 $\deg(u) + \deg(v) \geq \nu(G)$, 则 G 是 Hamilton 图。



旅行商问题 设 $K_\nu = (V, E, w)$ 是 ν 阶完全加权图，各边的权非负，有的边的权可以是 $+\infty$ ，求 K_ν 中权最小的 Hamilton 圈。

算法 6.4 (最近邻法)

- (1) 从访问 v_1 开始，形成初始轨道 $P_1 = v_1$;
- (2) 若已经访问了第 $k(k \leq \nu - 1)$ 个顶点，形成轨道 $P_k = v_1 v_2 \cdots v_k$ ，从 $V - \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ 中选取与 v_k 最近的顶点作为下一步访问的顶点 v_{k+1} ;
- (3) 当访问完 G 中所有顶点后，形成轨道 $P_\nu = v_1 v_2 \cdots v_\nu$ ，再回到起点 v_1 得到圈 $H = v_1 v_2 \cdots v_\nu v_1$ ，此即为 G 中的一条 Hamilton 圈，把它作为旅行商问题的近似解。

定理 6.8 在边权满足三角不等式的条件下，最近邻法求得的 Hamilton 圈权值 d 与最优解权值 d_0 满足 $\frac{d}{d_0} \leq \frac{1}{2}(\lceil \log_2 n \rceil + 1)$ 。

算法 6.5 (最小生成树法)

- (1) 求 G 的一棵最小生成树 T ;
- (2) 将 T 中各边都添加一条平行边, 平行边的权与其对应边的权相同。设所得图为 G^* , 则 G^* 为 Euler 图;
- (3) 从某顶点 v 出发, 求 G^* 中一条 Euler 回路 C_v ;
- (4) 在 G 中按下面的方法求从顶点 v 出发的 Hamilton 圈。从 v 出发沿 C_v “抄近路”访问 G 的各顶点, 即假定当前访问的顶点为 x , C_v 上 x 的后续两个顶点分别为 y 与 w , 若 y 在此之前已经被访问, 则直接从 x 经过边 xw 访问 w , 直到访问完所有顶点为止。最后走出 G 的一条 Hamilton 圈 H_v , 就是 G 的最优解的近似解。

定理 6.9 设 $G = (V, E, W)$ 是 $\nu (\nu \geq 3)$ 阶完全带权图, 各边带的权均为正数, 且满足三角不等式, d_0 是 G 中最短 Hamilton 圈的权, d 是用最小生成树法求得的 Hamilton 圈 H 的权, 则 $\frac{d}{d_0} < 2$ 。

**算法 6.6 (最小权匹配法)**

- (1) 求 G 的一棵最小生成树 T ;
- (2) 设 T 中度数为奇数的顶点集合为 $V_o = \{v_1, v_2, \dots, v_{2k}\}$, 求 V_o 的导出子图 $G[V_o] = K_{2k}$ 中总权最小的完备匹配 M , 将 M 中的 k 条边加到 T 上, 得到 Euler 图 G^* ;
- (3) 在 G^* 中求从某顶点 v 出发的一条 Euler 回路 C_v ;
- (4) 在 G 中, 从 v 出发, 沿 C_v 中的边按“抄近路法”走出 Hamilton 圈 H_v .

定理 6.10 设 $G = (V, E, W)$ 是 ν ($\nu \geq 3$) 阶完全带权图, 各边带的权均为正数, 且满足三角不等式, d_0 是 G 中最短 Hamilton 圈的权, 而 d 是用最小权匹配法求得的 Hamilton 圈 H 的权, 则 $\frac{d}{d_0} < \frac{3}{2}$.



2022 T4

证明：如果一个图 G 有 Hamilton 路径, 则任取 $V(G)$ 一个非空真子集 S ,
 $\omega(G - S) \leq |S| + 1$.



2022 T4

证明：如果一个图 G 有 Hamilton 路径, 则任取 $V(G)$ 一个非空真子集 S ,
 $\omega(G - S) \leq |S| + 1$.

证明：记这条 Hamilton 路为 $P = v_1 v_2 \cdots v_n$ 。把 P 中属于 S 的顶点删去, P 被分成 k 段连续的子路径, $k \leq |S| + 1$ 。

每一段在 $G - S$ 中是连通的, 所以每段包含于 $G - S$ 的某个连通分支中; 因此 $G - S$ 的连通分支数至多为段数: $\omega(G - S) \leq k$ 。合并得 $\omega(G - S) \leq |S| + 1$ 。