

## 上节课主要内容

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \vec{j} = \frac{\Delta I}{\Delta S} \vec{n}_0 = ne\vec{v} \quad I = neSv$$

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho_e dV \quad \nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0$$

$$I = U/R$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$P = IU = I^2 R = U^2 / R$$

$$p = \frac{P}{\Delta V} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j^2}{\sigma}$$

$$Q = \Delta A = I^2 R \Delta t$$

1

## 稳恒电流

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

边界条件

$$\vec{j}_{1n} = \vec{j}_{2n} \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} \quad E_{1n} \neq E_{2n}$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad E_{1t} = E_{2t} \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \frac{j_{1t}}{j_{2t}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

2

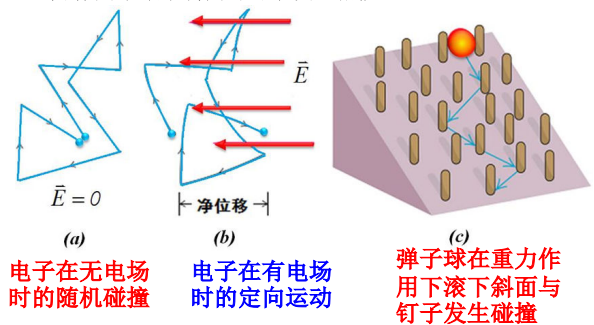
## § 3.2.4 金属导电的德鲁特模型

## 1. 金属导电性的经典微观解释

- 1900年，德鲁特(P. K. Drude)提出了关于金属导电的微观解释。
- 金属可简单地看成是位于晶格点阵上带正电的原子实与自由电子的集合。
- 原子实虽被固定在晶格上，但可以在各自的平衡位置附近作微小的振动；
- 德鲁特假设金属中的自由电子是原子弱束缚的价电子，原子在金属中规则排列，自由电子在晶格间作激烈的不规则运动。
- 没有外场或其他因素时，不规则的运动一般并不形成宏观电流，但存在随机涨落。

3

- 存在外场时，自由电子将获得一加速度，由于与晶格的碰撞，电子会改变速率和方向。与弹子球在重力作用下滚下斜面与钉子发生相似。



4

- 设在  $t=0$  的时刻正好发生一次碰撞，碰撞后的速度为  $v_0$ ，则在下一次碰撞前，载流子的位移为：

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = v_0 t + \frac{1}{2} \frac{q}{m} E t^2 \quad a = \frac{q}{m} E$$

$t$  是连续两次碰撞之间所经历的时间，即自由时间。

- 不同的电子，在碰撞后所具有的速度  $v_0$  各不相同，自由时间  $t$  也各不相同。对大量的电子求平均，有：

$$\langle s \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{q}{m} \right) E \langle t^2 \rangle \quad t \text{ 和 } v_0 \text{ 都是完全随机的，故 } v_0 t \text{ 的平均值为零}$$

5

- 对不同的载流子，自由时间  $t$  是不同的，由分子物理学可知，在  $n$  个载流子中，自由时间为  $t$  到  $t+dt$  间隔内的粒子数与  $e^{-t/\tau} dt$  成正比，平均值为：

$$\langle t^2 \rangle = 2\tau^2$$

$\tau$  是电子在相邻碰撞间的平均自由飞行时间

$$\langle s \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{q}{m} \right) E \langle t^2 \rangle = \left( \frac{q}{m} \right) \tau^2 E$$

- 电子的定向运动平均速度为

$$u = \left\langle \frac{s}{\tau} \right\rangle = \left( \frac{q}{m} \right) \tau E$$

6

导体中的电流为

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{nq\Delta V}{\Delta t} = \frac{nq\Delta S u \Delta t}{\Delta t} = nqu\Delta S$$

导体中的电流密度为

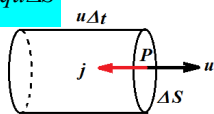
$$j = \frac{\Delta I}{\Delta S} = nqu \xrightarrow{u = \left(\frac{q}{m}\right)\tau E} nq \frac{q}{m} \tau E = n \frac{q^2}{m} \tau E$$

这就是欧姆定律的微分形式

$$j = \sigma E$$

电导率

$$\sigma = n \frac{q^2}{m} \tau$$



7

$$\sigma = n \frac{q^2}{m} \tau$$

电场较弱时,  $n, q, m$  近似与电场  $E$  无关。

电子的漂移速度约在  $10^{-4}\text{m/s}$  量级, 电子的平均速率达  $10^6\text{m/s}$ , 电场  $E$  主要影响的是电子的漂移速度, 而对平均速率的影响很小。

近似认为  $\tau$  与  $E$  是无关的。因此, 可近似认为  $\sigma$  与  $E$  是无关的。

从而由德鲁特模型推导出了欧姆定律。  $j = \sigma E$

8

### 电导率和温度间的关系

$$\lambda = \langle u \rangle \tau$$

电子飞行平均自由程、平均速率、平均飞行时间

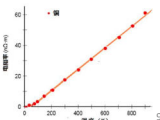
$$\sigma = n \frac{q^2}{m} \tau = \frac{nq^2 \lambda}{m \langle u \rangle}$$

$$u \propto \sqrt{T}$$

$$\sigma \propto \frac{1}{\sqrt{T}}$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \propto \sqrt{T}$$

与实验 ( $\rho \propto T$ ) 定性相符, 定量不符!  
德鲁特模型还是相当粗糙的。



所以经典电子论对金属的导电性的解释在定量方面并不成功。经典电子论困难的原因来自两方面:

- 电子气不同于理想气体, 它不遵守麦克斯韦-玻尔兹曼分布, 而服从费米-狄拉克统计;
- 电子具有波粒二象性, 电子的平均自由程不能用经典分子运动论的方法来计算。

金属中的电子运动不适宜用牛顿第二定律, 只有通过量子理论, 采用薛定谔方程才能做出完满解释。

10

## 2. 金属导电性的量子理论

按照量子理论, 电子应服从泡利不相容原理, 金属中的自由电子气服从费米-狄拉克统计, 服从费米-狄拉克统计的电子气称为费米电子气。

对于费米电子气, 即使  $T=0\text{K}$ ,  $N$  个电子也只能处在从最低能级数起的前  $N/2$  个能级上, 其中最高能级的能量为费米能。

金属的费米能很大。如铜的费米能  $\varepsilon_F = 7.03\text{eV}$ , 若把与费米能相当的温度称为费米温度, 则铜的费米温度  $T_F = 81\,000\text{K}$ 。

11

按量子理论, 即使在绝对零度, 电子的平均动能也很大, 其平均动能  $\varepsilon = 3\varepsilon_F/5$ 。

在  $T=0\text{K}$  时, 费米电子气占满费米能级以下的所有的能级, 而费米能级以上的能级全空着, 没有电子占有。

当  $T>0\text{K}$  时, 晶格上的原子实具有的动能为  $kT$  的数量级, 在一般情况下比  $\varepsilon_F$  小得多。如  $T=300\text{K}$  时,  $kT=0.026\text{eV}$ 。电子通过与晶格的碰撞从原子实取得的能量不可能超过  $kT$ , 只有能量接近费米能的能级上的电子, 才可能通过碰撞从原子实取得能量而激发到费米能级上方的空能级上。

12

- 在外电场时，全部电子都获得加速度，但对金属导电有贡献的只是费米能级附近的能级上的电子。
- 这些电子可以从电场获得能量，进入能量较高的激发态能级上去，而远离费米能级的电子不参与导电。
- 所以金属的导电性与费米能级附近的能级的多少，即能级的密度，密切相关
- 作为修正，电子的平均速度  $v$  可用与费米能对应的费米速度  $v_F$  代替

$$v_F = \sqrt{\frac{2\varepsilon_F}{m}}$$

13

Fermi Energies, Fermi Temperatures, and Fermi Velocities

Element	Fermi Energy eV	Fermi Temperature $\times 10^4$ K	Fermi Velocity $\times 10^6$ m/s
Li	4.74	5.51	1.29
Cu	7.00	8.16	1.57
Ag	5.49	6.38	1.39
Au	5.53	6.42	1.40
Fe	11.1	13.0	1.98
Mn	10.9	12.7	1.96
Zn	9.47	11.0	1.83
Al	11.7	13.6	2.03
Pb	9.47	11.0	1.83

14

#### 电子平均自由程的概念也要修正

- 电子是微观粒子，具有波粒二象性，所谓电子与晶格上原子实的碰撞实际上是电子波被晶格的散射。
- 量子力学证明，若晶体是完整的，即原子实严格固定在周期性的晶格上，电子波是不会被晶格散射的，电子的平均自由程将为无限大，因而金属的电导率为无限大，即完整的晶体是没有电阻的。
- 实际的晶体都有某种不完整性，它一方面来自原子实在晶格上的热振动，另一方面是因晶体中不可避免的含有杂质。原子实的振动相当于严格的周期性排列遭到某种偏离。

15

- 在常温下，原子实振动的振幅的均方根值与绝对温度成正比，从而导致电子波被原子实散射的次数与绝对温度成正比，因而自由时间与温度成反比。由于费米能几乎与温度无关，故电导率与温度成反比，这正是实验结果所要求的。
- 严格的计算表明，按电子波散射求得的平均自由程正好是经典理论求得的100倍，而  $v_F$  是  $v$  的16倍，两者结合恰好使电导率的理论值与实验值相等，解决了经典理论值偏小的问题。
- 杂质造成的不完整性与温度无关，所以在极低温度下，杂质是引起电阻的主要原因。

16

【例67】假定铜原子有一个自由电子，设铜中电子的平均速率为  $10^6$  m/s，单位体积的自由电子数为  $8.48 \times 10^{28}$  个/ $\text{m}^3$ ，铜的电阻率为  $1.673 \times 10^{-8} \Omega \text{m}$ ，求  $20^\circ\text{C}$  时铜的自由电子平均自由时间，铜的自由电子的平均自由程。

【解】前面推得

$$\sigma = n \frac{q^2}{m} \tau \Rightarrow \text{平均自由时间} \quad \tau = \frac{\sigma m}{n q^2} = \frac{m}{n e^2 \rho}$$

$$= \frac{9.11 \times 10^{-31}}{8.48 \times 10^{-28} \times (1.6 \times 10^{-19})^2 \times 1.673 \times 10^{-8}} = 2.51 \times 10^{-14} \text{ (s)}$$

平均自由程  $\lambda = \langle s \rangle = u \tau = 10^6 \times 2.51 \times 10^{-14} = 10^{-8} \text{ (m)}$

平均自由程远大于最近邻原子间距(100倍)!

17

### § 3.2.6 导电介质

#### 1. 什么是导电介质

- 导电介质：既有介质的特性，又有导电的特性。
- 实际上大部分材料，如大地、一些溶液(如水)都可以看成导电介质。绝缘体在一定条件下也会转换成导电介质，具有一定的导电性。
- 导电介质在电场中，既要满足导体导电的基本方程，即欧姆定律，又要满足介质的基本规律。在处理这类问题时需要兼顾这两种材料的电学特性



18

## 2. 介质中电磁问题的完备方程( $D$ 和 $E$ )

介质中的电场规律

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{S^{\text{内}}} q_0$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

介质的本构方程

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \vec{E}$$

介质边界条件

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_0$$

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0$$

联立能完全确定  $E$  和  $D$  (静电场的唯一性定理)

19

## 3. 导电介质中电磁问题的完备方程( $j$ 和 $E$ )

导电介质中的电场规律 导电介质的本构方程

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{S^{\text{内}}} q_0$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

稳恒电流的连续性方程

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

导电介质边界条件

$$j_{2n} - j_{1n} = 0$$

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0$$

联立能完全确定  $j$  和  $E$  (静电场的唯一性定理)

20

## 4. 导电介质基本规律

- (1) 导电介质中的稳恒电流和静电场的分布规律取决于导电介质的导电性质, 即与导电介质的电导率  $\sigma$  有关, 而与导电介质的极化性质即导电介质的介电常量  $\varepsilon$  无关。

$$\vec{j}, \vec{E} \leftrightarrow \sigma$$

$$\vec{j}, \vec{E} \nleftrightarrow \varepsilon$$

- (2) 由静电场  $E$ , 可按高斯定理确定载流导电介质的总电荷  $\rho$  分布, 这一分布也只取决于导电介质的导电性质  $\sigma$ , 而与导电介质的极化性质即导电介质的介电常量  $\varepsilon$  无关。

$$\vec{E}, \rho (= \rho_0 + \rho') \leftrightarrow \sigma$$

$$\vec{E}, \rho (= \rho_0 + \rho') \nleftrightarrow \varepsilon$$

21

- (3) 导电介质中的自由电荷和极化电荷在总电荷中所占的份额与导电介质的极化性质有关, 即与导电介质的介电常量  $\varepsilon$  有关。

$$\frac{\rho_0}{\rho}, \frac{\rho'}{\rho} \leftrightarrow \varepsilon$$

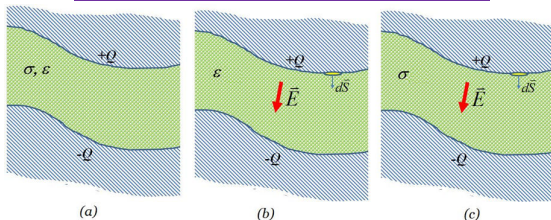
$$\sigma_{(\text{电导率})} \rightarrow \vec{j} \rightarrow \vec{E}$$

$$\downarrow$$

$$\varepsilon \rightarrow \rho_0, \rho' \leftarrow \rho$$

22

## 导电介质电阻与电容的联系



- (1) 仅考虑介质的介电特性, 求电容:

$$Q = \iint_S \sigma_0 dS = \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \varepsilon \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\Delta U = \int_+ \vec{E} \cdot d\vec{l} \rightarrow C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{\varepsilon \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\int_+ \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

23

- (2) 仅考虑介质的导电性, 求电阻

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_S \sigma \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sigma \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$R = \frac{\Delta U}{I} = \frac{\int_+ \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}} = \frac{\int_+ \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\sigma \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}$$

$$\Delta U = \int_+ \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

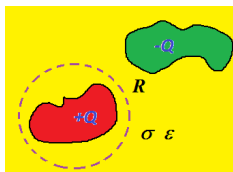
前面得到

$$C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{\varepsilon \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\int_+ \vec{E} \cdot d\vec{l}} \rightarrow RC = \frac{\int_+ \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\sigma \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}} \frac{\varepsilon \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\int_+ \vec{E} \cdot d\vec{l}} = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \rho \varepsilon$$

$$\tau = RC = \rho \varepsilon$$

$RC$  乘积表示漏电时间的快慢, 即漏电时间常数  $\tau$  由导电介质的本身性质决定

【例68】两块导体嵌入电导率为 $\sigma$ 、介电常数为 $\varepsilon$ 的无限大介质中，已知两导体之间的电阻为 $R$ 。求导体间的电容。



【解】设导体分别带 $+Q$ 、 $-Q$ ，任取一高斯面包围 $+Q$ 导体，则流出该导体的电流为：

$$I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \oint_S \sigma \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sigma \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sigma \frac{Q}{\varepsilon}$$

由欧姆定律得到两导体间的电势差为

$$U = IR = \sigma \frac{Q}{\varepsilon} R$$

故导体间的电容为

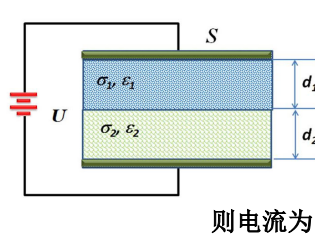
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon}{\sigma R}$$

或者由上一页推导的

$$\tau = RC = \rho \varepsilon$$

$$C = \frac{\rho \varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon}{\sigma R}$$

【例69】一平行板电容器两极板的面积为 $S$ ，两板间充满两层均匀介质，它的厚度为 $d_1$ 和 $d_2$ ，介电常数为 $\varepsilon_1$ 和 $\varepsilon_2$ ，电导率为 $\sigma_1$ 和 $\sigma_2$ ，当两级板间加电势差为 $U$ 时，略去边缘效应，求(1)通过电容器中的电流；(2)电流密度；(3)两介质中的 $E$ 和 $D$ ，并计算两介质交界面的电荷面密度；(4)两极板间漏电的时间常数 $\tau$ 。



【解】  $R = \rho \frac{L}{S}$

(1) 两极板间的电阻为

$$R = \frac{d_1}{\sigma_1 S} + \frac{d_2}{\sigma_2 S} \quad \text{串联}$$

则电流为

$$I = \frac{U}{R} = \frac{\sigma_1 \sigma_2 S U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

(2) 电流密度为  $\vec{j} = \frac{I}{S} \vec{n} = \frac{U}{SR} \vec{n} = \frac{\sigma_1 \sigma_2 U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} \vec{n}$

(3) 电场强度和电位移矢量分别为

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{j}}{\sigma_1} = \frac{\sigma_2 U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} \vec{n}$$

$$\vec{D}_1 = \varepsilon_1 \vec{E}_1 = \frac{\varepsilon_1 \sigma_2 U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} \vec{n}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\vec{j}}{\sigma_2} = \frac{\sigma_1 U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} \vec{n}$$

$$\vec{D}_2 = \varepsilon_2 \vec{E}_2 = \frac{\varepsilon_2 \sigma_1 U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} \vec{n}$$

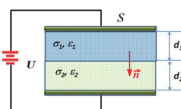
交界面上自由电荷密度  $\sigma_0 = (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = D_{2n} - D_{1n} = \frac{(\varepsilon_2 \sigma_1 - \varepsilon_1 \sigma_2) U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$

交界面上极化电荷密度

$$\sigma' = (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \vec{n} = [(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \vec{E}_1 - (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \vec{E}_2] \cdot \vec{n}$$

$$= \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \sigma_2 U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} - \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \sigma_1 U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} = \frac{[(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \sigma_2 - (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \sigma_1] U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

(4) 漏电常数  $\tau$   $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\varepsilon_1 S} + \frac{d_2}{\varepsilon_2 S}$  两电容串联



$$C = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 S}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}$$

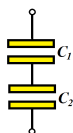
$$\tau = RC = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\sigma_1 \sigma_2} \frac{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}$$

这种解法就是“导体优先”

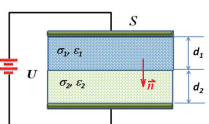
如果介质优先，则结果如何？

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} S}{d_1}, \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} S}{d_2}$$



$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \varepsilon_{r2} S}{\varepsilon_{r2} d_1 + \varepsilon_{r1} d_2}$$



$$Q_0 = CU = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \varepsilon_{r2} S U}{\varepsilon_{r2} d_1 + \varepsilon_{r1} d_2}$$

$$\sigma_0 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \varepsilon_{r2} U}{\varepsilon_{r2} d_1 + \varepsilon_{r1} d_2}$$

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_{r1} \varepsilon_{r2} U}{\varepsilon_{r2} d_1 + \varepsilon_{r1} d_2}$$

介质优先



$$E_1 = \frac{E_0}{\varepsilon_{r1}} = \frac{\varepsilon_{r2} U}{\varepsilon_{r2} d_1 + \varepsilon_{r1} d_2}$$

$$E_2 = \frac{E_0}{\varepsilon_{r2}} = \frac{\varepsilon_{r1} U}{\varepsilon_{r2} d_1 + \varepsilon_{r1} d_2}$$

导体优先

$$E_1 = \frac{\sigma_0}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

$$E_2 = \frac{\sigma_0}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$



如果讨论**稳定过程**，即平衡之后的电场分布，则**导体优先**

$$t \rightarrow \infty$$

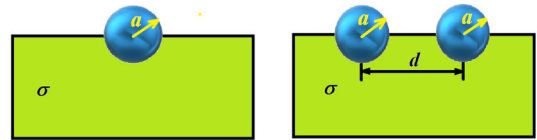
如果讨论是**接通开关瞬间**，则**介质优先**

$$t \rightarrow 0$$

如果讨论是接通开关之后的变化过程，则为瞬态过程

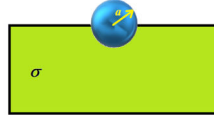
$$E(t)$$

**【例70】**若把大地看成是一个电导率为 $\sigma$ 的导电介质。  
(1) 将半径为 $a$ 的球形电极一半埋到地下，求其接地电阻；  
(2) 在距离 $d$  ( $d \gg R$ ) 的地方同样埋一相同电极，求它们之间的电阻。  
(3) 如果大地的绝对介电常数为 $\epsilon$ ，球半径分别为 $a$ 和 $b$ ，求两个电极之间的电容值。  
(4) 两个导体球初始带 $+Q$ 和 $-Q$ ，求在大地上产生的总焦耳热。



**【解】** (1) 电流在大地是按球形径向分布，电流密度为

$$j = \frac{I}{S} = \frac{I}{2\pi r^2}$$



电场强度为:  $E = \frac{j}{\sigma} = \frac{I}{2\pi\sigma r^2}$

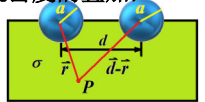
无限远处电势为零，所以电极的电势为:

$$U = \int_a^\infty E dr = \int_a^\infty \frac{I}{2\pi\sigma r^2} dr = \frac{I}{2\pi\sigma a}$$

根据欧姆定理，接地电阻为  $R = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma a}$

**(2) 求两球间电阻:** 地中一点 P 距其中一个电极为  $r$ ，该点的电流密度为两个电极在该点电流密度的叠加，即

$$\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 = \frac{I}{2\pi r^2} \vec{e}_r + \frac{I}{2\pi(d-r)^2} \vec{e}_r$$



电场是保守力场，可选一条最近的路线，即**沿地面从一个电极积分到另一个电极**，这时

$$j = \frac{I}{2\pi r^2} + \frac{I}{2\pi(d-r)^2} \quad E = \frac{j}{\sigma} = \frac{I}{2\pi\sigma r^2} + \frac{I}{2\pi\sigma(d-r)^2}$$

$$U' = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{I}{2\pi\sigma} \int_a^{d-a} \left[ \frac{1}{r^2} + \frac{1}{(d-r)^2} \right] dr = \frac{I}{\pi\sigma} \left[ \frac{d-2a}{ad-a^2} \right]$$

电阻为  $R' = \frac{U'}{I} = \frac{1}{\pi\sigma} \frac{d-2a}{ad-a^2}$

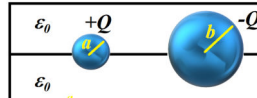
**(3) 求两个电极之间的电容值:** 因为两种介质，不能直接使用

$$RC = \epsilon\rho$$

若两个导体球全部处于空气中

总电容为  $C_1 = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{d}}$

**【见2-2例32】**

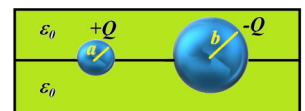


等效于两个半球电容的并联，即上半部分的电容为

$$C_1' = \frac{1}{2} C_1 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{d}}$$

若两个导体球全部处于介质中

$$C_2 = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{d}}$$

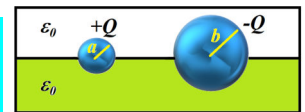


等效于两个半球电容的并联，即下半部分的电容为:

$$C_2' = \frac{1}{2} C_2 = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{d}}$$

上半部分处于空气中，下半部分处于介质中，**电容并联**

$$C = C_1' + C_2' = \frac{2\pi\epsilon_0(\epsilon_r + 1)}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{d}}$$





(4) 初始电容存储的总静电能为:

$$W_0 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0(\epsilon_r+1)} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{d} \right) Q^2$$

若  $a = b$

$$W_0 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0(\epsilon_r+1)} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{d} \right) Q^2$$

末态电容器能量为零:

$$\Delta W = W_0$$

### § 3.2.7 欧姆定律的失效问题

- 若平均自由时间  $\tau$  与电场无关, 则电流密度与电场强度成线性关系, 这种导电介质就是**欧姆介质**;
- 欧姆定律的微分形式在电流随时间变化  $I(t)$  时也成立, 但是场强  $E$  随时间变化的周期  $T$  应比  $\tau$  大得多, 即

$$T \gg \tau$$

- 对一般金属, 电子的平均自由时间  $\tau$  在  $10^{-13} \sim 10^{-14}$  s 范围内, 这就要求  $E$  随时间变化的周期  $T \gg 10^{-14}$  s 或频率  $f \ll 10^{14}$  Hz, 这个频率属于可见光范围, 而一般场强变化的频率比可见光频率小得多, 故直到频率超过微波段 ( $10^{11}$  Hz), 欧姆定律仍成立。

38

- 而当  $\tau$  与电场有关时, 电导率  $\sigma$  本身与场强有关  $\sigma(E)$ , **欧姆定律失效**。

- 即  $j$  与  $E$  或者说  $I$  与  $U$  的线性比例关系遭到破坏, 而代之以**非线性**关系。

### 1. 电场很强时

例如在金属中  $E > 10^3 \sim 10^4$  V/m 时, 电子漂移速度会很大, 大到可以与平均速率相比拟。这时, 电子的平均自由飞行时间必然受到电场  $E$  的影响,  $j$  与  $E$  不再是线性关系, 而是**非线性的关系**。

39

### 2. 低气压下的电离气体



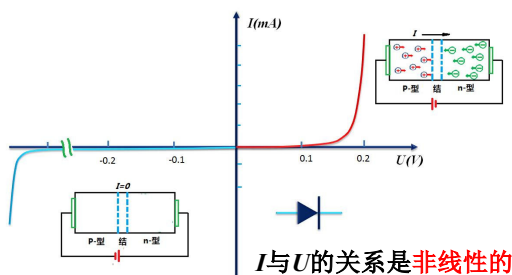
$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \pi d^2 P}$$

$k_B$ : 玻尔兹曼常数,  
 $T$ : 温度,  $d$ : 分子直径,  $P$ : 压强

即使电场强度不是很高时, 此时**气体分子的平均速度很大, 平均自由程  $\lambda$  很长**, 导致**欧姆定律失效**

40

### 3. 晶体管、电子管等器件

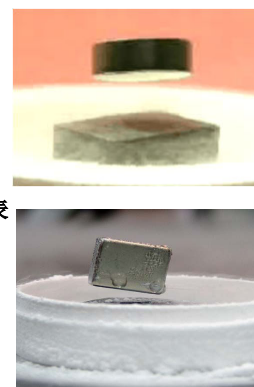


PN结加正反向偏置使得导通和截止示意图

41

### 4. 超导介质

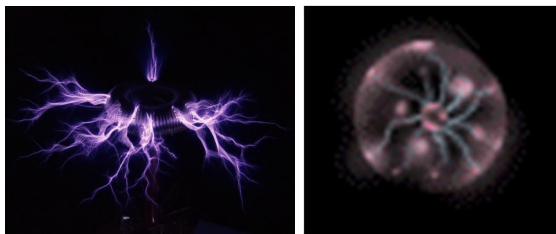
- 超导介质内部的电流**一经激发就能长期维持, 而电场强度却处处为零 ( $E=0$ )**;
- 不能简单地把超导介质视为电导率  $\sigma$  为无限大的导体 (否则表面电流密度将趋于无限大), 因为它的**导电规律和导电机制与通常的导体完全不同**。
- 电流在超导体中的流动必定在载流空间有特定的形式, 以保证**体系的能量处于最低态**。



42

## 5. 其它情况

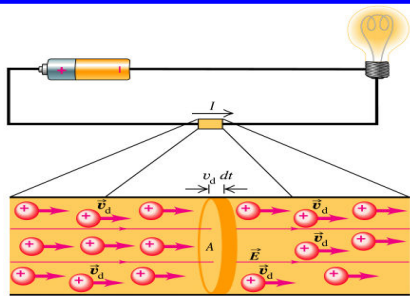
例如对某些晶体和处于磁场中的等离子体，其导电特性与电流的方向有关，表现出各向异性，这时  $j$  与  $E$  不再同向，电导率  $\sigma$  为张量。



## § 3-3 电源及电动势

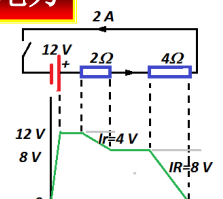


### § 3.3.1 电源与电动势



### 1. 稳恒电流必须有非静电力

稳恒电流是闭合的：当沿闭合回路绕行一周之后，所经历过程的电势总改变量为零。即在闭合回路中，既有电势下降的路段，也有电势上升的路段。



- 当正电荷沿电势下降的路段运动时，静电力做功。当正电荷沿电势上升的路段运动，静电力做负功，即静电力将对电荷的运动起阻碍作用，电荷沿电势上升路段的定向运动将逐渐减速。
- 因此要维持稳恒电流，电路中一定还有一种非静电本质的力作用于电荷。

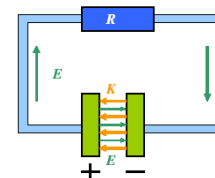
## 2. 电 源

- 电源是提供非静电力的装置。
- 电源能够提供其他形式能量并将其转换为电势能(电能)，且存在非静电力的电路段。
- 通常电源有正、负两极，电势高的叫正极，电势低的叫负极。



### 电源的作用

- 它通过极板及外电路各处累积的电荷，在外电路中产生静电场  $E$ ，使电流经外电路由正极指向负极；
- 电源内部，除了有静电力之外还存在非静电力，在二者的联合作用下，电流经电源内部由负极流向正极。

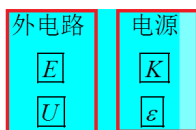


上述两部分电流一起形成了闭合的稳恒电流。



### 非静电力存在时的欧姆定律

- 为定量地描述电源提供的非静电力特性，引进两个物理量：**非静电力 $K$** 和**电动势 $\varepsilon$** 。它们分别对应于描述静电力的物理量 **$E$**  (电场强度)和 **$U$**  (电压)。

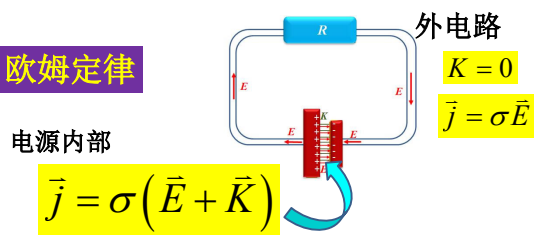


- $K$ 表示电源内部单位正电荷受到的非静电力。
- 电荷 $q$ 受到的总力，应当是静电力和非静电力之和，即：

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{K})$$

49

### 欧姆定律



电源内部

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{K})$$

- 该式是欧姆定律向稳恒电路的推广，它表明**电流是静电力和非静电力共同作用的结果**。
- 对通常的电源，在连接它的外电路中**只有静电力**， $K=0$ ，上式就回到通常的欧姆定律形式。但在**电源内部 $K \neq 0$** 。

50

### 3. 电动势

- 描述电源所提供的非静电力的性质，更常用的**不是物理量 $K$** ，而是**电动势 $\varepsilon$** 。
- 电动势 $\varepsilon$ 的定义：将单位正电荷从负极经电源内部移到正极时非静电力所作的功，即

$$\varepsilon = \int_{-}^{+} \vec{K} \cdot d\vec{l}$$

电源内部

电动势和电压单位相同，都是“伏特(V)”。

51

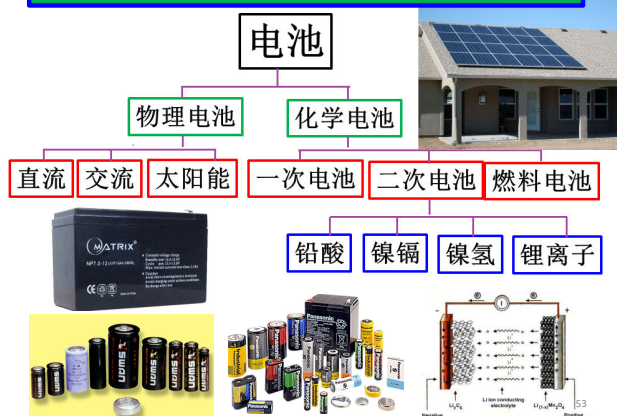
- 电源的电动势 $\varepsilon$ 反映电源中非静电力 $K$ 做功的本领，它反映的是**电源本身的特性，与外电路的性质以及是否接通无关**。
- 有些电源无法区分电源内部和外部， $K$ 分布于回路各处，这时我们把电动势定义为沿**闭合回路**的线积分，即

$$\varepsilon = \oint_L \vec{K} \cdot d\vec{l}$$

称它为**整个闭合回路的电动势**。  
对通常电源而言， $K$ 仅限于电源内部。

52

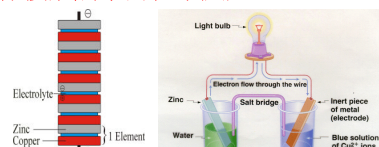
### § 3.3.2 常见的几种稳恒电源



### 1. 化学电池

- 化学电源：通过化学反应，把**化学能转变成电能**的装置。各类**干电池**和**蓄电池**都属于化学电池，如常见的**锌锰干电池**、**铅酸电池**等。
- 最早的化学电池是**伏打电池**，它由浸在稀硫酸溶液中一块钢片和一块锌片组成。伏打电池的应用价值不高，后来发展成为**丹聂耳电池**。
- 化学电源的电动势一般来源于**第一类导体与第二类导体接触层中的化学反应**。

伏打电堆



丹聂耳电池

54

### 水果电池

在水果上插上锌片和铜片，然后串联起来，就是一个简单的电池，它可以使二极管发光

### 丹聂耳电池

由两个相邻的液池组成，一个池中有 $\text{ZnSO}_4$ 溶液，插有锌棒；另一个池中有 $\text{CuSO}_4$ ，插有铜棒。

锌棒上的锌离子通过化学作用而自动溶入溶液，使**锌棒带负电**，**溶液带正电**，在锌棒和溶液之间形成一个**偶电层**。

偶电层的电场阻止锌棒上的锌离子继续向溶液溶解，最后，化学作用和电场作用达到平衡，这时**溶液和锌棒之间保持约0.7663V的电势差**。

在铜棒附近，溶液中的铜离子因化学作用而被吸附到铜棒上，使**铜棒带正电**，**溶液带负电**，在铜棒与溶液间也形成**偶电层**。

偶电层的静电场阻止铜离子继续移向铜棒，平衡时铜和溶液之间保持约**0.337 V的电势差**。

正极(铜棒)、负极(锌棒)间的**总电势差为1.11 V**。

### 丹聂耳电池有负载时的电势分布

(a) 放电时：电池的化学能→电能→内、外电路热能

(b) 充电时：外电源的能量→电能→热能+电池的化学能

### 干电池

外壳用**锌皮**做成，壳内是氯化铵( $\text{NH}_4\text{Cl}$ )、氯化锌( $\text{ZnCl}_2$ )、淀粉组成的糊状物作为**电解液**，中间是一根**碳棒**，碳棒周围紧裹有二氧化锰( $\text{MnO}_2$ )、石墨粉、乙炔黑等的混合物。

在锌皮与电解液接触处，化学作用促使锌皮中的锌原子失去电子而成锌离子进入电解液，使**锌皮带负电**，而在碳棒与电解液接触处，电解液中的铵离子在与 $\text{MnO}_2$ 的化学反应过程中，从碳棒取得电子，使**碳棒带正电**。

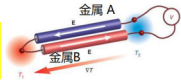
碳棒(正极)和锌皮(负极)之间就可维持一定的**电势差(约1.5V)**。

表 2-2 化学电池的分类			
电池类型	特性	主要种类	用途
一次电池	因为放电过程中进行的化学反应是不可逆，放电后不能再用充电方法使它复原后再次使用。	锌锰干电池；锌汞电池；镉汞电池；锂亚硫酰电池。	低功率到中功率放电，使用方便，相对价廉，外形以扁形、扣式和圆柱形为主。
二次电池	因为放电过程中的化学反应是可逆的，故可放电、充电多次循环使用，放电后可用充电方法使活性物质复原后再放电。	铅酸电池；镉镍电池；锌银电池；锌氧(空)电池；氢镍电池。	较大功率的放电，在人造卫星、宇宙飞船、空间站和潜艇方面、电动汽车方面。
储备电池	正负极活性物质和电解液在贮存期间不直接接触，在使用前临时让电解液与电极接触，故电池可长时间贮存。	镁银电池；锌银电池；铅高氯酸电池；钙铁电池。	贮存寿命或工作寿命特别长，可用作心脏起搏器和计算机存储器系统的电源。
燃料电池	这类电池可把活性物质连续注入电池，从而使电池能长期不断进行放电。	氢氧燃料电池；肼空燃料电池。	已用于“阿波罗”飞船等登月飞行器和载人航天器中，并正在进一步研究燃料电池电站，并入公用电网供电。

## 2. 温差电池 • 热电偶

- ✚ **温差电池**：利用**温差电效应**把热能转化成电能的装置。
- ✚ **塞贝克效应**：德国物理学家塞贝克于1821年从实验上发现**两种不同的金属(如铜和康铜)紧密接触在一起时，两金属间会出现一定的电势差**。
- ✚ **原理**：**不同金属的逸出功(功函数)不同**，若两种金属的自由电子数密度相同，在相同温度下，若 $W_A < W_B$ ，则从金属A逸出的电子比B多，接触后，从A进入B的电子比从B进入A的多，因而A带正电，B带负电，A-B间出现接触电势差。

$$U_{AB} = (W_B - W_A) / e$$



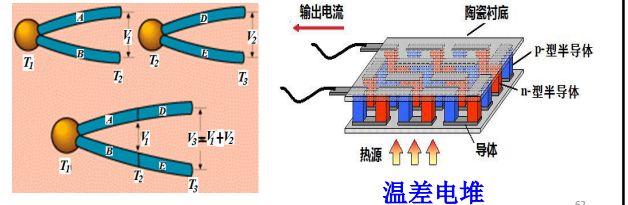
61

- ✚ 在一定的温度范围内，温差电动势 $\varepsilon$ 在数值上**与两接点处的温度差有关**，温差不大时有：

$$\varepsilon = (S_B - S_A)(T_2 - T_1)$$

$S_A$ 、 $S_B$ 为材料的塞贝克系数

- ✚ **温差电动势叠加原理**



温差电堆

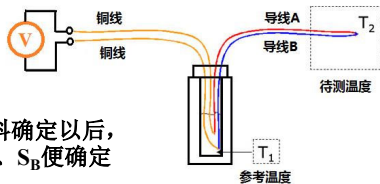
62

## 热电偶

- ✚ 当两种金属材料确定以后，塞贝克系数 $S_A$ 、 $S_B$ 便确定
- ✚ 如果保持一个接触点为已知的固定温度 $T_1$ ，则**通过测量回路中的电动势 $\varepsilon$ 或开路两端的电势差，就可以求得另一接触点的温度 $T_2$** ，从而成为一种温度计，这就是**温差电偶温度计或热电偶**。

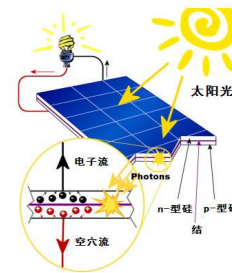
$$T_2 = T_1 + \frac{\varepsilon}{S_B - S_A}$$

- ✚ 热电偶测温有灵敏度高、测温范围大、受热面积和热容量小等优点



63

## 3. 光电池(太阳能电池)

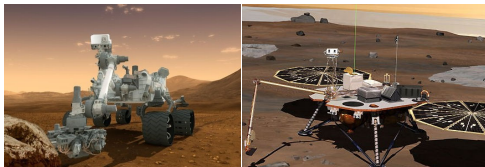


- 原理**：光照到金属表面，由于**光电效应**，金属表面发射电子，这些电子被收集到另一邻近的金属表面，造成正、负电荷分离，产生电动势。
- 太阳能电池的种类主要有硅、硫化镉、碲化镉及砷化镓等。

64

## 4. 放射性同位素电池

- ✚ **原理**：利用放射性同位素在**衰变过程中放出的各种粒子(如 $\alpha$ 和 $\beta$ 粒子)或 $\gamma$ 射线与物质的相互作用**，射线的动能被物质阻止后转变为热能，通过换能器将热能转化为电能。



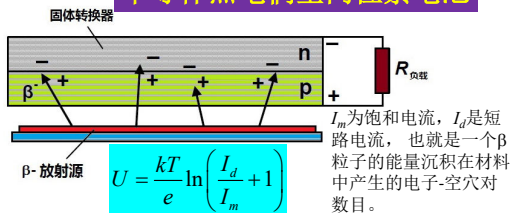
65

- ✚ **优点**：(1)抗干扰性强和工作准确可靠：放射性同位素放出的能量大小、速度，不受外界环境中的温度、化学反应、压力、电磁场等的影响。核能电池可给负载提供恒定电流，电流只取决于放射源的性质，与负载电阻无关。(2)衰变时间很长，可长期使用。
- ✚ **种类**：可作为同位素电池的核素只有10余种，他们是 $^{60}\text{Co}$ 、 $^{90}\text{Sr}$ 、 $^{137}\text{Cs}$ 、 $^{144}\text{Ce}$ 、 $^{147}\text{Pm}$ 、 $^{170}\text{Tm}$ 、 $^{210}\text{Po}$ 、 $^{238}\text{Pu}$ 、 $^{242}\text{Cm}$ 、 $^{244}\text{Cm}$ 等，实际上都采用半衰期较长的同位素如有 $^{90}\text{Sr}$  (半衰期为28年)、 $^{238}\text{Pu}$  (半衰期89.6年)、 $^{210}\text{Po}$  (半衰期为138.4天)等。

66

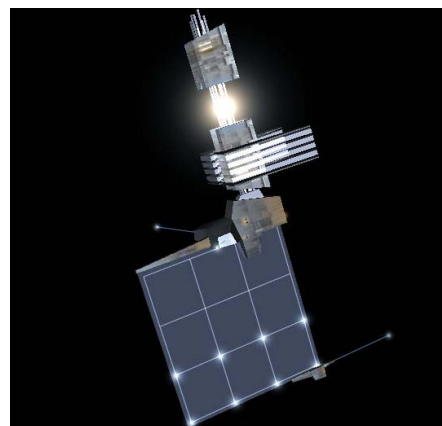


### 半导体热电偶型同位素电池



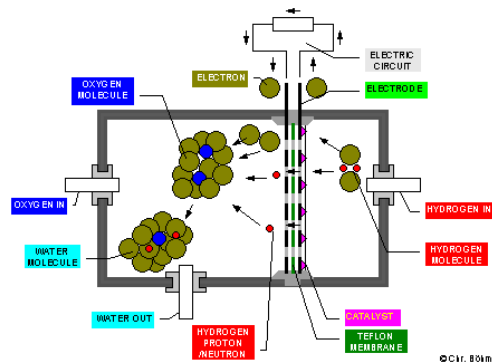
- 从放射源放出的  $\beta$  粒子在材料中产生电子-空穴对, 由于  $PN$  结的电势差使得电子和空穴均在负载上形成电流。
- 对  $^{90}\text{Sr}$  放射源, 每个  $\beta$  衰变大约产生 **200,000 个电子-空穴对**。这种电池的功率大约为 **70-75W**, 热电转换效率约为 **5%**, 比功率达到 **2.34W/kg**。外形尺寸大约为直径 40cm, 高 46cm, 重量约为 20kg。

67



68

### 5. 燃料电池

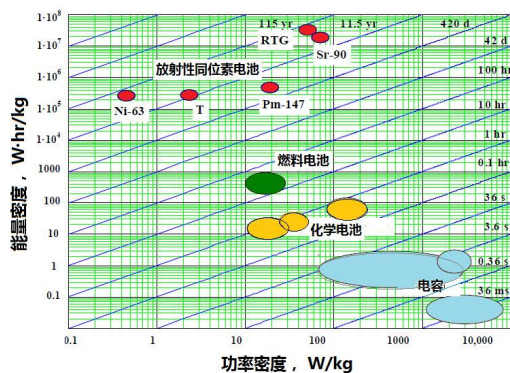


69



70

### 各种电池的能量密度和功率密度比较



71

### § 3.3.3 全电路欧姆定律

#### 1. 全电路欧姆定律

存在非静电力时, 电流是由静电力和非静电力共同产生的。考虑到非静电力  $K$  的作用, 欧姆定律的微分形式为

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{K})$$

沿外电路和电源组成的闭合回路, 静电力和非静电力对单位电荷做的功为:

$$\oint (\vec{E} + \vec{K}) \cdot d\vec{l} = \oint \frac{\vec{j}}{\sigma} \cdot d\vec{l} = \int_{\text{外}} \frac{\vec{j}}{\sigma_{\text{外}}} \cdot d\vec{l} + \int_{\text{内}} \frac{\vec{j}}{\sigma_{\text{内}}} \cdot d\vec{l}$$

72

静电场  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$       非静电场  $\mathcal{E} = \oint \vec{K} \cdot d\vec{l}$

$j = \frac{I}{S}$        $R = \rho \frac{L}{S} = \int \frac{dl}{\sigma S}$

$\int_{\text{外}} \frac{\vec{j}}{\sigma_{\text{外}}} \cdot d\vec{l} = I \int_{\text{外}} \frac{dl}{\sigma_{\text{外}} S} = IR$        $\int_{\text{内}} \frac{\vec{j}}{\sigma_{\text{内}}} \cdot d\vec{l} = I \int_{\text{内}} \frac{dl}{\sigma_{\text{内}} S} = Ir$

$\oint (\vec{E} + \vec{K}) \cdot d\vec{l} = \oint \frac{\vec{j}}{\sigma} \cdot d\vec{l} = \int_{\text{外}} \frac{\vec{j}}{\sigma_{\text{外}}} \cdot d\vec{l} + \int_{\text{内}} \frac{\vec{j}}{\sigma_{\text{内}}} \cdot d\vec{l}$

$\mathcal{E} = I(R + r)$  全电路欧姆定律

73

**【例71】** 一电缆AB长50km，中间某点发生漏电，现在做下列检查，如图，将B断开，在A端加上200V电压，测得B端电压为40V；再将A端断开，在B端加上可调的电压，当调到300V时，A端电压为40V。求发生漏电的地点离A端的距离。

**【解】** 设电缆每千米电阻为 $\lambda$ ，漏电处的漏电阻为 $R$ ，在A端加上200V电压时，B端的电压为

$U_B = I_A R = \frac{200}{2\lambda x + R} R = 40 \Rightarrow \lambda x = 2R$

在B端加上300V电压时，A端的电压为

$U_A = I_B R = \frac{300}{2\lambda(50-x) + R} R = 40 \Rightarrow 200\lambda - 4\lambda x = 13R$

$\lambda x = 2R \Rightarrow 200\lambda = 21R$

$x = 2 \frac{R}{\lambda} = 2 \frac{200}{21} = 19.04 \text{ (km)}$

74

## 2. 稳恒电路的特点

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{j} = 0 \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} \end{array} \right\} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \rho = 0$$

因此稳恒电路的特点有：

- ① 在稳恒电流的情况下，均匀各向同性线性导体内的宏观电荷密度为零，净电荷只分布在导体表面或导体内不均匀的地方。
- ② 外电路中，电流线和电力线方向一致，且平行于导体表面。
- ③ 在电源内部，电流线的方向由 $E$ 和 $K$ 共同决定。

75

## 3. 稳恒电路中静电场的作用

- ◆ 调节电荷分布的作用(所需时间很短)
  - ① 导线表面电荷分布的变化
  - ② 非均匀导体内部电荷分布的变化
  - ③ 两导体交界面上电荷分布的变化
- ◆ 能量的中转作用：把电源内部的非静电能传送到外电路上
  - ① 电源外部，静电场把正电荷从高电势处送到低电势处做正功，消耗电场能。
  - ② 电源内部，非静电场把正电荷从低电势处送到高电势处，反抗静电场做功，消耗非静电能，增加电场能。
  - ③ 整个闭合回路中，静电场做的总功为零，静电能变化的总和为零。因此，静电场把电源内部的非静电能传送到外电路上。

76

作业 3.9, 3.10, 3.12

Thank you!

77