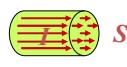


第四章主要内容

安培定律	$d\bar{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\bar{l}_2 \times (I_1 d\bar{l}_1 \times \bar{e}_r)}{r_{12}^2} = I_2 d\bar{l}_2 \times d\bar{B}_1$
闭合回路	$\bar{F}_{21} = -\bar{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \oint_{L_2} \frac{I_2 d\bar{l}_2 \times (I_1 d\bar{l}_1 \times \bar{r}_{12})}{r_{12}^3}$
	$\bar{F} = \iint_S \bar{i} dS \times \bar{B}$ $i = \frac{I}{L}$ 
	$\bar{F} = \iiint_V \bar{j} dV \times \bar{B}$ $j = \frac{I}{S}$ 
电荷在电磁场中的受力	$\bar{F} = q\bar{E} + q\bar{v} \times \bar{B}$

1

毕奥—萨伐尔定律

$$\bar{R} = R \bar{e}_R$$

$d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} Id\bar{l} \times \frac{\bar{e}_R}{R^2}$	$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{Id\bar{l} \times \bar{R}}{R^3}$ 叠加原理
$d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \bar{i} dS \times \bar{e}_R$	$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\bar{i} dS \times \bar{R}}{R^3}$
$d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \bar{j} dV \times \bar{e}_R$	$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\bar{j} dV \times \bar{R}}{R^3}$

2

静磁场的基本定理和方程式

高斯定理(磁场无源)	$\iint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0$ 积分形式
	$\nabla \cdot \bar{B} = 0$ 微分形式
安培环路定理(磁场有旋)	$\oint_L \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 \sum_i I_i = \mu_0 \iint_S \bar{j} \cdot d\bar{S}$ 积分形式
	$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{j}$ 微分形式

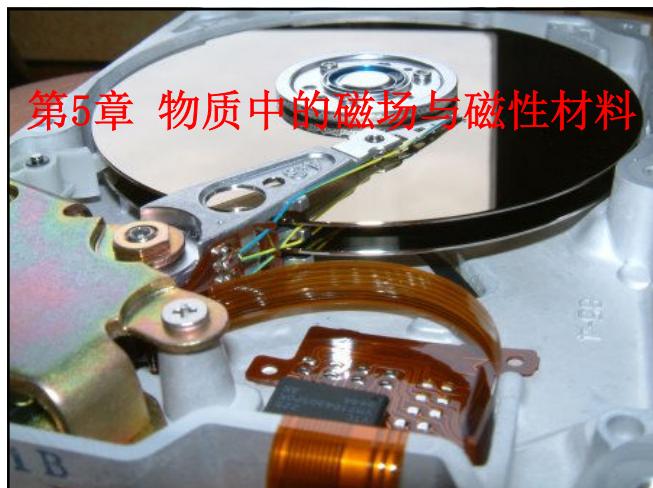
3

磁矢势

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A} \quad \nabla \cdot \bar{A} \equiv 0$$

$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{Id\bar{l}}{R}$	{	$\oint_L \bar{A} \cdot d\bar{l} = \iint_S \bar{B} \cdot d\bar{S}$
$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{id\bar{S}}{R}$		
$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\bar{j} dV}{R}$		

4



第5章 物质中的磁场与磁性材料

§ 5-1 磁介质及其磁化

请为我揭示磁石的
 奥秘，
 那仅次于爱与恨的
 奥秘。
 歌德(1749-1832)
 德国著名思想家、
 作家、科学家

中国有色宝石网
Colored Gemstone

6

磁介质的研究和发展

- 寻求磁介质的本构方程及边值关系

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{B} = 0 \\ \nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{j} \end{cases} + \text{本构方程}$$

$$\begin{cases} \oint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0 \\ \oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 \sum I \end{cases} + \text{边界条件}$$

7

1. 法拉第的研究

- 早在1778年，丹麦人 **S. J. Brugmans** 在实验中发现铋Bi被磁极排斥，提出抗磁体的概念，但未引起人们的注意。
- 1827年，贝利夫再次报道铋和锑被磁极排斥。
- 1845年12月，法拉第在《论新磁作用兼论所有物质的磁状态》中分析了抗磁体的性质，对抗磁体和顺磁体进行了分类，发现绝大部分的物质都是抗磁体。之后，他用磁化率的概念解释了顺磁体和抗磁性。

8



在室温下热解碳因抗磁性产生的磁悬浮现象

9



2. 皮埃尔·居里 (1859—1906)

- 1895年居里先生发现了关于抗磁性和顺磁性的两个定律，他的博士论文就是《物体在不同温度下的磁性》
- 同年与斯科若朵夫斯基结婚，测定了各种物质的磁化率随温度的变化规律。
- 居里点(居里温度Tc):** 超过居里点温度，顺(铁)磁性消失。

因发现了钋和镭两种元素。1903年居里夫妇和贝克勒尔共同获得诺贝尔物理学奖。

10

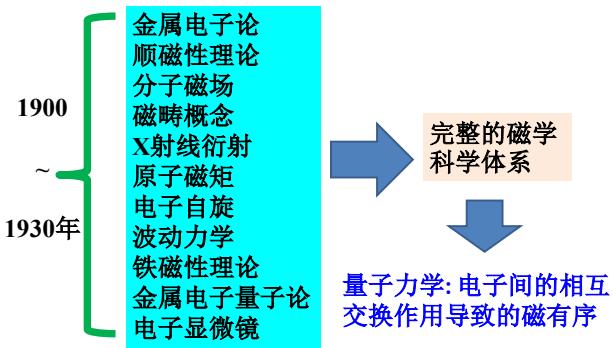
3. Weiss的铁磁性理论(1865-1940)

- 外斯(P. E. Weiss)在1907年首先提出铁磁性的分子场理论和磁畴假说。
- 根据这个理论，在居里温度以下，铁磁物质内部分为若干饱和磁化区域——磁畴，每一磁畴内部由于强分子场作用，各原子磁矩排列成同一方向，即发生自发磁化。
- 无外磁场时，各磁畴的自发磁化强度、方向是杂乱的，互相抵消，总体不表现宏观磁化强度。
- 在较弱的外磁场作用下，就足以使各磁畴的自发磁化强度趋向一致，表现出一定的宏观磁化强度。
- 现代实验完全证明了磁畴是确实存在的，约为 **0.01~0.1 cm** 的横向宽度。

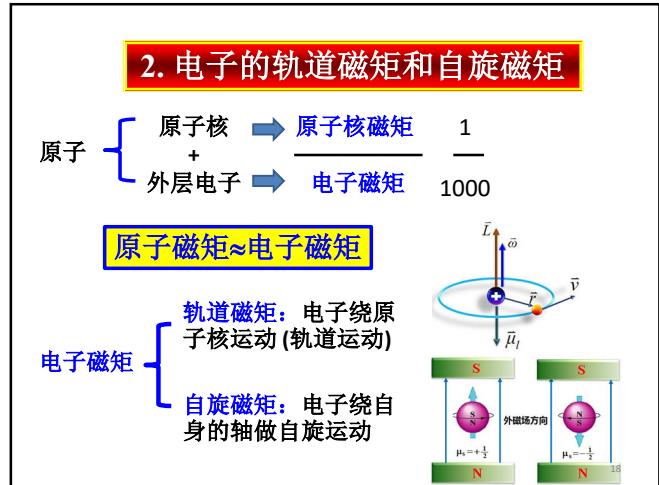
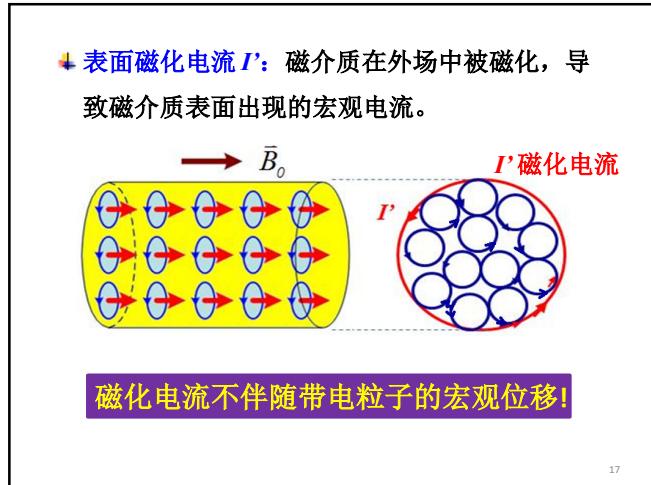
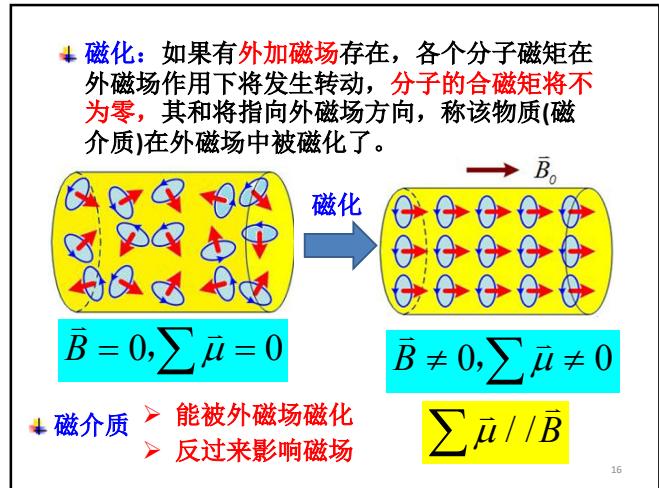
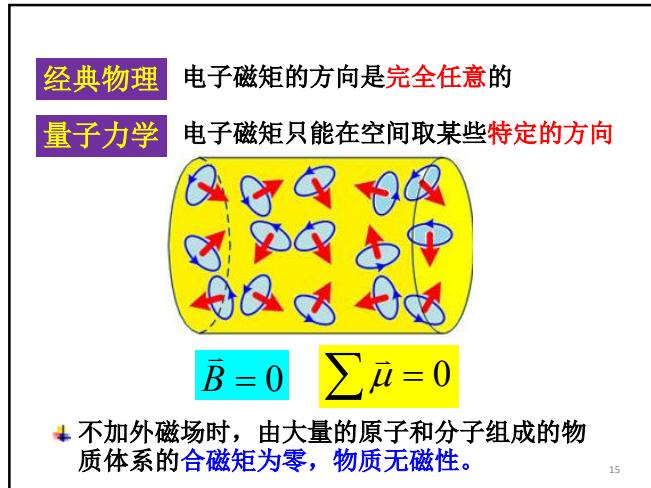
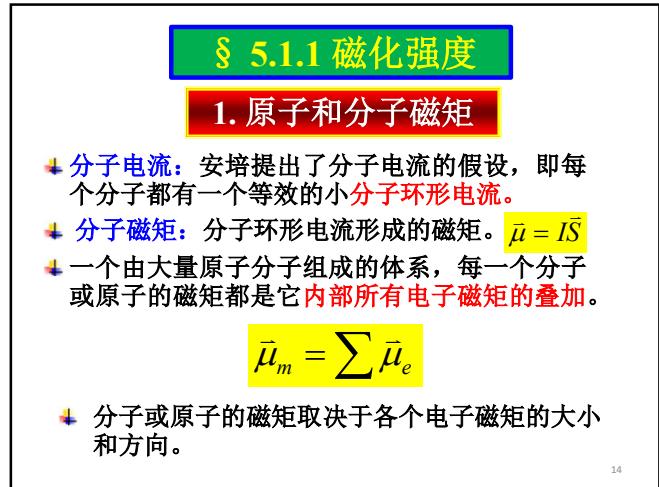
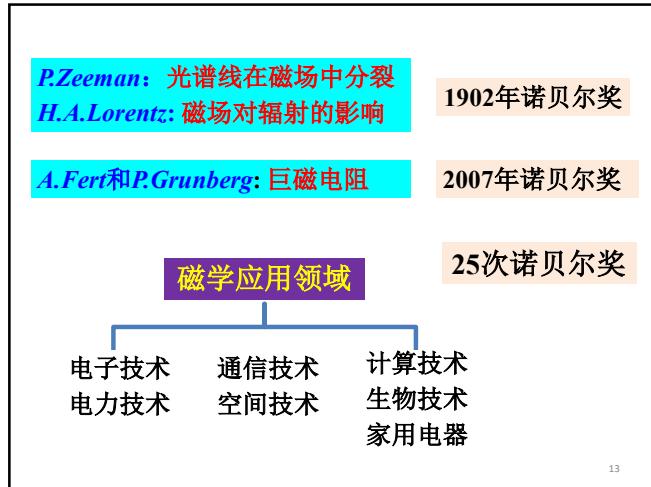


11

4. 完整的磁学科学体系的形成(1865-1940)



12



经典物理中电子的轨道磁矩

- 电子受原子核的库仑力作圆周运动，以H原子为例

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mr}}$$

- 电子做圆周运动(轨道运动)相当于一个环形电流，电流强度为：

$$i = \frac{q}{T} = \frac{e}{2\pi r/v} = \frac{e^2}{4\pi r \sqrt{\pi\varepsilon_0 mr}}$$

- 电子的轨道磁矩

$$\vec{\mu}_i = i\vec{S} = i\pi r^2 \vec{n} = -\frac{e^2}{4} \sqrt{\frac{r}{\pi\varepsilon_0 m}} \vec{n}$$

↑
n是S的法线方向，与电流流动方向的右手系方向一致
电子运动方向与电流方向相反，取负号

19

量子力学中电子的轨道磁矩和自旋磁矩

- 电子的轨道磁矩 μ_l 与电子轨道运动角动量 L_l 的关系

$$\bar{\mu}_l = -\frac{e}{2m} \bar{L}_l \quad L_l = \sqrt{l(l+1)}\hbar \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- 电子的自旋磁矩 μ_s 与自旋角动量 S 间的关系

$$\bar{\mu}_s = -\frac{e}{m} \bar{L}_s \quad L_s = \frac{g}{2} S(S+1)\hbar \quad \begin{array}{l} \text{自旋量子数 } S = \pm l/2 \\ \text{回磁比 } g = 2.0023193 \end{array}$$

实验得到电子的自旋磁矩为 $\mu_s = 9.28485110^{-24} A \cdot m^2 \approx 1.0011 \mu_B$

$$\mu_B = \frac{he}{2m} = 9.273410^{-24} A \cdot m^2 \quad \mu_B \text{ 称为波尔磁子}$$

20

3. 磁化强度

- 磁化强度：单位体积内的各分子磁矩之和

$$\bar{M} = \frac{\sum \bar{\mu}_m}{\Delta V}$$

ΔV : 远大于分子间的平均距离(微观足够大)，远小于 M 的非均匀尺度(宏观足够小)

无外场，未被磁化的磁介质

$$\sum \bar{\mu}_m = 0, \quad \bar{M} = 0$$

被磁化的磁介质

$$\left. \begin{array}{l} \sum \bar{\mu}_m \neq 0, \quad \bar{M} \neq 0 \\ \frac{\partial \bar{M}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{M}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{M}}{\partial z} = 0, \quad \bar{M} = \bar{C} \\ \bar{M} = \bar{M}(x, y, z) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{均匀磁化} \\ \text{非均匀磁化} \end{array}$$

21

- 分子的平均磁矩 $\bar{\mu}_a$ $\bar{\mu}_a = I_a \bar{S}_a = \frac{\sum \bar{\mu}_m}{n \Delta V}$ n 为单位体积中的分子数

$$\text{磁化强度} \quad \bar{M} = \frac{\sum \bar{\mu}_m}{\Delta V} = n \bar{\mu}_a = n I_a \bar{S}_a$$

讨论：

- ① 磁化强度为矢量，方向代表磁化的方向，大小代表磁化的程度
- ② $M \neq 0$ 表示磁介质处于磁化状态， M 值越大，与外磁场的相互作用越强，相应物质的磁性越强。
- ③ $M=0$ 非磁化状态，可能原因：(a) 分子固有磁矩为 0；(b) 分子磁矩的取向杂乱无章 $\sum \mu_m = 0$ 。

22

【例15】一均匀磁化棒直径为 10 mm，长为 30mm，磁化强度为 1200 A/m，求它的磁矩 μ 。

【解】 $\bar{M} = \frac{\sum \bar{\mu}_m}{\Delta V}$

$$\sum \mu_m = M \Delta V$$

$$= M \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 L$$

$$= 1200\pi \left(5 \times 10^{-3}\right)^2 \times 0.03$$

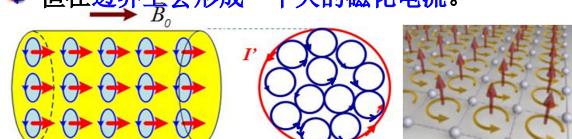
$$= 2.827 \times 10^{-3} (Am^2)$$

23

§ 5.1.2 磁化电流

1. 磁化电流

- 材料被磁化后，内部每个原子或分子都形成一个个圆形的磁化电流。
- 材料内部有大量的原子或分子，这些原子或分子电流与周围的原子或分子电流正好方向相反、相互抵消。
- 但在边界上会形成一个大的磁化电流。



磁化电流 I' : 通过以 L 为边界的、面积为 S 的总分子电流。

对 I' 有贡献的只是与边界相交的分子电流

取 L 上一段圆弧 dl , 分子磁矩 μ_a 与 dl 的夹角为 θ 。则对 I' 有贡献的分子中心应位于以 dl 为轴, $S_a \cos \theta$ 为底的圆柱内, 它们对 I' 的贡献为:

$$dI' = I_a n dV = n I_a \bar{S}_a \cdot d\bar{l}$$

25

$$I' = \oint_L dI' = \oint_L n I_a \bar{S}_a \cdot d\bar{l} \quad \boxed{I' = \oint_L \bar{M} \cdot d\bar{l}}$$

$\bar{M} = n I_a \bar{S}_a$

磁化电流 I' 与磁化强度 M 的积分表达式

$$I' = \oint_L \bar{M} \cdot d\bar{l}^{stocks} = \iint_S (\nabla \times \bar{M}) \cdot d\bar{S} \quad \boxed{\therefore \bar{j}' = \nabla \times \bar{M}}$$

$I' = \iint_S \bar{j}' \cdot d\bar{S}$

磁化电流密度 j' 与磁化强度 M 的微分表达式

26

在均匀磁化介质内部, 通常 M 为常矢量, 对任意的闭合回路, 有

$$I' = \oint_L \bar{M} \cdot d\bar{l} = \bar{M} \cdot \oint_L d\bar{l} = 0$$

$$\bar{j}' = \nabla \times \bar{M} = 0$$

- 均匀磁介质内, 磁化电流 I' 及磁化电流密度 j' 将为零;
- 非均匀磁化的磁介质, 内部可能存在磁化电流。

27

2. 磁化电流的面密度

- 均匀磁化时, 所有的分子磁矩都沿同一方向排列, 在介质内部没有磁化电流分布($I'=0, j'=0$), 只在介质的表面上才存在着面分布的磁化电流。
- 介质磁化后, 在介质表面上和两种不同介质的界面上, 都会有面分布的磁化电流。

28

磁化面电流(I_s 沿着柱面流动)

顺磁质: 磁化面电流 I_s 和螺线管导线中的电流 I ($\rightarrow B_0$) 方向相同
抗磁质: 磁化面电流 I_s 和螺线管导线中的电流 I ($\rightarrow B_0$) 方向相反

29

两种不同磁介质的界面

磁化面电流密度 i' $i' = \frac{I'}{L}$ 在界面处做一环路:

$$I' = \oint_L \bar{M} \cdot d\bar{l} \quad i' L = (M_{1r} - M_{2r}) L + M \delta h$$

$$i' = M_{1r} - M_{2r} \quad \delta h \rightarrow 0$$

或 $\bar{i}' = (\bar{M}_1 - \bar{M}_2) \times \bar{n}$

磁化面电流密度 i' 极化电荷面密度 σ_p

$$\sigma_p = (\bar{P}_1 - \bar{P}_2) \cdot \bar{n}$$

30

磁介质表面(与真空分界面)

同理，在界面处做一环路：

$$I' = \oint \bar{M} \cdot d\bar{l}$$

$$i' L = M_\tau L + M \delta h + 0$$

$$i' = M_\tau$$

$$\delta h \rightarrow 0$$

$$\bar{i}' = \bar{M} \times \bar{n}$$

$$\sigma_p = \bar{P} \cdot \bar{n}$$

磁化面电流密度 i' 极化电荷面密度 σ_p

3. 磁化电流和传导电流比较

共同点：

- 磁化电流和传导电流均产生磁场；
- 均受外磁场作用。

区别：

- 传导电流有体电流也有面电流，磁化电流是约束电流，一般存在于介质界面上；
- 传导电流产生焦耳热；磁化电流不产生焦耳热。

【例16】如图均匀磁化棒，磁化强度为 M ，求在中间和两侧产生的磁感应强度。

【解】两端 A 、 B 侧面， $M \parallel n$

$$\bar{i}'_A = \bar{i}'_B = \bar{M} \times \bar{n} = 0 \quad (\theta = 0, \pi) \text{ 无磁化电流}$$

中间 C 侧面， $M \perp n$

$$\bar{i}'_C = \bar{M} \times \bar{n} = M \bar{e}_\tau \quad (\theta = \pi / 2)$$

此磁化电流 i'_c 相当于螺线管的电流 nI

$$B_c = \mu_0 i'_c = \mu_0 M$$

$$B_A = B_B = \frac{1}{2} \mu_0 i' = \frac{1}{2} \mu_0 M$$

33

不同的磁介质界面上，磁化面电流分布与界面形状、磁化强度方向有直接关系

$$\bar{i}' = \bar{M} \times \bar{n}$$

不同侧面 i' 方向有明显差别

34

【例17】均匀磁化介质球，磁化强度为 M ，半径为 a ，求其磁化电流在轴线上产生的磁场。

【解】因均匀磁化，磁化强度 M 为恒矢量，只在球表面有面分布的磁化电流，以 M 方向为 z 方向，其电流面密度为：

$$\bar{i}' = \bar{M} \times \bar{e}_n = M \sin \theta \bar{e}_\phi$$

面电流密度与 θ 有关，赤道处 $\theta=90^\circ$ ，面电流密度最大；两极处 $\theta=0^\circ$ ， $i'=0$ 。

把整个球面分成许多环带，通过宽度为 $ad\theta$ 的环带上的电流 dI' 为：

$$dI' = i' ad\theta = Ma \sin \theta d\theta$$

俯视图

35

半径为 R 的电流环，在轴线上离圆心为 l 处产生的磁场为(4-1.pdf中例2)

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I}{(R^2 + l^2)^{3/2}}$$

环带半径： $R = a \sin \theta$

电流： $dI' = M a \sin \theta d\theta$

圆心距 P 点的距离： $l = z - a \cos \theta$

$$dB(z) = \frac{\mu_0}{2} \frac{(a \sin \theta)^2 M a \sin \theta d\theta}{[(a \sin \theta)^2 + (z - a \cos \theta)^2]^{3/2}}$$

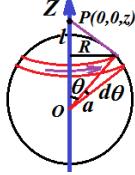
$$= \frac{\mu_0 M a^3}{2} \frac{\sin^3 \theta d\theta}{(a^2 + z^2 - 2az \cos \theta)^{3/2}}$$

36

则轴线上任一点 P 的磁场为:

$$B(z) = \int dB(z) = \frac{\mu_0 Ma^3}{2} \int_{\pi}^0 \frac{\sin^3 \theta d\theta}{(a^2 + z^2 - 2az \cos \theta)^{3/2}}$$

$$\text{令 } k = \cos \theta, dk = -\sin \theta d\theta$$



$$B(z) = -\frac{\mu_0 Ma^3}{2} \int_1^{-1} \frac{(1-k^2) dk}{(a^2 + z^2 - 2azk)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 M}{3z^3} \left((a^2 + z^2) [z+a] - [z-a] \right) - za [z+a] + [z-a]$$

37

分两种情况讨论:

(1) P 点在球外

$$|z-a| = z-a$$

$$B(z) = \frac{2\mu_0 Ma^3}{3|z|^3} = \frac{\mu_0 m}{2\pi |z|^3}$$

式中 $m = MV = M \frac{4}{3}\pi a^3$ 是整个球内所有分子的分子磁矩总和

即一个均匀磁化的球在球外的磁场等效于一个磁矩为 m 的圆电流的磁场。

$$(2) P \text{ 点在球内 } |z-a| = a-z \quad B(z) = \frac{2\mu_0 M}{3}$$

B 大小相等, 与考察点在 z 轴上的位置无关, 方向平行于磁化强度。

38

§ 5.1.3 磁介质存在时的高斯定理和环路定理

1. 磁介质中磁场的高斯定理

传导电流 $I \rightarrow B_\theta$

介质磁化 \rightarrow 磁化强度 $M \rightarrow$ 磁化电流 $I' \rightarrow B'$

磁介质的作用: 提供磁化电流 I' 作为附加场源。

$$\text{总磁感应强度 } \bar{B} = \bar{B}_0 + \bar{B}'$$

39

B' 也遵循毕奥-萨伐尔定律

磁化电流和传导电流在产生磁场方面完全一样

$$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = \oint_S \bar{B}_0 \cdot d\bar{S} + \oint_S \bar{B}' \cdot d\bar{S} = 0$$

$$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0 \quad \nabla \cdot \bar{B} = 0$$

磁介质中磁场的高斯定理依然成立

40

2. 磁介质中磁场的环路定理

磁介质的作用: 提供磁化电流 I' 作为附加场源

$$\oint_l \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 \sum I \quad I = I_0 + I' \quad \sum I' = \oint_l \bar{M} \cdot d\bar{l}$$

$$\oint_l \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 \left(\sum I_0 + \sum I' \right) = \mu_0 \sum I_0 + \mu_0 \oint_l \bar{M} \cdot d\bar{l}$$

$$\oint_l \left(\frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M} \right) \cdot d\bar{l} = \sum I_0 \quad \text{令 } \bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M} \quad H: \text{磁场强度}$$

$$\oint_l \bar{H} \cdot d\bar{l} = \sum I_0 \quad H \text{ 的环路积分仅与传导电流有关, 与磁化电流无关}$$

41

$$\text{真空中 } \bar{M} = 0, \quad I' = 0, \quad I = I_0, \quad \bar{B} = \bar{B}_0$$

$$\text{则 } \bar{H} = \frac{\bar{B}_0}{\mu_0} \quad \oint_l \bar{B}_0 \cdot d\bar{l} = \mu_0 \sum I_0 \quad \text{回到真空中磁场环路定律}$$

$$\oint_l \bar{H} \cdot d\bar{l} = \oint_S (\nabla \times \bar{H}) \cdot d\bar{S} = \sum I_0 = \oint_S \bar{j}_0 \cdot d\bar{S}$$

$$\therefore \nabla \times \bar{H} = \bar{j}_0 \quad \boxed{\text{介质中磁场的环路定理的微分形式}}$$

42

讨论:

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M}$$

是两矢量的迭加

- ◆ 磁介质存在时, 求 H 要比求 B 简便得多
- ◆ 磁场强度 H 与有电介质的静电场中引入的电位移矢量 D 相似, 都是辅助物理量
- ◆ 按磁荷的观点, H 反映磁场对单位磁荷的作用

43

磁介质存在时的静磁场

基本方程

$$\iint_L \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0$$

本构方程

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M}$$

磁化电流

$$I' = \oint_L \bar{M} \cdot d\bar{l}$$

$$\begin{aligned} \bar{j}' &= \nabla \times \bar{M} \\ \bar{i}' &= (\bar{M}_1 - \bar{M}_2) \times \bar{n} \end{aligned}$$

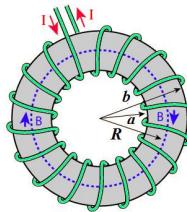
44

【例18】若螺绕环内充满磁介质, 已知磁化场的磁感应强度为 B_0 , 磁化强度为 M . 求磁感应强度 B .

【解】无介质时 $B_0 = \mu_0 n I_0$ B_0 为磁化场的磁感应强度
充满介质时, 设螺绕环的平均半径为 R , 总匝数为 N ,
根据介质中磁场的环路定理

$$\oint_L \bar{H} \cdot d\bar{l} = \sum I_0$$

$$\text{则 } H = \frac{N}{2\pi R} I_0 = n I_0 = B_0 / \mu_0$$



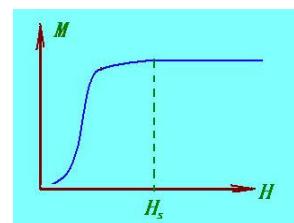
$$\text{由 } \bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M} \Rightarrow B = \mu_0 (H + M) = B_0 + \mu_0 M$$

45

§ 5.1.4 磁化规律

1. B 、 H 、 M 间的关系

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M} \\ \bar{B} &= \mu_0 (\bar{H} + \bar{M}) \\ \bar{M} &= \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{H} \end{aligned}$$



磁化曲线: $M-H$ 或 $B-H$ 的关系曲线

46

2. 磁化率

- ◆ 大多数磁介质是弱磁性的。
- ◆ 实验表明: 如果磁介质是各向同性的, 在外磁场不太强的情况下, 磁化强度 M 与磁场强度 H 成线性关系: $\bar{M} = \chi_m \bar{H}$

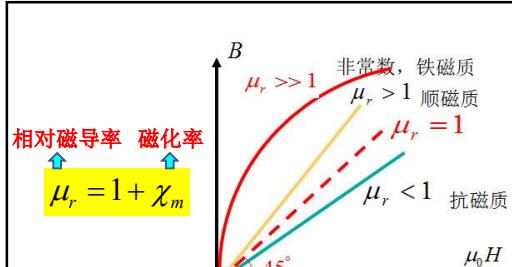
χ_m : 磁介质的磁化率或磁化系数

$$\bar{B} = \mu_0 (\bar{H} + \bar{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \bar{H} = \mu_0 \mu_r \bar{H} = \mu \bar{H}$$

μ_r 磁介质的相对磁导率 $\mu_r = 1 + \chi_m$

$\mu = \mu_0 \mu_r$ μ : 磁介质的磁导率或绝对磁导率

47



弱磁性材料

顺磁性材料: $\chi_m > 0$, $\chi_m \sim 10^{-4} - 10^{-5}$, $\mu_r > 1$

抗磁性材料: $\chi_m < 0$, $\chi_m \sim -(10^{-5} - 10^{-6})$, $\mu_r < 1$

强磁性材料

铁磁性材料: $\chi_m >> 0$, $\mu_r >> 1$

48

问 题

(1) 磁介质对磁场影响
(2) 各星球磁场的起源与大小
(3) 模拟各种情况下磁场的空间分布

作业: 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8 Thank you!

49