1 级数

1.1 复级数

一个复数项无穷级数是指

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = z_1 + z_2 + \cdots .$$

它的部分和记为

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k.$$

显然$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个复数列，称复数项无穷级数收敛如果极限

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

存在。如果我们把极限记为S，则我们记

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = S.$$

与复数列收敛类似，我们有以下定理。

定理1. 设$z_k = x_k + iy_k$，则$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ 存在等价于$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 和$\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ 存在。

以下推论是显然的

推论1. 设$z_k = x_k + iy_k$，则$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ 存在的必要条件是$\lim_{k\to\infty} z_k = 0$。

注记：这不是充分条件，一个简单的例子是$z_k = \frac{1}{k}$。

设$z_k = x_k + iy_k$，则称$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ 绝对收敛，如果$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ 收敛。

定理2. 设$z_k = x_k + iy_k$，则$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ 绝对收敛等价于$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 和$\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ 绝对收敛。

以下推论是显然的

推论2. 设$z_k = x_k + iy_k$，则$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ 存在的充分条件是$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ 存在。

注记：这不是必要条件，一个简单的例子是$z_k = \frac{(-1)^k}{k}$。

例子1. 判断敛散性：

(1) $z_n = \frac{1}{2^n} + \frac{i}{n}$；

(2) $z_n = z^n$。

解. *(1)* 略；

*(2)*当$|z| \geq 1$ 的时候，$\sum_{k=1}^{\infty} z^k$ 收敛；当$|z| \leq 1$ 收敛于$\frac{1}{1-z}$。

注记1. 当且仅当$|z|<1$ 的时候，$\frac{1}{1-z}$ 才可以写成

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + z + z^2 + \cdots .$$

这个注记很简单，但却很有用。当$|z|>1$ 的时候，应该以以下方式展开

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^k}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^k}.$$

1.2 复函数项级数

设$\{f_k(z)\}$ 是定义在平面点集E 上的函数列，则称

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$$

为E 上的函数项阶数。设$z_0 \in E$，如果复数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z_0)$$

收敛，则称

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$$

在z_0 收敛；如果每一点收敛，则称

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$$

在E 收敛。记收敛函数为$f(z)$.

定义1. （一致收敛）记部分和$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$，称

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$$

一致收敛到$f(z)$，如果对于任何$\epsilon > 0$，存在$N \in \mathbb{N}$，当$n \geq N$时，

$$|S_n(z) - f(z)| \leq \epsilon.$$

定理3. *(比较判别法)*如果复函数项级数能被一个收敛的正项级数一致控制，则复函数项级数一致收敛：存在$\{M_k\}$ 使得$|f_k(z)| \leq M_k$ 始终成立，则$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$一致收敛。

例子2. 复函数项级数$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在

(1) $|z| < r, r < 1$ 一致收敛；

(2) $|z| < 1$ 收敛；

(3) $|z| > 1$ 发散。

一致收敛的性质：

定理4. *(1)* 设$\{f_k(z)\}$ 是连续函数，$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 一致收敛到$f(z)$, 则$f(z)$ 是连续函数；

(2) 设$\{f_k(z)\}$ 是连续函数，$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 一致收敛到$f(z)$, 则$\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C f_k(z)dz$ 是连续函数；

(3) 设$\{f_k(z)\}$ 是区域D 上的解析函数，$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 一致收敛到$f(z)$, 则$f(z)$ 是解析函数。并且

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(z), n = 1, 2, \cdots.$$

注记2. （*3*）由（*2*）及莫雷拉定理，$f(z)$ 在任何一个D 的单连通开集上积分与路径无关，因而解析；由柯西积分公式，f 有任意阶导数。

对任意一点$z_0 \in D$，取D 内闭领域$|z - z_0| \leq r$，则有柯西积分公式

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz = f^{(n)}(z_0)$$

以及

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f_k(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz = f_k^{(n)}(z_0)$$

部分和并做差：

$$|f^{(n)}(z_0) - \sum_{k=1}^{m} f_k^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi}\int_{C_r} \frac{|f(z) - \sum_{k=1}^{m} f_k(z)|}{r^{n+1}}|dz|.$$

由一致收敛的定义，对于任何$\epsilon > 0$，存在$N \in \mathbb{N}$，当$m \geq N$时，

$$|S_m(z) - f(z)| \leq \frac{\epsilon r^n}{n!}.$$

即当$m \geq N$ 的时候部分和并做差：

$$|f^{(n)}(z_0) - \sum_{k=1}^{m} f_k^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi}\int_{C_r} \frac{\frac{\epsilon r^n}{n!}}{r^{n+1}}|dz| = \epsilon.$$

从而$f^{(n)}(z_0) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(z_0)$。

1.3 幂级数

一个幂级数是指

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z - a)^k.$$

其中a, a_k 均为复数。

定理5 (收敛半径). 对任意幂级数$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z - a)^k$，我们设$R = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}}$。

(1) 如果$|z - a| < R$，则$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z - a)^k$ 绝对收敛；

(2) 如果$|z-a|>R$，则$\sum_{k=1}^{\infty}a_k(z-a)^k$ 发散；

(3) 如果$|z-a|=R$，则不确定。

特别地，如果$R=0$，则除了a 点外全复平面发散；如果$R=+\infty$，则全复平面收敛。如果$0<R<\infty$，则对于任意$0<\tilde{R}<R$，幂级数在$|z-a|\le\tilde{R}$ 上绝对一致收敛。

证明. *(1)* 因为$|z-a|<R=\frac{1}{\limsup_{k\to\infty}|a_k|^{\frac{1}{k}}}$，所以

$$\limsup_{k\to\infty}|a_k|^{\frac{1}{k}}<\frac{1}{|z-a|}.$$

从而存在$N>0$ 和$\delta>0$ 使得当$k>N$ 时

$$|a_k|^{\frac{1}{k}}<\frac{1}{|z-a|+\delta}.$$

所以

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k(z-a)^k|=\sum_{k\le N}|a_k(z-a)^k|+\sum_{k>N}|a_k(z-a)^k|\le\sum_{k\le N}|a_k(z-a)^k|+\sum_{k>N}^{\infty}\left(\frac{|z-a|}{|z-a|+\delta}\right)^k.$$

后者收敛，因而$\sum_{k=1}^{\infty}a_k(z-a)^k$ 绝对收敛。

(2) 只要能证明$\limsup_{k\to\infty}|a_k||z-a|^k\ge 1$，那么由推论*1*，$\sum_{k=1}^{\infty}a_k(z-a)^k$ 发散。而要说明$\limsup_{k\to\infty}|a_k||z-a|^k\ge 1$，仅需说明$\limsup_{k\to\infty}|a_k|^{\frac{1}{k}}|z-a|>1$。等价于$\frac{|z-a|}{R}>1$。这是显然的。

(3) 可以举一个简单的例子：$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}z^k$，该幂级数的收敛半径为1。当$z=1$ 的时候发散，当$z=-1$ 收敛。

(4) 我们来证明绝对一致收敛部分，因为$0<\tilde{R}<R=\frac{1}{\limsup_{k\to\infty}|a_k|^{\frac{1}{k}}}$，所以

$$\limsup_{k\to\infty}|a_k|^{\frac{1}{k}}<\frac{1}{\tilde{R}}.$$

从而存在$N>0$ 和$\delta>0$ 使得当$k>N$ 时

$$|a_k|^{\frac{1}{k}}<\frac{1}{\tilde{R}+\delta}.$$

所以对任意$|z-a|\le\tilde{R}$，有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k(z-a)^k|=\sum_{k\le N}|a_k(z-a)^k|+\sum_{k>N}|a_k(z-a)^k|\le\sum_{k\le N}|a_k\tilde{R}^k|+\sum_{k>N}^{\infty}\left(\frac{\tilde{R}}{\tilde{R}+\delta}\right)^k.$$

后者收敛，因而$\sum_{k=1}^{\infty}a_k(z-a)^k$ 绝对收敛*(*比较判别法*)*。对任意$M>N$ 和$|z-a|\le\tilde{R}$，有

$$\sum_{k=M}^{\infty}|a_k(z-a)^k|\le\sum_{k\ge M}^{\infty}\left(\frac{\tilde{R}}{\tilde{R}+\delta}\right)^k\to 0,M\to\infty.$$

这说明$\sum_{k=1}^{\infty}a_k(z-a)^k$ 一致收敛。

我们将这样的R 称为幂级数的收敛半径，$|z-a|<R$ 称为收敛圆。求幂级数$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z-a)^k$ 收敛半径：

(1) 如果$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}=r$，则收敛半径为$\frac{1}{r}$；

(2) 如果$\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}=r$，则收敛半径为$\frac{1}{r}$。

例如：$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(z-a)^k$ 的收敛半径为1；$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k}(z-a)^k$ 的收敛半径为$\frac{1}{2}$。设$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(z-a)^k$，则

(1) 在收敛圆内幂级数求导可以逐项求导；

(2) 在收敛圆内幂级数的曲线积分可以逐项积分；

(3) 幂级数的微分和原函数都是幂级数，并且有相同的收敛半径。

定理6. 设$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(z-a)^k$，则

$$f^{(n)}(a)=n!a_n.$$

证明. 设C 是围住a 且在收敛圆内的简单闭曲线，则由柯西积分定理或柯西积分公式

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz=\frac{n!}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}\int_C a_k(z-a)^{k-n-1}dz=n!a_n.$$

例子3. 设$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n(a_0\neq 0)$ 的收敛半径$R>0$，

(1) 记$M(r)=\max_{|z|\leq r}|f(z)|(r<R)$，利用柯西积分公式证明：$|f^{(n)}(0)|\leq\frac{n!M(r)}{r^n}$；

(2) 证明：在圆$|z|<\frac{|a_0|r}{|a_0|+M(r)}$内$f(z)$ 无零点。其中$r<R$。

Proof. (1) 略；(2) 在圆$|z|<\frac{|a_0|r}{|a_0|+M(r)}$内

$$|f(z)|\geq|a_0|-\sum_{n=1}^{\infty}|a_n||z|^n\geq|a_0|-\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{M(r)}{r^n}||\frac{|a_0|r}{|a_0|+M(r)}|^n=|a_0|-M(r)\frac{\frac{|a_0|}{|a_0|+M(r)}}{1-\frac{|a_0|}{|a_0|+M(r)}}=0.$$

等号成立的必要条件是$0=a_0=a_2=\cdots$。此时$f(z)=a_0\neq 0$。综上所述我们完成了证明。 □

1.4 泰勒展开

1.4.1 泰勒展开

定理7 (泰勒展开)**.** 设$f(z)$ 在$|z-a|\leq R$ 内解析。则对任意$|z-a|<R$，我们可以把$f(z)$ 展开成幂级数的形式，

$$f(z)=\sum_{n\geq 0}a_n(z-a)^n.$$

特别地：幂级数的收敛半径不小于R；展开形式是唯一的（即是把R 缩小也不会改变幂级数的形式）；幂级数的系数为

$$a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

证明. 由柯西积分定理

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=R}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=R}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)-(z-a)}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=R}\frac{1}{\xi-a}\frac{f(\xi)}{1-\frac{z-a}{\xi-a}}d\xi.$$

展开为

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=R}\sum_{n\geq 0}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}(z-a)^n d\xi.$$

注意到关于ξ 的函数项级数

$$|\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}(z-a)^n|\leq\frac{M_R|z-a|^n}{R^{n+1}}.$$

其中$M_R=\sup_{|\xi-a|=R}|f(\xi)|$。关于$\xi$ 的函数项级数被与ξ 无关的收敛等比数列控制，因而函数项级数一致收敛。所以积分可以和求和号交换次序。我们有

$$f(z)=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=R}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}(z-a)^n d\xi=\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

幂级数的收敛半径不小于R：已知幂级数都有收敛半径，并且在收敛圆外部区域都是发散的；我们考虑的幂级数在$|z-a|<R$ 内收敛，这说明收敛半径不小于R。

幂级数的系数，假设有展开

$$f(z)=\sum_{n\geq 0}b_n(z-a)^n.$$

则取$\rho<R$，我们有

$$\frac{2\pi i f^{(n)}(a)}{n!}=\int_{|\xi-a|=\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi=\int_{|\xi-a|=\rho}\frac{b_n}{\xi-a}d\xi=2\pi i b_n.$$

所以$b_n=a_n$。并以此说明唯一性。

我们称一个定义在区域D 上的复函数在$a\in D$ 可以泰勒展开如果存在$\rho>0$ 使得

$$\{z:|z-a|<\rho\}\subset D$$

并且

$$f(z)\text{在}|z-a|<\rho\text{ 可以展开成}z-a\text{ 的幂级数。}$$

定理8. $f(z)$ 在区域D 上解析，等价于它在D 内任意点a 可以展开成$z-a$ 的幂级数。

证明. 仅需说明微分存在，既然幂级数微分和求和号在收敛圆内部可以交换次序，这是显然的。

常见函数在0 点的泰勒展开：

指数函数： $e^z=\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}$，收敛半径无穷；

正弦函数： $\sin z=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$，收敛半径无穷；

余弦函数： $\cos z=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$，收敛半径无穷；

其他：$\frac{1}{1-z}=\sum_{n\geq 0} z^n$，收敛半径为1。

例子4. 设$a\neq 0$，求$\frac{1}{z}$ 在a 点的泰勒展开。

解. 在$|z-a|<|a|$ 内

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+(z-a)}=\frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{-(z-a)}{a}}=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{a^{n+1}}(z-a)^n.$$

收敛半径为$|a|$。

例子5. 求$\ln(1+z)$ 在零点的泰勒展开。

解. 在$|z|<1$ 内，

$$(\ln(1+z))'=\frac{1}{1+z}=\sum_{n\geq 0}(-1)^n z^n.$$

所以在$|z|<1$ 内，

$$\ln(1+z)=C+\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1}.$$

令$z=0$，得到$C=0$，所以

$$\ln(1+z)=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1}.$$

收敛半径为1。

1.4.2 泰勒展开与零点

由泰勒展开可以得到以下零点的性质。

定理9. 设f 在$|z-a|<R$ 上解析，则以下等价

(1) f 在a 点的泰勒展开的前m 项系数（$a_0,\cdots,a_{m-1}$）为零并且第m 项系数（a_m）不为零；

(2) f 可以表示为$f(z)=(z-a)^m g(z)$，其中g 在$|z-a|<R$ 上解析，并且$g(a)\neq 0$；

(3) $f^{(k)}(a)=0, k=0,1,2,\cdots,m-1$ 并且$f^{(m)}\neq 0$。

称a 为f 的m 级零点如果上述之一满足。如果$f(a)=0$，f 在a 点解析并且f 在a 点附近不是零函数，则必然存在自然数m 使得a 是f 的m 级零点。

证明. *(1)*与*(3)* 显然是等价的。*(2)*→ *(3)* 是显然的。我们仅需要证明*(1)*→*(2)*，不妨设f 的泰勒展开为

$$f(z)=\sum_{k\geq 0}a_{m+k}(z-a)^{m+k}=(z-a)^m\sum_{k\geq 0}a_{m+k}(z-a)^k.$$

设$g=\sum_{k\geq 0}a_{m+k}(z-a)^k$. g 是一个幂级数且收敛半径与$\sum_{k\geq 0}a_{m+k}(z-a)^{m+k}$ 相同。简单验证得g 满足要求，证明结束。

例子6. 设$f(z)$ 在$z=0$ 解析，$f(0)=1, f'(0)=2, f''(0)=3$，求

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{|z|=\rho}\frac{1}{(f(z)-1)^2}dz.$$

解. 将$f-1$ 在0点泰勒展开，得到

$$f(z)-1=2z+\frac{3}{2}z^2+\cdots.$$

令

$$g(z)=2+\frac{3}{2}z+\cdots.$$

则$f(z)-1=zg(z)$，$g'(0)\neq 0$ 并且g 在$|z|<\rho$ （ρ 足够小）解析。所以

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{|z|=\rho}\frac{1}{z^2g^2}dz=2\pi i(\frac{1}{g^2})'|_{z=0}=-4\pi i\frac{g'(0)}{g^3(0)}.$$

又因为

$$g(0)=2, g'(0)=\frac{3}{2}.$$

代入得

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{|z|=\rho}\frac{1}{(f(z)-1)^2}dz=-\frac{3\pi i}{4}.$$

定理10. 有界连通闭区域上的解析函数如果有无穷多零点，则它必是零函数。

证明. 设f 在有界连通闭区域D 上解析，a 是f 零点的聚点，则存在ρ 使得f 在$|z-a|<\rho$ 上解析。假设f 在$|z-a|$ 上不恒为零，则在$|z-a|$ 上，f 可以表示为

$$f=(z-a)^m g(z).$$

m为正整数，g 为$|z-a|<\rho$ 上解析函数，且$g(a)\neq 0$。考虑到a 为零点的聚点，存在$a_k\to a$，$f(a_k)=0, a_k\neq a$ 且$|a_k-a|<\rho$。代入上式，从而必然有

$$g(a_k)=0, k=1,2,3,\cdots.$$

由连续性，$g(a)=0$，这与$g(a)\neq 0$ 矛盾。所以f 在$|z-a|<\rho$ 上恒为零。通过不断画圆可以说明在D 上恒为零。

1.5 洛朗展开

定理11 (洛朗展开)**.** 设$f(z)$ 在$0\leq r\leq |z-a|\leq R$ 内解析。则对任意$r<|z-a|<R$，我们可以把$f(z)$ 展开成如下形式，

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n(z-a)^n.$$

特别地：展开形式唯一；系数可以表示为

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi.$$

其中$r\leq\rho\leq R$。

证明. 由柯西积分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=R}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi.$$

对于前面一半

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=R}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=R}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)-(z-a)}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=R}\frac{1}{\xi-a}\frac{f(\xi)}{1-\frac{z-a}{\xi-a}}d\xi.$$

展开为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=R}\sum_{n\geq 0}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}(z-a)^n d\xi.$$

注意到关于ξ 的函数项级数

$$|\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}(z-a)^n|\leq\frac{M_R|z-a|^n}{R^{n+1}}.$$

其中$M_R=\sup_{|\xi-a|=R}|f(\xi)|$。关于$\xi$ 的函数项级数被与ξ 无关的收敛等比数列控制，因而函数项级数一致收敛。所以积分可以和求和号交换次序。我们得到

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=R}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}(z-a)^n d\xi.$$

对于后面一半

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=r}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=r}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)-(z-a)}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=r}-\frac{1}{z-a}\frac{f(\xi)}{1-\frac{\xi-a}{z-a}}d\xi.$$

展开为

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=r}\sum_{n\geq 0}\frac{f(\xi)}{(z-a)^{n+1}}(\xi-a)^n d\xi.$$

注意到关于ξ 的函数项级数

$$|\frac{f(\xi)}{(z-a)^{n+1}}(\xi-a)^n|\leq\frac{M_r r^n}{|z-a|^{n+1}}.$$

其中$M_r=\sup_{|\xi-a|=r}|f(\xi)|$。因而函数项级数一致收敛。所以积分可以和求和号交换次序。我们得到

$$-\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=r}\frac{f(\xi)}{(z-a)^{n+1}}(\xi-a)^n d\xi.$$

综合两部分，我们得到

$$f(z)=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=R}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}(z-a)^n d\xi+\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=r}\frac{f(\xi)}{(z-a)^{n+1}}(\xi-a)^n d\xi.$$

取任意$r<\rho<R$，由柯西积分定理，我们可以整理得到

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi\right)(z-a)^n.$$

注记3. 如同在证明中一样，我们可以把洛朗展开$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n(z-a)^n$ 分为两部分

$$\sum_{n<0}a_n(z-a)^n \text{ 称为主要部分，} \sum_{n\geq 0}a_n(z-a)^n \text{ 称为正则部分。}$$

主要部分可以看成一个幂级数$\sum_{n>0}a_{-n}\xi^n$，其收敛半径至少为$\frac{1}{r}$；正则部分也可以看成一个幂级数$\sum_{n>0}a_n\xi^n$，其收敛半径至少为R。

例子7. 分别在下面区域洛朗展开$f(z)=\frac{1}{(1-z)(2-z)}$：

(1) $|z|<1$；

(2) $1<|z|<2$；

(3) $|z|>2$。

解. 要时刻注意得到的级数是否在要求区域是有意义的。$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}$。

(1) $f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2}=\sum_{n\geq 0}(1-\frac{1}{2^{n+1}})z^n$。

(2)$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2}=\sum_{n\geq 0}(-1)z^{-n-1}+\sum_{n\geq 0}(-\frac{1}{2^{n+1}})z^n$。

(3)$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z}+\frac{1}{z}\frac{1}{1-2/z}=\sum_{n\geq 0}(-1+2^n)z^{-n-1}$。

例子8. 洛朗展开$f(z)=\frac{1}{(1-z)(2-z)^2}$，$1<|z|<2$。

解. 可以直接按系数的公式展开：

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=3/2}\frac{1}{\xi^{n+1}(1-\xi)(2-\xi)^2}d\xi.$$

当$n\leq -1$ 的时候，

$$a_n=-\frac{1}{\xi^{n+1}(2-\xi)^2}|_{\xi=1}=-1.$$

当$n\geq 0$ 的时候，

$$a_n=\left(\frac{1}{n!}\frac{1}{(1-\xi)(2-\xi)^2}\right)^{(n)}|_{\xi=0}-\frac{1}{\xi^{n+1}(2-\xi)^2}|_{\xi=1}=-\frac{n+3}{2^{n+2}}.$$

所以$f(z)=\sum_{n\geq 0}-\frac{n+3}{2^{n+2}}z^n-\sum_{n\leq -1}z^n$.

计算有点麻烦，我们干脆全部拆开：待定系数

$$f(z)=\frac{A}{1-z}+\frac{B}{2-z}+\frac{C}{(2-z)^2}=\frac{(A+B)z^2-(4A+3B+C)z+(4A+2B+C)}{(1-z)(2-z)^2}.$$

得到

$$A=1,B=-1,C=-1.$$

即$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}-\frac{1}{(2-z)^2}$。分别展开

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z}=-\sum_{n\leq -1}z^n.$$

$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2}=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^{n+1}}z^n.$$

$$\frac{1}{(2-z)^2}=\left(\frac{1}{2-z}\right)'=\sum_{n\geq 0}\frac{n+1}{2^{n+2}}z^n.$$

所以

$$f(z)=-\sum_{n\geq 0}\frac{n+3}{2^{n+2}}z^n-\sum_{n\leq -1}z^n.$$

例子9. 求$f(z)=\sin\frac{z}{z-1}$ 在$z=1$ 的洛朗展开。

解. 设$\xi=z-1$，则

$$f=\sin(1+\frac{1}{\xi})=\sin 1\cos\frac{1}{\xi}+\cos 1\sin\frac{1}{\xi}=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n\sin 1}{(2n)!}\frac{1}{\xi^{2n}}+\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n\cos 1}{(2n+1)!}\frac{1}{\xi^{2n+1}}.$$

1.6 孤立奇点

设$f(z)$ 在a 的一个去心邻域$0<|z-a|<\rho$ 内解析，在a 点不解析，则我们称a 为孤立奇点。我们可以在a 点洛朗展开

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n(z-a)^n.$$

根据洛朗展开主要部分的不同，我们可以将孤立奇点分类：

(1) 可去奇点：主要部分为零；

(2) m阶极点(m 为正整数)：满足$a_n=0,n\leq -m-1$，$a_{-m}\neq 0$；

(3) 本性奇点：主要部分有无限项系数不为零。

三类奇点的判断方法：

定理12. 设a 是f 的孤立奇点，则：

(1) a 为可去奇点等价于$\lim_{z\to a}f(z)$ 存在；

(2) a 为m阶极点等价于存在解析函数φ且$\varphi(a)\neq 0$ 使得在a 的某个去心邻域$f=\frac{\varphi}{(z-a)^m}$；$a$ 为极点等价于$\lim_{z\to a}f(z)=\infty$；

(3) a 为本性奇点等价于$\lim_{z\to a}f(z)$ 不存在且不为∞。

证明. （*1*）如果a 为可去奇点，则f 可以在a 的某个去心邻域内展开成幂级数，既然幂级数在收敛圆内极限存在并且是解析的，自然$\lim_{z\to a}f(z)$ 存在；反之，我们求下系数（n 为正整数）

$$|a_{-n}|=\lim_{\rho\to 0}|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}f(\xi)(\xi-a)^{n-1}d\xi|=\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi}|\int_0^{2\pi}f(a+\rho e^{i\theta})\rho^n e^{in\theta}d\theta|\leq\lim_{\rho\to 0}\rho^n|f(a)|=0.$$

（2）前面一半是显然的，我们证明后面一半。设a 为m阶极点，设a 点的洛朗展开为

$$f(z)=\sum_{k\geq -m}a_k(z-a)^k.$$

令

$$\varphi=\sum_{k=0}^{\infty}a_{-m+k}(x-a)^k.$$

这是一个幂级数且和$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k$ 有相同的收敛半径。由幂级数性质，φ 在a 的一个邻域内解析，并且$\varphi(a)=a_{-m}\neq 0$。从而

$$\lim_{z\to a}f(z)=\frac{a_{-m}}{0}=\infty.$$

反之，假设$\lim_{z\to a}f(z)=\infty$ 并且f 在a 的一个去心领域解析。容易得到存在$\rho>0$，使得

$$f(z)\neq 0,\forall 0<|z-a|<\rho.$$

从而$\frac{1}{f(z)}$ 在区域$0<|z-a|<\rho$ 上解析并且

$$\lim_{z\to a}\frac{1}{f(z)}=0.$$

即a 是$\frac{1}{f(z)}$ 的可去奇点。有洛朗展开

$$\frac{1}{f(z)}=\sum_{k\geq m}a_k(z-a)^k=(z-a)^m\phi.$$

其中m 是最小的下标使得$a_m\neq 0$。容易得到$m\geq 1$。既然$\phi(a)\neq 0$，$\frac{1}{\phi}$ 在a 点可以泰勒展开

$$\frac{1}{\phi}=b_0+\sum_{k\geq 1}b_k(z-a)^k.$$

所以$f(z)$ 在a 点的洛朗展开为

$$f(z)=\sum_{k\geq 0}b_k(z-a)^{k-m}.$$

既然$b_0\neq 0$，a 为m 阶极点。

（3）由（1）与（2）立即得到。

例子10. 求

$$f(z)=\frac{(z-5)\sin z}{(z-1)^2z^2(z+1)^3}.$$

的奇点，并且确定类型。

解. $1,0,-1$ 分别为2，1，3阶极点。

例子11. 求

$$f(z)=\cos(\frac{1}{z+i}).$$

的奇点，并且确定类型。

解. 本性奇点。

1.6.1 无穷远点

如果$f(z)$ 在无穷远点∞的去心邻域上解析，则我们称∞ 为f 的奇点。我们通常用变换$\xi=\frac{1}{z}$ 将无穷远点变换为0 点。将$f(\frac{1}{\xi})$ 在0 点洛朗展开

$$f(\frac{1}{\xi})=\sum a_n\xi^n=\sum b_n z^n.$$

其中$b_n=a_{-n}$。称$z=\infty$ （$\xi=0$）为

(1) 可去奇点：$b_n=0,n\geq 1$；

(2) m阶极点(m 为正整数)：满足$b_n=0,n\geq m+1$，$b_m\neq 0$；

(3) 本性奇点：无穷多$n\geq 1$，$b_n\neq 0$。

同样，我们有如下判别法：

(1) ∞ 为可去奇点等价于$\lim_{z\to\infty}f(z)$ 存在；

(2) ∞ 为极点等价于$\lim_{z\to\infty}f(z)=\infty$；

(3) ∞ 为本性奇点等价于$\lim_{z\to\infty}f(z)$ 不存在且不为∞。

例子12. *求积分*

$$\int_{|z|=100}\frac{z^2}{1+z+z^2+z^3}dz.$$

解. *注意奇点的位置。变换*$\xi=\frac{1}{z}$*，得到*

$$\int_{|z|=100}\frac{z^2}{1+z+z^2+z^3}dz=\int_{|\xi|=1/100}\frac{1}{\xi(1+\xi+\xi^2+\xi^3)}d\xi=2\pi i\frac{1}{1+\xi+\xi^2+\xi^3}|_{\xi=0}=2\pi i.$$