

● 磁路的基尔霍夫第一定律(节点磁通方程)

$$\sum_i \Phi_i = 0$$

磁场的高斯定理

● 磁路的基尔霍夫第二定律

$$\sum U_m = \sum \varepsilon_m$$

$$U_m = Hl, \quad \varepsilon_m = NI$$

磁位差 U_m 磁动势 ε_m

磁场的环路定理

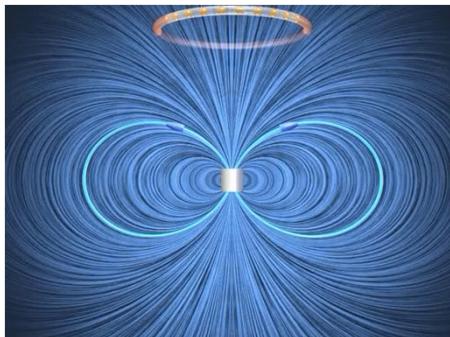
● 磁路的欧姆定律

$$\Phi_m (R_m + r_m) = \varepsilon_m$$

$$R_{mi} = \int_i \frac{dl_i}{\mu_0 \mu_i S_i} \quad \text{磁阻}$$

2

第6章 电磁感应与磁场的能量



3

§ 6-1 电磁感应定律

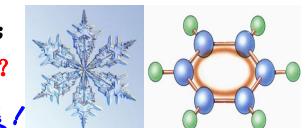


自然界中的许多事物、现象有对称性；

不少自然规律有对称性；

电和磁是否也有对称性？

科学具有简洁的对称美！



4

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{Id\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} \quad \text{电流产生磁场}$$

电荷 → 可使周围导体 **感应出电荷**；

磁体 → 可使周围材料 **磁化、感应出磁性**；

电与磁应该是一对和谐的对称现象

电流 → 能否使周围的线圈感应出电流？

5

● 1822年，安培在过阻尼冲击电流计中发现一个电流能**够感应出另一电流**，但他忽视了这一重要发现。

● 1823年，瑞士科学家J.D.Colladon做了**磁铁在螺线管中移动**的实验。为了使磁铁不至于影响到检流计中的小磁针，特意将检流计**放在隔壁房间**。他用磁棒在线圈中插入或拔出，然后一次又一次跑到另一个房间去观察检流计是否偏转，没能观察到指针的偏转，**未能发现电磁感应现象**。

● 1825年，法国物理学家阿拉果F.Arago设计了著名的“圆盘实验”，在一个可以绕着垂直轴旋转的铜盘的正上方，悬挂一个磁针，当铜盘旋转时，磁针跟着旋转。Arago圆盘实验荣获1825年Copley金质奖章。

6

§ 6.1.1 电磁感应现象

- Faraday在1824-1828年的实验均告失败。
- 1831年夏获得突破，发现电路A接通或断开的瞬间，检流计的指针发生明显偏转并振荡
- 1831年8月29，他改用磁铁插入和拉出，发现电流表的指针偏转。
- 1831年11月24日，他在英国皇家学会宣读了他的论文《电学实验研究》第一辑中的四篇论文
 - 《论电流的感应》
 - 《论从磁产生电》
 - 《论物质的一种新的电状态》
 - 《论Arago的磁现象》

Faraday把产生感应电流的情况概括为五类：

- 变化的电流；
- 变化的磁场；
- 运动的恒定电流；
- 运动的磁铁；
- 在磁场中运动的导体。

Faraday把他发现的这种现象正式定名为“电磁感应” Electromagnetic induction.

1831年9月，法拉第发明了世界第一台发电机

§ 6.1.2 法拉第电磁感应定律

1. 电磁感应的共同规律

磁场的变化 → 磁通量的变化

导体回路在磁场中运动 → 磁通量的变化

回路中一部分导体在磁场中作切割磁力线运动 → 磁通量的变化

$$\Phi = \bar{B} \cdot \bar{S}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} \neq 0$$

2. 电磁感应定律

电磁感应定律的表述：当通过导体回路的磁通量随时间发生变化($d\Phi/dt \neq 0$)时，回路中就有感应电动势 ε 产生，从而产生感应电流 I 。

感应电动势的大小：与磁通量变化的快慢有关，或者说与磁通量随时间的变化率成正比。

感应电动势的方向：总是企图由它产生的感应电流建立一个附加磁通量，以阻碍引起感应电动势的那个磁通量的变化

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$
 韦伯/秒 (Wb/s)

注意

- 感应电动势比感应电流更本质，即使回路不闭合，仍有感应电动势存在。
- 感应电动势产生的原因是磁通量的变化，与原来磁通量的大小无关。

$$\Phi = \bar{B} \cdot \bar{S} = BS \cos \theta$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -S \cos \theta \frac{dB}{dt} - B \cos \theta \frac{dS}{dt} + BS \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

磁场变化产生的电动势称感生电动势

导体在磁场中运动产生的电动势称动生电动势

只要 $dB/dt, dS/dt, d\theta/dt$ 不同时为零，总有 ε

3. 楞次定理

楞次定律：闭合回路中感应电流的方向，总是使得它所激发的磁场阻止引起磁感应电流的磁通量的变化。

楞次定理的另一种表述：导体在磁场中运动时，导体中由于出现感应电流而受到的磁场力必然阻碍此导体的运动。

阻止的意思：

- 磁通增加时，感应电流的磁通与原磁通方向相反。
- 磁通减少时，感应电流的磁通与原磁通方向相同。

楞次定律的实质：能量守恒

线圈中感应电流会产生焦耳热，这部分能量由何处来？

感应电流的磁场对条形磁铁起排斥作用，外力做功才能将磁铁推进

感应电流磁场对条形磁铁起吸引作用，外力做功才能将磁铁拔出

电磁感应过程遵从能量守恒定律

如何确定电动势方向？

右手螺旋关系
设回路绕行方向 → 面元法线方向 \vec{n}
 \vec{B} 方向
 Φ 的变化
 ϵ 的正负 ← 磁通量 Φ 的正负

ϵ 为正，表示在闭合回路中产生的感应电流的方向与设定的回路绕行方向一致

$\frac{dB}{dt} > 0, \vec{n}, \vec{B}, \epsilon$
 $B > 0, \Phi > 0, d\Phi/dt > 0, \epsilon < 0$

$\frac{dB}{dt} < 0, \vec{n}, \vec{B}, \epsilon$
 $B > 0, \Phi > 0, d\Phi/dt < 0, \epsilon > 0$

对 N 匝线圈组成的导体回路：

$$\Psi = \sum_{i=1}^N \Phi_i$$

则：

$$\epsilon = -\frac{d\Psi}{dt} = -\sum_{i=1}^N \frac{d\Phi_i}{dt}$$

对特殊的情况：

$$\Psi = N\Phi$$

则：

$$\epsilon = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

15

【例25】 半径为 R 和 r 、相距为 Z 的同轴平面线圈 a 和 b ，若 $R \gg r$, $Z \gg R$ ，在 b 中有电流 I ，线圈 a 沿 Z 轴以 v 向上运动，求 a 中的 ϵ 。

【解】 b 线圈在 Z 轴上产生的磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \approx \frac{\mu_0 I R^2}{2 Z^3} \quad (Z \gg R)$$

$R \gg r$, 则可近似认为通过线圈 a 的磁感应强度等于 z 轴上的磁感应强度，设逆时针方向为正，则

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S B dS = B \pi r^2$$

16

$B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{Z^3}$

$$\Phi = B \pi r^2 = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{Z^3} \pi r^2$$

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{3\pi\mu_0 I R^2 r^2}{2 Z^4} \frac{dZ}{dt} = \frac{3\pi\mu_0 R^2 r^2}{2 Z^4} I v$$

$\epsilon > 0$, 表明感应电流方向与选定方向一致，即为逆时针方向。

线圈 a 向上运动，磁通减少

磁通减少时，感应电流的磁通与原磁通方向相同，以阻止磁通的减少

17

【例25】 图示是测量螺线管内磁场的一种装置，将很小的线圈放在螺线管内部待测处，该线圈与一个冲击电流计 G 串联，当用反向开关 K 使螺线管的电流反向时，线圈中产生感应电动势，从而产生电荷量 Δq 的迁移。已知线圈有200匝，螺线管直径为 $2.5cm$ ，与 G 串联的电阻为 $1 k\Omega$ ，测得 $\Delta q = 2.5 \times 10^{-7} C$ ，求 B 值。

18

【解】回路中的感应电流为

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{Nd\Phi}{dt} \frac{1}{R} = -\frac{NS}{R} \frac{dB}{dt}$$

则 $dq = -\frac{NS}{R} dB$ **开关反向，磁场反向**

$$\Delta q = \int dq = \int_{-B}^B -\frac{NS}{R} dB = -\frac{NS}{R} [B - (-B)] = \frac{2NSB}{R} = 2\pi RNB$$

$$B = \frac{R\Delta q}{2NS} = \frac{1000 \times 2.5 \times 10^{-7}}{2 \times 200 \times \pi (1.25 \times 10^{-2})^2} = 1.3 \times 10^{-4} (T)$$

19

§ 6.2 动生电动势和感生电动势

对任一随时间和空间变化的量 $\vec{F}(x, y, z, t)$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{F}}{dt} &= \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \left(\frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_y \right) \vec{F} \\ &= \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{F} \end{aligned}$$

20

$\frac{d\vec{F}}{dt} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{F}$

对磁感应强度 B , 有

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{B}}{dt} &= \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{B} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{B} \times \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{B}) \\ &= \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{B} \times \vec{v}) \end{aligned}$$

感生电动势 $\iint \nabla \times (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{S} = \oint (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{l}$

21

§ 6.2.1 动生电动势

因导体运动而产生的感应电动势

1. 闭合回路

闭合回路 C 在均匀磁场 B 中以速度 v 匀速运动

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Phi' - \Phi}{\Delta t}$$

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

闭合曲面的总磁通为零

$$\Phi' + \Phi + \Phi'' = 0$$

22

在圆柱侧面取一长条状面元，其面积矢量为

$$d\vec{S}'' = d\vec{l} \times \vec{v} \Delta t$$

则通过侧面的磁通量为：

$$\Phi'' = \iint_{S''} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{S''} \vec{B} \cdot (d\vec{l} \times \vec{v} \Delta t)$$

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b} \cdot (\bar{c} \times \bar{a}) = \bar{c} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})$$

$$\Phi'' = \iint_{S''} (\vec{v} \Delta t \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \Delta t \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

23

$$\therefore \Phi' + \Phi + \Phi'' = 0$$

闭合曲面外法线方向为正，故 Φ 是负的

$$\therefore \Phi' - \Phi = -\Phi'' \quad \text{而} \quad \Phi'' = \Delta t \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

因此线圈运动产生的动生电动势

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Phi' - \Phi}{\Delta t}$$

$$= \frac{\Phi''}{\Delta t} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$\text{即 } \varepsilon = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

闭合回路动生电动势表达式

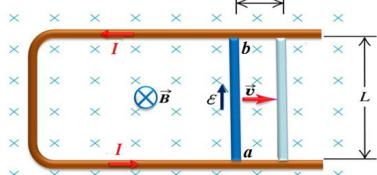
若回路中 $v = 0$, 或 $v \times B = 0$, 则对电动势无贡献

24

2. 一段导体

若只有一段导体 ab 在磁场中运动，产生的动生电动势为：

$$\varepsilon = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

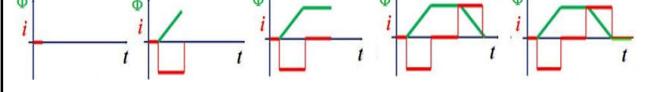
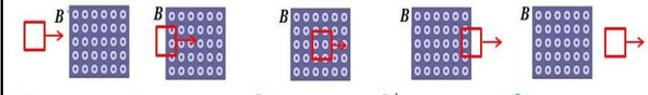


$$\vec{v} \perp \vec{B} \perp \vec{l}$$

$$\varepsilon = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = Blv$$

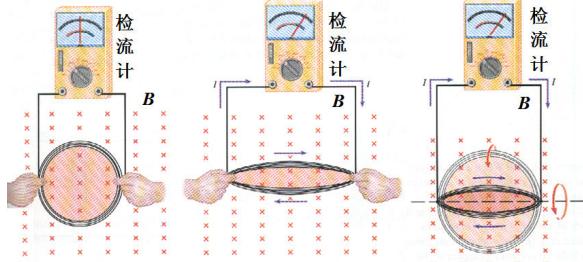
25

$$\Phi = 0, \frac{d\Phi}{dt} = 0 \quad \frac{d\Phi}{dt} > 0 \quad \Phi = C, \frac{d\Phi}{dt} = 0 \quad \frac{d\Phi}{dt} < 0 \quad \Phi = 0, \frac{d\Phi}{dt} = 0$$



$$i = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$$

26



线圈在磁场中旋转(改变 B 与 S 间的夹角 θ)，产生感应电动势和感应电流

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}, \Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos \theta$$

27

如图，一端固定的棒以角速度 ω 旋转，角速度方向与磁场平行，则线元 $d\vec{l}$ 产生的电动势为：

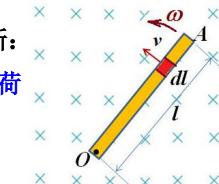
$$d\varepsilon = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = vBdl = B\omega ldl$$

$$\text{总电动势 } \varepsilon = \int d\varepsilon = \int_0^l B\omega l dl = \frac{1}{2}B\omega l^2$$

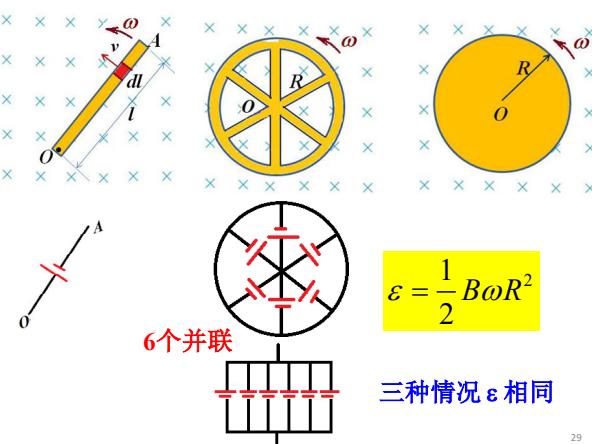
由洛伦兹力 $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ 可判断：

O 端累积正电荷，A 端累积负电荷

$$U_O - U_A = \varepsilon = \frac{1}{2}B\omega l^2$$



28



29

3. 非静电力

导体在磁场中切割磁力线运动，产生感应电动势，这个电动势就可以作为电源使用，那么它输出的能量来源于何处？

根据电源的定义：电源是由非静电力做功产生的

$$\varepsilon = \int \vec{K}_{\text{非}} \cdot d\vec{l}$$

$$\therefore \vec{K}_{\text{非}} = \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\text{又 } \varepsilon = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

这实际上是单位电荷在磁场中受到的洛伦兹力

所以，非静电力来源于洛伦兹力

30

4. 再论洛伦兹力不做功

非静电力来源于洛伦兹力, 非静电力做功得到感应(动生)电动势, 但洛伦兹力不做功, 两者是否矛盾?

导体中有感应电流, 电子沿导体定向运动, 速度为 u

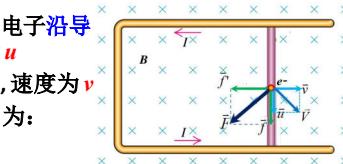
电子还随棒向右运动, 速度为 v

因此电子的合速度 V 为:

$$\bar{V} = \bar{v} + \bar{u}$$

电子受到的洛伦兹力合力为:

本例中 $\bar{f}' \perp \bar{f}$



31

f 分量为非静电力来源, 它使得电子作定向运动;

欲使导体棒保持匀速 v 向右运动, 外界必须提供一个力来克服 f' , 即外力克服 f' 做功。

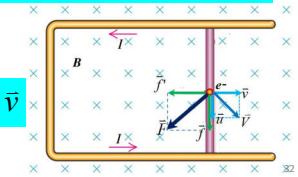
可以证明, 外力做功的数值=非静电力做功的数值, 即 f 作的正功和 f' 对棒所作的负功数值相等, 两者之和为 0。

【证明】 f 对电子所作功的功率

$$P_1 = \bar{f} \cdot \bar{u} = -e(\bar{v} \times \bar{B}) \cdot \bar{u}$$

f' 对棒所作的功率

$$P_2 = \bar{f}' \cdot \bar{v} = -e(\bar{u} \times \bar{B}) \cdot \bar{v}$$



32

$$\because (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = -\bar{a} \cdot (\bar{c} \times \bar{b})$$

$$\therefore (\bar{v} \times \bar{B}) \cdot \bar{u} = -\bar{v} \cdot (\bar{u} \times \bar{B}) = -(\bar{u} \times \bar{B}) \cdot \bar{v}$$

所以合力 F 的总功率为:

$$P = P_1 + P_2 = -e(\bar{v} \times \bar{B}) \cdot \bar{u} - e(\bar{u} \times \bar{B}) \cdot \bar{v} = 0$$

$$\text{即: } P_1 = -P_2$$

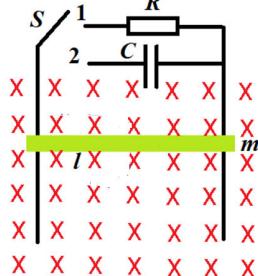
故洛伦兹力作用力的合力并不是提供能量, 而是传递能量, 即把外力克服洛伦兹力一个分力做的功, 通过另一个洛伦兹力分力做功而转化为电流的能量。

33

【例27】如图竖直平面内有左右两个平行光滑的、电阻可以忽略不计的、长直金属杆, 一个水平均匀磁场跟金属杆平面垂直, 磁感应强度大小为 B , 一长为 L 、质量为 m 、无电阻的导体棒紧贴金属杆无初速度释放后下滑。

(1) 当开关 S 接到 1, 即把电阻 R 接入电路, 求导体的最大速度;

(2) 当开关 S 接到 2, 即把电容 C 接入电路, 求棒的加速度。设电容的击穿电压为 U_b , 导体棒下滑多长时间电容器被击穿?



34

【解】(1) 开关 S 与 1 连接, 形成闭合回路, 导体切割磁力线, 产生电动势, 在回路中形成电流

$$\varepsilon = \int_0^L (\bar{v} \times \bar{B}) \cdot d\bar{l} = BLv$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{BLv}{R}$$



载流导体杆在磁场中受安培力

$$d\bar{F} = I d\bar{l} \times \bar{B} \quad F = \int_0^L dF = ILB = \frac{B^2 L^2 v}{R}$$

$$mg - \frac{B^2 L^2 v}{R} = ma = m \frac{dv}{dt} \quad t = 0, v = 0$$

$$v = \frac{mgR}{B^2 L^2} (1 - e^{-kt}), \quad k = \frac{B^2 L^2}{mR}$$

或由 $a = 0$

$$\Rightarrow v_{\max} = \frac{mgR}{B^2 L^2}$$

35

(2) 开关 S 与 2 连接, 向电容器充电

$$\varepsilon = \int_0^L (\bar{v} \times \bar{B}) \cdot d\bar{l} = BLv$$

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\Delta(C\varepsilon)}{\Delta t} = C \frac{\Delta(\varepsilon)}{\Delta t} = C \frac{\Delta(BLv)}{\Delta t} = CBL \frac{\Delta(v)}{\Delta t} = CBLa$$

$$mg - BIL = ma \\ mg - CB^2 L^2 a = ma$$

棒的加速度 $a = \frac{mg}{m + CB^2 L^2}$ 匀加速下滑

$$\text{电容上的电压 } U \quad U = \varepsilon = BLv = BLat$$

$$U = U_b$$

击穿 \rightarrow

$$t = \frac{U_b}{BLa} = \frac{U_b(m + CB^2 L^2)}{BLmg}$$

36

【例28】一闭合平面导体回路，在垂直于闭合回路的均匀磁场 B 中，绕过 a 点且与 B 平行的轴、在其平面内以角速度 ω 匀速转动，设 ab 的直线距离为 l ，求 acb 和 bda 段的电动势。

【解】连接 ab ，则 ab 与 acb 段， ab 与 bda 段分别构成闭合回路，它们在磁场中转动时磁通量不变，总的感应电动势为0。

$$\mathcal{E}_{ba} + \mathcal{E}_{acb} = 0, \quad \mathcal{E}_{acb} = -\mathcal{E}_{ba} = \mathcal{E}_{ab}$$

$$\mathcal{E}_{ab} + \mathcal{E}_{bda} = 0, \quad \mathcal{E}_{bda} = -\mathcal{E}_{ab}$$

$$\mathcal{E}_{ab} = \int_0^l (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_0^l \omega r B dr = \frac{B\omega l^2}{2}$$

$$\mathcal{E}_{bda} = -\mathcal{E}_{ab} = -\frac{B\omega l^2}{2}$$

37

§ 6.2.2 感生电动势和涡旋电场

1. 感生电动势

由磁场的变化
产生的电动势

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$



38

2. 涡旋电场

A. 产生感生电动势的原因是什么？

- Maxwell认为，变化的磁场在其周围空间会激发一种新的电场，称涡旋电场。
- 导体中的载流子在这种电场的作用下，产生运动，形成电流。
- 涡旋电场是产生感生电动势的原因。

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_\text{旋} \cdot d\vec{l}$$

39

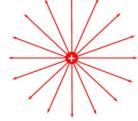
B. 静电场与涡旋电场

静电场：

由电荷 q 产生，电力线不闭合

$$\oint \vec{E}_\text{静} \cdot d\vec{l} = 0$$

静电场是保守力场



涡旋电场：

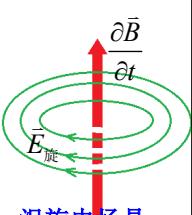
由变化的磁场 $B(t)$ 产生，不是由电荷产生的；

涡旋电场的电力线是闭合的。

带电粒子在涡旋电场中，沿闭合回路移动一周，电场力对带电粒子所做的功不为0（等于感生电动势）。

$$\oint \vec{E}_\text{旋} \cdot d\vec{l} \neq 0$$

涡旋电场是非保守力场



磁矢势 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Id\vec{l}}{r}$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

$$= -\frac{d}{dt} \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = -\oint_L \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}$$

环路 L 不随时间改变

$$\mathcal{E} = \int \vec{K} \cdot d\vec{l}$$

$$K = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

K 为产生感生电动势的非静电力，它源于磁矢势随时间的变化

又 $\mathcal{E} = \oint \vec{E}_\text{旋} \cdot d\vec{l}$ $\Rightarrow \vec{E}_\text{旋} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ $\vec{A} // \pm I$ $\vec{E}_\text{旋} // \vec{A}$ $\Rightarrow \vec{E}_\text{旋} // \pm I$

涡旋电场是磁矢势变化率的负值

41

C. 涡旋电场与变化磁场间的关系

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E} = \oint \vec{E}_\text{旋} \cdot d\vec{l} \\ \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_L \vec{E}_\text{旋} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \end{array} \right.$$

42

D. 空间的总电场

空间的总电场 \vec{E} 是静电场 $\vec{E}_{\text{静}}$ 和涡旋电场 $\vec{E}_{\text{旋}}$ 的矢量叠加，即

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_{\text{静}} + \vec{E}_{\text{旋}} \\ \vec{E}_{\text{静}} &= -\nabla U \quad \downarrow \quad \vec{E}_{\text{旋}} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{E} &= -\nabla U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\end{aligned}$$

43

【例29】一半径为 R 的无限长载流螺线管中的电流 I 随时间作线性变化， $dI/dt=k$ ，求(1)管内外的涡旋电场 $E_{\text{旋}}$ ；(2)求管内一长为 L 、离 O 点距离为 h 的导体的感应电动势；

【解】(1) 管内 $r < R$ $B_{\text{内}} = \mu_0 n I$ $\frac{dB_{\text{内}}}{dt} = \mu_0 n \frac{dI}{dt} = \mu_0 n k$

$$\oint_L \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} = \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \Rightarrow E_{\text{旋}-\text{管内}} 2\pi r = -\frac{dB_{\text{内}}}{dt} \pi r^2 = -\mu_0 n k \pi r^2$$

$$E_{\text{旋}-\text{管内}} = -\mu_0 n k r / 2$$

管外 $r > R$ $B_{\text{外}} = 0$

$$E_{\text{旋}-\text{管外}} 2\pi r = -\frac{dB_{\text{外}}}{dt} \pi R^2 + 0 = -\mu_0 n k \pi R^2$$

涡旋电场 $E_{\text{旋}}$ 沿圆周切线方向(逆时针)，与电流方向相反

44

(2)求管内一长为 L ，离 O 点距离为 h 的导体的感应电动势；

取一闭合回路 $MNOM$ ，设逆时针方向为回路绕行方向，则回路包围的面的法向方向为 $+z$ 方向

$$\Phi_{MNOM} = \vec{B} \cdot \vec{S} = -BS = -\frac{1}{2} LhB$$

$$\mathcal{E}_{MNOM} = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{1}{2} Lh \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{1}{2} Lh \mu_0 nk$$

$$\mathcal{E}_{MNOM} = \oint_S \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} = \int_M^N \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} + \int_N^O \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} + \int_O^M \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} = \int_M^N \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} = \mathcal{E}_{MN}$$

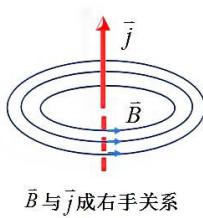
$$\mathcal{E}_{MN} = \mathcal{E}_{MNOM} = \frac{1}{2} Lh \mu_0 nk$$

涡旋电场 $E_{\text{旋}}$ 沿圆周切线方向(与径向垂直)

45

F. 涡旋电场的基本方程式

$$\begin{aligned}\oint_L \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} &= -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \iint_S \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{S} &= 0\end{aligned}$$



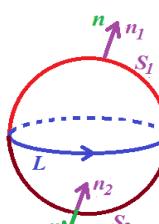
47

3. 随时间变化磁场的高斯定理

静磁场 $\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

对同一边界 L ，作两个曲面 S_1 和 S_2 ， $S_1 + S_2$ 构成一个闭合曲面 S ，则

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_{S_1} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\iint_{S_2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$



$$\therefore \iint_{S_1} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \bar{e}_{n1} = \bar{e}_{n2} \text{ 由回路 } L \text{ 的绕行方向决定}$$

$S=S_1+S_2$, 构成一个闭合曲面, 统一以 S 的外法线方向为正, 则

$$\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = 0$$

即 $\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = 0$

$\bar{e}_n = -\bar{e}_{n2}$

又 $\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV = \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{B}) dV = 0$

$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{B}) = 0 \rightarrow \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = \text{const}$

若空间某处 $t=0$ 时只有静磁场, 即:

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t)|_{t=0} = 0$$

则, 即使后来有了变化的磁场, 仍然有:

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) \equiv 0$$

即随时间变化的磁场 $B(r, t)$ 也满足高斯定理

【例30】 如图, 磁感应强度 B 在圆内均匀, 且以恒定速率随时间变化, 若 dB/dt 已知, 求下面三种情况下 ab 两点间的电势差 ($Oa=Ob=r$)

- a, b 间用跨过第二、三、四象限的圆弧导线相连接
- a, b 间用跨过第一象限的圆弧导线相连接
- a, b 间没有导线相连接

【解】 设回路逆时针方向为正方向, 则垂直纸面向外为正, B 为负值, B 方向与面的法线方向相反, 由电磁感应定律:

$$\oint \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \rightarrow \quad 2\pi r E_{\text{旋}} = -\left(-\frac{dB}{dt}\right)\pi r^2$$

$$E_{\text{旋}} = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

若 $dB/dt > 0$, 则涡旋电场方向沿圆周切向, 逆时针方向

$E_{\text{旋}} = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$ 涡旋电场方向沿圆周的切向方向

(1) a, b 间用跨过第二、三、四象限的圆弧导线相连接。

开路电压等于电动势 $V_{ab(2 \rightarrow 3 \rightarrow 4)} = \mathcal{E}_{a \rightarrow b} = \mathcal{E}_{a \rightarrow a'} + \mathcal{E}_{a' \rightarrow b} + \mathcal{E}_{b' \rightarrow b}$

$a-a', b-b'$ 间 E 与 $d\vec{l}$ 方向垂直 $\mathcal{E}_{a-a'} = \int_a^{a'} \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \mathcal{E}_{b-b'} = \int_b^{b'} \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} = 0$

$a'b'$ 间 E 与 $d\vec{l}$ 方向相同 $\mathcal{E}_{a'-b'} = \int_{a'}^{b'} \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} = \left(\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}\right) \left(\frac{3}{4} 2\pi r\right) = \frac{3\pi r^2}{4} \frac{dB}{dt}$

$V_{ab(2 \rightarrow 3 \rightarrow 4)} = \mathcal{E}_{a \rightarrow a'} + \mathcal{E}_{a' \rightarrow b'} + \mathcal{E}_{b' \rightarrow b} = \frac{3\pi r^2}{4} \frac{dB}{dt}$

(2) a, b 间用跨过第一象限的圆弧导线相连

$$V_{ab(1)} = \mathcal{E}_{a \rightarrow b} = \mathcal{E}_{a \rightarrow a'} + \mathcal{E}_{a' \rightarrow b} + \mathcal{E}_{b' \rightarrow b}$$

$a-a', b-b'$ 间 E 与 $d\vec{l}$ 方向垂直 $\mathcal{E}_{a-a'} = \mathcal{E}_{b-b'} = \int \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} = 0$

$a'b'$ 间 E 与 $d\vec{l}$ 方向相反 $\mathcal{E}_{a'-b'} = \int_{a'}^{b'} \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} = \left(\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}\right) \left(-\frac{1}{4} 2\pi r\right) = -\frac{\pi r^2}{4} \frac{dB}{dt}$

$$V_{ab(1)} = \mathcal{E}_{a \rightarrow a'} + \mathcal{E}_{a' \rightarrow b} + \mathcal{E}_{b' \rightarrow b} = -\frac{\pi r^2}{4} \frac{dB}{dt}$$

(3) a, b 间没有导线相连接, 这时没有空间电荷分布, $E_{\text{静}}=0$

$$V_{ab} = \int_a^b \vec{E}_{\text{静}} \cdot d\vec{l} = 0$$

电动势和电势差

- 电动势 \mathcal{E} 由非静电力 K 产生, 这里是由涡旋场 $E_{\text{旋}}$ 产生, 它与积分路径有关, 且对闭合回路可以不等于零。因此不能说 ab 两点的感应电动势, 只能说 ab 路径的感应电动势, 它与 ab 路径的几何形状有关。
- 电势差由静电力 $E_{\text{静}}$ 产生, 与积分路径无关, 是对两点定义的, 完全由两点的位置决定。
- 然而, 感应电动势是在导体中维持某种电荷(或电流)分布的必要条件, 以至于在导体中电动势和电势差之间存在一定关系, 但不能因为这些关系模糊了电动势和电势差的根本区别。

§ 6.2.3 电磁感应的相对性

1. 电场与磁场的相对性

S' 系相对于 S 系以 v 的速度做匀速直线运动，则电磁场的狭义相对论变换为：

$$\begin{cases} E'_{\parallel} = E_{\parallel} \\ E'_{\perp} = \gamma (\bar{E} + \vec{v} \times \bar{B})_{\perp} \end{cases} \quad \begin{cases} B'_{\parallel} = B_{\parallel} \\ B'_{\perp} = \gamma \left(\bar{B} - \frac{\vec{v}}{c^2} \times \bar{E} \right)_{\perp} \end{cases}$$

// 和 ⊥ 表示与速度 v 平行或垂直的分量

即 电场和磁场是相对的，在不同的参考系中测量的电场和磁场与参考系运动速度有关，并且电场和磁场之间可以在不同的参考系中互相转换。

55

在低速运动下，略去 $(v/c)^2$ 级小项，且将 $\gamma \rightarrow 1$

$$\text{则 } \bar{E}' = \bar{E} + \vec{v} \times \bar{B}, \quad \bar{B}' = \bar{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \bar{E}$$

上式表明：即使在非相对论情况（低速运动）下，电场和磁场也是相对的。

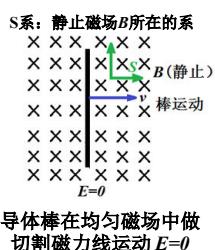
例如在一个参考系 S 中，若没有电场 ($E=0$) 而只有磁场 ($B \neq 0$)，则在另一个以速度 v 运动的参考系 S' 中可以测量到电场 ($E' \neq 0$)

$$\begin{array}{l} \bar{E} = 0 \\ \bar{B} \neq 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \bar{E}' = \vec{v} \times \bar{B} \quad \text{If } \theta \neq 0, \quad E' \neq 0 \\ \bar{B}' = \bar{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \bar{E} = \bar{B} \end{array}$$

56

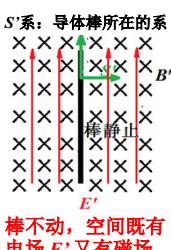
2. 再论动生电动势的本质

单位电荷洛伦兹力
(一个分力)所做的功



导体棒在均匀磁场中做切割磁力线运动 $E=0$

$$\mathcal{E} = \int (\vec{v} \times \bar{B}) \cdot d\bar{l} = \int \bar{E}' \cdot d\bar{l}$$



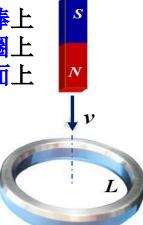
换一个角度，动生电动势的本质是静止电荷在运动磁场中，由运动磁场引起的电场力对单位电荷做功

$$\begin{aligned} \bar{E}' &= \vec{v} \times \bar{B} \\ \bar{B}' &= \bar{B} \end{aligned}$$

3. 动生电动势和感生电动势的相对性

- 磁棒与线圈作相对运动，速度为 v

S_0 系：固定在磁棒上
 S' 系：固定在线圈上
 S'' 系：固定在地面上



- 对 S_0 系（磁棒）观察者：磁棒静止（ B 不变），线圈向上运动。产生的电动势为动生电动势

$$\mathcal{E}_{\text{动}} = \oint_L (-\vec{v} \times \bar{B}) \cdot d\bar{l}$$

- 对 S' 系（线圈）观察者：线圈没动，磁铁在动，即是磁场变化带来的电动势，故为感生电动势

$$\mathcal{E}_{\text{感}} = \oint_L \bar{E}_{\text{旋}} \cdot d\bar{l} = - \int \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{S}$$

58

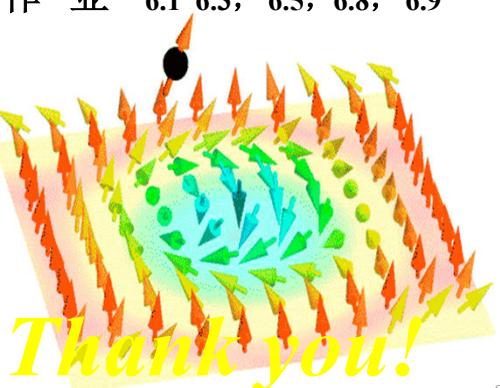
- 对 S'' 系（地面）观察者：线圈和磁棒都可能在运动（设线圈相对 S'' 的速度为 v' ，磁铁相对于 S'' 的磁场为 B' ）

$$\mathcal{E}_{\text{感应}} = - \oint_L (\vec{v}' \times \bar{B}') \cdot d\bar{l} - \iint_S \frac{\partial \bar{B}'}{\partial t} \cdot d\bar{S}$$

- 因此，动生电动势和感生电动势不是绝对的，而是相对的，取决于观察者在什么参考系。
- 但无论在哪个参照系中，其结果都一样，即 L 中产生的感应电动势的大小和方向是一样的。

59

作业 6.1, 6.3, 6.5, 6.8, 6.9



60