

【例30】 导体球A内有两个中空的球形空腔。A上的总电量为0，而两个空腔中心处分别带有 $+q_1$ 和 $+q_2$ 的点电荷，在与球相距很远处有一个点电荷，电量为 q_3 。求(1)3个电荷所受到的静电力；(2)导体空腔受到的静电力。(习题2.1)

【解】 q_3 在很远的地方，忽略它引起的导体球面电荷分布的改变(感应带电)。**(若不满足** $r \gg R$ **，需要考虑感应带电，此时需要用后面讲的电像法)。**

感应带电

- q_1 , - q_2 , q_1+q_2 是均匀分布(因表面是球形)

前四个都是腔外电荷
腔外不影响腔内

① 远处的点电荷 q_3
② 球表面的感应电荷
③ 另一个腔的腔内点电荷
④ 另一个腔的内表面的感应电荷
⑤ 本腔的内表面电荷

两个空腔中心点的电场由五部分组成

$\vec{F}_{q_1} = 0, \vec{F}_{q_2} = 0$ 球形均匀分布，在球心电场为0，所以有

$r \gg R$ 处的电场 由5部分组成 $\left\{ \begin{array}{l} \text{点电荷 } q_1, \text{ 内表面感应电荷 } -q_1 \\ \text{点电荷 } q_2, \text{ 内表面感应电荷 } -q_2 \\ \text{球外表面感应电荷 } q_1+q_2 \end{array} \right. \Rightarrow \vec{E} = 0$

$\vec{F}_{q_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3(q_1+q_2)}{r^2} \vec{e}_r \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1+q_2}{r^2} \vec{e}_r$

导体空腔与 q_3 之间的相互作用力为一对作用力与反作用力 $\vec{F}_A = -\vec{F}_{q_3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3(q_1+q_2)}{r^2} \vec{e}_r$

§ 2.1.3 静电的应用和测量

1. 场致发射显微镜

一台场致发射扫描式电子显微镜(分辨率1.0nm, 放大率 6.5×10^5)

4 场致发射显微镜是依赖金属尖端上所产生的强电场。

● 中间一根细小的金属针，其尖端的直径约为 1000 \AA ，被置于一个先抽成真空、后充进少量氯气的玻璃泡中。

● 泡内壁镀上一层十分薄的荧光导电膜，荧光膜与金属针之间加上高电压。

● 当一个氯原子与针尖碰撞时，那里极强的电场会把氯原子中一个电子剥去，剩下带正电的氯离子，随即氯离子沿着场线跑至荧光壁，撞击荧光膜引起发光。

10

- 到达荧光膜某特定点上的氯离子，在很高的近似程度上，可以看作是发源于径向场线的另一端。
- 根据荧光膜的发光点的位置就可以推断出金属尖端的个别原子的位置。
- 利用这一装置，把需要研究的金属作成针状样品，放入这一设备中，便可获得荧光膜上斑点图样，进一步分析出待测样品的原子排列。
- 场致发射显微镜放大率可高达200万倍。

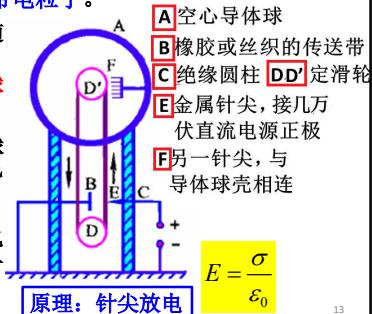
钨针尖的FIM图象

11

2

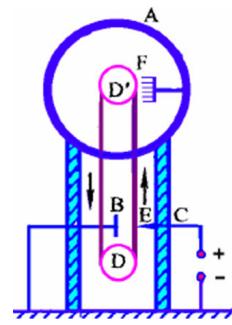
2. 范德格拉夫起电机

- 范德格拉夫起电机是美国科学家Van der Graff在1931年发明的产生高压静电的装置，又称范德格拉夫静电加速器，可用于加速带电粒子。
- 传送带B上的正电荷随带传送到针尖F附近，通过尖端放电使金属球A带正电。
- 传送带不停运转，A球的电量越来越多，电势不断升高。
- 由于绝缘物的漏电，电势不可能无限升高，一般可达到 10^7 V左右。



13

- 在绝缘圆柱C内，有一与传送带B平行的真空管道，通往空心导体球A，如果把带电粒子注入管道，粒子在管道中被加速成高能粒子，然后通过管道引至进行实验的地方。
- 目前在半导体工业中把小型范德格拉夫起电机用于离子注入技术。



14

Van de Graaff



15

问 题

- (1) 模拟计算各种(对称)形状的导体表面电荷分、及周围空间的电场和电势。
- (2) 静电的应用。

16

§ 2-2 电容与电容器



17

§ 2.2.1 导体的电容

一、孤立导体的电容

导体的电势(U)和它所带的电量(q)间存在某种比例关系，为描述这一性质，引入电容(C)的概念。

1. 电容的定义



电容器具有可被充电和可储电的特征。
电容是表征电容器容纳电荷的本领的物理量。

18

- 电荷在导体表面的分布必须保证满足导体的静电平衡条件。
- 对于孤立导体，电荷在导体表面的相对分布情况，由导体的几何形状唯一确定。
- 带一定电量 q 的导体，其外部空间的电场分布 $E(r)$ 以及导体的电势 $U(r)$ 亦完全确定。
- 根据叠加原理，当孤立导体的电量增加若干倍时($q'=kq$)，导体的电势也将增加若干倍($U'=kU$)。

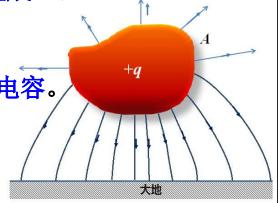
19

- 孤立导体的电势与其电量成正比

$$q = CU$$

比例系数 C 称为孤立导体的电容。

$$C = \frac{q}{U}$$



- 电容的值只取决于孤立导体的几何形状和尺寸。
- 孤立导体电容的大小，反映了该导体在给定电势的条件下，储存电量能力的大小($q=CU$)。
- 孤立导体的电容的物理含义实际上是：导体与大地之间的电容。

20

2. 电容的单位

$$C = \frac{q}{U}$$

- 电容的单位是法拉(F)， $1F = 1C/V$
- F 是一个很大的单位，电容为 $1F$ 的孤立导体球的半径约 $9 \times 10^9 m$ ，而地球的半径只有 $6.4 \times 10^6 m$ 。
- 由于法拉这一单位太大，使用不方便，通常取法拉的 10^{-6} 作为电容的单位，称为微法拉(μF)。有时取法拉的 10^{-12} 作为电容的单位，称为皮法拉(pF)。

$$1\mu F = 10^{-6} F$$

$$1pF = 10^{-12} \mu F = 10^{-12} F$$

21

3. 孤立导体球的电容

- 一半径为 R 的孤立导体球，当带有电荷 Q 时，其电势为：

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

故其电容为： $C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon_0 R$



仅由球半径决定
与是否带电无关

地球 $R = 6.4 \times 10^6 m$, 其电容
 $C = 7 \times 10^{-4} F = 0.7 mF$

22

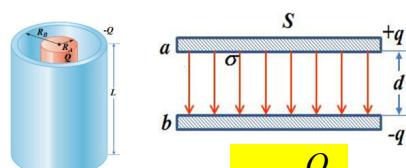
二、电容器

1. 两导体间的电容

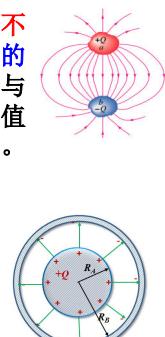
- 当带电导体周围存在其他带电体或导体时，由于静电感应，这些导体上都会产生一定分布的感应电荷，而且这些感应电荷的分布将因其它带电体带电情况的改变而改变，相应地所考察带电导体的电势发生改变。
- 因此，非孤立导体的电势还与附近导体的位置、几何形状有关，这就不存在单一电容的概念，而是一个电容分布。
- 改变周围的导体的位置，电容分布也随之改变。

23

- 对于两个导体组成的导体组，当周围不存在其他导体或带电体，这两导体间的电势差与电量成正比，或者说，电量与电势差的比值是一恒量。通常把这个比值称为这两个导体构成的导体组的电容。



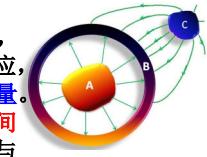
$$C = \frac{Q}{\Delta U}$$



24

2. 电容器

- 当这两导体附近存在其它带电体或导体时，电量与电势差之间的正比关系将被破坏。
- 采用静电屏蔽的方法，可保证两导体间的电势差与电量间的正比关系，使电容器不受周围其他带电体或导体的影响。
- 空腔导体 B 将导体 A 包围在空腔内，当导体 A 带一定电量，由于静电感应，导体 B 的内表面必定带等量异号电量。又由于导体 B 的屏蔽作用， A 和 B 间的电势差将仅与 A 的电量成正比，与 B 周围的其他带电体及它们位置无关，即腔外不影响腔内。



25

电容器的电容值为：

$$C_{AB} = \frac{Q}{U_A - U_B}$$

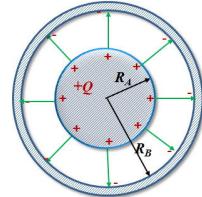
- 电容的大小反映了当电容器两极间存在一定电势差时，极板上储存电量的多少。

- 电容器的电容与其带电状态无关，与周围的带电体也无关，完全由电容器的几何结构决定。

- 电容器有两个主要指标，电容量和耐电压能力。

- 电介质击穿：在强电场作用下，电介质丧失绝缘能力的现象。

- 使用时，电容器两极所加的电压不能超过它的标定耐压值，否则电容器内填充的电介质会被击穿，导致电容器的损坏。



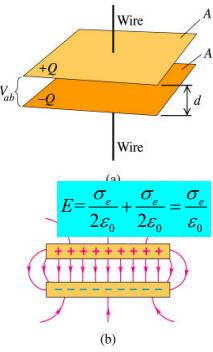
26

三. 几种常见电容器的电容

1. 平行板电容器

- 由两块平行放置的金属板组成；
- 当极板的面积 S 足够大，极板间的距离 d 足够小；两极板视为均匀带电，带电量为 $\pm q$ ；
- 极板间的电场由极板上的电荷分布唯一确定。忽略极板的边缘效应，两板之间的电势差为：

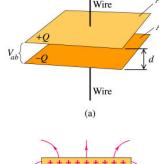
$$U_{ab} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = Ed = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0} d$$



27

- 故平行板电容器的电容为：

$$C = \frac{q}{U_{ab}} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (d \ll \sqrt{S})$$

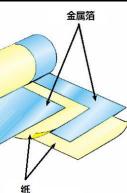


由此可见，增大极板面积，减少两极板间的距离，可使电容器的电容增大。

- 严格讲，平行板电容器并不是屏蔽得很好的导体组，它们的电势差或多或少受到周围导体和带电体的影响，以上的结论只有在其他导体或带电体远离平行板电容器时才严格成立；
- 实际使用中的平行板电容器往往加有屏蔽罩或卷成筒状，使屏蔽效果改善。

28

- 通常使用的平行板电容器，是用两片金属薄片中间夹上一层很薄的绝缘介质卷起来制成的



- 电容器的种类：

按介质分：

真空，空气，云母，纸质，油纸，陶瓷，电解，聚四氟乙烯，等。

按电容是否可变分：

可变，半可变，微调，固定。



计算机键盘的每个字母块就是利用电容的原理设计的，通过压力改变电容极板之间的距离，来改变电容值，发出一个指令。

估算人和大地之间的电容

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

$$S \approx 300 \text{ cm}^2$$

$$d = 5 \sim 10 \text{ mm}$$

$$C \approx 50 \sim 200 \text{ pF}$$

31

2. 同心球形电容器

- 由两个同心金属球壳制成的电容器。
- 设A带电 Q , B内壁带 $-Q$, 则两球壳的电势差为:

$$U_{ab} = \int_a^b \bar{E} \cdot d\bar{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right)$$

- 其电容为:

$$C = \frac{Q}{U_{ab}} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_A R_B}{R_B - R_A}$$

若 $R_B \gg R_A$, 即外球壳B远离球A, 则回到孤立导体球的电容公式;

若 R_A 和 R_B 都很大, 而 $d=R_B-R_A$ 很小, 则 $R_A \times R_B = R^2$, 则回到平板电容器的公式。

32

3. 共轴圆柱形电容器

- 由两个同轴导体圆筒A和B组成的电容器。设圆筒半径分别为 R_A 和 R_B , 高为 L , 当 $L \gg R_B - R_A$ 时, 近似认为圆筒是无限长的, 边缘效应可忽略。在圆筒间做圆柱形高斯面, 场强垂直于圆柱侧面, 由高斯定理:

$$\oint_S \bar{E} \cdot d\bar{S} = 0 + 0 + E \cdot 2\pi r l = \frac{\eta l}{\epsilon_0}$$

E沿径向, 上下底面场强通量为0

$$\bar{E} = \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0 r} \bar{e}_r$$

η为单位长度柱面上的电荷

33

电势差为 $U_{ab} = \int_{R_A}^{R_B} \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_B}{R_A}$

由于电容器每个电极上的电量 $q = \eta L$, 故电容为:

$$C = \frac{q}{U_{ab}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_B/R_A)}$$

若 $d = R_B - R_A \ll R_A$ 等于平行板电容器电容

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_B/R_A)} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{R_B - R_A}{R_A} + 1\right)} \approx \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\left(\frac{R_B - R_A}{R_A}\right)} = \frac{2\pi\epsilon_0 L R_A}{d} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

$\ln(1+x) \approx x$

34

复杂电容器电容的计算

$Q \rightarrow \bar{E} \rightarrow U \rightarrow Q/U$

- $C=Q/U$ 是一个普遍适用的公式。
- 对 $Q_1 \neq Q_2$ 的两导体, 公式中的 Q 应理解为用导线将两导体接通时所交换的电量。
- 也就是电容器两极板内侧的电荷量。

【例31】如图, 两平行带电平板, 电量分别为 Q_1, Q_2 , 电势分别为 U_1, U_2 , 两板间距离远小于板的尺寸, 忽略边缘效应, 求两平板组成的电容器的电容。

【解】

$$q_{1\text{外}} + q_{1\text{内}} = Q_1$$

$$q_{2\text{内}} + q_{2\text{外}} = Q_2$$

将两极板近似为无限大带电平板, 板内(导体内)电场为0

$$E_1 = \frac{q_{1\text{外}}}{2\epsilon_0 S} - \frac{q_{1\text{内}} + q_{2\text{内}} + q_{2\text{外}}}{2\epsilon_0 S} = 0$$

$$E_2 = \frac{q_{1\text{外}} + q_{1\text{内}} + q_{2\text{内}}}{2\epsilon_0 S} - \frac{q_{2\text{外}}}{2\epsilon_0 S} = 0$$

$$q_{1\text{外}} = q_{2\text{外}} = \frac{Q_1 + Q_2}{2}$$

$$q_{1\text{内}} = -q_{2\text{内}} = \frac{Q_1 - Q_2}{2}$$

内侧面所带电荷等量异号

$q_{1\text{内}} = -q_{2\text{内}} = \frac{Q_1 + Q_2}{2}$

用导线连接两板后 $Q_1' = Q_2' = \frac{Q_1 + Q_2}{2}$

转移的电量 $\Delta q = Q_1 - Q_1' = \frac{Q_1 - Q_2}{2} = q_{1\text{内}} = -q_{2\text{内}}$

$C = \frac{\Delta q}{U_1 - U_2} = \frac{q_{1\text{内}}}{\Delta U} = \frac{1}{2} \frac{Q_1 - Q_2}{U_1 - U_2}$

四、导体之间的电容

- 当带电导体周围存在其他导体时，不论其他导体是否带电，由于静电感应，这些导体上都会产生一定分布的感应电荷；
- 且这些感应电荷的分布，将因其他带电体带电情况的改变而改变，从而改变原有带电导体的电势。
- 因此在一般情况下，非孤立导体上的电荷与其电势并不成正比。

38

空间存在多个带电导体时，每个导体的电势是空间所有带电体在该导体上产生电势的迭加，即导体上的电势与自身及其他导体上的电量之间存在一个线性关系：

$$U_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 + \dots + p_{1n}Q_n$$

$$U_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 + \dots + p_{2n}Q_n$$

$$\vdots$$

$$U_n = p_{n1}Q_1 + p_{n2}Q_2 + \dots + p_{nn}Q_n$$

p_{ij} 称为电势系数，它们只与导体的几何构形有关，而与电势和电量无关。

39

将以上线性方程组用矩阵表示

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix}$$

为更清楚的表示各导体上电荷和电势的关系，该矩阵可改写为

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}$$

c_{ij} 称为电容系数

$$\bar{C} = \bar{P}^{-1}$$

40

即

$$U_i = \sum_{j=1}^n p_{ij}Q_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^n c_{ij}U_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

可以证明

$$p_{ij} = p_{ji}, \quad c_{ij} = c_{ji}$$

其物理意义是：第*i*个导体带单位电量时，在第*j*个导体上产生的电势，与第*j*个导体带单位电量时，在*i*个导体上产生的电势相等。

41

对两个导体组成的系统，如图，有

$$U_1 = p_{11}(-Q) + p_{12}Q$$

$$U_2 = p_{21}(-Q) + p_{22}Q$$

$$\Delta U = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12})Q$$

两导体间电容与电势系数的关系为：

$$C \equiv \frac{Q}{\Delta U} = \frac{1}{p_{11} + p_{22} - 2p_{12}}$$

42

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} \begin{pmatrix} c_{22} & -c_{12} \\ -c_{12} & c_{11} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -Q \\ Q \end{pmatrix} = \frac{1}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} \begin{pmatrix} c_{22} & -c_{12} \\ -c_{12} & c_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -Q \\ Q \end{pmatrix}$$

$$U_1 = \frac{1}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} (-c_{22}Q - c_{12}Q)$$

两导体间电容与电容系数的关系为：

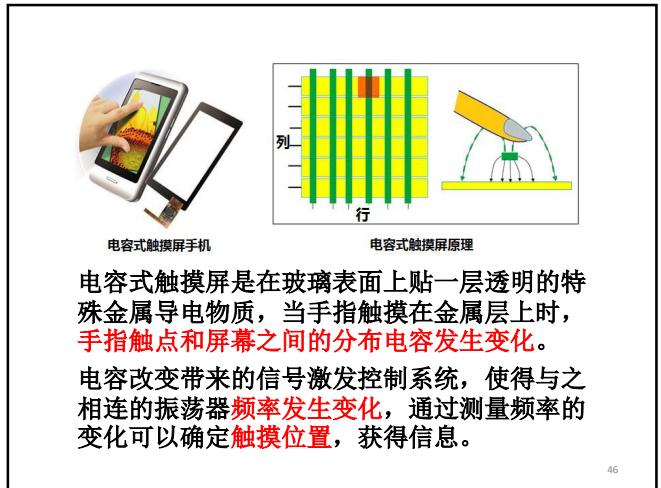
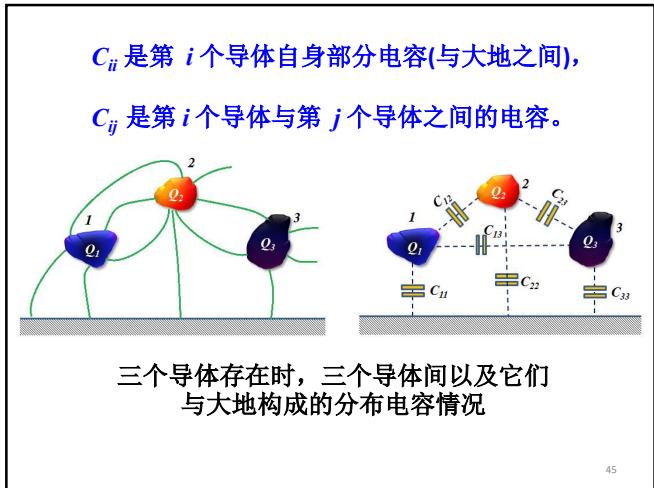
$$U_2 = \frac{1}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} (c_{12}Q + c_{11}Q)$$

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{c_{11} + c_{22} + 2c_{12}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} Q$$

43

对于多个导体，可以定义其中任意两导体间电容为 C_{ij} ，也可以证明电容与电势系数的关系为：

$$C_{ij} = \frac{\Delta Q}{U_i - U_j} = \frac{1}{p_{ii} + p_{jj} - 2p_{ij}}$$



§ 2.2.2 电容的联结

1. 电容器串联

- 电容串联的特点是各电容器极板上的电量的绝对值相等

$$Q = C_1 U_1 = C_2 U_2 = \dots = C_N U_N$$

- 总电压等于各串联电容器上电压之和

$$U = \sum_i^n U_i$$

47

N 个电容器串联后，其等值(总)电容 C 为：

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{Q} = \frac{\sum_i^n U_i}{Q} = \sum_i^n \frac{1}{C_i}$$

- 但实际电容器很少串联使用；
- 因为一旦一只电容器被击穿(导电了)，其他电容器上的分压会增加，可能使其他电容器相继被击穿。

48

【例32】求两个相距为 d 的导体球之间的电容。设两个球的半径分别为 a 和 b , 且 $d \gg a, b$ 。

【解】设 a 球带 $+q$, b 球带 $-q$ 。由于 $d \gg a, b$, 可忽略感应电荷引起球表面电荷分布的变化, 近似看成均匀分布

$E = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r \geq R \end{cases}$	a 球单独存在时在两球心的电势为:
	$U_{a \rightarrow A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}, U_{a \rightarrow B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}$
	$U_{b \rightarrow A} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 d}, U_{b \rightarrow B} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 b}$
	$U_A = U_{a \rightarrow A} + U_{b \rightarrow A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d} \right)$
	$U_B = U_{a \rightarrow B} + U_{b \rightarrow B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{b} \right)$

叠加原理

$$\Delta U = U_A - U_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{d} \right)$$

$$C = \frac{q}{\Delta U} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{d}} \xrightarrow{d \rightarrow \infty} \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{a+b}$$

孤立导体球的电容 $C_1 = 4\pi\epsilon_0 a, C_2 = 4\pi\epsilon_0 b$

两孤立导体球串联时 $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{a+b}$

为什么相距很远的导体球间的电容是串联的?
球A—大地—球B
 C_1, C_2

【例33】两相距为 d 的平行板间插入一厚度为 t 的导体板, 求电容。

【解】相当于两电容串联

$C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{x}$	$C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{d-t-x}$	$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$
--------------------------------	------------------------------------	---

$$\frac{1}{C} = \frac{x}{\epsilon_0 S} + \frac{d-t-x}{\epsilon_0 S} = \frac{d-t}{\epsilon_0 S}$$

电容数值与板插入的位置无关, 只与板厚度有关

2. 电容器并联

- 电容器并联的特点是: 各电容器极板上的电压相等 $U = U_1 = U_2 = \dots = U_N$
- 总电量等于各并联电容器上电量之和 $Q = \sum_{i=1}^N Q_i$

N 个电容器并联后的等值电容 C 为:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sum_{i=1}^N Q_i}{U_i} = \sum_{i=1}^N C_i$$

电容器并联后可获得较大的电容

【例34】两块长与宽均为 a 和 b 的导体板在制成平行板电容器时稍有偏差, 使两板间距一端为 d , 另一端为 $d+h$, 且 $h \ll d$, 求该电容器的电容。(习题2.9)

【解】可视为若干电容器并联

$$\tan \theta = \frac{h}{b}, h \ll d, \theta \approx \frac{h}{b}$$

$$dC = \frac{\epsilon_0 dS}{d'} = \frac{\epsilon_0 a dx}{d + x \tan \theta} \approx \frac{\epsilon_0 a}{d + x \theta} dx \quad \ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$$

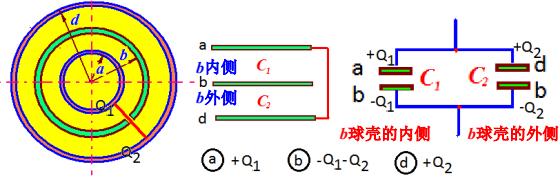
$$C = \int dC = \int_0^b \frac{\epsilon_0 a}{d + x \theta} dx = \frac{\epsilon_0 a}{\theta} \ln \left(1 + \frac{b \theta}{d} \right) = \frac{\epsilon_0 ab}{h} \ln \left(1 + \frac{h}{d} \right)$$

$$\approx \frac{\epsilon_0 ab}{h} \left(\frac{h}{d} - \frac{h^2}{2d^2} \right) = \frac{\epsilon_0 ab}{d} \left(1 - \frac{h}{2d} \right) = C_0 \left(1 - \frac{h}{2d} \right)$$

【例35】一个球形电容器由三个很薄的同心导体壳组成, 它们的半径分别为 a, b, d 。一根绝缘细导线通过中间壳层的一个小孔把内外球壳连接起来。忽略小孔的边缘效应。求:

- (1) 此系统的电容;
- (2) 若在中间球壳上放置任意电量 Q , 确定中间球壳内、外表面上的电荷分布。

【解】(1) 导线连接内外球壳，相当于2个电容器并联



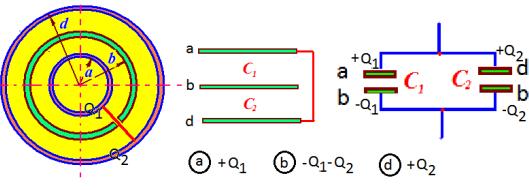
设内外两球壳的电量分别为 Q_1 和 Q_2 ，那么 a, b 球间的电场为：

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_1}{\epsilon_0} \quad E = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

电势差 U_{ab} 为

$$U_{ab} = \int_a^b Edr = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

55



b, d 球间的电场为(b 球带电 $-Q_1-Q_2$)：

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_1+(-Q_1-Q_2)}{\epsilon_0} \quad E = -\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

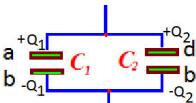
b, d 球的电势差为：

$$U_{bd} = \int_b^d Edr = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{b} \right)$$

56

两电容器并联

$$U_{ab} = U_{db} = U$$



$$U_{ab} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = U \quad \Rightarrow \quad Q_1 = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} U$$

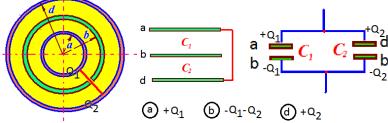
$$U_{bd} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{b} \right) = U \quad \Rightarrow \quad Q_2 = 4\pi\epsilon_0 \frac{db}{d-b} U$$

$$Q_1 + Q_2 = 4\pi\epsilon_0 b \left(\frac{a}{b-a} + \frac{d}{d-b} \right) U$$

$$C = \frac{Q_1 + Q_2}{U} \quad \Rightarrow \quad C = 4\pi\epsilon_0 b \left(\frac{a}{b-a} + \frac{d}{d-b} \right)$$

(2)若在中间球壳上放置任意电量 Q ，求中间球壳内外表面上的电荷分布

$$C_1 = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} \quad C_2 = 4\pi\epsilon_0 \frac{db}{d-b}$$

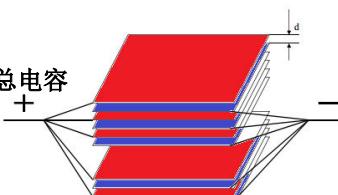


因此内外表面上的电荷分布

$$\begin{cases} Q_1 = C_1 U \\ Q_2 = C_2 U \\ Q_1 + Q_2 = Q \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Q_1 = \frac{a(d-b)}{b(d-a)} Q \\ Q_2 = \frac{d(b-a)}{b(d-a)} Q \end{cases}$$

58

【例36】求图所示的总电容



【解】红蓝两层平行板间形成一个间距为 d 的平行板电容器，电容为：

$$C_i = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

所有这些平行板电容器是相互并联的；因此系统相当于 $n-1$ 个平行板电容器并联

$$C = \frac{(n-1)\epsilon_0 S}{d}$$

59

【例37】求如图所示导体球壳的电容

【解】设内球带电 Q ，外球壳带电 $-Q$ ，由感应带电，中间球壳内、外表面分别带电为 $-Q$ 和 $+Q$ ，外球壳内、外表面带电为 $-Q$ 和 0 。静电平衡下导体内电场为

$$E_{r < R1} = 0, \quad E_{R2 < r < R3} = 0, \quad E_{R4 < r < R5} = 0$$

$$\text{由高斯定理得 } E_{R1 < r < R2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad E_{R3 < r < R4} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad E_{r > R5} = 0$$

$$\Delta U = \int_0^{R5} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 + \int_{R1}^{R2} \vec{E} \cdot d\vec{l} + 0 + \int_{R3}^{R4} \vec{E} \cdot d\vec{l} + 0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right)$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}}$$

【例38】在如图所示的电路中， $C_1=C_3=2\text{mF}$, $C_2=C_4=C_5=1\text{mF}$, $\epsilon=600\text{V}$, 求各电容器两端的电压。

【解】

$$\epsilon = U_1 + U_2 = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2}$$

$$\epsilon = U_4 + U_5 = \frac{q_4}{C_4} + \frac{q_5}{C_5}$$

$$\epsilon = U_1 + U_3 + U_5 = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_3}{C_3} + \frac{q_5}{C_5}$$

对E点 $-q_1 + q_2 + q_3 = 0$
对F点 $-q_4 - q_3 + q_5 = 0$

$q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 \dots$
 $U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 \dots$

§ 2.2.3 超级电容器

- 传统电容器的面积 S 是导体的表面积，为了获得较大的电容，导体材料卷制得很长，有时用特殊的组织结构来增加它的面积。
- 传统材料电容器是用绝缘材料分离它的两极板，一般为塑料薄膜、纸等，这些材料通常要求尽可能的薄，以降低 d 的值。
- 传统制作电容器的方法，由于材料和结构的限制，一般不可能获得较大电容值。

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad S \uparrow \text{ or } d \downarrow \Rightarrow C \uparrow$$

62

【知识点】

- 超级电容器是建立在德国物理学家亥姆霍兹提出的界面双电层理论基础上的一种新电容器。
- 发展基于充电技术的超级电容器，可以获得较大的电能储存，可以部分或全部代替传统的化学电池，用于车辆的牵引电源和启动电源，甚至直接作为汽车的工作动力。

63

【知识点】

- 插入电解质溶液中的金属电极表面与液面两侧会出现符号相反的过剩电荷；
- 如果在电解液中同时插入两个电极，并在其间施加一个小于电解质溶液分解电压的电压，这时电解液中的正、负离子在电场的作用下会迅速向两极运动，并分别在两电极的表面形成紧密的电荷层，即双电层。

64

【知识点】

- 超级电容器的充、放电过程始终是物理过程，没有化学反应，因此性能稳定的，与利用化学反应的蓄电池是不同的。
- 紧密的双电层近似于平板电容器，但是，由于紧密的电荷层间距是由被吸引到带电电极的电解质离子尺寸决定的(<10 埃)，比传统电容器所能实现的距离小很多。
- 超级电容器通常使用多孔碳材料，该材料的多孔结构允许其面积达 $2000 \text{ m}^2/\text{g}$ ，通过一些措施还可实现更大的表面积。
- 这种庞大的表面积，再加上非常小的电荷分离距离，使超级电容器较传统电容器而言，有着大得惊人的静电容量。

65

【知识点】

- 超级电容器通常采用活性碳、碳纤维、碳气凝胶和碳纳米管等作为电极材料。
- 电容值达到法拉量级，有的甚至达到几千法拉。采用多层叠片串联组合而成的高压超级电容器，可以达到300V以上的工作电压。

活性炭 碳纳米管

66

问 题

- 1.复杂体系的电容计算。
- 2.超级电容器的制作原理

67

作业 2.5, 2.10, 2.11, 2.14



68