

上节课主要内容

磁介质中磁场的高斯定理和环路定理

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0$$

磁介质的本构方程

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

均匀各向同性

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \\ &= (\chi_m + 1)\mu_0 \vec{H} \\ &= \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \end{aligned}$$

磁化电流

$$I' = \oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{j}' = \nabla \times \vec{M}$$

$$\vec{i}' = (\vec{M}_1 - \vec{M}_2) \times \vec{n}$$

$$\vec{j}' = \frac{\vec{I}'}{S}, \quad \vec{i}' = \frac{\vec{I}'}{l}$$

§ 5.1.5 磁介质的边值关系和唯一性定理

一、边值关系

1.界面处 B 法向分量连续

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$

2.界面处 H 切向分量 $\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{i}_0$ $(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{e}_n = \sigma_0$

$$\text{if } i_0 = 0 \text{ then } H_{1t} = H_{2t} \quad \text{if } \sigma_0 = 0 \text{ then } D_{2n} = D_{1n}$$

3.界面磁感应线折射定理

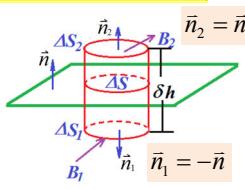
$$\frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} \quad \frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}$$

1. 分界面处 B 法向分量连续

【证明】作一圆柱形高斯面

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = (\iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_3}) \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\delta h \rightarrow 0 \Rightarrow \iint_{S_3} B dS \rightarrow 0$$



$$\vec{B}_1 \cdot \Delta \vec{S}_1 + \vec{B}_2 \cdot \Delta \vec{S}_2 + 0 = \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 \Delta S_1 + \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2 \Delta S_2 = 0$$

$$-\vec{B}_1 \cdot \vec{n} \Delta S_1 + \vec{B}_2 \cdot \vec{n} \Delta S_2 = 0$$

$$\text{故 } (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{或} \quad B_{1n} = B_{2n}$$

3

2. 分界面处 H 的切向分量

【证明】在界面作一矩形环路

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} &= (\int_a^b + \int_c^d + \int_d^a + \int_b^c) \vec{H} \cdot d\vec{l} \\ &= H_{1t} \Delta l + 0 + (-H_{2t} \Delta l) + 0 = \sum I_0 \end{aligned}$$

界面处面电流密度为 i_0

$$I_0 = i_0 \Delta l$$

$$\text{则 } H_{1t} - H_{2t} = i_0 \quad \text{或} \quad \vec{i}_0 = \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)$$

$$= (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \vec{n}$$

$$\text{若介质界面处 } i_\theta = 0 \quad H_{1t} = H_{2t}$$

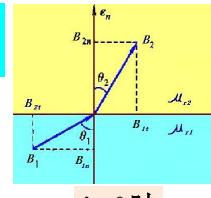
4

3. 分界面磁感应线的“折射定理”

$$B_{2n} = B_{1n}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

H_n 不连续



$$i_\theta = 0 \text{ 时} \quad H_{2t} = H_{1t}$$

$$B_{2t} = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{1t}$$

B_t 不连续

$$i_\theta = 0 \text{ 时}$$

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{B_{1t}}{B_{1n}}, \quad \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{B_{2t}}{B_{2n}}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2} = \frac{B_{1t}}{B_{1n}} \frac{B_{2n}}{B_{2t}} = \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}$$

$i_\theta = 0$ 时界面两侧磁感应线夹角关系

同理，对磁场强度(H)线

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{H_{1t}}{H_{1n}}, \quad \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{H_{2t}}{H_{2n}}$$

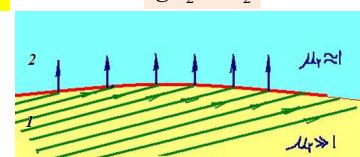
$$i_\theta = 0 \text{ 时} \quad H_{2t} = H_{1t}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2} = \frac{H_{1t}}{H_{1n}} \frac{H_{2n}}{H_{2t}} = \frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

$$\text{磁场边界} \quad \frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

$$\text{电场边界} \quad \frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

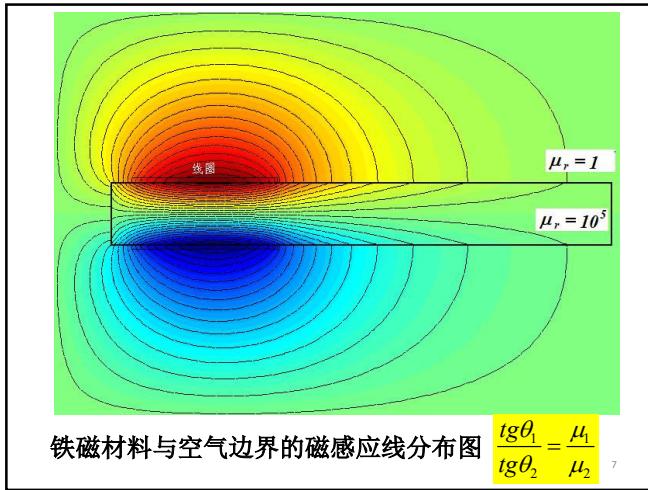
若 $\mu_{r2} \approx 1$ (弱磁性介质), $\mu_{r1} \gg 1$ (铁磁性材料)



$$\text{则 } \theta_1 > \theta_2$$

即磁感应线几乎都集中在铁磁性介质内，漏出外面的磁通量很少。

6



二、磁场的唯一性定理

1. 磁场的求解

● 真空中磁场的基本性质

$$\bar{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{I_0 d\bar{l} \times \bar{R}}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\bar{j}_0 \times \bar{R}}{R^3} dV$$

$$\begin{cases} \oint_S \bar{B}_0 \cdot d\bar{S} = 0 \\ \oint_L \bar{B}_0 \cdot d\bar{l} = \mu_0 \sum I_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \bar{B}_0 = 0 \\ \nabla \times \bar{B}_0 = \mu_0 \bar{j}_0 \end{cases}$$

已知 I_0, \bar{j}_0 , 可确定 \bar{B}_0 真空中 $\bar{H} = \frac{\bar{B}_0}{\mu_0}$

● 磁介质存在时

$$\bar{B} = \bar{B}_0 + \bar{B}'$$

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M}$$

$$\bar{B} = \mu_0 \mu_r \bar{H} = \mu \bar{H}$$

有磁介质时, 仅知道 I_0, j_0 (传导电流), 不能确定 B , 还需知道磁化电流 I' , 因为:

$$\oint_L \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 (\sum I_0 + \sum I')$$

单种介质: 结合本构方程, 可由传导电流确定 B ;
多种介质: 由传导电流+边界条件, 可同时确定 B 和磁化电流 I' .

9

2. 唯一性定理的简单表述

设磁介质是各向同性的, 磁导率已知, 则

均匀磁介质, $\mu=C$

不均匀磁介质, $\mu(r)$

磁场中传导电流密度 j_0 已知。磁场若

(1)充满整个空间, 边界 $S \rightarrow \infty$, 边界上 B, H 为 0;

(2)分布于有限空间, 边界上 B_n, H_n 给定;

则, 满足磁场高斯定理和安培环路定理的磁场解是唯一的。

这意味着, 不管用什么办法, 只要找到一个解, 且满足上述的条件, 则该解是唯一正确的解。

10

3. 唯一性定理的证明

【反证法】

已知传导电流分布 $j_0(r)$ 、磁导率分布 $\mu(r)$ 和边界 S 上的边界条件 (B_n, H_n) 。

若两组解 (B_1, H_1) 和 (B_2, H_2) 都满足边界条件。
则可构造一新解: $B=B_1-B_2, H=H_1-H_2$, 则

$$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = \oint_S \bar{B}_1 \cdot d\bar{S} - \oint_S \bar{B}_2 \cdot d\bar{S} = 0$$

$$\oint_L \bar{H} \cdot d\bar{l} = \oint_L \bar{H}_1 \cdot d\bar{l} - \oint_L \bar{H}_2 \cdot d\bar{l} = 0 = \sum I_0$$

H 对应的传导电流为零

11

S 是磁场分布的空间边界(不是两种介质的界面), S 外无磁场, B 和 H 线不会从 S 面上进出, $B_n=0$ 和 $H_n=0$ 。

B 线在 S 面上为连续曲线, 不能中断, 必为闭合曲线。因 $\bar{B} = \mu_0 \mu_r \bar{H}$ H 线与 B 线平行, 即 H 线亦为闭合曲线。取该闭合曲线为环路 L , 则

$$\oint_L \bar{H} \cdot d\bar{l} = \sum I_0 \neq 0$$

12

13

$$\oint_L \bar{H} \cdot d\bar{l} = \sum I_0 \neq 0$$
}
矛盾

$$\oint_L \bar{H} \cdot d\bar{l} = \oint_L \bar{H}_1 \cdot d\bar{l} - \oint_L \bar{H}_2 \cdot d\bar{l} = 0$$

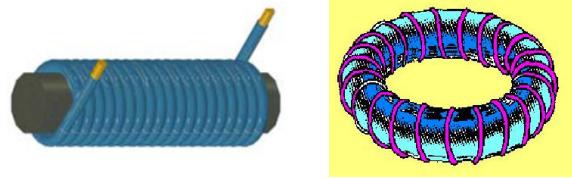
故在 S 内，只能有 $\bar{B} = \bar{B}_1 - \bar{B}_2 = 0$
 $\bar{H} = \bar{H}_1 - \bar{H}_2 = 0$

即 $\bar{B}_1 = \bar{B}_2$ 磁场是唯一的
 $\bar{H}_1 = \bar{H}_2$

14

三、几种磁介质的磁场的讨论

1. 各向同性、均匀磁介质充满整个磁场空间的情况



15

$$\bar{B} = \mu_0 \mu_r \bar{H}$$

$$\oint_L \bar{B} \cdot d\bar{l} = \oint_L \mu_0 \mu_r \bar{H} \cdot d\bar{l}$$

$$= \mu_0 \mu_r \oint_L \bar{H} \cdot d\bar{l} = \mu_0 \mu_r \iint_S \bar{j}_0 \cdot d\bar{S}$$

$$\begin{aligned} &\text{又} \\ &\oint_L \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 \iint_S \bar{j} \cdot d\bar{S} \\ &= \mu_0 \iint_S (\bar{j}_0 + \bar{j}') \cdot d\bar{S} \end{aligned}$$

$$\mu_r \bar{j}_0 = \bar{j} = \bar{j}_0 + \bar{j}'$$

$$\mu_r = 1 + \chi_m$$

$$\bar{j}' = (\mu_r - 1) \bar{j}_0 = \chi_m \bar{j}_0$$

磁化电流密度 j' 与传导电流密度 j_0 成正比

16

$$\begin{aligned} \oint_L \bar{B} \cdot d\bar{l} &= \mu_0 \iint_S \bar{j} \cdot d\bar{S} \\ &= \mu_0 \iint_S \mu_r \bar{j}_0 \cdot d\bar{S} \\ &= \mu_r \iint_S \mu_0 \bar{j}_0 \cdot d\bar{S} \\ &= \mu_r \oint_L \bar{B}_0 \cdot d\bar{l} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \bar{j}(r) = \mu_r \bar{j}_0(r)$$

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0 \mu_r} = \frac{\bar{B}_0}{\mu_0} = \bar{H}_0$$

磁感应强度 B 因磁介质的存在增加了 μ_r 倍！
 H 不因磁介质的存在而变化，因为它只与 I_0 相关

17

$$\bar{M} = \chi_m \bar{H} = (\mu_r - 1) \frac{\bar{B}_0}{\mu_0}$$

同理

$$\bar{i}_0 + \bar{i}' = \mu_r \bar{i}_0$$

$$\bar{i}' = (\mu_r - 1) \bar{i}_0 = \chi_m \bar{i}_0$$

注意：以上分析是针对同一种各向同性、均匀的磁介质充满整个磁场空间的情况。

18

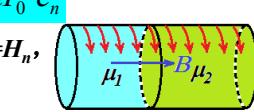
讨论 空间不是一种磁介质，而是两种磁介质的情况，上述结论 $H = B/\mu_0 = H_0$ 不成立

如：长直螺线管充有两种磁介质， B_0 （真空下无磁介质时的磁感应强度）由 I_0 产生，在管内部， B_0 均匀分布且沿轴线。 $\bar{B}_0 = \mu_0 n I_0 \bar{e}_n$

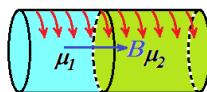
(1) 若 H_1 和 H_2 只有轴线分量 $H = H_n$ ，则在磁介质 1 和 2 的分界面处：

$$\left. \begin{aligned} B_{1n} &= B_{2n} \\ \bar{B} &= \mu \bar{H} \end{aligned} \right\} \Rightarrow H_{1n} = \frac{\mu_2}{\mu_1} H_{2n} \quad \rightarrow \quad H_{1n} \neq H_{2n}$$

$$\bar{H}_1 \neq \bar{H}_2$$



由于 $\bar{H}_1 \neq \bar{H}_2$



但两种介质中的 B_θ 相等，故

在两种介质中不可能均有： $\bar{H} = \bar{B}_0 / \mu_0$

(2) 若 H_1 和 H_2 有非轴线分量，因 B_θ 仅有轴线分量，故

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}_0}{\mu_0} \quad \text{至少对其中某一种介质不成立}$$

因此，空间有两种磁介质的情况， $H=B_\theta/\mu_0$ 不完全成立。

19

2. 各向同性、均匀磁介质分区域分布

(1) 介质分界面与 B 平行(重合)情况

这种情况下，可以证明 $\bar{H} = \frac{\bar{B}_0}{\mu_0}$ 恒成立

【证明】 H 和 B_θ/μ_0 是满足相同的环路定理的，即

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_L \bar{B}_0 \cdot d\bar{l} = \mu_0 \sum I_0 \\ \nabla \times \bar{B}_0 = \mu_0 \bar{j}_0 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{类比}} \left\{ \begin{array}{l} \oint_L \frac{\bar{B}_0}{\mu_0} \cdot d\bar{l} = \sum I_0 \\ \nabla \times \frac{\bar{B}_0}{\mu_0} = \bar{j}_0 \end{array} \right. \xleftrightarrow{\text{类比}} \left\{ \begin{array}{l} \oint_L \bar{H} \cdot d\bar{l} = \sum I_0 \\ \nabla \times \bar{H} = \bar{j}_0 \end{array} \right.$$

故只需证明因 H 和 B_θ/μ_0 满足相同的高斯定理，则可根据静磁场的惟一性定理，确定 $H=B_\theta/\mu_0$

20

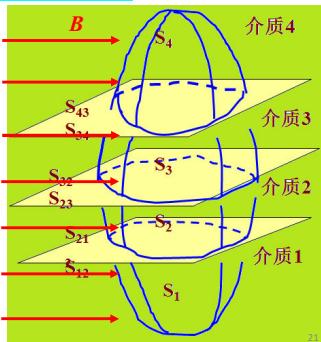
因为 $\iint_S \frac{\bar{B}_0}{\mu_0} \cdot d\bar{S} = \frac{1}{\mu_0} \iint_S \bar{B}_0 \cdot d\bar{S} = 0$ 满足高斯定理

剩下只需证明：

$$\iint_S \bar{H} \cdot d\bar{S} = 0$$

如图有四种介质，因分界面与 B 平行，故 $B_n=0$ ，因而：

$$H_n = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} B_n = 0$$



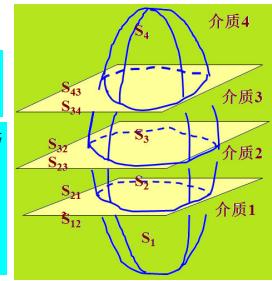
21

在 $i-j$ 介质分界面上

$$\iint_{S_{ij}} \bar{H} \cdot d\bar{S} = 0, \quad (\because H_n = 0)$$

$$\therefore \iint_{S_i} \bar{H} \cdot d\bar{S} = \iint_{S_i + S_{ij}} \bar{H} \cdot d\bar{S}$$

$$= \frac{1}{\mu_0 \mu_{r1}} \iint_{S_i + S_{ij}} \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0 \quad \text{介质1中}$$



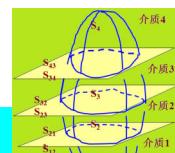
$$\text{同理 } H_n = 0 \Rightarrow \iint_{S_{21}} \bar{H} \cdot d\bar{S} = 0, \quad \iint_{S_{23}} \bar{H} \cdot d\bar{S} = 0$$

$$\therefore \iint_{S_2} \bar{H} \cdot d\bar{S} = \iint_{S_2 + S_{21} + S_{23}} \bar{H} \cdot d\bar{S} = \frac{1}{\mu_0 \mu_{r2}} \iint_{S_2 + S_{21} + S_{23}} \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0 \quad \text{介质2中}$$

22

同理

$$\iint_{S_3} \bar{H} \cdot d\bar{S} = 0, \quad \iint_{S_4} \bar{H} \cdot d\bar{S} = 0$$



$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

$$\iint_S \bar{H} \cdot d\bar{S} = (\iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_3} + \iint_{S_4}) \bar{H} \cdot d\bar{S} = 0$$

即 H 也满足高斯定理，因此

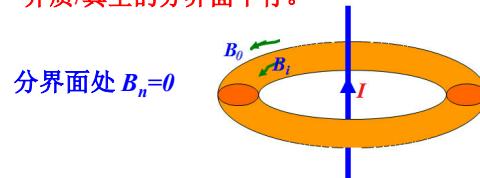
$$\bar{H} = \frac{\bar{B}_0}{\mu_0} \quad \text{在介质分界面与 } B \text{ 平行(重合)的情况下是恒成立的}$$

$$\text{此时 } \bar{B} = \mu_0 \mu_r \bar{H} = \mu_0 \mu_r \frac{\bar{B}_0}{\mu_0} = \mu_r \bar{B}_0$$

23

【例19】 一圆环状磁介质与一无限长的直载流导线共轴，设磁介质的磁导率为 μ ，长直导线内的电流强度为 I ，求介质内外空间的磁感应强度的分布和介质表面的磁化电流。

【解】 无限长导线电流 I 在真空中产生的 B_0 方向是以 I 为轴的同心圆，即 B_0 的方向与磁介质/真空的分界面平行。



24

$\oint_L \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = B_0 2\pi r = \mu_0 I$

介质外的空间 $\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{r}$

介质分界面与B平行内 介质内的空间

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}_0}{\mu_0} \quad \bar{B} = \mu_0 \mu_r \bar{H} = \mu_0 \mu_r \frac{\bar{B}_0}{\mu_0} = \mu_r \bar{B}_0 = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r} \vec{r}$$

或者

$$\oint_L \bar{H} \cdot d\vec{l} = H 2\pi r = I \quad H = \frac{I}{2\pi r} \quad B = \mu_0 \mu_r H = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r}$$

25

面磁化电流密度

$$\vec{i}' = (\bar{M}_1 - \bar{M}_2) \times \vec{n}$$

$\bar{M}_2 = 0$ 真空 $\vec{i}' = \bar{M}_1 \times \vec{n}$

$$\bar{M}_1 = \chi_m \bar{H} = (\mu_r - 1) \frac{I}{2\pi r} \vec{r}$$

$$\vec{i}' = \bar{M}_1 \times \vec{n} = (\mu_r - 1) \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_z \quad i' \text{随 } r \text{ 变化}$$

26

【例20】如图, 同轴导体圆柱面, 通有反向的电流 I , 柱面 R_1-R_2 间充满相对磁导率为 μ_1 , R_2-R_3 间充满 μ_2 , R_3-R_4 间充满 μ_3 的磁介质。求各区域的 B 及磁化电流面密度 i' 。

【解】无介质时, 由环路定理

$$\oint_L \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

得 $B_0 = \begin{cases} 0, & r < R_1, r > R_4 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & R_1 < r < R_4 \end{cases}$

27

磁感应线 B 是以圆柱中轴线为中心的圆环, 与介质界面平行, 因此各分区充满各种介质后的磁感应强度为: $B = \mu_r B_0$

$$\vec{i}' = (\bar{M}_1 - \bar{M}_2) \times \vec{n}$$

$$B(r) = \mu_r B_0 = \begin{cases} 0, & r < R_1, r > R_4 \\ \mu_1 B_0 = \frac{\mu_0 \mu_1 I}{2\pi r}, & R_1 < r < R_2 \\ \mu_2 B_0 = \frac{\mu_0 \mu_2 I}{2\pi r}, & R_2 < r < R_3 \\ \mu_3 B_0 = \frac{\mu_0 \mu_3 I}{2\pi r}, & R_3 < r < R_4 \\ \mu_4 B_0 = \frac{(1-\mu_3) I}{2\pi r}, & r = R_4 \end{cases}$$

$$\bar{M} = \chi_m \bar{H} = (\mu_r - 1) \frac{\bar{B}}{\mu_0 \mu_r} = \frac{(\mu_r - 1) I}{2\pi r}$$

28

【例21】如图所示, 一无限大薄金属板上均匀地分布着电流, 其面电流密度为 i_0 , 在金属板的两侧各紧贴一相对介电常数为 μ_{r1} 和 μ_{r2} 、无限大、有限厚的均匀磁介质板, 试分别求二磁介质板内的磁感应强度、两介质板表面上的磁化面电流密度。

【解】无磁介质时, 面电流 i 在两侧产生的磁感应强度为:

$$\oint_L \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = 2B_0 \Delta l = \mu_0 (i_0 \Delta l)$$

$$B_0 = \frac{1}{2} \mu_0 i_0 \quad \text{方向: 与表面平行}$$

29

|解法一|设 i' 为磁化面电流密度, 均匀各向同性介质中有:

介质1与金属板界面 $i'_1 = M_1 = \chi_{m1} H_1 = (\mu_{r1} - 1) H_1$

介质2与金属板界面 $i'_2 = M_2 = \chi_{m2} H_2 = (\mu_{r2} - 1) H_2$

由磁场的叠加原理以及无限大载流平面的磁感应强度公式, 有: $B_1 = B_0 + B'_1 = \frac{1}{2} \mu_0 (i_0 + i'_1 + i'_2) = \mu_0 \mu_{r1} H_1 = \frac{\mu_0 \mu_{r1} i'_1}{\mu_{r1} - 1}$

i'_1 对 I 区内磁场的贡献为 0; i'_2 对 H 区的磁场的贡献为 0。

$B_2 = B_0 + B'_2 = \frac{1}{2} \mu_0 (i_0 + i'_1 + i'_2) = \mu_0 \mu_{r2} H_2 = \frac{\mu_0 \mu_{r2} i'_2}{\mu_{r2} - 1}$

30

$$i'_1 = (\mu_{r1} - 1) \frac{i_0}{2}$$

$$i'_2 = (\mu_{r2} - 1) \frac{i_0}{2}$$

解出, 得:

$$B_1 = \frac{\mu_0 \mu_{r1}}{\mu_{r1} - 1} i'_1 = \mu_0 \mu_{r1} \frac{i_0}{2} = \mu_{r1} B_0$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 \mu_{r2}}{\mu_{r2} - 1} i'_2 = \mu_0 \mu_{r2} \frac{i_0}{2} = \mu_{r2} B_0$$

代回到 B 的式子中, 得到:

31

[解法二] 如图介质分界面与 B 平行, 所以:

$$\bar{B} = \mu_r \bar{B}_0$$

$$i_0 \text{ 在真空中产生} \quad B_0 = \frac{1}{2} \mu_0 i_0$$

所以各区磁感应强度为:

$$\bar{B}_1 = \mu_{r1} \bar{B}_0 = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_{r1} i_0, \quad \bar{B}_2 = \mu_{r2} \bar{B}_0 = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_{r2} i_0$$

磁化电流为

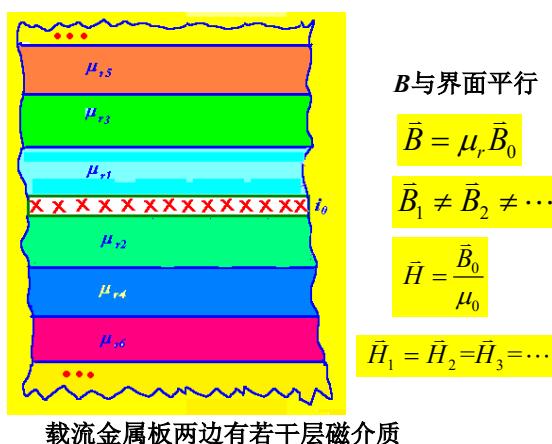
$$\bar{i}'_1 = \bar{M}_1 \times \bar{n} = \chi_m \bar{H}_1 \times \bar{n}$$

$$= \chi_m \frac{\bar{B}_1}{\mu_{r1} \mu_0} \times \bar{n} = \frac{(\mu_{r1} - 1)}{2} \bar{i}_0$$

$$\bar{i}'_2 = \bar{M}_2 \times \bar{n} = \chi_m \bar{H}_2 \times \bar{n}$$

$$= \chi_m \frac{\bar{B}_2}{\mu_{r2} \mu_0} \times \bar{n} = \frac{(\mu_{r2} - 1)}{2} \bar{i}_0$$

32



33

(2) 介质分界面与 B 垂直情况

$$\because \bar{M} = \chi_m \bar{H} = (\mu_r - 1) \frac{\bar{B}}{\mu_r \mu_0}$$

分界面与 B 垂直, 即分界面上

$$B = B_n, M = M_n$$

$$\bar{i}' = (\bar{M}_1 - \bar{M}_2) \times \bar{n} \quad M \text{ 只有垂直分量 } \theta = 0$$

$$\therefore i' = 0$$

介质分界面与 B 垂直时, 界面上无磁化电流

34

分界面 $\perp B$, 故 $B = B_n$, 而界面上 B_n 连续, 即:

$$B_1 = B_2 = \dots = B_i = B$$

由毕奥—萨伐尔定律 B 和 B_0 (无介质时传导电流产生的磁感应强度)在大
小上差一常数, 但具有相同的构形:

$$\bar{B} = \alpha \bar{B}_0$$

即介质的引入不改变磁感应强度的分布形式, 改变的仅仅是它的强度。这种情况下, 可去掉介质, 按真空情况处理, 算得真空下的 B_0 , 由环路定理确定系数 α , 再推算介质下的 B :

$$\oint_L \frac{\bar{B}}{\mu_0 \mu_r} \cdot d\bar{l} = \sum I_0$$

$$\bar{B} = \alpha \bar{B}_0$$

$$\alpha = \frac{\sum I_0}{\oint_L \frac{\bar{B}_0}{\mu_0 \mu_r} \cdot d\bar{l}}$$

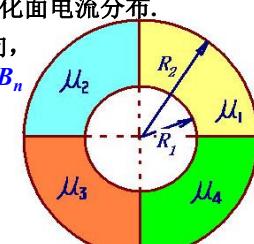
35

【例22】半径为 R_1 和 R_2 的导体构成同轴电缆。
通一电流 I , 内充 4 种介质, 各占 $1/4$ 。求介质
内 B 和 H , 传导面电流和磁化面电流分布。

【解】 B 方向为圆周切线方向,
与两介质分界面垂直, 故 $B = B_n$
介质界面 B_n 连续:

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = B$$

各磁介质区域磁感应
强度相等, B 有对称性!



$$\begin{aligned} \text{由磁介质中的环路定理} \quad & \oint_L \bar{H} \cdot d\bar{l} = \oint_L \frac{\bar{B}}{\mu_0 \mu_r} \cdot d\bar{l} \\ (R_1 < r < R_2) \quad & = \frac{B}{\mu_0 \mu_1} \frac{1}{2} \pi r + \frac{B}{\mu_0 \mu_2} \frac{1}{2} \pi r + \frac{B}{\mu_0 \mu_3} \frac{1}{2} \pi r + \frac{B}{\mu_0 \mu_4} \frac{1}{2} \pi r = I \end{aligned}$$

36

令 $\frac{1}{\mu'} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} + \frac{1}{\mu_4}$ $\Rightarrow B = \frac{2\mu_0\mu'I}{\pi r}$

或者先算真空下的 B_0 $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$$\alpha = \frac{I}{\oint_L \frac{\bar{B}_0}{\mu_0\mu_r} \cdot d\bar{l}} = \frac{I}{2\pi r} \left(\frac{1}{\mu_0\mu_1} + \frac{1}{\mu_0\mu_2} + \frac{1}{\mu_0\mu_3} + \frac{1}{\mu_0\mu_4} \right) \frac{1}{2\pi r} = 4\mu'$$

$$B = \alpha B_0 = 4\mu' \mu_0 \frac{I}{2\pi r} = \frac{2\mu_0\mu'I}{\pi r}$$

两者相等

37

$$\bar{H}_i = \frac{1}{\mu_0\mu_i} \bar{B}$$

$$\begin{cases} \bar{H}_1 = \frac{\bar{B}}{\mu_0\mu_1} = \frac{2\mu'I}{\pi\mu_1 r} \\ \bar{H}_2 = \frac{\bar{B}}{\mu_0\mu_2} = \frac{2\mu'I}{\pi\mu_2 r} \\ \bar{H}_3 = \frac{\bar{B}}{\mu_0\mu_3} = \frac{2\mu'I}{\pi\mu_3 r} \\ \bar{H}_4 = \frac{\bar{B}}{\mu_0\mu_4} = \frac{2\mu'I}{\pi\mu_4 r} \end{cases}$$

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = B$$

$$\bar{H}_1 \neq \bar{H}_2 \neq \bar{H}_3 \neq \bar{H}_4$$

各区间磁场强度 H_i 与磁介质有关, 不具有对称性

38

各区间磁化强度 (与磁介质有关):

$$\begin{cases} M_1 = \chi_{m1} H_1 = (\mu_1 - 1) H_1 = \frac{2(\mu_1 - 1)\mu'I}{\pi\mu_1 r} \\ M_2 = \chi_{m2} H_2 = (\mu_2 - 1) H_2 = \frac{2(\mu_2 - 1)\mu'I}{\pi\mu_2 r} \\ M_3 = \chi_{m3} H_3 = (\mu_3 - 1) H_3 = \frac{2(\mu_3 - 1)\mu'I}{\pi\mu_3 r} \\ M_4 = \chi_{m4} H_4 = (\mu_4 - 1) H_4 = \frac{2(\mu_4 - 1)\mu'I}{\pi\mu_4 r} \end{cases}$$

39

两介质的交界面上, 尽管 $M_1 \neq M_2 \neq M_3 \neq M_4$

但是 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_n, \mathbf{M} = \mathbf{M}_n$

$$\bar{i}' = (\bar{M}_1 - \bar{M}_2) \times \bar{n} = 0$$

两介质交界面上无磁化电流;
磁化电流仅可能出现在介质和载流导体的界面

40

$$\bar{i}_0 = (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) \times \bar{n} \quad \bar{i}' = (\bar{M}_1 - \bar{M}_2) \times \bar{n} \quad \bar{n} = -\bar{e}_r$$

内表面

对 $r < R_1, \mathbf{B} = \mathbf{H} = \mathbf{M} = \mathbf{0}$, 因此可求出 $r=R_1$ 处的四个磁化面电流和四个传导面电流 (都与磁介质相关)

$$\begin{cases} i_{01} = H_1|_{r=R_1} = \frac{1}{\mu_1} \frac{2\mu'I}{\pi R_1} \\ i_{02} = H_2|_{r=R_1} = \frac{1}{\mu_2} \frac{2\mu'I}{\pi R_1} \\ i_{03} = H_3|_{r=R_1} = \frac{1}{\mu_3} \frac{2\mu'I}{\pi R_1} \\ i_{04} = H_4|_{r=R_1} = \frac{1}{\mu_4} \frac{2\mu'I}{\pi R_1} \end{cases} \quad \begin{cases} i_1' = M_1|_{r=R_1} = \frac{2(\mu_1 - 1)\mu'I}{\pi\mu_1 R_1} \\ i_2' = M_2|_{r=R_1} = \frac{2(\mu_2 - 1)\mu'I}{\pi\mu_2 R_1} \\ i_3' = M_3|_{r=R_1} = \frac{2(\mu_3 - 1)\mu'I}{\pi\mu_3 R_1} \\ i_4' = M_4|_{r=R_1} = \frac{2(\mu_4 - 1)\mu'I}{\pi\mu_4 R_1} \end{cases}$$

$i_{01} \neq i_{02} \neq i_{03} \neq i_{04}$ $i_1' \neq i_2' \neq i_3' \neq i_4'$

41

同理, $r > R_2, \mathbf{B} = \mathbf{H} = \mathbf{M} = \mathbf{0}$, 可求出 $r=R_2$ 处的四个磁化面电流和四个传导面电流

$$\begin{cases} i_{01} = H_1|_{r=R_2} = \frac{1}{\mu_1} \frac{2\mu'I}{\pi R_2} \\ i_{02} = H_2|_{r=R_2} = \frac{1}{\mu_2} \frac{2\mu'I}{\pi R_2} \\ i_{03} = H_3|_{r=R_2} = \frac{1}{\mu_3} \frac{2\mu'I}{\pi R_2} \\ i_{04} = H_4|_{r=R_2} = \frac{1}{\mu_4} \frac{2\mu'I}{\pi R_2} \end{cases} \quad \begin{cases} i_1'' = M_1|_{r=R_2} = \frac{2(\mu_1 - 1)\mu'I}{\pi\mu_1 R_2} \\ i_2'' = M_2|_{r=R_2} = \frac{2(\mu_2 - 1)\mu'I}{\pi\mu_2 R_2} \\ i_3'' = M_3|_{r=R_2} = \frac{2(\mu_3 - 1)\mu'I}{\pi\mu_3 R_2} \\ i_4'' = M_4|_{r=R_2} = \frac{2(\mu_4 - 1)\mu'I}{\pi\mu_4 R_2} \end{cases}$$

同一载流导体可与多种磁介质比邻, $i_1'' \neq i_2'' \neq i_3'' \neq i_4''$

42

$i = i_0 + i'$ $r = R_1 \Rightarrow i_1 = i_2 = i_3 = i_4 = \frac{2\mu' I}{\pi R_1}$

$i = i_0 + i''$ $r = R_2 \Rightarrow i_1 = i_2 = i_3 = i_4 = \frac{2\mu' I}{\pi R_2}$

即 $r=R_1, r=R_2$ 处的磁化面电流和传导电流密度分布都不均匀(与磁介质有关);
但总面电流 $i=i'+i_0$ 的分布却是均匀的。
总面电流分布的这种对称性决定了总磁感应强度的对称性。
可是介质的引入破坏了磁场强度 H 的轴对称性,因此无法直接通过安培环路定理计算 H 。

43

§ 5-2 磁性材料

§ 5.2.1 抗磁性、顺磁性和铁磁性

物质的磁性也可通过该物质在磁场中受到的力来定义

磁场分布有梯度

$$F_z = \frac{1}{\mu_0} \chi_m m B_x \frac{\partial B_x}{\partial z}$$

- 当材料被吸引到 S 即时, 为顺磁性材料;
- 当材料被 S 极排斥时, 为抗磁性材料;
- 由力的大小大致可判断为弱磁性材料或是强磁性材料.

44

1. 抗磁性材料

抗磁性的定义 $\bar{M} = \chi_m \bar{H}$

$\chi_m < 0$ ($10^{-5} \sim 10^{-6}$) M 与 H 反向 $\mu_r = 1 + \chi_m < 1$

- ◆ 磁化率 χ_m 小于0, 且绝对值远小于1, 属于弱磁性材料。
- ◆ 抗磁性是一切物质都具有的;
- ◆ 但当物质中的其他磁性(如顺磁性或铁磁性)超过抗磁性时, 会主要考虑其他磁性而忽略抗磁性。
- ◆ 精确计算和理论分析时, 必须考虑抗磁性的影响。

45

抗磁性材料的基本特性

- 抗磁性物质的磁化系数 χ_m 一般不随温度变化(少数物质如石墨烯除外);
- 抗磁性物质的磁化系数 χ_m 一般也不随物质状态发生变化(个别例外, 如铋)

(a) 原子无固有磁性 (b) 磁化曲线 (c) 磁化系数与温度无关

46

自然界中大多数物质都具有抗磁性

物质	磁化率	物质	磁化率
CO ₂	-21.0	Hg	-24.1
CO	-9.8	Al ₂ O ₃	-37.0
SO ₂	-18.2	NaCl	-30.3
Br ₂	-73.5	ZnO	-46.0
NH ₃	-18.0	C ₂ H ₂	-12.5
H ₂ S	-25.5	C ₆ H ₆	-54.84
SCl ₂	-49.4	C ₄ H ₁₀	-57.4
H ₂ SO ₄	-39.8	PbO	-42.0

(单位: 质量比磁化率, $4\pi \times 10^{-6} \text{ cm}^3/\text{g}$)

47

抗磁性的磁化机制

电子绕核运动 外磁场 B 电子将绕 B 进动
力矩 $\bar{\mu}_e \times \bar{B}$ 进动角速度 $\Omega = \frac{e}{2m_e} \bar{B}$

$\chi_m < 0$, 与温度无关

$$\chi_m = \frac{M}{H} = -\frac{\mu_0 n_0 Z e^2}{6m_e} \langle r^2 \rangle$$

电子进动产生附加磁矩 $\Delta \bar{\mu}_e(\Omega)$ $\Delta \bar{\mu}_e(\Omega) = -\frac{e^2 r^2}{4m} \bar{B}$ 与 B 方向相反

材料抗磁性的微观机制 抗磁性物质, 原子的固有磁矩为0, M 由电子进动产生的附加磁矩贡献

$$\bar{M} = n_0 Z \Delta \bar{\mu} = -\frac{\mu_0 n_0 Z e^2 \langle r^2 \rangle}{6m_e} \bar{H}$$

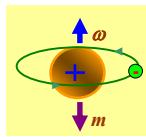
48

抗磁性磁介质分子的固有磁矩为零，这是因为抗磁性原子中的电子壳层是满壳层，每一壳层中的电子自旋磁矩互为反向平行而抵消，其轨道运动产生的轨道磁矩在无外磁场时也是相互抵消的，因此所有原子（或分子）的合磁矩为零。

电子的轨道磁矩 μ_l

$$\mu_l = \pi r^2 I = -\pi r^2 \frac{e}{2\pi/\omega} = -\frac{er^2}{2} \omega$$

矢量形式 $\vec{\mu}_l = -\frac{er^2}{2} \vec{\omega}$



49

在外磁场 B 中，该电子受到的力矩

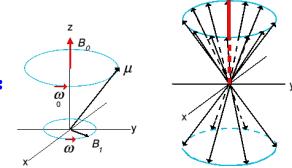
$$\tau = \vec{\mu}_l \times \vec{B} = -\frac{er^2}{2} \vec{\omega} \times \vec{B} = \frac{er^2}{2} \vec{B} \times \vec{\omega}$$

该力矩作用下，**电子将绕 B 进动**。通常外磁场的洛伦兹力远小于分子内的库仑力，以至于**进动角速度 Ω 远小于电子绕核运动的角速度 ω** 。由力学可推出：

$$\tau = m_e r^2 \bar{\Omega} \times \bar{\omega}$$

代入上式得**进动角速度 Ω** ：

$$\bar{\Omega} = \frac{e}{2m_e} \bar{B}$$



电子轨道面的**进动角速度总是与外磁场同向**，与电子轨道的取向和电子旋转的方向、快慢无关。

50

- 电子进动将产生**附加磁矩 $\Delta\mu_e(\Omega)$** ，该磁矩与 Ω 反向，亦与 B 反向

$$\Delta\vec{\mu}_e(\Omega) = -\frac{1}{2} er^2 \bar{\Omega} = -\frac{e^2 r^2}{4m_e} \bar{B} \quad \bar{\Omega} = \frac{e}{2m_e} \bar{B}$$

- 电子的总磁矩

$$\vec{\mu} = \sum [\vec{\mu}_e + \Delta\vec{\mu}_e(\bar{\Omega})] = \sum \vec{\mu}_e + \sum \Delta\vec{\mu}_e(\bar{\Omega})$$

对抗磁性物质 $\sum \vec{\mu}_e = 0$

但 $\sum \Delta\vec{\mu}_e(\bar{\Omega}) \neq 0$ 且与磁场反向，呈现**抗磁性**。
因此，**电子进动产生的附加磁矩是材料抗磁性的微观机制**。

51

对全部电子轨道统计平均后，得到一个电子进动产生的附加磁矩为：

$$\Delta\vec{\mu}_e = -\frac{e^2 \langle r^2 \rangle}{6m_e} \bar{B}$$

设一个分子中电子总数为 Z （对单原子分子， Z 为原子序数），单位体积中分子数目为 n_0 ，则

$$M = n_0 Z \Delta\vec{\mu}_e = -\frac{n_0 Z e^2 \langle r^2 \rangle}{6m_e} \bar{B} = -\frac{\mu_0 n_0 Z e^2 \langle r^2 \rangle}{6m_e} \bar{H}$$

磁化率为： $\chi_m = -\frac{\mu_0 n_0 Z e^2}{6m_e} \langle r^2 \rangle$ 对给定的 n_0 ， χ_m 与温度无关

52

2. 顺磁性材料

顺磁性的定义

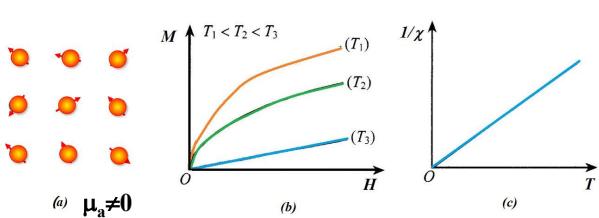
$$\chi_m > 0 \quad (10^{-4} \sim 10^{-5}) \quad M \text{ 与 } H \text{ 同向} \quad \mu_r = 1 + \chi_m > 1$$

χ_m 值远小于 1，属于**弱磁性**材料，如锰、铬、锂、钠等

顺磁性材料的基本特性

- 顺磁性介质分子具有**固有磁矩** ($\mu_a \neq 0$)。
- 外磁场使每个分子磁矩都受到一个力矩，使分子磁矩转向外磁场方向 $M \neq 0$ 。
- 热运动阻止 M 转向 H 方向，**温度越高，顺磁效应越弱**。

53



T 减小， χ_m 增大，顺磁性材料服从

$$\text{居里定律 } \chi_m = \frac{C}{T} \quad \text{或 居里-外斯定律 } \chi_m = \frac{C}{T - T_c}$$

C 为居里常数， T_c 为居里温度，温度低于 T_c 时材料表现出顺磁性特征。 C 和 T_c 可从实验获得

54

顺磁性分类		
顺磁性	一般顺磁性	居里顺磁性 $\chi_m = \frac{C}{T}$
	泡利顺磁性	居里-外斯顺磁性 $\chi_m = \frac{C}{T-T_C}$
	范弗莱克顺磁性	顺磁性 $\chi_m(18^\circ\text{C})$
		锰 12.4
		铬 4.5
		铝 0.82
	$(\times 10^{-5})$	空气* 30.36

顺磁性的磁化机制

具有固有磁矩的分子在外加磁场中受力矩，向外场方向转向

$$\vec{L} = \vec{\mu}_m \times \vec{B} \quad \mu_m \text{为分子磁矩}$$

磁分子取向在有外场时满足 Boltzmann 分布

$$dn(\theta) = A e^{-\frac{\epsilon_p}{KT}} \sin \theta d\theta$$

A 为归一化因子。磁矩在外场中的势能为：

$$\epsilon_p = -\vec{\mu}_m \cdot \vec{B} = -\mu_m B \cos \theta$$

56

when $|\epsilon_p| \ll kT$ k 为波尔兹曼常数，取一级近似

$$e^{-\frac{\epsilon_p}{KT}} \approx 1 - \frac{\epsilon_p}{KT} = 1 + \frac{\mu_m B \cos \theta}{KT} \quad \epsilon_p = -\mu_m B \cos \theta$$

$$\therefore dn(\theta) = A e^{-\frac{\epsilon_p}{KT}} \sin \theta d\theta = A \left(1 + \frac{\mu_m B \cos \theta}{KT} \right) \sin \theta d\theta$$

由归一化关系 $\int dn(\theta) = n_0$ 得 $A = n_0 / 2$

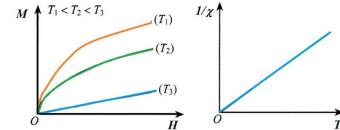
$$dn(\theta) = \frac{n_0}{2} \left(1 + \frac{\mu_m B \cos \theta}{KT} \right) \sin \theta d\theta$$

57

所以磁化强度 M 为：

$$M = \int \mu_m \cos \theta dn(\theta) \approx \frac{n_0 \mu_m^2}{3KT} B = \frac{n_0 \mu_0 \mu_m^2}{3KT} H = \chi_m H$$

系数 χ_m 为： $\chi_m = \frac{\mu_0 n_0 \mu_m^2}{3KT} = \frac{C}{T}$ 磁介质的磁化率与温度成反比



对气态，顺磁介质实验与理论符合，但对固态或液态磁介质，上式不完全符合

58

在量子力学中，可推出顺磁材料弱磁场下磁化率

$$\chi_m = \frac{\mu_0 n_0 g}{3} S(S+1) \frac{\mu_B^2}{kT} = \frac{C}{T}$$

顺磁材料的应用

- (1) 通过顺磁性来研究电子组态；
- (2) 利用顺磁性的绝热去磁效应，可获得 $1 \sim 10^{-6}\text{K}$ 的超低温；
- (3) 发展具有超低噪声的顺磁量子放大器以及顺磁共振成像技术等。

59

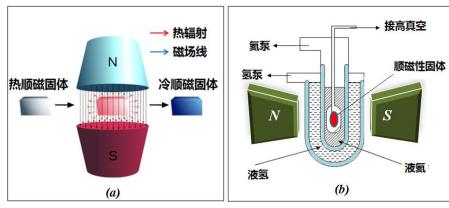
3. 磁制冷技术

温区	温度范围(K)	材料磁特性	材料的磁效应	例子
常温区	~ 300	磁临界温度特性	磁-热效应	Gd 和 Gd 合金
低温区	1-200	磁临界温度特性	磁-热效应	Gd ₃ Ca ₅ O ₁₂ 系
超低温区	0.001~1	顺磁性	绝热去磁	Mn 系和 Cr 系
极低温区	<0.001	顺磁性	核绝热去磁	³ He, ⁶³ Cu 等

- 绝热去磁制冷技术是德拜(P. Debye, 获1936年诺贝尔化学奖)在1926年首先提出来；
- 1933年加拿大科学家吉奥克(W. Giauque, 获1949年诺贝尔化学奖)首次获得应用，温度降到 0.25K 和 0.13K ；
- 1950年用该技术已达到了 0.0014K ；
- 1956年英国人西蒙和克尔梯用核去磁冷却法获得 10^{-6}K 。

60

绝热去磁方法的基本原理: 将顺磁性物质放在减压液氦冷却的腔内, 加上磁场(10^6 A/m)进行等温磁化, 抽出低压氦气而使顺磁体绝热, 然后准静态地使磁场减小到很小的值。由于在绝热去磁条件下, 吸收大量的热, 故产生制冷效应。



目前用Cu核的最低致冷温度已经达到了 $2 \times 10^9 \text{ K}$ 。由于PrNi₅合金具有超精细作用增强效应, 可以使镨(Pr)核受到的超精细磁场比外磁场增强约14倍, 这可以使磁铁体积减少, 可以作为Cu核致冷的前一级致冷。

61

作业

5.10, 5.14, 5.15, 5.16

