# 1 调和函数

**定义1.** 设$u$ 是区域$D$ 内实二元函数，并有二阶连续偏导数，称$u$ 是调和函数，如果它满足

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

**定理1** (解析函数和调和函数的关系). 解析函数的实部和虚部都是调和函数。反之，若已知单连通区域上的调和函数$u$ 或者$v$，则我们可以找到相应的$v$ 或者$u$ 使得$u + iv$ 为解析。

**证明.** 我们先证明第一部分，设$f = u + iv$ 为解析函数，则由$CR$ 方程

$$u_x = v_y, u_y = -v_x$$

再次求偏导得到

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{xy} - v_{xy} = 0.$$

即$u$ 为调和函数，同理可证$v$ 为调和函数。

再证明第二部分。不妨假设我们已经知道了单连通区域上的调和函数$u$，设$f = u_x - iu_y$。则$u_x, u_y$ 为可微实函数，并且

$$(u_x)_x = u_{xx} = -u_{yy} = (-u_y)_y, (u_x)_y = u_{xy} = u_{yx} = -(-u_y)_x.$$

满足$CR$ 方程，并且由假设二阶可微，所以$f$ 为解析函数，此区域为单连通区域，所以$f$ 有原函数$F$ 使得

$$F' = f.$$

设$F = U + iV$，

$$U_x = Ref = u_x, U_y = -Imf = u_y.$$

所以$U - u =$ 常数，既然原函数允许差一个常数，我们不妨设$U = u$。结束证明。

注记：实际操作中，我们可以用曲线积分求原函数。

**例子1.** 已知调和函数$v(x, y) = 4x^2 + ay^2 + x$，求常数$a$ 并求出以$v$ 为虚部并满足$f(0) = 0$ 的解析函数。

**解.** 既然$v$ 是调和函数，有

$$0 = \Delta v = 8 + 2a$$

所以$a = -4$。所以$v = 4x^2 - 4y^2 + x$。所以

$$f' = v_y + iv_x = -8y + i8x + i.$$

如果实在看不出来的话，我们就用曲线积分算$f$：两条有向线段，$C_1$ 连接$(0, 0)$ 和$(x, 0)$；$C_2$连接$(x, 0)$ 和$(x, y)$。得

$$f(z) = f(0) + \int_{C_1} f'dz + \int_{C_2} f'dz = ix + 4ix^2 + (i8x + i)yi - 4y^2 i + f(0) = iz + 4iz^2.$$

**注记1.** 已知单连通区域上的调和函数$u$，则$f'(z) = u_x - iu_y$ 为单连通上的解析函数，从而有

$$f(z) - f(z_0) = \int_{z_0}^{z} u_x - iu_y dz = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} u_x dx + u_y dy + i\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} u_x dy - u_y dx.$$

从而得到

$$v = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} u_x dy - u_y dx + C.$$

同样的，如果知道$v$，我们有

$$f(z) - f(z_0) = \int_{z_0}^{z} v_y + iv_x dz = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v_y dx - v_x dy + i\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v_x dx + v_y dy.$$

从而得到

$$u = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v_y dx - v_x dy + C.$$

当$f = u + iv$ 解析的时候，我们一般称$v$ 为$u$ 的共轭调和函数；$u$ 并不一定是$v$ 的共轭调和函数（$v$ 的共轭调和函数为$-u$）。共轭调和函数还有以下性质：

**定理2.** 共轭调和函数的等值曲线正交。

**证明.** 设$v$ 为$u$ 的共轭调和函数，则曲线$u = K_1$，$v = K_2$ 对应的法向为

$$\vec{n}_1 = (u_x, u_y), \vec{n}_2 = (v_x, v_y).$$

（沿着等值线移动的时候有$du = u_x dx + u_y dy = 0$，其中$(dx, dy)$ 为切向，相应的$(u_x, u_y)$ 自然为等值曲线在$(x, y)$ 点的法向)。则

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = u_x v_x + u_y v_y = v_y v_x - v_x v_y = 0.$$

## 1.1 调和函数的性质和应用

调和函数性质：

(1) 平均值性质：设$u$ 是包含$\{(x, y) : (z - a)^2 + (y - b)^2 \le \rho^2\}$ 的区域上的调和函数，则

$$u(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + \rho\cos\theta, b + \rho\sin\theta)d\theta.$$

用一句话形容就是圆心的取值为圆周取值的平均；

(2) 由平均值性质容易得到有限闭区域上的调和函数的最大最小值都可以在边界上取到。

**注记2.** *(1).* 存在解析函数$f = u + iv$，由解析函数的均值性质

$$f(a+ib) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+ib+\rho e^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta)d\theta + i\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta)d\theta.$$

对照实部和虚部立马得到。

*(1)* 由*(1)* 立马得到。

关于狄里克莱问题：

**定理3.** 设$u$ 是$|z-z_0|\leq R$ 上的调和函数，则对圆内任何一点$w=z_0+re^{i\varphi}$ 有

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\theta)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta.$$

**解.** 设解析函数$f=u+iv$，则有

$$f(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=R}\frac{f(z)}{z-w}dz=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u+iv)\frac{Re^{i\theta}}{Re^{i\theta}-re^{i\varphi}}d\theta.$$

取$w$ 关于圆的对称点$w'=z_0+\frac{R^2}{r}e^{i\varphi}$，则有

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=R}\frac{f(z)}{z-w'}dz=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u+iv)\frac{re^{i\theta}}{re^{i\theta}-Re^{i\varphi}}d\theta.$$

做差得到

$$f(w)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u+iv)\left(\frac{Re^{i\theta}}{Re^{i\theta}-re^{i\varphi}}-\frac{re^{i\theta}}{re^{i\theta}-Re^{i\varphi}}\right)d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u+iv)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta.$$

对照实部和虚部马上得到。

上述定理给出了泊松问题解的存在性，在数学物理里面关心的另一个问题是解的稳定性。这个由调和函数的性质容易得到。假设边界条件为$u_1(R,\theta),u_2(R,\theta)$，对应泊松问题的解为$u_1.u_2$。则有

$$|u_1-u_2|\leq\max_\theta|u_1(R,\theta),u_2(R,\theta)|.$$

在现实中，测量总是存在误差，上述结果表明结果的误差被边界条件的测量误差控制，因而解是稳定的。