

上节课主要内容

电荷守恒定律

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \cdot dV \quad \vec{j} = \vec{j}(x, y, z)$$

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

库仑定律

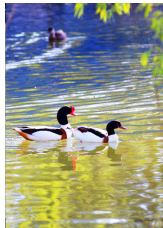
$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_r, \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

§ 1.2.2 叠加原理



一、叠加原理表述

叠加原理：对任何**线性**系统“在给定地点与时间，由两个或多个刺激产生的合成反应，是由每个刺激单独产生的反应之和。”



$$F(x_1 + x_2 + \dots) = F(x_1) + F(x_2) + \dots$$

- ① 叠加原理适用于**任何线性系统**，包括代数方程、线性微分方程、以及这些形式的方程组。
- ② 输入与反应可以是数、函数、矢量、矢量场、随时间变化的信号、或任何满足一定公理的其它对象。
- ③ 涉及到**矢量与矢量场**时，叠加理解为**矢量和**。

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$m = m_1 + m_2 \quad E_k(m) = E_{k1}(m_1) + E_{k2}(m_2) \quad \text{线性}$$

$$v = v_1 + v_2 \quad E_k(v) \neq E_{k1}(v_1) + E_{k2}(v_2) \quad \text{非线性}$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

$$x = x_1 + x_2 \quad E_p(x) \neq E_{p1}(x_1) + E_{p2}(x_2) \quad \text{非线性}$$

$$\vec{F} = -k\vec{r}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 \quad \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}_1(\vec{r}_1) + \vec{F}_2(\vec{r}_2) \quad \text{线性}$$

矢量叠加

$$\vec{F} = k \frac{q_0 q}{r^2} \vec{e}_r$$

$$q = q_1 + q_2 \quad \vec{F} = \vec{F}_1(q_1, r) + \vec{F}_2(q_2, r) \quad \text{线性}$$

矢量叠加

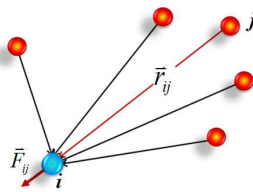
静电学 = 库仑定律 + 叠加原理

空间中任意两点电荷间都存在相互作用的库仑力。

两个点电荷间的作用力不因第三个电荷的存在而改变；

不管一个体系中存在多少个点电荷，每一对点电荷之间的作用力都服从库仑定律；

任一点电荷所受到的力，等于所有其他点电荷单独作用于该点电荷的库仑力的**矢量和**，这一结论称为**叠加原理**。



$$\vec{F}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}^2} \vec{e}_{ij}$$

N个点电荷组成的体系

二、带电体系对点电荷的作用力

设想把带电体分割为许多尺寸很小的、可当作点电荷处理的“电荷元”。

于是，整个带电体与由多个点电荷组成的**点电荷系统**等效。

电荷密度

体电荷密度

$$\rho = \frac{\Delta q}{\Delta V}$$

$$\Delta V = (\Delta S) d_{\perp}$$

面电荷密度

$$\sigma = \frac{\Delta q}{\Delta S}$$

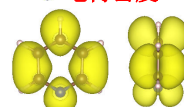
$$\Delta S = (\Delta l) d_{\perp}$$

线电荷密度

$$\lambda = \frac{\Delta q}{\Delta l}$$

$$\sigma = \rho d_{\perp}$$

$$\lambda = \sigma d_{\perp}$$



C₃NH₅ 分子

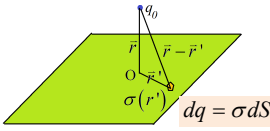
体积元 ΔV 、面积元 ΔS 、线元 Δl 的尺度远大于带电体中的微观带电粒子间的平均距离，但远小于电荷分布的非均匀尺度，即为**微观大、宏观小**。

利用叠加原理，可求出体电荷、面电荷、线电荷对点电荷的作用力

体带电体—点电荷

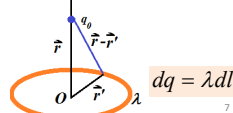
$$\vec{F} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') dV'$$

矢量和 $dq = \rho dV$



面带电体—点电荷

$$\vec{F} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') dS'$$



线带电体—点电荷

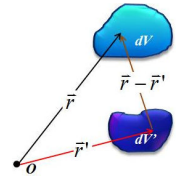
$$\vec{F} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') dl'$$

$dq = \lambda dl$

三、各种带电体系之间的作用力

体带电体—体带电体

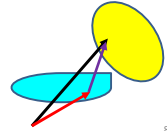
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') dV dV'$$



矢量和

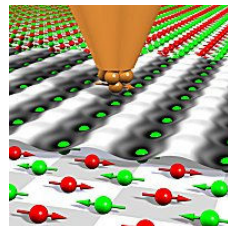
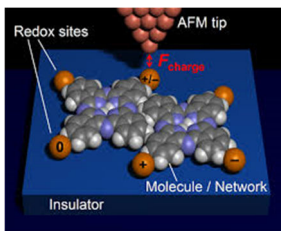
面带电体—面带电体

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \iint_S \frac{\sigma(\vec{r}) \sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') dS dS'$$



面带电体—体带电体

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \iiint_V \frac{\sigma(\vec{r}) \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') dS dV'$$

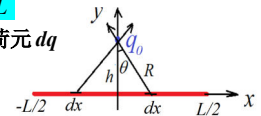


【例3】电量Q均匀分布于长为L的细棒上，求细棒对检验电荷 q_0 施加的力 (q_0 位于细棒中垂线上，距离为h)

【解】细棒的线电荷密度为： $\lambda = \frac{Q}{L}$

将细棒上的电荷划分成一系列线电荷元 dq

$$dq = \lambda dx = \frac{Q}{L} dx$$



检验电荷 q_0 位于细棒中垂线上，由对称性可得合力在y方向

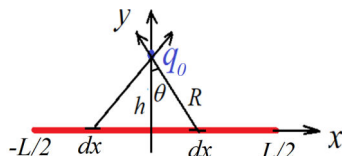
$$dF_y = dF \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 \lambda dx}{R^2} \cos \theta$$

$$x = h \tan \theta \Rightarrow dx = \frac{h d\theta}{\cos^2 \theta}$$

$$R = h / \cos \theta$$

$$dF_y = \frac{q_0 \lambda}{4\pi\epsilon_0 h} \cos \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} F &= F_y = 2 \int dF_y \\ &= 2 \int_0^{\theta_{\max}} \frac{q_0 \lambda}{4\pi\epsilon_0 h} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{2q_0 \lambda}{4\pi\epsilon_0 h} \sin \theta_{\max} \\ &= \frac{2q_0 \lambda}{4\pi\epsilon_0 h} \frac{L/2}{\sqrt{h^2 + (L/2)^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 h} \frac{q_0 Q}{\sqrt{h^2 + (L/2)^2}} \end{aligned}$$



$$\lambda = \frac{Q}{L}$$

方向：沿y轴方向

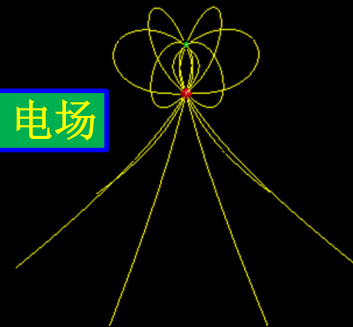
无限长细棒 $L \rightarrow \infty$
 $\theta \rightarrow \pi/2$

$$F = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 h} \frac{q_0 Q}{L} = \frac{q_0 \lambda}{2\pi\epsilon_0 h}$$

与h(不是h²)成反比

§ 1-3 电场强度

§ 1.3.1 电场



一、相互作用的传递

超距作用

- 无需传递时间，速度无限大
- 直接传递、无需媒介

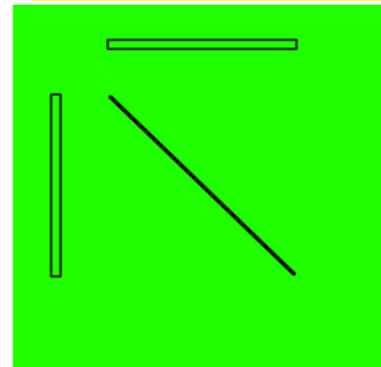
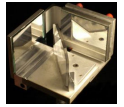
近距作用

- ✚ 需要传递时间，速度有限
- ✚ 需要通过接触或媒介(以太)

Who is right?

13

Michelson测量“以太风”的实验



若“以太风”速度不为零，即装置相对以太运动，则两列光波**相位不同**。两束光复合时会产生干涉条纹，在不同的方位干涉条纹会移过基准线，从而可以测量地球中的以太速度；但是得到了**零结果**。

迈克尔逊认为实验是失败的，原因是：

1. 零结果本身；
2. 实验设计的误差；
3. 理论上什么是“绝对速度”

Michelson的干涉折射计(Interferometer)：将单一光束分成互相垂直的两路，来比较这两路的光速。

14

✚ 1887年他与E.W.Morley合作，对实验进行改进：

- (1) 将光程长度增大10倍；
- (2) 将石板漂浮在水银面上，用以减小转动摩擦；
- (3) 延长探测时间至五天，探测地球沿其轨道与静止以太之间的相对运动。

✚ 结果仍然是零，他们非常失望。然而用这台新干涉仪获得了**四亿分之一的灵敏度**，这本身就是一种收获。

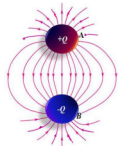
✚ 后来迈克尔逊用他的干涉折射计作为**比长仪**，于1893年确定了巴黎的米尺等于镉红线的1553 163.5个波长。这个精确测量使迈克尔逊闻名全球。

✚ 1907年迈克尔逊因为他的“零”结果(说明“以太”根本不存在)荣获**诺贝尔奖**，表彰他对光学精密仪器及对光谱学与计量学的贡献。

15

二、场的提出，法拉第的力线思想

✚ Faraday对电磁现象进行了广泛深入的实验研究，提出了**近距作用**的物理解释。他借助于**力线概念**把电场和磁场的许多性质简单而又形象地表示出来。他还发现了**电磁感应现象**。



✚ Maxwell在Faraday的基础上，发展了近距作用观点的**场论思想**，建立了**Maxwell方程**，奠定了**经典电动力学**的理论基础。

✚ Faraday和Maxwell一起当之无愧地被誉为**19世纪最伟大的物理学家**。

✚ 近距作用观点中**场的思想的确立**，开始了牛顿以来物理学最伟大的变革。



16

三、电场

✚ 近代物理的发展证明，超距作用的观点是错误的，**近距作用的观点才是正确的**。

✚ 电力虽然以极快的速度传递，但该**速度仍然有限**，磁力也是以有限的速度传递的。

✚ 真空中，电(磁)力传播的速度是光速c。

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.99792458(12) \times 10^8 \text{ m/s} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

ϵ_0 真空介电常数, μ_0 为真空磁导率

介质中 $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n}$ $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ ϵ_r 为介质的相对介电常数
 μ_r 为介质的相对磁导率
 n 为介质的折射率

17

✚ “以太”并不存在，电力(磁力)通过**电场(磁场)**传递。

✚ 凡是有电荷的地方，周围就存在电场，即电荷在自己的周围产生电场或激发电场。

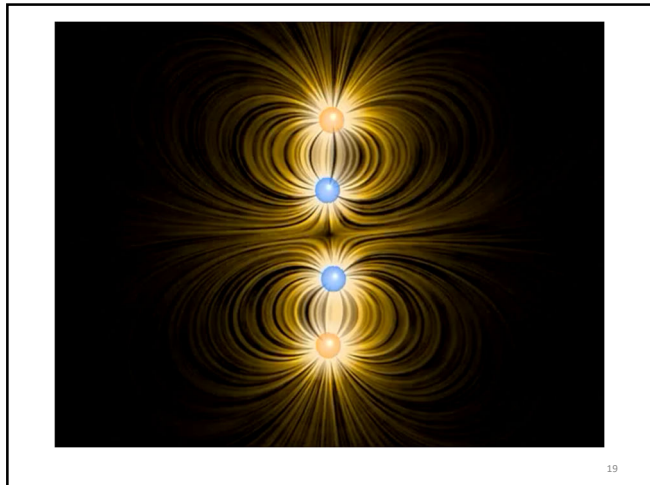
✚ 电场对处在场内的其他电荷有力作用。

✚ 电荷受到**电场的作用力**，**仅由该电荷所在处的电场决定**，与其他地方的电场无关，这就是**场的观点**。

✚ 按照这种观点，电荷间的相互作用可表示为

电荷 \longleftrightarrow 电场 \longleftrightarrow 电荷

18



19

超距作用

- ◆ 无媒介，力的传播速度无限大，不需要时间
- ◆ q_1 所受的力 F 随 q_2 的运动(位置)同步变化

q_1 静止, q_2 运动

场的观点

- ◆ q_2 在新位置产生的场以有限的速度 c 向 q_1 传播，场传播到 q_1 (历时 Δt) 后 q_1 受到的力 F 才发生变化。
- ◆ q_1 所受的力并不同步变化(比位置的变化推迟 Δt)

实验证明场的观点是正确的

20

相互作用的物理图像

经典图像

- ◆ 电荷的存在 **改变了空间** 自身的性质，导致了“隆起和凹陷”，决定了其他电荷如何运动。
- ◆ 包含电荷的空间，其特征由 **电场** 表征；
- ◆ 力是空间自身的一个 **整体** 性质。

量子图像

- ◆ 带电粒子通过 **交换光子** 相互作用；
- ◆ 光子携带能量、动量、角动量；
- ◆ 力是一种 **局域现象**：是交换光子时电荷表现的一种性质。

21

四、静 电 场

- ✚ **静电场**：静止电荷产生的电场称为静电场
- ✚ **静电力**：静电场对其他静止电荷的作用力

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0$$

- ✚ **电场并不限于静电场**，凡对静止电荷有作用力的场都是电场。

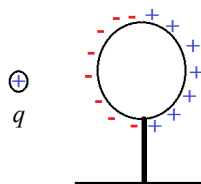
22

§ 1.3.2 电场强度

一、电场强度

1. 试探点电荷

- ✚ 电量充分小，以免改变被研究物体的电荷或电场分布；
- ✚ 线度充分小，即近似为 **点电荷**



电量 q 较大时，由于感应带电， q 的存在会改变大球表面的电荷分布

23

2. 电 场 强 度

电场内任意一点的 **电场强度**：

- **数值上**：等于一个单位电量的电荷在该点受到的作用力；
- **方向上**：与正电荷在该点受力的方向相同。

$$\vec{E}(r) = \frac{\vec{F}_0}{q_0}$$

$\vec{E}(r)$ 是与 **试探点电荷 q_0** 无关的物理量，反映了 r 处空间本身的特性；

24

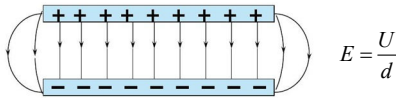
3. 电场强度的单位

- 电场强度 E 的单位为 (N/C)

$$\vec{E}(r) = \vec{F}_0 / q_0$$

- 但电场强度的常用单位是 (V/m) ，两者等效

$$\vec{E} = -\nabla U \quad (\text{这个公式后面会讲})$$



25

电场对电荷的作用是局域的

- 电场就是带电体周围的一个具有特定性质的空间。在电场分布空间的任一点，电荷都会受到一定大小、方向的作用力。

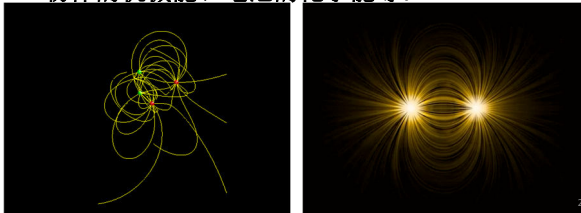
$$\vec{F}(r) = q\vec{E}(r) \quad \vec{E}(r) = \vec{E}(x, y, z)$$

- 电场对电荷的作用是一种局域作用，即处于某点的电荷只受到该点处电场的作用，该点邻近处的电场对其没有作用。

26

电场是一种客观物质

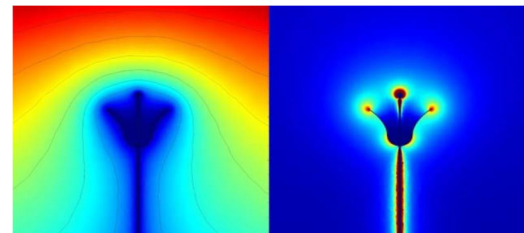
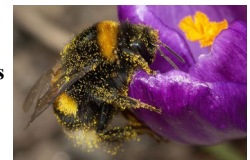
- 电场并不是形式的、数学的观念。
- 电场与实物(由原子或分子构成的物质)一样，具有动量和能量，服从一定的运动规律，可脱离电荷和电流单独存在，是物质的一种形式。
- 电场的能量也可以转换成其它形式的能量，如物体的机械能、电池的化学能等。



27

Study finds bees and flowers communicate using electrical fields

蜜蜂用刚毛感应花朵电场



Electric potential distribution

Electric field distribution

来自地面和大气中不平衡的电荷

4. 点电荷的电场

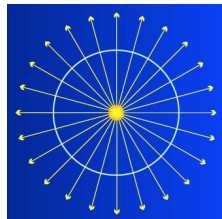
对点电荷 q ，一般取 q 的位置为坐标原点，在 r 处放置一个试探点电荷 q_0 ，则

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r$$

- 对称性：球对称

- 方向：

- (1)从正的源电荷指向场点；
- (2)从场点指向负的源电荷。



29

二、各种带电体的场强公式

1. 点电荷系

空间点电荷体系的电场强度，可由力的叠加原理或电场的叠加原理来求得：

$$\vec{E}(r) = \sum_i \vec{E}_i(r) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

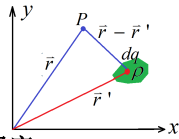
矢量叠加

30

2. 带电体的电场强度

电荷元 dq 产生的电场强度为:

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$



由**叠加原理**, 带电体在空间的电场强度:

体分布 $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') dV'$

面分布 $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') dS'$

线分布 $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') dl'$

31

3. 电场强度的计算

电场强度是矢量, 可以**化矢量积分为标量积分**:

$$d\vec{E} = dE_x \vec{e}_x + dE_y \vec{e}_y + dE_z \vec{e}_z$$

$$\vec{E} = \int dE_x \vec{e}_x + \int dE_y \vec{e}_y + \int dE_z \vec{e}_z$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$$

与 x, y, z 轴的夹角 α, β, γ 为:

$$\cos \alpha = \frac{E_x}{E}, \cos \beta = \frac{E_y}{E}, \cos \gamma = \frac{E_z}{E}$$

32

4. 一些典型的电场强度数值

地点	电场强度(N/C)
铀核表面	2×10^{21}
中子星表面	1×10^{14}
氢原子电子内轨道处	6×10^{11}
x射线管内	5×10^6
空气击穿电场强度	3×10^6
范德格拉夫静电加速器内	2×10^6
电视机内的电子枪	1×10^5
电闪内	1×10^4
雷达发射机边	7×10^3
太阳光内(平均)	1×10^3
晴天大气中(地面)	1×10^2
小型激光光束内	1×10^2
日光灯管内	1×10^1
无线电波内	1×10^{-1}
家用电路线内	3×10^{-2}
宇宙射线本底(平均)	3×10^{-6}

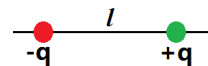
量级相差很大

33

三、典型例子

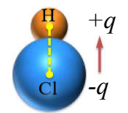
1. 电偶极子

定义: 电量相等、符号相反、相隔某一微小距离 l 的两点电荷组成的系统

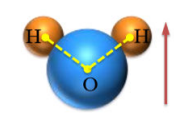


自然界中, 很多分子的正、负电荷并不完全重合, 因此**具有非零的电偶极矩 p**

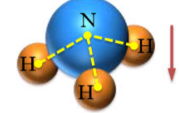
$$\vec{p} = q\vec{l}$$



$$p = 3.43 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$$



$$p = 6.13 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$$



$$p = 4.77 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$$

34

【例4】求电偶极子的电场分布: (a) 中垂面上的电场强度; (b) 延长线的电场强度; (c) 空间任一点的电场强度

【解】

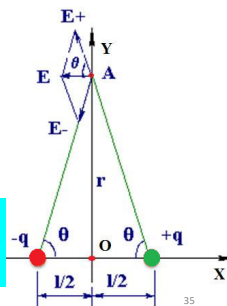
(a) 中垂面上

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + (l/2)^2}$$

$$E_y = E_{+y} + E_{-y} = 0$$

$$E_x = E_{+x} + E_{-x} = -2E_+ \cos \theta$$

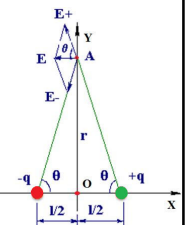
$$= -2E_+ \frac{l/2}{\sqrt{r^2 + l^2/4}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{(r^2 + l^2/4)^{3/2}}$$



35

$$E_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{(r^2 + l^2/4)^{3/2}} \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{r^3}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \quad \text{当 } r \gg l \text{ 时}$$



p 为电偶极矩, $\vec{p} = q\vec{l}$, 其方向由 $-q$ 指向 $+q$

所以, 中轴线上任意一点的电场强度为:

$$\vec{E}_\perp = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{r^3} \quad \text{方向与 } \vec{p} \text{ 相反}$$

36

(b) 延长线上

$$\bar{E}_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} \bar{e}_x, \quad \bar{E}_- = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \bar{e}_x$$

对 $r \gg l$, 有: $\left(r \pm \frac{l}{2}\right)^{-2} \approx r^{-2} \left(1 \mp \frac{l}{r}\right)$

注意到 p 的方向(由 $-q$ 指向 $+q$), 有

$$\bar{E}_{//} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\bar{p}}{r^3}$$

方向与 \bar{p} 相同

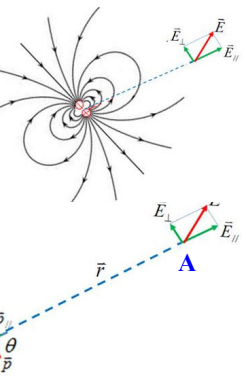
37

(c) 空间任一点

考察场中任一点, 坐标为 (r, θ) , 连接电偶极子中点 O 和场点 A , 电偶极矩矢量 \bar{p} 可以分解成平行与 AO 的分量和垂直与 AO 的分量 $p_{//}$ 和 p_{\perp} , 则

$$\bar{p} = \bar{p}_{//} + \bar{p}_{\perp}$$

$$p_{//} = p \cos \theta, \quad p_{\perp} = p \sin \theta$$

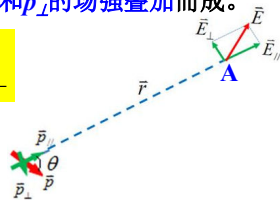


θ : \bar{r} 与 \bar{p} 间的夹角

38

电偶极子 p 产生的、在空间任一点的场强, 可以看成是由两个电偶极子 $p_{//}$ 和 p_{\perp} 的场强叠加而成。

$$\bar{E} = \bar{E}_{p_{//}} + \bar{E}_{p_{\perp}}$$



(1) $p_{//}$ 本身沿 r 方向, A 点在其延长线上, $p_{//}$ 在 A 点产生的电场方向沿 $p_{//}$ 方向, 即沿 r 方向

$$\bar{E}_{p_{//}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\bar{p}_{//}}{r^3} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^3} \hat{e}_r$$

39

(2) p_{\perp} 本身垂直于 r 方向, 在 A 点产生的电场方向沿 p_{\perp} 的反方向, 即沿 θ 方向

$$\bar{E}_{p_{\perp}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-\bar{p}_{\perp}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3} \hat{e}_{\theta}$$

40

$$\bar{E} = \bar{E}_{p_{//}} + \bar{E}_{p_{\perp}} \Rightarrow \bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\bar{e}_r (\bar{p} \cdot \bar{e}_r) - \bar{p}}{r^3}$$

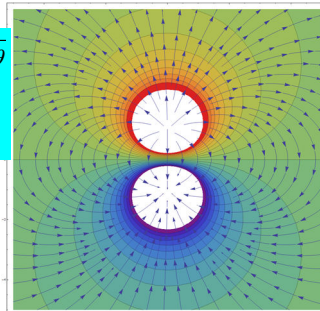
大小:

$$E(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{\sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta}$$

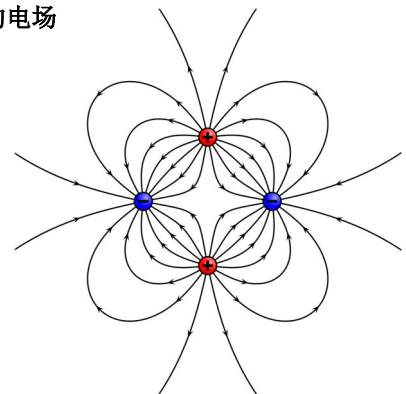
$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}$$

方向:

$$\tan \beta = \frac{E_{\perp}}{E_{//}} = \frac{\tan \theta}{2}$$

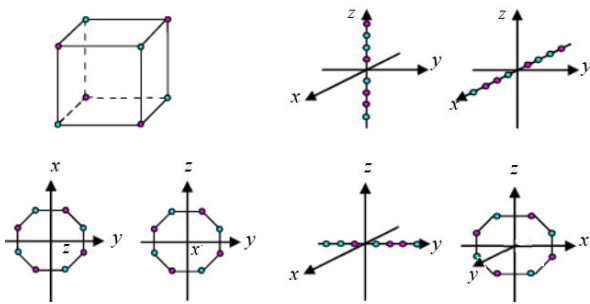


电四极子的电场



42

电八极子



43

任一形状的带电体的电场

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$$

点电荷
电场电偶极子
电场电四极子
电场

$$\rho(r) = q + (-q) + (-q) + q + \dots$$

带电体的电偶极矩

带电体的电四极矩

$$\vec{p} = \iiint x' \rho(x') dV \quad Q_{ij} = \iiint (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(x') dV$$

44

2. 线电荷

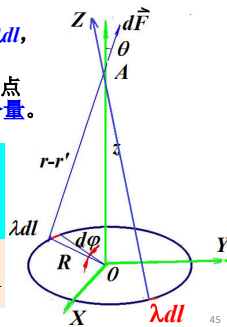
【例5】一半径为 R 的、无限细且均匀带电的圆环，环上线电荷密度为 λ 。求过环心垂直于圆环面的中轴线上的一点 $A(0,0,z)$ 的电场强度。

【解】在圆环上任取一线电荷元 $dq = \lambda dl$ ，设它在 A 点产生的电场强度为 dE 。分析对称性，可以看出，由圆环在 A 点所产生的电场强度将只有沿 z 轴的分量。

$$dE_z = dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cos \theta$$

$$= \frac{\lambda R d\varphi}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{|R^2 + z^2|^{3/2}}$$

$$dl = R d\varphi \quad \cos \theta = \frac{z}{R^2 + z^2}$$

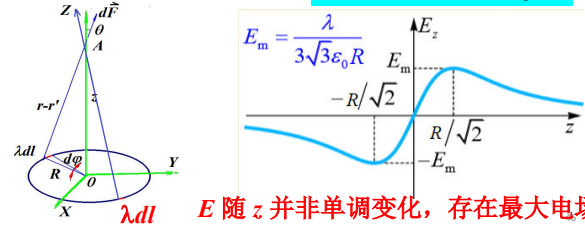


45

$$\vec{E} = E_z \hat{e}_z = \int_L dE_z \hat{e}_z = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \hat{e}_z = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{e}_z$$

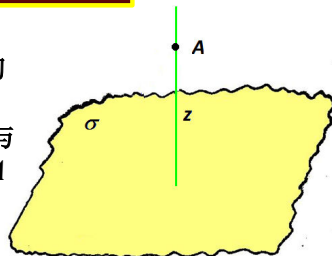
圆心电场为0，两边电场方向相反

$$\frac{dE_z}{dz} = 0 \Rightarrow z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} R \quad \vec{E} = \pm E_{\max} \hat{e}_z = \pm \frac{\lambda}{3\sqrt{3}\epsilon_0 R} \hat{e}_z$$

 E 随 z 并非单调变化，存在最大电场！

3. 面电荷

【例6】均匀带电的无穷大平板，其面电荷密度为 σ ，求与板距离为 z 的一点 A 处的电场强度。



$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

47

【解】过 A 作平板的垂线 AO ， $AO=z$ ，以 O 为圆心，将平板分割成无数个圆环，设其中任一圆环的半径为 R ，环宽为 dR 。圆环上任意一点的电荷为：

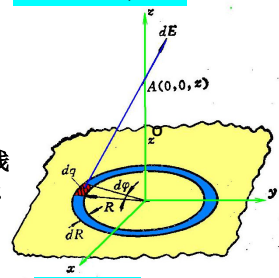
$$dq = \sigma_e dS = \sigma_e R d\varphi dR \quad dS = R d\varphi dR$$

 dq 产生的电场在 z 方向分量

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_e R z d\varphi dR}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

或者由上题，宽为 dR 的圆环(线电荷密度 $\lambda = \sigma_e dR$)对 A 点电场强度的贡献为

$$dE = dE_z = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$



$$\lambda = \sigma_e dR$$

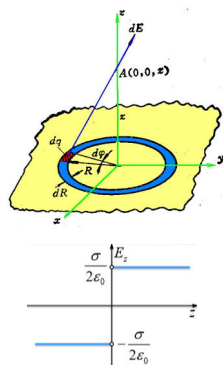
48

则总的电场强度为:

$$\begin{aligned}
 E &= E_z = \int dE_z \\
 &= \frac{\sigma_e z}{2\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} dR \\
 &= \frac{\sigma_e z}{2\epsilon_0} \left[\frac{-1}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right]_0^\infty
 \end{aligned}$$

$$\therefore E = \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0}$$

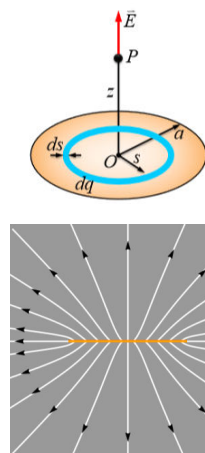
均匀电场, 与A点距平面距离 z 无关!
方向: 垂直于面, 指向面外侧
面两边电场方向相反



49

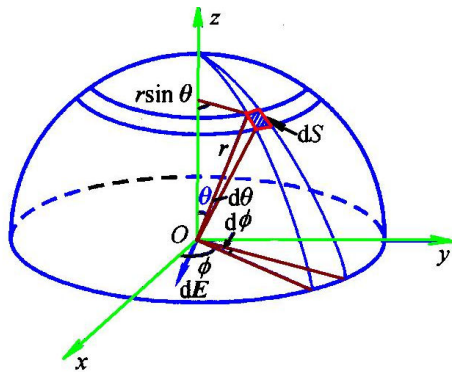
有限大(半径为 a) 均匀圆盘

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= E_z \vec{e}_z \\
 &= \frac{\sigma_e z}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} dR \vec{e}_z \\
 &= \frac{\sigma_e z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{(a^2 + z^2)^{1/2}} \right] \vec{e}_z
 \end{aligned}$$



50

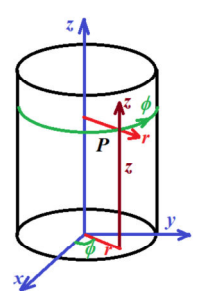
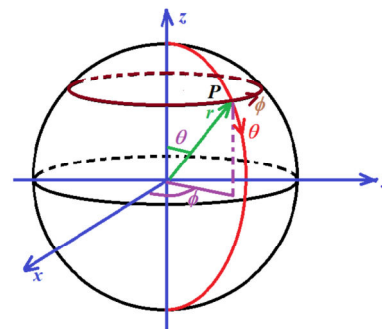
【例7】求均匀带电半球面在球心的电场。



51

球坐标系 (r, θ, ϕ)

柱坐标系 (r, z, ϕ)



52

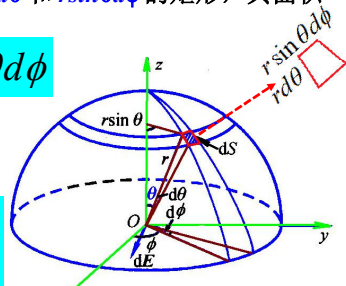
【解】设球面半径为 r , 电荷面密度为 σ 。取一球面坐标, 原点与球心重合, 如图所示。球坐标中的面元 dS 可以看作是边长为 $r d\theta$ 和 $r \sin\theta d\phi$ 的矩形, 其面积为

$$dS = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

面元上的电荷在 O 点的场强为:

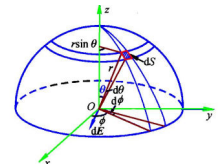
$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{r^2}$$

当 σ 为正时, dE 的方向由 dS 指向球心。



53

由于对称性, 只有 dE 沿 Z 轴的分量 dE_z 才对 O 点的合电场有贡献



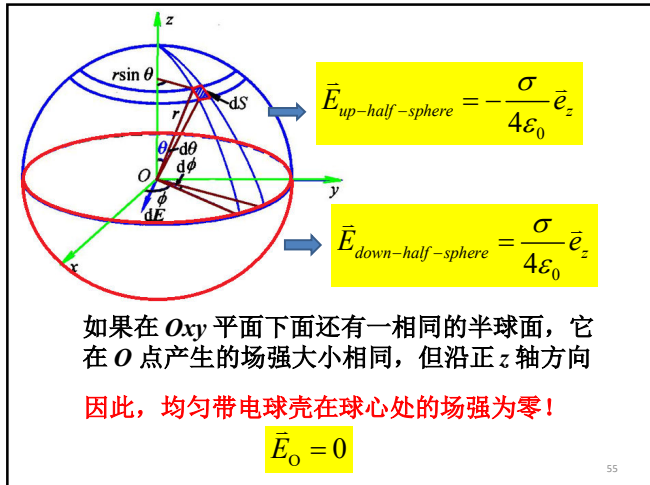
$$dE_z = -dE \cos\theta = -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta \cos\theta d\theta d\phi$$

$$E = E_z = -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = -\frac{\sigma}{4\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{4\epsilon_0} \vec{e}_z$$

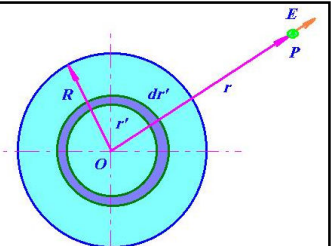
负号表示电场沿 z 轴负方向
电场大小与 σ 成正比, 与 R 无关

54



4. 体电荷

【例8】求均匀带电球上的电荷(体密度为 ρ)在球外一点 P 的电场强度。



【解】取如图所示的坐标，在球体内 r' 处取一厚为 dr' 的球壳，该球壳无限薄，可看成均匀带电球面，其面密度为 $\sigma = \rho dr'$ ，其电量为 $dq = \sigma dS = \rho dr' 4\pi r'^2$

用与前面类似方法可证明该球面在 r 处产生的电场强度为：

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{e}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dr' 4\pi r'^2}{r^2} \vec{e}_r$$

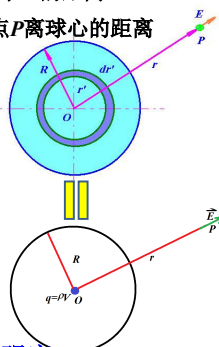
$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dr' 4\pi r'^2}{r^2} \vec{e}_r$$

r' 是球壳离球心的距离
 r 是球外场点 P 离球心的距离

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi\rho}{r^2} \int_0^R r'^2 dr' \vec{e}_r \\ &= \frac{\rho}{\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{1}{3} R^3 \vec{e}_r \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad \left(q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \right) \end{aligned}$$

均匀带电球体在球外任一点的电场强度

电荷全部集中在球心的点电荷产生的场强



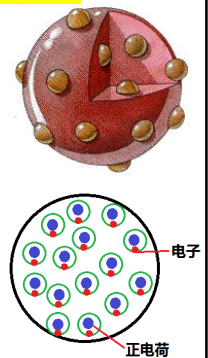
四、原子的有核模型

1. 汤姆逊模型

“面包夹葡萄干”模型，原子中的正电荷是均匀散布于整个原子中，亦即散布在半径为 10^{-10} 米的球内，认为电子在球内的一些固定点作圆周运动。

以 Au 原子为例 ($Z=79$)，此模型下 Au 原子表面的电场强度为：

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \approx 1.1 \times 10^{13} \text{ N/C}$$



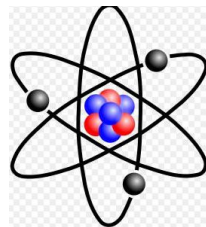
2. 卢瑟福模型

正电荷不是均匀地分布在整个原子中，而是在中心的一个区域内
以 Au 为例，Au 原子核的半径为 6.9×10^{-15} 米，则核表面的电场强度为：

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \approx 2.3 \times 10^{21} \text{ N/C}$$

比汤姆逊模型中的电场强度要大 8 个量级！

哪个正确？

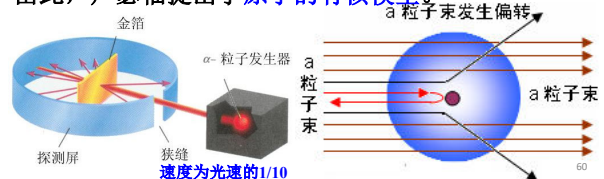


1913 年卢瑟福用 α 粒子(氦原子核、带正电荷)轰击金箔，发现有小部分的 α 粒子被大角散射，其中大于 90° 角的散射占 $1/8000$ ，有的角度甚至达 180° 。

“几乎象你发射一枚 15 英寸的炮弹，这炮弹打在一张纸上，结果却被弹回来打中你自己！”

表明 α 粒子遇到了极强的电场。

由此，卢瑟福提出了原子的有核模型。



诺贝尔奖导师——卢瑟福

- 卢瑟福是原子核物理之父，获1908年诺贝尔化学奖
- 此外他直接培养、并沿着他指导的研究方向进行研究而获诺贝尔奖的**达11人之多** (1871—1937)
- 其中有他在蒙特利尔的**麦吉尔大学**时的助手**索迪(1921年)**和**哈恩(1944年)**，在**曼彻斯特大学**时的**玻尔(1922年)**和**海威西(1943年)**，在**剑桥大学**时的**查德威克(1935年)**、**阿普顿(1947年)**、**希莱克特(1948年)**、**鲍威尔(1950年)**、**考克饶夫和瓦尔顿(1951年)**、**卡皮查(1978年)**。
- 与他的作用有关、而在后来获诺贝尔奖的，有**阿斯顿(1922年)**、**狄拉克(1933年)**和**贝特(1976年)**等。
- 这在诺贝尔奖史上是绝无仅有的。



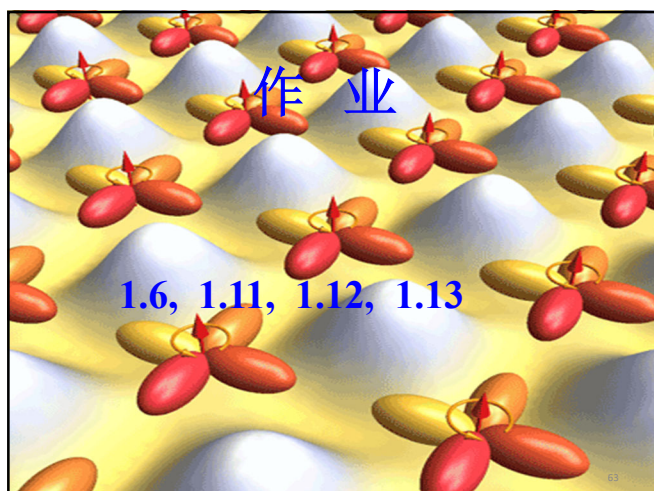
(1871—1937)

61

问题

- 研究电力与距离不成平方反比关系(例如成3次方反比)情况下，各种对称带电体，例如长直线、平面、球、圆柱等周围的电场分布。
- 模拟计算各种形状的带电体在空间的电场。
- 估算卢瑟福实验中 α 粒子束轰击金箔表面时，汤姆逊模型和卢瑟福模型下在各个角度的散射几率。

62



63