1 复数

1.1 复数

我们从一个二次方程开始：

$$z^2+1=0.$$

该方程的解为：

$$\pm\sqrt{-1}.$$

记$i=\sqrt{-1}$ 称为虚数单位，相应的$ai, a\in\mathbb{R}$ 称为纯虚数。虚数的概念由卡尔达诺于16世纪引入，当时主要为了解三次方程。卡尔达诺公式：解$z^3+pz+q=0$，设$\Delta=(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3$ 则方程的解为

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}.$$

去$p=-3, q=0$，则上式变为

$$\sqrt[3]{\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{-\sqrt{-1}}=0.$$

所以0 是它的根。

1.1.1 代数表示：四则运算

代数表示： $z=x+iy$，其中x, y 为实数，x 称为z 的**实部**记为$\mathrm{Re}z=x$；y 称为z 的**虚部**记为$\mathrm{Im}z=y$；复数运算满足一般实数运算的所有法则（交换律，结合律，分配律等，仅需注意$i^2=-1$），具体而言：设$z_1=x_1+y_1i, z_2=x_2+y_2i$，

加减法： $z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+(y_1\pm y_2)i$;

乘法： $z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i$;

除法： $\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}i$, 其中$\bar{z}=x-yi$ 称为z 的**共轭**。

复数的四则运算正好与某一类矩阵的运算对应：反对称矩阵：

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

可以验证该类矩阵的四则运算与复数完全一致,共轭相当于矩阵做对称运算，矩阵的行列式$=x^2+y^2$ 为复数模的平方。

注意复数不能用**常规的方式比较大小**：原因，如果能比较大小，则必然存在所谓大于零的区域A: A 应该满足以下条件：（1）$a, b\in A$ 则$a+b\in A$;(2)非零的$a, -a$ 有且只有一个在A 里；（3）$a, b\in A$ 则$ab\in A$。这是由实数里面比较大小抽象出来的性质。然而复数里并不存在这种性质：假设复数里有这种A，我们可以说明$i\notin A$，否则$i^3=-i\in A$，从而$i, -i\in A$，这是不可能的。同样可以说明$-i\notin A$。所以这样的A 不存在，也就没法比较大小。

1.1.2 共轭复数

共轭是复数特有的运算形式，其符号是复数上面加一横（$z \to \bar{z}$：$\overline{x+iy} = x - iy$）；共轭有以下运算规律

- $\bar{\bar{z}} = z$；
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$；
- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$；$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$；
- $|z|^2 = x^2 + y^2 = z\bar{z}$, 称$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ 为复数z 的模；
- $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$, z 为实数等价于$z = \bar{z}$；
- $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, z 为虚数等价于$z = -\bar{z}$；
- $|z|^2 = z\bar{z}$.

例子1. 设$z = x + iy$, $y \neq 0$, $z \neq \pm i$。证明：当且仅当$x^2 + y^2 = 1$ 的时候，$\frac{z}{1+z^2}$ 是实数。

Proof. $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数等价于$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$。即

$$z + z\bar{z}^2 = \bar{z} + \bar{z}z^2.$$

即

$$(z - \bar{z})(1 - z\bar{z}) = 0.$$

所以要么$z = \bar{z}$此时z 为实数，但是$y = 0$ 与条件不符舍去；要么$\bar{z}z = 1 = |z|^2$，即z 位于单位圆周上。 □

例子2. 证明实多项式的根总是共轭存在。

Proof. 设$P(z) = z^n + a_z z^{n-1} + \cdots + a_n$ 为n 次实的多项式，并且z_0 为它的一个根，则

$$P(\bar{z}_0) = \overline{P(z_0)} = 0.$$

所以$\bar{z}_0$ 也是它的根。 □

1.1.3 几何表示

向量表示： z 看作复平面上的一向量，作为向量其最大好处是可以任意平移向量。向量的长度称为复数的模长，记为$|z|$；其取值为$(\sqrt{x^2+y^2})$；向量的倾角称为复数的辐角，可以看出给定一个非零复数，其辐角的取值有无穷多并且以2π 为周期，我们经常约定位于区间$(-\pi, \pi]$ 之间的辐角取值称为z 的辐角的主值；用$arg(z)$ 表示辐角主值，用$Arg(z)$ 表示辐角全体，他们仅对$z \neq 0, \infty$ 有定义；辐角与辐角主值有如下关系：

$$Arg(z) = arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

辐角有如下表达式：设$z=x+yi$，$xy\neq 0$，则

$$arg(z)=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x}, & z\text{ 在第一象限；}\\ \pi+\arctan\frac{y}{x}, & z\text{ 在第二象限；}\\ -\pi+\arctan\frac{y}{x}, & z\text{ 在第三象限；}\\ \arctan\frac{y}{x}, & z\text{ 在第四象限。}\end{cases}$$

作为向量是没法比较大小的（复数之间没法比较大小），但可以比较向量的长度，也就是模长；

- 如果将复数看成向量，则加法减法满足平行四边形法则或者三角形法则；容易看出复数的模满足三角不等式，即

  $$|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|.$$

  除此之外还满足

  $$|z_1-z_2|\geq||z_1|-|z_2||.$$

指数表示、三角表示： $z=re^{i\theta}=r\cos\theta+ir\sin\theta$，$r\in[0,+\infty),\theta\in\mathbb{R}$，$r$ 为复数的模长；θ 为复数的辐角。

- 如果用指数形式表示复数，则复数的乘法（除法）有简单的形式（模相乘（相除），辐角相加（相减）——棣莫弗定理）；如果用指数表示复数，则幂次有如下公式

  $$(re^{i\theta})^n=r^ne^{in\theta},n\in\mathbb{Z}.$$

  例子：$(1+i)^{2020}=(\sqrt{2})^{2020}e^{i\frac{\pi}{4}\times 2020}=-2^{1010}$. 利用复数的乘法可以轻松获得很多三角等式，例如：

  $$e^{i\theta}e^{i\phi}=\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi+i(\cos\theta\sin\phi+\sin\theta\cos\phi)=e^{i(\theta+\phi)}=\cos(\theta+\phi)+i\sin(\theta+\phi).$$

  通过对照，可以得到：

  $$\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi=\cos(\theta+\phi)$$

  和

  $$\cos\theta\sin\phi+\sin\theta\cos\phi=\sin(\theta+\phi).$$

- 复数的开方的取值一般并不唯一（0 是例外），例如 $\sqrt[n]{z},n\in\mathbb{N}$ 表示复数范围内所有满足以下方程的w,

  $$w^n=z.$$

  假设w 的指数表示为$w=re^{i\theta}$ （θ 为辐角主值，当然也可以是其他辐角），则

  $$r^n=|z|,n\theta=Arg(z)=2k\pi+arg(z).$$

  当$z=0$ 时候，$w=0$；而当$z\neq 0$ 的时候，有n 个解

  $$(\sqrt[n]{|z|})e^{\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)i},k=0,1,\cdots,n-1.$$

  需要注意前后 $\sqrt[n]{}$ 的含义是不一样的，我们用圆括号加以区分，在没有混淆的情况下，并不需要特别说明。

- 在指数表示下，共轭运算相当于改变辐角的符号：$\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$.

例子3. 用复数证明余弦定理：

Proof.

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} = |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2).$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(|z_1||z_2|e^{i(\theta_1-\theta_2)}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2|\cos\theta.$$

□

例子4. 证明平行四边形对角线的平方和等于边的平方和。

Proof. 不妨设平行四边形的四个顶点分别为$0, z_1, z_2, z_1 + z_2$。则仅需说明

$$2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2.$$

实际上

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2.$$

同理

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2.$$

两式相加既得。 □

例子5. 已知正三角形的两个顶点为z_1, z_2，求第三个顶点z_3？

解. $z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)e^{\pm\frac{\pi}{3}i}$。所以

$$z_3 = z_1 + (z_2 - z_1)(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i).$$

所以

$$z_3 = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)z_1 + (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)z_2 \text{ 或者} (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)z_1 + (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)z_2.$$

1.2 复数列的极限

定义. 设z_n 为复数列，z_0 为复数。

- 如果$\lim_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0$，就称$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$，也就是在复平面上$z_n$ 无限靠近z_0；
- 如果$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$，就称$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$，也就是在复平面上$z_n$ 无限远离0。

当然我们也可以用极限语言来表述：

- 对任意$\epsilon > 0$，存在自然数N 使得$|z_n - z_0| < \epsilon$ 对任意$n > N$ 成立；
- 对任意$M > 0$，存在自然数N 使得$|z_n| > M$ 对任意$n > N$ 成立。

定义(邻域). 设z_0 为复数，z_0 的邻域是指包含z_0 的开集；∞ 的邻域是指包含“∞”的开集。例如，

$$\{z : |z| < 1\} \text{ 是0 的邻域;}$$

$$\{z : |z| > 1\} \text{ 是}\infty \text{ 的邻域.}$$

用邻域的概念可以对极限有更直观的了解：

- $\lim_{n\to+\infty} z_n \to z_0$ 当且仅当对z_0 的任何领域U，仅有有限个$z_n \notin U$；也就是说从某个z_n 开始其后面的所有元素都在该邻域内。

定理. 设$z_n = x_n + iy_n, z_0 = x_0 + iy_0$ 为复数，则$\lim_{n\to+\infty} z_n \to z$ 等价于$\lim_{n\to+\infty} x_n \to x$ 并且$\lim_{n\to+\infty} y_n \to y$。但这对于极限是无穷的情况并不成立，例如：

$$z_{2k} = 2k, z_{2k+1} = (2k+1)i.$$

要看$z_n \to \infty$ 是否成立，只要看它的模是否趋于“$+\infty$”：即，

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \infty \text{ 等价于 } \lim_{n\to+\infty} |z_n| = +\infty.$$

同样地，要看$z_n \to 0$ 是否成立，只要看它的模是否趋于“0”：即，

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = 0 \text{ 等价于 } \lim_{n\to+\infty} |z_n| = 0.$$

一般而言我们将常规复平面加上∞ 组成一个新的空间，称为闭复平面。

复平面：所有复数的集合；**闭复平面**：所有复数加上一个“∞”。

我们有以下约定

- $\infty + z = \infty, \forall z \neq \infty$；$\infty + \infty$ 没有意义；
- $\infty \times z = \infty, \forall z \neq 0$；$\infty \times 0$ 没有意义；
- $\frac{z}{\infty} = 0, \forall z \neq \infty$；$\frac{\infty}{\infty}$ 没有意义；
- $\frac{z}{0} = \infty, \forall z \neq 0$；$\frac{0}{0}$ 没有意义。

闭复平面与球面（称为复球面）存在连续一一对应的关系，因为球面是闭的，因而闭复平面是“闭”的。

例子6. 设$z_n \to z_0$，$\arg z$ 表示主值。证明

(1) $\bar{z}_n \to z_0$；

(2) 当$z_0 \neq 0$ 和负数的时候，$argz_n \to argz_0$.

证明. （*1*）设$z_n = x_n + y_n i$，则$\bar{z}_n = x_n + (-y_n)i$。所以$\bar{z}_n \to z_0$ 等价于$x_n \to x_0$ 并且$-y_n \to -y_0$ 等价于$x_n \to x_0$ 并且$y_n \to y_0$ 等价于$z_n \to z_0$。

（*2*）可以用极限语言。当ϵ 足够小的时候，当$z_0 \neq 0$ 和负数的时候，与z_0 的辐角主值相差小于ϵ 的复数全体其实是z_0 的一个角形邻域。

1.3 区域与曲线

定义(区域). 复平面的一个子集D称为区域如果（1）它是开集；（2）它是连通的；根据连通性的不同，又分为单连通区域（没有洞）和多连通区域（带洞）。

例如：单位圆内部$|z|<1$ 是单连通区域；但是如果我们把$|z|<1$的零点挖掉，那它就变成了多连通区域。一般区域都是曲线围成的：

定义(约当曲线：曲线的参数表示). 复平面上的曲线是指连续映射$z(t)=x(t)+iy(t):[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$；如果曲线的取值除首尾可能一样外其他都不同，称之为若当曲线或简单曲线；特别地，如果若当曲线首尾相连，则称之为若当闭曲线或简单闭曲线。

例子7. 用参数表示直线，圆周等。

- 直线：$z(t)=z_0t+z_1, t\in\mathbb{R}$ 表示过z_1，方向为z_0 的直线；
- $z(\theta)=re^{i\theta}, r>0, \theta\in[0,2\pi]$ 表示半径为r 的圆周，是简单闭曲线；

简单闭曲线把复平面分成内外两个区域（看起来理所当然但证明及其困难）。

复平面上的区域通常用复数的运算和不等式表示：例如：

- 上半平面：$\mathrm{Im}z>0$；
- 单位圆内部：$|z|<1$；
- 单位圆内部去掉0 点：$0<|z|<1$；
- 带状区域：$1<\mathrm{Re}z<2$；
- 圆环：$r<|z-a|<R$；
- 椭圆区域：$|z-a|+|z-b|<c$。

用复数表示曲线：

例子8. 用复数表示直线$ax+by+c=0, a,b,c\in\mathbb{R}$；求$Re\frac{1}{z}=\alpha$ 所代表的曲线。

解. *(1)* 设$z=x+iy$，则

$$x=Rez=\frac{z+\bar{z}}{2}, y=Imz=\frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

所以

$$a\frac{z+\bar{z}}{2}+b\frac{z-\bar{z}}{2i}+c=0.$$

整理得：

$$\frac{a-ib}{2}z+\frac{a+ib}{2}\bar{z}+c=0.$$

如果我们用$\alpha=\frac{a+ib}{2}$，则上式写为

$$\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+c=0.$$

(2) 设$z = x + iy$，则

$$Re\frac{1}{z} = Re\frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \alpha.$$

如果$\alpha = 0$，则所代表曲线为$x = 0, y \neq 0$ 的直线（去掉0 点）。如果$\alpha \neq 0$，则、

$$(x - \frac{1}{2\alpha})^2 + y^2 = (\frac{1}{2\alpha})^2.$$

为一个圆心在$\frac{1}{2\alpha}$，半径为$\frac{1}{2|\alpha|}$的圆。

作业：