交叉学科电磁学习题答案

第 1 章 电力与电场

1.1

通过摩擦可以使物体直接从原子或分子层面获得或失去电子，因此产生的电荷量较大。而接触带电则需要通过已经带电电物体来传递电荷，这个过程中会有电荷的损耗，因此产生的电荷量相对较少。

1.2

在静电单位制中，当 2 个电荷量为 Q 的正电荷相距 $r = 1\ \mathrm{cm}$ ，作用力为 $F = 1\ \mathrm{g\cdot cm/s^2}$ 时，那么

$$Q^2 = Fr^2 = 1\ \mathrm{g\cdot cm^3/s^2},$$

$$Q = 1\ \mathrm{g^{1/2}\cdot cm^{3/2}/s}.$$

在国际单位制中，假设满足上述条件的电荷对应电荷量为 q ，那么

$$q = \left(4\pi\epsilon_0 F r^2\right)^{1/2} = 3.335\times10^{-10}\ \mathrm{C}.$$

因此，在数值上，我们需要将静电单位制对应的电荷量乘 3.335×10^{-10} 以得到国际单位制对应的电荷量。而静电单位制电子的电荷量为 4.774×10^{-10} ，转换为国际单位制，可得

$$e = 4.774\times10^{-10}\times3.335\times10^{-10} = 1.592\times10^{-19}\ \mathrm{C}.$$

1.3

令地球与月球的电荷量分别为 q_1, q_2 ，那么 $q_1+q_2=Q$ ，库仑力为 $\dfrac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ，万有引力为 $\dfrac{Gm_1m_2}{r^2}$ 。因此

$$\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Gm_1m_2}{r^2},$$

$$q_1q_2 = 4\pi\epsilon_0 G m_1 m_2.$$

(1) $Q = q_1+q_2 \geq 2\left(q_1q_2\right)^{1/2}$ ，因此

$$Q \geq 2\left(4\pi\epsilon_0 G m_1 m_2\right)^{1/2} = 1.14\times10^{-14}\ \mathrm{C}.$$

(2) 此时 $q_1 = Cm_1, q_2 = Cm_2$ ，其中 C 是常数。因此

$$(Cm_1)(Cm_2) = 4\pi\epsilon_0 G m_1 m_2,$$

$$C = \left(4\pi\epsilon_0 G\right)^{1/2}.$$

因此

$$Q = q_1 + q_2 = C(m_1 + m_2) = \left(4\pi\epsilon_0 G\right)^{1/2}(m_1 + m_2) = 5.21 \times 10^{14}\ \mathrm{C}.$$

1.4

质子与中子质量相近，约为 $m_0 = 1.67 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$ 。因此，人体内质子与中子数量总和约为

$$N = \frac{50}{1.67 \times 10^{-27}} = 2.99 \times 10^{28}.$$

而一个质子带电量为 $e = 1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$ ，质子数量与中子数量近似相等，因此人体带正电荷总量为

$$Q_+ = \frac{1}{2}Ne = 2.39 \times 10^9\ \mathrm{C}.$$

正电荷与负电荷对应总电量约为

$$Q = 10^{-8}Q_+ = 23.9\ \mathrm{C}.$$

因此，静电力为

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 5.14 \times 10^{12}\ \mathrm{N}.$$

「所以你觉得这个情况会发生吗？」

万有引力为

$$F' = \frac{Gm^2}{r^2} = 1.67 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}.$$

万有引力远远小于静电力。

1.5

(1) 电量值为

$$Q = -\frac{mg}{E} = -3.33 \times 10^{-2}\ \mathrm{C}.$$

(2) 小球的体积为

$$V=\frac{m}{\rho}=5\times10^{-3}\ \mathrm{m}^3,$$

半径为

$$R=\left(\frac{V}{\frac{4}{3}\pi}\right)^{1/3}=0.1\ \mathrm{m}\,.$$

表面的电场强度为

$$E=\frac{\left|Q\right|}{4\pi\epsilon_0R^2}=3\times10^{10}\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{C}^{-1},$$

这远大于击穿空气的电场强度 $3\times10^5\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{C}^{-1}$ ，因此空气会被击穿，无法实现实验。

1.6

选取距离圆心 $(x,x+dx)$ 的线段，它受到的库仑力为

$$dF=\frac{Q(\lambda dx)}{4\pi\epsilon_0\left(R^2+x^2\right)}\frac{x}{\left(R^2+x^2\right)^{1/2}}=\frac{Q\lambda xdx}{4\pi\epsilon_0\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}\,.$$

因此，直线受到的库仑力为

$$F=\int_0^\infty\frac{Q\lambda xdx}{4\pi\epsilon_0\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}=\frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0R}\int_0^\infty\frac{tdt}{\left(1+t^2\right)^{3/2}}=\frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0R}\,.$$

1.7

小球受到的库仑力为

$$F=m\ddot{x}=-\frac{Qqx}{4\pi\epsilon_0\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}\approx-\frac{Qqx}{4\pi\epsilon_0R^3}\,.$$

因此，小球做周期振动，其规律为

$$x=x_0\cos\left(\left(\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0R^3m}\right)^{1/2}t\right).$$

1.8

不会，建议别碰

1.9

无论电子束的厚度是多少，它对应的面电荷密度都保持不变，都是

$$\sigma = -ned_0.$$

因此，根据高斯定理，电子束边缘的电场强度为

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = -\frac{ned_0}{2\epsilon_0}.$$

假设电子束离开窄缝的时间为 t 后，电子束的宽度为 $h(t)$，因此

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -\frac{2eE}{m} = \frac{ne^2d_0}{\epsilon_0 m}.$$

「注意，电子束是往两边扩展的，所以需要乘 2」而刚从窄缝出来的电子是平行运动的，因此

$$h\Big|_{t=0} = d_0, \qquad \frac{dh}{dt}\Big|_{t=0} = 0.$$

$$h(t) = d_0 + \frac{ne^2d_0}{2\epsilon_0 m}t^2.$$

当 $h(t) = 2d_0$ 时，

$$t = \left(\frac{2\epsilon_0 m}{ne^2}\right)^{1/2},$$

此时电子运动距离为

$$x = vt = v\left(\frac{2\epsilon_0 m}{ne^2}\right)^{1/2} = 2.5 \text{ cm}.$$

1.10

根据高斯定理，柱内部 $\mathscr{R} < R$ 的电场强度为

$$E = \frac{1}{2\pi\mathscr{R}\epsilon_0}\int_0^{\mathscr{R}} \rho 2\pi r dr = \frac{1}{2\pi\mathscr{R}\epsilon_0}\int_0^{\mathscr{R}} \left(ar - br^3\right) 2\pi r dr = \frac{1}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{3}a\mathscr{R} - \frac{1}{4}b\mathscr{R}^2\right).$$

柱外部为 $\mathscr{R} > R$ 的电场强度为

$$E = \frac{1}{2\pi\mathscr{R}\epsilon_0}\int_0^R \rho 2\pi r dr = \frac{1}{2\pi\mathscr{R}\epsilon_0}\int_0^R \left(ar - br^3\right) 2\pi r dr = \frac{1}{\epsilon_0}\left(\frac{aR^3}{3\mathscr{R}} - \frac{bR^4}{4\mathscr{R}}\right).$$

1.11

选取 AC 上任意 D 点使得 $OD = x$ ，其中 $-R < x < R$ ，负号表示 D 在 O 的左侧。我们只需证明 D 点电场强度在 AC 方向的分量为 0 即可。因此，

$$\cos\angle BDC = \frac{(R-x,\,0)\cdot(R\cos\theta - x, R\sin\theta)}{(R-x)\left(R^2 - 2Rx\cos\theta + x^2\right)^{1/2}} = \frac{R\cos\theta - x}{\left(R^2 - 2Rx\cos\theta + x^2\right)^{1/2}}.$$

根据余弦定理，

$$\left|BD\right|^2 = R^2 - 2Rx\cos\theta + x^2.$$

$(\theta, \theta + d\theta)$ 段的电荷在 D 点产生的电场 AC 方向的分量为

$$dE^{\top} = -\frac{\lambda_0 \sin\theta d\theta}{4\pi\epsilon_0\left|BD\right|^2}\cos\angle BDC = -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{(R\cos\theta - x)\sin\theta d\theta}{\left(R^2 - 2Rx\cos\theta + x^2\right)^{3/2}} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{(t - \cos\theta)\sin\theta d\theta}{\left(1 - 2t\cos\theta + t^2\right)^{3/2}},$$

其中 $t = x/R \in (-1,\,1)$ 。因此， D 点电场强度在 AC 方向的分量为

$$E^{\top} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{(t - \cos\theta)\sin\theta d\theta}{\left(1 - 2t\cos\theta + t^2\right)^{3/2}} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\int_{-1}^{1}\frac{(t-u)du}{\left(1 - 2tu + t^2\right)^{3/2}} = 0.$$

「实际上，我还真不知道它为什么为 0 」

1.12

半圆形部分在 O 点产生的电场强度为

$$E_1 = \int_0^{\pi}\frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2}\sin\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

右上方部分在 O 点产生的电场强度水平分量为

$$E_2 = \int_0^{\infty} -\frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0\left(R^2 + x^2\right)}\frac{x}{\left(R^2 + x^2\right)^{1/2}} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\int_0^{\infty}\frac{tdt}{\left(1 + t^2\right)^{3/2}} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

同样的，右下方部分在 O 点产生的电场强度水平分量也为 E_2 。因此， O 点的电场强度为

$$E = E_1 + 2E_2 = 0.$$

1.13

根据高斯定理，线电荷密度为 λ 的无限长直导线在距离为 R 的位置产生的电场强度为

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

因此，半圆柱角度为 $(\theta,\theta+d\theta)$ 的区域在 O 点电场强度的垂直分量为

$$dE^{\perp}=\frac{\sigma R d\theta}{2\pi\epsilon_0 R}\sin\theta=\frac{\sigma d\theta}{2\pi\epsilon_0}\sin\theta.$$

O 点电场强度为

$$E^{\perp}=\int_0^{\pi}\frac{\sigma d\theta}{2\pi\epsilon_0}\sin\theta=\frac{\sigma}{\pi\epsilon_0}.$$

1.14

$$\begin{aligned}
E&=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{(r-l)^2}-\frac{2}{r^2}+\frac{1}{(r+l)^2}\right)\\
&=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left(\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{(1+x)^2}-2\right)\\
&=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{2x^2\left(3-x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^2}\\
&\approx\frac{3qx^2}{2\pi\epsilon_0 r^2}=\frac{3ql^2}{2\pi\epsilon_0 r^4},
\end{aligned}$$

其中 $x=l/r\ll 1$ 。

1.15 – 1.17

直接空着，别浪费时间

1.18

「这一题是不严谨的」选取靠近狭缝距离为 d 的位置，其中 $d\ll a$ ，因此，我们可以将狭缝视为无穷大平板。根据高斯定理，它产生的电场强度为

$$E=\frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

如果狭缝被补上，那么整个体系就是完整的圆柱面，根据高斯定理，内部（靠近圆柱，并且距离远小于 a）电场强度为

$$E_1=0.$$

外部（靠近圆柱，并且距离远小于 a）电场强度为

$$E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

因此，如果狭缝是存在的，那么内部（靠近圆柱，并且距离远小于 a）电场强度为

$$E_1' = E_1 + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

外部（靠近圆柱，并且距离远小于 a）电场强度为

$$E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

1.19

(1) 根据高斯定理，选取上下表面积为 A 的圆柱面，因此

$$(E_1 - E_2)A = \frac{\rho A h}{\epsilon_0}.$$

电荷体密度为

$$\rho = \frac{\epsilon_0(E_1 - E_2)}{h} = -1.32 \times 10^{-13}\ \mathrm{C \cdot m^{-3}}.$$

其中 $E_1 = 60\ \mathrm{N \cdot C^{-1}}, E_2 = 200\ \mathrm{N \cdot C^{-1}}, h = 300 - 200 = 100\ \mathrm{m}$.

(2) 电场强度随高度的变化率为

$$\lambda = \frac{E_1 - E_2}{h} = -1.40\ \mathrm{N \cdot m^{-1} \cdot C^{-1}}.$$

因此，在贴近地面的地方，电场强度为

$$200 - 200\lambda = 480\ \mathrm{N \cdot C^{-1}}.$$

根据高斯定理，假设地面上的面电荷密度为 σ ，那么在贴近地面的地方，电场强度为

$$E = \frac{4\pi R^2 \sigma}{4\pi \epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

因此

$$\sigma = 480\epsilon_0 = 4.25 \times 10^{-9}\ \mathrm{C \cdot m^{-2}}.$$

1.20

根据高斯定理，在 N 区、 P 区以外，电场强度均为 0 。

为了计算 N 区的电场强度，选取两侧分别位于 $x_1 < -x_n, -x_n \le x_2 \le 0$ ，横截面积为 A 的圆柱面，因此

$$EA = \frac{N_D e \left(x_n + x\right) A}{\epsilon_0},$$

$$E = \frac{N_D e \left(x_n + x\right)}{\epsilon_0}.$$

选取两侧分别位于 $0 \le x_1 \le x_p, x_2 > x_p$ ，横截面积为 A 的圆柱面，同理可得， P 区的电场强度为

$$E = \frac{N_A e \left(x_p - x\right)}{\epsilon_0}.$$

1.21

根据高斯定理，

$$E(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2}\int_0^R \rho 4\pi r^2 dr = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 R^2}\int_0^R r e^{-kr} dr = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 R^2 k}\left(1 - (1 + kR)e^{-kR}\right).$$

1.22

假设此时地球带电量为 Q ，那么地球外部电场强度为

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

无穷远处电势为 0 ，那么地球表面的电势为

$$V = \int_R^\infty E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

$$Q = 4\pi\epsilon_0 RV = 7.12 \times 10^{-4}\ \mathrm{C}.$$

它对应电子个数为

$$N = \frac{Q}{|e|} = 4.45 \times 10^{15}\ \mathrm{C}.$$

总质量为

$$m = Nm_e = 4.05 \times 10^{-15}\ \mathrm{kg}.$$

1.23

我们可以构建一个光滑的长方形管道 $ABCD$ ，其两侧 AB, CD 平行于电场强度方向，另外两侧 BC, DA 垂直于电场强度方向。根据题目可得，在平行于电场强度方向的两侧，电场强度大小是不同的：不失一般性，假设 AB 侧电场强度大于 CD 侧电场强度。

将正电荷放入管道内部的 A 点。正电荷在 AB 侧被电场加速，之后落入 BC 侧。而 BC 侧电场不会对正电荷做功，所以正电荷在 BC 侧动能不变，直到落入 CD 侧为止。之后正电荷在 CD 侧被电场减速，但是 CD 侧电场强度较小，因此正电荷并不会被停下来，这样就可以落入 DA 侧。与 BC 侧相同，正电荷在 DA 侧动能不变，直到落入 AB 侧为止。因此，正电荷以大于 0 的动能回到了 A 点。如此往复，我们就能够得到一个永动机！

1.24

电势为

$$V(R)=\int_R^\infty E dr=\frac{kq}{8\pi\epsilon_0 R^2}.$$

距离中心为 $(R, R+dR)$ 的区域在该点产生的电场强度为

$$dE=\frac{k\sigma 2\pi R dR}{4\pi\epsilon_0\left(r^2+R^2\right)^{3/2}}\frac{r}{\left(r^2+R^2\right)^{1/2}}=\frac{k\sigma r R dR}{2\epsilon_0\left(r^2+R^2\right)^2},$$

其中 σ 是导体板的面电荷密度。该点的总电场强度为

$$E=\int_0^\infty\frac{k\sigma r R dR}{2\epsilon_0\left(r^2+R^2\right)^2}=\frac{k\sigma}{2\epsilon_0 r}\int_0^\infty\frac{t dt}{\left(1+t^2\right)^2}=\frac{k\sigma}{4\epsilon_0 r}.$$

电势为

$$V(R)=\int_R^\infty E dr=\frac{k\sigma}{4\epsilon_0}\int_R^\infty\frac{dr}{r},$$

该反常积分是不收敛的。

1.25

假设内球带电量为 q 。

根据导体内部电场强度为 0 的性质，以及高斯定理，选取半径为 $r\in\left(R_2, R_3\right)$ 的球面，可以得出，球壳内侧带电量为 $-q$ 。而球壳内侧与外侧总带电量为 Q ，因此球壳外侧带电量为 $Q+q$ 。因为导体电势处处相等，所以对于球的电势，我们只需计算球心处的电势即可，其取值为

$$V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{R_1}+\frac{-q}{R_2}+\frac{Q+q}{R_3}\right)=0.$$

因此

$$q = \frac{R_1R_2}{R_1R_3 - R_1R_2 - R_2R_3}Q\,.$$

区域 (R_3, ∞) 之间的电场强度为

$$E = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,.$$

因此，球壳的电势为 R_3 处的电势，

$$V = \int_{R_3}^{\infty} Edr = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3}\,.$$

1.26

不会

1.27

假设在一定范围内，电场强度的形式为

$$\mathbf{E}(x,y,z) = E(x,y,z)\mathbf{i},$$

其中 $\mathbf{i}$ 是 x 轴方向的单位向量。我们只需证明 $E(x,y,z)$ 取到常数即可，这等价于证明

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{\partial E}{\partial z} = 0.$$

因为静电场满足

$$\begin{aligned} \text{div }\mathbf{E} &= 0, \\ \text{curl }\mathbf{E} &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

其中 div, curl 分别代表向量场的散度与旋度。所以

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{\partial E}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

1.28

电场强度为

$$E=\frac{Qr}{4\pi\epsilon_0\left(R^2+r^2\right)^{3/2}}.$$

电势为

$$V=\int_x^\infty Edr=\int_x^\infty\frac{Qrdr}{4\pi\epsilon_0\left(R^2+r^2\right)^{3/2}}=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}\int_{x/R}^\infty\frac{tdt}{\left(1+t^2\right)^{3/2}}=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\left(R^2+x^2\right)^{1/2}}.$$

1.29

$$\begin{aligned}
E^1&=-\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{Ax}{\left(x^2+y^2+a^2\right)^{3/2}},\\
E^2&=-\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{Ay}{\left(x^2+y^2+a^2\right)^{3/2}},\\
E^3&=-\frac{\partial V}{\partial z}=0.
\end{aligned}$$

因此

$$\mathbf{E}=E^1\mathbf{i}+E^2\mathbf{j}+E^3\mathbf{k}=\frac{Ax}{\left(x^2+y^2+a^2\right)^{3/2}}\mathbf{i}+\frac{Ay}{\left(x^2+y^2+a^2\right)^{3/2}}\mathbf{j}.$$

$$\left|\mathbf{E}\right|=\left(\left(E^1\right)^2+\left(E^2\right)^2+\left(E^3\right)^2\right)^{1/2}=\frac{A\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}{\left(x^2+y^2+a^2\right)^{3/2}}.$$

1.30

根据高斯定理， $R\geq r_a$ 的电场强度为 0 。 $R<r_a$ 的电荷密度「不考虑原子核」为

$$\rho=\frac{-Ze}{\frac{4}{3}\pi r_a^3}=-\frac{3Ze}{4\pi r_a^3}.$$

因此，电场强度为

$$E=\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2}\left(Ze+\rho\frac{4}{3}\pi R^3\right)=\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 R^2}\left(1-\frac{R^3}{r_a^3}\right).$$

电势为

$$V=\int_r^{r_a}EdR=\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}+\frac{r^2}{2r_a^3}-\frac{1}{2r_a}\right)=\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{3}{2r_a}+\frac{r^2}{2r_a^3}\right).$$

1.31

根据高斯定理， $r < R$ 处的电场强度为

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\rho\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\rho}{3\epsilon_0}r.$$

因此，电荷受到的电场力为

$$F = m\ddot{r} = -qE = -\frac{q\rho}{3\epsilon_0}r.$$

电荷做周期振动，其规律为

$$r(t) = R\cos\left(\left(\frac{q\rho}{3\epsilon_0 m}\right)^{1/2} t\right).$$

1.32

根据高斯定理，当 $x \le -d/2$ 时，

$$E = -\frac{\rho d}{2\epsilon_0}.$$

当 $x \ge d/2$ 时，

$$E = \frac{\rho d}{2\epsilon_0}.$$

对于 $-d/2 < x < d/2$ ，选取两侧分别位于 $x_1 < -d/2, -d/2 \le x_2 \le d/2$ ，横截面积为 A 的圆柱面，因此

$$\left(E + \frac{\rho d}{2\epsilon_0}\right)A = \frac{1}{\epsilon_0}\rho A\left(x + \frac{d}{2}\right),$$

$$E = \frac{\rho x}{\epsilon_0}.$$

1.33

根据高斯定理，当 $y \le a$ 时，

$$E = -\frac{\rho a}{\epsilon_0}.$$

当 $y \geq a$ 时，

$$E = \frac{\rho a}{\epsilon_0}.$$

对于 $-a < y < a$ ，选取两侧分别位于 $y_1 < -a, -a \leq y_2 \leq a$ ，横截面积为 A 的圆柱面，因此

$$\left(E + \frac{\rho a}{\epsilon_0}\right)A = \frac{1}{\epsilon_0}\rho A(y+a),$$

$$E = \frac{\rho y}{\epsilon_0}.$$

因此，当 $y \leq a$ 时，电势为

$$V = -\int_{-b}^{y} -\frac{\rho a}{\epsilon_0} dY = \frac{\rho a}{\epsilon_0}(b+y).$$

当 $-a < y < a$ 时，电势为

$$V = \frac{\rho a}{\epsilon_0}(b-a) - \int_{-a}^{y} \frac{\rho Y}{\epsilon_0} dY = \frac{\rho}{\epsilon_0}\left(-\frac{a^2}{2} + ab - \frac{y^2}{2}\right).$$

当 $y \geq a$ 时，电势为

$$V = \frac{\rho}{\epsilon_0}\left(-a^2 + ab\right) - \int_{a}^{y} \frac{\rho a}{\epsilon_0} dY = \frac{\rho a}{\epsilon_0}(b-y).$$

1.34

距离中心为 $(R, R+dR)$ 的区域在 P 点产生的电场强度为

$$dE = \frac{\sigma 2\pi R dR}{4\pi\epsilon_0\left(x^2+R^2\right)} \frac{x}{\left(x^2+R^2\right)^{1/2}} = \frac{\sigma x R dR}{2\epsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}.$$

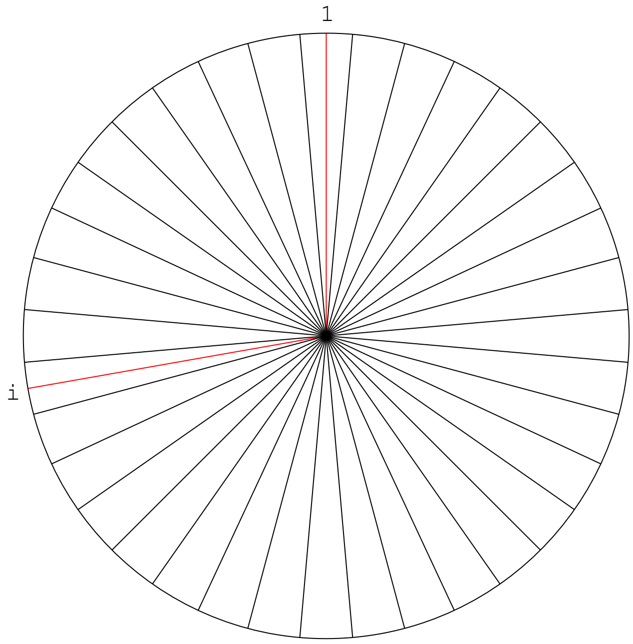
因此， P 点的电场强度为

$$E = \int_{r}^{\infty} \frac{\sigma x R dR}{2\epsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_{r/x}^{\infty} \frac{t dt}{\left(1+t^2\right)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0\left(r^2+x^2\right)^{1/2}}.$$

电势为

$$V = -\int_{0}^{x} \frac{\sigma y}{2\epsilon_0\left(r^2+y^2\right)^{1/2}} dy = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\left(r^2+x^2\right)^{1/2} - r\right).$$

1.35



将圆柱面等分为 $N(N \gg 1)$ 等份，每一份可以视为线电荷密度为 $\lambda = \dfrac{2\pi R\sigma}{N}$ 的无限长直导线。

第 $i(2 \leq i \leq N)$ 份“无限长直导线”在第 1 份“无限长直导线”处产生的电场强度为

$$E_{1i} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\left(2R\sin\frac{\theta_{1i}}{2}\right)} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R\sin\frac{\theta_{1i}}{2}},$$

其中 $\theta_{1i} = \dfrac{2\pi}{N}(i-1)$ 是红线之间的夹角，如图所示。因此，第 $i(2 \leq i \leq N)$ 份“无限长直导线”对第 1 份“无限长直导线”单位长度的作用力法向分量为

$$F_{1i} = \lambda E_{1i}\cos\left(\frac{\pi - \theta_{1i}}{2}\right) = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\pi R\sigma^2}{\epsilon_0 N^2}.$$

这是一个常数。因此，第 1 份“无限长直导线”单位长度受到的作用力为

$$F_1 = (N-1)F_{1i} \approx \frac{\pi R\sigma^2}{\epsilon_0 N}.$$

为了计算一半圆柱面单位长度受到的作用力，我们需要计算第 1 份至第 $\lfloor N/2 \rfloor$ 份“无限长直导线”单位长度受到的总作用力。很显然，总作用力方向是向左的，第 $i(1 \leq i \leq \lfloor N/2 \rfloor)$ 份“无限长直导线”单位长度受到的作用力向左的分量为

$$G_i = \frac{\pi R\sigma^2}{\epsilon_0 N}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{1i}\right) = \frac{\pi R\sigma^2}{\epsilon_0 N}\sin\theta_{1i} \approx \frac{\pi R\sigma^2}{\epsilon_0 N}\sin\frac{2\pi i}{N}.$$

因此，一半圆柱面单位长度受到的作用力为

$$G = \sum_{i=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} G_i = \frac{\pi R \sigma^2}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{1}{N} \sin \frac{2\pi i}{N} \approx \frac{\pi R \sigma^2}{\epsilon_0} \int_0^{1/2} \sin(2\pi x)\, dx = \frac{R\sigma^2}{\epsilon_0}.$$

1.36

(1) 当 $r \leq R_1$ 时，电场强度

$$E = 0.$$

当 $R_1 < r \leq R_2$ 时，电场强度

$$E = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

当 $r > R_2$ 时，电场强度

$$E = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

(2) 当 $r \leq R_1$ 时，电场强度

$$E = 0.$$

当 $R_1 < r \leq R_2$ 时，电场强度

$$E = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

当 $r > R_2$ 时，电场强度

$$E = 0.$$

第 2 章 静电场中的物质与电场能量

2.1

因为 q_1, q_2 位于空腔的中心，所以空腔内表面的感应电荷是均匀分布的，这表明 q_1, q_2 受到的静电力为 0 。

根据导体内部电场强度为 0 的性质，以及高斯定理，可以得出， q_1, q_2 对应空腔内表面的感应电荷分别为 $-q_1, -q_2$ 。这表明 A 外表面的电荷量为 q_1+q_2 。因此，根据高斯定理， q_3 处的电场强度为 $\frac{q_1+q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ，这表明 q_3 受到的静电力为 $\frac{\left(q_1+q_2\right)q_3}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ 。根据牛顿第三定律，导体受到的静电力与三个电荷受到的总静电力大小相同，方向相反，因此其取值为 $-\frac{\left(q_1+q_2\right)q_3}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ 。

2.2

导体板在 AB 位置时，假设左侧与右侧电荷量分别为 Q_1, Q_2 ，左边区域与右边区域电场强度分别为 E_1, E_2 。因此 $Q_1+Q_2=Q$ 。根据高斯定理可得

$$E_1 = -\frac{Q_1}{\epsilon_0 A}, \qquad E_2 = \frac{Q_2}{\epsilon_0 A},$$

其中 A 是导体板的面积。因为电容器两端电势差为 V ，所以

$$-E_1 L - E_2(4L) = V,$$

$$Q_1 = \frac{1}{5}\left(4Q + \frac{\epsilon_0 AV}{L}\right),$$
$$Q_2 = \frac{1}{5}\left(Q - \frac{\epsilon_0 AV}{L}\right).$$

$$E_1 = -\frac{Q_1}{\epsilon_0 A} = \frac{1}{5}\left(-\frac{4Q}{\epsilon_0 A} - \frac{V}{L}\right),$$
$$E_2 = \frac{Q_2}{\epsilon_0 A} = \frac{1}{5}\left(\frac{Q}{\epsilon_0 A} - \frac{V}{L}\right).$$

电场能量为

$$W_1 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_1^2 AL + \frac{1}{2}\epsilon_0 E_2^2 A(4L) = \frac{2QL^2}{5\epsilon_0 A} + \frac{\epsilon_0 AV^2}{10L}.$$

导体板在 CD 位置时，假设左侧与右侧电荷量分别为 Q_3, Q_4 ，左边区域与右边区域电场强度分别为 E_3, E_4 。因此 $Q_3+Q_4=Q$ 。根据高斯定理可得

$$E_3 = -\frac{Q_3}{\epsilon_0 A}, \qquad E_4 = \frac{Q_4}{\epsilon_0 A},$$

其中 A 是导体板的面积。因为电容器两端电势差为 V ，所以

$$-E_3(3L) - E_4(2L) = V,$$

$$Q_3 = \frac{1}{5}\left(2Q + \frac{\epsilon_0 AV}{L}\right),$$
$$Q_4 = \frac{1}{5}\left(3Q - \frac{\epsilon_0 AV}{L}\right).$$

$$E_3 = -\frac{Q_3}{\epsilon_0 A} = \frac{1}{5}\left(-\frac{2Q}{\epsilon_0 A} - \frac{V}{L}\right),$$
$$E_4 = \frac{Q_4}{\epsilon_0 A} = \frac{1}{5}\left(\frac{3Q}{\epsilon_0 A} - \frac{V}{L}\right).$$

电场能量为

$$W_2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_3^2 A(3L) + \frac{1}{2}\epsilon_0 E_4^2 A(2L) = \frac{3QL^2}{5\epsilon_0 A} + \frac{\epsilon_0 AV^2}{10L}.$$

需要做功

$$W = W_2 - W_1 = \frac{QL^2}{5\epsilon_0 A}.$$

「为什么和答案不一样？」

2.3

假设它们分别为 $Q_1, \ldots, Q_8$ 。根据高斯定理可得，

$$Q_2 + Q_3 = 0,$$
$$Q_4 + Q_5 = 0,$$
$$Q_6 + Q_7 = 0.$$

每块板上带电量是已知的，因此

$$Q_1 + Q_2 = 5\ \mathrm{C},$$
$$Q_3 + Q_4 = 1\ \mathrm{C},$$
$$Q_5 + Q_6 = 1\ \mathrm{C},$$
$$Q_7 + Q_8 = 2\ \mathrm{C}.$$

而导体板内部电场强度为 0 ，我们分析最左边的导体板可得

$$\frac{Q_1}{2\epsilon_0 A} - \frac{Q_2}{2\epsilon_0 A} - \cdots - \frac{Q_8}{2\epsilon_0 A} = 0,$$

$$Q_1 - Q_2 - \cdots - Q_8 = 0.$$

可以得出

$$Q_1, ..., Q_8 = 4.5,\ 0.5,\ -0.5,\ 1.5,\ -1.5,\ 2.5,\ -2.5,\ 4.5\ (\mathrm{C}).$$

如果用一根导线把中间两个板接通，那么 D, E 表面电荷被中和，因此

$$Q_1', ..., Q_8' = 4.5,\ 0.5,\ -0.5,\ 0,\ 0,\ 2.5,\ -2.5,\ 4.5\ (\mathrm{C}).$$

2.4

不能，因为电介质是不导电的。

2.5

因为输电线距离很远，所以它们带电可以近似视为均匀的。假设半径分别为 a, b 的输电线单位长度带电量分别为 $\lambda, -\lambda$ ，输电线连线处的电场强度为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 (d-r)},$$

其中 r 是参考点与半径为 a 的输电线之间的距离。因此，电势差为

$$V = \int_a^{d-b} E dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left(\log\frac{d-b}{a} + \log\frac{d-a}{b}\right).$$

单位长度的电容为

$$C = \frac{\lambda}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\log\frac{(d-a)(d-b)}{ab}}.$$

2.6

假设地球与月球的带电量分别为 $Q, -Q$ ，连线处的电场强度为

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (d-r)^2},$$

其中 r 是参考点与地球之间的距离。因此，电势差为

$$V = \int_a^{d-b} E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d-b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{d-a}\right) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

电容为

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{a+b}.$$

如果利用一根导线接通，假设地球与月球带电量分别为 Q_1, Q_2 ，因此地球与月球的电势分别为

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a}, \qquad V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 b}.$$

它们电势是相同的「因为被导线接通」，所以

$$\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 b}.$$

系统的电容为

$$C = \frac{Q_1 + Q_2}{V_1} = \left(1 + \frac{b}{a}\right)\frac{Q_1}{V_1} = 4\pi\epsilon_0(a+b).$$

2.7

假设两个极板内侧带电量分别为 Q_1, Q_2 ，外侧带电量分别为 Q_3, Q_4 。根据高斯定理可得

$$Q_1 + Q_2 = 0.$$

根据电荷守恒可得「因为电荷可能会通过电路转移，所以 $Q_1 + Q_2, Q_3 + Q_4$ 并不一定等于 Q」

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 2Q.$$

而极板内部的电场强度为 0 ，因此

$$\frac{Q_3}{2\epsilon_0 A} - \frac{Q_1}{2\epsilon_0 A} - \frac{Q_2}{2\epsilon_0 A} - \frac{Q_4}{2\epsilon_0 A} = 0,$$

$$Q_3 - Q_1 - Q_2 - Q_4 = 0.$$

极板之间的电势差为

$$V = \frac{Q_1}{C}.$$

因此

$$\begin{aligned} Q_1 &= CV, \\ Q_2 &= -CV, \\ Q_3 &= Q, \\ Q_4 &= Q. \end{aligned}$$

2.8

假设半径为 a 的球壳外表面带电量为 Q_1 ，半径为 b 的球壳内表面、外表面带电量分别为 $-Q_1, Q_2$ ，半径为 d 的球壳内表面带电量为 $-Q_2$ 。因此，电场强度为

$$E = \begin{cases} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & a < r \leq b; \\ \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & b < r \leq d\,. \end{cases}$$

内外球壳之间的电势差为「因为导线相连，所以电势差为 0」

$$0 = \int_a^d E dr = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{d}\right),$$

$$Q_1\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + Q_2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{d}\right) = 0.$$

系统的电容为

$$C = \frac{Q_1 - Q_2}{\int_a^b E dr} = 4\pi\epsilon_0 \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} = 4\pi\epsilon_0 \frac{b^2(d-a)}{(b-a)(d-b)}\,.$$

如果中间球壳带电量为 Q ，那么

$$-Q_1 + Q_2 = Q\,.$$

因此

$$-Q_1 = \frac{a(d-b)}{b(d-a)} Q,$$
$$Q_2 = \frac{d(b-a)}{b(d-a)} Q\,.$$

2.9

横坐标为 $x(0 \leq x \leq b)$ 的电场强度为

$$E = \frac{V}{d + \frac{x}{b}h}\,.$$

根据高斯定理，极板在该处面电荷密度为

$$\sigma = \epsilon_0 E = \frac{\epsilon_0 V}{d + \frac{x}{b}h}\,.$$

极板带电量为

$$Q=\int_0^b \sigma a\,dx=\frac{\epsilon_0 Vab}{h}\log\frac{d+h}{d}\,.$$

电容为

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{\epsilon_0 ab}{h}\log\frac{d+h}{d}\,.$$

2.10

假设上半部分与下半部分电场强度分别为 E_1, E_2 。根据高斯定理，

$$E_1-E_2=\frac{q}{\epsilon_0 S}\,.$$

极板之间的电势差为

$$V=E_1\frac{d}{2}+E_2\frac{d}{2}\,.$$

因此

$$\begin{aligned}E_1&=\frac{V}{d}+\frac{q}{2\epsilon_0 S},\\ E_2&=\frac{V}{d}-\frac{q}{2\epsilon_0 S}\,.\end{aligned}$$

薄片电势为

$$V'=E_1\frac{d}{2}=\frac{V}{2}+\frac{qd}{4\epsilon_0 S}\,.$$

2.11

假设 C_1, C_2, C_3 左极板、右极板带电量分别为 $Q_1, -Q_1; Q_2, -Q_2; Q_3, -Q_3$ 。一开始， C_1 左极板、右极板带电量分别为 $C_1V_0, -C_1V_0$ 。因此

$$\begin{aligned}Q_1+Q_2&=C_1V_0,\\ -Q_2+Q_3&=0,\\ -Q_1-Q_3&=-C_1V_0,\\ \frac{Q_1}{C_1}&=\frac{Q_2}{C_2}+\frac{Q_3}{C_3}\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_1&=\frac{C_1^2\left(C_2+C_3\right)V_0}{C_1C_2+C_2C_3+C_3C_1},\\ Q_2=Q_3&=\frac{C_1C_2C_3V_0}{C_1C_2+C_2C_3+C_3C_1}\,.\end{aligned}$$

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{C_1\left(C_2+C_3\right)V_0}{C_1C_2+C_2C_3+C_3C_1},$$
$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{C_1C_3V_0}{C_1C_2+C_2C_3+C_3C_1},$$
$$V_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{C_1C_2V_0}{C_1C_2+C_2C_3+C_3C_1}.$$

2.12

假设 $C_1,\ldots,C_5$ 极板带电量分别为 $Q_1,-Q_1;\ldots;Q_5,-Q_5$ 。因此

$$\frac{Q_1}{C_1}+\frac{Q_2}{C_2}=\mathscr{E},$$
$$\frac{Q_4}{C_4}+\frac{Q_5}{C_5}=\mathscr{E},$$
$$\frac{Q_1}{C_1}+\frac{Q_3}{C_3}=\frac{Q_4}{C_4},$$
$$-Q_1+Q_2+Q_3=0,$$
$$-Q_3-Q_4+Q_5=0.$$

可得

$$\frac{Q_1}{C_1}=225\ \mathrm{V},$$
$$\frac{Q_2}{C_2}=375\ \mathrm{V},$$
$$\frac{Q_3}{C_3}=37.5\ \mathrm{V},$$
$$\frac{Q_4}{C_4}=262.5\ \mathrm{V},$$
$$\frac{Q_5}{C_5}=337.5\ \mathrm{V}.$$

2.13

假设金属球带电量为 Q ，因此电场强度为

$$E=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

电势差为

$$V_0=\int_{R_1}^{R_2}E dr=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right).$$

因此

$$Q=\frac{4\pi\epsilon_0 VR_1R_2}{R_2-R_1}.$$

电极处的电场强度为

$$E\Big|_{r=R_1}=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0R_1^2}=\frac{VR_2}{R_1\left(R_2-R_1\right)}=\frac{V}{R_1\left(1-\frac{R_1}{R_2}\right)}.$$

因此 $R_2\to\infty$ 时，电场强度取到最小值 $\dfrac{V}{R_1}$ 。

当

$$E\Big|_{r=R_1}=\frac{V}{R_1\left(1-\frac{R_1}{R_2}\right)}=\frac{4V}{R_1}$$

时，

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{3}{4}.$$

2.14

假设电容器左极板、右极板带电量为 $Q,-Q$ 。因此左边导体、右边导体带电量分别为

$$Q_1'=Q_1-Q,$$
$$Q_2'=Q_2+Q.$$

左边导体、右边导体的电势分别为

$$V_1'=\frac{Q_1'}{Q_1}V_1=\left(1-\frac{Q}{Q_1}\right)V_1,$$
$$V_2'=\frac{Q_2'}{Q_2}V_2=\left(1+\frac{Q}{Q_2}\right)V_2.$$

电容器的电势差为

$$V=\frac{Q}{C}.$$

因此

$$V_1'=V+V_2.$$

$$Q = \left(\frac{V_1}{Q_1} + \frac{V_2}{Q_2} + \frac{1}{C}\right)^{-1} \left(V_1 - V_2\right).$$

$$V = \frac{Q}{C} = \left(\frac{CV_1}{Q_1} + \frac{CV_2}{Q_2} + 1\right)^{-1} \left(V_1 - V_2\right).$$

2.15

体积为 $\mathrm{Vol} = 1\ \mathrm{m}^3$ 的水具有水分子的个数为

$$N = \frac{1{,}000{,}000\ \mathrm{g}}{18.015\ \mathrm{g/mol}} N_A = 3.342 \times 10^{28}.$$

极化强度为

$$P = \frac{Np}{\mathrm{Vol}} = 2.039 \times 10^{-2}\ \mathrm{C} \cdot \mathrm{m}^{-2}.$$

直径为 $\mathrm{diam} = 1\ \mathrm{mm}$ 的水滴电偶极矩为

$$p = \frac{1}{6}\pi(\mathrm{diam})^3 P = 1.068 \times 10^{-11}\ \mathrm{C} \cdot \mathrm{m}.$$

距离水滴 $r = 10\ \mathrm{cm}$ 处的电场强度为

$$E = \left|\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3(\mathbf{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \mathbf{p}}{|\mathbf{r}|^3}\right| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2p}{r^3} = 1.922 \times 10^2\ \mathrm{V} \cdot \mathrm{m}^{-1}.$$

2.16

介质 1, 2 的电位移均为

$$D_1 = D_2 = \sigma.$$

介质 1, 2 的电场强度为

$$E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_{r1}\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0},$$
$$E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_{r2}\epsilon_0} = \frac{\sigma}{3\epsilon_0}.$$

介质 1, 2 的极化强度为

$$P_1 = D_1 - \epsilon_0 E_1 = \frac{\sigma}{2},$$
$$P_2 = D_2 - \epsilon_0 E_2 = \frac{2\sigma}{3}.$$

电势为

$$V=-\int_0^x E dr=\begin{cases}-\frac{\sigma x}{2\epsilon_0}, & 0\le x\le x_1;\\ -\frac{\sigma x_1}{2\epsilon_0}-\frac{\sigma(x-x_1)}{3\epsilon_0}, & x_1<x\le x_2.\end{cases}$$

其中 $x_1=1.0\ \text{cm}, x_2=3.0\ \text{cm}$ 。

界面极化电荷面密度分别为

$$\sigma_1'=-P_1=-\frac{\sigma}{2},$$
$$\sigma_2'=P_1-P_2=-\frac{\sigma}{6},$$
$$\sigma_3'=P_2=\frac{2\sigma}{3}.$$

2.17

空间的电位移分布为

$$D=\frac{q}{4\pi r^2}.$$

电场强度分布为

$$E=\begin{cases}0, & r\le a;\\ \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}, & a<r\le b;\\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r>b.\end{cases}$$

电势分布为

$$V=\int_R^\infty E dr=\begin{cases}\frac{q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{q}{4\pi\epsilon_0 b}, & R\le a;\\ \frac{q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{b}\right)+\frac{q}{4\pi\epsilon_0 b}, & a<R\le b;\\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}, & R>b.\end{cases}$$

2.18

如图所示，假设从下往上三个区域电场强度分别为 E_1, E_2, E_3 ，介电常数分别为 $\epsilon_1, \epsilon_0, \epsilon_2$ 。因此

$$
\begin{aligned}
E_1 d + E_2 d + E_3 d &= V_a, \\
\epsilon_0 E_2 - \epsilon_1 E_1 &= \sigma_s, \\
\epsilon_2 E_3 - \epsilon_0 E_2 &= 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \frac{\epsilon_0\epsilon_2 V_a - \epsilon_0\sigma_s d - \epsilon_2\sigma_s d}{\left(\epsilon_0\epsilon_1 + \epsilon_0\epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_2\right) d}, \\
E_2 &= \frac{\epsilon_1\epsilon_2 V_a + \epsilon_2\sigma_s d}{\left(\epsilon_0\epsilon_1 + \epsilon_0\epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_2\right) d}, \\
E_3 &= \frac{\epsilon_0\epsilon_1 V_a + \epsilon_0\sigma_s d}{\left(\epsilon_0\epsilon_1 + \epsilon_0\epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_2\right) d}.
\end{aligned}
$$

「之后我也不会做了，但是可以根据答案来做题」

只需满足 $E_1 < E_2$ 即可，因此

$$
\epsilon_0\epsilon_2 V_a - \epsilon_0\sigma_s d - \epsilon_2\sigma_s d > \epsilon_1\epsilon_2 V_a + \epsilon_2\sigma_s d,
$$

$$
V_a < -\frac{\left(\epsilon_0 + 2\epsilon_2\right)\sigma_s d}{\left(\epsilon_1 - \epsilon_0\right)\epsilon_2}.
$$

2.19

将墨滴密度近似视为水的密度。因此，墨滴质量为

$$
m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = 6.54 \times 10^{11}\ \mathrm{kg}.
$$

电场强度为

$$
E = \frac{V}{d}.
$$

y 方向的加速度为

$$
a = \frac{qE}{m} = \frac{qV}{md}.
$$

因此

$$
y = \frac{1}{2}a\left(\frac{L}{u_0}\right)^2 = \frac{qVL^2}{2mdu_0^2} = 0.31\ \mathrm{mm}.
$$

$$
\theta = \arctan\frac{2y}{L} = 3.5^\circ.
$$

2.20

假设内球带电量为 $-Q$ ，因此电位移分布为

$$D=-\frac{Q}{4\pi r^2}.$$

电场强度分布为

$$E=\begin{cases}-\frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2}, & R_1\le r\le a;\\ -\frac{Q}{4\pi\epsilon_2 r^2}, & a<r\le R_2.\end{cases}$$

电势差为

$$V=\int_{R_1}^{R_2}Edr=-\frac{Q}{4\pi\epsilon_1}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{a}\right)-\frac{Q}{4\pi\epsilon_2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{R_2}\right).$$

电容为

$$C=\frac{-Q}{V}=\frac{4\pi\epsilon_1\epsilon_2R_1R_2a}{\epsilon_1R_1\left(R_2-a\right)+\epsilon_2R_2\left(a-R_1\right)}.$$

$r=R_1,a,R_2$ 处的极化电荷面密度分别为

$$\sigma_1'=-\left(D-\epsilon_0E\right)\Big|_{r=R_1}=\frac{Q}{4\pi R_1^2}\left(1-\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}\right),$$
$$\sigma_2'=\left(D-\epsilon_0E\right)\Big|_{r\nearrow a}-\left(D-\epsilon_0E\right)\Big|_{r\searrow a}=\frac{Q}{4\pi a^2}\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}-\frac{\epsilon_0}{\epsilon_2}\right),$$
$$\sigma_3'=\left(D-\epsilon_0E\right)\Big|_{r=R_2}=-\frac{Q}{4\pi R_2^2}\left(1-\frac{\epsilon_0}{\epsilon_2}\right).$$

2.21

左半部分、右半部分的电场强度可以被表示为

$$E_1=\frac{C_1}{r^2},$$
$$E_2=\frac{C_2}{r^2}$$

的形式，其中 C_1,C_2 是常数。因此，两个极板之间的电势差为

$$V=\int_a^b E_1dr=C_1\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$
$$=\int_a^b E_2dr=C_2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right).$$

因此 $C_1 = C_2$ ，这表明电场是球对称分布的，记为

$$E = \frac{C}{r^2}.$$

电位移为

$$D = \begin{cases} \frac{\epsilon_1 C}{r^2}, & \mathbf{r} \in \Omega_1; \\ \frac{\epsilon_2 C}{r^2}, & \mathbf{r} \in \Omega_2. \end{cases}$$

因此

$$2\pi r^2 \frac{\epsilon_1 C}{r^2} + 2\pi r^2 \frac{\epsilon_2 C}{r^2} = Q,$$

$$C = \frac{Q}{2\pi\left(\epsilon_1 + \epsilon_2\right)}.$$

电场强度为

$$E = \frac{C}{r^2} = \frac{Q}{2\pi\left(\epsilon_1 + \epsilon_2\right) r^2}.$$

电势差为

$$V = \int_a^b E dr = \frac{Q}{2\pi\left(\epsilon_1 + \epsilon_2\right)} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

电容为

$$\text{Capacity} = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\left(\epsilon_1 + \epsilon_2\right) a b}{b - a}.$$

2.22

与 2.21 类似，电场是球对称分布的，记为

$$E = \frac{C}{r^2}.$$

电位移为

$$D = \begin{cases} \frac{\epsilon_1 C}{r^2}, & \mathbf{r} \in \Omega_1; \\ \frac{\epsilon_2 C}{r^2}, & \mathbf{r} \in \Omega_2. \end{cases}$$

因此

$$2\pi r^2 \frac{\epsilon_1 C}{r^2} + 2\pi r^2 \frac{\epsilon_2 C}{r^2} = q,$$

$$C = \frac{q}{2\pi\left(\epsilon_1 + \epsilon_2\right)}.$$

电位移为

$$D = \begin{cases} \frac{\epsilon_1 q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) r^2}, & \mathbf{r} \in \Omega_1; \\ \frac{\epsilon_2 q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) r^2}, & \mathbf{r} \in \Omega_2. \end{cases}$$

自由面电荷分布为

$$\sigma = \begin{cases} \frac{\epsilon_1 q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) R^2}, & \mathbf{r} \in \Omega_1; \\ \frac{\epsilon_2 q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) R^2}, & \mathbf{r} \in \Omega_2. \end{cases}$$

2.23

假设金属球带电量为 q ，因此电场分布为

$$E = \begin{cases} \frac{q + q_0 \frac{r^3 - R^3}{7R^3}}{8\pi\epsilon_0 r^2}, & R \le r \le 2R; \\ \frac{q + q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r > 2R. \end{cases}$$

金属球的电势为

$$V = \int_R^\infty E dr = 0,$$

$$q = -\frac{16}{21} q_0.$$

外表面的电势为

$$V' = \int_{2R}^\infty E dr = \frac{q + q_0}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{5q_0}{168\pi\epsilon_0 R}.$$

2.24

带电粒子受到的电场力随时间的平均是竖直向上的，它与重力平衡。「你去看答案就知道作者到底是什么水平了」

2.25

充电后， A 极板带电量为

$$Q=\frac{\epsilon SV}{d_1},$$

其中 S 是极板的面积。接通可调电源后，假设 C 极板下表面、 A 极板上表面与下表面、 B 极板上表面电荷量分别为 $Q_1,-Q_1,Q_2,-Q_2$ 。因为 A 极板不与外界接触，所以带电量仍然为 Q ，因此

$$-Q_1+Q_2=Q=\frac{\epsilon SV}{d_1}.$$

AC,AB 之间的电场强度分别为

$$E_1=\frac{Q_1}{\epsilon_0 S},$$
$$E_2=\frac{Q_2}{\epsilon S}.$$

因此

$$\frac{Q_1}{\epsilon_0 S}d_2+\frac{Q_2}{\epsilon S}d_1=V_0.$$

$$Q_1=\frac{\epsilon_0\epsilon S\left(V_0-V\right)}{\epsilon_0 d_1+\epsilon d_2},$$
$$Q_2=\frac{\epsilon S\left(\epsilon_0 V_0 d_1+\epsilon V d_2\right)}{d_1\left(\epsilon_0 d_1+\epsilon d_2\right)}.$$

P 点的电场强度为

$$E_1=\frac{Q_1}{\epsilon_0 S}=\frac{\epsilon\left(V_0-V\right)}{\epsilon_0 d_1+\epsilon d_2}.$$

2.26

假设电介质的介电常数为 ϵ ，记内球壳、外球壳的半径分别为 $R_1;R_2=5\ \mathrm{cm}$ ，带电量分别为 $Q,-Q$ 。因此，电场强度为

$$E=\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2},\qquad R_1\le r\le R_2.$$

为了避免电场强度超过击穿强度 $E_0 = 2.0 \times 10^7\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$ ，需要满足

$$Q \leq 4\pi\epsilon R_1^2 E_0 .$$

电容器的电势差为

$$V = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \leq \left(R_1 - \frac{R_1^2}{R_2}\right) E_0 \leq \frac{1}{4} R_2 E_0 = 2.5 \times 10^5\ \mathrm{V} .$$

2.27

假设内层圆柱单位长度的带电量为 λ 。因此，电场强度为

$$E = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_1 r}, & a \leq r \leq b; \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_2 r}, & b < r \leq c . \end{cases}$$

两层介质最大的电场强度为

$$E_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_1 a},$$
$$E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_2 b} .$$

为了使这两者相同，需要满足

$$b = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} a = 2a .$$

电势差为

$$V = \int_a^c E dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_1} \log\frac{b}{a} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_2} \log\frac{c}{b} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_1} \log 2 + \frac{\lambda}{\pi\epsilon_1} \log\frac{c}{2a} .$$

因此

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_1} = \frac{V}{\log 2 + 2\log\frac{c}{2a}},$$

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_1 b} = \frac{V}{2a\log 2 + 4a\log\frac{c}{2a}} .$$

所以这代表 $c \to 2a$ 才能取到极值？什么脑残题目？

2.28

电位移为

$$D=\begin{cases}\frac{qr}{4\pi a^3}, & r\le a;\\ \frac{q}{4\pi r^2}, & r>a\,.\end{cases}$$

电场强度为

$$E=\begin{cases}\frac{qr}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 a^3}, & r\le a;\\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r>a\,.\end{cases}$$

场能密度为

$$w=\frac{1}{2}DE=\begin{cases}\frac{q^2r^2}{32\pi^2\epsilon_r\epsilon_0 a^6}, & r\le a;\\ \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}, & r>a\,.\end{cases}$$

电场能量为

$$W=\int_0^\infty w4\pi r^2 dr=\int_0^a\frac{q^2r^4}{8\pi\epsilon_r\epsilon_0 a^6}dr+\int_a^\infty\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2}dr=\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a}\left(1+\frac{1}{5\epsilon_r}\right).$$

2.29

令 $R_1=100\ \mathrm{cm}, R_2=1\ \mathrm{mm}$ ， $V=100\ \mathrm{V}$ 。因此，肥皂泡带电量为

$$Q=4\pi\epsilon_0 R_1 V.$$

电场能量为

$$W_1=\frac{1}{2}QV=2\pi\epsilon_0 R_1 V^2.$$

收缩后，电势变为

$$V'=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}=\frac{R_1}{R_2}V.$$

电场能量变为

$$W_2=\frac{1}{2}QV'=2\pi\epsilon_0\frac{R_1^2}{R_2}V^2.$$

$$\Delta W = W_2 - W_1 = 2\pi\epsilon_0 R_1 V^2 \left(\frac{R_1}{R_2} - 1\right) = 5\times 10^{-8}\ \mathrm{J}\,.$$

2.30

我是没有心情和玩这些傻逼做题技巧的。不过随便糊弄点吧，万一给你对了呢（滑稽）：

假设粒子的速度分别为 v_1, v_2, v_3 ，根据动量守恒与能量守恒可得

$$\begin{aligned} m v_1 + 2m v_2 + 5m v_3 &= 0, \\ \frac{1}{2}m v_1^2 + m v_2^2 + \frac{5}{2}m v_3^2 &= \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 r}\,. \end{aligned}$$

可得动能为

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2}m v_1^2 = \frac{9q^2}{16\pi\epsilon_0 r}, \\ K_2 &= m v_2^2 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r}, \\ K_3 &= \frac{5}{2}m v_3^2 = \frac{5q^2}{16\pi\epsilon_0 r}\,. \end{aligned}$$

2.31

雨滴表面的电势为

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}\,.$$

电场能量为

$$W = \frac{1}{2}QV = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}\,.$$

两个相同的雨滴电场能量之和为

$$W' = 2\frac{(Q/2)^2}{8\pi\epsilon_0 (R/2^{1/3})} = \frac{1}{4^{1/3}}\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}\,.$$

n 个相同的雨滴电场能量之和为

$$W'' = n\frac{(Q/n)^2}{8\pi\epsilon_0 (R/n^{1/3})} = \frac{1}{n^{2/3}}\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}\,.$$

2.32

内球电势为

$$V = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}\,.$$

因此

$$q_1 = 4\pi\epsilon_0 R_1 V - \frac{R_1}{R_2} q_2\,.$$

电场强度为

$$E = \begin{cases} \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & R_1 \le r \le R_2; \\ \frac{q_1+q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r > R_2\,. \end{cases}$$

电场能量为

$$W = \int_{R_1}^{\infty} \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 4\pi r^2 dr = 2\pi\epsilon_0 V^2 R_1 - \frac{q_2^2\left(R_1 - R_2\right)}{8\pi\epsilon_0 R_2^2}\,.$$

2.33

第二个电容器的带电量为

$$Q = C\left(V - V'\right) = 100\ \mathrm{pF}\left(100\ \mathrm{V} - 30\ \mathrm{V}\right).$$

而并联电势差相等，因此第二个电容器的电势差同样为 $V' = 30\ \mathrm{V}$ ，这表明电容大小为

$$C' = \frac{Q}{V} = \frac{70}{30} \cdot 100\ \mathrm{pF} = 233\ \mathrm{pF}\,.$$

损失能量为

$$\Delta W = \frac{1}{2}CV'^2 + \frac{1}{2}C'V'^2 - \frac{1}{2}CV^2 = -3.5 \times 10^{-7}\ \mathrm{J}\,.$$

因为充电时，电容器极板之间的电场强度会发生变化，因此会产生位移电流，使得电容器极板之间具有非零的磁场，自然具有非零的坡印廷矢量——这表明电容器会往外以电磁波的形式发射能量。「这是最后一章的内容」

2.34

假设 C_1, C_2, C_3 极板带电量分别为 $Q_1, -Q_1; Q_2, -Q_2; Q_3, -Q_3$ 。因此

$$
\begin{aligned}
-Q_1+Q_2+Q_3&=0,\\
\frac{Q_2}{C_2}-\frac{Q_3}{C_3}&=0,\\
\frac{Q_1}{C_1}+\frac{Q_2}{C_2}&=V.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_1&=6.3\times10^{-4}\ \mathrm{C},\\
Q_2&=2.7\times10^{-4}\ \mathrm{C},\\
Q_3&=3.6\times10^{-4}\ \mathrm{C}.\\
V_1&=\frac{Q_1}{C_1}=210\ \mathrm{V},\\
V_2&=\frac{Q_2}{C_2}=90\ \mathrm{V},\\
V_3&=\frac{Q_3}{C_3}=90\ \mathrm{V}.
\end{aligned}
$$

系统能量为

$$
W=\frac{1}{2}C_1V_1^2+\frac{1}{2}C_2V_2^2+\frac{1}{2}C_3V_3^2=94.5\ \mathrm{J}.
$$

2.35

(1) 假设 B 板上表面、下表面的电荷密度为 σ_1, σ_2 ，因此上半部分、下半部分电场强度分别为

$$
\begin{aligned}
E_1&=\frac{\sigma_1}{\epsilon_0},\\
E_2&=-\frac{\sigma_2}{\epsilon_0}.
\end{aligned}
$$

因为 A, C 接地，所以它们的电势差为 0 ，因此

$$
E_1d_1+E_2d_2=0.
$$

而上半部分电场强度为

$$
E_1=\frac{mg}{q}.
$$

因此

$$
\begin{aligned}
E_2 &= -\frac{d_1}{d_2}\frac{mg}{q}, \\
\sigma_1 &= \epsilon_0 E_1 = \frac{mg\epsilon_0}{q}, \\
\sigma_2 &= -\epsilon_0 E_2 = \frac{d_1}{d_2}\frac{mg\epsilon_0}{q}.
\end{aligned}
$$

B 板的带电量为

$$
Q = \left(\sigma_1 + \sigma_2\right) S = \left(1 + \frac{d_1}{d_2}\right)\frac{mg\epsilon_0 S}{q}.
$$

总共滴入油滴的个数为

$$
N = \frac{Q}{q} = \left(1 + \frac{d_1}{d_2}\right)\frac{mg\epsilon_0 S}{q^2}.
$$

因此这是第 $N+1$ 滴。

(2) 此时 B 板的电荷密度为

$$
\sigma = \frac{(N-1)q}{S}.
$$

假设 B 板上表面、下表面的电荷密度为 σ_1, σ_2 ，因此

$$
\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma = \frac{(N-1)q}{S}.
$$

上半部分、下半部分电场强度分别为

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \frac{\sigma_1}{\epsilon_0}, \\
E_2 &= -\frac{\sigma_2}{\epsilon_0}.
\end{aligned}
$$

因为 A, C 接地，所以它们的电势差为 0 ，因此

$$
E_1 d_1 + E_2 d_2 = 0.
$$

可得

$$
E_1 = \frac{(N-1)q}{\epsilon_0 S\left(1 + \frac{d_1}{d_2}\right)}.
$$

液滴在电场向上的加速度为

$$a = \frac{qE_1}{m} - g = \frac{(N-1)^2 q^2}{m\epsilon_0 S\left(1+\frac{d_1}{d_2}\right)} - g\,.$$

因此

$$H = \frac{gh}{a} = \frac{h}{\frac{(N-1)^2 q^2}{mg\epsilon_0 S\left(1+\frac{d_1}{d_2}\right)} - 1}\,.$$

2.36

电场分布为

$$E = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi\left(r^3 - R_1^3\right)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho\left(r^3 - R_1^3\right)}{3\epsilon_0 r^2}, \qquad R_1 \le r \le R_2\,.$$

电场能量为

$$W = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 4\pi r^2 dr = \frac{2\pi\rho^2\left(-5R_1^6 + 9R_1^5 R_2 - 5R_1^3 R_2^3 + R_2^6\right)}{45\epsilon_0 R_2}\,.$$

因为外球壳电势为 0 ，所以球心的电势为

$$V = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{\rho\left(R_2 - R_1\right)^2\left(2R_1 + R_2\right)}{6\epsilon_0 R_2}\,.$$

2.37

假设上面的电容器与下面的电容器极板间距分别为 d_1, d_2 ，因此

$$d_1 + d_2 = a - b\,.$$

两个电容器的电容大小分别为

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{d_1},$$
$$C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{d_2}\,.$$

因此，串联电容大小为

$$C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = \frac{\epsilon_0 S}{a-b}\,.$$

电容器的总储能为

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{\epsilon_0 S V^2}{2(a-b)}\,.$$

2.38

(1) 球内的电场为

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2}\int_0^R \rho 4\pi r^2 dr = \frac{2AR^{3/2}}{7\epsilon_0}, \qquad R \le a\,.$$

球外的电场为

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2}\int_0^a \rho 4\pi r^2 dr = \frac{2Aa^{7/2}}{7\epsilon_0 R^2}, \qquad R > a\,.$$

(2) 球外的电势为

$$V_2 = \int_R^\infty E_2 dr = \frac{2Aa^{7/2}}{7\epsilon_0 R}, \qquad R > a\,.$$

球内的电势为

$$V_1 = \int_R^a E_1 dr + \int_a^\infty E_2 dr = -\frac{4AR^{5/2}}{35\epsilon_0} + \frac{2Aa^{5/2}}{5\epsilon_0}, \qquad R \le a\,.$$

(3) 电场能量为

$$W = \int_0^R \frac{1}{2}\epsilon_0 E_1^2 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{1}{2}\epsilon_0 E_2^2 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi A^2 a^6}{21\epsilon_0}\,.$$

(4) 这是什么？

2.39

势能的最大值为

$$\sup V = \frac{1}{2}mv_0^2\,.$$

很显然，势能函数是奇函数，因此势能的最小值为

$$\inf V = -\frac{1}{2}mv_0^2\,.$$

粒子最大速度对应经过势能最小值的位置，此时粒子的动能为

$$K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 - \inf V = \frac{1}{2} m \left(v_1^2 + v_0^2\right).$$

粒子最小速度对应经过势能最大值的位置，此时粒子的动能为

$$K_2 = \frac{1}{2} m v_1^2 - \sup V = \frac{1}{2} m \left(v_1^2 - v_0^2\right).$$

因此最大速度与最小速度比值为

$$\lambda = \left(\frac{K_1}{K_2}\right)^{1/2} = \left(\frac{v_1^2 + v_0^2}{v_1^2 - v_0^2}\right)^{1/2}.$$

2.40

当 A, C 达到最近，三者的相对速度均为 0 ，这表明三者以相同速度 v 运动。根据动量守恒定律可得

$$v = \frac{M v_0}{M + 2m}.$$

假设 A, C 最近距离为 x ，根据能量守恒定律可得

$$\frac{1}{2} M v_0^2 - \frac{1}{2}(M + 2m) v^2 = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 x} - \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 l},$$

$$x = \frac{1}{\frac{1}{2l} + \frac{4\pi\epsilon_0 M m v_0^2}{Q^2 (M + 2m)}}.$$

当三个球位于一条直线上时，假设 B 的速度为 u_1 ， A, C 的速度为 u_2 。根据动量守恒与能量守恒定律可得

$$M v_0 = M u_1 + 2m u_2,$$
$$\frac{1}{2} M v_0^2 = \frac{1}{2} M u_1^2 + m u_2^2.$$

该方程具有两组解：

$$u_1 = v_0,$$
$$u_2 = 0.$$

$$u_1 = \frac{2m - M}{2m + M} v_0,$$
$$u_2 = \frac{4m}{2m + M} v_0.$$

2.41

(1) 假设隧穿之前，电容器两端电势差为 V ，因此左边极板、右边极板带电量分别为 $CV, -CV$ 。隧穿之后，左边极板、右边极板带电量分别为 $CV \pm e, -CV \mp e$ 。为了防止隧穿现象发生，需要满足

$$\frac{(CV+e)^2}{2C} - \frac{1}{2}CV^2 > 0,$$
$$\frac{(CV-e)^2}{2C} - \frac{1}{2}CV^2 > 0.$$

因此

$$e + 2CV > 0,$$
$$e - 2CV > 0.$$

$$-\frac{e}{2C} < V < \frac{e}{2C}.$$

(2) $C = \dfrac{e}{2V} = 8.0 \times 10^{-16}\ \mathrm{F}.$

(3) 假设两个 MIM 结带电量分别为 Q_1, Q_2 。因此

$$-Q_1 + Q_2 = ne,$$
$$\frac{Q_1}{C_S} + \frac{Q_2}{C_D} = V.$$

$$Q_1 = \frac{C_S}{C_S + C_D}\left(C_D V - ne\right),$$
$$Q_2 = \frac{C_D}{C_S + C_D}\left(C_S V + ne\right).$$

电场能量为

$$W = \frac{Q_1^2}{2C_S} + \frac{Q_2^2}{2C_D} = \frac{n^2e^2 + C_S C_D V^2}{2\left(C_S + C_D\right)}.$$

岛上的电子带来的静电能「电子的存在对电场能量带来的影响」为

$$W_0 = \frac{n^2e^2}{2\left(C_S + C_D\right)}.$$

第 3 章 电流与电路

3.1

(1) $J=\frac{I}{A}=\frac{5\times10^{-4}}{0.10\times10^{-6}}=5.0\times10^{3}\ \mathrm{A\cdot m^{-2}}\,.$

(2) $\sqrt{\left\langle v^2\right\rangle}=\sqrt{\frac{3kT}{m_e}}=\sqrt{\frac{3\times1.38\times10^{-23}\times300}{9.1\times10^{-31}}}=1.1\times10^{5}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$

(3) 单位体积电子个数为单位体积铝原子个数的三倍，其取值为

$$n=3\frac{\mathrm{Density}\cdot N_A}{M}=3\times\frac{2.7\times10^{3}\times6.0\times10^{23}}{27\times10^{-3}}=1.8\times10^{29}\ \mathrm{m^{-3}}\,.$$

$$\tau=\frac{2m_e}{\rho ne^2}=\frac{2\times9.1\times10^{-31}}{2.8\times10^{-8}\times1.8\times10^{29}\times(1.6\times10^{-19})^2}=1.4\times10^{-14}\ \mathrm{s}\,.$$

(4) $\langle\lambda\rangle=\sqrt{\left\langle v^2\right\rangle}\tau=1.1\times10^{5}\times1.4\times10^{-14}=1.6\times10^{-9}\ \mathrm{m}\,.$

(5) $E=\rho J=2.8\times10^{-8}\times5.0\times10^{3}=1.4\times10^{-4}\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}\,.$

3.2

假设从内球壳到外球壳通有电流 I 。因此，电流密度为

$$J=\frac{I}{4\pi r^2}\,.$$

电场强度为

$$E=\frac{J}{\sigma}=\frac{I}{4\pi\sigma r^2}\,.$$

电势差为

$$V=\int_a^b Edr=\frac{I}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\,.$$

电阻为

$$R=\frac{V}{I}=\frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\,.$$

3.3

(1) 假设从内筒到外筒通有电流 I 。因此，电流密度为

$$J = \frac{I}{2\pi r l}.$$

电场强度为

$$E = \rho J = \frac{\rho I}{2\pi r l}.$$

电势差为

$$V = \int_a^b E dr = \frac{\rho I}{2\pi l} \log \frac{b}{a}.$$

电阻为

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\rho}{2\pi l} \log \frac{b}{a}.$$

(2) 假设内筒、外筒带电量分别为 $Q, -Q$ 。因此，电场强度为

$$E = \frac{Q}{2\pi \epsilon r l}.$$

电势差为

$$V = \int_a^b E dr = \frac{Q}{2\pi \epsilon l} \log \frac{b}{a}.$$

电容为

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi \epsilon l}{\log \frac{b}{a}}.$$

(3) $RC = \rho \epsilon$.

3.4

如 125 页所示，电导率为

$$\sigma = \frac{n e^2 \tau}{m_e} = \frac{7.5 \times 10^{28} \times (1.6 \times 10^{-19})^2 \times 1.7 \times 10^{-14}}{9.1 \times 10^{-31}} = 3.6 \times 10^7 \ \mathrm{S} \cdot \mathrm{m}^{-1}.$$

电阻率为 $\rho = 1/\sigma = 2.8 \times 10^{-8} \ \Omega \cdot \mathrm{m}$.

3.5

电流密度为

$$J = \frac{I}{2\pi r^2}.$$

电场强度为

$$E = \rho J = \frac{\rho I}{2\pi r^2}.$$

电势差为

$$V = \int_a^b E dr = \frac{\rho I}{2\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

因此跨步电压分别为

$$V_1 = \frac{10^2 \times 200}{2\pi}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1.6}\right) = 1194 \text{ V},$$
$$V_2 = \frac{10^2 \times 200}{2\pi}\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{10.6}\right) = 18 \text{ V}.$$

3.6

(1) 电流密度为

$$J = \frac{I}{2\pi r^2}.$$

电场强度为

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{2\pi \sigma r^2}.$$

电势差为

$$V = \int_R^\infty E dr = \frac{I}{2\pi \sigma R}.$$

电阻为

$$\text{Resistance} = \frac{V}{I} = \frac{1}{2\pi \sigma R}.$$

(2) 电流密度为

$$J=\frac{I}{2\pi r^2}+\frac{I}{2\pi(d-r)^2}\,.$$

电场强度为

$$E=\frac{J}{\sigma}=\frac{I}{2\pi\sigma r^2}+\frac{I}{2\pi\sigma(d-r)^2}\,.$$

电势差为

$$V=\int_R^{d-R}Edr=\frac{I}{\pi\sigma}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{d-R}\right).$$

电阻为

$$\text{Resistance}=\frac{V}{I}=\frac{1}{\pi\sigma}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{d-R}\right).$$

3.7

假设 50 只安培表读数分别为 $I_1,\ldots,I_{50}$ ，那么 50 只伏特表读数分别为

$$\left(I_1-I_2\right)R,\ldots,\left(I_{49}-I_{50}\right)R,I_{50}R,$$

其中 R 为伏特表的内阻。因此所有伏特表读数总和为

$$\left(I_1-I_2\right)R+\cdots+\left(I_{49}-I_{50}\right)R+I_{50}R=I_1R\,.$$

因为 $I_1=9.5$ mA 是已知的，所以我们只需得知伏特表的内阻即可。根据题目信息可得

$$\left(I_1-I_2\right)R=V_1\,.$$

因此

$$R=\frac{V_1}{I_1-I_2}=\frac{9.6}{(9.5-9.2)\times10^{-3}}=3.2\times10^4\ \Omega\,.$$

所有伏特表读数总和为

$$I_1R=9.5\times10^{-3}\times2.4\times10^4=304\ \text{V}\,.$$

3.8

假设通过 $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2$ 的电流强度分别为 I_1, I_2 ，因此

$$\mathscr{E}_1 - I_1 r_1 - I_1 R_2 - \left(I_1 + I_2\right) R_1 = 0,$$
$$\mathscr{E}_2 - I_2 r_2 - I_2 R_3 - \left(I_1 + I_2\right) R_1 = 0.$$

$$I_1 = 0.508\ \mathrm{A},$$
$$I_2 = -0.162\ \mathrm{A}.$$

a, b 两点的电势分别为

$$V_a = \mathscr{E}_1 - I_1 r_2 = 2.75\ \mathrm{V},$$
$$V_b = \mathscr{E}_2 - I_1 r_2 - I_1 R_2 = 1.73\ \mathrm{V}.$$

R_1, R_2, R_3 上消耗的电功率分别为

$$Q_1 = \left(I_1 + I_2\right)^2 R_1 = 0.598\ \mathrm{W},$$
$$Q_2 = I_1^2 R_2 = 0.516\ \mathrm{W},$$
$$Q_3 = I_2^2 R_3 = 0.105\ \mathrm{W}.$$

3.9

(1) 两个白炽灯的电阻分别为

$$R_1 = \frac{V_1^2}{Q_1} = \frac{100^2}{40} = 2.5 \times 10^2\ \Omega,$$
$$R_2 = \frac{V_2^2}{Q_2} = \frac{110^2}{120} = 1.0 \times 10^2\ \Omega.$$

接入电源后，电流强度为

$$I = \frac{V}{R_1 + R_2} = \frac{220}{2.5 \times 10^2 + 1.0 \times 10^2} = 0.629\ \mathrm{A}.$$

两个白炽灯的电功率分别为

$$Q_1 = I^2 R_1 = 98\ \mathrm{W},$$
$$Q_2 = I^2 R_2 = 40\ \mathrm{W}.$$

因此 $100\ \mathrm{V}, 40\ \mathrm{W}$ 的白炽灯将被烧坏。

(2) 因为两个白炽灯规格相同，所以电势差都为 $110\ \mathrm{V}$ ，属于正常范围，因此都不会被烧坏。

3.10

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \frac{V_1}{I_0} - R_g = \frac{3}{1.00 \times 10^{-3}} - 15 = 2{,}985\ \Omega,\\
R_2 &= \frac{V_2}{I_0} - R_1 - R_g = \frac{15}{1.00 \times 10^{-3}} - 15 = 12{,}000\ \Omega,\\
R_3 &= \frac{V_3}{I_0} - R_1 - R_2 - R_g = \frac{150}{1.00 \times 10^{-3}} - 15 = 135{,}000\ \Omega\,.
\end{aligned}
$$

这些量程的电阻分别为

$$
\begin{aligned}
\frac{V_1}{I_0} &= \frac{3}{1.00 \times 10^{-3}} = 3{,}000\ \Omega,\\
\frac{V_2}{I_0} &= \frac{15}{1.00 \times 10^{-3}} = 15{,}000\ \Omega,\\
\frac{V_3}{I_0} &= \frac{150}{1.00 \times 10^{-3}} = 150{,}000\ \Omega\,.
\end{aligned}
$$

3.11

假设通过 $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_3$ 的电流强度分别为 I_1, I_2 ，因此

$$
\begin{aligned}
\mathscr{E}_1 - I_1 r_1 - \mathscr{E}_2 - \left(I_1 + I_2\right) r_2 = 0,\\
\mathscr{E}_3 - I_2 r_3 - \mathscr{E}_2 - \left(I_1 + I_2\right) r_2 = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= -\frac{2}{15}\ \mathrm{A},\\
I_2 &= \frac{1}{6}\ \mathrm{A}\,.
\end{aligned}
$$

因此，三个电源通过的电流分别为

$$
\begin{aligned}
I_1 &= -\frac{2}{15}\ \mathrm{A},\\
I_1 + I_2 &= \frac{1}{30}\ \mathrm{A},\\
I_2 &= \frac{1}{6}\ \mathrm{A}\,.
\end{aligned}
$$

电压分别为

$$
\begin{aligned}
\mathscr{E}_1 - I_1 r_1 &= \frac{23}{15}\ \mathrm{V},\\
\mathscr{E}_2 + \left(I_1 + I_2\right) r_2 &= \frac{23}{15}\ \mathrm{V},\\
\mathscr{E}_3 - I_2 r_3 &= \frac{23}{15}\ \mathrm{V}\,.
\end{aligned}
$$

输出功率分别为

$$\begin{aligned}
\left(\mathscr{E}_1 - I_1 r_1\right) I_1 &= -\frac{46}{225}\ \mathrm{V}, \\
-\left(\mathscr{E}_2 + \left(I_1 + I_2\right) r_2\right)\left(I_1 + I_2\right) &= -\frac{23}{450}\ \mathrm{W}, \\
\left(\mathscr{E}_3 - I_2 r_3\right) I_2 &= \frac{23}{90}\ \mathrm{W}.
\end{aligned}$$

3.12

电流强度为

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + r}.$$

输出功率为

$$Q = I^2 R = \frac{\mathscr{E}^2 R}{(R + r)^2} = \frac{\mathscr{E}^2}{R + \frac{r^2}{R} + 2r} \le \frac{\mathscr{E}^2}{4r},$$

当 $R = r$ 时取到等号。

3.13

热功率为

$$Q = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = I_1^2 R_1 + \left(I_0 - I_1\right)^2 R_2.$$

因此

$$\frac{\partial Q}{\partial I_1} = 2 I_1 R_1 - 2\left(I_0 - I_1\right) R_2.$$

当其取值为 0 时，

$$I_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_0.$$

此时

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial I_1^2} = 2R_1 + 2R_2 > 0.$$

这表明 Q 取到极小值。而此时 I_1 的取值与实际情况完全吻合。

3.14

两种模型对应 1, 2 点之间的电阻分别为

$$\left(\frac{1}{R_{12}}+\frac{1}{R_{23}+R_{31}}\right)^{-1},$$

$$R_1+R_2\,.$$

代入题目表达式可得

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{R_{12}}+\frac{1}{R_{23}+R_{31}}\right)^{-1}&=\left(\frac{R_3}{Y}+\frac{R_1R_2}{Y(R_1+R_2)}\right)^{-1}\\&=\left(\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{Y(R_1+R_2)}\right)^{-1}\\&=\left(\frac{Y}{Y(R_1+R_2)}\right)^{-1}=R_1+R_2\,.\end{aligned}$$

对于 1, 3; 2, 3 点，情况是相同的。因此这两种模型是等效的。

3.15

将 R_1, R_3, R_5 利用 3.14 题的变换：

$$\begin{aligned}R_5'&=\frac{R_1R_3}{\Delta},\\R_3'&=\frac{R_1R_5}{\Delta},\\R_1'&=\frac{R_3R_5}{\Delta},\end{aligned}$$

其中 $\Delta=R_1+R_3+R_5$ 。因此总电阻为

$$\begin{aligned}R_5'+\left(\frac{1}{R_3'+R_2}+\frac{1}{R_1'+R_4}\right)^{-1}&=\frac{R_1R_3}{\Delta}+\left(\frac{\Delta}{R_1R_5+R_2\Delta}+\frac{\Delta}{R_3R_5+R_4\Delta}\right)^{-1}\\&=\frac{R_1R_3}{\Delta}+\frac{(R_1R_5+R_2\Delta)(R_3R_5+R_4\Delta)}{\Delta(R_1R_5+R_2\Delta+R_3R_5+R_4\Delta)}\\&=\frac{R_1R_3(R_1R_5+R_2\Delta+R_3R_5+R_4\Delta)+(R_1R_5+R_2\Delta)(R_3R_5+R_4\Delta)}{\Delta(R_1R_5+R_2\Delta+R_3R_5+R_4\Delta)},\end{aligned}$$

经过化简可以得到答案。

3.16

假设电流 I 从 A 点流入，从无穷远处流出，那么 AB 段的电流为 I/n ，其中 n 是与 A 点相连边的个数；假设电流 I 从无穷远处流入，从 B 点流出，那么 AB 段的电流同样为 I/n 。

将这两种情况进行叠加，假设电流 I 从 A 点流入，从 B 点流出，那么 AB 段的电流为

$$\frac{I}{n}+\frac{I}{n}=\frac{2I}{n}.$$

AB 的电势差为

$$V=\frac{2I}{n}r.$$

等效电阻为

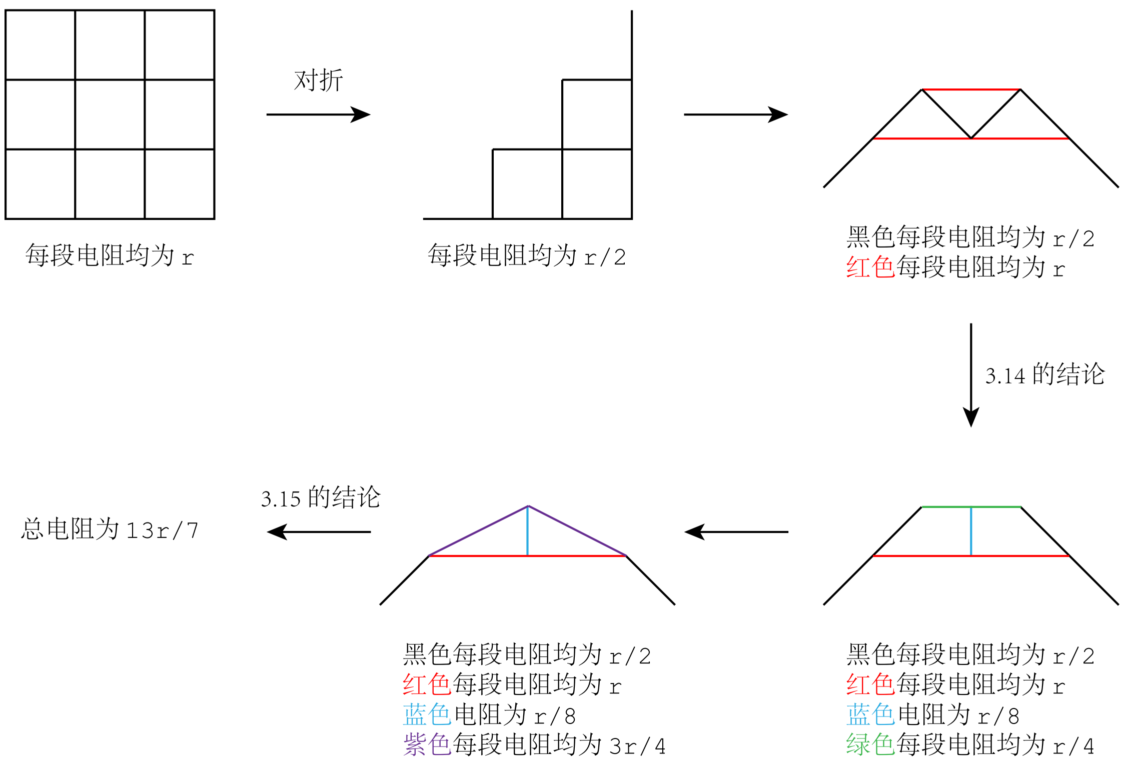
$$R=\frac{V}{I}=\frac{2}{n}r.$$

三个无限大网络分别对应 $n=4,6,3$ ，因此等效电阻分别为

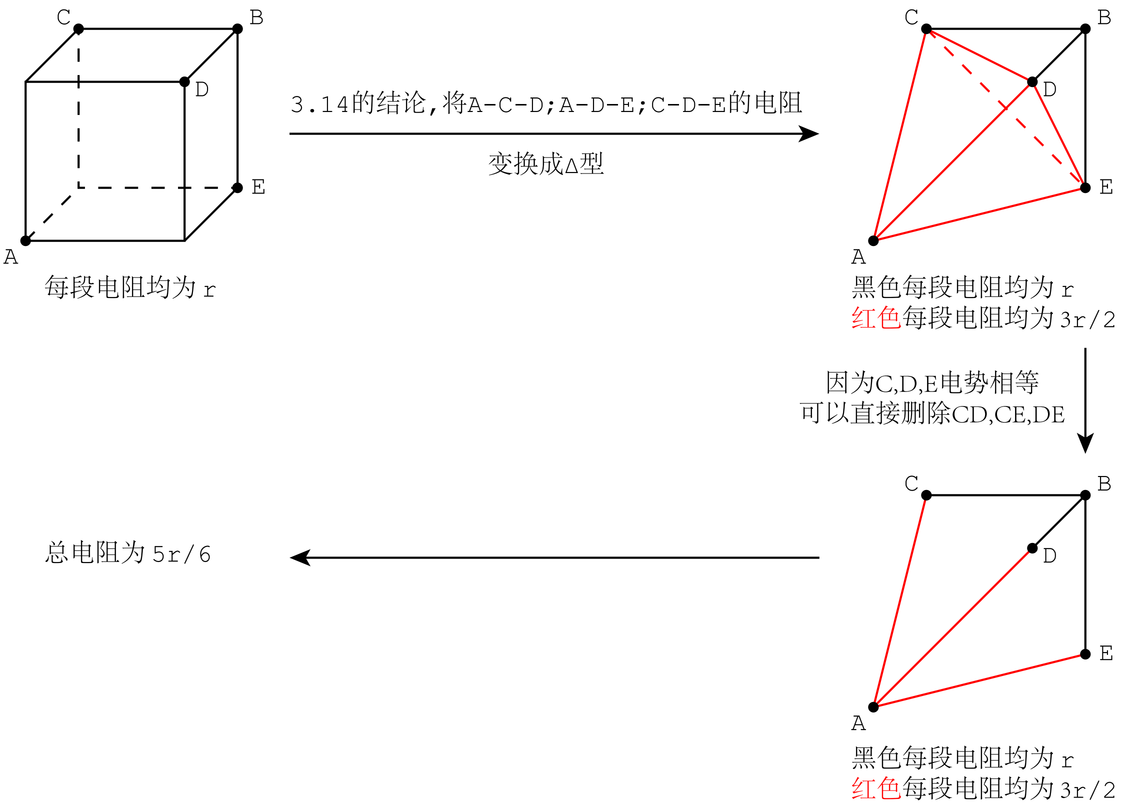
$$R=\frac{1}{2}r,\frac{1}{3}r,\frac{2}{3}r.$$

3.17

(a)



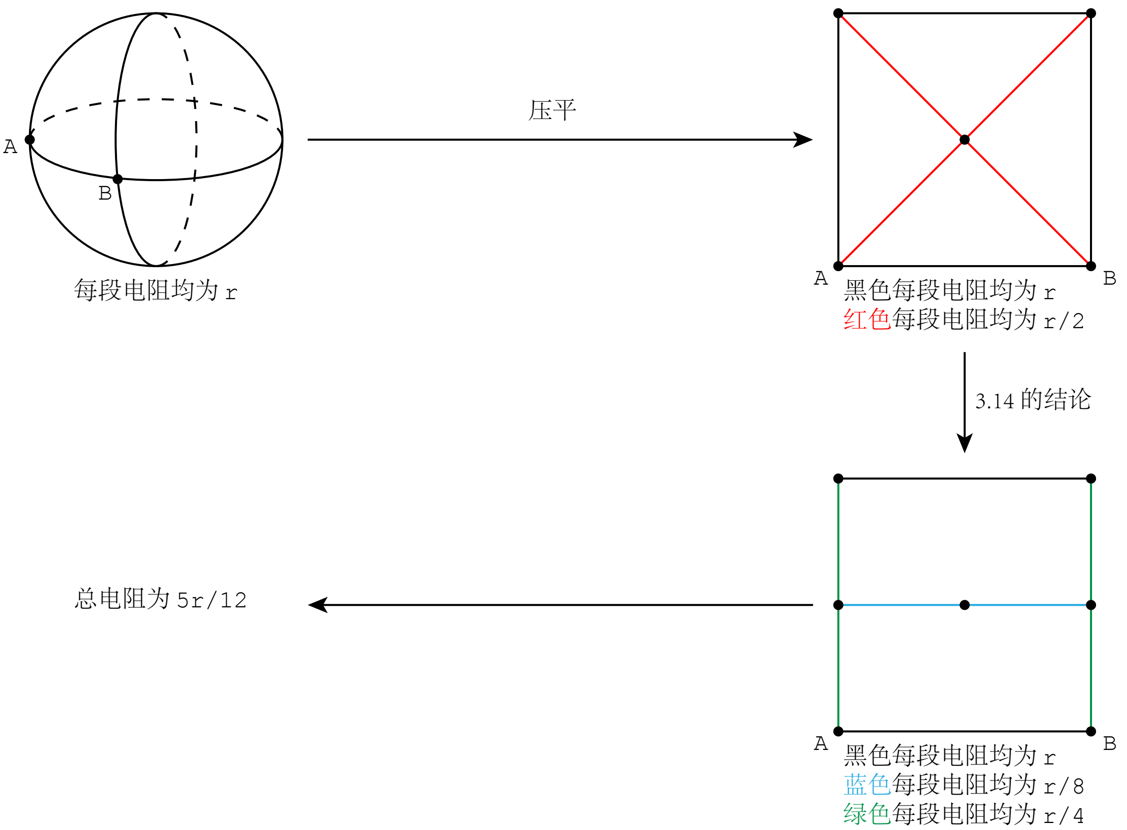
(b)



（箭头文字有误，需要修改为：将 A–C–D; A–C–E; A–D–E 的电阻变换成 Δ 型）

（CD, CE, DE 段电阻标注有误，实际取值为 $3r$）

(c)



3.18

假设等效电阻为 R ，那么

$$2r + \frac{Rr}{R+r} = R,$$

$$R = \left(\sqrt{3}+1\right) r.$$

3.19

假设等效电阻为 R ，那么系统对应 3.15 题

$$\begin{aligned}
&R_1 = r,\\
&R_2 = r + \frac{Rr}{R+r},\\
&R_3 = 2r,\\
&R_4 = r,\\
&R_5 = r.
\end{aligned}$$

利用 3.15 的结论可以得出总电阻为

$$\frac{(13r+21R)r}{11r+15R}.$$

因此

$$\frac{(13r+21R)r}{11r+15R} = R,$$

$$R = \frac{5+2\sqrt{55}}{15} r.$$

3.20

假设每个伏特表的内阻均为 r ，系统的电阻为 R ，那么

$$r + \frac{(r+R)r}{2r+R} = R,$$

$$R = \sqrt{3} r.$$

因此，第一个格子里三个伏特表的读数分别为

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\mathscr{E}, \left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\mathscr{E}, \frac{1}{1+\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\mathscr{E} = 5.77,\ 4.23,\ 1.55\ (\mathrm{V}).$$

第二个格子左边两端电势差为

$$\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\mathscr{E}=\left(2-\sqrt{3}\right)\mathscr{E}\,.$$

因此，第五个格子里三个伏特表的读数是第一个格子里的 $\left(2-\sqrt{3}\right)^4$ 倍。

3.21

与 3.3 (1) 相同。

3.22

R_1, R_2, R_3 的电势差分别为

$$\begin{aligned}V_1&=\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2,\\ V_2&=\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_3,\\ V_3&=\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_3\,.\end{aligned}$$

因此通过它们的电流分别为

$$\begin{aligned}I_1&=\frac{V_1}{R_1}=\frac{\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2}{R_1}=3\ \mathrm{A},\\ I_2&=\frac{V_2}{R_2}=\frac{\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_3}{R_2}=7\ \mathrm{A},\\ I_3&=\frac{V_3}{R_3}=\frac{\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_3}{R_3}=0.8\ \mathrm{A}\,.\end{aligned}$$

3.23

假设通过上、下两个环路的电流「以逆时针为正方向」分别为 I_1, I_2 ，因此

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_3-I_1\left(R_3+R_4\right)+\left(I_2-I_1\right)R_2&=0,\\ \mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1-I_2R_1-\left(I_2-I_1\right)R_2&=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_1&=\frac{2}{7}\ \mathrm{A},\\ I_2&=-\frac{6}{7}\ \mathrm{A}\,.\end{aligned}$$

因此， R_4 的电势差为 $I_1R_4=12/7\ \mathrm{V}$ ，通过 R_2 的电流为 $I_2-I_1=-8/7\ \mathrm{A}$ 。

3.24

(1) 因为 a, b 两点是断开的，所以 R_2 没有电流通过， R_1, R_3, R_4, R_5 通过的电流强度均为

$$I=\frac{\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_3}{R_1+R_3+R_4+R_5+r_1+r_3}=\frac{2}{5}\ \mathrm{A}.$$

a, b 两点的电势差为

$$I\left(R_1+R_5+r_1\right)-\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2=0.$$

(2) 因为 a, b 两点的电势差为 0 ，所以即使将 a, b 接通，体系电流分布也不会受到影响，通过 R_1 的电流为

$$I=\frac{2}{5}\ \mathrm{A}.$$

3.25

假设电流从 B 点流入，从无穷远处流出。那么以 B 为中心，电场强度分布为

$$E_1=\frac{\rho I}{2\pi r^2}.$$

C, D 之间的电势差为

$$V_1=\int_a^{\infty} E_1 dr-\int_{\sqrt{2}a}^{\infty} E_1 dr=\frac{\rho I}{2\pi a}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

假设电流从无穷远处流入，从 A 处流出。那么以 A 为中心，电场强度分布为

$$E_2=-\frac{\rho I}{2\pi r^2}.$$

C, D 之间的电势差为

$$V_2=\int_{\sqrt{2}a}^{\infty} E_2 dr-\int_a^{\infty} E_2 dr=\frac{\rho I}{2\pi a}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

将这两种情况叠加，可得 C, D 之间的电势差为

$$V=V_1+V_2=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\rho I}{2\pi a}.$$

因此

$$\rho=\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)\pi a V}{I}.$$

3.26

(1) 只需要串联 $120/0.01-10=11{,}990\ \Omega$ 的电阻即可。

(2) 改装后的电流计内阻为

$$\frac{0.20}{10}=0.02\ \Omega\,.$$

这远远小于 $20\ \Omega$，因此只需并联 $0.02\ \Omega$ 的电阻即可。

3.27

因为电容与电阻两端电势差相等，所以电容带电量为

$$Q(t)=CV(t)\,.$$

因此电容通过的电流为

$$I_1(t)=\dot{Q}(t)=C\dot{V}(t)\,.$$

电阻通过的电流为

$$I_2(t)=\frac{V(t)}{R}\,.$$

而

$$\mathscr{E}-\big(I_1(t)+I_2(t)\big)\,r-V(t)=0.$$

因此

$$\mathscr{E}-Cr\dot{V}(t)-\frac{r+R}{R}V(t)=0.$$

根据边界条件 $V(0)=0$ 可得

$$V(t)=\frac{R\mathscr{E}}{R+r}\left(1-e^{-\frac{R+r}{RrC}t}\right).$$

因此

$$I(t)=I_1(t)+I_2(t)=C\dot{V}(t)+\frac{V(t)}{R}=\frac{\mathscr{E}}{R+r}\left(1+\frac{R}{r}e^{-\frac{R+r}{RrC}t}\right).$$

3.28

假设通过 $C_1, R_1; C_2, R_2$ 的电流分别为 $I_1(t), I_2(t)$ ， C_1, C_2 的带电量分别为 $Q_1(t), Q_2(t)$ 。因此

$$
\begin{aligned}
I_1(t) &= \dot{Q}_1(t),\\
I_2(t) &= \dot{Q}_2(t),\\
\mathscr{E} &= \frac{Q_1(t)}{C_1} + I_1(t)R_1 + \left(I_1(t) + I_2(t)\right) r,\\
\mathscr{E} &= \frac{Q_2(t)}{C_2} + I_2(t)R_2 + \left(I_1(t) + I_2(t)\right) r\,.
\end{aligned}
$$

因此

$$\frac{Q_1(t)}{C_1} + \dot{Q}_1(t)R_1 = \frac{Q_2(t)}{C_2} + \dot{Q}_2(t)R_2\,.$$

当 $R_1C_1 = R_2C_2$ 时，

$$\frac{Q_1(t)}{C_1} + \dot{Q}_1(t)R_1 = \frac{1}{C_2}\left(Q_2(t) + \dot{Q}_2(t)R_1C_1\right) = \frac{C_1}{C_2}\left(\frac{Q_2(t)}{C_1} + \dot{Q}_2(t)R_1\right).$$

令 $Q(t) = Q_1(t) - \dfrac{C_1}{C_2}Q_2(t)$ ，因此

$$\frac{Q(t)}{C_1} + \dot{Q}(t)R_1 = 0.$$

根据初始条件 $Q_1(0) = Q_2(0) = 0$ ，可得 $Q(0) = 0$ ，因此

$$Q(t) \equiv 0.$$

电流计两端的电势差为

$$V(t) = I_1(t)R_1 - I_2(t)R_2 = \dot{Q}_1(t)R_1 - \frac{C_1}{C_2}\dot{Q}_2(t)R_1 = \dot{Q}(t)R_1 \equiv 0.$$

因此电流计不会发生偏转。

3.29

$$\mathscr{E} = \frac{Q(t)}{C} + \dot{Q}(t)R\,.$$

根据边界条件 $Q(0) = 0$ 可得

$$Q(t) = C\mathscr{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

因此电容器上电荷的增加速率为

$$\dot{Q}(t) = \frac{\mathscr{E}}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\,.$$

储存能量的速率为

$$P_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{Q(t)^2}{2C}\right) = \frac{Q(t)\dot{Q}(t)}{C} = \frac{\mathscr{E}^2}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

热功率为

$$P_2 = \dot{Q}(t)^2 R = \frac{\mathscr{E}^2}{R}e^{-\frac{2t}{CR}}\,.$$

电源提供的功率为

$$P = \mathscr{E}\dot{Q}(t) = \frac{\mathscr{E}^2}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = P_1 + P_2\,.$$

因此电源提供的功率完全用于电容储能和电阻发热。

3.30

(1) 根据高斯定理，电场强度为

$$E = \frac{k}{r}$$

的形式，其中 k 是常数。因此

$$V = \int_a^b E dr = k \log \frac{b}{a}.$$

$$k = \frac{V}{\log \frac{b}{a}}.$$

$$E = \frac{k}{r} = \frac{V}{r \log \frac{b}{a}}.$$

电流强度为

$$I = 2\pi r L J = 2\pi r L \frac{E}{\rho} = \frac{2\pi L V}{\rho \log \frac{b}{a}}.$$

(2) 洛伦兹力的存在，使得电流密度有切向分量。记电流密度为

$$\mathbf{J} = J^{\perp}\hat{r} + J^{\top}\hat{\theta}.$$

假设载流子平均漂移速度为 $\mathbf{v}$ ，因此

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{J}}{ne}.$$

而磁场 $\mathbf{B}$ 的存在等效于外加电场 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ，因此

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\rho}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{\rho}\mathbf{E} + \frac{1}{\rho n e}\mathbf{J} \times \mathbf{B}.$$

而

$$\mathbf{E} = \frac{V}{r \log \frac{b}{a}}\hat{r}, \qquad \mathbf{B} = B\hat{z}.$$

每个分量都要相等，因此

$$J^{\perp} = \frac{V}{\rho r \log \frac{b}{a}} + \frac{1}{\rho n e} J^{\top} B,$$

$$J^{\top} = -\frac{1}{\rho n e} J^{\perp} B.$$

可得

$$J^{\perp} = \frac{V}{\rho r \log \frac{b}{a}\left(1 + \left(\frac{B}{\rho n e}\right)^2\right)}.$$

因此电流强度为

$$I = 2\pi r L J^{\perp} = \frac{2\pi L V}{\rho \log \frac{b}{a}\left(1 + \left(\frac{B}{\rho n e}\right)^2\right)}.$$

3.31

根据电荷守恒定律

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

其中 div 代表向量场的散度， ρ 代表空间的自由电荷密度。而

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho.$$

并且电场强度与电流密度具有关系

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon} \mathbf{D}.$$

因此

$$\frac{\sigma}{\epsilon} \rho = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

$$\rho(t) = \rho(0) e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}.$$

因此，介质 1, 2 的自由电荷密度随时间的演化为

$$\rho_1(t) = \rho_0 e^{-\frac{\sigma_1}{\epsilon_1}t},$$
$$\rho_2(t) \equiv 0.$$

介质 1, 2 的电位移为

$$\mathbf{D}_1 = \frac{1}{4\pi r^2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1\right)\hat{r} = \frac{\rho_1 r}{3}\hat{r}, \qquad r < R_1;$$
$$\mathbf{D}_2 = \frac{1}{4\pi r^2}\left(\frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho_1 + 4\pi R_1^2 \lambda_1\right)\hat{r} = \left(\frac{\rho_1 R_1^3}{3r^2} + \frac{\lambda_1 R_1^2}{r^2}\right)\hat{r}, \qquad R_1 < r < R_2.$$

其中 λ_1, λ_2 分别为半径 R_1, R_2 球面上的面电荷密度。

介质 1, 2 的电流密度为

$$\mathbf{J}_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_1}\mathbf{D}_1 = \frac{\sigma_1 \rho_1 r}{3\epsilon_1}\hat{r}, \qquad r < R_1;$$
$$\mathbf{J}_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_2}\mathbf{D}_2 = \left(\frac{\sigma_2 \rho_1 R_1^3}{3\epsilon_2 r^2} + \frac{\sigma_2 \lambda_1 R_1^2}{\epsilon_2 r^2}\right)\hat{r}, \qquad R_1 < r < R_2.$$

R_1, R_2 球面之所以有非零的面电荷密度，是因为 $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2$ 的存在。根据电荷守恒定律可得

$$\frac{d\left(4\pi R_1^2 \lambda_1\right)}{dt} = 4\pi R_1^2 \left(J_1\Big|_{R_1} - J_2\Big|_{R_1}\right) = 4\pi R_1^2 \left(\frac{\sigma_1 \rho_1 R_1}{3\epsilon_1} - \frac{\sigma_2 \rho_1 R_1}{3\epsilon_2} - \frac{\sigma_2 \lambda_1}{\epsilon_2}\right),$$
$$\frac{d\left(4\pi R_2^2 \lambda_2\right)}{dt} = 4\pi R_2^2\, J_2\Big|_{R_2} = 4\pi R_2^2 \left(\frac{\sigma_2 \rho_1 R_1^3}{3\epsilon_2 R_2^2} + \frac{\sigma_2 \lambda_1 R_1^2}{\epsilon_2 R_2^2}\right).$$

化简可得

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = \frac{\sigma_1 \rho_0 R_1}{3\epsilon_1} e^{-\frac{\sigma_1}{\epsilon_1}t} - \frac{\sigma_2 \rho_0 R_1}{3\epsilon_2} e^{-\frac{\sigma_1}{\epsilon_1}t} - \frac{\sigma_2 \lambda_1}{\epsilon_2},$$
$$\frac{d\lambda_2}{dt} = \frac{\sigma_2 \rho_0 R_1^3}{3\epsilon_2 R_2^2} e^{-\frac{\sigma_1}{\epsilon_1}t} + \frac{\sigma_2 \lambda_1 R_1^2}{\epsilon_2 R_2^2}.$$

利用边界条件 $\lambda_1(0) = 0$ ，第 1 行的求解结果为

$$\lambda_1(t) = \frac{1}{3}\rho_0 R_1 \left(e^{-\frac{\sigma_2}{\epsilon_2}t} - e^{-\frac{\sigma_1}{\epsilon_1}t}\right).$$

因此

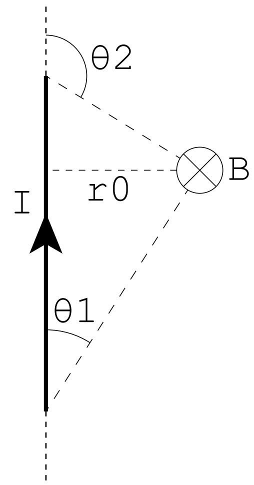
$$\frac{d\lambda_2}{dt} = \frac{\sigma_2 \rho_0 R_1^3}{3\epsilon_2 R_2^2} e^{-\frac{\sigma_2}{\epsilon_2} t}.$$

利用边界条件 $\lambda_2(0) = 0$ 可得

$$\lambda_2(t) = \frac{\rho_0 R_1^3}{3R_2^2} \left(1 - e^{-\frac{\sigma_2}{\epsilon_2} t}\right).$$

第 4 章 磁力与磁场

4.1



如图所示，磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)\,.$$

因此，对于题目情况，

$$\cos\theta_1 = \frac{l/2}{\left(l^2/4 + r^2\right)^{1/2}} = \frac{l}{\left(l^2 + 4r^2\right)^{1/2}},$$
$$\cos\theta_2 = -\cos\theta_1\,.$$

磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{l}{\left(l^2 + 4r^2\right)^{1/2}}\,.$$

当 $l \gg r$ 时， $\left(l^2 + 4r^2\right)^{1/2} \approx l$ ，因此 $B \approx \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ 。

4.2

直导线对 O 点磁感应强度贡献为 0 ，因此，只需计算圆弧导线在 O 点产生的磁感应强度即可。其取值为

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\pi a/2}{a^2} - \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\pi b/2}{b^2} = \frac{\mu_0 I}{8}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

4.3

系统可以视为无限长直导线与圆形导线的叠加，因此， O 点磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} + \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2\pi R}{R^2} = \frac{(1+\pi)\mu_0 I}{2\pi R}\,.$$

4.4

(1) 第 $i(1 \le i \le N)$ 匝导线的半径为

$$R_i = a + \frac{i-1}{N-1}(b-a)\,.$$

它在中心产生的磁感应强度为

$$B_i = \frac{\mu_0 I}{2R_i} = \frac{\mu_0 I}{2\left(a + \frac{i-1}{N-1}(b-a)\right)}.$$

中心的磁感应强度为

$$B = \sum_{i=1}^{N} B_i = \frac{\mu_0 I}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{a + \frac{i-1}{N-1}(b-a)} \approx \frac{\mu_0 N I}{2(b-a)} \int_a^b \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 N I}{2(b-a)} \log \frac{b}{a}.$$

(2) 第 $i(1 \le i \le N)$ 在中心产生的磁感应强度为

$$B_i' = \frac{\mu_0 I R_i^2}{2\left(R_i^2 + r^2\right)^{3/2}}.$$

中心的磁感应强度为

$$\begin{aligned} B' = \sum_{i=1}^{N} B_i' = \frac{\mu_0 I}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{R_i^2}{\left(R_i^2 + r^2\right)^{3/2}} &\approx \frac{\mu_0 N I}{2(b-a)} \int_a^b \frac{x^2 dx}{\left(x^2 + r^2\right)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 N I}{2(b-a)} \left(\frac{a}{\left(a^2 + r^2\right)^{1/2}} - \frac{b}{\left(b^2 + r^2\right)^{1/2}} - \sinh^{-1} \frac{a}{r} + \sinh^{-1} \frac{b}{r} \right). \end{aligned}$$

其中 $\sinh^{-1}$ 是双曲函数 $\sinh$ 的反函数。

4.5

上半段圆弧在圆心产生的磁感应强度为

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}(2\pi - \theta) R = \frac{(2\pi - \theta)\mu_0 I}{4\pi R}.$$

下半段圆弧在圆心产生的磁感应强度为

$$B_2 = \frac{\mu_0(-I)}{4\pi R^2}\theta R = -\frac{\theta \mu_0 I}{4\pi R}.$$

因此，圆心的磁感应强度为

$$B = B_1 + B_2 = \frac{(\pi - \theta)\mu_0 I}{2\pi R}.$$

当 $\theta = \pi$ 时，圆心的磁感应强度为 $B = 0$ 。

4.6

圆弧在圆心产生的磁感应强度为

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} 2(\pi - \theta) R = \frac{(\pi - \theta)\mu_0 I}{2\pi R}.$$

利用 4.1 的结论，直线段在圆心产生的磁感应强度为

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R \cos\theta} 2\sin\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\tan\theta.$$

因此，圆心的磁感应强度为

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}(\pi - \theta + \tan\theta).$$

4.7

「中学解析几何知识我完全忘了，你们还记得吗」以焦点为原点，抛物线可以利用参数方程

$$x(t) = \frac{t^2}{4a} - a,$$
$$y(t) = t$$

来描述，其中 $t \in \mathbb{R}$ 。表示为矢量形式可得

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = \left(\frac{t^2}{4a} - a\right)\mathbf{i} + t\mathbf{j},$$

其中 $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ 是 x, y 方向的单位向量。因此，

$$r(t) = \left(\left(\frac{t^2}{4a} - a\right)^2 + t^2\right)^{1/2} = \frac{t^2}{4a} + a.$$

对于时间参数 $(t, t + dt)$ ，

$$d\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t)dt = \left(\frac{t}{2a}\mathbf{i} + \mathbf{j}\right)dt.$$

焦点处的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\mathbf{r}(t)\times\mathbf{r}(t)}{r(t)^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2a}\mathbf{i}+\mathbf{j}\right)\times\left(\left(\frac{t^2}{4a}-a\right)\mathbf{i}+t\mathbf{j}\right)}{\left(\frac{t^2}{4a}+a\right)^3}dt$$

$$= \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{\left(\frac{t^2}{4a}+a\right)^2}\right)\mathbf{k} = \frac{\mu_0 I}{4a}\mathbf{k},$$

其中 $\mathbf{k}$ 是 z 方向的单位向量，并且 $\mathbf{i}\times\mathbf{j} = -\mathbf{j}\times\mathbf{i} = \mathbf{k}, \mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = 0$ 。

4.8

电子运动产生的电流为

$$I = \frac{e}{T} = \frac{e\omega}{2\pi} = \frac{ev}{2\pi R}.$$

中心的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 ev}{4\pi R^2} = 12.5\ \mathrm{T}.$$

4.9

$(\theta, \theta + d\theta)$ 部分的球面旋转产生的电流强度为

$$dI = \frac{\omega Q\sin\theta d\theta}{4\pi}.$$

产生的磁感应强度为

$$dB = \frac{\mu_0 dI(R\sin\theta)^2}{2\left((R\sin\theta)^2+(r-R\cos\theta)^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0\omega QR^2\sin^3\theta d\theta}{8\pi\left(R^2-2rR\cos\theta+r^2\right)^{3/2}}.$$

记 $\lambda = r/R$ ，总磁感应强度为

$$B = \int dB = \frac{\mu_0\omega Q}{8\pi R}\int_0^{\pi}\frac{\sin^3\theta d\theta}{\left(1-2\lambda\cos\theta+\lambda^2\right)^{3/2}} = \begin{cases}\frac{\mu_0\omega Q}{6\pi R}, & -R < r < R;\\ \frac{\mu_0\omega QR^2}{6\pi r^3}, & \text{otherwise}.\end{cases}$$

因为磁矩为 m 的物体在轴线产生的磁场为

$$B' = \frac{\mu_0 m}{2\pi r^3}.$$

因此

$$\frac{\mu_0 m}{2\pi r^3}=\frac{\mu_0\omega Q R^2}{6\pi r^3},$$

$$m=\frac{1}{3}\omega Q R^2.$$

4.10

磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2+(x+a/2)^2\right)^{3/2}}+\frac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2+(x-a/2)^2\right)^{3/2}}.$$

其在原点的一阶导数为

$$B'(0)=0.$$

二阶导数为

$$B''(0)=-\frac{384\mu_0 I R^2\left(R^2-a^2\right)}{\left(4R^2+a^2\right)^{7/2}}.$$

根据泰勒展开，当二阶导数为零时，磁场在原点处最均匀，只有 $O\left(x^3\right)$ 的增长速度。此时 $a=R$ 。

4.11

磁矩为 m 的物体在轴线产生的磁场为

$$B=\frac{\mu_0 m}{2\pi r^3}.$$

因此

$$m=\frac{2\pi R^3 B}{\mu_0}=8.64\times10^{22}\ \mathrm{A\cdot m^2}.$$

4.12

导体圆柱与导体圆管的电流密度分别为

$$J_1=\frac{I}{\pi a^2},$$
$$J_2=\frac{I}{\pi\left(c^2-b^2\right)}.$$

当 $r < a$ 时

$$B = \frac{\mu_0 \pi r^2 J_1}{2\pi r} = \frac{\mu_0 r I}{2\pi a^2}.$$

当 $a < r < b$ 时

$$B = \frac{\mu_0 \pi a^2 J_1}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

当 $b < r < c$ 时

$$B = \frac{\mu_0 \left(\pi a^2 J_1 + \pi \left(r^2 - b^2\right) J_2\right)}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}.$$

当 $r > c$ 时

$$B = \frac{\mu_0 \left(\pi a^2 J_1 + \pi \left(c^2 - b^2\right) J_2\right)}{2\pi r} = 0.$$

4.13

(1) 电流密度为

$$J = \frac{I}{\pi \left(a^2 - b^2\right)}.$$

如果将空心管填满，并通过相同的电流密度，那么轴线上的磁感应强度为零。所以为了计算轴线上的磁感应强度，只需计算空心管对应电流在轴线上产生的磁感应强度，并将结果取相反数即可。这一取值大小为

$$B_1 = \frac{\mu_0 J \pi b^2}{2\pi d} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \frac{b^2}{a^2 - b^2}.$$

方向为 OO' 以 O 点逆时针旋转 $90°$ (以俯视图为准）。

空心管对应电流在空心管轴线上产生的磁感应强度为零。所以为了计算空心管轴线上的磁感应强度，只需将空心管填满，并通过相同的电流密度即可。这一取值为

$$B_2 = \frac{1}{2} \mu_0 d J = \frac{\mu_0 I d}{2\pi \left(a^2 - b^2\right)}.$$

方向为 $O'O$ 以 O' 点顺时针旋转 $90°$ (以俯视图为准）。

(2) 记大圆柱、小圆柱对应的区域分别为 Ω_1, Ω_2 ； $\mathbf{J}$ 是大小为电流密度 J ，方向向上的向量。

对于 $\Omega_1 \backslash \Omega_2$ 的任意位置 P ，磁感应强度为

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{2}\mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{r} - \frac{\mu_0 b^2 \mathbf{J} \times \mathbf{x}}{2x^2},$$

其中 $\mathbf{r}, \mathbf{x}$ 是 $OP, O'P$ 对应的向量。

对于 Ω_2 的任意位置 Q ，磁感应强度为

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{2}\mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{s} - \frac{1}{2}\mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{y} = \frac{1}{2}\mu_0 \mathbf{J} \times \left(\mathbf{s} - \mathbf{y}\right) = \frac{1}{2}\mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{z},$$

其中 $\mathbf{s}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ 是 $OQ, O'Q, OO'$ 对应的向量。

4.14

电力为

$$F_1 = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r^2}.$$

磁力为

$$F_2 = e v B.$$

电力与磁力的比值为

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{e}{4\pi \epsilon_0 r^2 v B} = 2.33 \times 10^{-3}.$$

4.15

超出第 4 章的范围，涉及第 6 章的知识。

假设在时刻 t ，空间磁感应强度；粒子运动速率、回旋半径分别为 $B(t), v(t), R(t)$ 。因此

$$\begin{aligned} B(0) &= B_0, \\ v(0) &= v_0, \\ R(0) &= \frac{m v_0}{e B_0}. \end{aligned}$$

在时刻 t ，粒子所在位置的涡旋电场强度为

$$E(t) = \frac{1}{2} R(t) \dot{B}(t).$$

因此

$$\dot{v}(t)=\frac{eE(t)}{m}=\frac{e}{2m}R(t)\dot{B}(t)\,.$$

而 $R(t)=mv(t)/eB(t)$ ，因此

$$\dot{v}(t)=\frac{1}{2}v(t)\frac{\dot{B}(t)}{B(t)}=\frac{1}{2}v(t)\frac{d}{dt}\log B(t)\,.$$

因此

$$\frac{d}{dt}\log v(t)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\log B(t)\,.$$

这表明 $v(t)^2/B(t)$ 不会随着时间发生改变，因此

$$\frac{v(t)^2}{B(t)}\equiv\frac{v(0)^2}{B(0)}=\frac{v_0^2}{B_0}\,.$$

当 $B(t_0)=B$ 时，

$$v(t_0)=\left(\frac{B}{B_0}\right)^{1/2}v_0\,.$$

回旋半径为

$$R(t_0)=\frac{mv(t_0)}{eB(t_0)}=\frac{mv_0}{e\left(B_0B\right)^{1/2}}\,.$$

4.16

不会，傻逼东西

4.17

「需要加上假设，导线受到的磁力远大于重力，以至于这一过程中，重力可以忽略不计」

经过导线的电流为 I 时，导线受到的磁力为

$$F=IlB\,.$$

因此，导线的加速度为

$$a=\frac{F}{m}=\frac{IlB}{m}\,.$$

导线离开水银的速度为

$$v=\int a\,dt=\frac{lB}{m}\int I\,dt=\frac{lBq}{m}.$$

而 $v=(2gh)^{1/2}$ ，因此

$$q=\frac{m(2gh)^{1/2}}{lB}.$$

4.18

圆线圈的参数方程为

$$\mathbf{r}(t)=R\cos t\,\mathbf{i}+R\sin t\,\mathbf{j},$$

其中 $\mathbf{i},\mathbf{j}$ 是 x,y 方向的单位向量。因此，圆线圈受到的磁力为

$$\begin{aligned}\mathbf{F}&=\frac{\mu_0I_1I_2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathbf{r}'(t)dt\times\mathbf{k}}{L+R\cos t}\\&=\frac{\mu_0I_1I_2R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos t\,\mathbf{i}+\sin t\,\mathbf{j}}{L+R\cos t}dt\\&=\frac{\mu_0I_1I_2}{2\pi}\left(\left(\int_0^{2\pi}\frac{\cos t}{A+\cos t}dt\right)\mathbf{i}+\left(\int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{A+\cos t}dt\right)\mathbf{j}\right)\\&=\mu_0I_1I_2\left(1-\frac{A}{\sqrt{A^2-1}}\right)\mathbf{i}=\mu_0I_1I_2\left(1-\frac{L}{\sqrt{L^2-R^2}}\right)\mathbf{i}.\end{aligned}$$

其中 $A=L/R>1$ 。根据牛顿第三定律，无限长直导线受到的磁力为 $-\mathbf{F}$ 。

利用 $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$ ，并且 $\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{k}\equiv0,\ \mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t)\equiv0$ ，圆线圈受到的力矩为

$$\boldsymbol{\Gamma}=\frac{\mu_0I_1I_2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathbf{r}(t)\times\left(\mathbf{r}'(t)dt\times\mathbf{k}\right)}{L+R\cos t}=0.$$

4.19

第一个圆线圈的磁矩为

$$\mathbf{m}_1=\pi R_1^2I_1\mathbf{i},$$

其中 $\mathbf{i}$ 是 x 方向的单位向量。它在第二个圆线圈产生的磁感应强度为

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left(-\frac{\mathbf{m}_1}{l^3}+\frac{3(\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}}{l^3}\right)=\frac{\mu_0R_1^2I_1}{2l^3}\mathbf{i}.$$

第二个圆线圈的磁矩为

$$\mathbf{m}_2 = \pi R_2^2 I_2 \mathbf{j},$$

其中 $\mathbf{j}$ 是 y 方向 (竖直向上) 的单位向量。因此，第二个圆线圈受到的力矩为

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{m}_2 \times \mathbf{B} = -\frac{\pi\mu_0 R_1^2 R_2^2 I_1 I_2}{2l^3}\mathbf{k},$$

其中 $\mathbf{k}$ 是 z 方向 (垂直于纸面向外) 的单位向量。因此，力矩方向垂直于纸面向内。

4.20

选取长度为 L 的长方形环路，根据安培环路定律可得

$$\left(B_2 - B_1\right) L = \mu_0 i L,$$

$$i = \frac{B_2 - B_1}{\mu_0}.$$

空间磁感应强度为

$$B_0 = \frac{1}{2}\left(B_1 + B_2\right).$$

单位面积受到的作用力方向向左，大小为

$$P = i B_0 = \frac{B_2^2 - B_1^2}{2\mu_0}.$$

4.21

线圈左边受到的磁力为

$$F_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b}\right).$$

线圈右边受到的磁力为

$$F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b}\right).$$

因此受到的合力为

$$F = F_1 + F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b}\right).$$

因为作用力与位置矢量方向相同，所以力矩为零。

4.22

$(r, r+dr)\times(\theta, \theta+d\theta)$ 可以视为电流强度为

$$I = \sigma\omega r dr,$$

长度为

$$\mathbf{L} = (r d\theta)\hat{\theta} = -r\sin\theta d\theta\,\mathbf{i} + r\cos\theta d\theta\,\mathbf{j},$$

的电流元。其中 $\hat{\theta} = -\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}$ 是 θ 增大方向的单位向量； $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ 是 x, y 方向的单位向量。因此它受到的作用力为

$$\mathbf{F} = I\,\mathbf{L}\times\mathbf{B} = I\,\mathbf{L}\times(B\,\mathbf{i}) = -\sigma\omega B r^2\cos\theta dr d\theta\,\mathbf{k}.$$

力矩为

$$d\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = \sigma\omega B r^3 dr\cos^2\theta d\theta\,\mathbf{j} - \sigma\omega B r^3 dr\cos\theta\sin\theta d\theta\,\mathbf{i},$$

其中 $\mathbf{r} = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\sin\theta\,\mathbf{j}$ 。因此，圆盘受到的总力矩为

$$\boldsymbol{\Gamma} = \sigma\omega B\int_0^R r^3 dr\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\,\mathbf{j} - \sigma\omega B\int_0^R r^3 dr\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta\,\mathbf{i} = \frac{1}{4}\pi\sigma\omega B R^4\,\mathbf{j}.$$

4.23

假设左上角的路径为 γ_1 ，通过电流强度为 I_1 ；右下角的路径为 γ_2 ，通过电流强度为 I_2 。因此

$$I = I_1 + I_2.$$

因为 $\mathbf{B}$ 处处相等，所以左上角路径受到的磁力为

$$\mathbf{F}_1 = \int_{\gamma_1} I_1 d\mathbf{r}\times\mathbf{B} = I_1\left(\int_{\gamma_1} d\mathbf{r}\right)\times\mathbf{B} = I_1\mathbf{L}\times\mathbf{B}.$$

同理可得，右下角路径受到的磁力为 $\mathbf{F}_2 = I_2\mathbf{L}\times\mathbf{B}$ 。因此，总磁力为

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \left(I_1 + I_2\right)\mathbf{L}\times\mathbf{B} = I\,\mathbf{L}\times\mathbf{B}.$$

4.24

(1) 两个粒子之间的作用力可以表示为两种形式：

$$\frac{q_1^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{(q_1')^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(g_1')^2}{r^2}.$$

因此

$$q_1 = \left((q_1')^2 + \frac{(g_1')^2}{c^2} \right)^{1/2} .$$

(2) 第一组的任意粒子与第二组的任意粒子之间的作用力可以表示为两种形式：

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q_1' q_2'}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{g_1' g_2'}{r^2} .$$

而根据第 (1) 题可得

$$q_1 = \left((q_1')^2 + \frac{(g_1')^2}{c^2} \right)^{1/2} ,$$

$$q_2 = \left((q_2')^2 + \frac{(g_2')^2}{c^2} \right)^{1/2} .$$

因此

$$\left((q_1')^2 + \frac{(g_1')^2}{c^2} \right)^{1/2} \left((q_2')^2 + \frac{(g_2')^2}{c^2} \right)^{1/2} = q_1' q_2' + \frac{g_1' g_2'}{c^2} .$$

令 $Q = q_1'/q_2', G = g_1'/g_2'$，因此 $Q, G > 0$，将等式两边平方并化简可得

$$\frac{Q}{G} + \frac{G}{Q} = 2 \Leftrightarrow (Q-G)^2 = 0 \Leftrightarrow Q = G \Leftrightarrow \frac{q_1'}{q_2'} = \frac{g_1'}{g_2'} .$$

4.25

电子被加速后，速度为

$$v = \left(\frac{2eV}{m_e} \right)^{1/2} .$$

因为洛伦兹力，电子的加速度为

$$a = \frac{evB}{m_e} = \frac{eB}{m_e} \left(\frac{2eV}{m_e} \right)^{1/2} .$$

电子偏转距离为

$$y = \frac{1}{2} a \left(\frac{d}{v} \right)^2 = \left(\frac{2eV}{m_e} \right)^{1/2} \frac{Bd^2}{4V} = 6.7 \times 10^{-3}\ \mathrm{m} .$$

4.26

这个很容易，可以自行绘图分析。注意阴极射线带负电荷，同种电荷相互排斥。

4.27

电子螺旋运动的周期为

$$T = \frac{2\pi m_e}{eB}.$$

向前推进的速度为

$$v^{\perp} = \frac{h}{T} = \frac{eBh}{2\pi m_e}.$$

不考虑向前推进，电子螺旋运动的速度为

$$v^{\top} = \frac{2\pi R}{T} = \frac{eBR}{m_e}.$$

电子的速度为

$$v = \left(\left(v^{\perp}\right)^2 + \left(v^{\top}\right)^2\right)^{1/2} = \frac{eB}{m_e}\left(\frac{h^2}{4\pi^2} + R^2\right)^{1/2} = 7.04 \times 10^7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

4.28

假设圆周运动的角速度为 ω ，因此

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2R)^2} = m\omega^2 R,$$

$$\omega = \frac{1}{4}\left(\frac{q^2}{\pi\epsilon_0 m R^3}\right)^{1/2}.$$

假设在时刻 t ，负电荷与正电荷位置分别为 $\mathbf{r}_1(t) = \left(r_1^1(t), r_1^2(t), r_1^3(t)\right); \mathbf{r}_2(t) = \left(r_2^1(t), r_2^2(t), r_2^3(t)\right)$ 。根据牛顿第二定律可得

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}}_1(t) &= \mathbf{F} - q\dot{\mathbf{r}}_1(t) \times \mathbf{B}, \\ m\ddot{\mathbf{r}}_2(t) &= -\mathbf{F} + q\dot{\mathbf{r}}_2(t) \times \mathbf{B}, \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{F}$ 是电荷之间的相互作用力。这个方程组我暂时不知道如何求解。

4.29

未添加磁场时

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m\omega^2 r\,.$$

添加磁场时

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} + e\omega' rB = m(\omega')^2 r\,.$$

因此

$$m\omega^2 r + e\omega' rB = m(\omega')^2 r\,.$$

$$\omega' - \omega = \frac{\omega'}{\omega + \omega'}\frac{eB}{m} \approx \frac{eB}{2m}\,.$$

4.30

磁场为

$$\mathbf{B} = (0, -B,\ 0)\,.$$

电场为

$$\mathbf{E} = (0,\ E,\ 0)\,.$$

假设时刻 t ，电子所处位置为 $\mathbf{r}(t) = \left(r^1(t), r^2(t), r^3(t)\right)$ 。初始时刻，电子处于电子源内部，因此

$$\begin{aligned} r^1(0) &= 0, \\ r^2(0) &= d, \\ r^3(0) &= 0. \end{aligned}$$

根据牛顿第二定律可得

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = -\frac{e}{m_e}\left(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}}(t) \times \mathbf{B}\right).$$

写成分量形式可得

$$\begin{aligned} \ddot{r}^1(t) &= -\frac{eB}{m_e}\dot{r}^3(t), \\ \ddot{r}^2(t) &= -\frac{eE}{m_e}, \\ \ddot{r}^3(t) &= \frac{eB}{m_e}\dot{r}^1(t)\,. \end{aligned}$$

可得

$$
\begin{aligned}
r^1(t) &= -P\left(1-\cos\left(\frac{eB}{m_e}t\right)\right)+Q\sin\left(\frac{eB}{m_e}t\right),\\
r^2(t) &= d+Rt-\frac{eE}{2m_e}t^2,\\
r^3(t) &= P\sin\left(\frac{eB}{m_e}t\right)+Q\left(1-\cos\left(\frac{eB}{m_e}t\right)\right),
\end{aligned}
$$

其中 P, Q, R 都是常数，记 $\omega = eB/m_e$ ，可得

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{\omega}\dot{r}^1(0),\\
Q &= \frac{1}{\omega}\dot{r}^3(0),\\
R &= \dot{r}^2(0)\,.
\end{aligned}
$$

因为电子的运动方向是随机的，所以对于不同的电子， P, Q, R 都可能存在不相同的情况。但是，无论 P, Q 取何值，当

$$
t_0 = \frac{2k\pi}{\omega}, \qquad k \in \mathbb{Z}
$$

时，$r^1(t_0) = r^3(t_0) = 0$ 。这个时候，如果 $r^2(t_0) = 0$ ，那么电子将会在时刻 t_0 汇聚到正极极板上。利用电子出射速度较慢， R 的取值较小这一性质，可得

$$
d + Rt_0 - \frac{eE}{2m_e}t_0^2 \approx d - \frac{eE}{2m_e}t_0^2 = d - \frac{eE}{2m_e}\left(\frac{2k\pi}{\omega}\right)^2 = 0,
$$

$$
E = \frac{2m_e d}{e}\left(\frac{\omega}{2k\pi}\right)^2 = \frac{edB^2}{2\pi^2k^2m_e}\,.
$$

电压为

$$
V = Ed = \frac{ed^2B^2}{2\pi^2k^2m_e}\,.
$$

其中 k 是任意正整数。

4.31

(1) 离子被加速后，速度为

$$v = \left(\frac{2qV}{m}\right)^{1/2}.$$

因此

$$x = \frac{2mv}{qB} = \frac{2}{B}\left(\frac{2mV}{q}\right)^{1/2}.$$

(2) $\frac{q}{m} = \frac{8V}{B^2x^2} = \frac{8 \times 750}{0.358^2 \times 0.10^2} = 4.68 \times 10^6\ \mathrm{C \cdot kg^{-1}}$.

4.32

粒子的速度为

$$\mathbf{v}(t) = \left(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\right).$$

根据牛顿第二定律可得

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{q}{m}\mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}.$$

写成分量形式可得

$$\begin{aligned}
\ddot{x}(t) &= 0, \\
\ddot{y}(t) &= \frac{qB}{m}\dot{z}(t), \\
\ddot{z}(t) &= -\frac{qB}{m}\dot{y}(t).
\end{aligned}$$

利用边界条件 $x(0) = y(0) = 0,\ z(0) = z_0 = mv_0 \sin\beta / qB$ 与 $\dot{x}(0) = v_0\cos\beta, \dot{y}(0) = v_0 \sin\beta, \dot{z}(0) = 0$ ，可得

$$\begin{aligned}
x(t) &= v_0 t \cos\beta, \\
y(t) &= \frac{mv_0}{qB}\sin\beta \sin\frac{qB}{m}t, \\
z(t) &= \frac{mv_0}{qB}\sin\beta \cos\frac{qB}{m}t.
\end{aligned}$$

4.33

(1) 速度垂直于磁场方向的分量为

$$v_0^{\perp} = v_0 \sin\theta_0 .$$

因此，磁矩为

$$\mu_0 = \frac{m(v_0^{\perp})^2}{2B_0} = \frac{m v_0^2 \sin^2\theta_0}{2B_0} .$$

(2) 因为洛伦兹力不会做功，所以粒子速度保持 v_0 不变。在磁感应强度为 B 的地方，因为磁矩保持不变，假设粒子与磁场之间的夹角为 θ ，那么

$$\frac{m v_0^2 \sin^2\theta_0}{2B_0} = \frac{m v_0^2 \sin^2\theta}{2B} .$$

回旋半径为

$$R = \frac{m v_0 \sin\theta}{qB} = \frac{m v_0 \sin\theta_0}{q\left(B_0 B\right)^{1/2}} .$$

(3) 回旋周期为

$$T = \frac{2\pi R}{v_0 \sin\theta} = \frac{2\pi m}{qB} .$$

螺距为

$$h = v_0 T \cos\theta = \frac{2\pi m v_0}{qB}\left(1 - \frac{B}{B_0}\sin^2\theta_0\right)^{1/2} .$$

(4) 粒子螺旋对应的磁通量为

$$\Phi = \pi R^2 B = \frac{\pi m^2 v_0^2 \sin^2\theta_0}{q^2 B_0} = \text{constant} .$$

(5) 此时 $\cos\theta = 0$ ，即

$$1 - \frac{B}{B_0}\sin^2\theta_0 = 0,$$

$$B = \frac{B_0}{\sin^2\theta_0} .$$

4.34

根据安培环路定理，距离轴线 r 处的磁感应强度为

$$B=\frac{1}{2}\mu_0 ir.$$

粒子加速度为

$$a=\frac{qB(p/m)}{m}=\frac{\mu_0 qpir}{2m^2}.$$

粒子在离开圆柱体之后，径向速度分量为

$$v=a\frac{L}{p/m}=\frac{\mu_0 qiLr}{2m}.$$

焦距为

$$f=\frac{rp/m}{v}=\frac{2p}{\mu_0 qiL}=\frac{2\pi R^2 p}{\mu_0 qIL}.$$

4.35

(1) $R_H=-\dfrac{1}{nq}$ ，其中 $q=\pm e$ 。因此，当载流子带正电时，霍尔系数小于 0 ；当载流子带负电时，霍尔系数大于 0 。载流子密度为 $n=\dfrac{1}{e\left|R_H\right|}$ 。

(2) 又不是做大物实验😅

4.36

不会

第 5 章 物质中的磁场与磁性材料

5.1

$$\frac{kT}{m_B B} = \frac{1.3\times10^{-23}\times300}{\frac{1.602\times10^{-19}\times6.626\times10^{-34}}{4\pi\times9.11\times10^{-31}}\times1} = 447.$$

5.2

磁矩是磁化强度与体积的乘积：

$$m = VM = \frac{1}{4}\pi D^2 LM = \frac{1}{4}\pi\times0.01^2\times0.03\times1{,}200 = 2.8\times10^{-3}\ \mathrm{A\cdot m^{-2}}.$$

5.3

(1) 上夸克运动产生的电流为

$$I_1 = \frac{2e/3}{2\pi r/v} = \frac{ev}{3\pi r}.$$

因此，上夸克对应的磁矩为

$$m_1 = \pi r^2 I_1 = \frac{1}{3}evr.$$

同理可得，两个下夸克对应的磁矩都为 $m_2 = evr/6$ ，因此总磁矩为

$$m = m_1 + 2m_2 = \frac{2}{3}evr.$$

(2) 代入数值可得

$$v = \frac{3m}{2er} = \frac{3\times9.66\times10^{-27}}{2\times1.6\times10^{-19}\times1.2\times10^{-15}} = 7.5\times10^7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

5.4

(1) 原子的个数为

$$N = \frac{m}{M}N_A = \frac{\frac{1}{4}\pi\rho D^2 L}{M}N_A.$$

电子的个数为

$$N_e = 2N = \frac{\pi\rho D^2 L}{2M}N_A = \frac{\pi\times7.8\times1.0^2\times12}{2\times55.85}\times6.02\times10^{23} = 1.58\times10^{24}.$$

(2) 电子的磁矩大小是玻尔磁矩

$$m_B = \frac{eh}{4\pi m_e} = 9.27 \times 10^{-24}\ \mathrm{A \cdot m^2},$$

其中 $h = 6.63 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s^{-1}}$ 是普朗克常数。因此，总磁矩为

$$\mu = N_e m_B = 1.58 \times 10^{24} \times 9.27 \times 10^{-24} = 14.6\ \mathrm{A \cdot m^2}.$$

(3) 对应电流为

$$I = \frac{\mu}{\frac{1}{4}\pi D^2} = \frac{14.6}{\frac{1}{4}\pi \times 0.01^2} = 1.86 \times 10^5\ \mathrm{A}.$$

面电流密度为

$$J = \frac{I}{L} = \frac{1.86 \times 10^5}{0.12} = 1.55 \times 10^6\ \mathrm{A \cdot m^{-1}}.$$

(4) 产生的磁场为

$$B = \frac{\mu_0 I}{L} = \mu_0 J = 4\pi \times 10^{-7} \times 1.55 \times 10^6 = 1.95\ \mathrm{T}.$$

5.5

(1) 根据安培环路定律，磁场强度为

$$H = \frac{NI}{P} = \frac{400 \times 20}{0.40} = 2.0 \times 10^4\ \mathrm{A \cdot m^{-1}}.$$

(2) 磁化强度为

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{1.0}{4\pi \times 10^{-7}} - 2.0 \times 10^4 = 7.8 \times 10^5\ \mathrm{A \cdot m^{-1}}.$$

(3) 磁化率为

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{7.8 \times 10^5}{2.0 \times 10^4} = 39.$$

(4) 磁化面电流为 $J = M = 7.8 \times 10^5\ \mathrm{A \cdot m^{-1}}$ 。相对磁导率为 $\mu_r = 1 + \chi = 40$ 。

5.6

只需将 4.9 题的 Q 替代为 $4\pi\epsilon_0 RV$ 即可。因此

$$m = \frac{1}{3}\omega(4\pi\epsilon_0 RV)R^2 = \frac{4}{3}\pi\omega\epsilon_0 R^3 V.$$

5.7

不会

5.8

根据图表可得，当磁场为 $B = 1.2\ \mathrm{T}$ 时，磁场强度约为 $H = 220\ \mathrm{A \cdot m^{-1}}$ 。如果将铁芯抽出，为了使得磁场依然为 $B = 1.2\ \mathrm{T}$ ，那么此时，磁场强度为

$$H' = \frac{B}{\mu_0} = 9.55 \times 10^5\ \mathrm{A \cdot m^{-1}}.$$

因为磁场强度与通入电流成正比，因此，此时导线通入电流为

$$I' = \frac{H'}{H} I = \frac{9.55 \times 10^5}{220} \times 6.0 = 2.60 \times 10^4\ \mathrm{A}.$$

5.9

居里温度 T_c 对应磁场强度

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M = \frac{B}{\mu_0}\left(1 - \frac{C}{T_c}\right) = 0,$$

因此

$$C = T_c = 1.8 \times 10^{-3}\ \mathrm{K}.$$

代入数值可得 (1) 的结果为

$$M' = \frac{CB'}{\mu_0 T'} = \frac{1.8 \times 10^{-3} \times 0.35}{4\pi \times 10^{-7} \times 293} = 1.7\ \mathrm{A \cdot m^{-1}}.$$

假设 (2) 对应的温度为 T'' ，因此

$$T'' = \frac{CB''}{\mu_0 M} = \frac{1.8 \times 10^{-3} \times 0.25}{4\pi \times 10^{-7} \times 1.7} = 210\ \mathrm{K}.$$

5.10

假设在空气一侧与软铁一侧，磁感应强度与磁场强度的垂直、水平分量分别为

$$\mathbf{B}_1^{\perp}, \mathbf{B}_1^{\top}; \mathbf{B}_2^{\perp}, \mathbf{B}_2^{\top}; \mathbf{H}_1^{\perp}, \mathbf{H}_1^{\top}; \mathbf{H}_2^{\perp}, \mathbf{H}_2^{\top}.$$

根据边界条件可得

$$\mathbf{B}_1^{\perp} = \mathbf{B}_2^{\perp},$$
$$\mathbf{H}_1^{\top} = \mathbf{H}_2^{\top}.$$

而磁感应强度与磁场强度的关系取决于相对磁导率的大小，即

$$\mathbf{B}_1^{\perp}=\mu_{r1}\mu_0\mathbf{H}_1^{\perp},$$
$$\mathbf{B}_1^{\top}=\mu_{r1}\mu_0\mathbf{H}_1^{\top},$$
$$\mathbf{B}_2^{\perp}=\mu_{r2}\mu_0\mathbf{H}_2^{\perp},$$
$$\mathbf{B}_2^{\top}=\mu_{r2}\mu_0\mathbf{H}_2^{\top}.$$

因此

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{\left|\mathbf{B}_1^{\top}\right|}{\left|\mathbf{B}_1^{\perp}\right|}\Big/\frac{\left|\mathbf{B}_2^{\top}\right|}{\left|\mathbf{B}_2^{\perp}\right|}=\frac{\left|\mathbf{B}_1^{\top}\right|}{\left|\mathbf{B}_2^{\top}\right|}\Big/\frac{\left|\mathbf{B}_1^{\perp}\right|}{\left|\mathbf{B}_2^{\perp}\right|}=\frac{\mu_{r1}\mu_0\left|\mathbf{H}_1^{\top}\right|}{\mu_{r2}\mu_0\left|\mathbf{H}_2^{\top}\right|}\Big/\frac{\left|\mathbf{B}_1^{\perp}\right|}{\left|\mathbf{B}_2^{\perp}\right|}=\frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}.$$

代入 $\theta_1=85^\circ,\mu_{r1}=1,\,\mu_{r2}=7{,}000$ 可得 $\theta_2=5.6'$，其中 1 分为 1/60 度。

5.11

$$\frac{4}{\mu_r\left(1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right)}=\frac{4}{5\times10^4\left(1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right)}=\frac{H_1}{H_0}=\frac{0.5}{500}=\frac{1}{1{,}000},$$

$$\frac{R_1}{R_2}=0.96,$$

$$R_2=\frac{R_1}{0.96}=\frac{25}{0.96}=26\ \mathrm{mm}.$$

5.12

根据 2023 秋期末试卷五 (1) 题可得，球内部的磁感应强度为

$$B_1=\frac{2}{3}\mu_0M.$$

而球的磁矩为

$$m=\frac{4}{3}\pi R^3M.$$

因此，距离球心 $r(r>R)$ 处的磁感应强度为

$$B_2=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m}{r^2}=\frac{2R^3}{3r^2}\mu_0M.$$

5.13

(1) 当地的坐标为

$$\mathbf{R} = \left(R\cos\varphi, R\sin\varphi\right).$$

法向量为

$$\mathbf{N} = \left(\cos\varphi, \sin\varphi\right).$$

地球的磁矩为

$$\mathbf{m} = (0,\ -m).$$

磁矩在当地产生的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi R^3}\left(-\mathbf{m} + 3(\mathbf{m}\cdot\mathbf{N})\mathbf{N}\right) = -\frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}\left(3\sin\varphi\cos\varphi,\ 3\sin^2\varphi - 1\right).$$

磁倾角的正弦值为

$$\sin\beta = -\frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{N}}{\left|\mathbf{B}\right|} = \frac{1}{\left|\mathbf{B}\right|}\frac{\mu_0 m}{2\pi R^3}\sin\varphi.$$

经过繁琐的计算可得

$$\tan\beta = \left(\frac{1}{\sin^2\beta} - 1\right)^{-1/2} = 2\tan\varphi.$$

(2) 地球北极对应坐标

$$\mathbf{R}_1 = (0,\ R).$$

法向量为

$$\mathbf{N}_1 = (0,\ 1).$$

赤道对应坐标

$$\mathbf{R}_2 = (R,\ 0).$$

法向量为

$$\mathbf{N}_2 = (1,\ 0).$$

因此，地球北极的磁感应强度为

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi R^3}\left(-\mathbf{m} + 3(\mathbf{m}\cdot\mathbf{N}_1)\mathbf{N}_1\right).$$

其垂直分量为

$$\mathbf{B}_1^{\perp} = (\mathbf{B}_1\cdot\mathbf{N}_1)\mathbf{N}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi R^3}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{N}_1)\mathbf{N}_1 = -\frac{\mu_0 m}{2\pi R^3}(0,\ 1).$$

赤道的磁感应强度为

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi R^3}\left(-\mathbf{m} + 3(\mathbf{m}\cdot\mathbf{N}_2)\mathbf{N}_2\right).$$

其水平分量为

$$\mathbf{B}_2^{\top} = \mathbf{B}_2 - (\mathbf{B}_2\cdot\mathbf{N}_2)\mathbf{N}_2 = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}(0,\ 1).$$

因此 $\mathbf{B}_1^{\perp} = -2\mathbf{B}_2^{\top}$ 。

5.14

(1) 根据安培环路定律可得，平板之间的磁场强度为

$$H = i_0.$$

因此，上半部分与下半部分的磁感应强度分别为

$$\begin{aligned} B_1 &= \mu_{r1}\mu_0 H = \mu_{r1}\mu_0 i_0, \\ B_2 &= \mu_{r2}\mu_0 H = \mu_{r2}\mu_0 i_0. \end{aligned}$$

(2) 上半部分与下半部分的磁化强度分别为

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{B_1}{\mu_0} - H = (\mu_{r1} - 1)i_0, \\ M_2 &= \frac{B_2}{\mu_0} - H = (\mu_{r2} - 1)i_0. \end{aligned}$$

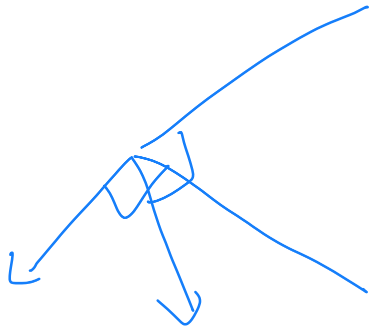
因此，上表面、交界面与下表面的磁化电流面密度分别为

$$\begin{aligned} i_{m1} &= 0 - M_1 = -(\mu_{r1} - 1)i_0, \\ i_{m2} &= M_1 - M_2 = (\mu_{r1} - \mu_{r2})i_0, \\ i_{m3} &= M_2 - 0 = (\mu_{r2} - 1)i_0. \end{aligned}$$

5.15

很显然，磁场强度方向是竖直向上的，记为

$$\mathbf{H} = \big(0,\ H(x,y,z),\ 0\big)\,.$$



因此，磁场强度的旋度为

$$\text{curl}\ \mathbf{H} = \big(-\partial_z H,\ 0,\ \partial_x H\big)\,.$$

而电流密度分布为

$$\mathbf{J} = \begin{cases} (0,\ 0,\ j), & -d/2 < x < d/2; \\ (0,\ 0,\ -j), & 3d/2 < x < 5d/2; \\ 0, & \text{otherwise}\,. \end{cases}$$

根据 curl $\mathbf{H} = \mathbf{J}$ 可得

$$\partial_z H \equiv 0,$$

$$\partial_x H = \begin{cases} j, & -d/2 < x < d/2; \\ -j, & 3d/2 < x < 5d/2; \\ 0, & \text{otherwise}\,. \end{cases}$$

根据边界条件 $H\big|_{x\le -d/2} \equiv 0, H\big|_{x\ge -5d/2} \equiv 0$ 可得

$$H(x,y,z) = \begin{cases} jx + jd/2, & -d/2 < x < d/2; \\ jd, & d/2 < x < 3d/2; \\ 5jd/2 - jx, & 3d/2 < x < 5d/2; \\ 0, & \text{otherwise}\,. \end{cases}$$

磁感应强度分布为

$$B(x,y,z) = \mu_r(x,y,z)\mu_0 H(x,y,z) = \begin{cases} \mu_{r1}\mu_0(jx + jd/2), & -d/2 < x < d/2; \\ \mu_0 jd, & d/2 < x < 3d/2; \\ \mu_{r2}\mu_0(5jd/2 - jx), & 3d/2 < x < 5d/2; \\ 0, & \text{otherwise}\,. \end{cases}$$

5.16

很显然，磁场强度方向是垂直于纸面的，记为

$$\mathbf{H} = \big(0,\ 0,\ H(x,y,z)\big)\,.$$

因此，磁场强度的旋度为

$$\text{curl}\ \mathbf{H} = \Big(\partial_y H, -\partial_x H,\ 0\Big)\,.$$

而电流密度分布为

$$\mathbf{J} = \begin{cases} (0,\ j,\ 0), & -b/2 < x < b/2; \\ 0, & \text{otherwise}\,. \end{cases}$$

根据 curl $\mathbf{H} = \mathbf{J}$ 可得

$$\partial_y H \equiv 0,$$
$$\partial_x H = \begin{cases} -j, -b/2 < x < b/2; \\ 0, \ \text{otherwise}\,. \end{cases}$$

根据边界条件 $H\big|_{x=0} \equiv 0$ 可得

$$H(x,y,z) = \begin{cases} jb/2, & x \le -b/2; \\ -jx, & -b/2 < x < b/2; \\ -jb/2, & x \ge b/2. \end{cases}$$

磁感应强度分布为

$$B(x,y,z) = \mu_r(x,y,z)\mu_0 H(x,y,z) = \begin{cases} \mu_{r1}\mu_0 jb/2, & x \le -b/2; \\ -\mu_0 jx, & -b/2 < x < b/2; \\ -\mu_{r2}\mu_0 jb/2, & x \ge b/2. \end{cases}$$

5.17

记气隙的长度为 $l_0 = 0.1\ \text{m}$ ，铁芯的长度为 l 。因此，总磁阻为

$$R_m = \frac{l_0}{\mu_0 A} + \frac{l}{\mu_r \mu_0 A},$$

其中 $A = 1\ \text{m} \times 2\ \text{m} = 2\ \text{m}^2$ 是铁芯的横截面积， μ_r 是铁芯的相对磁导率。因为我们假设 μ_r 很大，所以可以进行近似

$$R_m \approx \frac{l_0}{\mu_0 A}\,.$$

N 匝通有电流 I 的铜线圈，其磁动势为

$$\mathscr{E}_m = NI\,.$$

因此，气隙的磁通量为

$$\Phi = \frac{\mathscr{E}_m}{R_m} = \frac{\mu_0 ANI}{l_0}\,.$$

气隙的磁感应强度为

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{\mu_0 NI}{l_0}.$$

因此

$$NI = \frac{Bl_0}{\mu_0} = \frac{1 \times 0.1}{4\pi \times 10^{-7}} = 8 \times 10^4 \text{ A}.$$

每一匝铜线圈的长度为

$$L = 2(1+2) = 6 \text{ m}.$$

铜线圈的总长度为 NL 。假设它的横截面积为 S ，那么

$$\frac{I}{S} \le 1{,}000 \text{ A} \cdot \text{cm}^{-2} = 10^7 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}.$$

铜线圈的质量为

$$\rho LNS \ge \frac{\rho LNI}{10^7} = \frac{8 \times 10^3 \times 6 \times 8 \times 10^4}{10^7} = 384 \text{ kg}.$$

铜线圈的电阻为

$$R = \frac{rLN}{S},$$

其中 r 是电阻率。因此，消耗的功率为

$$Q = I^2 R = \frac{rLNI^2}{S} = rL(NI)\frac{I}{S} = 2 \times 10^{-8} \times 6 \times 8 \times 10^4 \times 10^7 = 9.6 \times 10^4 \text{ W}.$$

磁极之间的引力为

$$F = \frac{B^2 A}{2\mu_0} = \frac{1^2 \times 2}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}} = 8.0 \times 10^5 \text{ N}.$$

5.18

磁动势为

$$\mathscr{E}_m = NI.$$

磁阻为

$$R_m = \frac{4l-d}{\mu A} + \frac{d}{\mu_0 A}.$$

磁通量为

$$\Phi = \frac{\mathscr{E}_m}{R_m} = \frac{NI}{\frac{4l-d}{\mu A} + \frac{d}{\mu_0 A}}.$$

磁感应强度为

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{NI}{\frac{4l-d}{\mu} + \frac{d}{\mu_0}} = \frac{NI\mu_0\mu}{4\mu_0 l + (\mu-\mu_0)d}.$$

5.19

只需将 5.18 题 $4l$ 替换为 $\pi\left(R_1+R_2\right)$ 即可。代入数值可得

$$B_1 = \frac{NI\mu_0\mu}{\pi\mu_0\left(R_1+R_2\right)+\left(\mu-\mu_0\right)d_1} = \frac{1{,}500\times4\times1{,}200\times4\pi\times10^{-7}}{\pi\times(0.10+0.12)+(1{,}200-1)\times0.01} = 0.71\ \text{T},$$
$$B_2 = \frac{NI\mu_0\mu}{\pi\mu_0\left(R_1+R_2\right)+\left(\mu-\mu_0\right)d_2} = \frac{1{,}500\times4\times1{,}200\times4\pi\times10^{-7}}{\pi\times(0.10+0.12)+(1{,}200-1)\times0.02} = 0.37\ \text{T}.$$

5.20

电流强度是多少?

5.21

磁阻为

$$R_m = \frac{2l+\pi(R+a/2)}{\mu_r\mu_0 a^2} + \frac{x+d+a}{\mu_0 a^2}.$$

磁动势为

$$\mathscr{E}_m = 2NI.$$

磁感应强度为

$$B = \frac{\mathscr{E}_m}{a^2 R_m} = \frac{2\mu_0 N I}{\frac{2l+\pi(R+a/2)}{\mu_r} + x + d + a} = \frac{2\times 4\pi\times 10^{-7}\times 200\times 2}{\frac{2\times 0.1+\pi(0.05+0.025)}{200} + 0.05 + 0.1 + 0.05} = 5.0\times 10^{-3}\ \mathrm{T}\,.$$

吸力为

$$F = 2a^2\frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{a^2 B^2}{\mu_0} = \frac{0.05^2\times(5.0\times 10^{-3})^2}{4\pi\times 10^{-7}} = 0.05\ \mathrm{N}\,.$$

5.22

超导体内部的磁感应强度为零「如果不是，那么可以在超导体内部找到一个环路，其磁通量不为零」，因此，根据边界条件 $\mathbf{B}_1^{\perp} = \mathbf{B}_2^{\perp}$ 「两侧磁感应强度垂直分量相同」，可以得出外表面磁感应强度垂直分量为零，因此一定平行于超导体表面。

5.23

$$H_c = H_0\left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right).$$

代入数据可得 $H_c = 4.79\times 10^4\ \mathrm{A\cdot m^{-1}}$ 。而导线磁场强度最大值为

$$H = \frac{I}{2\pi R}\,.$$

因此

$$I \le 2\pi R H_c = 300\ \mathrm{A}\,.$$

第 6 章 电磁感应与磁场的能量

6.1

在左边的区域，导轨接入的长度为

$$L = 2vt\tan\alpha\,.$$

电动势为

$$\mathscr{E} = BLv = 2Bv^2t\tan\alpha\,.$$

在右边的区域，导轨接入的长度为 l ，因此电动势为 $\mathscr{E}' = Blv$ 。

6.2

感应电动势为

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -NS\frac{dB}{dt},$$

其中 $\Phi = NBS$ 是通过线圈的磁通量。因此线圈电流为

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = -\frac{NS}{R}\frac{dB}{dt}\,.$$

通过的总电量为

$$Q = \int I dt = -\frac{NS}{R}\int_{B_0}^{-B_0} dB = \frac{2NB_0S}{R}\,.$$

线圈处的磁感应强度为

$$B_0 = \frac{QR}{2NS}\,.$$

6.3

(1) 线圈的磁通量为

$$\Phi = \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\int_a^b \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi}\log\frac{b}{a}\sin\omega t\,.$$

感应电动势为

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0\omega I_0 l}{2\pi}\log\frac{b}{a}\cos\omega t\,.$$

(2) 线圈的磁通量为

$$\Phi' = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\int_{a+vt}^{b+vt}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi}\log\frac{b+vt}{a+vt}\sin\omega t\,.$$

感应电动势为

$$\mathscr{E}' = -\frac{d\Phi'}{dt} = \frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi}\left(-\omega\cos\omega t\log\frac{b+vt}{a+vt} + \frac{(b-a)v}{(a+vt)(b+vt)}\sin\omega t\right).$$

(3) 线圈电流为

$$I' = \frac{\mathscr{E}'}{R}\,.$$

需要施加的力为

$$F = \frac{\mu_0 I I' l}{2\pi}\left(\frac{1}{a+vt} - \frac{1}{b+vt}\right) = \frac{\mu_0 I_0 \mathscr{E}' l}{2\pi R}\frac{b-a}{(a+vt)(b+vt)}\sin\omega t,$$

其中 $\mathscr{E}'$ 的取值如 (2) 所示。

6.4

圆线圈的参数方程为

$$\mathbf{r}(t) = R\sin t\,\mathbf{i} + R\cos t\,\mathbf{j},$$

其中 $\mathbf{i},\mathbf{j}$ 是 x,y 方向的单位向量。而磁体产生的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(-\frac{\mathbf{m}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}\right),$$

其中 $\mathbf{m} = \mu\mathbf{j}$ 是磁铁的磁矩， $r = |\mathbf{r}|$ 。因此，感应电动势为

$$\begin{aligned}
\mathscr{E} &= \int_0^{\pi/2}\big(\mathbf{v}(t)\times\mathbf{B}(t)\big)\cdot\mathbf{r}'(t)dt \\
&= \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\omega\mathbf{j}\times\mathbf{r}(t)\times\left(-\frac{\mathbf{j}}{R^3} + \frac{3\left(\mathbf{j}\cdot\mathbf{r}(t)\right)\mathbf{r}(t)}{R^5}\right)\right)\cdot\mathbf{r}'(t)dt \\
&= \frac{\mu_0\mu\omega}{4\pi R^3}\int_0^{\pi/2}\left(\mathbf{j}\times\mathbf{r}(t)\times\left(-\mathbf{j} + \frac{3\left(\mathbf{j}\cdot\mathbf{r}(t)\right)\mathbf{r}(t)}{R^2}\right)\right)\cdot\mathbf{r}'(t)dt\,.
\end{aligned}$$

利用 $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\mathbf{A}$ 并且 $\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t) = \left|\mathbf{r}(t)\right|^2 \equiv R^2$ 可得

$$\mathbf{j} \times \mathbf{r}(t) \times \left(-\mathbf{j} + \frac{3\left(\mathbf{j}\cdot\mathbf{r}(t)\right)\mathbf{r}(t)}{R^2} \right) = \left(-1 + \frac{3\left(\mathbf{j}\cdot\mathbf{r}(t)\right)^2}{R^2} \right)\mathbf{r}(t) - \left(2\mathbf{j}\cdot\mathbf{r}(t)\right)\mathbf{j}$$
$$= \left(-1 + 3\cos^2 t\right)\mathbf{r}(t) - 2R\cos t\,\mathbf{j}$$
$$= R\left(-1 + 3\cos^2 t\right)\sin t\,\mathbf{i} - 3R\sin^2 t\cos t\,\mathbf{j}\,.$$

因此

$$\begin{aligned}
\mathscr{E} &= \frac{\mu_0\mu\omega}{4\pi R^3}\int_0^{\pi/2} \left(R\left(-1+3\cos^2 t\right)\sin t\,\mathbf{i} - 3R\sin^2 t\cos t\,\mathbf{j}\right)\cdot\left(R\cos t\,\mathbf{i} - R\sin t\,\mathbf{j}\right)dt \\
&= \frac{\mu_0\mu\omega}{4\pi R}\int_0^{\pi/2} \left(\left(-1+3\cos^2 t\right)\sin t\cos t + 3\sin^3 t\cos t\right)dt \\
&= \frac{\mu_0\mu\omega}{4\pi R}\int_0^{\pi/2} \sin 2t\,dt = \frac{\mu_0\mu\omega}{4\pi R}\,.
\end{aligned}$$

6.5

(1) $\mathscr{E} = Bbv = 0.62\times10^{-4}\times2.5\times(60/3.6) = 2.6\times10^{-3}\ \mathrm{V}\,.$
(2) $E = \mathscr{E}/b = Bv = 0.62\times10^{-4}\times(60/3.6) = 1.0\times10^{-3}\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}\,.$
(3) $\sigma = \epsilon_0 E = 8.85\times10^{-12}\times1.0\times10^{-3} = 9.1\times10^{-15}\ \mathrm{C\cdot m^{-2}}\,.$

6.6

线圈的磁通量为

$$\Phi = \frac{\mu_0 I(d-vt)}{2\pi}\int_{L_0}^{L_0+L}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I(d-vt)}{2\pi}\log\frac{L_0+L}{L_0}\,.$$

感应电动势为

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi}\log\frac{L_0+L}{L_0}\,.$$

6.7

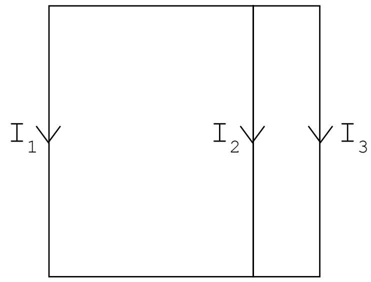
线圈的磁通量为

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{b}{a}\int_{d+vt}^{d+a+vt}\frac{(x-d-vt)dx}{x} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi a}\left(a - (d+vt)\log\frac{d+a+vt}{d+vt}\right)\,.$$

感应电动势为

$$\mathscr{E} = -\left.\frac{d\Phi}{dt}\right|_{t=0} = \frac{\mu_0 I b v}{2\pi a}\left(\frac{a}{d+a} - \log\frac{d+a}{d}\right)\,.$$

6.8



记 $R=\rho a/S$ 。如图所示，根据法拉第电磁感应定律可得

$$\frac{5}{2}RI_1-RI_2=\frac{3}{4}a^2\frac{dB}{dt},$$
$$RI_2-\frac{3}{2}RI_3=\frac{1}{4}a^2\frac{dB}{dt}.$$

根据电荷守恒定律可得

$$I_1+I_2+I_3=0.$$

因此

$$I_1=\frac{17a^2}{62R}\frac{dB}{dt},$$
$$I_2=-\frac{2a^2}{31R}\frac{dB}{dt},$$
$$I_3=-\frac{13a^2}{62R}\frac{dB}{dt}.$$

横杆的加速度为

$$\frac{dv}{dt}=\frac{I_2aB}{m}=-\frac{2a^3}{31mR}\frac{BdB}{dt}.$$

因此，横杆最终的速度为

$$v=-\frac{2a^3}{31mR}\int_{B_0}^{0}BdB=\frac{a^3B_0^2}{31mR}=\frac{a^2B_0^2S}{31m\rho}.$$

6.9

(1) 收尾速度对应磁力与重力垂直，因此

$$\frac{B^2l^2v_T}{R}=mg,$$

$$v_T=\frac{mgR}{B^2l^2}.$$

(2) 因为平行于平面分量的磁场不会给予导线作用力，而垂直于平面分量的磁场为 $B\sin\theta$ ，因此只需将 (1) 题的 B 替换为 $B\sin\theta$ 即可，

$$v_T'=\frac{mgR}{B^2l^2\sin^2\theta}.$$

6.10

(1) 当大线圈通上电流 I 时，小线圈处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2b}.$$

小线圈的磁通量为

$$\Phi = \pi a^2 B \cos\omega t = \frac{\pi a^2 \mu_0 I}{2b} \cos\omega t .$$

互感系数为

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\pi a^2 \mu_0}{2b} \cos\omega t .$$

(2) 感应电动势为

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\pi a^2 \mu_0 I}{2b} \omega \sin\omega t .$$

感应电流为

$$I' = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{\pi a^2 \mu_0 I}{2bR} \omega \sin\omega t .$$

(3) 小线圈的磁矩为

$$m = \pi a^2 I' = \frac{\pi^2 a^4 \mu_0 I}{2bR} \omega \sin\omega t .$$

小线圈受到磁力的力矩为

$$\Gamma = mB \sin\omega t = \frac{\pi^2 a^4 \mu_0^2 I^2}{4b^2 R} \omega \sin^2\omega t .$$

为了保持平衡，小线圈所需的外力矩为

$$-\Gamma = -\frac{\pi^2 a^4 \mu_0^2 I^2}{4b^2 R} \omega \sin^2\omega t .$$

(4) 大线圈的互感电动势为

$$\mathscr{E}' = M \frac{dI'}{dt} = \frac{\pi^2 a^4 \mu_0^2 I}{4b^2 R} \omega^2 \cos^2\omega t .$$

6.11

线圈的磁通量为

$$\Phi = \pi a^2 NB \sin \omega t\,.$$

感应电动势为

$$\mathscr{E} = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right| = \pi a^2 NB\omega \cos \omega t = V_0 \cos \omega t\,.$$

如果你已经学习了第 7 章的知识，那么就可以阅读以下的步骤了。

系统的阻抗与阻抗幅角为

$$\begin{aligned} Z &= \left(R^2 + \omega^2 L^2\right)^{1/2}, \\ \theta &= \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right). \end{aligned}$$

因此，电流为

$$I = \frac{V_0}{Z}\cos(\omega t - \theta) = \frac{\pi a^2 NB\omega}{\left(R^2 + \omega^2 L^2\right)^{1/2}}\cos(\omega t - \theta)\,.$$

线圈的磁矩为

$$m = \pi a^2 NI = \frac{\pi^2 a^4 N^2 B\omega}{\left(R^2 + \omega^2 L^2\right)^{1/2}}\cos(\omega t - \theta)\,.$$

所需的外力矩为

$$\Gamma = mB\cos\omega t = \frac{\pi^2 a^4 N^2 B^2\omega}{\left(R^2 + \omega^2 L^2\right)^{1/2}}\cos(\omega t - \theta)\cos\omega t = \frac{\pi^2 a^4 N^2 B^2 \omega}{2\left(R^2 + \omega^2 L^2\right)^{1/2}}\left(\cos\theta + \cos(2\omega t - \theta)\right).$$

因此，外力矩在一个周期内的平均值不为零。

6.12

飞行的速度是多少?

6.13

数据有一定问题。一开始的磁感应强度为

$$B=\frac{2\pi m_e}{eT}=\frac{2\pi\times 9.11\times 10^{-31}}{1.60\times 10^{-19}\times 1/60}=2.15\times 10^{-9}\ \mathrm{T}?$$

6.14

连接 Oa, Oc ，因为涡旋电场与半径方向垂直，所以 V_{ac} 即为 ΔOac 区域产生的感应电动势。ΔOac 区域的磁通量为

$$\Phi_{\Delta Oac}=B\cdot \mathrm{Area}(\Delta Oac)=\frac{\sqrt{3}}{4}BR^2.$$

感应电动势为

$$\mathscr{E}_{ac}=V_{ac}=-\frac{d\Phi_{\Delta Oac}}{dt}=-\frac{\sqrt{3}}{4}kR^2.$$

连接 Oa, Ob ，因为涡旋电场与半径方向垂直，所以 V_{ab} 即为 ΔOab 区域产生的感应电动势。ΔOab 区域的磁通量为

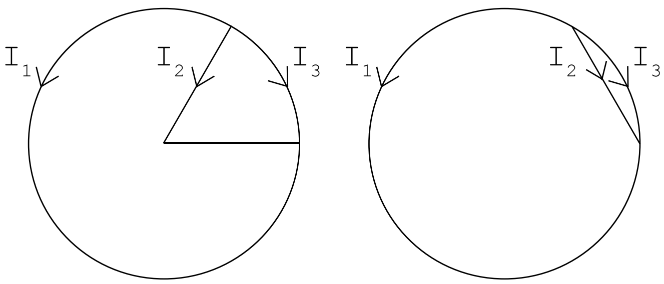
$$\Phi_{\Delta Oab}=B\cdot \mathrm{Area}(\Delta Oab)=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{12}\right)BR^2.$$

感应电动势为

$$\mathscr{E}_{ab}=V_{ab}=-\frac{d\Phi_{\Delta Oab}}{dt}=-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{12}\right)kR^2.$$

6.15

(1) 如图所示，根据法拉第电磁感应定律可得



$$\frac{5}{6}rI_1-\frac{1}{6}rI_3=\pi a^2 k,$$
$$RI_2-\frac{1}{6}rI_3=\frac{1}{6}\pi a^2 k.$$

根据电荷守恒定律可得

$$I_1+I_2+I_3=0.$$

因此

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\pi a^2 k}{r}, \\
I_2 &= 0, \\
I_3 &= -\frac{\pi a^2 k}{r}.
\end{aligned}
$$

伏特表的读数为 $I_2 R = 0$ 。

(2) 如图所示，根据法拉第电磁感应定律可得

$$
\begin{aligned}
\frac{5}{6} r I_1 - \frac{1}{6} r I_3 &= \pi a^2 k, \\
R I_2 - \frac{1}{6} r I_3 &= \left(\frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) a^2 k.
\end{aligned}
$$

根据电荷守恒定律可得

$$
I_1 + I_2 + I_3 = 0.
$$

因此

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\sqrt{3} + 6\pi}{6} \frac{a^2 k}{r}, \\
I_2 &= -\sqrt{3} \frac{a^2 k}{r}, \\
I_3 &= \frac{5\sqrt{3} - 6\pi}{6} \frac{a^2 k}{r}.
\end{aligned}
$$

伏特表的读数为 $I_2 R = -\frac{\sqrt{3}}{9} a^2 k$ 。

6.16

(1) 当螺线管通上电流 I 时，根据安培环路定律，螺线管内部的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}.$$

螺线管的磁通量为

$$\Phi = N \int_R^{R+2a} Bh\,dr = \frac{\mu_0 N^2 I h}{2\pi} \log \frac{R+2a}{R}.$$

自感系数为

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \log \frac{R+2a}{R}.$$

(2) 当直导线通上电流 I' 时，根据安培环路定律，螺线管内部的磁感应强度为

$$B' = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r}.$$

螺线管的磁通量为

$$\Phi' = \int_R^{R+2a} B'h\,dr = \frac{\mu_0 N I' h}{2\pi} \log \frac{R+2a}{R}.$$

互感系数为

$$M = \frac{\Phi'}{I'} = \frac{\mu_0 N h}{2\pi} \log \frac{R+2a}{R}.$$

6.17

因为回路电阻为零，所以通过回路的磁通量保持不变，因此回路电流 I 满足

$$Blx + LI \equiv 0.$$

根据牛顿第二定律可得

$$F + IlB = m\ddot{x}.$$

因此

$$m\ddot{x} + \frac{B^2 l^2}{L} x - F = 0.$$

令

$$y = x - \frac{FL}{B^2l^2}.$$

因此

$$\ddot{y} + \frac{B^2l^2}{mL}y = 0.$$

根据边界条件

$$y(0) = -\frac{FL}{B^2l^2},$$
$$y'(0) = 0$$

可得

$$y = -\frac{FL}{B^2l^2}\cos\omega t.$$

其中 $\omega = Bl/(mL)^{1/2}$ 。因此

$$x = y + \frac{FL}{B^2l^2} = \frac{FL}{B^2l^2}(1 - \cos\omega t).$$

外力做功转化为磁能与导体棒的动能。

6.18

(1) 当下落距离为 x 时，感应电动势为

$$\mathscr{E} = Ba\dot{x}.$$

线圈受到的磁力为

$$F = -Ba\frac{\mathscr{E}}{R} = -\frac{B^2a^2}{R}\dot{x}.$$

根据牛顿第二定律可得

$$m\ddot{x} = mg - \frac{B^2a^2}{R}\dot{x}.$$

根据边界条件 $x(0) = x'(0) = 0$ 可得

$$x = \frac{mgR}{B^2a^2}\left(t - \frac{mR}{B^2a^2}\left(1 - e^{-\frac{B^2a^2t}{mR}}\right)\right).$$

速度为

$$\dot{x} = \frac{mgR}{B^2a^2}\left(1 - e^{-\frac{B^2a^2t}{mR}}\right).$$

电流为

$$I = \frac{Ba\dot{x}}{R} = \frac{mg}{Ba}\left(1 - e^{-\frac{B^2a^2t}{mR}}\right).$$

(2) 只需将 6.17 题的 l 替换为 a ， F 替换为 mg 即可。因此，下落的距离为

$$x = \frac{mgL}{B^2a^2}(1 - \cos\omega t).$$

其中 $\omega = Ba/(mL)^{1/2}$ 。速度为

$$\dot{x} = \frac{mgL}{B^2a^2}\omega\sin\omega t = \frac{g}{\omega}\sin\omega t.$$

电流为

$$I = -\frac{Bax}{L} = -\frac{mg}{Ba}(1 - \cos\omega t).$$

6.19

$$\mathscr{E} = \int_0^L \frac{\mu_0 I}{2\pi(b+x)}\omega x\,dx = \frac{\mu_0\omega I}{2\pi}\left(L + b\log\frac{b}{b+L}\right).$$

6.20

金属棒左边、右边都是无穷电阻网络，假设它们的电阻为 r ，因此

$$\frac{rR}{r+R} + 2R = r,$$

$$r = \left(\sqrt{3}+1\right)R.$$

因此总电阻为

$$r' = \frac{1}{2}r + R = \frac{\sqrt{3}+3}{2}R.$$

金属棒的电流为

$$I = \frac{Bav}{r'} = \frac{2Bav}{\left(\sqrt{3}+3\right)R}.$$

小车受力为

$$F = IBa = \frac{2B^2a^2v}{\left(\sqrt{3}+3\right)R} = mg\sin\theta.$$

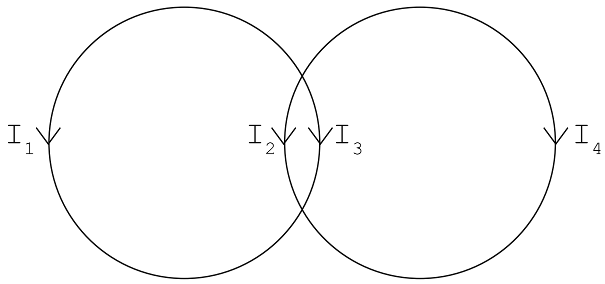
因此

$$\theta = \arcsin\frac{2B^2a^2v}{\left(\sqrt{3}+3\right)mgR}.$$

6.21

如图所示，根据法拉第电磁感应定律可得

$$\begin{aligned}
&\frac{5}{6}rI_1 - \frac{1}{6}rI_3 = \pi R^2\frac{dB}{dt},\\
&\frac{1}{6}rI_2 - \frac{5}{6}rI_4 = \pi R^2\frac{dB}{dt},\\
&\frac{1}{6}rI_2 - \frac{1}{6}rI_3 = 2\pi R^2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\frac{dB}{dt}.
\end{aligned}$$



根据电荷守恒定律可得

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0.$$

因此

$$\begin{aligned}
I_1 = -I_4 &= \frac{dB}{dt}\cdot\frac{R^2}{r}\cdot\frac{3\sqrt{3}+10\pi}{10},\\
I_2 = -I_3 &= \frac{dB}{dt}\cdot\frac{R^2}{r}\cdot\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

两个环的加速度分别为

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{\left(I_1+I_3\right)RB}{m} = \frac{BdB}{dt}\cdot\frac{R^3}{mr}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{5},\\
a_2 &= \frac{\left(I_2+I_4\right)RB}{m} = -\frac{BdB}{dt}\cdot\frac{R^3}{mr}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{5}.
\end{aligned}$$

因此，两个环最终的速度分别为 (负号表示速度方向向左)

$$\begin{aligned}
v_1 &= \int a_1dt = \int_{B_0}^{0} BdB\cdot\frac{R^3}{mr}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{5} = -\frac{R^3B_0^2}{mr}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{10},\\
v_2 &= \int a_2dt = -\int_{B_0}^{0} BdB\cdot\frac{R^3}{mr}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{5} = \frac{R^3B_0^2}{mr}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{10}.
\end{aligned}$$

6.22

(1) 距离第一根导线 r 处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}\,.$$

因此，单位长度的磁通量为

$$\Phi = \int_a^{d-a} B\,dr = \frac{\mu_0 I}{\pi}\log\frac{d-a}{a}\,.$$

单位长度的自感为

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{\pi}\log\frac{d-a}{a}\,.$$

(2) 磁场的做功引起磁能的变化，这一取值为

$$\Delta W = \frac{1}{2}L'I^2 - \frac{1}{2}LI^2 = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\log\left(\frac{d'-a}{a} - \log\frac{d-a}{a}\right) \approx \frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\log\frac{d'}{d}\,.$$

6.23

当长直导线通上电流 I 时，小回路的磁通量约为

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}S\,.$$

因此，互感系数为

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 S}{2\pi d}\,.$$

6.24

A, B, C 侧的磁阻分别为

$$\begin{aligned}
R_m^1 &= \frac{0.2\times 2}{\mu_r\mu_0\times 0.002} + \frac{0.1}{\mu_r\mu_0\times 0.005} = 1.75\times 10^4,\\
R_m^2 &= \frac{0.1}{\mu_r\mu_0\times 0.001} = 7.96\times 10^3,\\
R_m^3 &= \frac{0.2\times 2}{\mu_r\mu_0\times 0.002} + \frac{0.1}{\mu_r\mu_0\times 0.0005} = 3.18\times 10^4\,.
\end{aligned}$$

令线圈 A 通上电流 I ，那么经过线圈 B, C 的磁通量分别为

$$\Phi_1 = \frac{500I}{R_1 + \frac{R_2R_3}{R_2+R_3}} \frac{R_3}{R_2+R_3},$$

$$\Phi_2 = \frac{500I}{R_1 + \frac{R_2R_3}{R_2+R_3}} \frac{R_2}{R_2+R_3}.$$

因此， $A, B; A, C$ 之间的互感系数分别为

$$M_1 = \frac{1{,}000\Phi_1}{I} = \frac{1{,}000 \times 500}{R_1 + \frac{R_2R_3}{R_2+R_3}} \frac{R_3}{R_2+R_3} = 16.7 \text{ H},$$

$$M_2 = \frac{500\Phi_2}{I} = \frac{500 \times 500}{R_1 + \frac{R_2R_3}{R_2+R_3}} \frac{R_2}{R_2+R_3} = 2.09 \text{ H}.$$

6.25

(1) 线圈产生的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}.$$

磁通量为

$$\Phi = \frac{1}{4}\pi D^2 NB = \frac{\pi\mu_0 D^2 N^2 I}{l}.$$

自感系数为

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\pi\mu_0 D^2 N^2}{4l} = \frac{\pi \times 4\pi \times 10^{-7} \times 0.01^2 \times 1{,}000^2}{4 \times 0.1} = 9.87 \times 10^{-4} \text{ H}.$$

电阻为

$$R = \pi DN\rho = \pi \times 0.01 \times 1{,}000 \times 247/1{,}000 = 7.76 \ \Omega.$$

(2) $I = \frac{V}{R} = \frac{2}{7.76} = 0.258 \text{ A}$.

(3) $\tau = \frac{L}{R} = \frac{9.87 \times 10^{-4}}{7.76} = 1.27 \times 10^{-4} \text{ s}$.

(4) $t = \tau \log 2 = 1.27 \times 10^{-4} \times \log 2 = 8.82 \times 10^{-5} \text{ s}$.

(5) $W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2} \times 9.87 \times 10^{-4} \times 0.258^2 = 3.28 \times 10^{-5} \text{ J}$.

$w = \frac{W}{\frac{1}{4}\pi D^2 l} = \frac{3.28 \times 10^{-5}}{\frac{1}{4}\pi \times 0.01^2 \times 0.1} = 4.18 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$.

6.26

(1) 根据安培环路定理， $a < r < b$ 处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

磁能密度为

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}.$$

单位长度的磁能为

$$W = \int_a^b 2\pi r w dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \log\frac{b}{a} = \frac{1}{2} L I^2.$$

单位长度的自感系数为

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \log\frac{b}{a}.$$

(2) $\Delta W = W\Big|_{2b} - W\Big|_b = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \log\frac{2b}{a} - \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \log\frac{b}{a} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \log 2.$

(3) 外侧圆柱面在半径为 R 时，受到“向外推”的压强为

$$P = w\Big|_{r=R} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2}.$$

单位长度磁场做功为

$$W' = \int_{V_1}^{V_2} P dV = \int_b^{2b} \frac{\mu_0 I^2}{8\pi R^2} 2\pi R dR = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \log 2.$$

外侧圆柱面在半径为 R 时，磁通量为

$$\Phi = \int_a^R \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \log\frac{R}{a}.$$

感应电动势为

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\frac{dR}{dt}.$$

电池提供的能量为

$$W'' = \int -\mathscr{E} I dt = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\int_b^{2b}\frac{dR}{R} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\log 2.$$

因此，电池提供的能量，一部分用于磁场“往外推”外侧圆柱面，另一部分用于增加磁场能量。

6.27

(1) 此时两组线圈电流方向相反，产生的磁场刚好抵消，因此磁通量为零，自感系数为零。

(2) 此时两组线圈电流方向相同，相当于 2 倍的线圈匝数。根据 6.16 题，自感系数与线圈匝数的平方成正比，因此自感系数为 $2^2 \times 0.050 = 0.20\ \mathrm{H}$ 。

6.28

根据安培环路定律，螺线管内部的磁感应强度为

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 n I_0 \sin \omega t\,.$$

磁通量为

$$\Phi = SB = \mu_0 n S I_0 \sin \omega t\,.$$

说的就是这本书的作者。因此

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 n S I_0 \omega \cos \omega t\,.$$

6.29

与 3.15 相同。

6.30

假设正方形线圈通上电流 I 时，其自身的磁通量，与相邻正方形的磁通量分别为 Φ_1, Φ_2 。因此

$$L_1 I = \Phi_1,$$
$$L_2 I = 2\left(\Phi_1 + \Phi_2\right).$$

对于 (c) 图，当线圈通上电流 I 时，其磁通量为

$$\Phi = 3\left(\Phi_1 + 2\Phi_2\right).$$

因此，

$$L_3 = \frac{\Phi}{I} = -\frac{3\Phi_1}{I} + \frac{6\left(\Phi_1 + \Phi_2\right)}{I} = 3\left(L_2 - L_1\right).$$

6.31

没看懂

6.32

(1) 令电感上的电流为 I ，因此

$$\mathscr{E} = R_1 I + L\frac{dI}{dt}.$$

令

$$i = I - \frac{\mathscr{E}}{R_1},$$

可得

$$\frac{di}{dt} + \frac{R_1}{L}i = 0,$$

$$i = Ae^{-\frac{R_1 t}{L}}.$$

因此

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} + Ae^{-\frac{R_1 t}{L}},$$

其中 A 是常数。因为在电路接通的瞬间，电感可以视为断路，因此 $I(0) = 0$ ，这表明

$$A = -\frac{\mathscr{E}}{R},$$

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right).$$

电感上的电压为

$$V = -L\frac{dI}{dt} = -\mathscr{E}e^{-\frac{Rt}{L}}.$$

(2) 令电感上的电流为 J ，因此

$$\left(R_1 + R_2\right)J + L\frac{dJ}{dt} = 0,$$

$$J = Be^{-\frac{\left(R_1 + R_2\right)t}{L}}.$$

利用边界条件 $J(0)=I_0$ 可得

$$J=I_0 e^{-\frac{(R_1+R_2)t}{L}}.$$

电感上的电压为

$$W=-L\frac{dJ}{dt}=I_0\left(R_1+R_2\right)e^{-\frac{(R_1+R_2)t}{L}}.$$

6.33

(1) 假设通过电感、电阻 R_2 的电流分别为 I_1, I_2 。因此

$$\begin{aligned} L\dot{I}_1(t)&=R_2 I_2(t),\\ V&=R_1\left(I_1(t)+I_2(t)\right)+R_2 I_2(t). \end{aligned}$$

将第 2 个等式微分可得

$$R_1\dot{I}_1(t)+\left(R_1+R_2\right)\dot{I}_2(t)=0.$$

利用第 1 个等式可得

$$\frac{R_1R_2}{L}I_2(t)+\left(R_1+R_2\right)\dot{I}_2(t)=0.$$

利用边界条件 $I_2(0)=\dfrac{V}{R_1+R_2}$ 可得

$$I_2(t)=\frac{V}{R_1+R_2}e^{-\frac{R_1R_2t}{(R_1+R_2)L}}.$$

因此， R_2 消耗的热量为

$$Q=\int_0^\infty I_2(t)^2R_2dt=\frac{V^2L}{2R_1\left(R_1+R_2\right)}=220\text{ J}.$$

(2) 断开开关后，电流随着 $e^{-\frac{R_2t}{L}}$ 指数衰减，因此，回路电流为

$$I(t)=\frac{V}{R_1}e^{-\frac{R_2t}{L}}.$$

因此， R_2 消耗的热量为

$$Q'=\int_0^\infty I(t)^2R_2dt=\frac{V^2L}{2R_1^2}=2{,}420\text{ J}.$$

6.34

(1) 超导线圈的磁通量不会发生改变，因此

$$LI + \pi R^2 B = 0,$$

$$I = -\frac{\pi R^2 B}{L}.$$

(2) 当超导线圈旋转角度为 θ 时，超导线圈通过的电流为

$$J = -\frac{\pi R^2 B \sin\theta}{L}.$$

因此，超导线圈的磁矩为

$$m = \pi R^2 J = -\frac{\pi^2 R^4 B \sin\theta}{L}.$$

其受到的力矩为

$$\Gamma = mB\cos\theta = -\frac{\pi^2 R^4 B^2 \sin\theta\cos\theta}{L}.$$

因此，需要外力矩 $-\Gamma$ 来保持平衡。外力做功为

$$W = \int_0^{\pi/2} (-\Gamma) d\theta = \frac{\pi^2 R^4 B^2}{L}\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{\pi^2 R^4 B^2}{2L}.$$

第 7 章 交流电路与电力输送

7.1

对于直流电，电流对时间的微分为 $\dot{I}(t) = dI/dt = 0$ ，感应电动势 $L dI/dt = 0$ ，因此电阻两端的电势差等于直流电压 $20\ \mathrm{V}$ ，电阻值为

$$R = \frac{V}{I} = \frac{20}{0.5} = 40\ \Omega\,.$$

对于电压为 $V(t) = V_0 e^{j\omega t}$ 的交流电**「注意，在本章节，我们将利用符号 $j = \sqrt{-1}$ 表示虚数单位」**，假设 t 时刻的电流为 $I(t)$ 。因此

$$V(t) = RI(t) + L\dot{I}(t)\,.$$

$I(t)$ 同样以频率 ω 周期振动，它可以被表示为

$$I(t) = Ae^{j\omega t},$$

其中 $A \in \mathbb{C}$ 。因此

$$V_0 e^{j\omega t} = RAe^{j\omega t} + j\omega LAe^{j\omega t}\,.$$

因此

$$A = \frac{V_0}{R + j\omega L}\,.$$

电流的有效值为

$$\frac{\left|A\right|}{\sqrt{2}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\,.$$

因此

$$\frac{20}{\sqrt{40^2 + (2\pi \cdot 50)^2 L^2}} = 0.4,$$

$$L = 0.1\ \mathrm{H}\,.$$

7.2

对于电压为 $V(t)=V_0e^{j\omega t}$ 的交流电，假设 t 时刻电容器的带电量为 $Q(t)$ 。因此

$$V(t)=R\dot{Q}(t)+\frac{1}{C}Q(t)\,.$$

$Q(t)$ 同样以频率 ω 周期振动，它可以被表示为

$$Q(t)=Ae^{j\omega t},$$

其中 $A\in\mathbb{C}$ 。因此

$$V_0e^{j\omega t}=j\omega RAe^{j\omega t}+\frac{A}{C}e^{j\omega t}\,.$$

因此

$$A=\frac{CV_0}{1+j\omega RC}\,.$$

而电阻值为

$$R=\frac{8}{0.07}=114.3\ \Omega\,.$$

电流为

$$\left|\dot{Q}(t)\right|=\omega\left|A\right|=\frac{\omega CV_0}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}\,.$$

因此

$$\frac{(2\pi\times 50)\times C\times 220}{\sqrt{1+(2\pi\times 50)^2\times 114.3^2\times C^2}}=0.07,$$

$$C=10^{-6}=1\ \mu\mathrm{F}\,.$$

7.3

对于电压为 $V(t)=V_0e^{j\omega t}$ 的交流电，假设 t 时刻电容器的带电量为 $Q(t)$ 。因此

$$V(t)=L\ddot{Q}(t)+R\dot{Q}(t)+\frac{1}{C}Q(t)\,.$$

$Q(t)$ 同样以频率 ω 周期振动，它可以被表示为

$$Q(t)=Ae^{j\omega t},$$

其中 $A \in \mathbb{C}$ 。因此

$$V_0 e^{j\omega t} = -\omega^2 L A e^{j\omega t} + j\omega R A e^{j\omega t} + \frac{A}{C} e^{j\omega t}.$$

记

$$X = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

因此

$$A = \frac{V_0}{j\omega X},$$

$$Q(t) = A e^{j\omega t} = \frac{V_0}{j\omega X} e^{j\omega t}.$$

电流为

$$I(t) = \dot{Q}(t) = \frac{V_0}{X} e^{j\omega t}.$$

我们将 X 称为**复阻抗**。**阻抗**定义为复阻抗的范数：

$$Z = \left|X\right| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

幅角为

$$\theta = \arg X = \arctan\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega C R}\right).$$

电阻、电感、电容上的电压峰值分别为

$$\left|RI(t)\right| = \frac{RV_0}{Z} = \frac{RV_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

$$\left|L\ddot{Q}(t)\right| = \frac{\omega L V_0}{Z} = \frac{\omega L V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

$$\left|\frac{1}{C}Q(t)\right| = \frac{V_0}{\omega C Z} = \frac{V_0}{\omega C\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

7.4

(1) 根据 7.3 题的结论，阻抗为

$$Z = \left|X\right| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\,.$$

代入数值可得

$$Z_1 = \sqrt{300^2 + \left(500 \cdot 0.9 - \frac{1}{500 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}\right)^2} = 626\ \Omega,$$
$$Z_2 = \sqrt{300^2 + \left(1{,}000 \cdot 0.9 - \frac{1}{1{,}000 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}\right)^2} = 500\ \Omega\,.$$

(2) 因为电流振幅为 $I_0 = V_0/Z$， V_0 是保持不变的，所以只需分析 Z 随 ω 的变化关系即可，这等价于分析 $f(\omega) = (\omega L - 1/\omega C)^2$ 随 ω 的变化关系。对其求导可得

$$f'(\omega) = 2\left(L + \frac{1}{\omega^2 C}\right)\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

因此，当 $\omega < 1/\sqrt{LC}$ 时， Z 随 ω 递减， I_0 随 ω 递增；当 $\omega > 1/\sqrt{LC}$ 时， Z 随 ω 递增， I_0 随 ω 递减。

代入数值可得，在 ω 从 $1{,}000\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ 下降到 $745\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ 过程中， I_0 增大；在 ω 从 $745\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ 下降到 $500\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ 过程中， I_0 减小。

(3) 幅角为

$$\theta = \arg X = \arctan\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega C R}\right).$$

代入数值可得

$$\theta = \arctan\left(\frac{500 \cdot 0.9}{300} - \frac{1}{500 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 300}\right) = -61.4^\circ\,.$$

电流为

$$I(t) = \frac{V_0}{X} e^{j\omega t} = \frac{V_0}{Z e^{j\theta}} e^{j\omega t} = \frac{V_0}{Z} e^{j(\omega t - \theta)} = \frac{V_0}{Z} e^{j(\omega t + 61.4^\circ)}.$$

因此，电流相位超前电压相位 61.4° 。

(4) 共振对应电流振幅 I_0 最大，根据 (2) 的结论可得，共振频率为

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 745 \ \mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1} .$$

对于幅角为 θ 的 RLC 电路，功率为

$$P(t) = \mathrm{Re}\left(V(t)\right)\mathrm{Re}\left(I(t)\right) = \frac{V_0^2}{Z}\cos\omega t\cos(\omega t - \theta) = \frac{V_0^2}{2Z}\left(\cos\theta + \cos(2\omega t - \theta)\right).$$

「注意 $\mathrm{Re}(z_1 z_2) \neq \mathrm{Re}(z_1)\mathrm{Re}(z_2)$ 」平均功率为

$$\langle P(t)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)dt = \frac{V_0^2}{2Z}\cos\theta .$$

而电压与电流的有效值分别为 $V_0/\sqrt{2}, V_0/\sqrt{2}Z$ ，因此平均功率为电压有效值、电流有效值乘积的 $\cos\theta$ 倍，定义**功率因数**为 $\cos\theta$ 。

因为共振时 $\omega L - 1/\omega C = 0$ ，所以幅角为 $\theta = 0$ ，功率因数为

$$\cos\theta = 1.$$

(5) 因为共振频率的表达式与电阻无关，所以共振频率与 (4) 的结果相等。此时电流有效值为

$$\frac{V_0}{\sqrt{2}R} = 0.354 \ \mathrm{A} .$$

7.5

(1) 幅角为

$$\theta = \arg X = \arctan\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega CR}\right) = -38.9^\circ .$$

功率因数为

$$\cos\theta = 0.779.$$

(2) 阻抗为

$$Z = \left|X\right| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = 51.4 \ \Omega .$$

电压幅值为

$$V_0 = \sqrt{2}\cdot 100 = 141 \ \mathrm{V} .$$

电流幅值为

$$I_0=\frac{V_0}{Z}=2.75\ \mathrm{A}\,.$$

(3) 功率为

$$\langle P\rangle=\frac{V_0^2}{2Z}\cos\theta=152\ \mathrm{W}\,.$$

7.6

(1) 螺线管内部的磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0 NI}{l}\,.$$

磁通量为

$$\Phi=NB\left(\pi a^2\right)=\frac{\pi\mu_0 a^2N^2I}{l}\,.$$

自感系数为

$$L=\frac{\Phi}{I}=\frac{\pi\mu_0 a^2N^2}{l}=\frac{\pi\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 0.1^2\cdot 1{,}000^2}{2}=0.02\ \mathrm{H}\,.$$

(2)

$$B=\frac{\mu_0 NI}{l}=\frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 1{,}000\cdot 2{,}000}{0.2}=1.26\ \mathrm{T}\,.$$

(3)

$$W=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}\cdot 0.02\cdot 2{,}000^2=4\times 10^4\ \mathrm{J}\,.$$

(4)

$$I(t)=\frac{\mathcal{E}}{R}\left(1-e^{-Rt/L}\right)=\frac{20}{0.1}\left(1-e^{-0.1\cdot t/0.02}\right)=200\left(1-e^{-5t}\right).$$

$$\tau=\frac{L}{R}=\frac{0.02}{0.1}=0.2\ \mathrm{s}\,.$$

7.7

这一题是错误的，因为阻抗不能直接相加，正如 $\left|z_1+z_2\right|\neq\left|z_1\right|+\left|z_2\right|$ ；另外无法得知复阻抗的取值，因为相位信息未给出。

7.8

(1) 复阻抗为

$$X = X_R + X_C + \frac{X_R X_C}{X_R + X_C},$$

其中 $X_R = R, X_C = 1/j\omega C$ 。阻抗为

$$Z = \left|X\right|,$$

但是我不想算。

(2)

$$V_2(t) = \frac{X_2}{X_1 + X_2} V(t),$$

其中 $X_1 = X_R + X_C, X_2 = X_R X_C/(X_R + X_C)$ 。因此

$$\frac{X_2}{X_1 + X_2} = \frac{X_R X_C}{(X_R + X_C)^2 + X_R X_C}.$$

当 $V_2(t), V(t)$ 相位相等时， $\operatorname{Im}\left(X_2/(X_1 + X_2)\right) = 0$ ，化简可得

$$\omega = \frac{1}{RC}.$$

(3) 此时

$$X_C = \frac{1}{j\omega C} = -jR,$$

因此

$$X_1 = X_R + X_C = (1-j)R,$$
$$X_2 = \frac{X_R X_C}{X_R + X_C} = \frac{1}{2}(1-j)R.$$

$$\frac{X_2}{X_1 + X_2} = \frac{1}{3}.$$

7.9

(1) 复阻抗为

$$X = X_1 + X_2 = \frac{X_R^1 X_C^1}{X_R^1 + X_C^1} + \frac{X_C^2\left(X_L + X_R^2\right)}{X_C^2 + X_L + X_R^2},$$

其中

$$
\begin{aligned}
&X_R^1 = R_1 = 2.0\ \Omega, \\
&X_R^2 = R_2 = 1.0\ \Omega, \\
&X_C^1 = -jZ_C^1 = -j1.0\ \Omega, \\
&X_C^2 = -jZ_C^2 = -j3.0\ \Omega, \\
&X_L = jZ_L = j2.0\ \Omega\,.
\end{aligned}
$$

因此

$$X = 4.9 + j0.7\ (\Omega)\,.$$

因此幅角 $\arg X > 0$ ，是电感性的。

(2) 代入数值可得

$$\left|\frac{X_1}{X_1 + X_2}\right| V_0 = 39.8\ \mathrm{V}\,.$$

7.10

(1) 复阻抗为

$$X = X_R + X_L + X_C + \frac{X_L X_C}{X_L + X_C},$$

其中 $X_R = R, X_L = j\omega L, X_C = 1/j\omega C$ 。阻抗为

$$Z = \left|X\right|\,.$$

(2) 太难算了，直接放弃，简直脑子有毛病

7.11

(1) 频率为

$$\omega = 314\ \mathrm{Hz}\,.$$

复阻抗为

$$X = X_R + X_L + X_C = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 50e^{-j0.92}\ \Omega\,.$$

将电压表示为复指数形式可得

$$V(t) = 220\sqrt{2}e^{j(314t-70^\circ)} = 220\sqrt{2}e^{j(314t-1.22)}\,.$$

因此电流为

$$I(t)=\frac{V(t)}{X}=6.22e^{j(314t-0.20)}.$$

电流的有效值为

$$\frac{6.22}{\sqrt{2}}=4.40\ \mathrm{A}.$$

(2) 电阻、电感、电容两端的电压为

$$\begin{aligned}V_R(t)&=RI(t)=187e^{j(314t-0.20)},\\V_L(t)&=j\omega LI(t)=248e^{j(314t+1.37)},\\V_C(t)&=\frac{1}{j\omega C}I(t)=495e^{j(314t-1.77)}.\end{aligned}$$

(3) 阻抗幅角为

$$\theta=\arg X=-0.92.$$

因此，功率因数为

$$\cos\theta=0.60.$$

有功功率与无功功率分别为

$$\begin{aligned}P_1&=\frac{1}{2}V_0I_0\cos\theta=\frac{1}{2}\cdot220\sqrt{2}\cdot6.22\cdot0.60=581\ \mathrm{W},\\P_2&=\frac{1}{2}V_0I_0\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot220\sqrt{2}\cdot6.22\cdot\sqrt{1-0.60^2}=774\ \mathrm{W}.\end{aligned}$$

7.12

(1) 假设用户用电电阻为 R ，根据 7.3 题的结论，阻抗为

$$Z=\sqrt{(R+r)^2+\omega^2L^2}.$$

电流为

$$I=\frac{V}{Z}=\frac{V}{\sqrt{(R+r)^2+\omega^2L^2}}.$$

因此

$$\sqrt{(R+r)^2+\omega^2L^2}=\frac{V}{I}=110\ \mathrm{A},$$

$$R = 107.9\ \Omega\,.$$

用户两端的电压为

$$V' = IR = 215.7\ \text{V}\,.$$

(2) 阻抗幅角为

$$\theta = \arctan\left(\frac{\omega L}{R+r}\right).$$

因此，功率 (因为取了有效值) 为

$$P = \frac{V^2}{Z}\cos\theta = \frac{V^2(R+r)}{(R+r)^2+\omega^2L^2} = V^2\left(R+r+\frac{\omega^2L^2}{R+r}\right)^{-1} \le \frac{V^2}{2\omega L} = 1.541\times10^3\ \text{W}\,.$$

(3) 只需将第 (2) 题的 R 修改为 0 即可，因此，功率为

$$P' = \frac{V^2 r}{r^2+\omega^2L^2} = 195.4\ \text{W}\,.$$

7.13

(1) 复阻抗为

$$X = X_R + \frac{X_L X_C}{X_L + X_C} = 8.0 + j6.0\ (\Omega),$$

其中 $X_R = R, X_L = j\omega L, X_C = 1/j\omega C$ 。因此阻抗为 $Z = \left|X\right| = 10\ \Omega$ 。

(2) 电容上的电流为

$$I_C = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{V_0 e^{j\omega t}}{X}\frac{X_L}{X_L+X_C}\right| = 22.0\ \text{A},$$

其中 $V_0 = 220\sqrt{2}\ \text{V}$ 。

(3) 幅角为

$$\theta = \arg X = 0.64.$$

有功功率为

$$P = \frac{V_0^2}{2Z}\cos\theta = 3.9\times10^3\ \text{W}\,.$$

(4) 功率因数为

$$\cos\theta = 0.80.$$

(5) 功率因数为 1 意味着阻抗是实数。假设需要并联的元件复阻抗为 $Y = jA$ ，其中 A 是实数。因此

$$\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} = \frac{1}{X} - j\frac{1}{A}$$

是实数，其中 $X = 8.0 + j6.0\ (\Omega)$ 。可得 $A = -16.7\ (\Omega)$ ，因此并联的元件是电容器，其电容为

$$C = \frac{1}{\omega\left|A\right|} = 1.9 \times 10^{-4}\ \mathrm{F}.$$

7.14

电路的阻抗为

$$Z = \frac{V^2}{P}\cos\varphi_L.$$

复阻抗的倒数为

$$X^{-1} = Z^{-1}e^{-j\varphi_L} = Z^{-1}\cos\varphi_L - jZ^{-1}\sin\varphi_L = \frac{P}{V^2} - j\frac{P}{V^2}\tan\varphi_L.$$

并联电容 C 后，复阻抗的倒数变为

$$(X')^{-1} = X^{-1} + j\omega C = \frac{P}{V^2} + j\left(\omega C - \frac{P}{V^2}\tan\varphi_L\right).$$

因此

$$\tan\varphi = \arg X' = -\arg(X')^{-1} = \tan\varphi_L - \frac{\omega V^2 C}{P}.$$

因此

$$C = \frac{P}{\omega V^2}\left(\tan\varphi_L - \tan\varphi\right).$$

$$(X')^{-1} = \frac{P}{V^2} + j\left(\omega C - \frac{P}{V^2}\tan\varphi_L\right) = \frac{P}{V^2} - j\frac{P}{V^2}\tan\varphi.$$

并联之后的有功功率为

$$P' = \frac{V^2}{\left|X'\right|}\cos\varphi = V^2\left|(X')^{-1}\right|\cos\varphi = P.$$

因此有功功率不会发生改变。

7.15

副线圈电压与匝数成正比，因此

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{V_1}{V_0} N_0 = \frac{5}{220} \times 660 = 15, \\
N_2 &= \frac{V_2}{V_0} N_0 = \frac{6.8}{220} \times 660 = 20, \\
N_3 &= \frac{V_3}{V_0} N_0 = \frac{350}{220} \times 660 = 1{,}050.
\end{aligned}$$

根据能量守恒，可得

$$V_0 I_0 = V_1 I_1 + V_2 I_2 + V_3 I_3,$$

$$I_0 = \frac{V_1}{V_0} I_1 + \frac{V_2}{V_0} I_2 + \frac{V_3}{V_0} I_3 = \frac{5}{220} \times 3 + \frac{6.8}{220} \times 2 + \frac{350}{220} \times 280 \times 10^{-6} = 0.13\ \text{A}\,.$$

7.16

电阻性代表第一臂的复阻抗

$$X = R_1 + j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)$$

的虚部为零，因此

$$\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = 0,$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}\,.$$

7.17

(1) 系统的复阻抗为

$$X = R + R_0 + j\omega\left(L + L_0\right).$$

阻抗幅角为

$$\theta = \arg X = \arctan \frac{\omega\left(L + L_0\right)}{R + R_0}\,.$$

因此，功率 (因为取了有效值) 为

$$P = \frac{\mathscr{E}^2}{\left|X\right|} \cos\theta = \frac{\mathscr{E}^2\left(R + R_0\right)}{\left(R + R_0\right)^2 + \omega^2\left(L + L_0\right)^2}\,.$$

(2) 用户电路的复阻抗为

$$X' = R + j\omega L\,.$$

阻抗幅角为

$$\theta' = \arg X' = \arctan\frac{\omega L}{R}\,.$$

功率为

$$P' = \left(\frac{\mathscr{E}}{\left|X\right|}\right)^2 \left|X'\right| \cos\theta' = \frac{\mathscr{E}^2 R}{\left(R+R_0\right)^2 + \omega^2\left(L+L_0\right)^2}\,.$$

(3) 效率为

$$\eta = \frac{P'}{P} = \frac{R}{R+R_0}\,.$$

7.18

视在功率为

$$P_0 = VI = 220\times 3 = 660\ \mathrm{W}\,.$$

有功功率为

$$P = P_0\cos\varphi = 660\times 0.8 = 528\ \mathrm{W}\,.$$

阻抗为

$$Z = \frac{V}{I} = 73.3\ \Omega\,.$$

7.19

系统的复阻抗为

$$X = r - j\frac{1}{\omega C} = r - j\frac{1}{2\pi f C}\,.$$

品质因数为

$$Q = \left|\frac{\mathrm{Im}(X)}{\mathrm{Re}(X)}\right| = \frac{1}{2\pi f C r} = \frac{1}{2\pi\times 600\times 10^3\times 370\times 10^{-12}\times 15} = 47.8.$$

7.20

给出的信息太少

7.21

假设螺线管通过的电流为

$$I = I_0 \cos \omega t\,.$$

因此，铝环的磁通量可以表示为

$$\Phi = CI = CI_0 \cos \omega t,$$

其中 $C \in \mathbb{R}$ 是常数。因此，铝环的感应电动势为

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega CI_0 \sin \omega t\,.$$

记为复指数形式，

$$V = \omega CI_0 e^{j(\omega t - \pi/2)} = V_0 e^{j(\omega t - \pi/2)},$$

其中 $V_0 = \omega CI_0$ 。将铝环视为 RL 电路，其阻抗为

$$Z = \left(R^2 + \omega^2 L^2\right)^{1/2}.$$

阻抗幅角为

$$\theta = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right).$$

因此，铝环通过的电流为

$$I' = \frac{V}{Z} e^{j(\omega t - \pi/2 - \theta)}.$$

铝环受到的磁力正比于

$$F \propto \mathrm{Re}(I)\mathrm{Re}(I') \propto \cos \omega t \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{2}\cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{2} - \theta\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right).$$

一个周期内的平均值正比于

$$\langle F \rangle \propto \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \propto \sin\theta = \frac{\omega L}{\left(R^2 + \omega^2 L^2\right)^{1/2}} > 0.$$

第 8 章 电磁现象的基本规律与电磁波

8.1

在稳态的时候，空间磁场随时间的变化率为零。因此对于任意曲面 Ω ，

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} = 0,$$

其中 $\partial\Omega$ 是曲面 Ω 的边界。但是对于题目情况，我们可以选取长方形的曲面，使得长方形的一边在电容器极板之间，另一边在电容器极板之外。这样 $\int_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$, 得到了矛盾。

8.2

磁铁之间没有电流通过，并且在稳态的时候，空间电场随时间的变化率为零。因此对于任意曲面 Ω ，

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Omega} \left(\mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{A} = 0,$$

其中 $\partial\Omega$ 是曲面 Ω 的边界。但是对于题目情况，我们可以选取长方形的曲面，使得长方形的一边在磁铁之间，另一边磁铁之外。这样 $\int_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$, 得到了矛盾。

8.3 – 8.4

我也不会

8.5

利用电像法，感应电荷可以等效为距离导体平面为 d ，位于导体平面正下方的电偶极子 $-p$ 。它在距离自身正上方 r 的位置产生的电场强度为

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3}.$$

因此，导体平面上方电偶极子受到的作用力为

$$F = \mathrm{grad}(E(r)p) = \frac{p^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{d}{dr}\bigg|_{r=2d} \frac{1}{r^3} = \frac{3p^2}{32\pi\epsilon_0 d^4}.$$

8.6

(1) 感应电荷等效为距离球心右边 $d' = R^2/d$ ，电荷量为 $q' = -Rq/d$ 。因此球内的电势为

$$V(\rho,\varphi,\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{\left(\rho^2 + d^2 - 2\rho d\cos\varphi\right)^{1/2}} + \frac{q'}{\left(\rho^2 + (d')^2 - 2\rho d'\cos\varphi\right)^{1/2}}\right).$$

电场强度为

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V = -\partial_\rho V\hat{\rho} - \frac{1}{\rho}\partial_\varphi V\hat{\varphi} - \frac{1}{\rho\sin\varphi}\partial_\theta V\hat{\theta},$$

其中 grad 是光滑函数的梯度， $\partial_\rho, \partial_\varphi, \partial_\theta$ 相当于对变量 ρ, φ, θ 计算偏导数， $\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{\theta}$ 是球坐标参数 ρ, φ, θ 增大方向的单位向量。

(2) 对于第 (1) 题，根据高斯定理，球壳的带电量为 $-q$ 。因此，第 (2) 题的情况相当于第 (1) 题的情况与“均匀带电 $Q+q$ 的导体球壳”情况的叠加。而均匀带电 $Q+q$ 的球壳，球内的电场强度为零，电势为 $(Q+q)/4\pi\epsilon_0 R$ ，因此第 (2) 题的电场强度与第 (1) 题相同，电势则需要加上 $(Q+q)/4\pi\epsilon_0 R$ 。

8.7

意义何在?

8.8

利用电像法，感应电荷可以等效为距离导体平面为 b ，位于导体平面正下方，线电荷密度为 $-\lambda$ 的无限长直导线。因此，只需利用 2.5 题的结论即可

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\log\frac{(2b-a)^2}{a^2}} \approx \frac{\pi\epsilon_0}{\log\frac{2b}{a}}.$$

8.9 – 8.10

看不懂想表达什么

8.11

根据 2.22 题的结论，当上半部分、下半部分介电常数分别为 ϵ_1, ϵ_2 时，其空间电场分布，是不存在介质时的 $\dfrac{2\epsilon_0}{\epsilon_1+\epsilon_2}$ 倍。因此，两根细导线之间的电势差是原来的 $\dfrac{2\epsilon_0}{\epsilon_0+\epsilon}$ 倍，电容为原来的 $\dfrac{\epsilon_0+\epsilon}{2\epsilon_0}$ 倍

$$C' = \frac{\epsilon_0+\epsilon}{2\epsilon_0}C.$$

8.12

(1) 导线内部的电场强度可以表示为 $E = E_0 \cos \omega t$ 的形式。因此，传导电流为

$$J = \sigma E = \sigma E_0 \cos \omega t\,.$$

位移电流为

$$J_d = \epsilon_0 \dot{E} = -\,\epsilon_0 \omega E_0 \cos \omega t\,.$$

传导电流与位移电流之比为

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}\,.$$

(2) 代入数值可得

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega_1} &= \frac{5.9 \times 10^7}{8.85 \times 10^{-12} \times 100\pi} = 2.12 \times 10^{16}, \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega_2} &= \frac{5.9 \times 10^7}{8.85 \times 10^{-12} \times 3.0 \times 10^{11} \times 2\pi} = 3.54 \times 10^6\,. \end{aligned}$$

8.13

螺线管内部的磁感应强度为

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 n I_0 \sin \omega t\,.$$

距离轴线 r 处的电场强度为

$$E = \begin{cases} -\frac{1}{2} r \dot{B} = -\frac{1}{2} r \mu_0 n I_0 \omega \cos \omega t, & r < a; \\ -\frac{a^2}{2r} \dot{B} = -\frac{a^2}{2r} \mu_0 n I_0 \omega \cos \omega t, & r > a\,. \end{cases}$$

位移电流为

$$J_d = \epsilon_0 \dot{E} = \begin{cases} -\frac{1}{2} r \dot{B} = \frac{1}{2} r n I_0 \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \sin \omega t, & r < a; \\ -\frac{a^2}{2r} \dot{B} = \frac{a^2}{2r} n I_0 \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \sin \omega t, & r > a\,. \end{cases}$$

8.14 – 8.16

不会

8.17

电路达到稳定时，电容器带电量为

$$Q=\frac{R_1}{R_1+R_2}CV_0.$$

断开开关后，假设时刻 t ，电容器带电量为 $q(t)$ ，因此

$$\frac{q(t)}{C}+R_1\dot{q}(t)=0.$$

根据边界条件 $q(t)=Q$ 可得

$$q(t)=Qe^{-\frac{t}{R_1C}}=\frac{R_1}{R_1+R_2}CV_0e^{-\frac{t}{R_1C}}.$$

电容器内部的电场强度为

$$E(t)=\frac{q(t)}{Cd}=\frac{R_1}{R_1+R_2}\frac{V_0}{d}e^{-\frac{t}{R_1C}}.$$

位移电流为

$$J_d=\epsilon_0\dot{E}(t)=-\frac{\epsilon_0V_0}{\left(R_1+R_2\right)Cd}e^{-\frac{t}{R_1C}}.$$

距离中心 $r(r<b)$ 处的磁感应强度为

$$B(r,t)=\frac{\mu_0\pi r^2\left|J_d\right|}{2\pi r}=\frac{1}{2}\mu_0r\left|J_d\right|=\frac{rV_0}{2c^2\left(R_1+R_2\right)Cd}e^{-\frac{t}{R_1C}}.$$

$r=b$ 处的坡印亭矢量为

$$S(t)=\frac{E(t)B(b,t)}{\mu_0}=\frac{\epsilon_0bV_0^2R_1}{2\left(R_1+R_2\right)^2Cd^2}e^{-\frac{2t}{R_1C}}.$$

8.18

对于电场 $\mathbf{E}=\left(E^{1}, E^{2}, E^{3}\right)=\left(E_{0} y \cos \omega t,\, 0,\, 0\right)$ ，可以得出

$$\operatorname{curl}\ \mathbf{E}=\left(\partial_{2} E^{3}-\partial_{3} E^{2}, \partial_{3} E^{1}-\partial_{1} E^{3}, \partial_{1} E^{2}-\partial_{2} E^{1}\right)=\left(0,\, 0,\, -E_{0} \cos \omega t\right),$$

其中 $\partial_{1}, \partial_{2}, \partial_{3}$ 分别代表对变量 x, y, z 求导。因此，空间磁场 $\mathbf{B}=\left(B^{1}, B^{2}, B^{3}\right)$ 满足麦克斯韦方程组

$$\begin{aligned}
-\dot{B}^{1}&=0,\\
-\dot{B}^{2}&=0,\\
-\dot{B}^{3}&=-E_{0} \cos \omega t\,.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
B^{1}&=C^{1}(x, y, z),\\
B^{2}&=C^{2}(x, y, z),\\
B^{3}&=C^{3}(x, y, z)+\frac{1}{\omega} E_{0} \sin \omega t,
\end{aligned}$$

其中 C^{1}, C^{2}, C^{3} 是与时间无关的光滑函数。因此

$$\begin{aligned}
\operatorname{curl}\ \mathbf{B}&=\left(\partial_{2} B^{3}-\partial_{3} B^{2}, \partial_{3} B^{1}-\partial_{1} B^{3}, \partial_{1} B^{2}-\partial_{2} B^{1}\right)\\
&=\left(\partial_{2} C^{3}-\partial_{3} C^{2}, \partial_{3} C^{1}-\partial_{1} C^{3}, \partial_{1} C^{2}-\partial_{2} C^{1}\right).
\end{aligned}$$

根据麦克斯韦方程组可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^{2}} \dot{E}^{1}&=\partial_{2} C^{3}-\partial_{3} C^{2},\\
\frac{1}{c^{2}} \dot{E}^{2}&=\partial_{3} C^{1}-\partial_{1} C^{3},\\
\frac{1}{c^{2}} \dot{E}^{3}&=\partial_{1} C^{2}-\partial_{2} C^{1},
\end{aligned}$$

其中 $c=1 / \sqrt{\mu_{0} \epsilon_{0}}$ 是真空中的光速。代入 $\mathbf{E}=\left(E^{1}, E^{2}, E^{3}\right)=\left(E_{0} y \cos \omega t,\, 0,\, 0\right)$ 可得

$$\begin{aligned}
-\frac{\omega}{c^{2}} E_{0} y \sin \omega t&=\partial_{2} C^{3}-\partial_{3} C^{2},\\
0&=\partial_{3} C^{1}-\partial_{1} C^{3},\\
0&=\partial_{1} C^{2}-\partial_{2} C^{1}\,.
\end{aligned}$$

而 C^{1}, C^{2}, C^{3} 与时间无关，因此三个等式右边全部与时间无关。但是第一个等式左边与时间有关，这样就得到了矛盾。

8.19

对于电场 $\mathbf{E}=\left(E^1,E^2,E^3\right)=\left(E_0\cos\left(\frac{\omega z}{c}-\omega t\right),0,0\right)$，可以得出

$$\operatorname{curl}\ \mathbf{E}=\left(\partial_2E^3-\partial_3E^2,\partial_3E^1-\partial_1E^3,\partial_1E^2-\partial_2E^1\right)=\left(0,\ -\frac{\omega}{c}E_0\sin\left(\frac{\omega z}{c}-\omega t\right),0\right),$$

其中 $\partial_1,\partial_2,\partial_3$ 分别代表对变量 x,y,z 求导。因此，空间磁场 $\mathbf{B}=\left(B^1,B^2,B^3\right)$ 满足麦克斯韦方程组

$$\begin{aligned}
&-\dot{B}^1=0,\\
&-\dot{B}^2=-\frac{\omega}{c}E_0\sin\left(\frac{\omega z}{c}-\omega t\right),\\
&-\dot{B}^3=0.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&B^1=C^1(x,y,z),\\
&B^2=C^2(x,y,z)+\frac{E_0}{c}\cos\left(\frac{\omega z}{c}-\omega t\right),\\
&B^3=C^3(x,y,z).
\end{aligned}$$

其中 C^1,C^2,C^3 是与时间无关的光滑函数。因此

$$\begin{aligned}
\operatorname{curl}\ \mathbf{B}&=\left(\partial_2B^3-\partial_3B^2,\partial_3B^1-\partial_1B^3,\partial_1B^2-\partial_2B^1\right)\\
&=\left(\partial_2C^3-\partial_3C^2+\frac{\omega}{c^2}E_0\sin\left(\frac{\omega z}{c}-\omega t\right),\partial_3C^1-\partial_1C^3,\partial_1C^2-\partial_2C^1\right).
\end{aligned}$$

代入 $\mathbf{E}=\left(E^1,E^2,E^3\right)=\left(E_0\cos\left(\frac{\omega z}{c}-\omega t\right),0,0\right)$ 可得

$$\begin{aligned}
\frac{\omega}{c^2}E_0\sin\left(\frac{\omega z}{c}-\omega t\right)&=\partial_2C^3-\partial_3C^2+\frac{\omega}{c^2}E_0\sin\left(\frac{\omega z}{c}-\omega t\right),\\
0&=\partial_3C^1-\partial_1C^3,\\
0&=\partial_1C^2-\partial_2C^1.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
0&=\partial_2C^3-\partial_3C^2,\\
0&=\partial_3C^1-\partial_1C^3,\\
0&=\partial_1C^2-\partial_2C^1.
\end{aligned}$$

可以假设 $C^1=C^2=C^3\equiv 0$，此时

$$\mathbf{B}=\left(0,\frac{E_0}{c}\cos\left(\frac{\omega z}{c}-\omega t\right),0\right).$$

磁场强度为

$$\mathbf{H}=\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}=\left(0,\ \frac{E_0}{\mu_0 c}\cos\left(\frac{\omega z}{c}-\omega t\right),\ 0\right).$$

能流密度为

$$\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}=\left(0,\ 0,\ \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2\left(\frac{\omega z}{c}-\omega t\right)\right).$$

在一个周期内的平均值为

$$\langle\mathbf{S}\rangle=\left(0,\ 0,\ \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\right).$$

实际上 $C^1=C^2=C^3\equiv 0$ 不是唯一情况，例如 $C^1=yz, C^2=xz, C^3=xy$ 同样满足。因为 $\mathbb{R}^3$ 的 1 阶 de Rham 上同调群 $H^1_{\mathrm{dR}}\left(\mathbb{R}^3\right)=0$ ，所以当表达式

$$\begin{aligned}0&=\partial_2 C^3-\partial_3 C^2,\\0&=\partial_3 C^1-\partial_1 C^3,\\0&=\partial_1 C^2-\partial_2 C^1\end{aligned}$$

成立时，向量场 $\mathbf{C}=\left(C^1,C^2,C^3\right)$ 是某一光滑函数 $f\in C^\infty\left(\mathbb{R}^3\right)$ 的梯度

$$\begin{aligned}C^1&=\partial_1 f,\\C^2&=\partial_2 f,\\C^3&=\partial_3 f.\end{aligned}$$

8.20

介质的折射率为

$$n=\left(\epsilon_r\mu_r\right)^{1/2}.$$

电磁波在介质的传播速度为

$$v=\frac{c}{n}.$$

电磁波的频率为

$$f=\frac{c}{\lambda_0}.$$

电磁波在介质的波长为

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{v}{c}\lambda_0 = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{\lambda_0}{\left(\epsilon_r \mu_r\right)^{1/2}} = \frac{600}{(80 \times 1)^{1/2}} = 67.1 \text{ m} .$$

趋肤深度为

$$\delta = \left(\frac{2}{\mu_r \mu_0 (2\pi f)\sigma}\right)^{1/2} = \left(\frac{\lambda_0}{\pi \mu_r \mu_0 c \sigma}\right)^{1/2} = \left(\frac{600}{\pi \times 1 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 3 \times 10^8 \times 4.5}\right)^{1/2} = 0.336 \text{ m} .$$

8.21

电容器极板之间的电场强度为

$$E = \frac{V}{d} = \frac{V_0}{d} \cos \omega t .$$

电流密度为

$$J = \sigma E = \frac{\sigma V_0}{d} \cos \omega t .$$

位移电流为

$$J_d = \epsilon \dot{E} = -\frac{\omega \epsilon V_0}{d} \sin \omega t .$$

距离中心 r 处的磁感应强度为

$$B = \frac{\pi r^2 \mu_0 \left(J + J_d\right)}{2\pi r} = \frac{\mu_0 r V_0}{2d} \left(\sigma \cos \omega t - \omega \epsilon \sin \omega t\right) .$$

坡印亭矢量为

$$S = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{r V_0^2}{2d^2} \left(\sigma \cos^2 \omega t - \omega \epsilon \sin \omega t \cos \omega t\right) .$$

平均值为

$$\langle S \rangle = \frac{r V_0^2 \sigma}{4d^2} .$$

进入电容器的功率为

$$P = 2\pi R d \, S\Big|_{r=R} = \frac{\pi R^2 V_0^2}{d} \left(\sigma \cos^2 \omega t - \omega \epsilon \sin \omega t \cos \omega t\right) .$$

平均值为

$$\langle P\rangle=\frac{\pi R^2\sigma V_0^2}{2d}\,.$$

电容器损耗的功率为电阻的焦耳热

$$Q=\pi R^2 d\,\frac{J^2}{\sigma}=\frac{\pi R^2\sigma V_0^2}{d}\cos^2\omega t\,.$$

平均值为

$$\langle Q\rangle=\frac{\pi R^2\sigma V_0^2}{2d}\,.$$

8.22

记电缆的内半径、外半径分别为 a,b 。根据高斯定理，电场强度可以表示为形式

$$E(r)=\frac{A}{r},\qquad a<r<b\,.$$

因此

$$V=\int_a^b E(r)dr=A\log\frac{b}{a},$$

$$A=\frac{V}{\log\frac{b}{a}}\,.$$

因此，电场强度为

$$E(r)=\frac{V}{r\log\frac{b}{a}},\qquad a<r<b\,.$$

磁感应强度为

$$B(r)=\frac{\mu_0 I}{2\pi r},\qquad a<r<b\,.$$

坡印亭矢量为

$$S(r)=\frac{E(r)B(r)}{\mu_0}=\frac{VI}{2\pi r^2\log\frac{b}{a}},\qquad a<r<b\,.$$

传输功率为

$$P=\int_a^b S(r)2\pi r dr=VI\,.$$

8.23

(1) $w=\dfrac{B^2}{2\mu_0}=4.0\times10^5\ \mathrm{J\cdot m^{-3}}$.

(2) $\dfrac{1}{2}\epsilon_0E^2=\dfrac{B^2}{2\mu_0}$，这表明 $E=cB=3.0\times10^8\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$ ，这高于空气击穿强度 $3.0\times10^5\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$ 。

8.24

(1) 太阳光在空间站的能流密度为

$$S=\frac{P}{4\pi r^2},$$

其中 r 是太阳与空间站之间的距离。反射率为 $R=1$ 。因此，作用力为

$$F=\frac{(1+R)SA}{c}=\frac{PA}{2\pi r^2c},$$

其中 A 是空间站反射面的面积。作用力与万有引力保持平衡，因此

$$\frac{PA}{2\pi r^2c}=\frac{GM_sm}{r^2},$$

$$A=\frac{2\pi GM_smc}{P}.$$

(2)

$$L=A^{1/2}=\left(\frac{2\pi GM_smc}{P}\right)^{1/2}=\left(\frac{2\pi\times6.67\times10^{-11}\times1.99\times10^{30}\times10^6\times3\times10^8}{3.77\times10^{26}}\right)^{1/2}=2.58\times10^4\ \mathrm{m}.$$

8.25

反射率为 $R=50\,\%$ 。因此，卫星受到的压力为

$$F=\frac{(1+R)S\pi r^2}{c}=\frac{(1+50\%)\times1.35\times10^3\times\pi\times1.0^2}{3\times10^8}=2.1\times10^{-5}\ \mathrm{N}.$$

附加加速度为

$$a=\frac{F}{m}=\frac{2.1\times10^{-5}}{100}=2.1\times10^{-7}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

8.26

地球上测量得到的太阳光平均能流密度约为

$$S = 1.4 \times 10^3 \ \mathrm{W \cdot m^{-2}}.$$

假设一个家庭所需的电功率为

$$P = 5.0 \times 10^3 \ \mathrm{W}.$$

因此，需要的电池面积为

$$A = \frac{P}{S\eta} = \frac{5.0 \times 10^3}{1.4 \times 10^3 \times 10\,\%} = 35 \ \mathrm{m^2}.$$

还是足够的，除非你想买上海外滩的别墅。

8.27

(1) $I = \dfrac{P\eta}{4\pi R^2} = \dfrac{100 \times 5\,\%}{4\pi \times 1^2} = 0.4 \ \mathrm{W \cdot m^{-2}}.$

(2) $I' = \dfrac{P\eta}{4\pi (R')^2} = \dfrac{100 \times 5\,\%}{4\pi \times 10^2} = 0.004 \ \mathrm{W \cdot m^{-2}}.$

8.28

完全吸收代表反射率为 $R = 0$ 。因此，作用力为

$$F = \frac{(1+R)P}{c} = \frac{(1+0) \times 4.3 \times 10^{-3}}{3 \times 10^8} = 1.4 \times 10^{-11} \ \mathrm{N}.$$

压强为

$$N = \frac{F}{\pi r^2} = \frac{1.4 \times 10^{-11}}{\pi \times 1.2^2} = 3.2 \times 10^{-12} \ \mathrm{Pa}.$$

8.29

因为电磁波磁场振幅 B_0 与电场振幅 E_0 的关系是

$$B_0 = \frac{E_0}{c}.$$

带电量为 q ，速度为 v 的粒子受到的洛伦兹力、电场力量级分别为

$$F_1 = qvB_0 = \frac{v}{c} qE_0,$$
$$F_2 = qE_0.$$

而 v 不可能超过 c ，因此洛伦兹力不会大于电场力。