图的着色

顶点着色

顶点着色与色数

定义7.1 图G的$k-$**顶点着色**指把k种颜色分配给顶点；若相邻顶点的颜色不同，则称为**正常**$k-$**顶点着色**，称G是**可**$k-$**顶点着色的**。图G的顶点色数指的是使图G可正常顶点着色的最少颜色数k，简称色数，记为$\chi(G)$。色数为k的图是可$k-$顶点着色，但不是可$(k-1)-$顶点着色的

顶点着色的性质：

(1) ν阶图的色数满足$1 \leq \chi(G) \leq \nu$；$\chi(G)=1$当且仅当G是零图；$\chi(G)=\nu$当且仅当G是ν阶完全图

(2) $\chi(G)=2$当且仅当G是有边二分图

(3) $\chi(C_v)=\begin{cases}2 & \nu\text{是奇数}\\ 3 & \nu\text{是偶数}\end{cases}$

(4) 若图H是G的子图，则$\chi(H) \leq \chi(G)$

定理7.1 对任何图G，$\chi(G) \leq \Delta(G)+1$

定理7.2(Brooks) 设$\nu(\nu \geq 3)$阶连通图G不是完全图也不是奇圈，则$\chi(G) \leq \Delta(G)$

边着色

边着色与边色数

定义7.2 图G的一个$k-$**边着色**指把k种颜色分配给边；若相邻边异色，则称为**正常**$k-$**边着色**，称G是**可**$k-$**边着色的**。图G的边色数指使图G可正常边着色的最少颜色数，记为$\chi'(G)$

引理7.1 若连通G不是奇圈，则存在一种$2-$边着色，使得所用的两种颜色在每个度数大于等于2的顶点处都出现，即每个度数大于等于2的顶点所关联的边用到了这两种颜色

定义7.3 设C和C'是图G的两种$k-$边着色，如果$\Sigma_{v\in V(G)}c(v) < \Sigma_{v\in V(G)}c'(v)$，则称$k-$边着色$C'$是对$C$的一个**改进**，其中$c(v)$与$c'(v)$分别表示用$C, C'$着色时顶点$v$关联的边中出现的颜色数。不能再改进的$k-$边着色称为最佳$k-$边着色

引理7.2 设$C=(E_1, E_2, \cdots, E_k)$是图$G$的一个最佳$k-$边着色。如果存在一个顶点$v_0$和两种颜色$i, j$，使得$i$色不在$v_0$关联的边中出现，但$j$色在$v_0$关联的边中至少出现两次，则边导出子图$G[E_i \cup E_j]$中含$v_0$的连通片是一个奇圈

定理7.3 若G是二分图，则$\chi'(G)=\Delta(G)$

定理7.4(Vizing) 若G是简单图，则$\chi'(G)=\Delta(G)$或$\Delta(G)+1$

边着色的应用

引理7.3 设M和N是图G中两个无公共边匹配，且$|M|>|N|$，则存在G中两个无公共边的匹配M'和N'，使得$|M'|=|M|-1$，$|N'|=|N|+1$，$M' \cup N' = M \cup N$

定理7.5 设G是二分图，$\varepsilon=|E(G)|$，$\Delta \leq p$，则存在G的p个不相交匹配$M_1, M_2, \cdots, M_p$，使得$E(G)=\cup_{i=1}^{p}M_i$，且对$1 \leq i \leq p$，$\lfloor \varepsilon/p \rfloor \leq |M_i| \leq \lceil \varepsilon/p \rceil$

例7.6(教室分配)

平面图着色

平面图着色

定义7.4 平面图G的一个**正常面着色**指：对其一个平面嵌入G'的每个面着一种颜色，使得相邻的两个面着不同的颜色。若能用k种颜色给G'的面正常着色，就称G是**可**$k-$**面着色的**。若G是可$k-$面着色的，但不是可$(k-1)-$面着色的，则称G的面色数为k，记为$\chi_*(G)=k$

定义7.5 设G是平面图，G'是G的平面嵌入，构造G的对偶图G^*如下

(1) G'的每个面f，都有G^*的一个顶点f^*与之对应

(2) G'的每条边e都有G^*的一条边e^*与之对应：若e在G'的两个面f_i和f_j的公共边界上，则在G^*中e^*连接这两个面对应的顶点f_i^*和f_j^*；若e只在一个面f_i的边界上，则在G^*中对应的e^*是以f_i^*为端点的环

下述性质成立

(1) G^*是平面图，且是平面嵌入

(2) 若e是G'中的环，则它对应的边e^*是G^*的桥；若e是G'中的桥，则e^*是G^*的环

(3) G^*是连通的

(4) 若G'的面f_i和f_j的边界上至少有两条公共边，则关联f_i^*和f_j^*的边有重边

(5) 两个图同构，但它们的对偶图不一定同构

定理7.6 设G^*是连通平面图G的对偶图，n^*, m^*, ϕ^*和n, m, ϕ分别是G^*和G的顶点数、边数和面数，则

(1) $n^* = \phi, m^* = m, \phi^* = n$

(2) 设G^*的顶点f^*与G'的面f对应，则$\deg_{G^*}(f^*) = \deg_G(f)$

定理7.7 设G是连通的无环平面图，则G是可$k-$面着色，当且仅当它的对偶图G^*是可$k-$顶点着色的

五色定理

定理7.8 任何平面图都是可$6-$顶点着色的

定理7.9 任何平面图都是可$5-$顶点着色的

定理7.10 若在极大平面图T中，k度顶点的数目是p_k个，则$\Sigma_k(6-k)p_k = 12$

推论7.1 极大平面图T中，有一个度数最多为5的顶点

有向图

有向图

定义8.1 若D中存在有向边(u, v)，则称v是u的**外邻顶点**，称u是v的**内邻顶点**。对于顶点$u \in V(D)$，分别用$N_D^+(u)$和$N_D^-(u)$表示D中u的所有外邻顶点和所有内邻顶点构成的集合，简称u的内邻集和外邻集，即$N_D^+(u) = \{v | e(u, v) \in E(D)\}$，$N_D^-(u) = \{v | e = (v, u) \in E(D)\}$

有向图的连通性

定义8.2 设D是有向图，若存在从u到v的有向路径，则称u**可达**v。若$\forall u, v \in V(D)$，u可达v且v可达u，则称D是**强连通的**；若$\forall u, v \in V(D)$，u可达v或v可达u，则称D是**单向连通的**；若D的底图是连通的无向图，则称D是**弱连通的**

根据双向可达关系确定$V(D)$的划分$(V_1, V_2, \cdots, V_\omega)$，由它们导出的有向子图$D[V_1], D[V_2], \cdots, D[V_\omega]$，称为$D$的强连通片

定理8.1 D是强连通有向图当且仅当D中存在有向生成回路，即存在含有D中所有顶点的有向回路

定理8.2 连通无向图G可以定向成强连通有向图，当且仅当G中没有桥

引理8.1 若D单向连通，则$\forall S \subset V(D), S \neq \emptyset$，都存在顶点$v \in S$，$v$可达$S$中所有顶点

定理8.3 D是单向连通有向图，当且仅当D中存在有向生成路径

竞赛图

定理8.4(Roy,Gallai) 有向图D中含有长度为$\chi(G) - 1$的有向轨道，其中G为D的底图

完全图的定向图称为**竞赛图**

推论8.1 每个竞赛图都有有向$\mathrm{Hamilton}$轨道

注：在竞赛图中寻找有向$\mathrm{Hamilton}$轨道有有效算法

定理8.5 竞赛图中得分最多的顶点是王

定理8.6 竞赛图D中v是唯一的王，当且仅当v的得分是$\nu - 1$，其中$\nu = |V(D)|$

有向Hamilton图

定理8.7 假定$\nu \geq 3$阶竞赛图D是强连通的，则任给$k(3 \leq k \leq \nu)$，D中每个顶点都在某个k阶有向圈中

定理8.8 设$P(u_0, v_0)$是严格有向图D中的最长有向轨道，则其长度$|E(P(u_0, v_0)| \geq \max\{\delta^-, \delta^+\}$，其中$\delta^-, \delta^+$分别为$D$的最小入度和最小出度

推论8.2 若$\max\{\delta^-, \delta^+\} > 0$，则严格有向图中有长度大于$\max\{\delta^-, \delta^+\}$的有向圈

定理8.9 设D是ν阶严格有向图，若$\min\{\delta^-, \delta^+\} \geq \frac{\nu}{2} > 1$，则$D$是有向$\text{Hamilton}$图

网络流理论

网络与流函数

定义9.1 一个**网络**定义为四元组$N = (D, s, t, c)$，其中
(1) D是一个弱连通的有向图

(2) $s, t \in V(D)$，分别称为**源**和**汇**

(3) $c : E(D) \to \mathbb{R}$ 称为**容量函数**，任给$e \in E(D)$，$c(e) \geq 0$称为边e的**容量**

定义9.2 网络$N = (D, s, t, c)$上的**流函数**$f : E(D) \to \mathbb{R}$，满足

(1) 任给$e \in E(D)$，有$c(e) \geq f(e) \geq 0$

(2) 任给$v \in V(D) - \{s, t\}$，有$\Sigma_{e \in \alpha(v)} f(e) - \Sigma_{e \in \beta(v)} f(e) = 0$

其中，$\alpha(v)$是以v为头的边集，$\beta(v)$是以v为尾的边集

f的**流量**定义为$\text{Val}(f) = \Sigma_{e \in \alpha(t)} f(e) - \Sigma_{e \in \beta(t)} f(e) = \Sigma_{e \in \beta(s)} f(e) - \Sigma_{e \in \alpha(s)} f(e)$

定义9.3 给定网络$N = (D, s, t, c)$，$S \subset V(D)$，满足$s \in S, t \in \overline{S} = V(D) - S$，则称
$(S, \overline{S}) = \{e = (u, v) | e \in E(D), u \in S, v \in \overline{S}\}$为网络的一个**截**，称$C(S, \overline{S}) = \Sigma_{e \in (S, \overline{S})} c(e)$为$(S, \overline{S})$的**截量**，截量最小的截称为**最小截**

定理9.1 设f是网络$N = (D, s, t, c)$的流函数，$(S, \overline{S})$是其一个截，则有
$\text{Val}(f) = \Sigma_{e \in (S, \overline{S})} f(e) - \Sigma_{e \in (\overline{S}, S)} f(e)$

推论9.1 设f是网络$N = (D, s, t, c)$的流函数，$(S, \overline{S})$是其一个截，则有$\text{Val}(f) \leq C(S, \overline{S})$

推论9.2 设f是网络$N = (D, s, t, c)$的流函数，$(S, \overline{S})$是其一个截，若$\text{Val}(f) = C(S, \overline{S})$，则$f$是最大流，$(S, \overline{S})$是最小截

Ford-Fulkerson算法

定义9.4 给定网络$N = (D, s, t, c)$，N上的流函数f，底图G的无向轨道$P(s, u)$，定义：

(1) 若e是$P(s, u)$的正向边，且$f(e) < c(e)$，则称e为**未满载边**

(2) 若e是$P(s, u)$的正向边，且$f(e) = c(e)$，则称e为**满载边**

(3) 若e是$P(s, u)$的反向边，且$f(e) = 0$，则称e为**零载边**

(4) 若e是$P(s, u)$的饭向边，且$f(e) > 0$，则称e为**正载边**

对于无向轨道$P(s, u)$，定义其上每条边e的可增载量$l(e)$为

$l(e) = c(e) - f(e), e$是正向边；$l(e) = f(e), e$是反向边

$P(s, u)$的可增载量定义为$l(P) = \min_{e \in E(P)} l(e)$

定义9.5 给定网络$N = (D, s, t, c)$，N上的流函数f，以及N中的无向轨道$P(s, v)$

(1) 若$l(P) > 0$，则称$P(s, v)$是**未满载轨道**

(2) 若$l(P) = 0$，则称$P(s, v)$是**满载轨道**

(3) 若$l(P) > 0$且$v = t$，则称$P(s, t)$是N上关于f的**可增载轨道**

引理9.1 设f是网络$N = (D, s, t, c)$的流函数，$P(s, t)$是N上关于f的可增载轨道，定义$\overline{f} : E(D) \to \mathbb{R}$为

$$\bar{f}(e)=\begin{cases} f(e)+l(P) & e\text{是正向边} \\ f(e)-l(P) & e\text{是反向边} \\ f(e) & \text{其他} \end{cases}$$

则$\bar{f}$是网络N的流函数，且$\mathrm{Val}(\bar{f})=\mathrm{Val}(f)+l(P)$

算法9.1 可增载轨道算法

输入：网络$N=(D,s,t,c)$，流函数f

输出：一条可增载轨道，或指出当前流函数是最大流

(1) $S=\{s\}$，令$\mathrm{prev}(s)=*$

(2) 若$t\in S$，则已经找到可增载轨道，通过$\mathrm{prev}(t)$回溯输出可增载轨道，算法停止；否则，转(3)

(3) 若存在$u\in S,v\in\overline{S}$，使得$(u,v)\in E(D)$且边(u,v)未满载，则令$S\leftarrow S\cup\{v\}$，$\mathrm{prev}(v)=u$，转(2)；否则，转(4)

(4) 若存在$u\in S,v\in\overline{S}$，使得$(v,u)\in E(D)$且边(v,u)正载，则令$S\leftarrow S\cup\{v\}$，$\mathrm{prev}(v)=u$，转(2)；否则，输出无可增载轨道，算法停止

算法9.2 Ford-Fulkerson最大流算法

输入：网络$N=(D,s,t,c)$

输出：最大流函数f

(1) 取初始流函数f，例如$f(e)\equiv 0$

(2) 调用可增载轨道算法，若找到可增载轨道$P(s,t)$，则构造流函数$\bar{f}$如下，令$f\leftarrow\bar{f}$，转(2)；否则，输出f是最大流，停止

推论9.3(最大流最小截定理) 在网络中，最大流的流量=最小截的截量

容量有上下界的网络流

定义9.6 一个容量有上下界的网络定义为五元组$N=(D,s,t,b,c)$，其中

(1) D是一个弱连通的有向图

(2) $s,t\in V(D)$，分别称为源和汇

(3) $c,b:E(D)\to\mathbb{R}$ 分别为容量上下界函数，任给$e\in E(D)$，$c(e)\geq b(e)\geq 0$称为边e的容量上界和容量下界

定义9.7 网络$N=(D,s,t,b,c)$上的流函数$f:E(D)\to\mathbb{R}$，满足

(1) 任给$e\in E(D)$，有$c(e)\geq f(e)\geq b(e)$

(2) 任给$v\in V(D)-\{s,t\}$，有$\Sigma_{e\in\alpha(v)}f(e)-\Sigma_{e\in\beta(v)}f(e)=0$

其中，$\alpha(v)$是以v为头的边集，$\beta(v)$是以v为尾的边集

f的流量定义为$\mathrm{Val}(f)=\Sigma_{e\in\alpha(t)}f(e)-\Sigma_{e\in\beta(t)}f(e)=\Sigma_{e\in\beta(s)}f(e)-\Sigma_{e\in\alpha(s)}f(e)$

定义9.8 给定容量有上下界网络$N=(D,s,t,b,c)$，N的**伴随网络**为$N'=(D',s',t',c')$，其中

(1) $V(D')=V(D)\cup\{s',t'\}$，其中$s',t'\notin V(D)$

(2) $E(D')=E(D)\cup\{(s',v),(v,t')|v\in V(D)\}\cup\{(s,t),(t,s)\}$

(3) s',t'分别为N'的源和汇

(4) $c'(e)=\begin{cases} c(e)-b(e) & e\in E(D) \\ \Sigma_{e\in\alpha(v)}b(e) & e=(s',v),v\in V(D) \\ \Sigma_{e\in\beta(v)}b(e) & e=(v,t'),v\in V(D) \\ +\infty & e=(s,t),(t,s) \end{cases}$

定理9.3 给定$N=(D,s,t,b,c)$，其伴随网络为$N'=(D',s',t',c')$，则N中存在可行流，当且仅当N'中最大流使得任给$v\in V(D)$，边(s',v)都满载

算法9.3 容量有上下界网络的最大流算法

输入：容量有上下界网络$N=(D,s,t,b,c)$

输出：最大流函数f，或断定N没有可行流

(1) 构造N的伴随网络$N'=(D',s',t',c')$

(2) 用2F算法求出N'的最大流函数f'

(3) 若f'满足任给$v\in V(D)$，边(s',v)满载，转(4)；否则，输出"N没有可行流"，停止

(4) 根据f'，构造N的一个可行流f，满足$f(e)=f'(e)+b(e)$

(5) 以f为初始流函数，用2F算法求N的最大流，停止

注1：(5)中的2F算法需要将算法9.1中(4)改为满足$f(v,u)>b(u,v)$，且可增载量$l(e)=f(v,u)-v(u,v)$

注2：可以将伴随网络上的加的边和点全部删去，即使$V(D')=V(D),E(D')=E(D)$，但容量不要动，以求出的最大流f'为初始流运行2F算法（即使此时f'可能不满足流函数要求）求出最大流f''，构造$f(e)=f''(e)+b(e)$，此时f为N的最大流

有供需需求的网络流

定义9.9 一个有供需约束的网络定义为六元组$N=(D,X,Y,\sigma,\rho,c)$，其中

(1) D是一个弱连通的有向图

(2) $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}\subset V(D)$是源集合

(3) $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}\subset V(D)$是汇集合

(4) $\sigma:X\to\mathbb{R}$，$\sigma(x_i)$表示x_i的产量

(5) $\rho:Y\to\mathbb{R}$，$\rho(y_j)$表示y_j的需求量

(6) $c:E(D)\to\mathbb{R}$为容量函数，$c(e)$为边e的容量

定义9.10 给定有供需约束的网络$N=(D,X,Y,\sigma,\rho,c)$，N上的流函数$f:E(D)\to\mathbb{R}$满足:

(1) 任给$e\in E(D)$，有$c(e)\geq f(e)\geq 0$

(2) 任给$v\in V(D)-X\cup Y$，有$\Sigma_{e\in\alpha(v)}f(e)-\Sigma_{e\in\beta(v)}f(e)=0$

(3) 任给$1\leq i\leq m$，有$\Sigma_{e\in\beta(x_i)}f(e)-\Sigma_{e\in\alpha(x_i)}f(e)\leq\sigma(x_i)$

(4) 任给$1\leq j\leq n$，有$\Sigma_{e\in\alpha(y_j)}f(e)-\Sigma_{e\in\beta(y_j)}f(e)\geq\rho(y_j)$

定理9.4 给定有供需约束的网络$N=(D,X,Y,\sigma,\rho,c)$，N有可行流的条件是任给$S\subset V(D)$，满足$C(S,\overline{S})\geq\rho(Y\cap\overline{S})-\sigma(X\cap\overline{S})$

定义9.11 给定有供需约束的网络$N=(D,X,Y,\sigma,\rho,c)$，N的**附加网络**为$N'=(D',x_0,y_0,c')$，其中

(1) $V(D')=V(D)\cup\{x_0,y_0\}$，其中$x_0,y_0\notin V(D)$

(2) $E(D')=E(D)\cup\{(x_0,x_i)|i=1,2,\cdots,m\}\cup\{(y_j,y_0)|y=1,2,\cdots,n\}$

(3) x_0,y_0分别为N'的源和汇

(4) $c'(e)=\begin{cases}c(e) & e\in E(D)\\ \sigma(x_i) & e=(x_0,x_i)\\ \rho(y_j) & e=(y_j,y_0)\end{cases}$

引理9.3

有供需约束的网络$N=(D,X,Y,\sigma,\rho,c)$存在可行流，当且仅当其附加网络$N'=(D',x_0,y_0,c')$的最大流f'满足任给$1\leq j\leq n$，$f'(y_j,y_0)=c'(y_j,y_0)$

算法9.4 有供需约束网络的可行流算法

输入：有供需约束的网络$N=(D,X,Y,\sigma,\rho,c)$

输出：N的可行流函数f，或断定N没有可行流

(1) 构造N的附加网络$N'=(D',x_0,y_0,c')$

(2) 用2F算法求出N'的最大流f'

(3) 若f'满足任给$1 \le j \le n$，$f'(y_j, y_0) = c'(y_j, y_0)$，转(4)；否则，输出“$N$没有可行流”，停止

(4) 令$f(e) = f'(e)$，f是N的可行流，停止

图矩阵与图空间

图的空间

定义10.4 给定图$G = (V, E)$，设$E = \{e_1, e_2, \cdots, e_\varepsilon\}$，将$G$的所有边子集对应的向量作为元素，构造向量集合$\mathcal{E}(G) = \{E'\text{对应的向量} | E' \subset E\}$，则$\mathcal{E}(G)$是$F_2$上的线性空间，称为$G$的**边空间**

定义10.5 给定图$G = (V, E)$，G中一些无公共边的圈之并对应G的一个边集合，在$\mathcal{E}(G)$中对应的边向量称为**圈向量**，所有圈向量和零向量构成集合$\mathcal{C}(G)$

定理10.2 $\mathcal{C}(G)$是$\mathcal{E}(G)$的线性子空间，称为**圈空间**

定义10.6 给定连通图G，取G的一棵生成树T，任取一条边$e \in E(G) - E(T)$，则$T + e$上有唯一一个圈（定理2.1），设$e_1, e_2, \cdots, e_{\varepsilon-\nu+1}$为$G$中所有不在$T$上的边，分别记$T + e_1, T + e_2, \cdots, T + e_{\varepsilon-\nu+1}$上所含的圈为$C_1, C_2, \cdots, C_{\varepsilon-\nu+1}$，称其为$G$的一组**基本圈组**

定理10.3 给定连通图G的一棵生成树T，其对应的基本圈组$C_1, C_2, \cdots, C_{\varepsilon-\nu+1}$为$\mathcal{C}(G)$的一组基，$\mathcal{C}(G)$的维数为$\varepsilon - \nu + 1$

定义10.7 给定图$G = (V, E)$，取$V' \subset V$，使得$V' \neq \emptyset$且$\overline{V'} \neq \emptyset$，用$(V', \overline{V'})$表示$E(G)$中两个端点分别在$V'$和$\overline{V'}$中的边子集，称$(V', \overline{V'})$为$G$的一个**断集**，断集在$\mathcal{E}(G)$对应的向量称为**断集向量**，将$G$中所有断集向量与零向量组成的集合记为$\mathcal{S}(G)$

定理10.4 $\mathcal{S}(G)$是$\mathcal{E}(G)$的线性子空间，称为**断集空间**

定义10.8 若$E' \in E(G)$满足$G - E'$不连通，且任给E'的真子集E''，$G - E''$都连通，则称E'为G的**割集**

定义10.9 给定连通图G的生成树T，则G的任一割集必含树T上的一条边，设$e_1, e_2, \cdots, e_{\nu-1}$为树$T$上的所有边，含其的割集分别记为$S_1, S_2, \cdots, S_{\nu-1}$，称其为**基本割集组**

定理10.5 给定连通图G的生成树T，其对应的基本割集$S_1, S_2, \cdots, S_{\nu-1}$为$\mathcal{S}(G)$的一组基，$\mathcal{S}(G)$的维数为$\nu - 1$

定理10.6 任给连通图G的圈向量$C \in \mathcal{C}(G)$和断集向量$S \in \mathcal{S}(G)$，其内积$(C, S) = 0$，运算在F_2上进行

将所有基本圈向量作为行向量，构成一个矩阵，称为**基本圈矩阵**，记为$C_f(G)$

将所有基本割集向量作为行向量，构成一个矩阵，称为**基本割集矩阵**，记为$S_f(G)$

推论10.1 给定连通图G的生成树T，则有$C_f(G) = (I_{\varepsilon-\nu+1} : C_{12})$，$S_f(G) = (S_{11} : I_{\nu-1})$，其中$C_{12}$的列对应树$T$的边，$S_{11}$的列对应余树的边，且$S_{11} = C_{12}^T$

邻接矩阵

定义10.10 给定无向图$G = (V, E)$，设$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_\nu\}$，定义$G$的**邻接矩阵**为$A(G) = (a_{ij})_{\nu\times\nu}$，其中$a_{ij}$为顶点$v_i$和$v_j$之间的边数

定理10.7 设$G = (V, E)$是无向图，其邻接矩阵为$A(G) = (a_{ij})_{\nu\times\nu}$，记$A^n(G) = (a_{ij}^{(n)})_{\nu\times\nu}$，则$a_{ij}^{(n)}$为从$v_i$到$v_j$长为$n$的路径数

定义10.11 给定有向图$D = (V, E)$，设$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_\nu\}$，定义$G$的**邻接矩阵**为$A(D) = (a_{ij})_{\nu\times\nu}$，其中$a_{ij}$以$v_i$为尾$v_j$为头的边数

定理10.7 设$D = (V, E)$是有向图，其邻接矩阵为$A(D) = (a_{ij})_{\nu\times\nu}$，记$A^n(D) = (a_{ij}^{(n)})_{\nu\times\nu}$，则$a_{ij}^{(n)}$为从$v_i$到$v_j$长为$n$的有向路径数

算法10.1 Warshall算法

输入：有向图的邻接矩阵$A(D) = (a_{ij})_{\nu\times\nu}$

输出：可达性矩阵$R(D) = (r_{ij})_{\nu\times\nu}$，若$v_i$可达$v_j$，则$r_{ij} = 1$，否则，$r_{ij} = 0$

(1) 对所有$1 \le i \le \nu$，$r_{ii}^{(0)} = 1$，对所有$1 \le i, j \le \nu$，若$a_{ij} > 0$，令$r_{ij}^{(0)} = 1$，否则令$r_{ij}^{(0)} = 0$；令$l = 0$

(2) 若$l = \nu$，输出$R(D) = (r_{ij})_{\nu\times\nu} = (r_{ij}^{(\nu)})_{\nu\times\nu}$，停止；否则，转(3)

(3) 对所有的$1 \le i \le \nu$，若$r_{i(l+1)}^{(l)} = 1$，则对所有的$1 \le j \le \nu$，令$r_{ij}^{(l+1)} = r_{ij}^{(l)} \vee r_{(l+1)j}^{(l)}$；否则令$r_{ij}^{(l+1)} = r_{ij}^{(l)}$。转(4)

(4) 令$l \leftarrow l+1$，转(2)

引理10.1 对于$0 \le l \le \nu$，Warshall算法满足

(1) $r_{ij}^{(l)} = 1$，当且仅当图D中存在从v_i到v_j的有向路径，且路径上其他顶点均在$\{v_1, v_2, \cdots, v_l\}$中

(2) $r_{ii}^{(l)} = 1$，当且仅当v_i在D中一个有向回路上，且回路上其他顶点均在$\{v_1, v_2, \cdots, v_l\}$中

关联矩阵

定义10.12 给定无环无向图$G = (V, E)$，设$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_\nu\}$，$E = \{e_1, e_2, \cdots, e_\varepsilon\}$，定义$G$的**关联矩阵**为$B(G) = (b_{ij})_{\nu \times \varepsilon}$，$b_{ij}$=$1, v_i$与$e_j$关联，$0, v_i$与$e_j$不关联

删去$B(G)$的任意一行得到的矩阵称为G的**基本关联矩阵**，记为$B_f(G)$

定理10.10 若G是连通图，则$r(B(G)) = r(B_f(G)) = \nu - 1$，$r$表示秩

推论10.2 设G是简单图，则$r(B(G)) = r(B_f(G)) = \nu - \omega$，$\omega$为$G$的连通片个数

定理10.11 设G是连通图，$e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_{\nu-1}} \in E(G)$，则$G[\{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_{\nu-1}}\}]$是$G$的生成树，当且仅当$B_f(G)$中由第$i_1, i_2, \cdots, i_{\nu-1}$列构成的子矩阵为满秩矩阵

定义10.13 给定有向图$D = (V, E)$，设$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_\nu\}$，$E = \{e_1, e_2, \cdots, e_\varepsilon\}$，定义$G$的**关联矩阵**为$B(D) = (b_{ij})_{\nu \times \varepsilon}$，$b_{ij}$=-$1, v_i$是$e_j$的头，$1, v_i$是$e_j$的尾，$0, v_i$与$e_j$不关联

定理10.12 若D是有向连通图，则$r(B(D)) = r(B_f(D)) = \nu - 1$

推论10.3 设D是有向图，则$r(B(D)) = r(B_f(D)) = \nu - \omega$，$\omega$为$D$的底图$G$的连通片个数

引理10.2 设$B(D)$是有向图D的关联矩阵，B'是$B(D)$的任意一个子方阵，则$\det(B') = 0, -1, 1$

定理10.13(Binet-Cauchy) 设A, B分别为$m \times n$与$n \times m$的矩阵，其中$m \le n$，则$\det(A \times B) = \Sigma_{1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_m \le n} \det(A(12 \cdots m; k_1 k_2 \cdots k_m)) \times \det(B(k_1 k_2 \cdots k_m; 12 \cdots m))$

定理10.14 设D是弱连通有向图，G是D的底图，$e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_{\nu-1}} \in E(D)$，在略去其方向后，在底图$G$中，$G[\{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_{\nu-1}}\}]$是$G$的生成树，当且仅当$B_f(D)$中由第$i_1, i_2, \cdots, i_{\nu-1}$列构成的子矩阵为满秩矩阵

定理10.15 设G是无环连通无向图，将G的每条边任意定向，得到一个有向图D，则G的生成树个数为$\tau(G) = \det(B_f(D) \times B_f^T(D))$

作业

第七章作业

2 4 6 8 9 14 16 17 18

2. 若G是ν个顶点ε条边的简单图，证明：$\chi(G) \ge \frac{\nu^2}{\nu^2 - 2\varepsilon}$

χ种颜色将ν个顶点分为了χ个子集，每个子集内部没有连边，因此$\varepsilon \le \frac{1}{2}(\nu^2 - \Sigma_{i=1}^{\chi} \nu_i^2)$

而$\Sigma_{i=1}^{\chi} \nu_i^2 \ge \frac{\nu^2}{\chi}$，因此$\varepsilon \le \frac{1}{2} \frac{\nu^2(\chi - 1)}{\chi} = \frac{1}{2}(\nu^2 - \frac{\nu^2}{\chi})$

化简得到$\chi \ge \frac{\nu^2}{\nu^2 - 2\varepsilon}$

4.设G的度数序列为$d_1, d_2, \cdots, d_\nu$，且$d_1 \ge d_2 \ge \cdots \ge d_\nu$，则$\chi(G) \le \max_i \min\{d_i + 1, i\}$

考虑按度数从大到小对G染色，对于第i个顶点v_i，如果使用了i种颜色，此时一定够用，因为可以将每个顶点染成不同的颜色；如果使用了$d_i + 1$种颜色，对于v_i的邻接点可以使用d_i种颜色，v_i可以使用第$d_i + 1$种颜色，也够用；因此对于v_i，只要使用$\min\{d_i + 1, i\}$种颜色一定够用，因此对于图G，只要使用$max_i \min\{d_i + 1, i\}$一定够用，此为$\chi(G)$的上界

6. 证明：$\chi(G) + \chi(G^c) \le \nu + 1$

对ν归纳，对于$\nu = 1$，成立

假设对于$\nu=n$时成立，对于$\nu=n+1$的图G，任选一个顶点v_{n+1}，考虑删除v_{n+1}的导出子图G'，有$\chi(G')+\chi(G'^c)\le n+1$

若$\chi(G')+\chi(G'^c)\le n$，则在G和G^c中，均对v_{n+1}用一种新颜色染色，满足$\chi(G)+\chi(G^c)\le n+2$

现考虑$\chi(G')+\chi(G'^c)=n+1$，因为$deg_G(v_{n+1})+deg_{G^c}(v_{n+1})=n$，因此必有$deg_G(v_{n+1})<\chi(G')$或$\deg_{G^c}(v_{n+1})<\chi(G'^c)$，因此必有一个图中的$v_{n+1}$可以使用图中已有的颜色，因此最多只会产生一个新颜色，因此$\chi(G)+\chi(G^c)\le n+2$

8. 轮是一个圈加上一个新顶点，把圈上的每个顶点都和新顶点之间连一条边，求ν阶轮的边色数

默认ν指圈上的顶点数，且$\nu>2$

对于不在圈上的每一条边，显然需要不同的颜色，因此需要ν种颜色，下证可以用这ν种颜色给圈上的边正常染色

设圈上的顶点依次为$v_1,v_2,\cdots,v_\nu$，新顶点记为v，v与v_i之间的连边记为r_i，r_i使用颜色i

考虑v_1,v_2之间的连边，可以使用颜色3染色，考虑v_2,v_3之间的连边，可以使用颜色4染色，以此类推

v_i和v_{i+1}之间的连边可以使用颜色$i+2$染色，(加法如果超过ν，则减去ν)

因此可以使用ν种颜色染色，边色数为ν

9. 给出二分图正常Δ边着色的方法

(1) 任取一条未染色边$e=(u,v)$，若不存在这样的e，停止；否则转(2)

(2) 找出与u,v关联的边未用到的最小颜色c_u和c_v

(3) 若$c_u=c_v$，以该颜色给e染色，转(1)；否则，转(4)

(4) 不妨设$c_u<c_v$，从v开始找到一条颜色为c_u,c_v交替的路径，转(5)

(5) 交替路径上的颜色c_1和c_2，此时将e染为c_u，标记e已染色，转(1)

14.设有4名教师x_1,x_2,x_3,x_4，给5个班级y_1,y_2,y_3,y_4,y_5上课，教学要求如下：

$$A=\left(\begin{array}{c|ccccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5\\ \hline x_1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ x_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ x_3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ x_4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2\end{array}\right)$$

(1)这一天最少需要安排多少课时？排出这样的课表

$\Delta=4$，因此至少需要4课时，可以给出4课时的方案

	1	2	3	4
x_1	y_1	y_3		
x_2	y_3	y_1	y_4	
x_3	y_4	y_2	y_5	y_3
x_4	y_5	y_5	y_2	y_4

(2)不增加课时数情况下，排出一个使用教室最少的课表

$\lceil\varepsilon/p\rceil=4$，因此至少需要4个教室，课表不变

16. 证明：若一个平面图的平面嵌入是Euler图，则它的对偶图是二分图

设该平面图为G，则其对偶图为G^*，因为G是Euler图，因此G的每个顶点度数为偶数，因此G^*每个面的度数为偶数，因此G^*中围绕每个面组成的圈都是偶圈，任取G^*中两个圈，将其合并成一个大圈，其边数仍然为偶，以此类图，G^*中每个圈都是偶圈，因此G^*中没有奇圈，因此G^*是二分图

17. 设G是$\nu(\nu \geq 4)$阶极大平面图的平面嵌入，证明：G的对偶图G^*是2$-$边连通的3次正则图

因为G是极大平面图，因此G的每个面都是三角形，因此G^*的每个顶点的度数均为3，因此G^*是3次正则图

若G^*不连通，则G中顶点可以至少分为三个等价类X, Y和v_0，其中v_0与G^*的外部面对应，X, Y分别与G^*的一个连通片的面对应，此时X与Y之间没有边，但若此时在X与Y之间加边，仍为平面图，与极大性矛盾，因此G^*连通

因为G是极大平面图，因此G没有环（因为有环不存在极大这一概念），因此G^*没有桥，因此G^*是$2-$边连通的

18.证明：一个平面图G是可$2-$面着色的当且仅当G是Euler图

必要性：由16，G^*是二分图，因此G^*可$2-$着色，因此G可$2-$面着色

充分性：因为G可$2-$面着色，因此G^*可$2-$着色，因此G^*是二分图，所以G^*不含奇圈，因此G^*的每个面的度数必为偶数，因此G的每个顶点的度数均为偶数，因此G为欧拉图

第八章作业

2 3 5 6 7 13 14

2.设D是没有有向圈的有向图

(1) 证明$\delta^- = 0$

设$\delta^- > 0$，任取一点v_0，设$S = \{v_0\}$，则必然存在$v_1 \notin S$，$(v_1, v_0) \in E(D)$，令$S = S \cup \{v_1\}$，显然$(v_0, v_1) \notin E(D)$，因此必然存在$v_2 \notin S$，使得$(v_2, v_1) \in E(D)$，令$S = S \cup \{v_2\}$，以此类推，对于$S = \{v_0, v_1, \cdots, v_n\}$，必然存在$v_{n+1} \notin S$，$(v_{n+1}, v_n) \in E(D)$，与$D$的顶点有限矛盾，因此$\delta^- = 0$

(2) 证明：存在D的一个顶点序列$v_1, v_2, \cdots, v_\nu$，使得任给$i(1 \leq i \leq \nu)$，D的每条以v_i为终点的有向边在$\{v_1, v_2, \cdots, v_{i-1}\}$中都有它的起点

因为$\delta^- = 0$，因此必然存在$v_1 \in V(D)$，$\deg^-(v_1) = 0$，此时令$D_1 = D - \{v_1\}$，则D_1中无有向圈，因此存在$v_2 \in V(D_1)$，$deg^-(v_2) = 0$，此时以v_2为终点的有向边的起点只能为v_1，依次类推，因为$deg^-(v_i)$在D_{i-1}中为0，因此以v_i为终点的有向边的起点只能在$\{v_1, v_2, \cdots, v_{i-1}\}$中

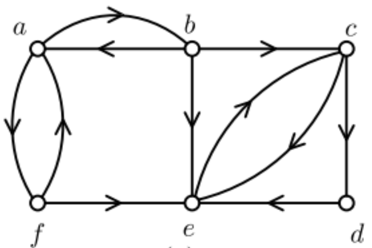
3. 证明：任给无向图G，G都有一个定向图D，使得对于所有$v \in V, |deg^+(v) - deg^-(v)| \leq 1$成立

若一个图G是Euler图，则在G的一条Euler回路上，每个顶点进和出的次数相等，因此将其按照Euler回路的方向定向，对于所有$v \in V, deg^+(v) = deg^-(v)$

对于任意的连通无向图G，因为其度数为奇数的顶点必为偶数个，设为$v_1, v_2, \cdots, v_{2k}$，则构造图G'，满足$V(G') = V(G)$，$E(G') = E(G) + \{(v_i, v_{i+k}) | 1 \leq i \leq k\}$，此时$G'$中所有顶点度数为偶数，且$G'$连通，因此$G'$是Euler图，按照一条Euler回路定向，满足任意$v \in V(G'), deg^+(v) = deg^-(v)$，此时对于$G$，若边$e \in E(G)$同时也在$G'$，则以同样的方向定向，因为对任意$v \in V(G)$，与其关联的边最多只比$G'$中少1条，因此有$|deg^+(v) - deg^-(v)| \leq 1$

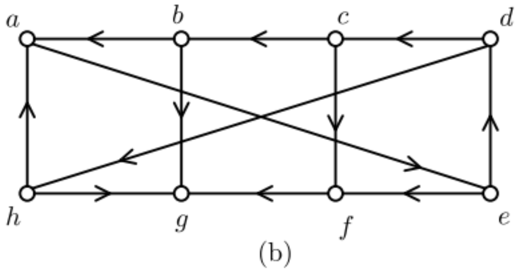
若G是不连通的，将其每个连通片视为一个连通的无向图，如上操作，仍然成立

5.求各有向图的强连通片



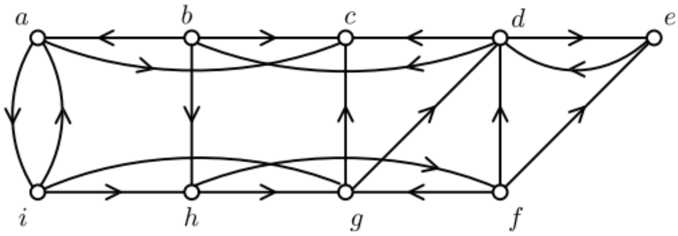
(a)

(a) $\{abf\}\{cde\}$



(b)

(b) $\{abcdeh\}\{g\}\{h\}$



(c)

(c) $\{abdefghi\}\{c\}$

6.证明：连接有向图同一个强连通片中两个顶点的有向通路上的所有顶点也都在这个强连通片中

设$P(u,v)$是连接同一强连通片中u,v的有向通路，w是$P(u,v)$上一点（可以与u或v重合），因此$P(u,v)=P(u,w)+P(w,v)$

因为u,v在同一强连通片中，因此存在有向通路$P(v,u)$，对于w，$P(w,v)$是w到v的有向通路，$P(v,u)+P(u,w)$是v到u的有向通路，因此w和v互相可达，因此在同一强连通片中；同理w和u也在同一强连通片中，根据w的任意性，命题成立

7.证明无向图G有一种定向方法，使得其最长有向轨道长度不超过Δ

设$C=\{V_1,V_2,\cdots,V_k\}$是G的一种正常$k-$着色，$k=\chi(G)$，V_i中的顶点着颜色i，对于$e=(u,v)\in E(G)$，设$u\in V_i$，$v\in V_j$，若$i<j$，则定向为$u\to v$，反之定向为$v\to u$，因此最长有向轨道长度为$k-1$，因为$k=\chi(G)\le\Delta+1$，因此其最长有向轨道长度不超过Δ

13.若竞赛图不是有向Hamilton图，则它有唯一的王

不是有向Hamilton图不能推出有一个全胜顶点，可以有全负顶点

14.证明：$\nu\ge3$阶的竞赛图中有得分相同的顶点，当且仅当图中有长为3的有向圈

必要性：设图中得分相同的顶点为u,v，不妨设$(u,v)\in E$，则对于任意顶点$w\ne u,v$，若$(u,w),(w,v)\in E$，u比v多的一分；若$(u,w),(v,w)\in E$，此时得分相同；若$(w,u),(w,v)\in E$，此时得分相同，因此要让u,v得分相同，必须存在w，使得$(v,w),(w,u)\in E$，此时存在长为3的有向圈

充分性：反证，若没有得分相同的顶点，则ν个顶点的得分分别为$0,1,2,\cdots,\nu-1$，此时不存在有向圈，矛盾，因此有得分相同的顶点

第九章作业

1 2 4 5 9 10 12 17

1.假设f是网络$N=(D,s,t,c)$上的流函数，证明：$\Sigma_{e\in\alpha(t)}f(e)-\Sigma_{e\in\beta(t)}f(e)=\Sigma_{e\in\beta(s)}f(e)-\Sigma_{e\in\alpha(s)}f(e)$

考虑所有结点，有$\Sigma_{v\in V(D)}(\Sigma_{e\in\alpha(v)}f(e)-\Sigma_{e\in\beta(v)}f(e))=0$，因为对于任意边$e=(u,v)$，在$\alpha(v)$中计入$+f(e)$，在$\beta(u)$中计为$-f(e)$

将其拆开，分为s,t以及其他结点，有
$(\Sigma_{e\in\alpha(s)}f(e)-\Sigma_{e\in\beta(s)}f(e))+(\Sigma_{e\in\alpha(t)}f(e)-\Sigma_{e\in\beta(t)}f(e))+\Sigma_{v\in V(D)-\{s,t\}}(\Sigma_{e\in\alpha(v)}f(e)-\Sigma_{e\in\beta(v)}f(e))=0$

由定义9.2的(2)，有$\Sigma_{v\in V(D)-\{s,t\}}(\Sigma_{e\in\alpha(v)}f(e)-\Sigma_{e\in\beta(v)}f(e))=0$

因此，$(\Sigma_{e\in\alpha(s)}f(e)-\Sigma_{e\in\beta(s)}f(e))+(\Sigma_{e\in\alpha(t)}f(e)-\Sigma_{e\in\beta(t)}f(e))=0$

因此$\Sigma_{e\in\alpha(t)}f(e)-\Sigma_{e\in\beta(t)}f(e)=\Sigma_{e\in\beta(s)}f(e)-\Sigma_{e\in\alpha(s)}f(e)$

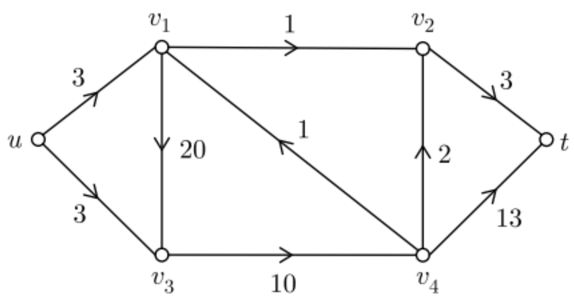
2.证明：在Ford-Fulkerson算法的第二步，通过可增载轨道得到的函数$\overline{f}$是流函数

(1) 取$e\in E(D)$，若e不是$P(s,t)$上的边，有$\overline{f}(e)=f(e)$，有$c(e)\geq\overline{f}(e)\geq 0$；若$e$是$P(s,t)$的正向边，有$l(e)\geq l(P)\geq 0$，且$l(e)=c(e)-f(e)$，因此$\overline{f}(e)=f(e)+l(P)\leq f(e)+l(e)=c(e)$；若$e$是$P(s,t)$的反向边，有$l(e)\geq l(P)\geq 0$且$l(e)=f(e)$，因此$\overline{f}(e)=f(e)-l(P)\geq f(e)-l(e)=0$；综上，任给$e\in E(D)$，有$c(e)\geq\overline{f}(e)\geq 0$

(2) 取$v\in V(D)-\{s,t\}$，若v不是$P(s,t)$上的顶点，则任给$e\in\alpha(v)$或$e\in\beta(v)$，均有$\overline{f}(e)=f(e)$，因此$\Sigma_{e\in\alpha(v)}\overline{f}(e)-\Sigma_{e\in\beta(v)}\overline{f}(e)=\Sigma_{e\in\alpha(v)}f(e)-\Sigma_{e\in\beta(v)}f(e)=0$；若$v$是$P(s,t)$上的顶点，设$P(s,t)=s\cdots e_1ve_2\cdots t$，则$e_1$和$e_2$可能是正向边或反向边，共4种可能，若均是正向边，有
$\overline{f}(e_1)=f(e_1)+l(P),\overline{f}(e_2)=f(e_2)+l(P)$，因此
$\Sigma_{e\in\alpha(v)}\overline{f}(e)-\Sigma_{e\in\beta(v)}\overline{f}(e)=[f(e_1)+l(P)+\Sigma_{e\in\alpha(v)-\{e_1\}}f(e)]-[f(e_2)+l(P)+\Sigma_{e\in\beta(v)-\{e_2\}}f(e)]=[l(P)+\Sigma_{e\in\alpha(v)}f(e)]-$
；其他情况同理，因此任给$v\in V(D)-\{s,t\}$，有$\Sigma_{e\in\alpha(v)}\overline{f}(e)-\Sigma_{e\in\beta(v)}\overline{f}(e)=0$

综上，$\overline{f}$是流函数

4.求最大流



可增载轨道：(1)$uv_1v_3v_4t$，流量3；(2)$uv_3v_4v_2t$，流量2；(3)$uv_3v_4v_1v_2t$，流量1

最大流6

5.证明：若网络中每条边的容量均为整数，则最大流的流量也一定是整数

由最大流最小截定理，其最小截为截边容量总和，其为整数，因此最大流也为整数

9.证明：若供需约束的网络N存在可行流f，其附加网络上N'一定存在流函数f'，使得任给$1\leq j\leq n$，f'使得边(y_j,y_0)满载

对于N上一个可行流f，在N'上构造f'，满足若$e\in E(D)\subset E(D')$，$f'(e)=f(e)$；若$e\in\{(x_0,x_i)\}$，
$f'(e)=\Sigma_{e'\in\beta(x_i)}f(e')-\Sigma_{e'\in\alpha(x_i)-\{e\}}f(e')$；若$e\in\{(y_i,y_0)\}$，
$f'(e)=\Sigma_{e'\in\alpha(y_i)}f(e')-\Sigma_{e'\in\beta(y_i)-\{e\}}f(e')$

对于$e\in E(D)$，有$c(e)\geq f'(e)\geq 0$；对于$e\in\{(x_0,x_i)\}$，$c(e)=\sigma(x_i)$，其
$\Sigma_{e'\in\beta(x_i)}f(e')-\Sigma_{e'\in\alpha(x_i)-\{e\}}f(e')\leq\sigma(x_i)$，因此，满足$c(e)\geq f'(e)\geq 0$；

对于顶点v，若$v\in V(D)-X\cup Y$；则与v关联的所有边e均在$E(D)$中，在f中满足供需约束的网络流函数的定义(2)；若$v\in X$，则

$\Sigma_{e\in\beta(v)}f'(e)-\Sigma_{e\in\alpha(v)}f'(e)=f'(e)=\Sigma_{e\in\beta(v)}f'(e)-\Sigma_{e\in\alpha(v)-\{(x_0,v)\}}f'(e)-f'((x_0,v))=0$；若$v\in Y$同理

此时，只有对于$e \in \{(y_j, y_0)\}$，可能有$f(e) \geq c(e) = \rho(y_j)$，类似可增载轨道构造可减载轨道，可以使得所有$f(e) = \rho(y_j)$，因此成立

10.证明：在有正下界$b(e)$但无上界（$c(e) = +\infty$）的网络中，存在可行流的充要条件时对每一条边e，要么e在一个有向回路上，要么e在由s到t或由t到s的有向轨道上

必要性：令$e = (u, v)$，若e不满足条件，则v不可达u，且s可达u和v可达t至少有一个不成立，t可达u和v可达s至少有一个不成立，不妨设s不可达u，则u, v子图的流入量为0，满足；其他情况同理，因此e满足条件

充分性：构造f如下，$f(e)$等于e所在的所有有向回路和s到t轨道和t到s轨道的b最大值之和，对于任意e，显然有$f(e) \geq b(e)$，对于任意$v \in V(D) - \{s, t\}$，以v为头和为尾的边必然两两成组，同时在一个有向回路，或s和t之间的有向轨道上，因此v的流量守恒，满足f是可行流

12.给定容量有上下界的网络 $N = (D, s, t, b, c)$ 的顶点子集 V'，记 $\alpha(V')$ 为 D 中头在 V' 中、尾在 $V(D) - V'$ 的边集，记 $\beta(V')$ 为 D 中尾在 V' 中、头在 $V(D) - V'$ 的边集合。若 $\sum_{e\in\alpha(V')} c(e) - \sum_{e\in\beta(V')} b(e) < 0$，则称需 V'"冒出"流；若 $\sum_{e\in\alpha(V')} b(e) - \sum_{e\in\beta(V')} c(e) > 0$，则称需 V'"漏掉"流。证明：容量有上下界的网络没有可行流，当且仅当存在一个顶点子集 $V' \subseteq V(D) - \{s, t\}$，使得需 V'"冒出"流，或者需 V'"漏掉"流。

必要性：若无可行流，则在附加网络N'中，并非所有(s', v)边均满载，即$Val(f) < \Sigma_{e=(s'v)} c'(e)$，考虑$N'$的最小截$(S, \overline{S})$，有$C(S, \overline{S}) < \Sigma_{e=(s',v)} c'(e)$，令$V' = S \cap V(D)$，则最小截中边分为3类，所有$s'$到$V(D) - V'$的边，所有$V'$到$t'$的边，所有$V'$到$V(D) - V'$中边，因此
$C(S, \overline{S}) = \Sigma_{e=(s',v),v\in V(D)-V'} c'(e) + \Sigma_{e=(v,t'),v\in V'} c'(e) + \Sigma_{e=(v_1,v_2),v_1\in V',v_2\in V(D)-V'} c'(e) < \Sigma_{e=(s',v),v\in V'} c'(e) + \Sigma_{e=(s',v),v\in V(D)-}$
，因此$\Sigma_{e=(v,t'),v\in V'} c'(e) + \Sigma_{e=(v_1,v_2),v_1\in V',v_2\in V(D)-V'} c'(e) < \Sigma_{e=(s',v),v\in V'} c'(e)$，而
$\Sigma_{e=(s',v),v\in V'} c'(e) = \Sigma_{e\in\beta(V')} b(e) + \Sigma_{e=(v_1,v_2),v_1,v_2\in V'} c(e) - b(e)$，
$\Sigma_{e=(v,t'),v\in V'} c'(e) = \Sigma_{e\in\alpha(V')} b(e) + \Sigma_{e=(v_1,v_2),v_1,v_2\in V'} c(e) - b(e)$，
$\Sigma_{e=(v_1,v_2),v_1\in V',v_2\in V(D)-V'} c'(e) = \Sigma_{e\in\alpha(V')} c(e) - b(e)$，因此$\Sigma_{e\in\alpha(V')} c(e) < \Sigma_{e\in\beta(V')} b(e)$，此时$V'$冒出流，同理，此时$V(D) - V'$漏掉流

充分性：令$S = \{s'\} \cup \{s\} \cup V'$，则$(S, \overline{S})$是附加网络的一个截，由上述过程的逆过程可得$C(S, \overline{S}) < \Sigma_{e=(s',v)} c'(e)$，因为$Val(f) < C(S, \overline{S})$，因此最大流不满载，不是可行流

17. 修改算法9.4求有供需约束网络的最大流

对于算法9.4中的第(4)步，修改为，将N'中(y_j, y_0)边的容量改为$+\infty$，继续使用2F算法，求x_0到y_0的最大流，算法结束后，令$f(e) = f'(e)$，f是最大流

第十章作业

3. 证明定理10.5

将G中边如下编号，先将$S_1, S_2, \cdots, S_{\nu-1}$中在$T$上的那条边编号为$e_1, e_2, \cdots, e_{\nu-1}$，再将不再$T$上的边任意编号，则有

$S_1 = (1, 0, \cdots, 0, *, \cdots, *)$

$S_2 = (0, 1, \cdots, 0, *, \cdots, *)$

$\cdots$

$S_{\nu-1} = (0, 0, \cdots, 1, *, \cdots, *)$

给定常数$k_1, k_2, \cdots, k_{\nu-1}$，若$k_1S_1 + k_2S_2 + \cdots + k_{\nu-1}S_{\nu-1} = (k_1, k_2, \cdots, k_{\nu-1}, *, \cdots, *) = (0, 0, \cdots, 0, 0, \cdots, 0)$，则必有$k_1 = k_2 = \cdots = k_{\nu-1} = 0$，因此$S_1, S_2, \cdots, S_{\nu-1}$线性无关

任给$S \in \mathcal{S}(G)$，设S上属于T的边为$e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_t}$，则有$S + S_{i_1} + S_{i_2} + \cdots + S_{i_t} = (0, 0, \cdots, 0, *, \cdots, *)$，因为$S + S_{i_1} + S_{i_2} + \cdots + S_{i_t} \in \mathcal{S}(G)$，且$S + S_{i_1} + S_{i_2} + \cdots + S_{i_t}$没有在$T$上的边，不是割集，因此只能是零向量，因$S = S_{i_1} + S_{i_2} + \cdots + S_{i_t}$，即$S$可以表示为$S_1, S_2, \cdots, S_{\nu-1}$的线性组合

综上$S_1, S_2, \cdots, S_{\nu-1}$是$\mathcal{S}(G)$的一组基，维数为$\nu-1$

6.已知$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，求$a_{22}^{(1001)}$

先计算几个找规律，$A^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$A^3=\begin{pmatrix}0&2&0\\2&0&2\\0&2&0\end{pmatrix}$，$A^4=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}$

可以得到$A^{2k}=\begin{pmatrix}2^{k-1}&0&2^{k-1}\\0&2^k&0\\2^{k-1}&0&2^{k-1}\end{pmatrix}$，$A^{2k+1}=\begin{pmatrix}0&2^k&0\\2^k&0&2^k\\0&2^k&0\end{pmatrix}$

因此$a_{22}^{(1001)}=0$

8.已知图G的邻接矩阵为$A(G)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$，在不画出图的前提下，说明$G$是否连通

因为有4个顶点，因此判断连通需要求出$A+A^2+A^3$，可以得到$A^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，$A^3=A$，因此

$A+A^2+A^3=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&2\\0&0&2&1\end{pmatrix}$，图$G$不连通

9.已知G的基本圈矩阵是

$C_f(G)=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&1&0&1\\1&0&1&0&0&1&1&1\end{pmatrix}$

求G的基本割集矩阵$S_f(G)$

找到T上边对应的列，分别为e_2, e_4, e_5, e_7，按照$(e_2, e_4, e_5, e_7, e_1, e_3, e_6, e_8)$重新排列得到

$\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0&1&1\\0&0&1&0&0&0&1&1\\0&0&0&1&1&1&1&1\end{pmatrix}$

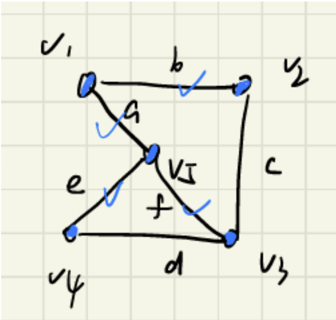
因此$C_{12}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&1\\0&0&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$，因此$S_{11}=C_{12}^T=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&0&0&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}$

因此$S_f(G)=\begin{pmatrix}1&1&0&1&1&0&0&0\\1&0&0&1&0&1&0&0\\0&1&1&1&0&0&1&0\\0&1&1&1&0&0&0&1\end{pmatrix}$，顺序为$(e_2, e_4, e_5, e_7, e_1, e_3, e_6, e_8)$

重新排列得到$S_f(G)=S_f(G)=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&1&1&1&0\\0&1&0&1&1&0&1&1\end{pmatrix}$

10.已知图G的基本关联矩阵为$B_f(G)=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1&0\end{pmatrix}$，求$G$的基本圈矩阵$C_f(G)$和基本割集矩阵$S_f(G)$

先求出$B(G)=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1&0\\1&0&0&0&1&1\end{pmatrix}$

根据关联矩阵画出图

取生成树为的边为$\{a,b,e,f\}$，则$C_f(G)=\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&1\\0&1&0&0&1&1\end{pmatrix}$，$S_f(G)=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&0\\1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{pmatrix}$，排列顺序为$(a,b,e,f,c,d)$

20.已知图G的基本关联矩阵为$B_f(G)=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$，在不画出图的前提下，回答下列问题：

(1)G是否是连通图

当且仅当$B_f(G)$的秩是$\nu-1$时，图连通，可以看出三行线性无关，因此秩是3，图连通

(2)G是否是Euler图

计算所有顶点的度数，可以看出第二行的顶点度数为奇数，因此不是Euler图

(3)G是否可以一笔画出

由于第二行的顶点度数为奇数，其他两行的顶点度数为偶数，因此被删去行的顶点度数为奇数，奇数顶点有2个，存在Euler迹，可以一笔画出

(4)G是否是平面图

该图只有4个顶点，显然不含能收缩为K_5或$K_{3,3}$的子图，因此是平面图

(5)$\mathcal{C}(G)$是多少维线性空间

$dim(\mathcal{C}(G))=\varepsilon-\nu+1=2$

(6)G共有几个圈

因为基本圈有2个，圈是基本圈的对称差，因此圈有3个（排除空集）

(7)G是否是Hamilton图

因为能构造出Hamilton回路，是Hamilton图，$1\to2\to3\to4\to1$

(8)求$\tau(G)$

由定理10.15，$\tau(G)=\det(B_f(D)\times B_f^T(D))$，任意定向，可以得到

$$B_f(D)=B_f(G)=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\-1&-1&0&-1&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$$

此时$B_f(D)\times B_f^T(D)=B_f(G)=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&3&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$

求出其行列式为8