1 积分

1.1 复积分的定义以及求法（参数法）

1.1.1 定义和求法

定义1. 复变函数曲线积分的定义与微积分的定义基本相同，都是将有向曲线（不加说明我们总是约定曲线为可求长光滑曲线）分成小段，在每小段上选取代表值，然后加权求和。如果当分割越来越细的时候，求和所得总是趋于某个固定的复数，那么我们就称曲线积分存在，相应的极限值称为曲线积分的取值。

$$\int_C f(z)dz = \lim_{\max_i |z_{i+1}-z_i| \to 0} \sum f(z_i)(z_{i+1}-z_i).$$

定理1. 设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在曲线C 上连续，则复积分$\int_C f(z)dz$ 存在，而且

$$\int_C f(z)dz = \int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_C v(x,y)dx + u(x,y)dy.$$

我们略过证明，该定理提供了一个计算复积分的方法，可以把

$$dz = dx + idy.$$

但在实际操作中，我们并不会直接这么做，而是把曲线参数化：设曲线C 的参数表示为$z(t)$，t 从α 到β，则

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt.$$

复曲线积分有一般微积分基本性质，包括：

1. 数乘：相应积分数乘；
2. 加法与减法：相应积分做加法和减法；
3. 改变积分方向：相应积分改变正负号；
4. 曲线组合：相应积分组合；
5. 微积分变换参数的技巧依然成立（要注意有向曲线的方向，参数变换后可能反向）。

例子1. 设有向曲线C：$-2 \longrightarrow -1 \xrightarrow{\text{半径1上半圆弧}} 1 \longrightarrow 2 \xrightarrow{\text{半径2上半圆弧}} -2$，求积分

$$\int_C \frac{z}{\bar{z}}dz.$$

解. 我们要熟练掌握常规曲线的参数化（线段，圆等）。

*1.*线段C_1： $z(t)=-2+t, t$从0 到1（必须注意积分方向）；所以

$$\int_{C_1} \frac{z}{\bar{z}}dz = \int_0^1 1dt = 1.$$

*2.*圆弧C_2： $z(\theta)=e^{i\theta},\theta$ 是从π 到0；所以

$$\int_{C_2}\frac{z}{\bar z}dz=\int_{\pi}^{0}e^{2i\theta}ie^{i\theta}d\theta=\int_{\pi}^{0}i\cos 3\theta-\sin 3\theta d\theta=\left(\frac{i\sin 3\theta}{3}+\frac{\cos 3\theta}{3}\right)|_{\pi}^{0}=\frac{2}{3}.$$

*3.*线段C_3： $z(t)=1+t,t$从0 到1；所以

$$\int_{C_3}\frac{z}{\bar z}dz=\int_{0}^{1}1dt=1.$$

*4.*圆弧C_4： $z(\theta)=2e^{i\theta},\theta$ 是从0 到π；所以

$$\int_{C_4}\frac{z}{\bar z}dz=\int_{0}^{\pi}e^{2i\theta}2ie^{i\theta}d\theta=2\int_{0}^{\pi}i\cos 3\theta-\sin 3\theta d\theta=2\left(\frac{i\sin 3\theta}{3}+\frac{\cos 3\theta}{3}\right)|_{0}^{\pi}=-\frac{4}{3}.$$

所以，$\int_C\frac{z}{\bar z}dz=1+\frac{2}{3}+1-\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$。

例子2. 求积分：$\int_{|z|=3}z|dz|$（注记：不加说明，我们总认为圆周的方向是逆时针的）。

解. 参数表示$z(\theta)=3e^{\theta i}$，θ 是从0 到2π。所以

$$|dz|=|d(3e^{i\theta})|=|3ie^{i\theta}d\theta|=3d\theta.$$

所以

$$\int_{|z|=3}z|dz|=\int_{0}^{2\pi}3e^{i\theta}\cdot 3d\theta=\frac{9e^{i\theta}}{i}|_{0}^{2\pi}=0.$$

例子3 (一个非常重要的积分)**.** 设n 为整数，计算积分

$$\int_{|z-a|=R}(z-a)^n dz.$$

解. 参数表示$z(\theta)=a+Re^{\theta i}$，$\theta$ 是从0 到2π。所以

$$dz=Re^{i\theta}d\theta.$$

所以

$$\int_{|z-a|=R}(z-a)^n dz=\int_{0}^{2\pi}R^n e^{in\theta}Rie^{i\theta}d\theta=i\int_{0}^{2\pi}R^{n+1}e^{i(n+1)\theta}d\theta.$$

有两种情况：

(1). $n=-1$： 积分$=i\int_0^{2\pi}1d\theta=2\pi i$；

(2). $n\neq-1$： 积分$=\frac{iR^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}{i(n+1)}|_0^{2\pi}=0$。

1.1.2 长大不等式

定理2. 设C 为有限长光滑曲线，f 为逐段连续复函数，则

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)||dz|.$$

如果$|f(z)|$ 有界M，曲线长度为l，则上述积分绝对值$\le Ml$。

证明可以直接由定义得到，在此略过。

定理3. 设$f(z)$ 在一个单连通区域D 去掉里面一个点a 上有定义，并且

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=k.$$

则对任意$\alpha<\beta\in(0,2\pi]$，有

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_{\rho,\alpha,\beta}} f(z)=ik(\beta-\alpha).$$

其中$C_{\rho,\alpha,\beta}$ 为有向曲线：$z(\theta)=\rho e^{i\theta}+a$，$\theta$ 从α 到β。

证明. 由极限定义，对任意$\epsilon>0$，存在相应的$\rho>0$ 使得

$$|(z-a)f(z)-k|\epsilon$$

对所有$|z-a|\le\rho$ 成立。所以对所有$\tilde{\rho}<\rho$，我们有

$$|\int_{C_{\tilde{\rho},\alpha,\beta}} f(z)-\frac{k}{z-a}dz| = |\int_{C_{\tilde{\rho},\alpha,\beta}} \frac{f(z)(z-a)-k}{z-a}dz| \le \int_{C_{\tilde{\rho},\alpha,\beta}} \frac{|f(z)(z-a)-k|}{|z-a|}|dz| \le \int_{C_{\tilde{\rho},\alpha,\beta}} \frac{\epsilon}{\tilde{\rho}}|dz|.$$

变量替换$z=a+\tilde{\rho}e^{i\theta}$，$\theta$ 从α 到β，则

$$|\int_{C_{\tilde{\rho},\alpha,\beta}} f(z)-\frac{k}{z-a}dz| = \int_\alpha^\beta \frac{\epsilon}{\tilde{\rho}}\tilde{\rho}d\theta=\epsilon(\beta-\alpha).$$

取极限有

$$\lim_{\rho\to 0}|\int_{C_{\rho,\alpha,\beta}} f(z)-\frac{k}{z-a}dz|=0.$$

即

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_{\rho,\alpha,\beta}} f(z)dz=\lim_{\rho\to 0}\int_{C_{\rho,\alpha,\beta}}\frac{k}{z-a}dz=ik(\beta-\alpha).$$

注记：这个定理告诉我们，如果一个复函数在某个点a 附近和$\frac{k}{z-a}$ 非常接近，则算积分的时候可以近似地把$f(z)$ 换成$\frac{k}{z-a}$。

例子4. 求以下极限：

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho}\frac{e^{z+\bar{z}+|z|}}{z}dz.$$

其中C_ρ 为圆心在零点，半径为ρ 的圆，方向为逆时针。

解. 注意到

$$\lim_{z\to 0}(z-0)\frac{e^{z+\bar{z}+|z|}}{z}=1.$$

所以

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho}\frac{e^{z+\bar{z}+|z|}}{z}dz=2\pi i.$$

1.2 柯西积分定理

定理4 (格林公式)**.** 设实二元函数$P(x,y),Q(x,y)$ 连续可微，D 为由光滑简单闭曲线（方向逆时针）围城的区域，则

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

定理5. 设$f(z) = u + iv$ 为单连通区域D 上的解析函数（为方便起见假定$f'(z)$ 连续，本身定理并不需要这一条），则对于区域D 内任何光滑简单闭曲线C 有

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

证明. 由复曲线积分的定义

$$\int_C f(z)dz = \int_C u + ivdx + \int_C iu - vdy.$$

设$P = u + iv$，$Q = iu - v$，则

$$\int_C f(z)dz = \int_C Pdx + Qdy = \int_E \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_E iu_x - v_x - u_y - iv_y dxdy.$$

由C-R 方程

$$u_x = v_y, u_y = -v_x.$$

所以，积分为零，我们结束证明。

定理6. 设$f(z) = u + iv$ 为多连通区域D 上的解析函数，C 为区域D 内的一条简单闭曲线，在C 围成的区域内有一列简单闭曲线C_i，由C_i 围城的闭区域没有交集并且由C 及C_i围城的闭区域在D 内，则

$$\int_C f(z)dz = \sum_i \int_{C_i} f(z)dz.$$

（这个定理画一个图很好理解）。

证明略，这个定理有助于我们计算积分，实际上他说明了一点，“解析”函数在光滑简单闭曲线上的积分主要由“洞”提供，而每个洞提供的积分值是固定的，因而我们仅仅需要把“洞”提供的积分算出来，然后把所有起作用的“洞”（也就是被曲线围起来的“洞”）提供的积分叠加就行了，这就是后面的“留数法”的原理。

例子5. 设$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-4)(z-6)}$，求

$$\int_{|z|=i} f(z)dz, i = 1, 3, 5, 7.$$

解. 以2 为圆心半径为ρ 画圆C_ρ，注意到

$$\lim_{z\to 2} f(z)(z-2) = \frac{1}{8}.$$

由上一节的定理，可得

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)dz = \frac{1}{8}\times 2\pi i = \frac{\pi i}{4}.$$

实际上当ρ 很小或者是简单闭曲线C 不含4 和6 的时候，积分都是一样的（柯西积分定理）。这就是2 这个“洞”提供的积分值。同理4 提供的积分值为$-\frac{\pi i}{2}$；6 提供的积分值为$\frac{\pi i}{4}$。

所以最后的结果依次为$0, \frac{\pi i}{4}, -\frac{\pi i}{4}, 0$。

1.3 原函数

定理7. 设f 是单连通区域D 上的连续函数并且对任意D 内闭路C 有

$$\int_C f dz = 0.$$

则存在D 上的解析函数F 使得

$$F' = f.$$

并且成立牛顿莱布尼兹定理；不同的原函数之间相差一个常数。

注记：只有在上述定理条件成立时，才会有写法“$\int_a^b f dz$”，其中a, b 是区域D 内的两点；表示连接a 和b 的任意有向曲线的曲线积分（要求曲线在D 内，此时积分只与起点和终点有关）。

证明. 先固定D 内一个点z_0，对任意$z\in D$，定义

$$F(z) = \int_C f(\xi)d\xi$$

其中C 是任意连结z_0 和z 的位于D 内的有向曲线。由条件可知这个积分的取值与路径无关，因而定义是合理的。由连续性对于$z\in D$ 以及$\epsilon > 0$，存在$\rho > 0$ 使得

$$\{\xi : |\xi - z| < \rho\} \subset D, |f(\xi) - f(z)| < \epsilon \text{ 对} |\xi - z| < \rho \text{ 成立。}$$

对任意$|h| < \rho$，我们用有向线段C_1 连接z 和$z+h$，则C_1 的长度为$|h|$。所以

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \left|\int_0^1 f(\xi) - f(z)d\xi\right| \le \int_0^1 |f(\xi)-f(z)||d\xi| \le \epsilon|h|.$$

令$h\to 0$，我们就得到了

$$F'(z) = f(z).$$

推论1. 单连通区域内的解析函数都有原函数；并且原函数也是解析的。

注记：多项式函数、指数函数、三角函数等都有原函数，而且形式上和一般实函数相同；其他函数会有例外，比如非常重要的$\frac{1}{z}$。

例子6. 计算积分：

$$\int_0^i z^2 + \cos 2z dz.$$

解. $z^2+\cos 2z$ 在全复平面解析，原函数为

$$\frac{z^3}{3}+\frac{\sin 2z}{2}.$$

所以

$$\int_0^i z^2+\cos 2z dz=\frac{z^3}{3}+\frac{\sin 2z}{2}|_0^i=-\frac{i}{3}+\frac{\sin(2i)}{2}=-\frac{i}{3}+\frac{e^2-e^{-2}}{4}i.$$

例子7. 分别计算$\frac{1}{z}$ 的在以下区域的一个原函数

(1) 复平面去掉0 和正实轴；

(2) 复平面去掉0 和负实轴；

(3) 分别在*(1)* 和*(2)* 的情形下计算$\int_{1-i}^{1+i}\frac{1}{z}dz$（就算形式一样，单连通区域选取不同，会导致积分值不同）。

解. *(1)* 该区域可以表示为

$$\{re^{i\theta}:0<\theta<2\pi\}.$$

先找一个基准点$z_0=-1$，对任意区域内的点z，随便找一条连接z_0 与$z=|z|e^{i\phi},\phi\in(0,2\pi)$ 并且在区域内的有向曲线，当然这里我们可以取有向线段与有向圆弧的组合：

$$C_1:\xi(t)=-1+(-|z|+1)t,\quad t\text{ 从}0\text{ 到}1$$

以及

$$C_2:\xi(\theta)=|z|e^{i\theta},\quad \theta\text{ 从}\pi\text{ 到}\phi.$$

分别积分得

$$\int_{C_1}\frac{1}{z}dz=\int_0^1\frac{-|z|+1}{-1+t-|z|t}dt=\int_1^{|z|}\frac{1}{t}dt=ln|z|.$$

$$\int_{C_2}\frac{1}{z}dz=i(\phi-\pi).$$

所以一个原函数为

$$F(z)=ln|z|+i(\phi-\pi),\phi\in(0,2\pi).$$

忽略常数，得到一个原函数$ln|z|+i\phi=\ln|z|+iArgz,\ Argz\in(0,2\pi)$.

*(2)*取Lnz 的一个分支，$\ln|z|+iArgz,\ Argz\in(-\pi,\pi)$。则有$Ln'z=\frac{1}{z}$，$Argz\in(-\pi,\pi)$。因而原函数为$\ln|z|+iArgz,\ Argz\in(-\pi,\pi)$。

*(3)*在*(1)*的条件下，

$$\int_{1-i}^{1+i}\frac{1}{z}dz=i(\phi_{1+i}-\phi_{1-i})=-\frac{3\pi}{2}i.$$

在*(2)*的条件下

$$\int_{1-i}^{1+i}\frac{1}{z}dz=i(\tilde{\phi}_{1+i}-\tilde{\phi}_{1-i})=\frac{\pi}{2}i.$$

1.4 柯西积分公式

定理8. 设f 为单连通区域D 上的解析函数，则对于区域D 内任何光滑简单闭曲线C 以及位于C所围成区域内部的点z，有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi.$$

对于任何正整数n，有

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi.$$

证明. （1）由柯西积分定理，我们可以把C 替换成任意接近z 的小圆C_ρ。则由

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\times(\xi - z) = f(z).$$

我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = f(z).$$

（2）如果不是需要太严格地话，我们只要直接求微分就行了

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{f(\xi)}{\xi - z}\right)d\xi = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi.$$

如果需要严格证明，我们只要证明$n = 1$（其他归纳即可）。

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}d\xi\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)(\xi - z - h)}d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}d\xi\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{hf(\xi)}{(\xi - z)^2(\xi - z - h)}d\xi\right|
\end{aligned}$$

设z 到C的距离为D，C 长度l，$|f(z)||_C \leq M$ 则

$$上式 \leq \frac{|h|Ml}{2\pi D^2(D - |h|)}.$$

令$h \to 0$，得到

$$f'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}d\xi.$$

其他类似。

定理9. 柯西积分公式可以反过来求积分：设f 为单连通区域D 上的解析函数，则对于区域D 内任何光滑简单闭曲线C 以及位于C所围成区域内部的点z，有

$$\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = 2\pi i f(z).$$

对于任何正整数n，有

$$\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z).$$

例子8. 计算积分：$\int_C \left[\frac{e^z}{z(z-2i)}+\frac{\cos z}{(z-i)^3}\right]dz$，这里$|z-3i|=r,(2<r<3)$。

解. 有三个奇点，只有$i,2i$ 对积分有贡献，所以

$$\int_C \left[\frac{e^z}{z(z-2i)}+\frac{\cos z}{(z-i)^3}\right]dz = 2\pi i\times\frac{e^{2i}}{2i}+\frac{2\pi i}{2!}(\cos z)^{(2)}|_{z=i}=\pi e^{2i}-\pi i\cos i.$$

例子9. 计算积分：$\int_{|z|=3}\frac{\cos(\frac{1}{z-2})}{4-z}dz$。

解. 只有2 起作用，所以

$$\int_{|z|=3}\frac{\cos(\frac{1}{z-2})}{4-z}dz=\int_{|z-2|=1}\frac{\cos(\frac{1}{z-2})}{4-z}dz=\int_{|z|=1}\frac{\cos(\frac{1}{z})}{2-z}dz=\int_{|z|=1}\frac{\cos z}{z(2z-1)}dz=2\pi i(-1+\cos\frac{1}{2}).$$

1.5 解析函数的性质

我们总结一些有趣的结果，

(1) **平均值公式** 设f 在设$|z-a|\le R$ 上解析，则

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+Re^{i\theta})d\theta=\frac{1}{2\pi R}\int_{|z-a|=R}f(z)|dz|.$$

用一句话形容就算圆心的取值为圆周取值的平均；

(2) **最大模原理** 设f 是单连通区域D 上的解析函数，并且在边界上连续，则f 的最大模总是可以在边界上取到；

(3) **柯西不等式** 设f 在设$|z-a|\le R$ 上解析，则对任意非负整数n

$$|f^{(n)}(a)|\le\frac{n!}{R^n}M(R)$$

其中$M(R)$ 是f 在$\{z:|z-a|\le R\}$ 上取值的最大模；

(4) **刘维尔定理** 如果f 在全平面解析，并且有界，则f 必然是常值函数；

(5) **代数学基本定理** 任何阶数大于0 的复系数多项式必然有根；

(6) **莫雷拉定理** 如果函数在区域上连续，并且积分和路径无关，则f 解析。

证明. *(1)*柯西积分公式代入参数马上得到；*(2)*可以由*(1)* 得到；*(3)*柯西积分公式并用长大不等式；*(4)*由*(3)*可以知道f 的微分处处为零，所以f 只能为常数；*(5)* 如果没有根，则f 的倒数全平面解析且有界，因而为常值函数，所以得到矛盾；*(6)* 积分与路径无关，因而有原函数，而原函数是解析的，由柯西积分公式，f 解析。