上节课主要内容

互感 $M=\dfrac{\Phi_{21}}{I_1}=\dfrac{\Phi_{12}}{I_2}$ $M=\dfrac{\varepsilon_{21}}{dI_1/dt}=\dfrac{\varepsilon_{12}}{dI_2/dt}$

互感电动势 $\varepsilon_2=\varepsilon_{21}=-\dfrac{d\Phi_{21}}{dt}=-M\dfrac{dI_1}{dt}$

$\varepsilon_1=\varepsilon_{12}=-\dfrac{d\Phi_{12}}{dt}=-M\dfrac{dI_2}{dt}$

自感 $L=\dfrac{\Phi}{I}$ $L=-\dfrac{\varepsilon}{dI/dt}$

自感电动势 $\varepsilon=-\dfrac{d\Phi}{dt}=-L\dfrac{dI}{dt}$

1

电感串联

$$L_{顺}=L_1+L_2+2M$$

$$L_{反}=L_1+L_2-2M$$

电感并联

$$L_{同}=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}$$

$$L_{异}=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2+2M}$$

2

§ 6.4 似稳电路和暂态过程

稳恒电路
- 由稳恒电源(ε=*Const*)和电阻*R*，经导线连接而成
- 电流是稳恒的 ***I=Const***

非稳恒电路
- 由非稳恒电源*ε(t)*、电阻、电容*C*、电感*L*和互感*M*元件以及晶体管、电子管等组成
- 电流随时间缓慢变化 ***I(t)***

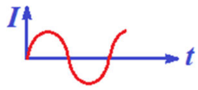
似稳条件下 电路的基本方程与处理方法与稳恒电路类似

似稳电路

3

§ 6.4.1 似稳过程与似稳电路

一、似稳条件和似稳电流



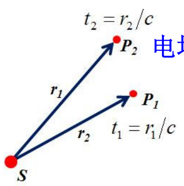
- 非稳恒的电流 ***I(t)→E(t), B(t)…***
- 欧姆定律的微分形式对非稳恒电流仍然成立，即

$$\vec{j}(t)=\sigma\vec{E}(t)$$

E 是总电场 $\vec{E}=\vec{E}_{静}+\vec{E}_{旋}+\vec{K}$ ***K***：电源内部的非静电力

但基尔霍夫第一、第二定律不再适用，电压概念有时也不再适用。

4

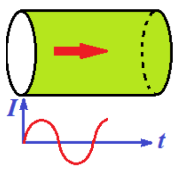


电场和磁场是以一定速度(光速*c*)传播的

$r_1\neq r_2$ ⇨ $t_1\neq t_2$

$$\Delta t=(r_2-r_1)/c$$

同一时刻电路上各点的场 ***E***，并非由同一时刻场源的电荷分布 ***ρ(r)*** 和电流分布 ***j(r)*** 确定。



非稳恒电流 $\vec{j}_1\neq\vec{j}_2$

无分支电路

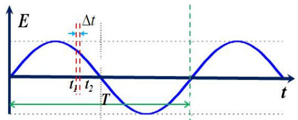
5

若 $\Delta t<<T$ 电路对电源变化的响应时间可忽略

$\Delta t=\dfrac{l}{c}$ $T=\dfrac{1}{f}$

$l<<\dfrac{c}{f}=\lambda$

似稳条件



T：电场随时间变化周期，***l***：电路尺寸

f=50Hz, λ=6×10⁶(m) 远大于一般电路的尺寸

- 电流***I(t)***随电源电动势***ε(t)***同步变化
- ***E(t), B(t)***变化缓慢→似稳场
- ***I(t)***：似稳电流

处理方法：类比稳恒电流、稳恒电磁场

6

电路
- 电阻 R　$I(t)=\dfrac{\varepsilon(t)}{R}$
- 电感 L　$\varepsilon_L=-L\dfrac{dI(t)}{dt}$　把感应电动势视为另一类电源电动势，似稳条件仍成立
- 电容 C　$I(t)=\dfrac{dQ(t)}{dt}=C\dfrac{dU(t)}{dt}$

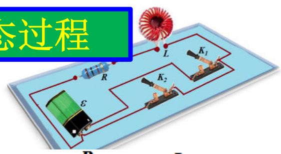
电容器一端流入的电流等于从另一端流出的电流，外部电流连续。似稳条件也是成立的。

二、似稳电流与稳恒电流比较

- 对于似稳电流的瞬时值，有关直流电路的基本概念、电路定律都有效。
- 似稳电流与稳恒电流一样，任何时刻无分支的线路上各个截面的电流相等，电流线连续地通过导体内部，不会在导体的表面上终止。
- 它们以同样的方式激发磁场，可以用毕奥—萨伐尔定律计算磁场，服从安培环路定理。

- $l<<c/f$时，$E(t)$看做随时间缓慢变化的“静态场”，在任何时刻，这种电场的旋度为零，因而仍然是一种有势场，不过是随时间变化的有势场。
- 但是，由于趋肤效应的存在，电流密度在导体截面上的分布并不均匀，导线表面的电流密度较大，导线中心处的电流密度则较小，这一点与稳恒电流是不同的。
- 但当似稳电流随时间变化比较缓慢、导线又比较细时，趋肤效应可以忽略。

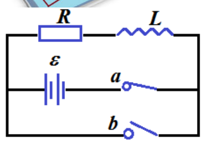
§ 6.4.2 暂态过程



1. RL暂态过程

合上a点开关

$IR=\varepsilon_L+\varepsilon$　　$\varepsilon_L=-L\dfrac{dI}{dt}$



设线圈内阻为零，电感为L

$IR=-L\dfrac{dI}{dt}+\varepsilon$　初始条件：$I\big|_{t=0}=0$

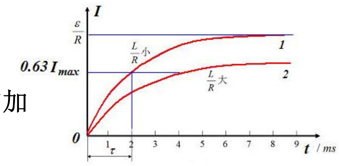
解为：$I=\dfrac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

令 $\dfrac{\varepsilon}{R}=I_0$，$\dfrac{L}{R}=\tau$ ⇒ $I=I_0\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

当$t\to\infty, I\to I_0$　电感成了一根导线，稳恒电流

当$t=\tau$，$I=I_0(1-e^{-1})=0.63I_0$

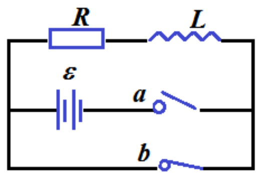
τ 称回路的时间常数或弛豫时间。由回路的本身因数确定。一般 τ只有几个ms，所以称暂态过程。



电流随时间增加

合上b点开关

$IR=\varepsilon_L=-L\dfrac{dI}{dt}$



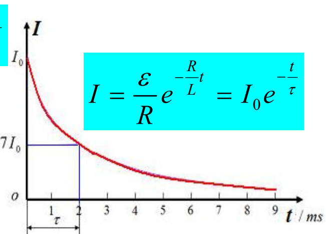
方程解为：$I=I_0e^{-\frac{t}{\tau}}$

当　$t\to\infty, I\to 0$

$I=\dfrac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{R}{L}t}=I_0e^{-\frac{t}{\tau}}$

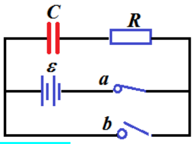
当

$t=\tau$，$I=I_0e^{-1}=0.37I_0$



电流随时间衰减

2. *RC*暂态过程



合上*a*点开关　电容器充电

$$\frac{q}{C}+IR=\varepsilon \Rightarrow \frac{q}{C}+R\frac{dq}{dt}=\varepsilon$$

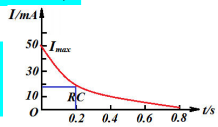
初始条件　$q|_{t=0}=0$

$$q=q_0\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

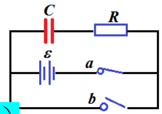
τ为*RC*电路的时间常数

其中　$q_0=C\varepsilon$，$\tau=RC$，$I_0=\varepsilon/R$

$$I=\frac{dq}{dt}=I_0e^{-\frac{t}{\tau}}$$



- 电容得到多少能量？



$$U_R=IR=\varepsilon e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad U_c=\frac{q}{C}=\frac{q_0}{C}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad q_0=C\varepsilon$$

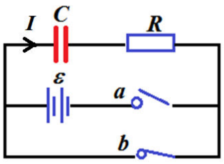
电源做功：$W_t=\int_0^\infty I(t)\varepsilon dt=\int_0^\infty \frac{\varepsilon^2}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}dt=\frac{\varepsilon^2\tau}{R}=C\varepsilon^2$　与*C*有关 与 *R*无关

对电阻做功：$W_R=\int_0^\infty I^2(t)Rdt=\int_0^\infty \frac{\varepsilon^2}{R}e^{-\frac{2t}{\tau}}dt=\frac{\varepsilon^2\tau}{2R}=\frac{C\varepsilon^2}{2}$　与 *R*无关

电容充电能量：$W_C=\int_0^\infty I(t)U_c(t)dt=\int_0^\infty \frac{\varepsilon^2}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}dt=\frac{C\varepsilon^2}{2}$

$\tau=RC$　*R*与充电快慢τ有关

合上*b*点开关　电容器放电

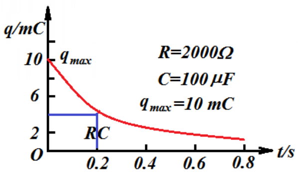


$$\frac{q}{C}+IR=0 \Rightarrow \frac{q}{C}+R\frac{dq}{dt}=0$$

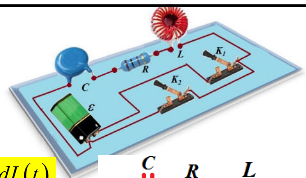
初始条件 $q|_{t=0}=q_0$ $\Rightarrow$ $q=q_0e^{-t/\tau}$

$$I=\frac{dq}{dt}=-I_0e^{-t/\tau}$$

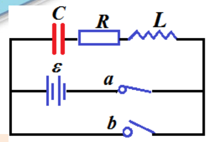
负值的意义是电流与图标定的方向相反



3. *RCL*暂态过程



合上*a*点开关



$$IR+\frac{q}{C}=\varepsilon_L+\varepsilon \qquad \varepsilon_L=-L\frac{dI(t)}{dt}$$

$I=dq/dt$，$dI/dt=d^2q/dt^2$

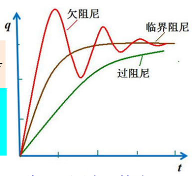
令 $\beta=\frac{R}{2L}$，$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$，$q_0=C\varepsilon$

β阻尼因子，ω_0固有频率

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\beta\frac{dq}{dt}+\omega_0^2q=\omega_0^2q_0$$

初始条件 $\begin{cases} q|_{t=0}=0 \\ \left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=0}=0 \end{cases}$

上面微分方程的解分三种情况：



- 欠阻尼($\beta<\omega_0$)　$\beta=\frac{R}{2L}$，$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$q=q_0-q_0e^{-\beta t}(\cos\omega t+\frac{\beta}{\omega}\sin\omega t)$$

$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$　*q* 随时间振荡变化，称阻尼振荡解

- 过阻尼($\beta>\omega_0$)

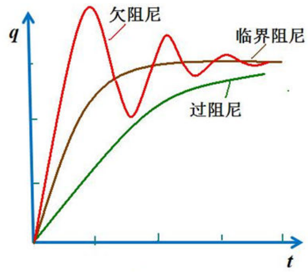
$$q=q_0-\frac{1}{2\gamma}q_0e^{-\beta t}\left[(\beta+\gamma)e^{\gamma t}-(\beta-\gamma)e^{-\gamma t}\right]$$

q 随时间单调上升，且 β 越大，上升越慢。当 β→∞ (L→0)时，回到 *RC* 电路的结果。　$\gamma=\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}$

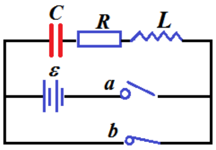
- 临界阻尼 ($\beta=\omega_0$)

$$q=q_0-q_0(1+\beta t)e^{-\beta t}$$

*q*也随时间单调上升，但比过阻尼上升要快些



合上*b*点开关



$$L\frac{d^2q'}{dt^2}+R\frac{dq'}{dt}+\frac{q'}{C}=0$$

$$\beta=\frac{R}{2L},\ \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}},\ q_0=C\varepsilon$$

$$\frac{d^2q'}{dt^2}+2\beta\frac{dq'}{dt}+\omega_0^2q'=0$$

初始条件

$$\begin{cases} q'\big|_{t=0}=q_0\\ \left.\dfrac{dq'}{dt}\right|_{t=0}=0\end{cases}$$

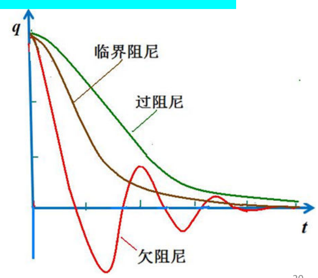
$$q=q_0e^{-\beta t}(\cos\omega t+\frac{\beta}{\omega}\sin\omega t)$$ 欠阻尼

$$q=\frac{1}{2\gamma}q_0e^{-\beta t}\left[(\beta+\gamma)e^{\gamma t}-(\beta-\gamma)e^{-\gamma t}\right]$$ 过阻尼

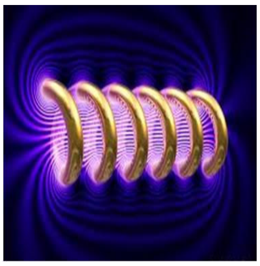
$$q=q_0(1+\beta t)e^{-\beta t}$$

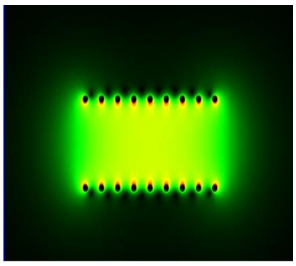
临界阻尼

电容器极板电荷随时间衰减



§ 6.5 磁场的能量





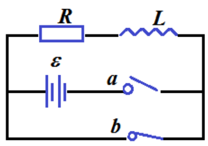
磁场的能量存储在磁场所处的空间，而不是线圈上

§ 6.5.1 载流线圈系统的磁能

一、单个载流线圈的磁能

1. 暂态过程的能量

- ***RL***暂态过程，撤去电源，则：



$$I=I_0e^{-\frac{t}{\tau}}$$

在电阻中的焦耳热为：

$$dQ=I^2Rdt=I_0^2Re^{-\frac{2t}{\tau}}dt$$

电源已断开，这个能量从何而来？

积分得电阻上的总焦耳热：

$$Q=I_0^2R\int_0^{\infty}e^{-\frac{2t}{\tau}}dt=I_0^2Re^{-\frac{2t}{\tau}}\Big|_0^{\infty}=\frac{\tau R}{2}I_0^2=\frac{1}{2}LI_0^2$$

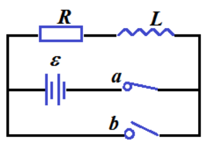
与线圈自感*L*有关

其中 $\tau=\frac{L}{R},I_0=\frac{\varepsilon}{R}$ 也与 ***R*** 有关

电阻上产生的焦耳热，来源于电感线圈中的磁能，电感线圈是一个储能元件。

- 接通电源时

$$\varepsilon+\varepsilon_L=IR \qquad \varepsilon_L=-L\frac{dI}{dt}$$



- 电源提供的能量为 *I*ε

转化为焦耳热

$$I\varepsilon=I^2R+LI\frac{dI}{dt}=I^2R+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}LI^2\right)$$

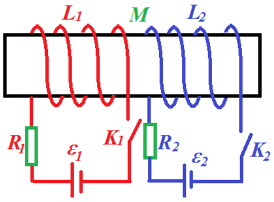
克服自感线圈电动势所做的功，储存在电感线圈中。
线圈中储存的总能量为：

$$W_m=\int_0^{I_0}d\left(\frac{1}{2}LI^2\right)=\frac{1}{2}LI_0^2$$

撤去电源后，电感中储存的能量转给电阻，电阻上产生焦耳热

2. 互感线圈的磁能

- 当 L_1 和 L_2 单独存在时，磁能为：



$$\begin{cases} W_{m1}=\frac{1}{2}L_1I_1^2,\quad I_1=\frac{\varepsilon_1}{R_1} \\ W_{m2}=\frac{1}{2}L_2I_2^2,\quad I_2=\frac{\varepsilon_2}{R_2} \end{cases}$$

- 由于L_2的存在，在 L_1回路中产生的互感电动势为：

$$\varepsilon_{12}'=M\frac{di_2}{dt} \xrightarrow{\text{两边乘以}I_1dt} I_1\varepsilon_{12}'dt=I_1Mdi_2$$

当 i_2从$0\to I_2$时，L_1回路中由于ε_{12}'的存在具有的磁能

$$W_{m3}=\int_0^{I_2}I_1Mdi_2=MI_1I_2$$

- 注意 L_1 和 L_2 之间的互感只有一个，不必另外计算 I_1 在 L_2 回路中的磁能(可证明上式是两部分互感能之和)。

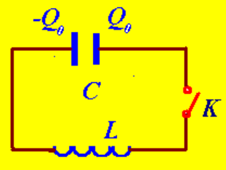
- 总磁能为：

$$\begin{cases} W_m=\frac{1}{2}L_1I_1^2+\frac{1}{2}L_2I_2^2+MI_1I_2,\text{ 顺接} \\ W_m=\frac{1}{2}L_1I_1^2+\frac{1}{2}L_2I_2^2-MI_1I_2,\text{ 反接} \end{cases}$$

也可以写成对称形式：

$$\begin{cases} W_m=\frac{1}{2}L_1I_1^2+\frac{1}{2}L_2I_2^2+\frac{1}{2}M_{12}I_1I_2+\frac{1}{2}M_{21}I_2I_1,\text{ 顺接} \\ W_m=\frac{1}{2}L_1I_1^2+\frac{1}{2}L_2I_2^2-\frac{1}{2}M_{12}I_1I_2-\frac{1}{2}M_{21}I_2I_1,\text{ 反接} \end{cases}$$

【例37】一电容 C 蓄有电量 Q_0，在 $t=0$ 时刻接通 K，经自感为 L 的线圈放电，求：
(1) L内磁场能量第一次等于 C 内电场能量的时刻 t_1；
(2) L 内磁场能量第二次达到极大值的时刻 t_2。



【解】

$$\varepsilon=-L\frac{dI}{dt}=\frac{Q}{C}$$

两边对 t 求导, 利用

$$I=\frac{dQ}{dt}$$

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{I}{C}=0$$

$$I\big|_{t=0}=0,\ Q\big|_{t=0}=Q_0 \Rightarrow \begin{cases} I(t)=\frac{Q_0}{\sqrt{LC}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \\ Q(t)=Q_0\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \end{cases}$$

(1)求 L 内磁能第一次等于 C 内电能的时刻：

$$\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}\sin^2\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)=\frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}\cos^2\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

$$\sin^2\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)=\cos^2\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \Rightarrow t_1=\frac{\pi}{4}\sqrt{LC}$$

(2) 求 L 内磁场能量第二次达到极大值的时间：

$$W_m=\frac{1}{2}LI^2 \qquad I(t)=\frac{Q_0}{\sqrt{LC}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

$$W_m=\frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}\sin^2\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

$$\frac{t_2}{\sqrt{LC}}=\frac{3\pi}{2} \Rightarrow t_2=\frac{3\pi}{2}\sqrt{LC}$$

二、载流线圈系统的磁能

对每一个线圈来说，总感应电动势是它本身自感电动势和其他 n-1个线圈间的互感电动势之和

$$\varepsilon_1=-L_{11}\frac{dI_1}{dt}-M_{12}\frac{dI_2}{dt}-M_{13}\frac{dI_3}{dt}-\cdots-M_{1n}\frac{dI_n}{dt}$$

$$\varepsilon_2=-M_{21}\frac{dI_1}{dt}-L_{22}\frac{dI_2}{dt}-M_{23}\frac{dI_3}{dt}-\cdots-M_{2n}\frac{dI_n}{dt}$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon_n=-M_{n1}\frac{dI_1}{dt}-M_{n2}\frac{dI_2}{dt}-M_{n3}\frac{dI_3}{dt}-\cdots-L_{nn}\frac{dI_n}{dt}$$

写成矩阵形式：$\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} L_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1n}\\ M_{21} & L_{22} & \cdots & M_{2n}\\ \vdots & & & \vdots\\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & L_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{dI_1}{dt}\\ \frac{dI_2}{dt}\\ \vdots\\ \frac{dI_n}{dt}\end{pmatrix}$

可以推出 $W_m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} L_i I_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,k=1\\ i\neq k}}^{n} M_{ik} I_i I_k$ $\quad M_{ii} = L_i$

多个线圈的磁能 $W_m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} M_{ik} I_i I_k$

31

第 k 个线圈中的电流产生的磁场，穿过第 i 个线圈，在第 i 个线圈中产生的磁通量为：

$$\Phi_{ik} = M_{ki} I_k = M_{ik} I_k$$

所有线圈在第 i 个线圈中产生的总磁通量为：

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^{N}\Phi_{ik} = \sum_{k=1}^{N} M_{ik} I_k$$

则由：

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} M_{ik} I_i I_k \Rightarrow W_m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} I_i \Phi_i$$

这是多个线圈磁能的另一种表达式

32

§ 6.5.2 载流线圈在外磁场中的磁能

一、互感磁能

- 两个线圈系统的磁能为

$$W_m = \underbrace{\frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2}_{\text{自感磁能}} + \underbrace{M I_1 I_2}_{\text{互感磁能}}$$

- 互感磁能即为两个线圈之间的相互作用能

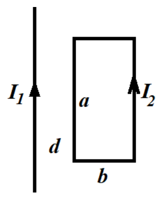
$$W_{互} = W_{12} = M_{21} I_1 I_2 = \Phi_{21} I_2 = I_2 \iint_{S_2} \vec{B}_1(\vec{r}_2)\cdot d\vec{S}$$

33

【例38】一无限长直导线和一长为a、宽为b的矩形线圈在同一平面内，分别通电流 I_1 和 I_2，求它们的互感磁能。

【解】$W = MI_1 I_2 = \Phi_{21} I_2 = I_2 \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}$

$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi r} I_1 \qquad dS = adr$



$$W = I_2 \iint_{S_2} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\cdot dS = I_2 \int_d^{d+b} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} adr = \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{d+b}{d}$$

34

二、均匀外场(或非均匀外场中的小线圈)

- 单个线圈在外磁场$\vec{B}$中的磁能：

$$W_m = I\iint_S \vec{B}(\vec{r})\cdot d\vec{S} = I\vec{B}\cdot\vec{S} = I\vec{S}\cdot\vec{B} \Rightarrow W_m = \vec{\mu}\cdot\vec{B}$$

- N个线圈在外磁场中的磁能：$W_m = \sum_{i=1}^{N} I_i \iint_{S_i} \vec{B}(\vec{r})\cdot d\vec{S}$

若外磁场均匀，则

$$W_m = \vec{B}\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} I_i \vec{S}_i\right) = \sum_{i}^{N}\vec{\mu}_i\cdot\vec{B} = \vec{\mu}\cdot\vec{B} \qquad \vec{\mu} = \sum_{i}^{N}\vec{\mu}_i$$

所以线圈在均匀外磁场中的磁能为 $W_m = \vec{\mu}\cdot\vec{B}$ ，μ 为所有线圈磁矩的矢量和，即总磁矩

35

§ 6.5.3 磁场的能量和磁能密度

以螺线管为例，设螺线管长 l，面积 S，体积 V，介质相对磁导率 μ_r

$H = nI,\ B = \mu_0\mu_r nI \qquad N = nl$

螺线管的自感系数为 $L = \Phi_m / I = NBS / I = \mu_0 \mu_r n^2 V$

磁能 $W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}V\mu_0\mu_r n^2 I^2 \Rightarrow W_m = \frac{1}{2}VBH$

磁能密度：单位体积的磁能 $\omega_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$

磁场的能量是存储在磁场所处的空间的，而不是在螺线管的线圈上

36

上式是普遍适用的，证明如下：

$$W_m=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}\frac{\Phi_m}{I}I^2=\frac{1}{2}I\Phi_m=\frac{1}{2}I\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}\qquad \vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

$$=\frac{1}{2}I\iint_S(\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{S}=\frac{1}{2}I\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l}=\frac{1}{2}\oint_L \vec{A}\cdot Id\vec{l}=\frac{1}{2}\iiint_V \vec{A}\cdot\vec{j}dV$$

$$\because \vec{j}=\nabla\times\vec{H},\therefore \vec{A}\cdot\vec{j}=\vec{A}\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)$$

$$W_m=\frac{1}{2}\iiint_\infty \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{H})dV$$

又 $\because \nabla\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot(\nabla\times\vec{a})-\vec{a}\cdot(\nabla\times\vec{b})$

$$\therefore \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{H})=\nabla\cdot(\vec{H}\times\vec{A})+\vec{H}\cdot(\nabla\times\vec{A})$$

$$W_m=\frac{1}{2}\iiint_\infty \nabla\cdot(\vec{H}\times\vec{A})dV+\frac{1}{2}\iiint_\infty \vec{H}\cdot(\nabla\times\vec{A})dV$$

$$=\frac{1}{2}\underbrace{\oint\!\!\!\oint_{S\to\infty}(\vec{H}\times\vec{A})\cdot d\vec{S}}_{0}+\frac{1}{2}\iiint_\infty \vec{H}\cdot\vec{B}dV$$

$$=\frac{1}{2}\iiint_V \vec{H}\cdot\vec{B}dV$$

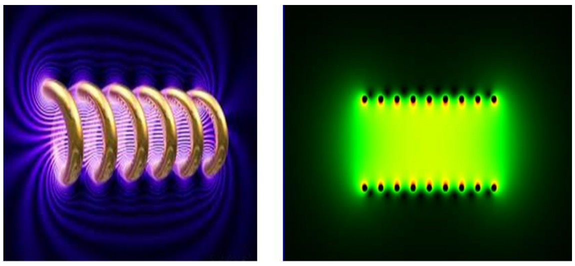
$$\vec{A}\sim\frac{1}{R},\ \vec{H}\sim\frac{1}{R^2},\ \Rightarrow \vec{H}\times\vec{A}\sim\frac{1}{R^3}$$

$$\therefore R\to\infty,\oint\!\!\!\oint_\infty(\vec{H}\times\vec{A})\cdot d\vec{S}\sim\frac{1}{R^3}R^2\to 0$$

令 $\omega_m=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$ 为磁能密度

磁场存储在空间的总能量为： $W_m=\iiint_V \omega_m dV=\frac{1}{2}\iiint_V \vec{B}\cdot\vec{H}dV$

该式普遍适用

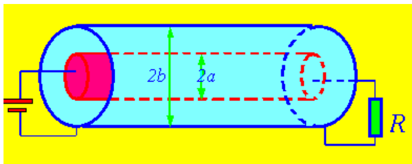


通电螺线管中的磁场和能量分布模拟示意图
螺线管中间很亮，表示能量密度大

【例39】一同轴电缆，由半径为 a 的长直导线和半径为 b 的薄圆筒构成，两者间充满介电常数为 ε，磁导率为 μ 的介质，两者之间加一负载 R 和电源时，证明当

$$R=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ln\frac{b}{a}$$

则导线与圆筒之间的电场能量等于磁场能量。

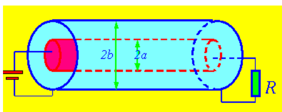


【解】先求电场能量，设单位长直导线的电荷密度为 λ，用有介质时的高斯定理，作柱形高斯面(电场垂直于导线)：

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum_{S内}q_0\qquad 0+0+D\cdot 2\pi rl=\lambda l\qquad E=\frac{D}{\varepsilon}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}$$

$$U=\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b}{a}\qquad \lambda=\frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}U\qquad E=\frac{1}{r}\frac{U}{\ln(b/a)}$$

$$\omega_e=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{\varepsilon}{2}\frac{U^2}{r^2\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2}$$

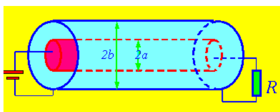


再求磁场能量 $H=\frac{I}{2\pi r}=\frac{1}{2\pi r}\frac{U}{R}\qquad B=\mu H$

$$\omega_m=\frac{1}{2}BH=\frac{1}{2}\mu H^2=\frac{\mu}{2}\frac{U^2}{(2\pi Rr)^2}$$

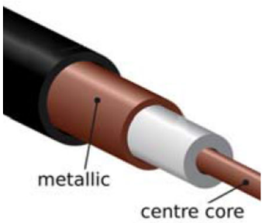
电场能量＝磁场能量

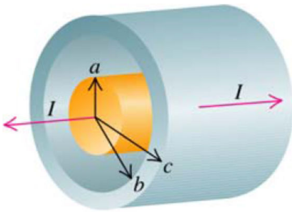
$$\omega_e V=\omega_m V$$



$$\mu\frac{U^2}{(2\pi Rr)^2}=\varepsilon\frac{U^2}{r^2(\ln\frac{b}{a})^2}\ \Rightarrow\ R=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ln\frac{b}{a}$$

【例40】一个同轴电缆，中心是半径为 a 的实心导线，外部是内半径为 b、外半径为 c 的导体圆筒，内外导体之间充满相对磁导率为 μ_r 的介质，电流在内外筒中等大、反向且均匀分布，求该电缆单位长度上的自感。



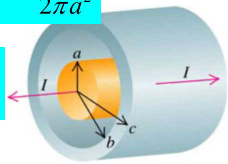


【解】由 $W_m=LI^2/2$ 求自感，分4个区分别计算磁能

(1) 实心导线内 $0\le r\le a$, 无磁介质，$\mu_r=1$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I_0 \qquad H_1 = \frac{1}{2\pi r}\left(\frac{I}{\pi a^2}\right)\pi r^2 = \frac{Ir}{2\pi a^2} \qquad B_1 = \mu_0 H_1$$

磁能密度 $\omega_{m1} = \frac{1}{2}\vec{B}_1\cdot\vec{H}_1 = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 a^4}$



此区域内的磁能：

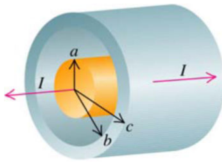
$$W_{m1} = \iiint_{V_1}\omega_{m1}dV = \int_0^l\int_0^a\int_0^{2\pi}\omega_{m1} r\,d\phi\,dr\,dz = \frac{\mu_0 l}{16\pi}I^2$$

(2) 两圆筒间 $a\le r\le b$, 有磁介质 μ_r

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r} \qquad B_2 = \mu_0\mu_r H_2 = \mu_0\mu_r\frac{I}{2\pi r}$$

磁能密度

$$\omega_{m2} = \frac{1}{2}\vec{B}_2\cdot\vec{H}_2 = \frac{\mu_0\mu_r I^2}{8\pi^2 r^2}$$



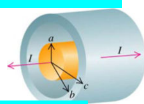
此区域内的磁能：

$$W_{m2} = \iiint_{V_2}\omega_{m2}dV = \int_0^l\int_a^b\int_0^{2\pi}\omega_{m2} r\,d\phi\,dr\,dz = \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi}lI^2\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

(3)外圆筒 $b\le r\le c$, 无磁介质，$\mu_r=1$

穿过半径为 r 的环路的总电流为：$\sum I = I - \frac{\pi(r^2-b^2)}{\pi(c^2-b^2)}I = \frac{c^2-r^2}{c^2-b^2}I$

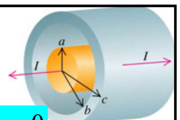
$$H_3 = \frac{1}{2\pi r}\frac{(c^2-r^2)}{(c^2-b^2)}I \qquad B_3 = \mu_0 H_3$$



$$\omega_{m3} = \frac{1}{2}\vec{B}_3\cdot\vec{H}_3 = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2(c^2-b^2)^2}\left(\frac{c^4}{r^2} - 2c^2 + r^2\right)$$

$$W_{m3} = \int_0^l\int_b^c\int_0^{2\pi}\omega_{m3} r\,d\phi\,dr\,dz$$
$$= \frac{\mu_0 l I^2}{4\pi(c^2-b^2)^2}\left(c^4\ln(\frac{c}{b}) - \frac{1}{4}(c^2-b^2)(3c^2-b^2)\right)$$

(4) 圆筒外 $r>c$, 真空区域，$\mu_r=1$



总电流 $\sum I = I - I = 0$ $\quad H_4 = 0 \quad W_{m4} = 0$

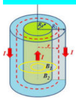
同轴电缆的总磁能为：

$$W_m = W_{m1} + W_{m2} + W_{m3} + W_{m4} = \frac{1}{2}LI^2 \qquad L = \frac{2W_m}{I^2}$$

单位长度的自感为：

$$L_0 = \frac{L}{l} = \frac{2W_m}{lI^2} = \frac{\mu_0}{2\pi}[\frac{1}{4} + \mu_r\ln(\frac{b}{a})$$
$$+ \frac{1}{(c^2-b^2)^2}\left(c^4\ln(\frac{c}{b}) - \frac{1}{4}(c^2-b^2)(3c^2-b^2)\right)$$

若 $a = R_1$, $b = c = R_2$, $\mu_r = 1$



$$L_0 = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{R_2}{R_1}\right)$$ 与例35一致

自感系数的计算

方法A: 当载有电流 I 的导体(或回路)产生的磁感强度 B 是对称性分布时，磁场能密度 ω 这时也呈对称性，通过积分可以简便地求得整个磁场所具有的总磁能，由总磁能再推算自感系数。

$$L = \frac{2W_m}{I^2}$$

不会出错的解法

方法*B*：电流 *I* 通过线圈(回路)，能准确分析线圈回路所包围的范围内，由此电流形成的磁场的空间分布，计算磁场穿过自身回路的总磁通或磁通链数。这种方法只适合有规则的、简单的线圈回路.

$$L=\frac{\Phi}{I}$$

可能会出错的解法

- "回路"，要求这一回路还是单一的，没有与其他回路发生交链.
- "电流" *I*，通常是指线圈之间彼此串接、并且无漏磁的前提条件下线圈中的电流.

方法*C*：当在回路中通以已知变化率的电流(*di/dt*)，能准确测出回路中的感应电动势 ε_L 时，可采用测量方法计算 *L*，所以这一方法一般适用于工程中。

$$L=-\frac{\varepsilon}{di/dt}$$

§ 6.6 非线性介质及磁滞损耗

1.磁介质存在时的自感和感应电动势

- 同一载流线圈，在真空中与在介质中产生的磁场是不同的，因而磁能与磁介质有关。
- 存在磁介质时，自感与互感电动势仍定义为：

$$\varepsilon_1=-L_1\frac{dI_1}{dt},\quad \varepsilon_{12}=-M\frac{dI_2}{dt}$$

介质的存在对磁场的影响反映在自感和互感系数中

无限长螺线管中充满磁介质时：$\omega_m=\frac{W_m}{V}=\frac{1}{2}BH=\frac{1}{2}\mu_0\mu_r n^2I^2$

$$L=2W_m/I^2 \Rightarrow L=\mu_0\mu_r n^2V$$

是无介质存在时的 μ_r 倍

2. 线性介质的磁能密度和磁化功

N 匝线圈总磁通的变化 $d\Psi=Nd\Phi=NSdB$

电源克服感应电动势所做的功：

$$dA'=-\varepsilon Idt=\frac{d\Psi}{dt}Idt=Id\Psi=NSIdB$$

由 $\oint_L\vec{H}\cdot d\vec{l}=Hl=NI \Rightarrow I=\frac{Hl}{N}$

$$\therefore dA'=VHdB$$

单位体积内电源做的元功 $da'=\frac{dA'}{V}=HdB=\vec{H}\cdot d\vec{B}$

$$\because \vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})$$

$$\therefore da'=d\left(\underbrace{\frac{1}{2}\mu_0H^2}_{\text{宏观磁能密度}}\right)+\underbrace{\mu_0\vec{H}\cdot d\vec{M}}_{\text{磁化功}}$$

电源所做的功一部分用来增加宏观磁能，另一部分为对介质做的磁化功。

3. 线性无损耗介质

$M_i=\sum_{j=1}^{3}\chi_{ij}H_j$ $\quad \chi_{ij}=\chi_{ji}$ $\quad d(\vec{M}\cdot\vec{H})=\vec{M}\cdot d\vec{H}+\vec{H}\cdot d\vec{M}$

对各向同性介质可证明：

$\vec{H}\cdot d\vec{M}=\vec{M}\cdot d\vec{H}$ 则 $\mu_0\vec{H}\cdot d\vec{M}=d\left(\underbrace{\frac{\mu_0}{2}\vec{M}\cdot\vec{H}}_{\text{磁化能密度}}\right)$

$$\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})$$

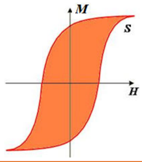
$$\therefore da'=d\left(\frac{\mu_0}{2}H^2+\frac{\mu_0}{2}\vec{H}\cdot\vec{M}\right)=d\left(\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\right)=d\omega_m$$

电源做功全部转化为螺线管的磁能

$$\omega_m=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}=\frac{1}{2}\mu_0H^2+\frac{1}{2}\mu_0\vec{H}\cdot\vec{M}$$

4．非线性磁介质的磁滞损耗

非线性磁介质的磁滞回路显示 ***H*** 与***M*** 的非线性关系



一个周期内所做的功为：

$$A' = \oint_L dA' = \oint_L \mu_0 H dM =$$

磁滞回路的面积

磁滞损耗

这部分功不改变磁场强度***H***和介质的磁化状态(磁化强度)***M***，它所传递的能量将转化为热量

55