1 解析函数

1.1 复变数函数

何为复变数函数？复数的一个子集（E）与复数之间的对应（f），记为：$w = f(z), z \in E$。如果对应是一对应一的，则称之为单值函数（无特殊说明，均为单值），记为：$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z \in E$ 显然一个单值函数可以理解为两个二元函数的组合。如果对应是一对应多的，则称为多值函数；如果反过来也是一对应一，则称为一一映照或双方单值函数。例如：

$$z^a, z \in \mathbb{C}.$$

当a 是整数的时候，它是单值函数；而当a 不是整数的时候它是多值函数。又例如$Arg(z)$ 是多值函数，而$arg(z)$ 单值函数。$1/z$ 是$\mathbb{C}/\setminus\{0\}$ 到$\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 的一一映照。当然如果我们把无穷远点考虑进去，则$1/z$ 是$\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 到$\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 的一一映照。

从几何上来说，复变数函数就是把复平面上的一个点映成另一个复平面的一个集合。特别地，我们列举以下常见变换：

平移 $z \to z + a$;

旋转 $z \to ze^{i\theta}$;

伸缩 $z \to rz, r \geq 0$;

对称 $z \to \bar{z}$。

例如：关于虚轴对称：$z \to i\overline{(-iz)} = -\bar{z}$。

例子1. 求下列点集在映照$w = z^2$ 下的像：

1) 平行于坐标轴的直线；

2) 双曲线族$x^2 - y^2 = c_1$ 及$2xy = c_2$；

3) 半圆环域：$1 < |z| < 2$，$0 < \arg z < \pi$。

解. 设$z = x + iy$，$w = u + iv = (x^2 - y^2) + 2xyi$。

1) *(a)* $y = c$ 为常数，则

$$u = x^2 - c^2, v = 2xc.$$

当$c \neq 0$ 的时候，消去x，得到

$$u - \frac{v^2}{4c^2} + c^2 = 0.$$

这是开口往右的抛物线。而当$c = 0$ 的时候，$v = 0$，退化为非负实轴，原因是$u \geq 0$。

(b) $x = c$ 为常数，则

$$u = c^2 - y^2, v = 2yc.$$

当$c \neq 0$ 的时候，消去y，得到

$$u + \frac{v^2}{4c^2} - c^2 = 0.$$

这是开口往左的抛物线。而当$c = 0$ 的时候，$v = 0$，退化为非正实轴，原因是$u \leq 0$。

2) 分别是$u=c_1$ 和$v=c_2$ 的直线，并且可以全部取到。

3) 半径是$1-4$ 的环面（去掉实轴部分）。

1.2 极限、连续性

定义. 设$w=f(z)$ 在z_0 的某个去心邻域内有定义，则

- 如果$\lim_{z\to z_0}|f(z)-w_0|=0$，就称$\lim_{z\to z_0}f(z)=w_0$；
- 如果$\lim_{z\to z_0}|f(z)|=+\infty$，就称$\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty$；

当然我们也可以用极限语言来表述：

- 对任意$\epsilon>0$，存在正的ρ 使得$|f(z)-w_0|<\epsilon$ 对任意$0<|z-z_0|<\rho$ 成立；
- 对任意$M>0$，存在的ρ 使得$|f(z)|>M$ 对任意$0<|z-z_0|<\rho$ 成立。

定义(连续)**.** 设$f(z)$ 是一个复变数函数，如果

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$$

则称f 在z_0 点连续。如果f 在区域D 上每点都连续，则称f 在D 上连续。

连续性有简单的判断方式。

定理. *函数$f(z)=u(x,y)+v(x,y)i$ 在$z_0=x_0+iy_0$ 处连续的充分必要条件是u,v 在(x_0,y_0) 处连续。*

原因：

$$\max\{|u(x,y)-u(x_0,y_0)|,|v(x,y)-v(x_0,y_0)|\}\leq|f(z)-f(z_0)|\leq|u(x,y)-u(x_0,y_0)|+|v(x,y)-v(x_0,y_0)|.$$

复变函数的连续概念与实变数函数一致，因而相应运算规律仍然成立（加减乘除复合）。

1.3 导数、解析

定义. 设复变数函数$w=f(z)$ 是定义在区域D上的复变函数，$z_0\in D$。如果以下极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

存在，我们称$w=f(z)$ 在点z_0 （复）可微，相应极限称为$w=f(z)$ 在z_0 点的导数或者微商，记为$f'(z_0)$；如果$f(z)$ 在区域D 内每一点都可微，则称$f(z)$ 在D 上解析；如果$f(z)$ 在z_0 的某个邻域内可微，则称$f(z)$ 在z_0 处解析。如果$f(z)$ 在z_0 点不解析，则称之为奇点。

例子2. *求$f(z)=\bar{z}$ 在哪可微；$arg z$ 呢？*

解. （*1*）设$z = x + iy$，$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$，则

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}.$$

以两种方式让Δz 趋于0。（*1*）沿着实轴趋于0；（*2*）沿着虚轴趋于0。极限分别为1 和-1，所以处处不可微。

（*2*）$argz$ 也处处不可微，除了零点和负实轴上没定义或者不连续外，其他地方我们可以选取两种不同的Δz 趋于零的方式，一种是连接z 与零的射线；另一种是以$|z|$ 为半径零为圆心的圆弧。两种趋于零得到的相关极限是不一样的，所以不可微。

例子3. 求多项式函数$f(z) = z^n$ 的微分。

解. 对任意复数z，我们有

$$f(z+\Delta z) - f(z) = (z+\Delta z)^n - z^n = \sum_{i=1}^{n} C_n^i \Delta z^i z^{n-i}.$$

所以

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \sum_{i=1}^{n} C_n^i \Delta z^{i-1} z^{n-i} = nz^{n-1}.$$

复变函数的微分定义与一元实变数函数的导数（微分）的定义相同，因而运算的基本法则都一样，比如：

加减法： $(f \pm g)' = f' \pm g'$；

乘法： $(fg)' = f'g + fg'$；

除法： $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$，要求分母不为零；

复合： $(f \circ g) = (f' \circ g)g'$；

反函数： $(\phi^{-1})' = \frac{1}{\phi' \circ \phi^{-1}}$，要求分母不为零；

所以现在我们已经明确解析性的函数有：（1）多项式；（2）有理函数，即两个多项式相除。后者在分母不取零的区域上解析。

复变函数微分的几何含义：如果$f(z)$ 在z 处可微，则：（1）f 在z 的一个邻域内有定义；（2）在z 的一个非常小的邻域内有关系式

$$f(z+\Delta z) - f(z) = f'(z)\Delta z + o(|\Delta z|).$$

其中$o(|\Delta z|)$ 是相对于$|\Delta z|$ 的无穷小，总而言之当$f'(z)$ 不为零的时候可以忽略之，此时剩余部分为

$$f(z+\Delta z) - f(z) = f'(z)\Delta z.$$

所以当$f'(z) = re^{i\theta} \neq 0$ 的时候有非常明确的几何意义：在非常小邻域可以近似认为相对长度伸缩r 倍加上相对辐角逆时针旋转θ 角度。也就是说形状大致上是保持的，只是尺度变了。

例子4. $f(z)$ 全平面解析，并且将$0 < argz < \theta < 2\pi$的角形区域映为自身，$f(0) = 0$ 并且在0 点可微。则$f'(0) \geq 0$。

证明. 假设$f'(0) \neq 0$。我们有

$$\lim_{z\to 0} Arg\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = Argf'(0).$$

也就是说

$$\lim_{z\to 0} Argf(z) - argz = Argf'(0).$$

我们可以让z 沿着$(0, \theta)$ 内的任意一个角度ϕ 的射线趋于0，则有

$$Argf'(0) \subset \{(0, \theta) + 2k\pi - \phi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

但是当ϕ 发生变化的时候，右边唯一共同包含的只有$0 + 2k\pi$。也就是$Argf'(0) = 2k\pi$。即此时，$f'(0) > 0$。

1.4 C-R方程

我们用C-R 方程判断复变函数的可导性或者解析性。

定义(实可微)**.** 设$u(x, y)$ 是一个实的二元函数，如果在(x, y) 处存在a, b（可以和x, y 有关）使得

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) = u(x, y) + a\Delta x + b\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}).$$

则称u 在(x, y) 处（实）可微。并且$a = u_x(x, y), b = u_y(x, y)$。这里的$o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$ 表示相对$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ 的无穷小。我们常见的光滑函数都是可微的。例如：多项式函数，三角函数，指数函数，分式函数（在定义域内），……。

定理. 复变函数$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在$z = x + iy$ 处可微等价于

1) u, v 在(x, y) 处可微；

2) u, v 在(x, y) 处满足以下柯西-黎曼方程（简称*C-R* 方程）

$$u_x = v_y, u_y = -v_x.$$

从而复变函数f 在区域D 内解析等价于在区域D 内任何一点都满足上述*1*）和*2*)。

证明. 假设复变函数f 在$z = x + iy$ 处可微，则有

$$f(z + \Delta z) = f(z) + f'(z)\Delta z + o(|\Delta z|).$$

左边为

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y).$$

右边为

$$\Big(u(x, y) + Ref'(z)\Delta x - Imf'(z)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})\Big) +$$

$$\Big(v(x,y)+Ref'(z)\Delta y+Imf'(z)\Delta x+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})\Big)\,i.$$

实部与虚部相对照有

$$u(x+\Delta x,y+\Delta y)=u(x,y)+Ref'(z)\Delta x-Imf'(z)\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}),$$

$$v(x+\Delta x,y+\Delta y)=v(x,y)+Ref'(z)\Delta y+Imf'(z)\Delta x+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}).$$

所以u,v 在$z=x+iy$ 处可微。并且

$$u_x(x,y)=v_y(x,y)=Ref'(z),u_y(x,y)=-v_x(x,y)=-Imf'(z).$$

反之，既然u,v 可微，我们有

$$u(x+\Delta x,y+\Delta y)=u(x,y)+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+o(|\Delta z|),$$

$$v(x+\Delta x,y+\Delta y)=v(x,y)+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+o(|\Delta z|).$$

所以

$$f(z+\Delta z)=f(z)+u_x\Delta x+u_y\Delta y+i(v_x\Delta x+v_y\Delta_y)+o(|z|).$$

带入C-R 方程，得到

$$f(z+\Delta z)=f(z)+u_x\Delta x+u_y\Delta y+i(-u_y\Delta x+u_x\Delta_y)+o(|z|)=f(z)+(u_x-iu_y)\Delta z+o(|z|).$$

即f 在z 点可微，并且$f'(z)=u_x-iu_y$。

由证明过程可知，如果$f(z)=u+iv$ 在z 处可微，则

$$f'(z)=u_x-u_yi=v_y+iv_x.$$

有了C-R 方程，我们可以很容易判断更多复变函数的解析性。

例子5. 讨论下列函数的可微性和解析性。

1) $f(z)=x^3-y^3+2ix^2y^2$；

2) $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$ 所以指数函数是可微的。

解. *1)* $u=x^3-y^3,v=2x^2y^2$，则

$$u_x=3x^2,v_y=4x^2y,$$

$$u_y=-3y^2,v_x=4xy^2.$$

按C-R 方程联立得

$$3x^2=4x^2y,3y^2=4xy^2$$

解得$(x,y)=(0,0)$ 和$(\frac{3}{4},\frac{3}{4})$，所以该函数仅在

$$0,\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i$$

处可微，相应微分为$f'(0)=0$，$f'(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i)=\frac{27}{16}(1+i)$。全复平面不解析。

2) $u=e^x\cos y, v=e^x\sin y$，则

$$u_x=e^x\cos y, u_y=-e^x\sin y, v_x=e^x\sin y, v_y=e^x\cos y.$$

所以

$$u_x=v_y, u_y=-v_x.$$

所以复变函数$f(z)$ 在全复平面解析和可微，微分为

$$f'(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y.$$

注记. 我们可以把$w=f=u(x,y)+iv(x,y)$ 用$z,\bar{z}$ 表示，即

$$w=u(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2i})+v(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2i}).$$

由偏导数的链式法则，如果w 可微，则有

$$w_{\bar{z}}=w_xx_{\bar{z}}+w_yy_{\bar{z}}=\frac{u_x+iv_x}{2}-\frac{u_y+iv_y}{2i}=\frac{u_x-v_y+(u_y+v_x)i}{2}=0.$$

不太严谨地说，一个解析函数其取值必然与$\bar{z}$ 无关，而仅与z 有关。

例子6. 解析函数$f(z)=u+iv$ 满足$u+v=(x+y)(2x-2y+1)$，$f(1)=2+i$，求$f(z)$。

解. 虽然还不知道$f(z)$，但我们可以先求出$f'(z)=u_x-iu_y$。对$u+v$ 分别对x,y 求偏导，有：

$$\begin{cases} u_x+v_x=4x+1, \\ u_y+v_y=-4y+1 \end{cases}$$

带入*C-R*方程，$u_x=v_y, u_y=-v_x$，得到

$$\begin{cases} u_x-u_y=4x+1, \\ u_y+u_x=-4y+1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} u_x=1+2x-2y, \\ u_y=-2y-2x. \end{cases}$$

所以

$$f'(z)=u_x-u_yi=1+2x-2y+(2x+2y)i=1+2z+2iz.$$

所以

$$f(z)=z+z^2+iz^2+C.$$

带入$z=1$ 得到$C=0$。所以

$$f(z)=z+z^2+iz^2.$$

例子7. 设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 全复平面解析，且$u^2+v^2=$常数，证明f 为常数。

证明. 不妨假设$u^2+v^2\neq 0$，则f 恒不等于零。因为常数解析，所以$f\bar{f}=u^2+v^2$ 解析；因为f解析且恒不为零，所以$\bar{f}=\frac{f\bar{f}}{f}$ 解析；因为f解析，所以$u=\frac{f+\bar{f}}{2}$和$v=\frac{f-\bar{f}}{2i}$ 解析；由*C-R* 方程，

$$u_x=u_y=0.$$

所以u 为常数，同理v 为常数；所以f 为常数。

1.5 初等函数（运算）

(1) 指数函数：e^z

- $e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$；
- $\mathrm{Re}e^{x+iy}=e^x\cos y$；$\mathrm{Im}e^{x+iy}=e^x\sin y$；$Arge^{x+iy}=y+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$，$|e^{x+iy}|=e^x$；
- 一般指数函数的运算公式对复指数函数依然成立；
- 周期为$2k\pi i$，如果两个指数相等当且仅当他们指数上相差$2k\pi i$；
- 指数函数的取值范围是所有非零复数；
- $(e^z)'=e^z$。

(2) 对数函数：Lnz，是指数函数的反函数，表示所有的w，使得

$$e^w=z.$$

- 既然指数函数的取值范围是所有非零复数，对数函数的定义域是所有非零复数；
- 既然指数函数的周期是$2k\pi i$，则对数函数是一个多值函数，且不同值之间相差$2k\pi i$；
- $Lnz=ln|z|+(Argz)i$；相应的$lnz=ln|z|+(argz)i$ 称为Lnz 的主值；
- lnz 在除去原点和负实轴的时候是解析的（设$D=\{z=x+iy:-\pi<y<\pi$，则ln 看作指数函数的反函数，实际上可以用逆映射的办法寻找更多Ln 的解析分支，例如$exp:\{z=x+iy:2\pi<y<4\pi\}\to\mathbb{C}$ 有反函数，反过来就是解析的—-沿着实轴割开）。
- $Lnz_1+Lnz_2=Ln(z_1z_2)$，把Ln 换成ln 并不成立。
- $(Lnz)'=\frac{1}{z}$（原因，$(Lnz)'=\frac{1}{e'(Lnz)}=\frac{1}{e^{Lnz}}=\frac{1}{z}$）。

(3) 幂函数z^α （$z\neq 0$）：$z^\alpha=e^{\alpha Lnz}$；$(z^\alpha)'=\alpha z^{\alpha-1}$ （原因，$(z^\alpha)'=(e^{\alpha Lnz})'=e^{\alpha Lnz}\alpha\frac{1}{z}=\alpha z^{\alpha-1}$）。

(1)α 为整数： 单值函数；

(2)α 为分数： 有限多值函数，取决于即约分数的分母；

(3)α 为其他数： 无穷多值；

(4) 为了不引起混乱，如无特别说明，e^z 统一约定为指数函数（例如$e^{\pi i}$ 作为幂函数，其取值有无穷个，为$-e^{2k\pi^2}, k\in\mathbb{Z}$；但作为指数函数取值唯一，为$-1$）。

(4) 三角函数与双曲函数：

- 正弦函数$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$；余弦函数$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$；$(\sin z)'=\cos z$；$(\cos z)'=-\sin z$；以$2\pi$ 为周期；零点呢？
- 双曲正弦函数$shz=\frac{e^z-e^{-z}}{2}$；双曲余弦$shz=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$；$(shz)'=chz$；$(chz)'=shz$；以$2\pi i$ 为周期；零点呢？

– 上述四个函数全复平面解析，取值也是全复平面；

– 一般三角函数的恒等式（例如积化和差、和差化积等）对于复三角函数依然成立。

(5) 反三角函数：$Arc\sin z$，也就是所有的w 使得$\sin w = z$，即：

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z.$$

首先我们可以解出e^{iw}，相当于解一个一元二次方程

$$e^{iw} = \frac{2iz + \sqrt{4 - 4z^2}}{2} = iz + \sqrt{1 - z^2}.$$

注意这是两个值。所以

$$w = -iLn(iz + \sqrt{1 - z^2}).$$

同理其他，我们在此略过。

例子8. 计算i^i.

解.

$$i^i = e^{iLni} = e^{i((2k\pi + \frac{\pi}{2})i)} = e^{-(2k\pi + \frac{\pi}{2})}$$

其中k 为所有整数。

例子9. 解方程$\cos z = 3$.

解. 即$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 3$。先解出$e^{iz}$，得

$$e^{iz} = 3 \pm 2(\sqrt{2}).$$

所以

$$z = -iLn(3 \pm 2(\sqrt{2})) = -iln(3 \pm 2(\sqrt{2})) + 2k\pi.$$

k 可以取所有整数。