1 Laplace 变换

拉普拉斯变换：设$f(t)$ 为定义在$[0,\infty)$ 上的分段连续函数，满足

$$|f(t)| \le Ke^{ct}, K, c > 0.$$

f 的拉普拉斯变换定义为

$$L[f] = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt.$$

其中$Rep > c$ 。在此条件下

$$\int_0^\infty |f(t)e^{-pt}|dt \le \int_0^\infty Ke^{(c-Rep)t}dt = \frac{K}{Rep-c} < \infty.$$

因而定义是合理的。设$p = \sigma + i\lambda$，则拉普拉斯变换和傅里叶变换有如下关系

$$L[f] = L(\sigma + i\lambda) = F[f(t)e^{-\sigma t}].$$

所以

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty L(\sigma + i\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda.$$

例子1. 计算$L[e^{at}]$。

解. $L[e^{at}] = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = \frac{e^{(a-p)t}}{a-p}|_0^\infty = \frac{1}{p-a}$.

拉普拉斯变换的主要性质：

(1) 线性性质：$L[C_1 f + C_2 g] = C_1 L[f] + C_2 L[g]$；

由此可得：

$$L[\cos at] + iL[\sin at] = L[e^{iat}] = \frac{1}{p-ia} = \frac{p}{p^2+a^2} + \frac{a}{p^2+a^2}i.$$

$$L[\cos at] - iL[\sin at] = L[e^{-iat}] = \frac{1}{p+ia} = \frac{p}{p^2+a^2} - \frac{a}{p^2+a^2}i.$$

即

$$L[\cos at] = \frac{p}{p^2+a^2}, L[\sin at] = L[e^{-iat}] = \frac{a}{p^2+a^2}.$$

(2) 频移性质：$L[f(t)e^{\lambda t}] = L(p-\lambda)$；

$$L[f(t)e^{\lambda_0 t}] = \int_0^\infty f(t)e^{-(p-\lambda_0)t}dt = L(p-\lambda_0).$$

$$L[e^{\lambda t}\cos at] = \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+a^2}, L[e^{\lambda t}\sin at] = L[e^{-iat}] = \frac{a}{(p-\lambda)^2+a^2}.$$

(3) 延迟性质：$\tau > 0$，$L[f(t-\tau)h(t-\tau)] = L(p) \times e^{-p\tau}$，其中$h(t) = 1, t \ge 0; h(t) = 0, t < 0$；

$$L[f(t-\tau)] = \int_0^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt = e^{-p\tau}\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = e^{-p\tau}L(p).$$

(4) 相似性质：$a>0$, $L[f(at)]=\frac{1}{a}L(\frac{p}{a})$；

$$L[f(at)]=\int_0^\infty f(at)e^{-pt}dt=\frac{1}{a}\int_0^\infty f(t)e^{-p\frac{t}{a}}dt=\frac{1}{a}L(\frac{p}{a}).$$

(5) 微分性质：$L[f^{(n)}(t)]=p^nL(p)-p^{n-1}f(0+)-p^{n-2}f'(0+)-\cdots$.

仅需说明$n=1$ 的情形即可：

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt=f(t)e^{-pt}|_0^\infty+p\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-pt}dt=pL[f]-f(0+).$$

(6) 像函数微分：$L[f(t)]^{(n)}=L[(-t)^nf]$.

$$L[f(t)]^{(n)}=\int_0^\infty f(t)\frac{\partial^n e^{-pt})}{\partial p^n}dt=L[(-t)^nf].$$

由例子一，可以得到$L[1]=\frac{1}{p}$，所以

$$L[t^n]=(-1)^n\left(\frac{1}{p}\right)^{(n)}=\frac{n!}{p^{n+1}}.$$

(7) 本函数积分：$L[\int_0^t f(s)ds]=\frac{L[f]}{p}$. 由微分性质直接得到。

(8) 卷积性质：$L[f*g]=L[f]\times L[g]$。这里的卷积定义为

$$f*g=\int_0^t f(s)g(t-s)ds=\int_0^\infty f(s)g(t-s)ds.$$

原因：

$$\begin{aligned}L[f*g]=\int_0^\infty\int_0^t f(t-s)g(s)dse^{-pt}dt&=\int_0^\infty\int_0^\infty f(t-s)g(s)dse^{-pt}dt\\&=\int_0^\infty\int_0^\infty f(t-s)g(s)dse^{-pt}dt\\&=\int_0^\infty\int_0^\infty f(t-s)e^{-p(t-s)}dtg(s)e^{-ps}ds\\&=\int_0^\infty L[f]g(s)e^{-ps}ds\\&=L[f]L[g].\end{aligned}$$

常用的是它的反变换，

$$L^{-1}[fg]=L^{-1}[f]*L^{-1}[g].$$

用拉普拉斯变换解常微分方程主要用到了拉普拉斯的微分性质：

例子2. 解微分方程：

$$\begin{cases}y'+2y=e^{-t},\\ y|_{t=0}=0.\end{cases}$$

解. 设$L[y]=L(p)$，则

$$pL(p)+2L(p)=\frac{1}{p+1}.$$

解得

$$L(p)=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+2}.$$

所以

$$y=e^{-t}-e^{-2t}.$$

例子3. 解微分方程：

$$\begin{cases} y''+y=e^t\cos 2t, \\ y(0)=4, y'(0)=0. \end{cases}$$

解. 设$L[y]=L(p)$，则

$$p^2L(p)-4p+L(p)=L[e^t\cos 2t].$$

解得

$$L(p)=\frac{L[e^t\cos 2t]}{p^2+1}+\frac{4p}{p^2+1}.$$

由卷积性质：

$$\begin{aligned} y &= \left(e^t\cos 2t\right)*\sin t+4\cos t \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^t\sin 2t-e^t\cos 2t}{2}-\frac{e^t\sin 2t-3e^t\cos 2t}{10}-\frac{\sin t-\cos t}{2}-\frac{\sin t+3\cos t}{10}\right)+4\cos t \\ &= \frac{1}{5}e^t\sin 2t-\frac{1}{10}e^t\cos 2t-\frac{3}{10}\sin t+\frac{41}{10}\cos t. \end{aligned}$$

1.1 拉普拉斯变换反演公式

这一节我们主要是考察拉普拉斯变换的反演公式。前面已经说过拉普拉斯可以看成推广的傅里叶变换。设$p=\sigma+i\lambda t$，则

$$L(p)=L[f]=F[fe^{-\sigma t}].$$

应用傅里叶变换的反演公式：

$$f(t)e^{-\sigma t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}L(p)e^{i\lambda t}d\lambda.$$

即

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}L(p)e^{\sigma t+i\lambda t}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}L(p)e^{pt}d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i}L(p)e^{pt}dp.$$

该公式称为傅里叶-梅林公式。

定理1. 设$L(p)$ 在左半平面($Rep<\sigma,\sigma>c$)有奇点$p_i, i=1,2,\cdots,n$。并且除掉这些奇点外解析，$\lim_{p\to\infty}L(p)=0$。则

$$f(t)=\sum_{p_i}Res[L(p)e^{pt},p_i].$$

证明. 用变量替换：$p = iz$，则积分变为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma i-\infty}^{-\sigma i+\infty} L(iz)e^{izt}dz.$$

$L(iz)$ 所有奇点为$z_i = \frac{p_i}{i}$ 位于$Imz > -\sigma$ 内。做大圆$C_R : |z| = R, Imz \geq -\sigma$，则由若当定理

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{C_R} L(iz)e^{izt}dz = 0.$$

所以

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma i-\infty}^{-\sigma i+\infty} L(iz)e^{izt}dz = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\left(\int_C - \int_{C_R}\right) L(iz)e^{izt}dz = i\sum_{p_i} Res[L(iz)e^{izt}, \frac{p_i}{i}].$$

其中

$$Res[L(iz)e^{izt}, \frac{p_i}{i}] = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} L(iz)e^{izt}dz \overset{p=zi}{=} \frac{1}{i}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{C}_\rho} L(p)e^{pt}dp\right) = \frac{1}{i}Res[L(p)e^{pt}, p_i].$$

所以

$$f(t) = \sum_{p_i} Res[L(p)e^{pt}, p_i].$$

特别地，对于有理多项式$L(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$，Q 的次数比P 至少高一次，则我们有以下公式：

$$f(t) = \sum_{p_i} Res[L(p)e^{pt}, p_i].$$

其中p_i 为所有的奇点。

例子4. 求$L(p) = \frac{p+7}{p^3+p^2+3p-5}$ 的本函数。

解. 方法一：注意到$p^3 + p^2 + 3p - 5 = (p-1)(p+1+2i)(p+1-2i)$。用待定系数法，不妨设

$$L(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+1+2i} + \frac{C}{p+1-2i}.$$

解得$A = 1, B = -\frac{1}{2} - \frac{i}{4}, C = -\frac{1}{2} + \frac{i}{4}$。所以本函数

$$f(t) = e^t - \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{4}\right)e^{-(1+2i)t} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{4}\right)e^{-(1-2i)t} = e^t - e^{-t}(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t).$$

方法二：注意到$p^3+p^3+3p-5 = (p-1)(p+1+2i)(p+1-2i)$。有三个奇点，$1, -1+2i. -1-2i$ 都为一阶极点。

$$Res[L(p)e^{pt}, 1] = e^t.$$

$$Res[L(p)e^{pt}, -1+2i] = \frac{(p+7)e^{pt}}{3p^2+2p+3}|_{p=-1+2i} = -(\frac{1}{2}-\frac{i}{4})e^{-t+2it} = -e^{-t}(\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{4}\sin 2t)-ie^{-t}(\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{1}{4}\cos 2t).$$

$$Res[L(p)e^{pt}, -1-2i] = -e^{-t}(\frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t) + ie^{-t}(\frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{4}\cos 2t).$$

所以本函数

$$f(t) = e^t - e^{-t}(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t).$$

例子5. 求$f(t) = L^{-1}[\frac{2p^2+3p+3}{(p+1)(p+3)^3}]$.

解. 方法一：当然可以用待定系数法，不妨设

$$L(p) = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+3} + \frac{C}{(p+3)^2} + \frac{D}{(p+3)^3}.$$

还有一种凑的办法，不停把分子凑成$p+1, p+3$ 的组合，一直到如上待定系数的形式。

$$\begin{aligned}\frac{2p^2+3p+3}{(p+1)(p+3)^3} &= \frac{2p(p+1)+(p+3)}{(p+1)(p+3)^3} \\ &= \frac{2p}{(p+3)^3} + \frac{1}{(p+1)(p+3)^2} \\ &= \frac{2(p+3)-6}{(p+3)^3} + \frac{1}{2}\frac{(p+3)-(p+1)}{(p+1)(p+3)^2} \\ &= \frac{2}{(p+3)^2} - \frac{6}{(p+3)^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(p+1)(p+3)} - \frac{1}{(p+3)^2}\right) \\ &= \frac{3/2}{(p+3)^2} - \frac{6}{(p+3)^3} + \frac{1/4}{p+1} - \frac{1/4}{p+3}.\end{aligned}$$

所以

$$f(t) = e^{-3t}(\frac{3}{2}t - 3t^2 - \frac{1}{4}) + \frac{1}{4}e^{-t}.$$

方法二：$L(p)$ 有两个个奇点，$-1, -3$，分别为一阶极点和三阶极点。

$$Res[L(p)e^{pt}, -1] = \frac{1}{4}e^{-t}.$$

$$Res[L(p)e^{pt}, -3] = \frac{1}{2}\lim_{p\to -3}\left(\frac{2p^2+3p+3}{(p+1)(p+3)^3}(p+3)^3 e^{pt}\right)'' = e^{-3t}(\frac{3}{2}t - 3t^2 - \frac{1}{4}).$$

所以本函数

$$f(t) = e^{-3t}(\frac{3}{2}t - 3t^2 - \frac{1}{4}) + \frac{1}{4}e^{-t}.$$

例子6. 解方程组：

$$\begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ -2x + y' - y = t, \\ x(0) = 2.y(0) = 4. \end{cases}$$

解. 不妨设$L_1(p) = L[x(t)], L_2(p) = L[y(t)]$。则

$$\begin{cases} pL_1 - 2 - L_1 - 2L_2 = \frac{1}{p^2}, \\ -2L_1 + pL_2 - 4 - L_2 = \frac{1}{p^2}. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} L_1 = \frac{2p^3+6p^2+p+1}{p^2(p+1)(p-3)} = \frac{28}{9} \times \frac{1}{p-3} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{9} \times \frac{1}{p} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{p^2}, \\ L_2 = \frac{28}{9} \times \frac{1}{p-3} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{9} \times \frac{1}{p} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{p^2}. \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} x(t) = \frac{28}{9}e^{3t} - e^{-t} - \frac{1}{9} - \frac{t}{3}, \\ L_2 = \frac{28}{9}e^{3t} + e^{-t} - \frac{1}{9} - \frac{t}{3}. \end{cases}$$