第 7 章 图的着色

赵功名

中国科学技术大学计算机科学与技术学院

目录

定义 7.1 图 G 的一个 k-**顶点着色**是指把 k 种颜色 $1, 2, \cdots, k$ 分配给图 G 的顶点，使每个顶点都分配一种颜色；若相邻顶点的颜色不同，则称这种着色是一个**正常 k-顶点着色**. 若图 G 有一个正常 k-顶点着色时，称 G 是可 k-**顶点着色的**.

图 G 的**顶点色数**指的是使得图 G 可正常顶点着色的最少颜色数 k，简称为色数，记为 $\chi(G)$. 色数为 k 的图是可 k-顶点着色，但不是可 $(k-1)$-顶点着色的.

图 G 的一个正常 k-顶点着色可以表示为顶点集合 $V(G)$ 的一个划分 $\mathcal{C} = (V_1, V_2, \cdots, V_k)$，其中 V_i 表示着 i 色的顶点子集 (可能是空集)，满足：

(1) $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k$;

(2) $V_i \cap V_j = \emptyset, 1 \le i \ne j \le k$,

(3) 任给 $1 \le i \le k$，且任给 $u, v \in V_i$，$uv \notin E(G)$.

在进行正常 k-顶点着色时，若要求每种颜色都必须用到，则还需满足下面的第（4）个条件；否则不需要.

(4) 任给 $1 \le i \le k$，$V_i \ne \emptyset$.

关于顶点着色，有下面的简单性质：

(1) ν 阶图的色数满足 $1 \le \chi(G) \le \nu$；$\chi(G) = 1$ 当且仅当 G 是零图 (即没有边的图)；$\chi(G) = \nu$ 当且仅当 G 是 ν 阶完全图.

(2) $\chi(G) = 2$ 当且仅当 G 是有边二分图.

(3)
$$\chi(C_\nu) = \begin{cases} 2, & \nu\text{是偶数}; \\ 3, & \nu\text{是奇数}. \end{cases}$$

(4) 若图 H 是 G 的子图，则 $\chi(H) \le \chi(G)$.

定理 7.1 对任何图 G, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

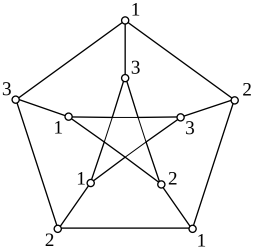
证明：给 G 的任意一个顶点 v 着色时，v 最多有 $\Delta(G)$ 个邻点，至多使用了 $\Delta(G)$ 种颜色，则 v 可使用第 $\Delta(G)+1$ 种颜色，所以 G 是可 $(\Delta(G)+1)$- 顶点着色的，命题得证.

$\Delta(G)+1$ 是 $\chi(G)$ 的上界. 对于完全图和奇圈来说，$\chi(G) = \Delta(G)+1$，达到了这个上界. 但是对某些图来说，$\Delta(G)+1$ 与 $\chi(G)$ 的差别则比较大.
例如，若 G 是二分图，则 $\chi(G) = 2$，但 $\Delta(G)+1$ 则可以任意大.

定理 7.2
Brooks 设 $\nu(\nu \geq 3)$ 阶连通图 G 不是完全图也不是奇圈，则 $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

例 7.1 Petersen 图的色数是 3.

证法一 用定理证明. 由 Brooks 定理可知，$\chi \leq \Delta = 3$. 又因为图中有奇圈，$\chi \geq 3$，所以 $\chi = 3$.
证法二 因为图中有奇圈，$\chi \geq 3$. 又因为图中存在 3 种颜色的正常顶点着色，如图所示. 图中顶点处所标的数字 i 表示该顶点涂第 i 种颜色，$i = 1, 2, 3$，所以 $\chi \leq 3$，故 $\chi = 3$.



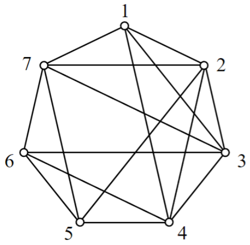
例 7.2(安全装箱问题) 给定一批货物，有些货物装在一个箱子里不安全，那么最少需要准备几只箱子来装这些货物？

解 这样的安排问题可以用图论模型来求解. 每种货物用一个顶点表示，若两种货物放在一只箱子里不安全时，在两种货物对应的顶点之间连一条边，构成图 G. 对 G 的顶点进行着色，同色的顶点表示对应的货物可以放在同一只箱子中，则装箱问题对应于图 G 的正常顶点着色，所以色数 $\chi(G)$ 就是所需箱子的最小数目.

对有冲突的一组对象进行资源分配的问题与“安全装箱问题”有相同的图论模型，解法也类似. 例如“考试安排问题”：学校期末考试如何安排各门课的考试时间，使得没有学生同时考两门，则考试至少需要进行多长时间？这个问题的解法与“安全装箱问题”类似. 把课程看作货物，同一位学生选修的两门课视为放在一个箱子里不安全的两种货物，则色数 $\chi(G)$ 就是最少安排的考试场次数.(具体例题见下页)

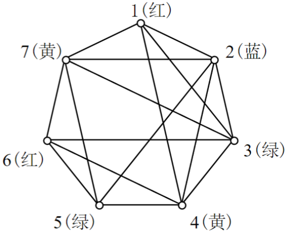
例 7.3 某校需要安排七门课程 $1,2,\cdots,7$ 的期末考试. 假设课程 1 和 2，1 和 3，1 和 4，1 和 7，2 和 3，2 和 4，2 和 5，2 和 7，3 和 4，3 和 6，3 和 7，4 和 5，4 和 6，5 和 6，5 和 7，以及 6 和 7 都有人同时选修. 每天安排一门，则安排这七门考试至少需要几天？

解 此类问题可以转化为求图的色数问题，构造课程图 G：图的顶点集合 $V(G)$ 就是课程集合 $\{1,2,\cdots,7\}$，两门课程被同一位学生选修则在相应的顶点之间连边，如图 (a) 所示. 如上分析，$\chi(G)$ 即为所求. 图 G 的一个正常 $\chi(G)$-顶点着色就是一种考试安排方案. 下面首先证明 $\chi(G)=4$.



(a) 课程图

一方面，图 G 含有 4 阶完全子图 (顶点 {1, 2, 3, 4} 的导出子图)，所以 $\chi(G) \geq 4$. 另一方面，如图 (b) 所示，给出了图 G 的一种正常 4-顶点着色，即 $\chi(G) \leq 4$. 故 $\chi(G) = 4$，所以安排这七门考试至少需要 4 天，图 (b) 所示的着色方案给出的考试安排是：第一天的考试科目是课程 1 和 6，第二天是课程 2，第三天是课程 3 和 5，第四天是课程 4 和 7.



(b) 用顶点着色来安排期末考试

定义 7.2 图 G 的一个 k-**边着色**是指把 k 种颜色 $1, 2, \cdots, k$ 分配给图 G 的边，使每条边都分配一种颜色；若相邻边异色，则称这种边着色为一个**正常 k-边着色**. 若图 G 有一个正常 k-边着色时，称 G 是可 k-**边着色的**. 图 G 的**边色数**指的是使得图 G 可正常边着色的最少颜色数 k，记为 $\chi'(G)$.

- k-边着色：每条边一个颜色，用 k 个颜色
- k-边正常着色：着色 + 相邻边不同色
- 边色数 $\chi'(G)$：可正常边着色的最少颜色数

图 G 的一个正常 k-边着色可以用代数的方式表示为边集合 $E(G)$ 的一个划分 $\mathcal{C} = (E_1, E_2, \cdots, E_k)$，其中 E_i 表示着 i 色的边子集 (可能是空集)，满足：

(1) $E(G) = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k$,

(2) $E_i \cap E_j = \emptyset, 1 \leq i \neq j \leq k$,

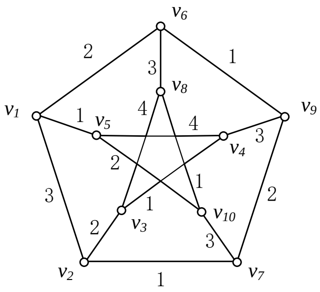
(3) 任给 $1 \leq i \leq k$，且任给 $e_1, e_2 \in E_i$，e_1 与 e_2 都不相邻.
在进行正常 k-边着色时，若要求每种颜色都必须用到，则还需满足下面的第（4）个条件；否则不需要.

(4) 任给 $1 \leq i \leq k$，$E_i \neq \emptyset$.

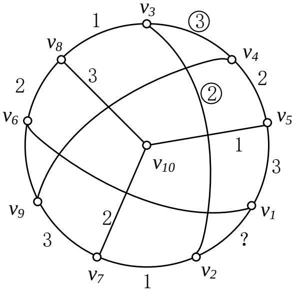
对于图 G 的一个正常 k-边着色 $\mathcal{C} = (E_1, E_2, \cdots, E_k)$ 来说，每个 E_i 中的任意两条边都不相邻，所以 E_i 是图 G 的一个匹配. 因此，图 G 的一个正常 k-边着色等价于将 G 的边集合分成 k 个无公共边的匹配. 而对于任意图 G，总存在顶点 v，使得 $deg(v) = \Delta(G)$，由边色数的定义可知，v 关联的 $\Delta(G)$ 条边需要用不同的颜色，所以 $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. 而图 G 显然是可 $\varepsilon(G)$-边着色的，所以 $\chi'(G) \leq \varepsilon(G)$.

例 7.5 Petersen 图的边色数是 4.

证明 首先给出 Petersen 图 G 的一个正常 4-边着色，如图 (a) 所示，所以 $\chi'(G) \leq 4$. 下证 $\chi'(G) \geq 4$，即证明对图 G 用三种颜色不能正常边着色. 为了方便观察，将图 G 画成图 (b) 的形式.



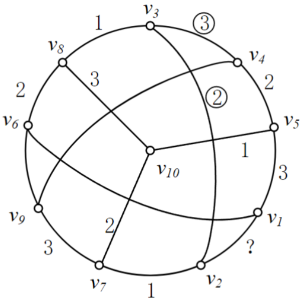
(a) Petersen图的一个正常4–边着色



(b) Petersen图不能正常3–边着色

假设图 G 可以用三种颜色正常边着色. 由 Petersen 图的对称性，不妨设与 v_{10} 关联的三条边已经分别着 1 色、2 色与 3 色. 则与这三条边相邻的边用其余两种颜色着色，

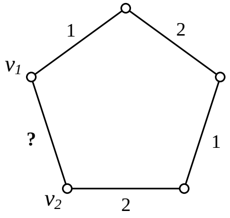
即边 v_1v_5 与 v_4v_5 分别着 2 色与 3 色，或 3 色与 2 色；
边 v_2v_7 与 v_7v_9 分别着 1 色与 3 色，或 3 色与 1 色；
边 v_3v_8 与 v_6v_8 分别着 1 色与 2 色，或 2 色与 1 色.
即这 6 条边的着色有 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 种可能的方式，图 (b) 标出了其中一种. 现在只需证明对其余的边无论怎么着色都不能完成正常 3-边着色 (同理可证对其余的 7 种方式也不能完成正常 3-边着色). 事实上，在图 (b) 所示的染色方案中， v_3v_4 只能选 3 色，进而边 v_2v_3 只能选 2 色，这时边 v_1v_2 的邻边已经占用了 1 色、2 色与 3 色. 这样，边 v_1v_2 必须选第四种颜色. 综上所述，$\chi'(G) = 4$



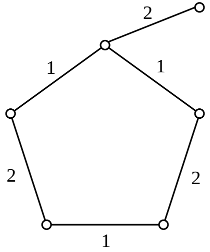
(b) Petersen图不能正常3-边着色

例 7.5 使用穷举法确定了 Peterson 图的边色数，时间复杂度高. 但是，目前尚不确定是否有求图边色数的有效算法，它是图论的难题之一.

下面讨论一般图的边色数问题，主要思路是从一种边着色出发，逐步改进使得每个顶点关联的边使用不同的颜色. 首先我们观察到奇圈与非奇圈的 2-边着色对每个顶点的影响有所不同. 如图所示，用两种颜色对图 (a) 和 (b) 进行边着色，使两种颜色尽可能在每个度数大于等于 2 的顶点处都出现.5 圈 (图 (a)) 对任何一种 2-边着色都至少有一个顶点只出现一种颜色. 以图 (a) 所示的 2-边着色为例，边 v_1v_2 无论着 1 色还是 2 色，总有一个 2 度顶点 (v_1 或 v_2) 处只出现一种颜色. 图 (b) 不是奇圈，可以找到一种 2-边着色满足要求 (如图 (b) 所示). 下页的引理证明了该结论.



(a) 奇圈的2−边着色



(b) 非奇圈的2−边着色

引理 7.1 若连通图 G 不是奇圈，则存在一种 2-边着色，使得所用的两种颜色在每个度数大于等于 2 的顶点处出现，即每个度数大于等于 2 的顶点所关联的边用到了这两种颜色.

证明 不妨假设 G 是非平凡连通图. 分以下两种情况讨论.

(1) G 中每个顶点的度数都是偶数，则由定理 6.1 知，G 是 Euler 图，有 Euler 回路 C. 若 C 是一个圈，则 C 是一个偶圈，只需用两种颜色沿此圈交替地对每条边着色，即可使得每个顶点关联的两条边异色，引理成立. 若 G 不是圈，则 C 是多个无公共边的圈之并，有一个度数大于等于 4 的顶点，设为 v. 从 v 开始，沿着 C 上边的顺序，交替着两种颜色即可，引理成立.

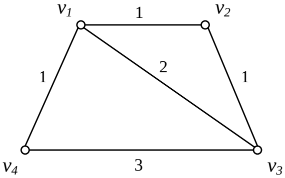
(2) G 中有度数为奇数的顶点，则有偶数个度数为奇数的顶点. 在 G 中添加一个新顶点 v^*，在 v^* 和每个度数为奇数的顶点之间连一条边，得新图 G'. G' 中每个顶点的度数都为偶数，于是 G' 有 Euler 回路，设为 C. 从 v^* 开始，沿着 C 上边的顺序，交替使用两种颜色对 G' 中的边进行着色. 在相应的着色方案下，两种颜色都会出现在图 G 中所有度数大于等于 2 的顶点. 引理成立. 证毕.

给定图 G 的 k-边着色 $\mathcal{C}$，用 $c(v)$ 表示顶点 v 关联的边中出现的颜色数. 显然 $c(v) \leq deg(v)$. $\mathcal{C}$ 是正常 k-边着色，当且仅当等号对 G 中所有顶点 v 都成立.

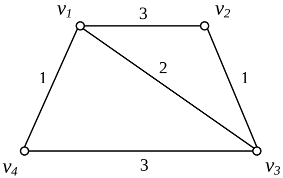
引理

给定图 G 的 k-边着色 $\mathcal{C}$，用 $c(v)$ 表示顶点 v 关联的边中出现的颜色数. 显然 $c(v) \leq deg(v)$. $\mathcal{C}$ 是正常 k-边着色，当且仅当等号对 G 中所有顶点 v 都成立.

如图所示，图 (a) 给出了图 G 的一个 3-边着色 $\mathcal{C}$，v_1 关联的 3 条边只使用了 1 色和 2 色，所以 $c(v_1) = 2 < deg(v_1) = 3$. 类似的，$c(v_2) = 1 < deg(v_2) = 2$，$c(v_3) = 3 = deg(v_3)$，$c(v_4) = 2 = deg(v_4)$. 显然这不是正常边着色. 修改着色方案 $\mathcal{C}$，将边 v_1v_2 的颜色换成 3 色，这种新的着色方案记为 $\mathcal{C}'$，见图 (b). 此时每个顶点关联的边都使用了不同的颜色，即 $c'(v_i) = deg(v_i)$，$i = 1, 2, 3, 4$. 这是一个正常 3-边着色，且有 $\sum_{v \in V(G)} c(v) = 8 < \sum_{v \in V(G)} c'(v) = 10$.



(a) G的3−边着色 C



(b) G的正常3−边着色 C'

定义 7.3 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$ 是图 G 的两种 k-边着色，若 $\sum_{v\in V(G)} c(v) < \sum_{v\in V(G)} c'(v)$，则称 k-边着色 $\mathcal{C}'$ 是对 $\mathcal{C}$ 的一个**改进**，其中 $c(v)$ 与 $c'(v)$ 分别表示用 $\mathcal{C}$、$\mathcal{C}'$ 着色时顶点 v 关联的边中出现的颜色数. 不能再改进的 k-边着色称为**最佳 k-边着色**.

对于任意的着色 $\mathcal{C}$ 来说，显然有 $c(v) \le deg(v)$，所以有 $\sum_{v\in V(G)} c(v) \le \sum_{v\in V(G)} deg(v)$. 而 $\mathcal{C}$ 是正常 k-边着色，当且仅当对 G 中所有顶点 v，都有 $c(v) = deg(v)$，此时满足 $\sum_{v\in V(G)} c(v) = \sum_{v\in V(G)} deg(v)$. 所以对于正常着色 $\mathcal{C}$ 来说，$\sum_{v\in V(G)} c(v)$ 达到最大. 所以利用定义 7.3，可以表示一个着色方案偏离正常着色方案的程度.

引理 7.2 设 $\mathcal{C} = (E_1, E_2, \cdots, E_k)$ 是图 G 的一个最佳 k-边着色. 如果存在一个顶点 v_0 和两种颜色 i 与 j，使得 i 色不在 v_0 关联的边中出现，但 j 色在 v_0 关联的边中至少出现两次，则边导出子图 $G[E_i \cup E_j]$ 中含 v_0 的连通片是一个奇圈.

证明 设 H 是 $G[E_i \cup E_j]$ 中含 v_0 的连通片，假设 H 不是奇圈. 由引理 7.1 可知，H 存在一种 2-边着色，它的 2 种颜色在 H 中度数至少为 2 的顶点所关联的边中都出现. 因此，我们用 i 色和 j 色对 H 重新边着色，其他边的着色不变，得到 G 的一个新的 k-边着色 $\mathcal{C}'$. 已知 j 色在 v_0 关联的边中至少出现两次，即 $deg(v_0) \geq 2$, 所以 i 色和 j 色在 v_0 关联的边中都出现. 于是，$c'(v_0) = c(v_0) + 1$，而 $v \neq v_0$ 时，$c'(v) \geq c(v)$. 因此，$\sum_{v \in V(G)} c'(v) > \sum_{v \in V(G)} c(v)$，与 $\mathcal{C}$ 是最佳 k-边着色矛盾，引理得证.

定理 7.3 若 G 是二分图，则 $\chi'(G) = \Delta(G)$.

证明 显然 $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. 下证二分图 G 可 $\Delta(G)$-边着色. 反证，假设 $\chi'(G) > \Delta(G)$，且设 $\mathcal{C}$ 是 G 的一个最佳 $\Delta(G)$-边着色. 由于 $\mathcal{C}$ 不是正常着色，所以存在顶点 v，使得 $c(v) < deg(v) \leq \Delta(G)$. 因而在顶点 v 关联的边中，有一种颜色没有出现，且有两条边着相同的颜色. 由引理 7.2 知，G 中含有奇圈，与 G 是二分图矛盾. 故对每个顶点都有 $c(v) = deg(v)$，所以 $\mathcal{C}$ 是 G 的正常 $\Delta(G)$-边着色，故 $\chi'(G) \leq \Delta(G)$. 综上，$\chi'(G) = \Delta(G)$. 证毕.

定理 7.4 (Vizing) 若 G 是简单图，则 $\chi'(G) = \Delta(G)$ 或 $\Delta(G) + 1$.

证明过程见教材

课表安排问题 假设某校有 m 位教师 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 和 n 个班级 $y_1, y_2, \cdots, y_n$. 已知某一天教师 x_i 需要给班级 y_j 上 p_{ij} 节课，要求设计一张课时尽量少的课表，至少需要多少个教室？或者在不增加课时的情况下，能否给出一个最节省教室的课表？

用边着色理论解决. 首先建立图模型，每个顶点表示教师或者班级，即有两类顶点：$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 表示教师集合，$Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 表示班级集合. 顶点 x_i 和顶点 y_j 之间连接 p_{ij} 条边，当且仅当教师 x_i 需要给班级 y_j 上 p_{ij} 节课, 得到二分图 $G = (X, E, Y)$.

对图 G 的边进行正常着色，则同色的边表示相应的课程可以安排在同一课时，所以课表安排问题对应于图 G 的正常边着色，边色数 $\chi'(G)$ 就是所需最少课时数. 因为 G 是二分图，所以 $\chi'(G) = \Delta(G)$. 因此，若没有教师教多于 Δ 节课，没有班级上多于 Δ 节课，则安排一张 Δ 课时的课表即可，而且存在求二分图正常 Δ 边着色的多项式算法.

现在把教室资源纳入考虑范围. 设 $\mathcal{C} = (E_1, E_2, \cdots, E_\Delta)$ 是课程图的一个 Δ-边着色, 则 $|E_1|, |E_2|, \cdots, |E_\Delta|$ 分别是用每种颜色着色的边数，也就是每节课时安排的课程数，而 $\max_{i=1}^{\Delta}\{|E_i|\}$ 则是相应的课表需要的最少教室数. 对于同一个二分图 G 来说, 正常 Δ-边着色方案不唯一. 所以在课时节数为 Δ 的前提下，对所有的正常 Δ-边着色方案 $\mathcal{C} = (E_1, E_2, \cdots, E_\Delta)$，寻找 $\max\{|E_1|, |E_2|, \cdots, |E_\Delta|\}$ 的最小值，这就是学校需要为开课提供的最少的教室数. 这个最小值是多少？是否一定能达到？为此提出以下**带有约束条件的课表安排问题**.

假设所有老师给所有班级共计上 l 节课，而需要编制一张 p 课时的课表. 由上面的讨论知，$p \geq \Delta$，平均每一课时至少需同时开 l/p 节课，因此在某一课时里至少需要 $\lceil l/p \rceil$ 个教室. 下面的引理和定理从理论上保证了在一张 p 课时的课表里总可以安排完 l 节课，使得在一节课时里最多占用 $\lceil l/p \rceil$ 个教室.

引理 7.3 设 M 和 N 是图 G 中两个无公共边匹配，且 $|M| > |N|$，则存在 G 中两个无公共边的匹配 M' 和 N'，使得

$$|M'| = |M| - 1,\ |N'| = |N| + 1,\ M' \cup N' = M \cup N.$$

证明 考察图 $H = G[M \cup N]$. 类似 Berge 引理的证明，H 的每个连通片是边在 M 和 N 中交替出现的偶圈或者轨道. 因为 $|M| > |N|$，所以 H 中一定有一个连通片是轨道 P，其长度为奇数，并且它的第一条边和最后一条边都是 M 中的边. 记 $P = v_0 e_1 v_1 \cdots e_{2k+1} v_{2k+1}$. 令

$$M' = (M - \{e_1, e_3, \cdots, e_{2k+1}\}) \cup \{e_2, e_4, \cdots, e_{2k}\},$$

$$N' = (N - \{e_2, e_4, \cdots, e_{2k}\}) \cup \{e_1, e_3, \cdots, e_{2k+1}\}.$$

易见 M' 和 N' 是 G 的两个匹配，且满足引理的条件. 证毕.

定理 7.5 设 G 是二分图，$\varepsilon = |E(G)|$, $\Delta \le p$，则存在 G 的 p 个不相交匹配 $M_1, M_2, \cdots, M_p$，使得

$$E(G) = \cup_{i=1}^{p} M_i,$$

且对 $1 \le i \le p$,

$$\lfloor \varepsilon/p \rfloor \le |M_i| \le \lceil \varepsilon/p \rceil.$$

证明 二分图的边色数是 Δ，所以 G 的边集可以划分成 Δ 个匹配 $M'_1, M'_2, \cdots, M'_\Delta$. 故对于任意 $p \ge \Delta$，令 $M'_i = \emptyset (\Delta < i \le p)$，则得到 G 的 p 个无公共边的匹配 $M'_1, M'_2, \cdots, M'_p$，使得 $E(G) = \cup_{i=1}^{p} M_i$. 对于边数相差超过 1 的任何两个匹配，反复应用引理 7.3，最后就能得到 G 的 p 个无公共边的匹配，满足定理的结论. 证毕.

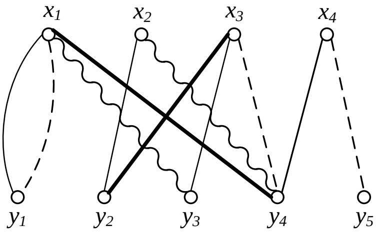
注意：该定理说明任意两个匹配的边数最多相差 1.

例 7.6 设有 4 位教师给 5 个班级上课，教学要求如下：

$$A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

试排出 4 间教室、3 间教室和 2 间教室的课表.

解 根据矩阵 $A=(a_{ij})_{(4\times5)}$ 构造二分图 $G=(X,E,Y)$. 令 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，$Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}$，在 x_i 与 y_j 之间连接 a_{ij} 条边. 于是 $\Delta=4,\varepsilon=11$. 如果编制 4 课时的课表，$\lfloor\varepsilon/p\rfloor=\lfloor 11/4\rfloor=2,\lceil\varepsilon/p\rceil=\lceil 11/4\rceil=3$，则由定理 9.3，可以安排 3 个教室 4 课时的课表. 根据图 (a) 所示的一种 4-边着色方案，相应地得到一张 4 课时课表，如图 (b) 所示.

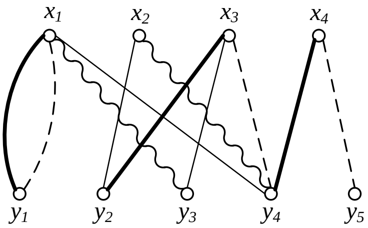


(a)

课时 / 教师	1	2	3	4
x_1	y_1	y_1	y_3	y_4
x_2	y_2	—	y_4	—
x_3	y_3	y_4	—	y_2
x_4	y_4	y_5	—	—

(b)

注意上页图 (a) 所示的四个匹配中，有两个匹配包含的边数相差大于 1(细边表示的匹配 M_1 和粗边表示的匹配 M_4)，根据引理 7.3，通过考察 $G[M_1 \cup M_4]$ 能够找到一张 3 个教室 4 课时的课表 (如图 (b)). $G[M_1 \cup M_4]$ 有两个连通片，每个连通片都是一条长为 3 的轨道，并且都是从细边开始，以细边结束. 将其中一条轨道 (例如 $y_1x_1y_4x_4$) 的粗细边互换，得到图 (a)，从而将细边减少了一条，变成了 3 条，粗边对应的匹配也增加到 3 条边. 这样每个课时最多三个班在上课，只需 3 个教室.



(a)

教师 \ 课时	1	2	3	4
x_1	y_4	y_1	y_3	y_1
x_2	y_2	—	y_4	—
x_3	y_3	y_4	—	y_2
x_4	—	y_5	—	y_4

(b)

若只有 2 个教室可供使用，由于 $\lceil 11/2 \rceil = 6$，需要安排 6 课时的课表，由引理 7.3 和定理 7.5，可以将上页图 (a) 所示的匹配调整成 6 个不相交的匹配，得到 2 个教室 6 课时的课表，如图所示.

教师 \ 课时	1	2	3	4	5	6
x_1	y_4	y_3	y_1	—	y_1	—
x_2	y_2	y_4	—	—	—	—
x_3	—	—	y_4	y_3	y_2	—
x_4	—	—	—	y_4	—	y_5

目录

地图着色问题可以转换为顶点着色问题. 用一个顶点代表一个国家的首都, 当且仅当两个国家有公共边界时, 在对应的两个顶点之间连一条边, 得到一个 G^*, $\chi(G^*)$ 即为地图着色问题需要的颜色数. 为此, 引入对偶图和面色数的概念.

定义 7.4 平面图 G 的一个**正常面着色**是指: 对其一个平面嵌入 G' 的每个面 (国家) 着一种颜色, 使得相邻的两个面着不同的颜色. 若能用 k 种颜色给 G' 的面正常着色, 就称 G 是可k-**面着色的**. 若 G 是可 k-面着色的, 但不是可 $(k-1)$-面着色的, 则称 G 的**面色数**为 k, 记为 $\chi_*(G) = k$.

定义 7.5 设 G 是平面图，G' 是 G 的平面嵌入，构造 G 的**对偶图**G^* 如下：

(1) G' 的每个面 f，都有 G^* 的一个顶点 f^* 与之对应；

(2) G' 的每条边 e 都有 G^* 的一条边 e^* 与之对应：若 e 在 G' 的两个面 f_i 和 f_j 的公共边界上，则在 G^* 中 e^* 连接这两个面对应的顶点 f_i^* 和 f_j^*；若 e 只在一个面 f_i 的边界上，则在 G^* 中对应的 e^* 是以 f_i^* 为端点的环.

从对偶图的定义易见下述性质成立：

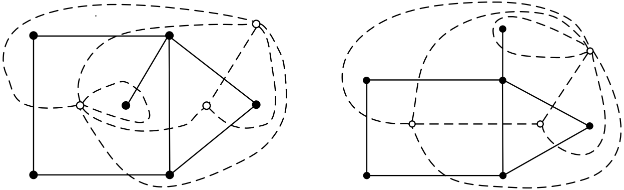
(1) G^* 是平面图，且是平面嵌入.

(2) 若 e 是 G' 中的环，则它对应的边 e^* 是 G^* 的桥；
若 e 是 G' 中的桥，则 e^* 是 G^* 的环.

(3) G^* 是连通的.

(4) 若 G' 的面 f_i 和 f_j 的边界上至少有两条公共边，则关联 f_i^* 和 f_j^* 的边有重边.

(5) 两个图同构，但它们的对偶图不一定同构（如下图）.



(a) (b)

定理 7.6 设 G^* 是连通平面图 G 的对偶图，n^*, m^*, ϕ^* 和 n, m, ϕ 分别是 G^* 和 G 的顶点数、边数和面数，则

(1) $n^* = \phi,\ m^* = m,\ \phi^* = n$;

(2) 设 G^* 的顶点 f^* 与 G' 的面 f 对应，则 $deg_{G^*}(f^*) = deg_G(f)$.

定理 7.7 设 G 是连通的无环平面图，则 G 是可 k-面着色的，当且仅当它的对偶图 G^* 是可 k-顶点着色的.

由上述定理可知，研究地图的着色 (面着色) 等价于研究平面图的顶点着色. 因此，四色定理 “任何平面图的面色数不大于 4” 可以转化成：

$$\chi(\text{平面图}) \leq 4.$$

课后习题 7.16 证明：若一个平面图的平面嵌入是 Euler 图，则它的对偶图是二分图.

课后习题 7.16 证明：若一个平面图的平面嵌入是 Euler 图，则它的对偶图是二分图.

证明 若 G 为 Euler 图，则 G 中所有顶点度数为偶数，G 的对偶图 G^* 的每个面关联偶数条边（由定理 7.6 知 $\phi^* = n$，对偶图的面对应原图的顶点），所以 G^* 中无奇数圈，G^* 为二分图.

定理 7.8 任何平面图都是可 6-顶点着色的.

证明 不妨设 G 是连通的简单平面图，对 G 的顶点数 n 做归纳证明.
(1) $n \le 6$ 时，结论成立.
(2) 假设 $n = k$ 时结论为真，当 $n = k + 1$ 时，因为 G 是平面图，所以 $\delta(G) \le 5$. 设 $v \in V(G)$, $deg(v) \le 5$. 令 $G_1 = G - v$，则 G_1 的顶点数 $n_1 = k$，由归纳假设知 G_1 是可 6-顶点着色的. 当将 G_1 还原成 G 时，与 v 相邻的顶点至多有 5 个，最多使用 5 种颜色. 因而，6 种颜色中总存在一种颜色，可以分配给 v. 所以 G 是可 6-顶点着色的. 证毕.

定理 7.9 任何平面图都是可 5-顶点着色的.

定理 7.1 对任何图 G, $\chi(G) \le \Delta(G) + 1$.

定理 7.2
Brooks 设 $\nu(\nu \ge 3)$ 阶连通图 G 不是完全图也不是奇圈，则 $\chi(G) \le \Delta(G)$.

引理 7.1 若连通图 G 不是奇圈，则存在一种 2-边着色，使得所用的两种颜色在每个度数大于等于 2 的顶点处出现，即每个度数大于等于 2 的顶点所关联的边用到了这两种颜色.

引理 7.2 设 $\mathcal{C} = (E_1, E_2, \cdots, E_k)$ 是图 G 的一个最佳 k-边着色. 如果存在一个顶点 v_0 和两种颜色 i 与 j，使得 i 色不在 v_0 关联的边中出现，但 j 色在 v_0 关联的边中至少出现两次，则边导出子图 $G[E_i \cup E_j]$ 中含 v_0 的连通片是一个奇圈.

定理 7.3 若 G 是二分图，则 $\chi'(G) = \Delta(G)$.

定理 7.4 (Vizing) 若 G 是简单图，则 $\chi'(G)=\Delta(G)$ 或 $\Delta(G)+1$.

引理 7.3 设 M 和 N 是图 G 中两个无公共边匹配，且 $|M|>|N|$，则存在 G 中两个无公共边的匹配 M' 和 N'，使得

$$|M'|=|M|-1,\ |N'|=|N|+1,\ M'\cup N'=M\cup N.$$

定理 7.5 设 G 是二分图，$\varepsilon=|E(G)|$, $\Delta\le p$，则存在 G 的 p 个不相交匹配 $M_1,M_2,\cdots,M_p$，使得

$$E(G)=\cup_{i=1}^{p}M_i,$$

且对 $1\le i\le p$,

$$\lfloor\varepsilon/p\rfloor\le|M_i|\le\lceil\varepsilon/p\rceil.$$

定理 7.6 设 G^* 是连通平面图 G 的对偶图，n^*, m^*, ϕ^* 和 n, m, ϕ 分别是 G^* 和 G 的顶点数、边数和面数，则

(1) $n^* = \phi$, $m^* = m$, $\phi^* = n$;

(2) 设 G^* 的顶点 f^* 与 G' 的面 f 对应，则 $deg_{G^*}(f^*) = deg_G(f)$.

定理 7.7 设 G 是连通的无环平面图，则 G 是可 k-面着色的，当且仅当它的对偶图 G^* 是可 k-顶点着色的.

定理 7.8 任何平面图都是可 6-顶点着色的.

定理 7.9 任何平面图都是可 5-顶点着色的.