# 上节课主要内容

- 静电场的高斯定理

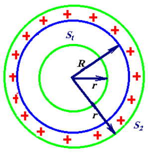
电场对任意封闭曲面的电通量，只决定于被包围在封闭曲面内部的电荷，且等于包围在封闭曲面内电量代数和除以 $\varepsilon_0$，与封闭曲面外的电荷无关。

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N(S内)} q_i = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho(r)\,dV = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

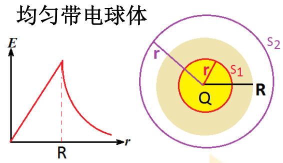


带电球壳



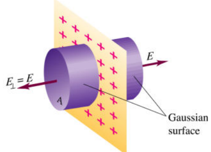
$$E = 0 \qquad (r<R)$$
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{e}_r \qquad (r>R)$$

均匀带电球体




$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r} \qquad (r<R)$$
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{e}_r \qquad (r>R)$$

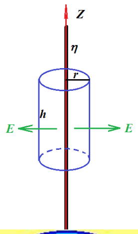
无限大带电平面




$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

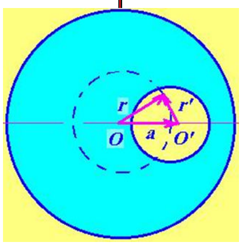


无限长带电细棒



$$\vec{E} = \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$$

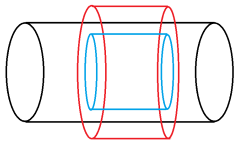
均匀带电球体中挖出的球形空腔



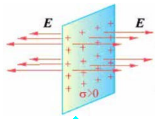
$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$
$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}-\vec{r}\,')$$
$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$$

填补法

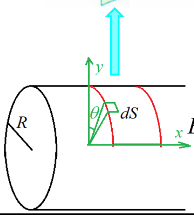




$$E_{tot} = \begin{cases} \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} & r>R \\ 0 & r<R \end{cases}$$



$$dE = \begin{cases} \sigma/2\varepsilon_0 & r=R+ \\ -\sigma/2\varepsilon & r=R- \end{cases}$$



$$E_{tot} - dE = \begin{cases} \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} - \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} & (r=R+) \\ 0-\left(-\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} & (r=R-) \end{cases}$$

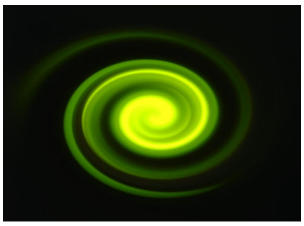


# § 1-5 环路定理

## 水流速度场的环量

设水中某处有旋涡，对任一闭合曲线 $L$，速度沿该闭合曲线一周的积分，称速度的环量，即：

$$\Gamma = \oint_L \vec{v}\cdot d\vec{l}$$

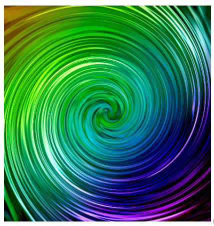




此处用流线表示如图中的圆闭合曲线（这只是一种近似，严格讲是螺旋线）。设 $v$ 在线上任一点的大小一样，则

$$\Gamma = \oint_L \vec{v}\cdot d\vec{l} = \oint_L v\,dl = vL = v2\pi R \neq 0$$

- 速度越大，速度的环量越大
- 环量描述了 $v$ 的旋转程度



# § 1.5.1 静电场做功

## 1. 静电场的环量

静电场 $E$ 的环量定义为:

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

式中$L$为一闭合曲线

- 对一般矢量场，环量反映了它的“旋转’程度;
- 但静电场的环量还具有特定的物理内容。



## 2. 静电场的功

试探电荷 $q_0$ 在静电场 $E$ 中，沿闭合路径 $L$ 缓慢移动，则受到的电场力$F$所作的功为：

$$A=\oint_L dA=\oint_L \vec{F}\cdot d\vec{l}=\oint_L q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}=q_0\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{A}{q_0}$$

静电场的环量=电场对单位电荷移动一个闭合回路所作的功

设 $E$ 是由点电荷 $q$ 所产生的静电场，则有

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r$$



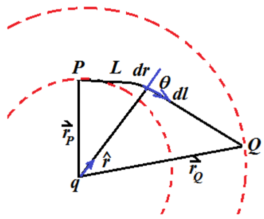
考虑闭合曲线 $L$ 的 $PQ$ 段，将 $q_0$ 沿 $L$ 从点$P$ 移到点 $Q$，电场 $E$ 作的功为

$$\vec{e}_r\cdot d\vec{l}=dr$$

$$A=q_0\int_P^Q \vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\int_P^Q \frac{1}{r^2}\vec{e}_r\cdot d\vec{l}=\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\int_P^Q \frac{dr}{r^2}$$

$$A=\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_p}-\frac{1}{r_Q}\right)$$

即单个点电荷产生的静电场对试探点电荷所作的功：只与试探电荷的起点和终点的位置有关，与路径 $L$ 无关。



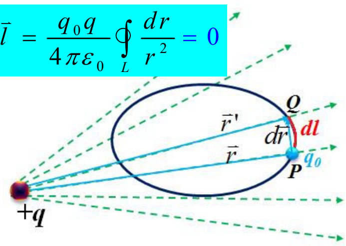



# § 1.5.2 静电场的环路定理

闭合环路：起点和终点位置相同

点电荷在静电场中移动一个闭合的环路 $L$，则有:

$$A=q_0\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_L \frac{dr}{r^2}=0$$






- 如果静电场不是由单个点电荷产生的，而是由某种确定的电荷分布，例如静止的点电荷系或带电体所产生的。
- 由叠加原理可知，整个带电系统产生的静电场的环量亦为零:

$$\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i \qquad \vec{e}_{ri}\cdot d\vec{l}=dr_i$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint\sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\vec{e}_{ri}\cdot d\vec{l}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\oint\frac{q_i}{r_i^2}dr_i$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$

环路定理的积分形式

- 静电场的环路定理：静电场的沿任意闭合回路的环流都为零。
- 静电场是无旋场。

**环路定理的物理意义**

- 静电场做功与路径无关，只与起点和终点的位置有关;
- 静电场对电荷在电场中沿任何闭合环路一周做功为零。

# 环路定理的微分形式

由数学的斯托克斯公式：

$$\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{S}$$

对任意闭合曲线 *L* 和 *L* 所包围的面积 *S* 都成立

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla\times\vec{E})\cdot d\vec{S}$$ 又 $$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

静电场环路定理的微分形式 $\nabla\times\vec{E}=0$ 静电场是无旋场

- 电场的这个性质来源于库仑力的有心力特性；而不是平方反比律。

13

$$\nabla\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

$$\nabla\times\vec{E}=0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=0 \end{cases}$$

14

【例17】已知 $E_x = ky$ 求电场*E*的其它分量

【解】

$$\nabla\times\vec{E}=0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}=\frac{\partial E_x}{\partial y}=k \Rightarrow E_y = kx + C_1$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x}=\frac{\partial E_x}{\partial z}=0 \Rightarrow E_z = C_2$$

15

【例18】利用环路定理证明静电场的电力线不可能是闭合曲线

【解】反证法：若电力线是闭合曲线，单位电荷沿电力线运动一周，则：

$$\vec{E}\cdot d\vec{l} = E\cos\theta dl = Edl > 0, \quad \because \cos\theta = 1$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} > 0$$

与静电场的环路定理 $\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$ 相矛盾

故电力线不可能是闭合曲线

16

$F \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow \nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

平方反比

库仑定理 ⇄ 高斯定理

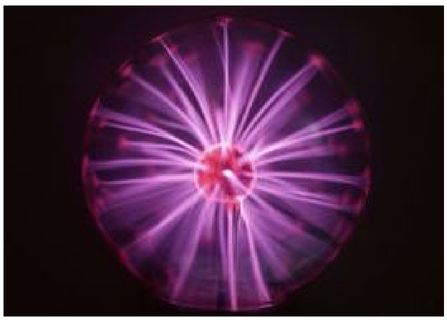
有心力

库仑定理 ⇄ 环路定理

$\vec{F} \propto \vec{e}_r \Rightarrow \nabla\times\vec{E} = 0$

17

# § 1.5.3 电 势 能

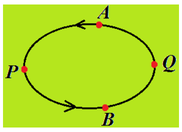


18

## 1. 静电场是保守力场

保守力(Conservative Force)：力对物体所做的功与物体运动路径无关，只与起点和终点的位置有关。其力场叫保守力场。

试探点电荷 $q_0$ 沿一周作的功为零，即：

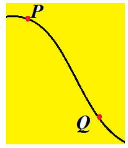



$$q_0 \oint_{QAPBQ} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \int_{QAP} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{QBP} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

由静电场的环路定理，即电场力作功与路径无关的性质，可知静电场是保守力场。



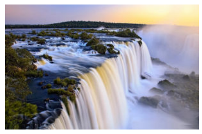
## 2. 静电场是有势场




### 重力势能

- 质量为 $m$ 的质点处在重力场中某个位置，它具有重力势能 $E_P = mgh$
- 在引力场中，将质点从场中的点 $P$ 移到点 $Q$ 时，引力做功等于由 $P$ 到 $Q$ 点势能的减少。

$$A = \Delta E_P = mg\Delta h$$



水流倾泻而下，重力做功，水的势能减少



### 电势能

类似地，在静电场中，当把试探电荷 $P$ 移到点 $Q$ 时，电场力作的功应当等于由 $P$ 到 $Q$ 试探电荷电势能的减少：

$$W_{PQ} = W_P - W_Q$$

$W_P$ 称 $P$ 点的电势能

或 $$W_{PQ} = A_{PQ} = q_0\int_P^Q \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

对于分布于有限空间范围内电荷产生的电场来说，可把无限远处的电势能作为零点，即：

$$W_P = q_0\int_P^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -q_0\int_{\infty}^{P} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$



## § 1.5.4 电势与电势差

### 1. 电势的定义 (Electric potential)

试探点电荷 $q_0$ 要克服电场力做功。但 $W_{PQ}/q_0$ 与试探电荷无关，只与静电场的性质有关。

从 $P\to Q$ 移动单位电荷电场力所做的功

$$\frac{W_{PQ}}{q_0} = \int_P^Q \vec{E}\cdot d\vec{l} = U_{PQ}$$

$U_{PQ}$ 称为 $P$、$Q$ 两点间的电势差

电荷分布在有限空间的情况，常取无穷远点电势为零，则 $P$ 点的电势为:

$$U(P) = \int_P^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{\infty}^{P} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

电场空间某点 $P$ 的电势，是从无穷远处移动一个单位电荷到该点，电场力所做功的负值，或克服电场力所做的功。

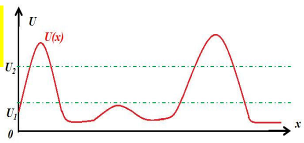


$PQ$ 两点间的电势差为：

$$\int_P^Q \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_P^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{\infty}^{Q} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_P^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l} - \int_Q^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$U_{PQ} = U(P) - U(Q)$$

电势差与参考电势无关！




以上把电势的零点选在了无穷远处。

实际问题中，常以大地或电器外壳的电势为零。

改变零点的位置，各点的电势能和电势的数值随着变化，但都改变一个相同量，不会影响两点间的电势能差以及两点间的电势差。



## 电势的单位

- 电势能的单位与能量或功的单位相同，用焦耳($J$)表示。
- 电势是描述电场性质的物理量，与电场中有没有电荷无关。
- 电势差和电势的单位均为焦耳 / 库仑 ($J/C$)，在 $SI$ 中称为伏特(Volt , $V$)。

$$U_{PQ} = \frac{W_{PQ}}{q_0}$$

$$1伏特 = 1\frac{焦耳}{库仑}, \quad 1V = 1\frac{J}{C}$$

## 2．电势的计算

### (a) 点电荷的电势

点电荷的电场强度为 $\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\vec{e}_r$

由电势的定义可得：

$$U(\vec{r}) = \int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{\vec{e}_r\cdot d\vec{l}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

点电荷的电势为：$U = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$　　$U(\infty) = 0$

25

### (b) 电势的叠加原理

对点电荷系，由电场的叠加原理，有：

$$U(\vec{r}) = \int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_r^\infty\left(\sum_i \vec{E}_i\right)\cdot d\vec{l} = \sum_i\int_r^\infty \vec{E}_i\cdot d\vec{l} = \sum_i U_i(\vec{r})$$

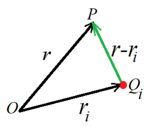
点电荷体系产生的总电势，等于各个电荷单独存在时产生电势的代数和。

26

### (c) 点电荷组的电势

假设$N$个点电荷组成的体系，$q_1, q_2, q_3 \ldots\ldots, q_N$，分别位于$r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots, r_N$处，位于$r_i$处 的$q_i$单独在$r$处产生的电势为：

$$U_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$




由叠加原理，$N$个电荷在 $r$ 处产生的总电势为：

$$U(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N U_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

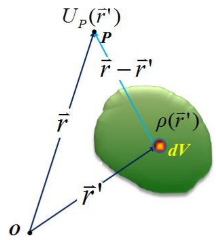
27

### (d) 带电体的电势

求连续分布的带电体产生的电势时，先把带电体分割成许许多多的电荷元 $dq$，这些电荷元可看作点电荷。

由电势的叠加原理，连续带电体在 $r$ 处产生的总电势为：

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$




28

体带电体、电荷密度为 ρ (r’)

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'}\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'$$

面带电体,电荷密度分别为 σ (r’)

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{S'}\frac{\sigma(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dS'$$

线带电体，电荷密度 λ (r’)

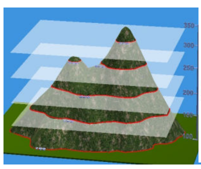
$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{L'}\frac{\lambda(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dl'$$

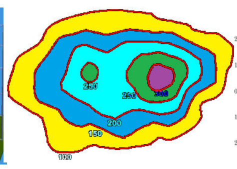
29

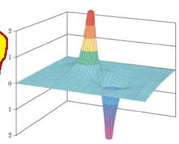
## § 1.5.5 等势面

### 1. 等势面的定义

- 电势U为空间坐标的标量函数，是标量场。
- 标量场常用等值面来进行形象的几何描述。
- 电势的等值面称为等势面，在同一等势面上，电势处处相等。







30

## 2. 等势面的特性

### 一根电场线不可能与同一等势面相交两次或多次

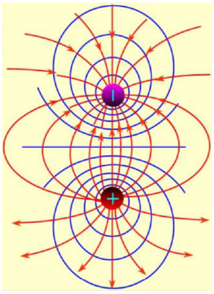
【证明】反证法，设一根电场(力)线与同一等势面相交两次，交点为PQ，则

*PQ*间的电势差$U_{PQ}$可以沿这根电场线由*P*点积分到*Q*点，一定不等于0

$$U_{PQ}=\int_P^Q \vec{E}\cdot d\vec{l}\neq 0$$

而*P*、*Q*两点在同一等势面上，两者间应该无电势差。$U_{PQ}=U_P-U_Q=0$

两相矛盾





### 空间某点的电场强度应与该处的等势面垂直

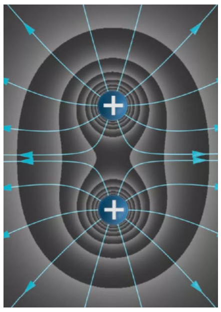
【证明】反证法，设场强与等势面不垂直，则

$$\vec{E}=\vec{E}_\perp+\vec{E}_{//} \qquad \vec{E}_{//}\neq 0$$

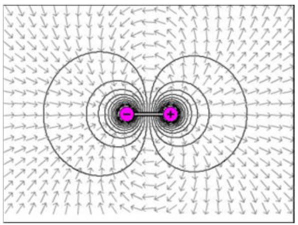
在等势面上沿切向方向取两点AB，则

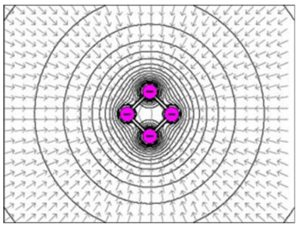
$$U_{AB}=\int_A^B \vec{E}_{//}\cdot d\vec{l}\neq 0$$

有电势差，与等势面的定义发生矛盾。故电场线和等势面之间将处处正交。



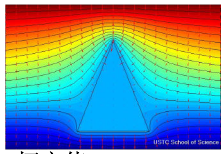








### 电场强度的大小可用等势面的疏密程度来量度



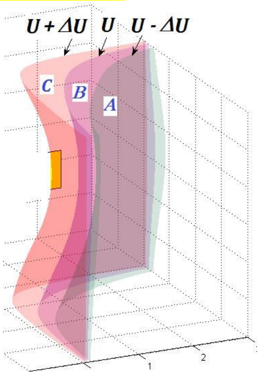

- 作图时相邻等势面的电势差$\Delta U$为一恒定值
- 将单位正电荷沿法线方向从一个等势面移到与其相邻的等势面上，电场所作的功的大小一样 $W=q_0\Delta U$
- 该功的大小为电场强度*E*与相邻等势面间距离*d*的乘积 $W=Fd=q_0Ed$
- 因此，等势面间距 *d* 越小，电场 *E* 就越大 $E=\dfrac{\Delta U}{d}$
- 等势面间距的大小，反映了等势面的疏密程度
- 所以，电场的大小可用等势面的疏密程度来量度



## 3. 电势与电场的关系

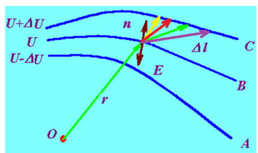
- 电势是标量，从电荷分布计算电势比计算场强方便。
- 若能从电势分布求出场强分布，这显然是非常有意义的。
- 考虑三个非常靠近的等势面*A*、*B*、*C*。将单位正电荷从 *B* 移至 *C*，电场力对单位电荷所做的功等于电势的减少，即：

$$\vec{E}\cdot\Delta\vec{l}=-\Delta U$$






- 改变同样的$\Delta U$，沿不同的方向，*dl* 的长度是不同的；
- 电场强度总是与等势面相垂直；
- 定义 $\vec{n}$ 为沿等势面的法线方向的单位矢量，则有： $\Delta n=\Delta\vec{l}\cdot\vec{n}=\Delta l\cos(\theta)$




$$\Delta U=-\vec{E}\cdot\Delta\vec{l}=-\vec{E}\cdot\Delta l\cos\theta\vec{n}=-E\Delta n$$

$$E=-\frac{\Delta U}{\Delta n}$$

在数学中，对于任何一个标量场中，可定义该标量的梯度(grad)；

梯度是矢量，其大小等于该标量函数沿其等值面的法线方向的方向导数，方向沿等值面的法线方向，即：

$$gradU = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial n}\vec{n}$$

∇: 微分算子，读音Nabla

所以

$$\vec{E} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial n}\vec{n}$$

静电场中任何一点的电场强度：大小在数值上等于该点电势梯度的大小；方向与电势梯度的方向相反，即指向电势降落的方向。



直角坐标系中 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$

已知电势的值，就可求得电场强度的大小和方向：

$$\vec{E} = -\nabla U(x,y,z) \Rightarrow \begin{cases} E_x = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} \\ E_y = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y} \\ E_z = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z} \end{cases}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\vec{e}_z$$



球坐标系中 $\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$

$$\vec{E} = -\nabla U(r,\theta,\varphi)$$
$$= -\frac{\partial U(r,\theta,\varphi)}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial U(r,\theta,\varphi)}{\partial \theta}\vec{e}_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U(r,\theta,\varphi)}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

柱坐标系中 $\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$

$$\vec{E} = -\nabla U(r,\varphi,z)$$
$$= -\frac{\partial U(r,\varphi,z)}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial U(r,\varphi,z)}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi - \frac{\partial U(r,\varphi,z)}{\partial z}\vec{e}_z$$



关于电势，有以下几点值得注意

- 电势 $U(x,y,z)$ 是标量，只有一个量，但场强是矢量，有三个分量，为何由 $\vec{E} = -\nabla U$ 能给出三个函数 $E_x$、$E_y$ 和 $E_z$ 呢？

因为，静电场并非一个完全任意的矢量场。

- 它必须满足环路定理，因而 $E$ 的三个分量并不是独立的。
- 能用一个标量函数 $U$ 来描写静电场，并由之得到一个矢量场（场强），是由静电场是保守场的性质决定的。



- 静电场的环路定理是从库仑定律导出的，因为库仑定律已包含了静电场是有心力场这一特性。
- 凡是有心力场，其环路积分都恒为零。
- 用一个标量势函数描写静电场的前提，是静电场为有心力场，而且只要求静电场是有心力场就足够了。
- 至于势函数的具体形式，取决于有心力的具体形式，即需借助于高斯定理。由电荷分布所确定的电势函数公式，已包括了电荷间相互作用遵从距离平方反比律这一内容，即已包含了库仑定律的全部信息。
- 描写静电场的两个方程是：

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla \times \vec{E} = 0$$



## 拉普拉斯算子

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z\right)$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial^2 \varphi^2}$$

## 泊松方程

由环路定理可得到 $E$ 和 $U$ 的关系，
即 $\vec{E}=-\nabla U$，代入到高斯定理就有：

$$\left.\begin{aligned}\vec{E}&=-\nabla U\\ \nabla\cdot\vec{E}&=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \nabla^2 U=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

泊松方程

Siméon Poisson
(21/06/1781-25/04/1840)

在直角坐标系中，可写成：

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=-\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0}$$

若已知电荷分布$\rho(x,y,z)$，通过求解泊松方程，可得电势分布$U(x,y,z)$，进一步可求空间任一点的电场$E(x,y,z)$。



## 拉普拉斯方程

如果空间无电荷 $\rho=0$，则泊松方程变为拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 U=0$$

P.S. Laplace (1749–1827)

直角坐标系中

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0$$



## 电势的零参考点的选择

- 电势的具体数值与电势零参考点的选择有关
- 电势零参考点的选择有很大的任意性，电场中任何一点都可以作为电势的零点。

### 电荷分布在有限区域时:

- 通常把电势的零点取在无穷远处;
- 这是因为分布在有限区域中的电荷产生的电场$E$在远离电荷处的场强按 $1/r^2$ 减少;
- 故无限远处任意两点的电势差为零，无限远处是电势的等势区域;

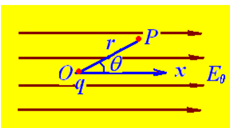


### 电荷分布在无限大区域中时:

- 无限远处并不是等势区域(部分区域包含电荷，部分区域不包含电荷)。
- 这种情况中，可以取某一确定点作为电势的零点;
- 但却不能把无限远处作为电势的零参考点(无限远处是一个区域)。



【例19】在原先的均匀电场$E_0$中放入一个点电荷 $q$, 则空间的电势如何?




【解】以点电荷 $q$ 所在的位置 $O$ 作为坐标原点。
对均匀电场$E_0$(延伸到无穷远处), 因此不能取无限远处为电势零点，此时可取某一确定点，例如原点O为参考点， 则:

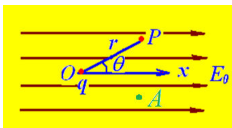
$$U_1=\int_P^O \vec{E}_0\cdot d\vec{l}=-E_0 r\cos\theta \qquad d\vec{l}=-d\vec{r}$$

对点电荷, 不能取点电荷所在点(即坐标原点)为电势零点，此时可取无限远处为电势零点, 则:

$$U_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



此题中，既有点电荷$q$，又有均匀电场 $E_0$(延伸到无穷远处)，因此无限远处与原点均不能作为电势零点。




除无限远和原点外的任一点$A(r_A)$都可做电势参考点。

在此参考点(A)下，设$O$点的电势为$U_O$，无穷远处的电势为$U_\infty$，则

均匀电场在$P$点的电势:

$$U_1'=U_{PA}=U_{PO}+U_{OA}=U_1+U_O=-E_0 r\cos\theta+U_O$$

点电荷$q$产生的电场在$P$点的电势:

$$U_2'=U_{PA}=U_{P\infty}+U_{\infty A}=U_2+U_\infty=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+U_\infty$$

则总电势为:
$$U(r)=U_1'+U_2'$$
$$=-E_0 r\cos\theta+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+U_O+U_\infty$$

*A*点为零电势参考点

$$U(r_A)=-E_0 r_A\cos\theta+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_A}+U_O+U_\infty=0$$

$$U_O+U_\infty=E_0 r_A\cos\theta-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_A}$$ 令 $U_0=U_O+U_\infty$

$$U(r)=-E_0 r\cos\theta+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+U_0$$

49

## 稳定性的判定

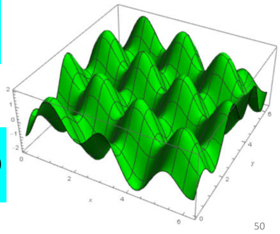
稳定点条件 在$(x_0,y_0)$ $\frac{df(x,y)}{dx}=\frac{df(x,y)}{dy}=0$ 必要条件

极大点

$$\frac{d^2f(x,y)}{dx^2}<0,\ \frac{d^2f(x,y)}{dy^2}<0$$

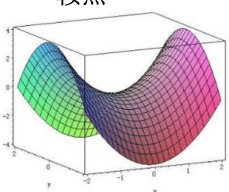
极小点

$$\frac{d^2f(x,y)}{dx^2}>0,\ \frac{d^2f(x,y)}{dy^2}>0$$



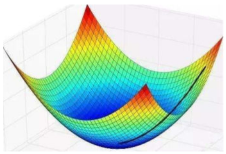
50

鞍点



$$\frac{d^2f(x,y)}{dx^2}>0,\ \frac{d^2f(x,y)}{dy^2}<0$$

随遇点



$$\frac{d^2f(x,y)}{dx^2}=0,\ \frac{d^2f(x,y)}{dy^2}=0$$

51

【例20】证明在无电荷存在的空间，电势不可能有极大值或极小值

【解】无电荷存在空间 $\rho=0$， 则由拉普拉斯方程

$$\nabla^2U=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}=0$$

若电势取极大值 $\frac{\partial^2U}{\partial x^2}<0,\frac{\partial^2U}{\partial y^2}<0,\frac{\partial^2U}{\partial z^2}<0$

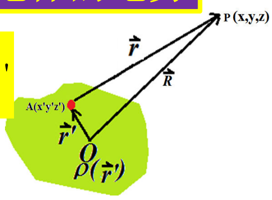
若电势取极小值 $\frac{\partial^2U}{\partial x^2}>0,\frac{\partial^2U}{\partial y^2}>0,\frac{\partial^2U}{\partial z^2}>0$

无论那种情况都不满足拉普拉斯方程。因此在无电荷存在的区域，电势不可能取极大值或极小值

52

## 任一形状的带电体的电势

$$U(\vec R)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'}\frac{\rho(\vec r')}{r}dV'$$




$$R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$r=|\vec R-\vec r'|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

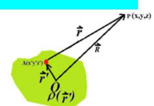
由于区域线度*r'*远小于*R*，可以把*r'*各分量看作小参量，把*R-r'*的函数对*r'*展开。

53

设*f(R-r')*为*R-r'*的任意函数，在*r'=0*点附近 *f(R-r')* 的展开式为:

$$f(\vec R-\vec r')=f(\vec R)-\vec r'\cdot\nabla f(\vec R)+\frac{1}{2!}(\vec r'\cdot\nabla)^2 f(\vec R)+\dots$$

取 $f(\vec R-\vec r')=\frac{1}{|\vec R-\vec r'|}=\frac{1}{r}$



有 $$\frac{1}{r}=\frac{1}{R}-\vec r'\cdot\nabla\left(\frac{1}{R}\right)+\frac{1}{2!}\sum_{i,j}x_i'x_j'\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{R}+\dots$$

电势为

$$U(\vec R)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'}\rho(\vec r')\left[\frac{1}{R}-\vec r'\cdot\nabla\frac{1}{R}+\frac{1}{2!}\sum_{i,j}x_i'x_j'\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{R}+\dots\right]dV'$$

54

$$Q=\iiint_{V'}\rho(\vec{r}\,')dV'$$ 电荷

$$p=\iiint_{V'}\vec{r}\,'\rho(\vec{r}\,')dV'$$ 电偶极矩

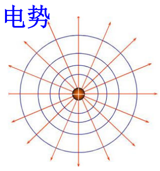
$$D_{ij}=\iiint_{V'}3x_i'x_j'\rho(\vec{r}\,')dV'$$ 电四极矩

则

$$U(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{R}-\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{R}+\frac{1}{6}\sum_{i,j}D_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial x_i x_j}\frac{1}{R}+\dots\right]$$
$$=U^{(0)}+U^{(1)}+U^{(2)}+\dots$$

55

第一项: 在原点的点电荷$Q$激发的电势

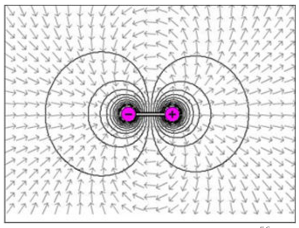


$$U^{(0)}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

第二项: 电偶极矩$p$产生的电势

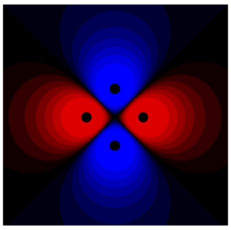
$$U^{(1)}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{R}$$

$$U^{(1)}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$



56

第三项: 电四极矩$D_{ij}$产生的电势



$$U^{(2)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\sum_{i,j}D_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{R}$$

电四极矩张量是对称张量，它有6个分量为

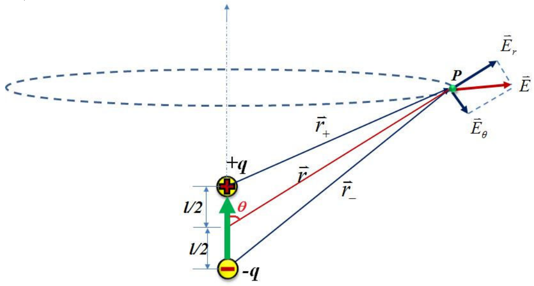
$$D_{11},\quad D_{22},\quad D_{33},$$
$$D_{12}=D_{21},\quad D_{23}=D_{32},\quad D_{331}=D_{13}$$

$U^{(3)},U^{(4)},U^{(5)}\dots\dots$ 电多极子

57

# 应用举例

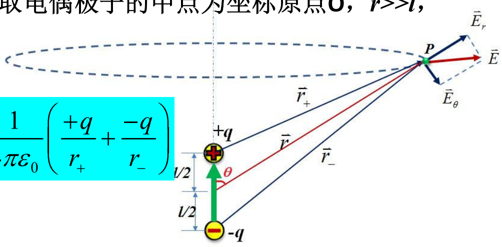
【例21】求电偶极子的电势及电场的分




58

【解】取电偶极子的中点为坐标原点O，$r>>l$，则：

$$U(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{+q}{r_+}+\frac{-q}{r_-}\right)$$



由数学的级数展开，近似可以得到：

$$r_\pm=\sqrt{x^2+y^2+\left(z\mp\frac{l}{2}\right)^2}\approx r\sqrt{1\mp\frac{l}{r}\cos\theta}$$

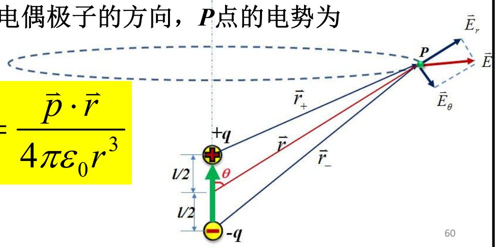
59

代入，并忽略二次以上的高阶项，得

$$U(r)=\frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

考虑到电偶极子的方向，$P$点的电势为

$$U(r)=\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$



60

由电场强度与电势的关系式：

$$\vec{E} = -\nabla U \qquad U(r) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

可求得：

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e}_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3}\vec{e}_r + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3}\vec{e}_\theta \\ &= E_r\vec{e}_r + E_\theta\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

61

因此有：

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3}$$

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3}$$

$$E_\varphi = 0 \Rightarrow$$ 电偶极子的电场分布具有轴对称性

在电偶极子的延长线上，θ=0，有

$$E = E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3}$$

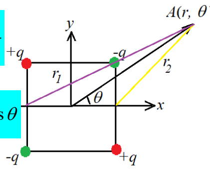
在电偶极子的中垂面上，θ=π/2，有

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}$$

62

【例22】面电四极子，如图所示，点A(r,θ)与电四极子共面，极轴(θ=0)通过正方形中心并与两边平行。设$r>>l$，求面电四极子在A点产生的电场强度。

【解】由上例得电偶极子电势




$$U_{left} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^3} = \frac{q\vec{l}_1\cdot\vec{r}_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^3}, \quad U_{right} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^3} = \frac{q\vec{l}_2\cdot\vec{r}_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^3}$$

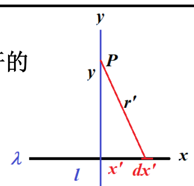
$$r_1 = \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4} + rl\cos\theta} \approx r + \frac{l}{2}\cos\theta \qquad r_2 \approx r - \frac{l}{2}\cos\theta$$

$$U = U_{left} + U_{right} = \frac{-3ql^2\sin\theta\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{-9ql^2\sin\theta\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^4} \qquad E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{3ql^2\cos 2\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^4}$$

63

【例23】求长为$l$、线电荷密度为$\lambda$的杆的对称轴上的电势




【解】 以杆的中点为原点，无穷远处为电势零点， 取电荷元$dq=\lambda dx'$

$$dq = \lambda dx' \qquad dU = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx'}{\sqrt{x'^2+y^2}}$$

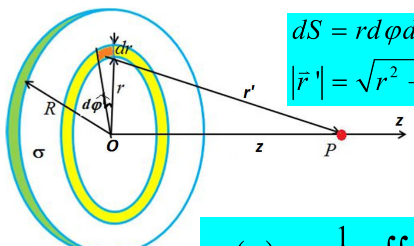
$$U = \int_{-l/2}^{l/2} dU = \int_{-l/2}^{l/2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx'}{\sqrt{x'^2+y^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[x' + \sqrt{x'^2+y^2}\right]\Bigg|_{-l/2}^{l/2}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{l/2+\sqrt{l^2/4+y^2}}{-l/2+\sqrt{l^2/4+y^2}}$$

64

【例24】求面电荷密度为σ的均匀带电薄圆盘轴线上的电势与电场分布，圆盘半径为$R$。

【解】取无穷远处为零势能点，取电荷元 $dq=\sigma dS$，




$$dS = rd\varphi dr$$

$$|\vec{r}\,'| = \sqrt{r^2+z^2}$$

则轴线上任一点 $P$ 的电势为：

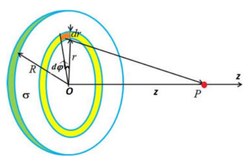
$$U(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\sigma dS}{|\vec{r}\,'|}$$

65

$$U(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\sigma r}{\sqrt{r^2+z^2}}dr\int_0^{2\pi}d\varphi$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{rdr}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right]$$



$$U(z) = \begin{cases}\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2} - z\right] & Z \ge 0 \\ \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2} + z\right] & Z < 0\end{cases}$$

66

所以，电场强度$E$为：

$$\vec{E} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z$$

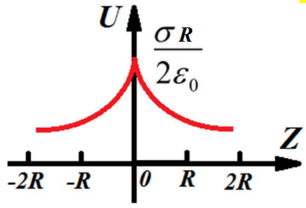
故：

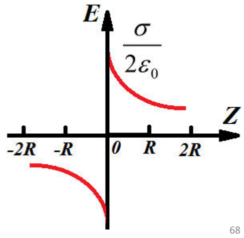
$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\vec{e}_z & Z>0 \\ \dfrac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1+\dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\vec{e}_z & Z<0 \end{cases}$$



当$R\to\infty$时，即得到无限大均匀带电平面的电场强度为：

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z & Z>0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z & Z<0 \end{cases}$$






R→∞时 $U(z) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2}-|z|\right]$ $U(z)\to\infty$

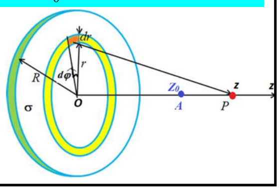
此时不能再将∞当做零势能点。可取有限远处任一点做电势参考点(零势能点)，现取z轴上的A($z_0$)点为参考点。

$$U_{PA} = U_{P\infty} + U_{\infty A} = U_{P\infty} - U_{A\infty} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2}-|z|\right] - U_0$$

$$U_0 = U_{A\infty} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z_0^2}-|z_0|\right]$$

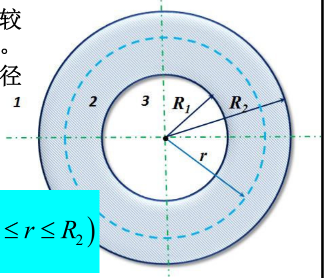
$R\to\infty$ $U_{PA} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}(z_0 - z)$

书上p47多了一个负号




【例25】均匀带电，密度为ρ，内外半径分别为$R_1$和$R_2$的球壳，求其电场和电势分布

【解】由于具有球对称性，较容易用高斯定理求电场分布。将空间分成三个区间，作半径为$r$的高斯面，则：




$$\vec{E}_3 = 0, \quad (r\le R_1)$$

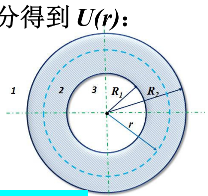
$$\vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r-\frac{R_1^3}{r^2}\right)\vec{e}_r, \quad (R_1\le r\le R_2)$$

$$\vec{E}_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(R_2^3-R_1^3\right)\frac{\vec{e}_r}{r^2}, \quad (r\ge R_2)$$



再根据$U$和$E$的关系，可以由积分得到$U(r)$：

$$U_1(r) = \int_r^\infty \vec{E}_1\cdot d\vec{l} = \int_r^\infty \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(R_2^3-R_1^3\right)\frac{\vec{r}\cdot d\vec{l}}{r^3} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(R_2^3-R_1^3\right)\frac{1}{r} \quad (r\ge R_2)$$



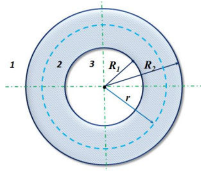

$$U_2(r) = \int_r^{R2} \vec{E}_2\cdot d\vec{l} + \int_{R2}^\infty \vec{E}_1\cdot d\vec{l} = \int_r^{R2} \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(1-\frac{R_1^3}{r^3}\right)\vec{r}\cdot d\vec{l} + U_1(R_2) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{3}{2}R_2^2-\frac{R_1^3}{r}-\frac{r^2}{2}\right) \quad (R_1\le r\le R_2)$$



$$U_3(r) = \int_r^{R1} \vec{E}_3\cdot d\vec{l} + \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_2\cdot d\vec{l} + \int_{R_2}^{\infty} \vec{E}_1\cdot d\vec{l} = U_2(R_1) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R_2^2-R_1^2\right) \quad (r\le R_1)$$

由$U_3(r)$可见：

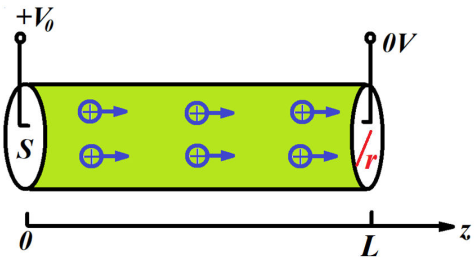
- 球壳内空腔是等势体
- 其电势与球壳内表面相等



- 求解点电荷系和非对称带电体问题，最好先求电势(因电势是标量，便于计算)，然后用微分关系求电场；
- 如果带电体有明显的对称性，则常用高斯定理先求其电场分布，然后用积分关系求电势分布。



【例26】高压电力设备中的载流元件必须冷却，以带走欧姆损耗引起的热量。图中电动流体力水泵示意图。电极之间的区域包含均匀电荷$\rho_0$，它是在左电极上产生，并在右电极上收集。计算该流通泵的静电压强。($\rho_0$=25 mC/m³和$V_0$=22 kV，L>>r)

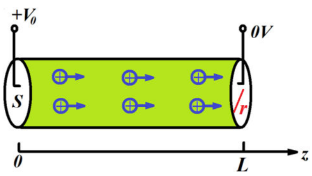



【解】 由泊松方程 $\nabla^2 U=-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\frac{d^2U}{dz^2}=-\frac{\rho_0}{\varepsilon}$$

$$\frac{dU}{dz}=-\frac{\rho_0}{\varepsilon}z+A$$

$$U=-\frac{\rho_0}{2\varepsilon}z^2+Az+B$$




$U|_{z=0}=V_0$ ⇒ $V_0=0+0+B$ ⇒ $B=V_0$

$U|_{z=d}=0$ ⇒ $0=-\dfrac{\rho_0}{2\varepsilon}L^2+AL+V_0$ ⇒ $A=\dfrac{\rho_0 L}{2\varepsilon}-\dfrac{V_0}{L}$

$$U=-\frac{\rho_0}{2\varepsilon}z^2+Az+B \Rightarrow U=-\frac{\rho_0}{2\varepsilon}z^2+\left(\frac{\rho_0 L}{2\varepsilon}-\frac{V_0}{L}\right)z+V_0$$

$$\vec{E}=-\nabla U \Rightarrow E=-\frac{dU}{dz}=\frac{V_0}{L}+\frac{\rho_0}{\varepsilon}\left(z-\frac{L}{2}\right)$$

$$dF=dqE=\rho_0 dVE$$

$$F=\int dF=\iiint \rho_0 E dV=\rho_0 S\int_0^L\left[\frac{V_0}{L}+\frac{\rho_0}{\varepsilon}\left(z-\frac{L}{2}\right)\right]dz$$

$$=\rho_0 S\left[\frac{V_0 z}{L}+\frac{\rho_0}{2\varepsilon}\left(z^2-Lz\right)\right]\Bigg|_0^L=\rho_0 S V_0$$

静电压强 $p=\dfrac{F}{S}=\rho_0 V_0=25\times10^{-3}\times22\times10^{3}=550N/m^2$

## 问　题

1. 复杂电荷体系的电势和等势面作图。

2. 复杂体系电势零点的选择。