

上节课主要内容

环路定理

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \nabla \times \vec{E} = 0$$

静电场是无旋场

由电势梯度求电场

$$\vec{E} = -\nabla U(x, y, z)$$

$$\begin{cases} E_x = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} \\ E_y = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} \\ E_z = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} \end{cases}$$

电势的三种求法

(1) 由叠加原理求电势

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

(2) 由电场积分求电势

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS$$

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dl$$

(3) 由泊松方程或拉普拉斯求电势

$$\nabla^2 U(x, y, z) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 U(x, y, z) = 0$$

§ 1.5.6 带电粒子在电场中运动

一个质量为 m 、电量为 q 的粒子，在静电场中的运动方程为：

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = q \vec{E}(r)$$

设是均匀电场， $t=0$ 时 $x=0$ ，沿 x 轴运动，则 $x(t) = \frac{qE}{2m} t^2$

质量 m 、电量 q 的粒子，处于静电场中电势为 U_1 的位置时，速度为 v_1 ，电荷运动到电势为 U_2 的位置时，速度为 v_2 ，则有：

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + qU_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + qU_2$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2q(U_1 - U_2)}{m}}$$

带电粒子在电场中运动，电场力做正功，粒子的动能增加

显像管工作原理

- 如果粒子垂直于电场方向入射，在电场力的作用下将使粒子方向发生偏转。
- 显像管中通常有加水平偏转电场和垂直偏转电场，控制这两个电场(或电势差)就可以让电子束落到显示屏的不同位置。
- 示波管、显像管、雷达指示管、电子显微镜等就是利用电子束的偏转与聚焦来工作的。

电子枪由热阴极、栅极和简状阳极组成。栅极G相对于阴极加负电压，使栅极附近的空间为电子的高势能区，在栅极和阴极之间出现一个势垒，阴极发射的电子的速度具有一定的分布，只有初速度达到一定阈值的电子，才能越过势垒后，向阳极做加速运动。

若栅极电压较小，则势垒小，有更多的电子穿过势垒，形成较强的电子束，反之，则有较弱的电子束。

所以，通过控制栅极负电压的大小，可以控制电子束的强度，即荧光屏上点的亮度。

如果阳极相对于阴极的电势为 U_A ，由阴极发射出来的电子具有初速度 v_0 ，则根据能量守恒，可以得到的电子的速度为：

$$eU_A = \frac{1}{2}m_e(v^2 - v_0^2) \rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2e}{m_e}U_A}$$

电子的初速度通常很小，加速电压 U_A 可以高达几千甚至几万伏，因此达到银屏的电子具有较高的动能。

以加速电压为1万伏为例，可以估算电子的最终速度为(不考虑相对论效应)：

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m_e}U_A} \approx 5.9 \times 10^7 \text{ m/s}$$

速度达到光速的20%！

【例27】如图所示为由平板电极构成的除尘空间。两极间加电压 U , 入口处粒子质量为 m 、电荷为 q , 水平速度为 v , 若希望所有的粒子都在下电极处被捕获, 则电极的长度应如何设计?

【解】电场方向为+y方向, 粒子在y方向的运动方程为:

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = qE = q \frac{U}{d}$$

$$y(t) = \frac{qU}{2md} t^2 + C_1 t + C_2$$

设极板间距为 d , $y_{max}(t=0)=d$, $v_{y(t=0)}=0$, 代入上式, 得

$$C_1 = 0, C_2 = d \quad y(t) = \frac{qU}{2md} t^2 + d$$

粒子到达下极板($y=0$)所需的时间为 T :

$$y(T) = 0 \Rightarrow T = \sqrt{\frac{2md^2}{qU}}$$

$$\Rightarrow q < 0 \text{ (书上用了 } -q \text{)}$$

粒子水平方向的飞行速度是恒定的, 所以

$$l = vT = v \sqrt{\frac{2md^2}{qU}}$$

设 $|q/m| = 10^{-4} \text{ C/kg}$, $U = 40 \text{ kV}$, $d = 20 \text{ cm}$, $v = 2 \text{ m/s}$, 则

$$l = v \sqrt{\frac{2md^2}{qU}} = 28 \text{ (cm)}$$

电子在两种不同电势界面的折射现象

电子的运动方向与电场方向不一致时, 电场力不仅改变电子的速度大小, 而且也改变电子的运动方向。

电子在静电场中的运动方式与光的折射现象十分相似。

当电子从电势为 U_1 的区域进入电势为 U_2 的区域, 电子的运动方向将发生偏转。

$\vec{E} = -\nabla U(x, y, z)$

$E_x = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} = 0$ **水平方向电势 U 不变化**

$F_x = qE_x = 0$

$v_{1x} = v_{2x}$

$v_1 \sin \alpha = v_2 \sin \beta$

$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_2}{v_1}$

不考虑粒子的初速度, 设粒子的动能主要由电场提供, 则电子在不同的电势场中具有不同的能量, 即

$$eU_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2eU_1}{m}}$$

$$eU_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2eU_2}{m}}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{U_2}{U_1}}$$

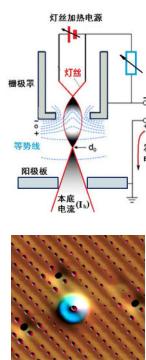
与光在两种不同的介质中的折射现象类似

静电透镜的原理和作用

- 静电透镜是电子透镜中的一种, 指施加一定电位的、中心开孔金属薄板或圆筒构成的电子或离子光学器件。
- 静电透镜原理: 将静电场中的等势面做成凸透镜形状, 那么平行电子束将会聚在一点。
- 多个静电透镜组成透镜系统, 主要作用是将带电离子束流聚焦或以很小的发散角送至下一级使用。

- 早期的电子显微镜中曾使用过静电透镜。
- 但由于静电透镜需要很强的电场, 常在镜筒内产生弧光放电和电击穿, 低真空度情况下尤其严重。
- 静电透镜焦距不能很短, 因而不能很好地矫正球差。
- 现在制造的透射电子显微镜, 静电透镜仅用于使电子枪中的阴极发射出的电子, 汇聚成很细的电子束, 而不用来成像。

- 静电透镜和磁透镜统称为电子透镜。
- 1931年E.Ruska和M.Knoll发明第一台透射电子显微镜(分辨率为50nm)，为此获得1986年诺贝尔奖。
- 扫描电子显微镜(Scanning Tunneling Microscope, STM)中，**电子透镜起到调节电子源尺寸的作用**，最终电子束斑用来激发样品表面与该束斑相对应的像素信号，该像素的信号发射区体积的大小，是决定信息的**空间分辨率**的主要因素。

电子显微镜原理和测量
表面原子结构的图像

电子显微镜的分辨率

电子显微镜比光学显微镜具有更高的分辨本领。
光学显微镜的分辨率为 $0.1 \mu\text{m}$ 。

电子显微镜的分辨本领决定于电子束的能量。电子束的德布罗意波长为：

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{\sqrt{2eU}}{mc} \rightarrow \frac{1.23}{\sqrt{U}} (\text{nm})$$

根据阿贝(E.Abbe)光学分辨率公式，电子显微镜的分辨率为：

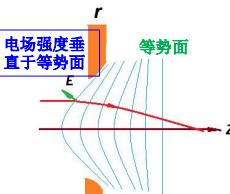
$$d = \frac{0.61\lambda}{n \sin \alpha} (\text{nm}) = \frac{0.753}{\epsilon \sqrt{U}} (\text{nm}) \quad \begin{array}{l} \alpha \text{是目标对象的半张角} \\ n \text{是介质的折射率} \\ \epsilon \text{是介质的介电常数} \end{array}$$

通常电子束能量范围为20kV (0.0589Å) ~ 1 MV (0.00687Å)。
分辨本领可达到**点分辨率 1~3 Å、线分辨率 0.5~2 Å**。

【例28】电子束穿过单孔电极形成静电透镜，计算静电透镜的焦距f

【解】当电子穿过圆孔时，在径向方向，电子受到的静电力为

$$F_r = -eE_r$$



设电子在z方向的速度为 v_z ，($v_z = dz/dt$)，则在时间 dt 间隔内，电子的动量增加为

$$dp_r = F_r dt \xrightarrow{v_z = \frac{dz}{dt}} \frac{-eE_r}{v_z} dz$$

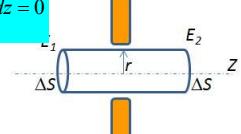
忽略电子穿过圆孔轴向速度 v_z 的变化，则总动量增加为

$$p_r = \frac{-e}{v_z} \int_{-d}^d E_r dz$$

以z轴为中心，做半径为r、长度为 $2d$ 的圆柱形高斯面。在左、右两个底面，各自的电场 E_1 、 E_2 近似均匀，电通量分别为 $-\pi r^2 E_1$ 和 $\pi r^2 E_2$ 。侧面只有径向电场 E_r 对电通量有贡献。高斯面内无电荷，则整个圆柱面电通量为零，所以

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\pi r^2 E_1 + \pi r^2 E_2 + 2\pi r \int_{-d}^d E_r dz = 0$$

$$\int_{-d}^d E_r dz = -\frac{r}{2} (E_2 - E_1)$$

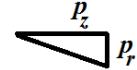


则 $p_r = \frac{-e}{v_z} \int_{-d}^d E_r dz = \frac{er}{2v_z} (E_2 - E_1)$

设电子束通过圆孔后，偏离轴线的角度为 α ，则

$$\tan \alpha = -\frac{p_r}{p_z}$$

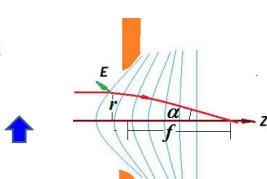
$$p_z = mv_z$$



在光学中，离光轴距离为r的光线，通过焦距为f的薄透镜后，转过的角度 α ：

$$\tan \alpha = \frac{r}{f}$$

$$f = \frac{r}{\tan \alpha}$$



$$\tan \alpha = -\frac{p_r}{p_z}$$

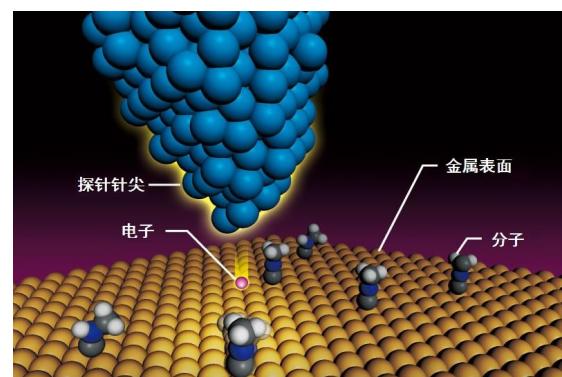
$$p_r = \frac{er}{2v_z} (E_2 - E_1)$$

$$f = \frac{rp_z}{p_r} = \frac{2mv_z^2}{e(E_1 - E_2)} = \frac{4E_k}{e(E_1 - E_2)}$$

电子的焦距与离轴的距离r无关，只与电子的动能 E_k 和圆孔两边的电场强度 E_1 、 E_2 有关。

所有平行于轴线的相同能量的近轴电子束通过圆孔后都会聚焦到同一点。

第2章 静电场中的物质与电场能量



§ 2-0 物质的电性质

一、导体、绝缘体与半导体

- 早在18世纪初人们就注意到了各种物质电性质的不同。
- 1729年，英国人格雷(Stephen Gray, 1666-1736)发现金属和丝绸的导电性能不同：前者接触带电体时能很快把电荷转移或传导到别的地方，而后者却不能。



19

不同原子内部的电子数目和核内的情况各不相同。

由不同原子聚集在一起构成的不同物质的电性质各不相同，甚至有的差别很大。

即使是由相同原子构成的物质，其结构本身可能有巨大差别(金刚石、石墨)，或者由于所处的环境条件(如温度、压强等)不同，电性质也有差异。

电阻率(用符号 ρ 表示)是可以定量反映材料传导电荷能力的物理量

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

ρ 在数值上等于单位横截面、单位长度的材料的电阻。物质的 ρ 越小，其转移和传导电荷的能力越强。

电导率 σ 是电阻率 ρ 的倒数。

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

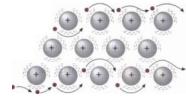
20

根据材料转移和传导电荷能力的强弱(或电荷在材料中移动的难易程度)，通常人们把材料分为三类：导体、绝缘体和半导体。

	转移和传导电荷的能力	电阻率 ρ
导体	很好	$10^{-8}\Omega \cdot m \sim 10^{-6}\Omega \cdot m$
半导体		$10^{-6}\Omega \cdot m \sim 10^6\Omega \cdot m$
绝缘体	很差	$10^6\Omega \cdot m \sim 10^{18}\Omega \cdot m$

21

1. 导体



导体：转移和传导电荷能力很强的材料，或者说电荷很容易在其中移动的材料；

导体的电阻率小，约在 $10^{-8}\Omega \cdot m \sim 10^{-6}\Omega \cdot m$ 之间。

导体有固态材料，如金属、合金、石墨、人体、大地等；有液态材料，如电解液，即酸、碱、盐的水溶液等；也有气体，如各种电离气体；此外，在导体中还有等离子体和超导体。

能在物体内自由移动的电荷称为自由电荷。金属中的自由电荷是电子；溶液中的自由电荷是正、负离子。

22



Cu 和 Al 是工业中最常用的导体材料，可以做成各种电缆

23

2. 绝缘体

绝缘体：转移和传导电荷能力很差的材料，即电荷在其中很难移动的物质；

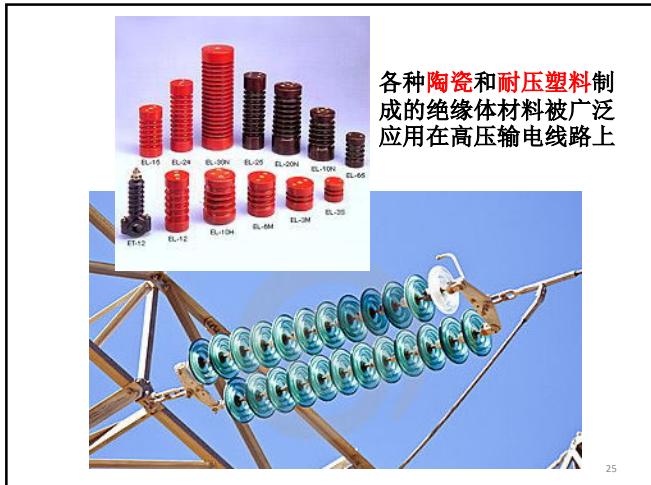
绝缘体的电阻率大，一般为 $10^6 \sim 10^{18}\Omega \cdot m$ 。

绝缘体同样有固态物质，如玻璃、橡胶、塑料、瓷器、云母、纸等；

有液态物质，如各种油；

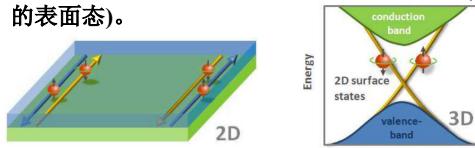
有气态物质，如未电离的各种气体。

24



拓扑绝缘体

- ◆ 拓扑绝缘体：材料的表面、边缘可导电，材料内部具有绝缘体特征即不导电。
- ◆ 1987年科学家预言了量子阱中有具有时间反转对称保护的二维边缘态，该现象在2007年被实验测量到。
- ◆ 2006年预言在二元合金中可有类似的拓扑绝缘体。
- ◆ 2008年首次从实验上实现了3D的拓扑绝缘体(对称保护的表面态)。



J. E. Moore, The birth of topological insulators, *Nature* 464, 194-198 (2010)

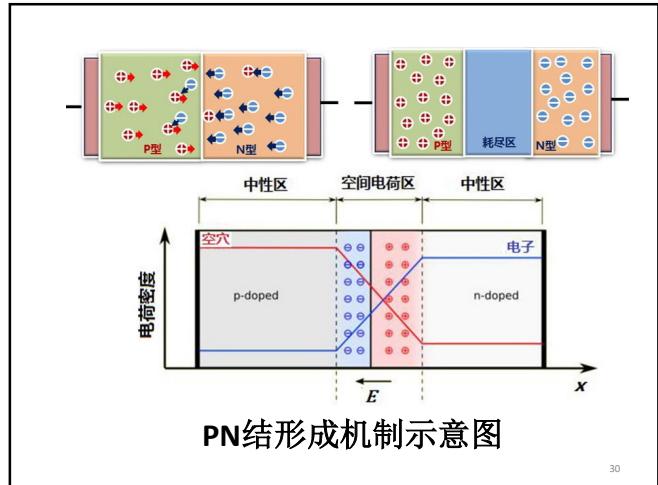
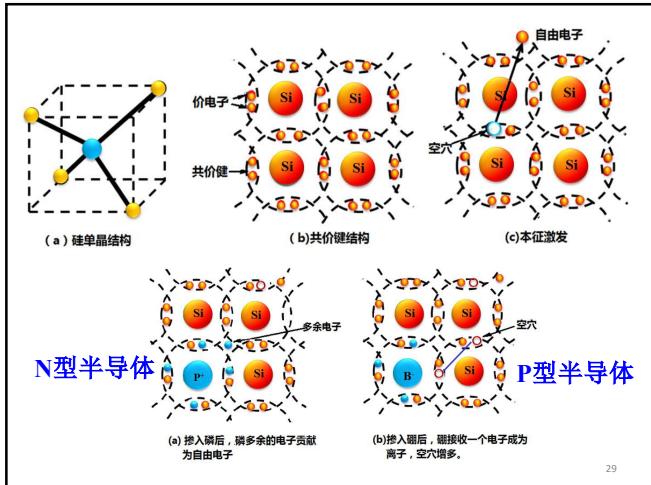
3. 半导体

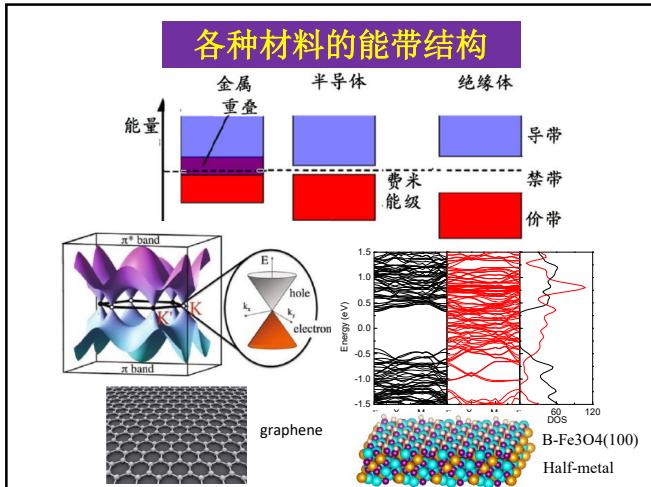
- ◆ 半导体：导电能力介于导体和绝缘体之间的材料；
- ◆ 半导体的电阻率约为 $10^6 \sim 10^8 \Omega \cdot m$ 。
- ◆ 典型的半导体物质 Si, Ge, Sb(锑), GaP, InSb(锑化锢), InAs, GaSb, GaAs, GaN, SiC.

高纯度的Si半导体材料是信息工业的重要原料
硅谷(silicon valley): 最早是研究和生产以硅为基础的半导体芯片的地方

27

- ◆ 半导体靠导带中的电子或价带中的空穴导电。
- ◆ 本征半导体不含杂质(如单晶Si, Ge)。在本征半导体中掺入杂质原子，并通过控制掺入杂质原子的数量，可改变和控制半导体的导电性能。
- ◆ N型半导体：掺入的杂质原子比原来的原子多一个价电子(如在Si或Ge中掺入V族元素P, As, Bi等，称为施主杂质)，则产生电子导电，称为N型半导体；
- ◆ P型半导体：掺入的杂质原子比原来的原子少一个价电子(如在Si或Ge中掺入III族元素B, Ga, In等，称为受主杂质)，则产生空穴导电，称为P型半导体。
- ◆ 实际应用的半导体多为掺杂的单晶体，有时也用多晶体。近年来，非晶半导体也有较大发展。





二、等离子体

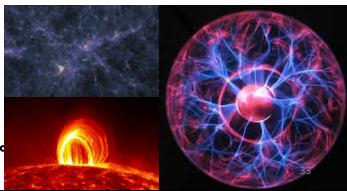
1. 什么是等离子体

- ◆ 等离子体：部分或完全电离的气体，由大量自由电子和正离子以及中性原子、分子组成。
- ◆ 等离子体在宏观上是近似电中性的，所含的正电荷与负电荷几乎相等。

32

2. 等离子体如何形成

- ◆ 温度不同物质将处于不同的聚集状态。固体加温熔解成为液体，液体加温沸腾成气体。
- ◆ 升温到几万度、几十万度甚至更高的温度，则不仅分子或原子的运动十分剧烈，而且原子中的电子也已具有相当大的动能，足以摆脱原子核的束缚成为自由电子，于是原子电离，成为自由电子和正离子。
- ◆ 这种部分电离(带电粒子的数量超过千分之一)或完全电离的气体，就是等离子体。

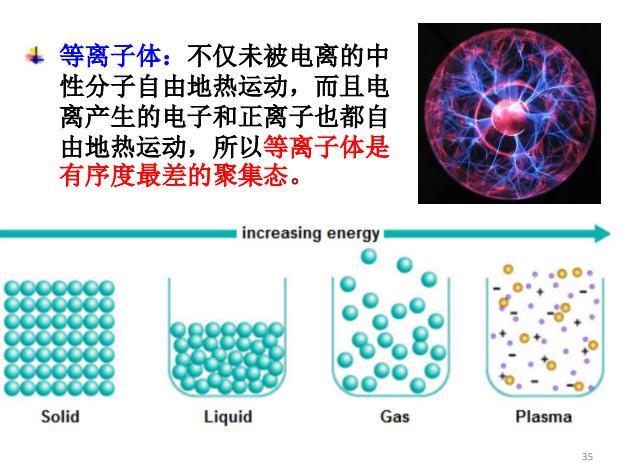


3. 等离子体是物质的第四态

- ◆ 从物质聚集态的顺序来说，等离子体居于固体、液体、气体之后，位列第四，所以等离子体又称为物质的第四态。
- ◆ 物质的不同聚集态，从微观上说，就是构成物质的微观粒子排列的有序程度不同。
- ◆ 固体(晶体)：粒子规则地周期性地排列，近程、远程都有序，使固体具有确定的形状和体积。
- ◆ 液体：分子只在小范围内规则排列，近程有序，远程无序，使液体具有一定体积且不易压缩，但又易流动或相对移动从而没有一定形状。
- ◆ 气体：分子作无规则热运动，近程、远程都无序，使气体既无固定形状和体积，又易流动和压缩。

34

- ◆ 等离子体：不仅未被电离的中性分子自由地热运动，而且电离产生的电子和正离子也都自由地热运动，所以等离子体是有序度最差的聚集态。



35

4. 等离子体间的力

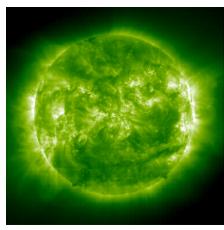
- ◆ 普通的气体：由中性原子、分子组成，其间的相互作用是分子力，这是一种短程相互作用，只在分子相距很近(即碰撞)时才需要考虑，相距较远即可忽略，由此，在气体不太稠密时主要是二体碰撞，多体碰撞极少。
- ◆ 等离子体：中性原子分子之间的作用已退居次要地位，整个系统受带电粒子的运动支配。带电粒子之间的相互作用主要是库仑力，这是一种长程力，每个带电粒子同时与许多带电粒子发生作用(集体相互作用)，并且带电粒子的运动还将受到外加电磁场的强烈影响。

36

从导电性质上看，由于等离子体主要是由可自由运动的电子和正离子组成，所以是导电性能极好的良导体。

这种由大量电子和正离子组成的物质系统宏观上是电中性的，任何局部正电荷或负电荷的偶然集中，都将会被附近移来的相反电性电荷立即中和，从而恢复电中性。

所有这些，都决定了等离子体具有一系列区别于气体的独特性质和研究方法。

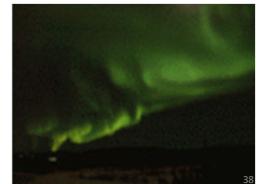


37

5. 等离子体是宇宙物质存在的主要形态

地球上，常见的是气体、液体和固体，等离子体很少见，这是因为地球表面的温度太低，通常并不具备产生等离子体的条件。

宇宙中，恒星是高温电离形成的等离子体，稀薄的星云和星际物质则是由辐射电离形成的等离子体，宇宙中99%的物质是等离子体。

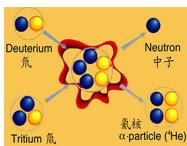


38

6. 聚变

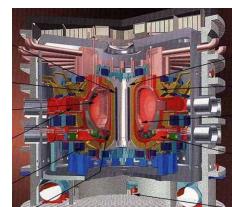
核聚变：轻的原子核结合成重的原子核，可以获得取之不尽、用之不竭的能量；

为了实现可控热核反应而不是热核爆炸，需要解决一系列难题。例如，聚变只能在几百万度或更高的温度下进行，在这种温度下任何固体都将熔化而无法作为装载的“容器”。为此，人们采用磁场来约束等离子体，迫使等离子体的全部带电粒子按一定队形运动而不与固体器壁接触。

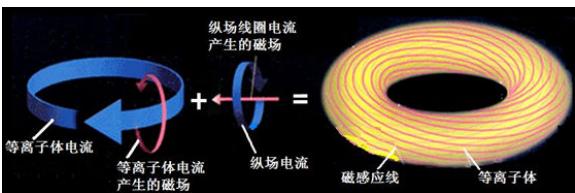
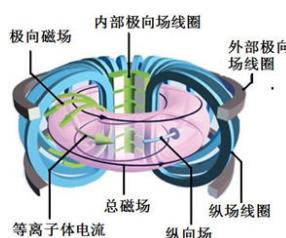


39

然而，又出现了等离子体的不稳定性问题，它使得约束无法维持到实现反应所需的时间。所以，为了解决等离子体的磁约束问题，需要设计各种磁场位形，建立巨大而复杂的托卡马克装置。



40



41

三、超导体

1. 什么是超导体

某些金属或合金的温度降到接近绝对零度时，其电阻突然变为零或接近于零，这种现象称为超导电现象。

现代超导重力仪的观测表明，超导态物体的电阻率必定小于 $10^{-28} \Omega\text{m}$ ，远远小于正常金属迄今所能达到的最低电阻率 $10^{-8} \Omega\text{m}$ 。

有几十种元素/数千种合金和化合物都具有超导性。

42

2. 超导体的发现

K. Onnes教授(1853-1926年), 荷兰莱登实验室

- ◆ 29岁: 莱登大学教授
- ◆ 30岁: 阿姆斯特丹皇家科学院院士
- ◆ 1895: 空气被液化, 81K
- ◆ 1898: 氢气被液化, 20K
- ◆ 1908: 氦气被液化, 4.25K
- ◆ 1911: 发现水银在 4.22K~4.27K 电阻消失(超导)
- ◆ 1913年获诺贝尔物理学奖
- ◆ 世人称之为“绝对零度先生”



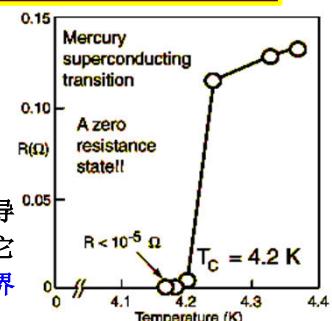
43

3. 超导体的转变温度

三种临界参数:

- ◆ 临界温度
- ◆ 临界磁场
- ◆ 临界电流

物质开始转变为超导状态的温度, 称为它们的转换温度或临界温度(T_c)



K. Onnes, Commun. Phys. Lab. (1911).

44

4. BCS理论—超导机理



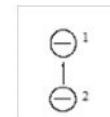
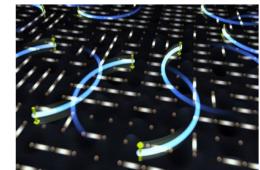
- 巴丁(美国), 1956年与布拉顿和肖克因晶体管效应获诺贝尔物理学奖, 因 BCS理论1972年诺贝尔物理学奖。
- 库柏 42岁, 提出超导理论模型, 36岁任教授
- 施里弗 41岁, 解决超导理论问题, 33岁任教授
- 正常情况下, 电子在金属中运动时, 因晶格的不完整性(如缺陷/杂质)等而发生碰撞, 造成能量损耗, 即有电阻;
- 超导状态下, 低于某特定温度时, 通过电子—声子相互作用, 两个电子耦合在一起(好象两个电子之间有相互吸引作用一样)形成Cooper Pairs。

注: 声子是周期性晶格震动量子化的最小单位, 是一种元激发或准粒子, 不是真正的粒子, 不能脱离固体而存在。

45

这时金属想要阻碍电子运动, 就需要先拆散电子对。

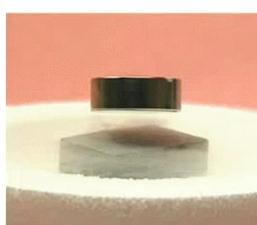
- 低于某个温度时, 能量不足以拆散电子对(Cooper 对), 因此电子就能流畅运动, 电阻接近于零。
- BCS理论的基础就是电子—声子相互作用模型。



Electron-Phone interaction to form Cooper Pairs

46

5. 高温超导

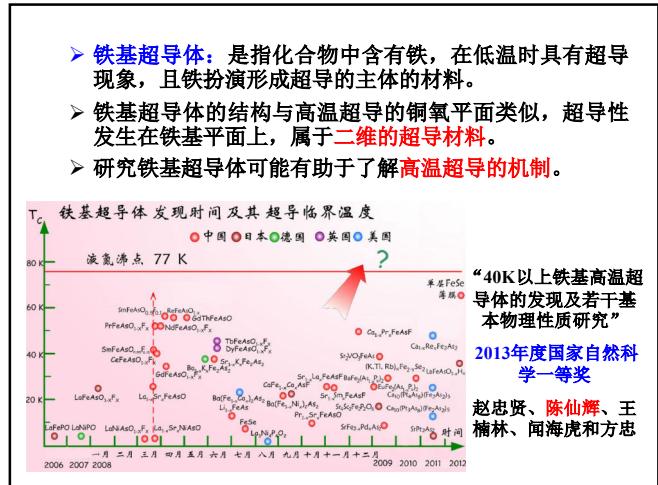
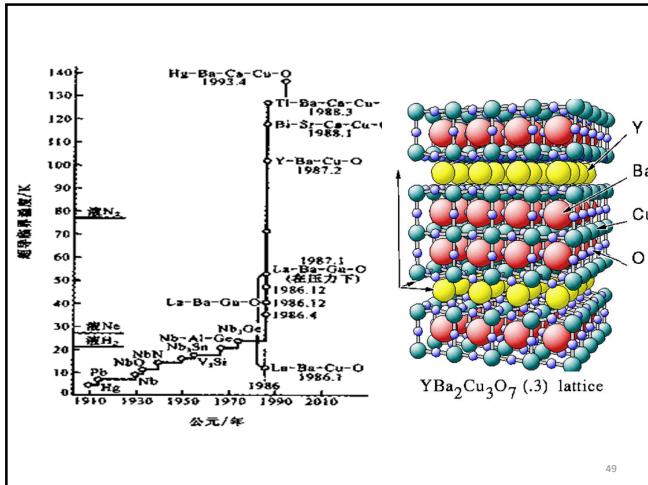


- 1983年, Muller和Bednorz在瑞士苏黎世实验室研究氧化物超导电性。
- 1986年他们发现LaBaCuO超导体: $T_c \sim 36 K$ 。
- 1987年, 获诺贝尔物理学奖, Bednorz (德国) 37岁; Muller (瑞士) 60岁

47

- 1986年12月和1987年1月初, 中国科学院物理所赵忠贤教授等宣布, Sr-La-Cu-O系统的 T_c 为 48.6 K, Ba-La-Cu-O系统的 T_c 为 46.3 K。
- 1987年2月16日, 美联社报道美国朱经武教授等获得起始转变温度为 98 K 的超导材料。
- 1987年2月24日, 赵忠贤教授等已制成起始超导温度高于 100 K, 中点转变温 92.8 K, 零电阻温度为 78.5 K 的超导材料 $Ba_xY_{5-x}Cu_5O_{5(3-y)}$ 。
- 1988年1月22日, 日本宣布 Bi-Sr-Ca-Cu-O 超导材料的 T_c 约为 105 K。
- 1988年3月, 美国宣布 Tl-Ba-Ca-Cu-O 超导材料的 T_c 为 125 K。1993年4月发现 Hg-Ba-Ca-Cu-O 超导材料的 T_c 为 134 K。

48



§ 2.1.1 静电平衡

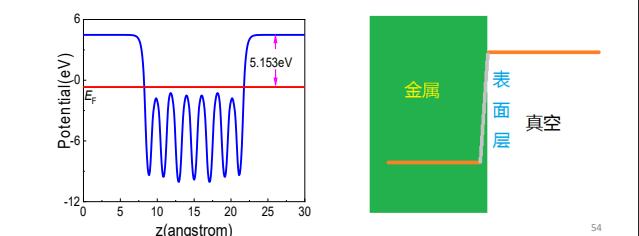
一、静电平衡的建立

1. 金属中的自由电子

- 在金属中，由于相邻原子的相互作用，原子的价电子并不约束在某一原子中，而为各原子实所共有，称为自由电子。
 - 但是，自由电子并没有脱离金属。由于原子间的相互作用，形成了各原子实的宏观电场，若把金属置于真空中，则自由电子在金属中有较低的电势，在外部有较高的电势，在金属的表面层中，势能曲线为势垒。自由电子则被约束在势阱中。

53

- 金属的逸出功(work function): 真空中和金属内的电势差。
 - 只有动能大于逸出功的自由电子，才能从表面穿过势垒逃逸到外部。
 - 大多数的金属的逸出功为 1-6 eV，而常温下一个电子的平均动能为 0.039 eV，远不足以逸出。



2. 静电平衡的定义

- 导体中不再有宏观的电荷运动，即导体内自由电荷分布以及导体内、外电场分布不随时间变化，称导体达到静电平衡。

$$\frac{\partial \rho(x, y, z)}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{E}(x, y, z)}{\partial t} = 0$$

3. 静电平衡的建立和条件

- 导体内部电场强度处处为零

$$\vec{E}|_{\text{导体内}} \equiv 0$$

【证明】 反证法， E 如果不为 0，导体内自由电荷将在电场作用下运动，电荷分布将发生变化，表示尚未达到静电平衡。

55

二、处于静电平衡的导体的性质

1. 导体内电场强度处处为零

$$\vec{E}|_{\text{导体内}} \equiv 0$$

静电平衡时导体表现出彻底的“抗电性”

$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$

外加电场 感应电荷的电场

感应电荷在球内的场强 E' 和外场源在球内的场强 E_0 ，大小相等、方向相反。总电场为 0。

合电场的电力线

56

2. 导体是等势体

$$\vec{E} = -\nabla U \quad \vec{E}|_{\text{导体内}} \equiv 0 \quad U = \text{常数}$$

- 导体是等势体，导体表面是等势面
- 空心导体壳，腔内无电荷时，腔内处处电势与导体壳的电势相等

57

- 导体是等势体，导体表面的不同点间没有电势差；
- 导体与大地或导体与另一个导体之间的电势差是唯一的。
- 但对一个带电的绝缘体，绝缘体上的不同点的电荷分布不一定相同，绝缘体各点电势不一定相同，在绝缘体上移动电荷需要做功。
- 因此绝缘体的不同点间存在电势差。
- 绝缘体不同点与大地之间也有不同的电势差。

3. 导体内部电荷密度处处为零

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \vec{E}|_{\text{导体内}} \equiv 0 \Rightarrow \rho|_{\text{导体内}} = 0$$

静电平衡时，导体内部电荷密度处处为零，因此电荷只分布在导体的表面。

请大家自行用高斯定理证明！

空腔内无电荷，导体内表面的面电荷密度处处为 0，电荷只出现在导体的外表面。

空心导体壳，空腔内有电荷 q 时，导体内外表面总电量为 $-q$

59

4. 导体建立静电平衡的时间很短

若初始时刻，导体内电荷不为零(设为 ρ_0)，则导体内的电荷将按指数衰减。只需要很短的时间(τ 约 10^{-14} 秒)，导体就能达到静电平衡。

$$\rho = \rho_0 e^{-t/\tau}$$

静电平衡时间远小于眨眼的平均时间 (0.3 秒)

导体表面电荷的电荷层一般只有 1 至 2 个原子的厚度

60

汤姆逊 (W. Thomson) 定理

在介质中有一些固定的导体，将电荷分别放在这些导体上，当达到静电平衡时，电荷在这些导体上的分布使电场能量为最小。

- 结论I：当达到静电平衡时，要使电场能量为最小，则导体必为等势体。
- 结论II：当达到静电平衡时，要使电场能量为最小，则导体上电荷必分布在外表面。

电荷分布在表面 电荷均匀分布在球内

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R} < W = \frac{3}{20\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}$$

61

5. 导体表面的电荷分布非常复杂

➤ 静电平衡时，导体中的自由电荷都会分布在导体的外表面。

➤ 导体表面的电荷分布与导体的几何形状、导体所带的总电量、周围其它场源、周围导体等有关，相当复杂。

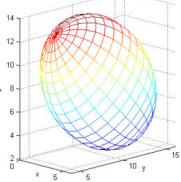
➤ 对孤立导体，表面电荷分布只与导体的形状有关。定性关系是：凸的地方，面电荷密度大，凹的地方，面电荷密度较小。即电荷分布与表面的曲率有关，但目前还没有找到唯一的函数关系。



62

20世纪50年代，前苏联科学家朗道在《连续介质电动力学》中介绍了用正交曲线坐标系求解椭球导体表面电荷分布的例子，对椭球导体：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



得到其表面电荷分布为：

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi abc} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

63

国际和国内有很多人研究导体表面的电荷分布，但是到目前为止，有两点是确定的：

- 电荷分布与曲率半径有关，但是曲率半径相同的地方，电荷密度可以不相同！
- 电荷密度与曲率半径的函数关系随导体的形状不同而不同，很难概括出一个统一的 $\sigma = \sigma(r)$ 的函数表达式。

$$\sigma \approx \frac{2\epsilon k \Delta V}{\exp(-2k\Delta n) - 1} \quad k \text{ 为平均曲率}$$

J. Phys. D, Appl. Phys. 19, 1-6 (1986)

6. 导体表面外侧电场与表面垂直，场强大小为 σ/ϵ_0

(1) 关于表面电场方向的证明

【反证法】假设在导体表面某处的电场与其表面不垂直。那么，在那里的电场一定有一平行于导体表面的分量 E_{\parallel} ， E_{\parallel} 的存在将会引起导体表面电荷的横向运动，违背了导体达到静电平衡这一前提。

所以静电平衡下的导体表面电场处处与表面垂直。

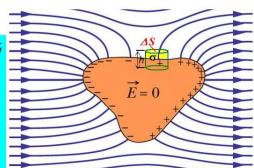
65

(2) 表面电场大小 E 的求解

【利用高斯定理求解】在导体表面取面元 ΔS ，过它的周线作一柱面，使其侧面与导体表面垂直，两底面分别位于导体表面的两侧，取该柱面为高斯面，设面电荷密度为 σ 。由于导体内 E 为零，高斯面处于导体内侧部分的电通量为零。侧面的高 Δh 趋于0，对通量没有贡献。

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{S} = \int_{\text{内}} \bar{E} \cdot d\bar{S} + \int_{\text{外}} \bar{E} \cdot d\bar{S} + \int_{\text{侧}} \bar{E} \cdot d\bar{S} \\ = 0 + E \Delta S + 0 = E \Delta S = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



思考：该电场与面电荷密度为 σ 的无限大导体两侧电场 $\sigma/2\epsilon_0$ 是否矛盾？

7. 避雷针



- 避雷针就是利用了导体尖锐部分表面曲率 K 大(曲率半径 R 小),面电荷密度 σ 大的性质。
- 导体表面电场 E 与 σ 成正比。 σ 大,则 E 大,且垂直于导体表面;
- 空气中残留的自由电荷(电子或离子)被强电场加速,获得足够大的能量,当它们在激烈运动过程中撞上空气分子或某些原子时,就将其电子打出来(电离),从而产生大量新的离子,空气便变得易于导电,即强大的电场使空气击穿。

67

在雷雨时节,大块的云顶部带正电,而底部则有过剩的负电,于是在接近地面时,地面感应产生正电。云底部与地面距离3-4 km,其电荷大到足以使云与地面之间产生一个20 or 30 MV甚至达到100 MV的电势差。

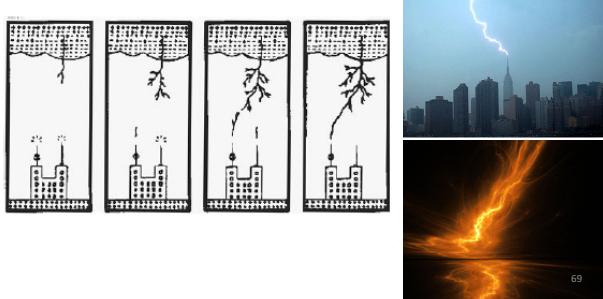
如果没有避雷针,地面与云间累积电荷产生的高电势差会把空气击穿,产生大规模放电,这就是雷电。



-Q
+Q
-Q

68

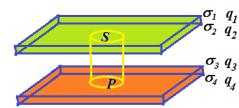
- 如果装上避雷针,则避雷针尖端电荷密度 σ 比其它地方大许多,率先把周围空气击穿,使云与地面电荷不断中和,避免电荷累积和大规模的放电所带来的危害。因此避雷针实际上是引雷针。



69

【例29】两块相同大小的导体板,平行放置,距离很近,忽略边缘效应,若所带电量分别为 Q_1 和 Q_2 ,求两个导体板四个表面上的电荷。

【解】由于导体板间距很小,近似认为是无限大导体。作柱形高斯面,圆柱的上下底面分别在两个导体板内部,则由高斯定理:



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 = \frac{(\sigma_2 + \sigma_3)S}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma_2 = -\sigma_3$$

上下底面在导体内,
 $E=0$, E 的通量为0;
圆柱侧面,电场平行于侧面,通量也为0

$$E_P = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} = 0$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4 = 0$$

$$\sigma_2 = -\sigma_3 \quad \sigma_1 = \sigma_4$$

P点在导体板内 $\rightarrow E=0$, P点电场由四个面共同贡献,1,2,3在P点的一侧,4在P点另一侧

$$Q_1 = (\sigma_1 + \sigma_2)S$$

$$Q_2 = (\sigma_3 + \sigma_4)S$$

$$\sigma_2 = -\sigma_3$$

$$\sigma_1 = \sigma_4$$



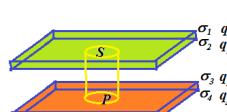
$$q_1 = q_4 = \frac{Q_1 + Q_2}{2}$$

$$q_2 = -q_3 = \frac{Q_1 - Q_2}{2}$$

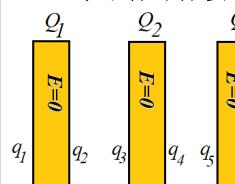
注意

$$\sigma_1 \neq \sigma_2$$

$$\sigma_3 \neq \sigma_4$$



三个平行导体板



$$\frac{q_1}{2\epsilon_0 S} = \frac{q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6}{2\epsilon_0 S}$$

板1内

$$\frac{q_1 + q_2 + q_3}{2\epsilon_0 S} = \frac{q_4 + q_5 + q_6}{2\epsilon_0 S}$$

板2内

$$\frac{q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5}{2\epsilon_0 S} = \frac{q_6}{2\epsilon_0 S}$$

板3内

$$q_1 + q_2 = Q_1$$

$$q_3 + q_4 = Q_2$$

$$q_5 + q_6 = Q_3$$

$$q_1 = \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2 + Q_3)$$

$$q_2 = \frac{1}{2}(Q_1 - Q_2 - Q_3)$$

$$q_4 = \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2 - Q_3)$$

$$q_3 = -q_2$$

$$q_5 = -q_4$$

$$q_6 = q_1$$

三、载流导体和静电平衡导体的区别

- 一旦导体中存在电荷运动，即有电流时，导体将脱离静电平衡状态。
- 一般来说，随时间变化的电流 $I(t)$ 有可能改变导体中自由电荷的分布 $\rho(t)$ ，从而使电场随时间变化 $E(t)$ ，这种情况比较复杂。
- 对不随时间变化的电流，即稳恒电流，导体中电荷分布不会随时间变化 ($\partial \rho / \partial t = 0$)，所产生的电场仍为静电场 ($\partial E / \partial t = 0$)。
- 但即使在稳恒情况下，载流导体和静电平衡导体也有本质区别。

73

- 静电平衡时，导体显示出彻底的“抗电性”，表现为导体内电场强度必须处处为零 $E=0$ 。

$$\vec{E} \Big|_{\text{导体内}} \equiv 0$$

- 载流导体则不同，导体内存在着非零的电场，它与电流之间的依赖关系满足一定的实验规律，该规律反映了导体的导电性质。

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad \sigma = \frac{1}{\rho}$$

σ: 电导率
ρ: 电阻率

74

作业 1.33, 1.34, 2.3, 2.19



1.33中电荷密度为 ρ 不是 r ; 2.19 中墨滴的质量密度用水的密度近似

75