

图论导引

笔记 & 题解

Eastwind

目录

1 图的基本概念	3
题解	3
2 树	24
题解	24
3 图的连通性	50
题解	50
4 平面图	74
题解	74
5 匹配理论	84
题解	84
6 Eular 图与 Hamilton 图	95
题解	95
7 图的着色	104
题解	104
有向图	108
笔记	108
题解	109
网络流理论	110
笔记	110
题解	111
图矩阵与图空间	112
笔记	112
题解	113

1 图的基本概念

题解

1.

简单图中无环或重边，所以选取一条边等价于选取一个无序无重复的点对，选取方法总数由组合数学知识即可计算出，为 $\binom{v}{2} = \frac{v(v-1)}{2}$.

2.

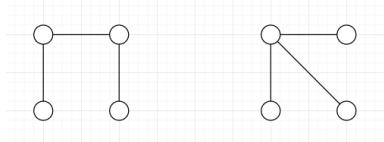
(1) 由“同构”定义中的“一一映射”即证。

(2)

反例如下：



若额外给出简单图，连通图等要求，反例的构造依然容易：

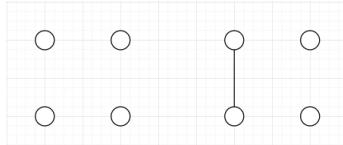


3.

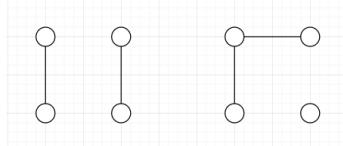
最基本的做法是给 4 个点编号后，根据 K_4 边集中的每一条边是否在 $E(G)$ 中，枚举所有情况（共 $2^{\binom{4}{2}} = 64$ 种），然后逐一判断排除同构的那些。

更可行一些的做法是先分边的数量讨论. 为了确定边数相同的所有同构类, 根据最大度, 是否存在一对不相邻边等特征按顺序讨论; 当分类足够小后, 在每个类内部逐一枚举并根据直观判断是否有同构的, 以免面对太过繁杂的情况判断出错. 当然, 这种做法之所以可行是因为现在问题的规模较小 (点的数量较少) .

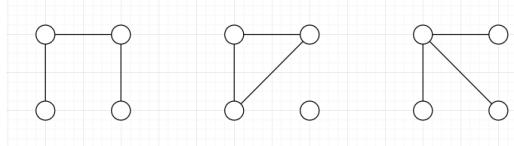
$\epsilon = 0$ 或 1 : 显然都只有 1 种同构类.



$\epsilon = 2$: 最大度 Δ 可能取 1 或 2. $\Delta = 1$ 时, 只能是两个 K_2 的不交并; $\Delta = 2$ 时, 只能两条边连在同一个点上. 总共 2 种同构类.

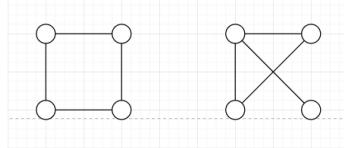


$\epsilon = 3$: 如果 $\Delta = 1$, 只能是三个 K_2 的不交并, 需要 6 个点, 做不到. 所以只能有 $\Delta = 2$ 或 3. $\Delta = 2$ 时, 整个图的度数序列可以是 2, 2, 1, 1 或 2, 2, 2, 0, 分别对应一种同构类; $\Delta = 3$ 时, 必须三条边连在同一个点上. 总共 3 种同构类.

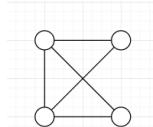


$\epsilon = 4$: 四个点的图中 Δ 至多为 3, 故依然只能有 $\Delta = 2$ 或 3. $\Delta = 2$ 时, 只能是一个圈 C_4 ; $\Delta = 3$ 时, 在三条边连上一个点的基础上, 需要在剩下三个点之间加一条边, 由于前三条边形成了一个 $K_{1,3}$ (通常称作 claw), 此时这三个点是对称的, 无论加在哪两个点之间都一样. 总共 2 种同构类.

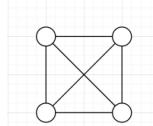
(还有一种更简单的方法: 一个 $v = 4, \epsilon = 4$ 的图一定是一个 $v = 4, \epsilon = 2$ 的图的补图, 而两个图同构当且仅当其补图同构. 因此前者的同构类数量必定等于后者. 如果充分运用这一点, 我们总是只用讨论一半的 ϵ 的情况.)



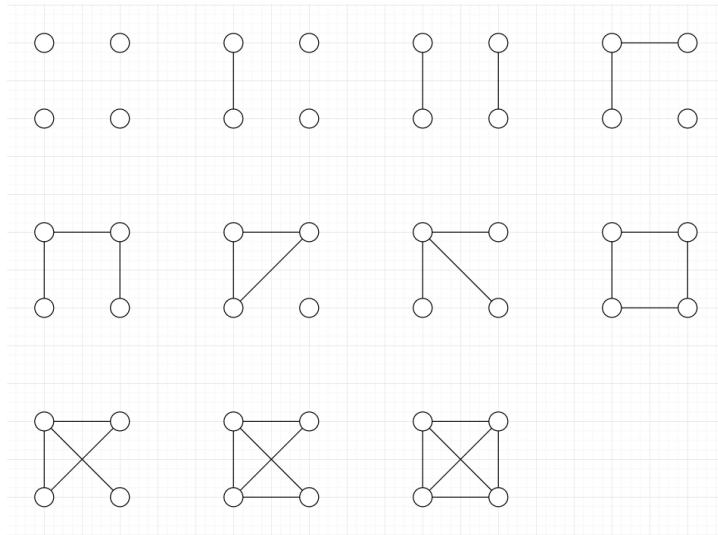
$\epsilon = 5$: 这样的图能够通过 K_4 删去一条边得到, 由对称性可知当然只有 1 种同构类.



$\epsilon = 6$: 只有 K_4 这一种同构类.



综上, 共 11 种同构类. 如下所示:



p.s. 第一种做法里, 严格的枚举与判断算法为:

- (1) 给每一个点编号，考虑每两个不同点之间的边是否存在以枚举所有简单图；
- (2) 对于其中一个图，验证此前的所有图是否与之同构（验证的算法为：遍历两个图各 4 个点的所有一一映射，检查边关系是否使这个映射成为同构），直到出现同构时排除或未出现同构而保留；
- (3) 重复 (2) 直到最后一个图也完成这样的验证过程。

显然这样一个算法的时间复杂度相当之高，在面对这道小规模题本身时，比起靠直觉枚举与判断没有任何竞争力。本解答中给出这样一个“笨”做法的意图在于告诉读者：适于这种问题的通用的平凡做法是存在的，可以用于无技术含量仅消耗时间地解决规模任意高的同类问题（而不必倚仗可能出错，难以判定的直觉）。

p.p.s. 在这整本习题解答中，我们假设读者已经背下了所有课本上概念的定义，并接受了（哪怕并不理解）所有定理与算法的正确性（否则你现在更需要读的大概是课本而非此解答）。因此，手搓算法类的题目我们将略过解答；一些 *trivial* 的等式或不等式的证明也将略过；可以通过遍历算法解决的问题，我们也将给出遍历思路后不予详述——除非以上题目的其它做法有独特的启发性。

4.

设总人数为 n ，则其中一个人的朋友数只有 n 种可能的取值： $0, 1, \dots, n - 1$ 。

反证法：假定这 n 人每人的朋友数各不相同，则一定取遍 0 到 $n - 1$ 的所有值。考虑其中朋友数分别为 0 与 $n - 1$ 的两人甲与乙，则甲应与任何其他人不为朋友，而乙与任何其他人都为朋友，此时考虑“甲与乙是否是朋友”便产生矛盾。

5.

先讨论平凡的情况, 再关注一般情况:

1. $n = 2$:

易证.

2. $n > 2$:

反证法: 设此 $2n$ 人为 v_1, v_2, \dots, v_{2n} . 不妨设 v_1 至少与所有形如 v_{2i} 的人认识. 则为了使待证命题为假, v_3 只能与至多一个 v_{2i} 认识 (由对称性, 不妨设 v_3 至多认识 v_2), 那么他的剩下的至少 $n - 1$ 个名额只能分配给 v_1 以及 $v_5, v_7 \dots v_{2n-1}$ (从而他必须的确认识 v_2). 由对称性可知, 这一结论对于所有形如 v_{2i+1} 的人成立.

再次分情况讨论:

2.1. $n > 3$:

则 v_1, v_3, v_5, v_7 已满足命题要求;

2.2. $n = 3$:

2.2.1 v_5 认识 v_{2i} 中除 v_2 外的至少一个 (不妨设为 v_4):

则 v_1, v_3, v_5, v_4 满足命题要求;

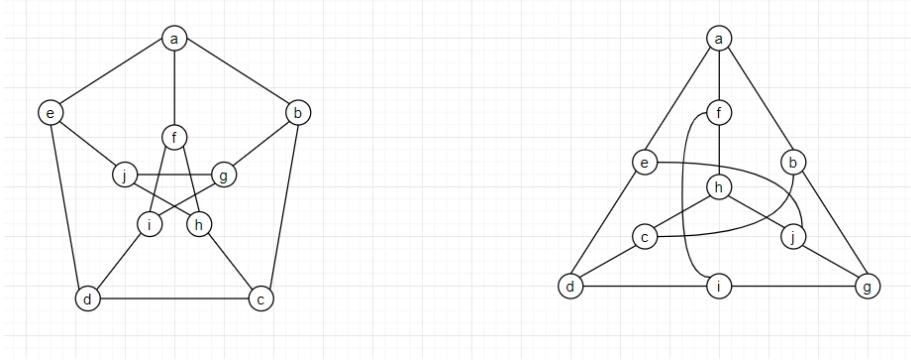
2.2.2 v_5 恰好只认识 v_2 :

则 v_1, v_3, v_2, v_5 满足命题要求.

p.s. 本题解答所用的“分情况讨论, 逐个解决或划归至其他情况, 先平凡后一般”的架构在比较简单朴素的图论证明题中时常会用到.

6.

要证明两个图同构, 即需给出点之间的一一映射并验证边关系.



p.s. 本题中值得注意的地方在于，容易注意到图 1 中每个点的地位都是对等的（常用的术语是图 1 是“点传递的”），所以可以任选图 1 与图 2 中各一个点进行对应。更进一步地，在固定了一个点之后，其邻接的任一条边的地位也是对等的，且这种对等与边的方向性无关（这两条性质对应的常用的术语分别是“边传递的”与“弧传递的”）！因此在两个图选定两个点之后，我们还可以继续任选这两个点的各一个邻点进行对应！

在此基础之上根据边关系不断试错效率更高。

7.

(1)

由组合数学中的乘法原理即得。

(2)

设 $|X| = m$, 即 X 中有 m 个点, 则有:

$$\epsilon(G) \leq m(v(G) - m) \leq \frac{(v(G))^2}{4}$$

8.

假想切断这 k 条连接 V' 与 $V - V'$ 的边, 剩余的两个联通片必须各自成图 $G(V')$ 与 $G(V - V')$.

考虑 V' 中所有点在 G 中的总度数, 应有 $\sum_{v \in V'} \deg(v) = 2\epsilon(G(V')) + k$. 因此左式与右式的第一项奇偶性相同, 而左式奇偶性又与求和诸项中奇数的数量的奇偶性相同.

9.

由例 1.8 知这样一个图 G 中含圈 (设为 C). 对于 C 上的每一个点, 构成 C 的边已经为其贡献了 2 度数, 故 C 上的所有点都没有不在 C 上的边. 此时 G 中如果还有 C 以外的点, 则这些点与 C 必定不连通, 进而 G 不连通, 矛盾. 故有 $G = C$, 即 G 是一个圈.

10.

(1)

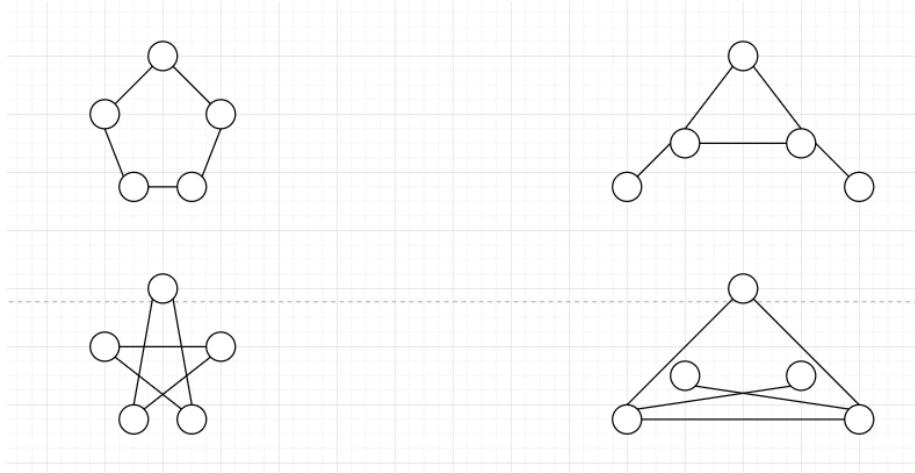
G^c 与 G 的边数应相同, 而二者的边合起来恰好用掉 $K_v(G)$ 中的每条边各一次, 即:

$$2\epsilon(G) = \frac{v(G)(v(G)-1)}{2}$$

然后由初等数论知识即证.

(2)

由 (1) 知 $\epsilon(G) = 5$, 枚举并逐一验证即可.



11.

我们断言 $K_{2,3}$ 是一个无法嵌入任何 Q_n 的二分图, 下面来证明这一点:

首先, 为了便于描述, 我们引入一些在讨论 Q_n 相关的问题时常见的基本概念:

对于 $V(Q_n)$, 将其中的每个点视作一个长为 n 的 $0 - 1$ 序列, 两个点之间连边当且仅当对应的序列恰好在一个分量上相异 (两个序列按位作对称差的结果恰有一位为 1)。我们将 $V(Q_n)$ 中恰有 i 个分量为 1 的序列打包成一个集合, 称为 $V(Q_n)$ 的第 i 层, 记作 V_i ; 将 $E(Q_n)$ 中所有连接了 V_{i-1} 与 V_i 中的点的边打包成一个集合, 称为 $E(Q_n)$ 的第 i 层, 记作 E_i 。严格一点地说:

$$V_i = \{v | v \in V(Q_n), v \text{ 恰在 } i \text{ 个分量上为 } 1\}$$

$$E_i = \{uv | u \in V_{i-1}, v \in V_i\}$$

容易验证, 所有的 $V_i (0 \leq i \leq n)$ 构成了一个对 $V(Q_n)$ 的划分; 所有的 $E_i (1 \leq i \leq n)$ 构成了一个对 $E(Q_n)$ 的划分。

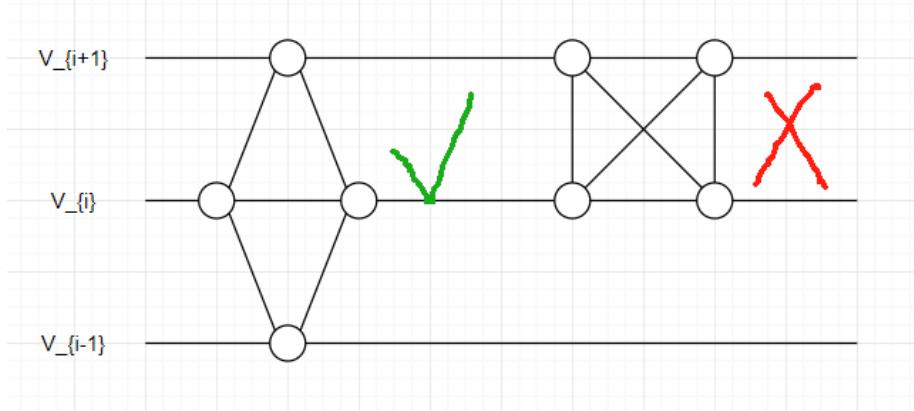
现在考虑 $K_{2,3}$ 的子图 $K_{2,2} \cong C_4$, 它可以以怎样的方式嵌入一个 Q_n ? 我们考虑 C_4 中的任意一个点 v_1 , 不妨设它在第 i 层, 则其邻点 v_4 与 v_2 所在的层数无非两种可能: 二者同在 $i + 1$ 层或 $i - 1$ 层; 或一个在 $i + 1$ 层另一个

在 $i - 1$ 层. 由于这里“上”与“下”是完全对称的, 对于前一种情况我们可以任取一种考虑.

如果 $v_2, v_4 \in V_{i+1}$, 由于 v_3 要与它们同时相邻, 则只能有 $v_3 \in V_i$ 或 V_{i+2} . 但是, 我们已经知道 $v_1 \in V_i$, 所以一定有 v_2 在第 i 个分量上取到 1, v_4 在第 j 个分量上取到 1, 而 v_1 在这两个分量上同时取到 0, 且这三个点在其它 $n - 2$ 个分量上的情况完全相同. 这样才能做到 v_1 比 v_2, v_4 低一层, 且它们以 $v_2 \sim v_1 \sim v_4$ 的次序相连. 此时如果 v_3 也在第 i 层, 那么它的情况必须与 v_1 完全相同, 从而 $v_3 = v_1$, 矛盾! 实际上, 考虑 v_2 和 v_4 的分量, v_3 只可能在第 i, j 个分量上都取到 1, 才能与 v_2, v_4 同时相邻且不与 v_1 重合, 这就对应着 $v_3 \in V_{i+2}$ 的情况.

如果 $v_2 \in V_{i-1}, v_4 \in V_{i+1}$, 则只能有 $v_3 \in V_i$. 此时考虑这里 v_1, v_2, v_3 的关系, 它们恰好构成了上一段中 v_2, v_1, v_4 的结构. 仿照上一段的过程, 还是可以证明这四个点只能取到与此前同构的结构: v_4 某两个分量上取到 1, v_1, v_3 在这两个分量上分别恰好取到一次 1, 而 v_2 在这两个分量上都为 0.

经过上面的所有过程, 我们终于证明了一件事情: $K_{2,2} \cong C_4$ 嵌入 Q_n 在同构的意义下只有一种结构, 即如下图的左边所示:



现在考虑 $K_{2,3}$. 它比 $K_{2,2}$ 多了一个点, 且这个点与同一阵营中的两个点相连, 我们称之为 v_5 .

沿用上文第一种情况中的记号. 如果 $v_5 \sim v_1$ 且 $v_5 \sim v_3$, 那么只能有 $v_5 \in V_{i+1}$. 然而, 考虑 v_5 在第 i, j 位的分量, 我们会发现没有办法让它在不

和 v_2, v_4 重合的情况下与 v_3 相邻; 而如果 v_5 恰与 v_3 在另一个第 k 位分量上相异从而相邻, 它就没法和 v_1 只相差一个分量.

如果 $v_5 \sim v_2$ 且 $v_5 \sim v_4$, 仿照上一段的方法, 我们会发现无法决定 v_5 在各个分量上的取值, 使其既与 v_2, v_4 相邻, 又不与 v_1, v_3 重合.

p.s. 在研究立方体图相关的问题时, 用层的观点来看待 Q_n 中的点集与边集是另一种非常自然且好用的视角 (第一种是将 Q_n 看作两个 Q_{n-1} 的复合). 在习题 3.19 中我们将再次领略这一点.

p.p.s. 使用染色的语言, 我们可以对 “一个图可以嵌入某个 Q_n ” 这件事给出一个充要条件. 感兴趣的读者可以参考作者的笔记超立方体图中的 Turan 类问题一 C_4 的正密度, 可立方体化与可层化, 或直接阅读原论文 *On graphs embeddable in a layer of a hypercube and their extremal numbers*, 相关结果的证明在其第二部分.

12.

反证法: 考虑一既不是完全图也不是空图的图 G , 可取其中两相邻点 $v_1 \sim v_2$ 以及两不相邻点 $v_3 \not\sim v_4$, 则选取顶点子集 $A = \{v_1, v_2\}$ 与 $B = \{v_3, v_4\}$ 即可构成反例.

13.

$$2\epsilon = \sum_{v_i \in V} \deg(v_i)$$

$$\frac{2\epsilon}{v} = \frac{\sum_{v_i \in V} \deg(v_i)}{v}$$

需证即为 “平均值不大于最大值且不小于最小值”, 显然.

14.

(1)

7 与“简单”图矛盾;

类似地, 两个 6 与 1 矛盾.

(2)

注意到不等式左侧为前 k 个顶点的度数和; 右侧第一项不小于前 k 个顶点由自身内部贡献的度数之和, 而第二项不小于前 k 个顶点由后 $n - k$ 个顶点贡献的度数之和.

15.

考虑 G 的边数最大的二分生成子图 H (如果有多个, 任取其中一个), 设其点集被划分为 X 与 Y .

下面我们只证明 H 满足所给要求:

反证法: 假定 H 中存在被删去了一大半边的点 (不妨设其中一个为 v_i , 有 $v_i \in X$) :

显然 v_i 原先在 G 中所有与 X 中点相连的边现在在 H 中均被删去. 因为 H 是 G 边数最大的二分生成子图, v_i 与 Y 中点相连的边应尽数保留.

如果后一类边少于前一类, 那么将 v_i 搬到 Y 中, 并改变 G 中所有与 v_i 关联的边在 H 中的保留/删去情况, 得到的新图 G' 将仍是二分生成子图, 且边数大于 G . 矛盾.

p.s. 假如抛开图论的知识不谈, 在本法的解答中, 当我们试图证明 H 恰好就是一个符合要求的构造时, 我们实际上加强了结论 (而这无疑是危险的). 如果事先不知道 H 是否满足条件, 我们完全有可能在考虑的时候发现 H 不满足条件, 但将 H 中一个点的两条边删除再给另一个点添加一条边得到

的 H' 满足条件, 从而满足条件的不是边最大的二分生成子图 (哪怕“保留尽可能多的边”看上去确实比较“有利”).

在此后的解答中, 我们将频繁地看到“接下来改为证 …”“只需证 …”这样的连接段落的字眼. 请读者时刻记得自行判断, 这究竟是对原给命题的等价变换, 还是有风险的加强/放缩.

16.

$k = 0$ 或 $k = 1$: 显然.

$k > 1$:

用如下算法构造出一个满足要求的轨道 L :

- (1) 在 G 中任取一个点 v_0 ;
- (2) 由于 G 是简单图且 $\delta > 1$, v_0 必然有除它自身以外的邻顶, 任取其一 v_1 ;
- (3) 同理, v_1 必然有除 v_0 和它自身以外的邻顶, 任取其一 v_2 ;
- (4) 设上一个取到的点为 v_i , 若 $i = k$, 显然 $v_0v_1 \cdots v_i$ 即为所要找的 L , 算法结束;

若不然 ($i < k$), 则 v_i 必然存在除 v_0, v_1, \dots, v_{i-1} 以外的邻顶, 即存在还没有被取到的邻顶, 任取其一 v_{i+1} , 重复 (4).

p.s. 不难看出, 本题的这一证法与例 1.8 异曲同工. 在第 24 题的解答里我们还会再次见到这种“给出构造算法”思想的运用.

17.

必要性:

若不存在, 则从 V' 与 $V - V'$ 两个“区域”中各选一点(设为 v, u), G 中必定存在 v_u 之间的路径. 考虑路径上每一个点所属的“区域”即得矛盾.

充分性:

反证法: 若 G 是非连通图, 其连通片为 $X, Y, Z \dots$

设 $X' = X, Y' = \bigcup\{Y, Z \dots\}$, 则有 X' 与 Y' 不连通. 令 V' 为 X' 即得矛盾.

p.s. 这一解答对“多个连通片”情况打补丁的方法与必要性与例 1.11 解答相同.

18.

对于非连通的简单图 G , 考虑将其点集 V 划分为不连通的两部分 X, Y (注意并不需要 X 和 Y 自身是连通集), 则每一部的边数至多为 $\binom{|X|}{2}$ 与 $\binom{|Y|}{2}$, 而 $|X| + |Y| = v$.

考虑使此式取值最大的 $|X|$ 即得.

19.

(1)

所证命题即为“删掉一条边后, 可以增加 1 个连通片, 但也至多 1 个”.

采用反证法: 假定连通图 G 中存在 $e = uv$ 使得 $G - e$ 有至少 3 个连通片. 任取三个连通片, 从中各任取一个点 x, y, z , 则 $G - e$ 中 x, y, z 两两不存在轨道连接, 而 G 中 x, y, z 两两存在轨道连接, 且 e 出现在每一个这样的轨道上.

任取 G 中 x, y 之间的一条轨道, 则其中 e 只出现一次. 不妨设这个轨道对应的点序列中, x 与 u 在 e 的同侧, y 与 v 在 e 的同侧. 则 $G - e$ 中 x 必定与 u 连通(显然)而与 v 不连通(否则连接 xv 轨道与 vy 轨道即得一条

$G - e$ 中的 xy 路, 矛盾). 同理, $G - e$ 中 y 与 v 连通而与 u 不连通. 现在考虑 G 中一条 xz 轨道. 如果 x 在 v 这一侧, 则与已知的 x 和 u 在 $G - e$ 中不连通矛盾, 从而必须是 z 在 v 这一侧. 但这又意味着 $G - e$ 中存在 zv 路与 vy 路, 连接后即得到 zy 路, 与反证假设 $G - e$ 中 y, z 不连通矛盾.

总而言之, 考虑 x, y, z 与 u, v 在 $G - e$ 中的连通性, 由于 G 中的连通性每个点至少与其中一者在 $G - e$ 中连通. 则根据抽屉原理必然有两个点与 u, v 中的同一个连通从而它们两个之间也连通, 这就与 x, y, z 两两不连通矛盾.

(2)

所证命题即为“删掉一个点后, 可以增加超过 1 个连通片”. 任一 $n \geq 3$ 的星图 S_n 都可以作为反例.

p.s. “一个连通图删去一条边后得到至多两个连通片”, 这件事看似非常显然, 但依然需要严谨的证明. 对于这种太过自然显得不知道要证什么的证明, 可以试着从定义出发.

20.

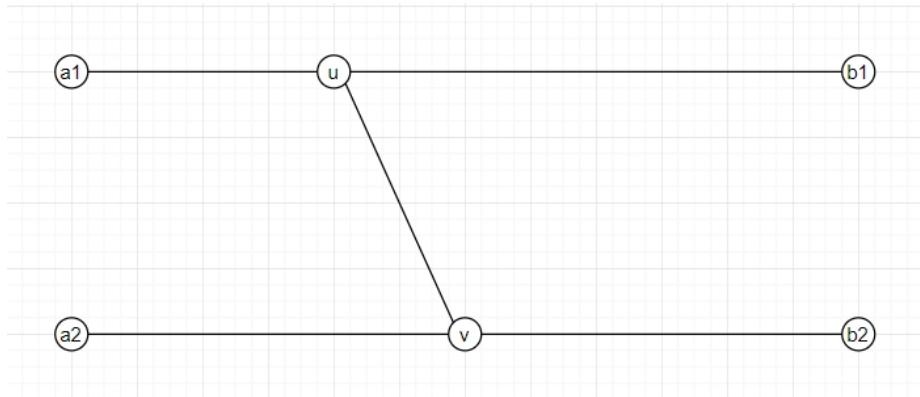
G 中删去 v 后, 若其关联的一条边所延伸出去的“分片”单独构成图(即构成连通片), 则其度数和为奇, 矛盾. 故所有“分片”必须偶数个一组成连通片, 从而删去 v 至多得到 $\frac{\deg(v)}{2}$ 个连通片.

21.

反证法:

设这两条轨道为 l_1, l_2 , 其端点分别为 a_1, b_1 与 a_2, b_2 .

由于 G 是连通图, G 中存在连接 a_1, a_2 的轨道 p , 取 p 上首个不在 l_1 中的点的前一个点, 记作 u ; 以及 u 之后首个在 l_2 上的点, 记作 v .



现在, 对于通过了 uv 的如下四条轨道: $a_1uva_2, a_1uvb_2, b_1uva_2, b_1uvb_2$, 考虑其分别的长度与长度和, 可以写出:

$$\begin{aligned} & \text{len}(a_1a_2) + \text{len}(a_1b_2) + \text{len}(b_1a_2) + \text{len}(b_1b_2) \\ &= 2\text{len}(a_1b_1) + 2\text{len}(a_2b_2) + 4\text{len}(u'v') \\ &\geq 2\text{len}(a_1b_1) + 2\text{len}(a_2b_2) \end{aligned}$$

从而这四条轨道中, 一定有一条长于 a_1b_1 和 a_2b_2 的长度平均值, 也就长于二者中的较短者, 从而 a_1b_1 和 a_2b_2 不是最长的轨道, 矛盾.

p.s. 请读者自行思考: 为什么在定义 u, v 时我们要采用如此不厌其烦的详细表述? 直接说“取 $u \in l_1, v \in l_2$ 则存在 u, v 轨道”可以吗? 这样能否保证 u, v 轨道与 l_1 和 l_2 在除端点处不交?

22.

这题显然要求 u, v, w 两两不同. 若不然, 任取 G 中一边 $e_0 = ab$, 令 $u = w = a, v = b$ 即满足要求. 而这样就平凡得过头了.

任取 G 中 3 个点 u, v, w , 记这 3 个点两两所连成的边在 E 中出现的条数为函数 $f(u, v, w)$, 则 f 的可能取值仅有 0, 1, 2, 3.

反证法: 假设任取 u, v, w , $f(u, v, w) \neq 2$:

任取 G 中一点 a_1 , 由于 $v > 1$ 且 G 连通, 故 a_1 至少与一个点相邻, 不妨设其中一个为 a_2 .

对于 G 中所有其余的点 v_i , 考虑 $f(a_1, a_2, v_i)$, 由于存在边 a_1a_2 , f 只能为 1 或 3.

定义如下两个点集合:

$$A = \{v_i | v_i = a_1 \vee v_i = a_2 \vee f(a_1, a_2, v_i) = 3\}$$

$$B = \{v_i | f(a_1, a_2, v_i) = 0\}$$

显然 A 与 B 构成对 $V(G)$ 的划分.

若 $B = \emptyset$, 则 A 中所有点两两相邻, 即 G 为完全图, 矛盾.

否则, 为使 B 与 A 连通, 由题 1.17 结论, A 中至少有一个点 (设为 a) 与 B 中至少一个点相邻 (设为 b).

则 $f(a_1, a, b) = 2$, 矛盾.

23.

给定一个含 e 的起点与终点相同的行迹 L , 我们用如下算法构造出一个满足要求的圈 C :

如果 L 的轨道表示中没有重复的点 (起点与终点这一对除外), 则 L 即为所求的 C .

若不然, 任取 L 的轨道表示中一对重复点 (设为 v_1), 其会将轨道表示分为两部分. 无论 e 在其中哪一部分, 都删去另一部分中的所有边, 并将这两个 v_1 合并成一个. 所得的表示显然没有重边, 故仍是一个行迹, 且起点与终点仍然相同 (均为 v_1). 命这个行迹为新的 L . 重新进行上述判断.

每次判断为假时, 都会删去 L 中若干条边. 由于行迹中边的数量是有限的, 故循环终将在有限次后终止.

p.s. 在证明某个结构的存在性时，描述一个能够构造出这个结构的算法，是一种常见的图论证明思路。为使证明的确成立，一般需要算法做到如下两点：

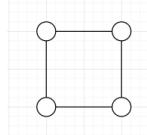
- ① 当算法输出时，输出只会是我们想要的结构；
- ② 算法一定会在有限次后终止。

第一条的必要性是显然的。第二条的必要性在于：如果我们对一个实际上并不存在目标结构的情况强行套用这个算法，那么算法只会一直进行下去，而这里并没有任何显式的“矛盾”。因此我们需要证明算法的终止以证明的确存在我们想要的结构。

而在这一点的证明中，展现“某个有下界/上界的量每一步都会减少/增加”是一种常见的证法。由于图论问题中处理的往往是离散的对象，每一次的减少/增加量往往是一个整数，故不会出现无限多个正量之和有限的情况。

24.

这道题应该是出错了... 对于题给命题可构造反例如下：



此图 G 满足 $\delta(G) = 2$, 但并没有长为 3 的圈。

为了最大程度地保留这道题背后暗含的洞见，我们猜测出题者的原意实际上是：“ G 是简单图， $\delta(G) \geq 2$ ，则 G 中有长度大于或等于 $\delta(G) + 1$ 的圈。”

与例 1.8 的思路类似，用如下算法构造出一个满足要求的圈 C:

- (1) 在 G 中任取一个点 v_0 ;
- (2) 由于 G 是简单图且 $\delta > 1$, v_0 必然有除它自身以外的邻顶, 任取其一 v_1 ;
- (3) 同理, v_1 必然有除 v_0 和它自身以外的邻顶, 任取其一 v_2 ;

(4) 设上一个取到的点为 v_i . 由于 δ, v_i 必然存在除它的前 $\delta - 1$ 个顶点 (即 $v_{i-1}, v_{i-2}, \dots, v_{i-\delta+1}$) 以外的邻顶. 如果其中存在一个已经被取到过 (设为 $v_k, k \leq i - \delta$) , 则:

$$v_k - v_{k+1} - \cdots - v_{i-1} - v_i - v_k$$

即为一个长度至少为 $\delta + 1$ 的圈. 算法结束.

否则 (如果所有邻顶都是不满足要求), 任取一个未被取到的邻顶 v_{i+1} , 回到 (4) ;

每次执行步骤 (4) 且判断为假时, 都会新添加一个被取到的点. 而 G 是有限图 (如无声明本书考虑的图都是有限图), 故步骤 (4) 必定在有限次重复后判断为真.

p.s. 本题与题 1.16, 例 1.8 类似, 都是依靠 δ 不断延长轨道, 再依据有限性证明递归算法总会完结且输出即为符合要求的构造, 从而所给的存在性命题是正确的. 但我们看题 1.16 与题 1.24 的表述 (假定 1.24 采用的是上文的正确表述), 为什么 1.24 直接给出了 $\delta + 1$, 而 1.16 需要引出 k 来陈述呢? 这是因为 “长为 k 的轨道” 总是蕴含了 “长为 $k - 1$ 或更短的轨道”, 而圈则未必蕴含更短的圈.

25.

(1)

若为非连通图, 必然存在至少一个连通片满足 $\epsilon(G) \geq v(G)$. 故划归至连通图的情况.

若为连通图:

法 1: 运用第 2 章树的知识.

法 2:

先证明: 连通图添加一条边后必然含圈.

运用归纳原理 (参见本题备注 1) . 归纳定义所有连通图, 这里只列出衍生过程:

- (2.1) 添加一个点 v_{n+1} 并将其与原图 G 中一个点 v_i 连边;
- (2.2) 在原图中任选两个点 v_i 与 v_j , 在它们之间连一条边.

然后证明, 有且仅有使用了至少一次 (2.2) 衍生出的图, 才满足 $\epsilon \geq v$ (当然从本题的逻辑讲证明 “仅有” 就够了) .

(2).

若为非连通图, 其所有连通片中要么存在至少两个满足 $\epsilon \geq v$, 要么存在至少一个依旧满足 $\epsilon \geq v + 4$. 对于前一种情况, 划归到第 (1) 问的结论; 对于后一种情况, 只关注这一个连通片, 从而划归到连通图:

对连通图的情况采用反证法:

考虑所有满足条件而结论不成立的图, 其中必然有 ϵ 最小的那个, 设为 G (如果有多个, 任取其中一个即可) .

先证在 G 中必然恰好 $\epsilon = v + 4$:

若 $\epsilon > v + 4$, 可以将 G 中若干边删除直到 $\epsilon = v + 4$. 易证所得的新图 G' 边数比 G 少而仍有结论不成立. 矛盾.

再证 $\delta(G) \geq 3$:

连通图 G 中没有 $\deg = 0$ 的点;

若 G 中有 $\deg = 1$ 的点: 显然该点及与其关联的边不作为构成圈的部分, 故可以将该点删掉而新图 G' 依旧满足条件且结论不成立. 同上理, 矛盾;

若 G 中有 $\deg = 2$ 的点: 删去该点并将其关联的两条边收缩成一条, 新图 G' 依旧满足条件且结论不成立. 同上理, 矛盾.

又证 G 中的任何圈长度 ≥ 5 :

若 G 中有长度为 3 或 4 的圈, 则删去这个圈上的所有边 (注意: 不改变任何点!) 得到的图 G' 将仍满足 $\epsilon \geq v$. 由 (1) 知 G' 有至少一个圈, 而这个圈与刚才被删掉的圈在 G 中均成立且无公共边, 矛盾.

有了这些准备, 现在我们取 G 中任一个最短圈 C , 其上至少有 5 个点. 由于 $\delta \geq 3$, 这至少 5 点的每一个又至少延伸出去一条边, 且延伸出去的点两两不同 (否则将会出现边数小于 5 的圈). 这样一来 G 中有 $v \geq 10$, 而又有 $2\epsilon \geq 3v$, 结合起来有 $\epsilon - v \geq \frac{v}{2} \geq 5$, 矛盾!

综上, 对于满足 $\epsilon \geq v + 4$ 的连通图 G , G 中至少有两个无公共边的圈.

p.s. 25.(1) 是本书习题中第一道适合使用归纳原理, 且不存在其它平凡做法的题目 (如果刻意要求不使用第 2 章知识的话). 可惜的是, 它形式上使用的是归纳原理的变种, 且使用了归纳原理后证明过程依然不是那么平凡, 所以它不是一道适合用来给初学者讲解归纳原理的题目. 如果读者在读到此处时还不了解归纳法, 可以先读后文题目 2.7 与 2.8 的解答, 或附录中关于归纳原理的部分.

p.p.s. 有的读者可能敏锐地注意到, 25.(1) 法 2 中在归纳定义连通图时, (2.2) 没有限制所连的两个点原先没有边, 所以可能与原题中“简单图”的条件不符. 但弱化了条件的证明一样可以作为对原命题的证明. 实际上也的确如此: 对于有环边或重边的图, “有圈”的结论是显然的.

p.p.p.s. 25.(2) 的解答中采用的结构被称为“无穷递降法”, 同样还用在 $\sqrt{2}$ 是无理数的证明中. 这一问也可以对 ϵ 使用数学归纳法证明, 其背后的思想与上文给出的无穷递降法本质基本相同 (读者不妨自行尝试过程的书写). 需要注意的是这并不是巧合, 数学归纳法与无穷递降法的本质都是自然数的良序原理: 对于一个非空自然数集, 其中的元素必然存在最小的那个. 这方面的内容在数理逻辑课程中将会更深入地讨论.

26.

手搓 Dijkstra 算法, 略.

27.

法 1: 观察法, 略.

法 2: 将所有物品各自所处位置的状态的所有可能性作为点 (共 16 个), 在彼此之间能够转换的状态之间连边, 对这个图手搓 Dijkstra 算法即可.

p.s. 对这样一道可以凭直觉一眼看出答案的题使用 *Dijkstra* 算法或许显得有些小题大做. 但正如前文所言, 本解答给出这样的做法并不一定是鼓励读者在面对同一道题目时一定要采用相同的做法, 而是指出这一类问题有平凡的通用方法存在. 就本题中“载物过河”的这个例子而言, 如果问题的规模增大, *Dijkstra* 算法可以在直觉难以继时依然有效且简易; 如果题目要求渡河次数最小的方案, 那么直觉虽然能给出方案并直观上感受到其正确性, 却大概难以给出形式化的对“最小”的证明. 一言以蔽之, 在数学中, 我们总是希望能找到平凡的通用方法以解决尽可能广泛的一类问题. 而注意到一个问题属于此类问题进而划归地解决, 这一过程本身便是对数学的锻炼.

28.

同上.

29.

由连通图可知, 没有度数为 0 的点. 又有:

$$2\epsilon = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

由此出发即可.

2 树

题解

1.

利用图的性质:

$$2\epsilon = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

与树的性质:

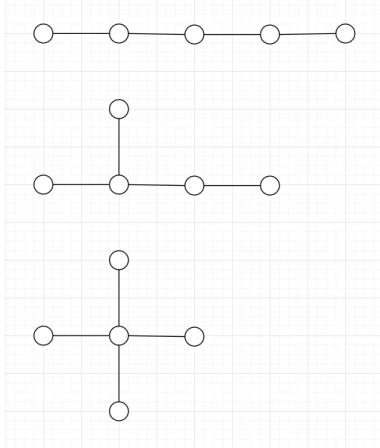
$$\epsilon = v - 1$$

即可计算出恰有两个度数为 4 的点.

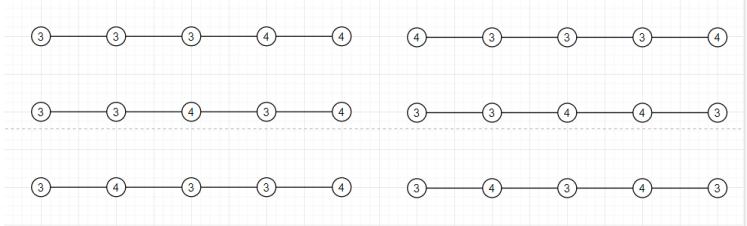
对于枚举所有满足条件的树, 可以从这样的角度出发: 容易想到任意多次删去一棵树上的树叶不会破坏这棵树的连通性, 因此我们可以考虑只画出这棵树的“主干”部分即所有度数不为 1 的点 (它们导出的子图一定也是一棵树, 由连通性及不含圈即证), 并给每个点指派其度数.

(正式一点地说, 考虑点集 $L(T) = \{v \in V(T) | \deg(v) = 1\}$, 则导出子图 $T - L(T)$ 依然是一棵树. $T_1 \cong T_2$ 当且仅当: $T_1 - L(T_1) \cong T_2 - L(T_2)$ 且 $T_1 - L(T_1)$ 与 $T_2 - L(T_2)$ 的点分别在 T_1 与 T_2 的度数对应相同.)

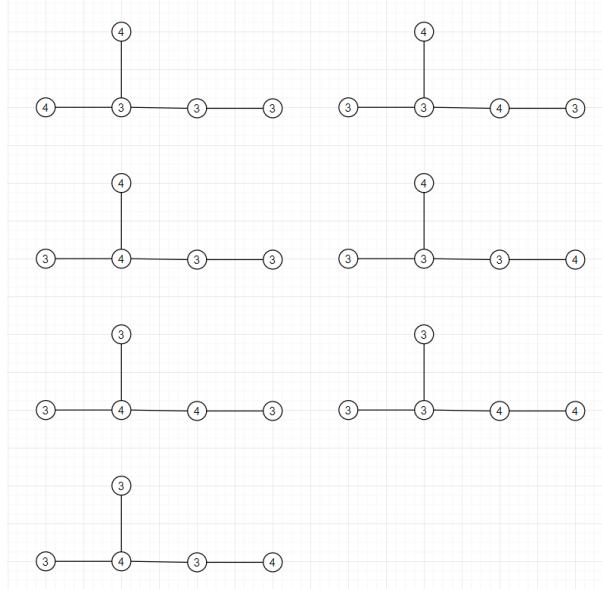
下面我们来画出所有可能的“主干”, 这等于画出一棵有 5 个顶点的树, 总共有三种同构类:



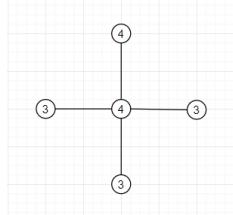
对于第一种“主干”，将三个 3 和两个 4 赋给其中每个点。注意这个主干是左右对称的。根据最靠外的 4 所处的位置分类枚举，在同构的意义下共有以下 6 种：



对于第二种“主干”，将三个 3 和两个 4 赋给其中每个点。注意这个主干中与交汇点相邻的两个点地位是对等的，且没有其它的对称性。根据最左侧的 4 所处的位置分类枚举，在同构的意义下共有以下 7 种：



对于第三种“主干”，注意这个主干中四个周围的点地位都是对等的，且中心点的度数一定为 4，容易看出在同构的意义下只有 1 种：



综上，这样的树共有 14 种同构类.

2.

同上，记树叶的数量为 n_1 ，则利用两条等式可以写出：

$$n_1 + \sum_{i=2}^k n_i i = 2(\sum_{i=1}^k n_i - 1)$$

解得

$$n_1 = \sum_{i=2}^k n_i(i-2) + 2$$

3.

根据上一题的结论, 我们可以知道一棵树恰有两片树叶, 当且仅当 $i \geq 3$ 对应的 n_i 全部取到 0, 即没有度数为 3 或更多的顶点, 其余顶点度数均为 2.

我们用归纳法证明, 一棵阶数为 n 的满足这样性质的树 T , 只能是长为 $n-1$ 的路 P_n :

当 $n = 2$ 时, 这样的图只能是 $K_2 \cong P_2$, 命题显然成立;

若 $n = k$ 时命题成立, 对于 $k+1$ 的情况, 任取一片树叶 l , 考虑删去 l 导出的子图 $T-l$. 在 T 中 l 的唯一邻居度数必然为 2 (否则 T 中两片树叶相邻, 无法再与其余的点连通), 从而在 $T-l$ 中这个点的度数降至 1, 而其余点度数不变, l 被删去, 因此 $T-l$ 是一棵阶为 k 的, 满足上述性质的树, 根据归纳假设 $T-l \cong P_k$, 从而 T 同构于在 P_k 的一个端点上再延长一条边得到的 P_{k+1} .

4.

我们证明引理: 删去树 T 中任何一个点 v 后, $T-v$ 中的连通片与 v 在 T 中的邻居存在一一对应关系, 且 $T-v$ 的每个连通片恰好含有 v 的一个邻点.

首先用反证法证明: 删去树 T 中任何一个点 v 后, v 在 T 中的邻居必定两两不连通. 否则, 若 v 的两邻点 u_1, u_2 在 $T-v$ 中被一条路连接, 则这条路复合路 u_1vu_2 可得到 T 中一个圈, 矛盾. 这实际上就证明了每个连通片含有 v 的至多一个邻点.

然后证明 $T-v$ 的每个连通片含有 v 的至少一个邻点: 若有一连通片与 v 的任一邻点 u_i 均不连通, 则复原 v 及与其关联的所有边后, 这些边依然不会连接任一 u_i 与这个连通片中的任何点, 从而 T 也不连通, 矛盾.

由此我们知道: 删去 T 中度数最大的点 v_0 , 则树 T 碎成 $\deg(v_0) = \Delta$ 个连

通片 $T_1, T_2, \dots, T_\Delta$. 易见每个连通片都依然是树. 否则, 若一个连通片含圈, 则这个圈在 T 中也成立, 矛盾.

这里每棵树 T_i 自身必然有至少 2 片树叶. 放到原图 T 中, 除了与被删点相邻的点可能从“是树叶”变成“不是树叶”外(当然也可能在单独的作为碎片的树里就不是树叶), 至少还剩下 1 片树叶在原图 T 中依然是树叶. 故证.

p.s. 不知道这个命题为什么不写成“至少有 Δ 片树叶”... 它显然符合题 1.16 而不是题 1.24 那种特征...

5.

对于 G 的每个连通片 G_i , 其是树当且仅当其满足 $\epsilon_i = v_i - 1$. 对这组等式求和, 然后关注取整条件即可.

6.

我们的做法是: 直接构造出中心, 并证明这个构造的结果使命题成立.

我们断言: 任取 T 中一条最长的轨道 $P = p(u, v)$, 如果 P 的长度为偶数, 则其最中间的点为 T 的中心; 如果 P 的长度为奇数, 则其最中间的两个点为 T 的中心.

在证明断言之前, 我们再引入若干定义与引理: 我们称 G 中最长轨道的长度为 G 的直径, 记作 $d(G)$.

显然, 图上的距离与空间中的欧氏距离类似, 同样满足所谓“三角不等式”: $dist(u, v) + dist(v, w) \geq dist(u, w)$. 注意到 $u - v$ 最短路与 $v - w$ 最短路复合即是一条 $u - w$ 路, 根据定义其长度当然不小于 $u - w$ 最短路的长度.

由此我们可以证明, 在任何图 G 中, $2r(G) \geq d(G)$: 取 G 的一个中心 o , 以及 G 中一条最长轨道 $P = p(u, v)$, 则根据三角不等式 $dist(o, u) + dist(o, v) \geq dist(u, v) = d(G)$. 另一方面, 根据定义, G 的半径就是 o 的离心率即 o 与其

它点的最大距离, 从而 $\text{dist}(o, u), \text{dist}(o, v) \leq l(o) = r(G)$. 结合这些不等式就完成了证明.

有了这些准备, 我们开始证明上述断言:

① P 的长度为偶数, 即 $\text{len}(P) = 2k$:

观察 T 的直径与半径, 可以注意到 P 实际上就是 T 的一条直径, 从而 $d(T) = \text{len}(P) = 2k$. 而 P 最中间的点 (记为 o) 的离心率至少是 k .

我们实际上可以证明 o 的离心率就是 k . 运用反证法: 若有与 o 距离更远的点 w , 考虑 $o - w$ 最短路 $p(o, w)$, 其满足 $p(o, w) > k$, 则其至多与 P 上 $p(u, o), p(v, o)$ 这两部分的一部分 (由于 $p(u, o)$ 与 $p(v, o)$ 等长, 不妨认为是 $p(u, o)$) 有公共点 (否则 T 中含圈). 考虑 $p(o, w)$ 与 P 的另一部分 $p(v, o)$ 复合, 得到的轨道 $p(v, w)$ 是比 P 更长的路, 矛盾.

这说明如此取到的 o 离心率恰为 k , 也就是 T 的直径的恰好一半! 如果 T 中有离心率更小的点, 则 T 的直径小于 k , 这与直径与半径长度关系的不等式矛盾!

对于情况②的证明与上完全类似, 留给读者作为练习.

7.

我们展示两种方法. 第一种的数学归纳法是对这种题最常采用的做法; 第二种的归纳原理能够帮我们更清晰地洞察这道题, 并且练习一种常规的“对 n 使用数学归纳法”的思维之外的思维.

法 1. 数学归纳法

① $k = 0$: 森林 G 中每个非平凡的树至少会带来两个奇度点, 所以 $k = 0$ 意味着 G 的每个连通片都是单点 K_1 , $E(G)$ 为空, 当然可以划分成 0 条轨道.

(如果你不承认 K_1 是树, 无边图是森林, 也可以选择以 $k = 1$ 作为归纳奠基, 运用题 2.3 的结论说明就好.)

② 若命题对于 k 成立, 考虑 $k + 1$:

任取 G 中属于同一连通片的两个奇度点 u, v (由于每个连通片都是树从而有至少两个奇度点, 这件事一定是可以做到的), 它们之间存在唯一轨道 $p(u, v)$ 连接, 删去这条 $p(u, v)$ 的所有边并删去点 u, v , 得到图 G' .

上述删除过程使得 $p(u, v)$ 上的每个点度数减少 2, 不改变其奇偶性, 对于 $p(u, v)$ 外的点的度数则完全没有影响, 所以只会减少 u, v 这两个奇度点. 而删边也不会使得原先没有圈的 G 变得含圈, 因此 G' 是一个有 $2k$ 个奇度点的森林. 根据归纳假设, $E(G')$ 可以划分为 k 条轨道, 这 k 条轨道再加上 $p(u, v)$ 就构成了对 $E(G)$ 的划分.

Q.E.D.

法 2. 归纳原理

对于非树的森林, 如果其每棵树都符合命题, 则森林也符合命题. 所以考虑只证明命题对所有树成立:

对于树, 使用归纳原理证明一个更强的结论: 若 T 为树且有 $2k$ 个度数为奇数的顶点, 则可以将 T 的边集 $E(T)$ 划分为 k 条无公共边的轨道, 且每条轨道的每个端点都是一个 T 中的奇度点, 且这些端点两两不同.

全体 (有限) 树可用如下方式归纳定义:

- (1) 平凡图是树;
- (2) 对于阶为 n 的树 T , 添加一个新的顶点 $n+1$, 并将其与 T 中的一个点 v_i 连边. 所得的新图 T' 仍是树;
- (3) 此外无它.

归纳原理证明如下:

- (1) 对于平凡图, 其 $k = 0$. 而平凡图中无边, 故所有边的确可以划分为 0 条不重边的轨道.
- (2) 若 T 上命题成立, 考虑衍生出的 T' , 分 v_i 在 T 中度数的奇偶性讨论:

如果 $\deg_T(v_i)$ 为奇数, 则 $\deg_{T'}(v_i)$ 为偶数, 而 $\deg_{T'}(v_{n+1}) = 1$, 为奇数, 从而 T' 仍有 $2k$ 个奇度点. 根据归纳假设, 在构成 $E(T)$ 的 k 条轨道中, 有一

条以 v_i 为端点。我们将这条轨道与边 $v_i v_{n+1}$ 复合，得到一条延长了的轨道，如此修改便让我们得到了一组划分了 $E(T')$ 的 k 条轨道。

如果 $\deg_T(v_i)$ 为奇数，则 $\deg_{T'}(v_i)$ 为奇数，从而 T' 增加了两个奇度点。这使得我们可以多使用一条轨道来划分 $E(T')$ ，显然直接取 $e = v_i v_{n+1}$ 作为这条新轨道即可。

Q.E.D.

p.s. 本题是一道典型的可以用归纳原理平凡地证明的题目。归纳原理在此后的解答中将常有出现。关于归纳原理的思想及使用方式，可写的内容实在太多，故我们不在此题的备注中描绘归纳原理的核心。相关内容请读者参阅附录。实际上这道题对 k 运用数学归纳法证明也很简单，但我们依然给出归纳原理的做法，因为这可以让我们更加清晰地看见每一条轨道的构造过程，洞察每一处细节。

p.p.s. 在证明之前我们加强了命题，断言了关于这 k 条轨道的更进一步的性质： $2k$ 个奇度点恰好构成了 k 条轨道的端点。这是否真的证明了一个更强的命题？看起来好像是的，但实际上我们可以想到：当把 k 条轨道叠加在一起，每条轨道对于其中部的点度数贡献为 2，对于不在其上的点度数贡献则为 0，只有对其端点度数贡献为 1，是奇数。因此一条轨道至多带来两个奇度点，而如果有两条轨道端点相同，还会少增加两个奇度点。为了让 k 条轨道叠加而成的图的确有 $2k$ 个奇度点，可以知道这种情况必须完全不出现。

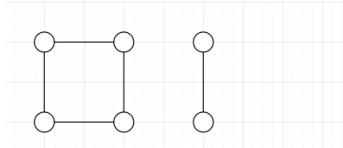
8.

这道题的后半句有歧义：究竟是先给定一个图和它的度数序列，让你看序列推断是不是树；还是给你一个序列，让你尽可能把它做成树。对于前一种理解，如果这个度数序列同时还是一个非树图的度数序列，命题依然成立；对于后一种理解则不然。

从陈述的严谨性来讲，对于后一种理解，将题干改为“... 此序列‘可以’是树的度数序列”更合适，对于前一种理解则由当前的题干文本与之对应，或加

一个“必定”，又或者干脆使用形式化的命题描述。

对于后一种理解，由于没有给出“连通”的条件，这道题可以轻易构造出反例：



接下来，我们假定题目的本意是后一种理解，且仅考虑连通图（前一种理解下的题目的做法已被蕴含在其中。判断出哪些部分可以单独拿出来作为这种理解下的解答的工作，就留给读者作为练习）：

必要性（是树的度数序列 \rightarrow 满足公式）：略。

充分性（满足公式 \rightarrow 是树的度数序列）：

全体非空连通图可用如下方式归纳定义：

(1) 平凡图是连通图；

(2) 对于阶为 n 的连通图 G ：

(2.1) 添加一个新的顶点 v_{n+1} ，并将其与 G 中的一个点 v_i 连边。所得新图 G' 仍是连通图；

(2.2) 在其中的两个没有连边的点 v_i 与 v_j 之间连边。所得新图 G' 仍是连通图；

(3) 此外无它。

可以验证：

(1) 中的图满足公式；

对于衍生方式 (2.1)，如果原先的 G 满足公式，那么 G' 也满足公式，反之亦然；

对于衍生方式 (2.2)，如果原先的 G 满足公式，那么对于 G' ，公式左端增加

了 2 而右端不变, 进而公式不成立. 同时, 注意到没有任何一种衍生方式能够使右端相对于左端增加. 故一个连通图的衍生过程中, 只要使用了 (2.2), 所得连通图必然不满足公式.

换言之, 使得公式成立的图, 恰好是全体在衍生过程中只使用了 (1) 和 (2.1) 的图. 由树的归纳定义 (详见 2.7 解答) 知, 这恰好就构成了树的集合. 从而我们证明了: 这样一个度数序列一定不是非树连通图的度数序列.

最后我们用构造法证明一定存在 (至少) 一棵树真的符合这个度数序列:

我们将所有点 v 根据度数分为 3 类:

$$(1) \deg(v) = 1$$

$$(2) \deg(v) = 2$$

$$(3) \deg(v) > 2$$

我们把 (2) 类和 (3) 类顶点拿出来连成一个轨道, 轨道的头尾则由两个 (1) 类顶点代劳. 对于剩下的 (1) 类顶点, 我们将其拼在度数还不够的 (3) 类顶点上. 不难证明: 当所有 (3) 类顶点的度数满足要求, (1) 类顶点也恰好用完.

p.s. 本题和题 2.7 的解答一样, 也使用了归纳原理的思想, 但同样是证明 “对于所有的 $x \in P$, 性质 $p(x)$ 成立” 这样的命题, 读者不难看出题 2.8 的解答结构与题 2.7 不完全相同.

题 2.7 的解答中所定义的集合, 恰好就是题目中给出的 P , 证明的逻辑是每一次衍生都不破坏性质的成立.

题 2.8 的解答中, 归纳定义出的集合是一个比 P “更广”的集合 Q ($P \subseteq Q$). 证明的逻辑则是论证在衍生过程中只使用了某一部分衍生方式的元素 x 才恰好构成集合 P . 之所以要这么做, 是因为当采用后一种理解方式时, 题目要证明的实际上如下两个命题均成立:

(1) 凡满足要求的度数序列, 存在一棵树, 使得这棵树的度数序列是该序列.

(2) 凡满足要求的度数序列, 不存在非树的连通图, 使得该图的度数序列是该序列.

使用更加形式化的写法:

- (1) $\forall x \in X, \exists y \in Y, s.t. p(x, y).$
- (2) $\forall x \in X, \exists y \in Y' \text{ 且 } y \notin Y, s.t. \neg p(x, y) .$

显然, 2.7 中那样的命题只包含 (1) 的部分, 相比之下 2.8 这样的命题要“更强”.

9.

我们直接给出一个构造此子图的(平凡的)算法. 背后的洞见与题 1.16 类似.

首先, 任取 G 中一个点 v_1 作为子图 H , 从 T 中任取一个点与之对应;

归纳地, 如果 H 与 T 尚不同构 ($v(H) < k + 1$), 考虑 H 中一个度数小于 T 中对应点度数的点 v_i , 由于 H 的点数不到 $k + 1$, H 中的所有其它点必然没有将 v_i 在 G 中的邻点占完. 任取 v_i 一个尚不在 H 中的邻点 $v_{v(H)+1}$, 将其加入 H , 并在 H 中将其与 v_i 连一条边. 从 T 中 v_i 对应点尚未进行对应的邻居中任取一个点与之对应

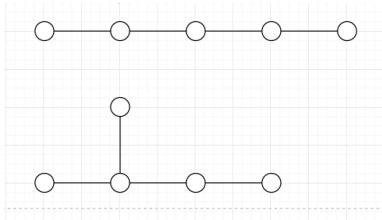
重复这个过程直到 $v(H) = k + 1$, 容易证明算法结束时 $H \cong T$. 由于每执行一步会向 H 中加入一个点, 这个算法一定会在有限步后结束.

10.

trivial 的, 略.

11.

若同构为同一(无标定): 逐一枚举即可, 注意利用 $K_{2,3}$ 中每个阵营内部的点之间的对称性可以简化讨论. 共有以下 2 种:



若同构不为同一 (有标定) : 使用 Cayley 公式.

12.

若同构为同一 (无标定) :

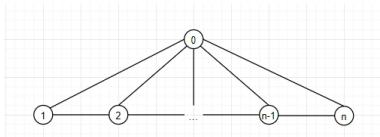
对生成图 T 中保留的辐条的数量分类讨论.

辐条数为 k 时, 考虑如何切割分配圈上的边即可, 最后记得根据对称性减去同构的那些情况.

若同构不为同一 (有标定) :

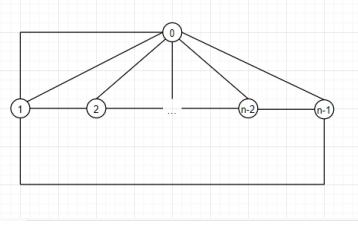
法 1: 对 W_n 使用 Cayley 定理, 选定圆周上的一条边作为 e .

在 W_n 中删去 e 后, 我们将得到这样一个图 (所选的边为 v_1v_n):



(我们将这种图命名为“扇图”, 记为 L . 如果图的底边有 n 个点, 我们便称其为 n 阶扇图, 记为 L_n .)

在 W_n 中收缩 e (且不合并重边) 后, 我们得到这样一个图:



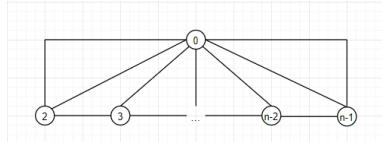
(我们将这种图命名为“1-轮图”，记为 W^* . 如果图的圆周上有 n 个点，我们便称其为 n 阶 1-轮图，记为 W_n^* .)

由此我们知道：

$$\tau(W_n) = \tau(L_n) + \tau(W_{n-1}^*)$$

接下来先考虑对 1-轮图使用 Cayley 定理，显然适合选定两条重辐条中的一条作为 e .

删去 e 后，我们得到 W_{n-1} ，此时采用递归即可；收缩 e 后，我们得到这样一个图：



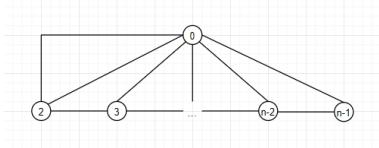
(我们将这种图命名为“2-扇图”，记为 L^{**} . 如果图的底边有 n 个点，我们便称其为 n 阶 2-扇图，记为 L_n^{**} . 注意：必须两组重边各出现在两端的辐条处，才叫 2-扇图.)

由此我们知道：

$$\tau(W_{n-1}^*) = \tau(W_{n-1}) + \tau(L_{n-2}^{**})$$

紧接着考虑对 2-扇图使用 Cayley 定理，显然适合选定两对重边中的其中一对的其中一者作为 e .

收缩 e 后，我们得到核心点有一个环边的低 1 阶的 2-扇图，显然环边不会出现在生成树中，所以我们将其删去即可，然后递归到低阶 2-扇图的情况；删去 e 后，我们得到这样一个图：



(我们将这种图命名为“1-扇图”，记为 L^* . 如果图的底边有 n 个点，我们便称其为 n 阶 1-扇图，记为 L_n^* . 注意：必须重边各出现在一端的辐条处，才叫 1-扇图.)

由此我们知道：

$$\tau(L_{n-2}^{**}) = \tau(L_{n-3}^{**}) + \tau(L_{n-2}^*)$$

然后考虑对 1-扇图使用 Cayley 定理，显然适合选定两条重边中的一条作为 e . 删去 e 后，我们得到同阶扇图；收缩 e 后，同上理删去环边，我们得到低 1 阶的 1-扇图.

由此我们知道：

$$\tau(L_{n-2}^*) = \tau(L_{n-2}) + \tau(L_{n-3}^*)$$

最后我们看到一开头衍生出的扇图. 考虑其一端的底部的边（上图中的 e ），对于其使用 Cayley 定理.

删去 e 后，我们得到伸出一片树叶的低 1 阶的扇图，由于与这片树叶关联的边必须被保留，情况被划归到低阶扇图；收缩 e 后，我们得到低 1 阶的 1-扇图.

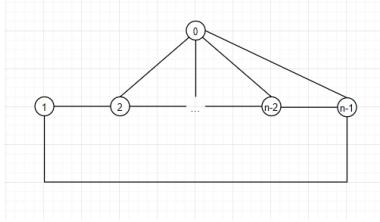
由此我们知道：

$$\tau(L_n) = \tau(L_{n-1}) + \tau(L_{n-1}^*)$$

现在，所有的情况都被我们递归到扇图和 1-扇图的情况. 枚举易得 1 阶扇图与 1 阶 1-扇图的生成树数目分别为 1 和 2. 采用递归算法即可.

法 2：对 W_n 使用 Cayley 定理，选定一条辐条作为 e .

在 W_n 中删去 e 后，我们得到这样一个图（所选的边为 v_0v_1 ）：



删去那两条圈上边 (v_1v_2, v_1v_n) 中的任一条, 我们得到伸出一片树叶的低 1 阶的扇图; 收缩它后则得到低 1 阶的轮图.

此后同法 1.

现在, 我们得到了一个计算 $\tau(W_n)$ 的 (时间复杂度极高的) 递归算法. 显然这不是对于这道题我们所能达到的最令人满意的结果. 接下来, 我们将通过 $\tau(L_n)$ 与 $\tau(L_n^*)$ 的递推公式, 推导出它们的通项公式, 从而获得一个平凡的公式.

回顾对 L_n 与 L_n^* 使用 Cayley 定理的结果:

$$\tau(L_{n+1}) = \tau(L_n) + \tau(L_n^*) \quad ①$$

$$\tau(L_{n+1}^*) = \tau(L_{n+1}) + \tau(L_n^*) \quad ②$$

不断将②代入①, 我们得到下式:

$$\tau(L_{n+1}) = 2\tau(L_n) + \tau(L_{n-1}) + \tau(L_{n-2}) + \cdots + \tau(L_2) + 2 \quad ③$$

(式末的 2 即为 $\tau(L_1^*)$.)

与之同构:

$$\tau(L_n) = 2\tau(L_{n-1}) + \tau(L_{n-2}) + \tau(L_{n-3}) + \cdots + \tau(L_2) + 2$$

$$\tau(L_n) - \tau(L_{n-1}) = \tau(L_{n-1}) + \tau(L_{n-2}) + \tau(L_{n-3}) + \cdots + \tau(L_2) + 2 \quad ④$$

将④代入③有:

$$\tau(L_{n+1}) = 3\tau(L_n) - \tau(L_{n-1})$$

根据此求 $\tau(L_n)$ 的通项公式, 我们有两种做法:

法 1: 不断使用特征根法;

法 2: 我们知道 Fibonacci 数列 $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$.

注意到如下关系:

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n = 2f_n + f_{n-1} = 2f_n + (f_n - f_{n-2}) = 3f_n - f_{n-2}$$

再联系 $\tau(L_1) = 1, \tau(L_2) = 3$, 可以证明每阶轮图的生成树个数其实就是 Fibonacci 数列的偶数项, 即 $\tau(L_n) = f_{2n}$. 此外, 联系此前得到的公式, 可以证明每阶 1-轮图的生成树个数实际上就是 Fibonacci 数列的奇数项, 即 $\tau(L_n^*) = f_{2n+1}$; 每阶 2-扇图的生成树个数同样是 Fibonacci 数列的偶数项, 即 $\tau(L_n^{**}) = f_{2n+2}$.

最后我们重新把目光聚焦于轮图的生成树个数. 回顾对 W_n 与 W_n^* 使用 Cayley 定理的结果:

$$\tau(W_{n+1}) = \tau(L_{n+1}) + \tau(W_n^*)$$

$$\tau(W_{n+1}^*) = \tau(W_{n+1}) + \tau(L_n^{**})$$

代入可知:

$$\tau(W_{n+1}) = \tau(W_n) + f_{2n+2} + f_{2n}$$

此时我们断言一个通项公式: $\tau(W_n) = f_{2n+1} + f_{2n-1} + a$, 其中 a 为常整数. 注意到这个通项公式代入上式后是自洽的, 因而可以用归纳法证明. 最后我们只需联系 $\tau(W_3) = 16 = f_5 + f_7 - 2$, 得出常数 $a = -2$, 这样就得到了 $\tau(W_n)$ 的通项公式:

$$\tau(W_n) = f_{2n+1} + f_{2n-1} - 2$$

(Fibonacci 数列同样存在闭式的通项公式, 但并不能真正降低计算的时间复杂度, 代入上式后也不美观. 所以我们在此停止, 留下这个简洁而优美的结果, 作为前文繁重计算长征后的胜利之果.)

p.s. 如果题意视同构图为同一图, 结果的式子将十分复杂且几乎无法化简为闭式解. 我们倾向于认为题目只对后一种理解下的解题作要求.

p.p.s. 关于后一种理解下的解法, 看似篇幅很长且引入了许多新的概念, 但实际上没有哪一步需要过强的洞察力. 读者如果在抓到思路后自己做一遍就会发现, 每一个状态下的下一步走法其实都是水到渠成. 多达四个定义的引入也仅仅是为了提出概念的名字, 使下文的叙述更加简便罢了.

——当然这并不是在要求读者, 在读完题目时就能够确信这道题的过程是平凡的. 对于大部分人来说, 真正意识到解法已尽在掌握, 应该是在发现所有衍生出的图都可以划归到扇图与 1-扇图的情况之时.

13.

为了计算结果, 我们改为计算: 给定 K_v 中一条边 e_0 , K_v 的含有 e_0 的生成树的数量.

我们考虑从两个方面计算全体有序对 (e, T) 的数量, 其中 $e \in E(K_v)$, T 是 K_v 的生成树.

一方面, K_v 有 v^{v-2} 棵生成树, 而每棵生成树中有 $v-1$ 条边, 根据乘法原理这样的有序对有 $(v-1)v^{v-2}$ 个; 另一方面, K_v 中有 $\frac{v(v-1)}{2}$ 条边. 根据 K_v 中边的对称性, 显然每条边地位均等, 所处的生成树个数也应该相同. 设每条边出现在 m 棵生成树中, 则这样的有序对有 $\frac{v(v-1)m}{2}$ 个.

由此解得 $m = 2v^{v-3}$, 因此不含一条特定边 e_0 的生成树个数为 $(v-2)v^{v-3}$.

p.s. 在这道题中我们所展示的思想, 在组合中被称为 “算两遍 (*double-counting*)”. 具体来说, 为了计算一个计数的量 m , 我们考虑对另一个量 n 采用两种方法计算. 其中一种可以直接告诉我们 n , 另一种则给出 n 的一个只涉及 m 的表达式, 最后解方程计算出 m .

除此之外, “算两遍”的思想也可以帮助我们计算一些非闭式的组合求和式, 或证明一些组合恒等式. 感兴趣的读者可自行参考任意一本组合数学教材.

14.

手搓算法, 略.

15.

找到所有的连通片, 对每个连通类分别执行算法.

时间复杂度略.

16.

(1) 找到一个圈, 找到这个圈上权最大的边, 删去. 重复 $\epsilon - v + 1$ 次.

(2)

书上证明 Prim 算法的正确性时用了反证法, 我们的证法与之类似:

首先, (1) 种算法的每一步都不破坏图的连通性, 故所得子图依然是连通图; 在此基础之上, 根据点边数量关系可知所得子图是树.

设算法的输出为 T' , 若存在 G 的一棵最小生成树与之相同, 结论成立.

否则, 设 G 的一棵最小生成树是 T , 设 e 为算法过程中第一条被从 T' 中删去而在 T 中的边. 则 e 在 (当时那一步的 T' 的) 至少一个圈上, 且在至少一个圈上是最大边 (之一).

设这个圈为 C . 由树的无圈性知, C 上有至少一边 e' 不在 T 中. 由破圈法算法知 $w(e') \leq w(e)$. 若等号不成立, 则 $T - e + e'$ 是比 T 更小的生成树 (由无圈性证明它是树), 矛盾. 故等号成立.

故 $T - e + e'$ 也是 G 的最小生成树之一. 重复以上过程, 直到 T 与 T' 的边完全相同.

(3) 略.

17.

这道题我个人不太认可. “有根树”的定义(即定义 2.5) 中“离开”一词欠缺形式化的定义. 下面我们提供几种其它教材或资料中常用的对有根树的定义, 供读者参考:

- ① 计算出有向树的底图中每个点与根的距离, 将“离开根”定义为“由与根距离小的点指向与根距离大的点”;
- ② 由于树中任意两点之间有唯一轨道, 因此从任一点指向任另一点的有向轨道唯一. 称有向边 $e = u \rightarrow v$ 离开点 o , 指的是 u 在 o 到 v 的唯一有向轨道上出现.

容易看出以上诸定义是等价的. 在这些定义下我们容易证明题给命题. 关键在于证明每个点的入度至多为 1 (否则所有边的朝向并非离开同一个点), 然后利用 $\epsilon = v - 1$.

18.

归纳原理: 每一次“生长”都不破坏这一等式.

(归纳定义全体正则二叉树的严格书写, 以及证明过程, 均留给读者作为练习.)

19.

归纳原理.

20.

trivial.

21.

同上.

22.

注意: *Huffman* 树的最优性的证明中我们用到了引理 2.1, 因此这里不能再通过 *Huffman* 树的最优性证明 *Huffman* 树中每个叶子的权与深度负相关, 否则构成循环论证.

根据 *Huffman* 树的定义, 我们自然可以在算法的第一步联结 w_1, w_2 对应的点, 所需证明的只有: 存在使它们最深的 *Huffman* 树.

我们改为证明一个更强的命题: 在 *Huffman* 树中, 所有点 (不仅限于叶子) 的权值 (非叶子点的权值定义为其两个儿子的权值之和) 与其深度 (不严格地) 负相关. 即, 对于两个点 u, v , 若 $w_u > w_v$, 则 $\text{depth}(u) \leq \text{depth}(v)$.

使用归纳法: $t = 2$ 时的情况是显然的. 下面我们假设命题对 t 成立, 并考虑 $t + 1$:

反证: 现在假定整个树 T 构造完后, w_1 和 w_2 不在最底层, 即 $w_1 + w_2$ 不在倒数第二层, 那么 T 中一定有比 w_1 和 w_2 更大且更低的 w_i 及其兄弟 w_j . 现在考虑在所有权值中删去 w_1, w_2 , 改为加入一个新权值 $w_1 + w_2$, 这组权值的 *Huffman* 树的构造过程与原权值组在联结 w_1, w_2 之后的构造过程当然可以完全相同, 从而对于新权值组, 存在一棵由其构造出的 *Huffman* 树, 其同构于 T 中删去 w_1 和 w_2 得到的 T' , 则 T' 是一棵有 $t - 1$ 个节点的二叉树, 而 $w_i + w_j$ 严格大于 $w_1 + w_2$, 却比 $w_1 + w_2$ 低, 矛盾.

这样就完成了证明.

23.

使用归纳法:

① $t = 2$ 时: 成立;

② 若命题对 t 成立, 则对 $t + 1$ 的情况:

显然, 在这 $t + 1$ 个权值的任一最优二叉树中, 所有叶子的权值应与其深度(不严格地) 负相关. 因此最优二叉树中 w_1, w_2 对应的节点应为兄弟且处于最底层.

将 w_1, w_2 的父亲视作一个新的叶子, 其权值为 $w_1 + w_2$. 将这个权值与其余 $t - 1$ 个权值联合起来考虑, 则根据归纳假设, 这 t 个权值的所有 Huffman 树均为其最优二叉树.

现在考虑初始的 $t + 1$ 个权值的最优二叉树的构造过程, 其第一步可以将 w_1, w_2 联结, 而此后的过程可以完全遵照 t 个权值的 Huffman 树的构造过程, 而这整个过程其实就是 $t + 1$ 个权值的 Huffman 树的构造过程.

这样就完成了证明.

p.s. 请注意我们的证明中暗含的逻辑: 最优的二叉树当然应该是正则的(否则可以将一条边收缩得到更优的二叉树), 而任何正则二叉树都可以通过反复联结两个叶子作为新的叶子得到, 区别仅仅在于联结时对叶子的选择. 如果没有确定这一点, 我们将难以讨论“所有的二叉树有哪些可能”, 也就难以论证 Huffman 树在其中的最优化.

p.p.s. 需要提醒读者: 并非所有最优二叉树都是 Huffman 树. 想要针对这一点举反例, 只需注意到如果 Huffman 树的构造过程中如果从未出现相同的权值, 则算法的输出唯一, 而相同权值的不同构的正则二叉树(特别是完全正则二叉树)完全有可能让每个权值的高度相同. 一个具体的例子: 考虑

权值 $3, 4, 5, 6$ 的最优二叉树，显然包括对应的全部三棵完全正则二叉树，但 *Huffman* 树的构造算法只能给出其中一棵。

请读者结合这一点重新审视解答中我们为什么要反复强调“一棵最优二叉树可以是...”

24.

(1)

若不然，通分求和后分子为奇数，即概率和不为 1。

(2)

只需证明算法的输出是给概率为 $\frac{1}{2^{n_i}}$ 的符号分配长为 n_i 的码。

用归纳原理证明。其中归纳定义的衍生方式为每次将 p_i 分裂成两个 $\frac{p_i}{2}$ 。

25.

我们给出两种方法。第一种方法利用树的知识，也是我们猜测这道习题出现在这里所预期的方法；第二种方法略显繁琐，但在其中我们将见到归纳原理更灵活的运用。

法 1. 生成树法：

由于 G 连通， G 有生成树 T ，而 T 中至少有两树叶 u, v 。显然 $T - u - v$ 依然连通，而这个图是 $G - u - v$ 的导出子图，其边在 $G - u - v$ 中都成立，所以连接任意两点的通路在 $G - u - v$ 中自然也成立。自然 $G - u - v$ 连通。

法 2. 归纳原理：

归纳定义 $v \geq 3$ 的连通图所成的集合（记作 W_3 ）：

- (1) 长为 2 的轨道 P_3 属于 W_3 ;
- (2) 若 $G \in W_3$, 则在 G 中:
 - (2.1) 添加一个新点 v_{n+1} , 将其与 G 中任一点 v_i 连一条边, 新图 $G' \in W_3$;
 - (2.2) 在任意尚未连边的两点 v_i, v_j 之间连一条边, 新图 $G' \in W_3$;
- (3) 此外无它.

现在我们证明 W_3 中的所有图都可以在删去两个点之后连通. 实际上我们将证明一个更强的结论: 对于 W_3 的每个图 G , G 中都存在两个点 u, v , 使得 $G - u, G - v, G - u - v$ 都是连通图:

(1) P_3 删去其一个端点得到 K_2 , 删去其两个端点则得到 K_1 , 都是连通图. 因此可以取这两个端点作为 u, v ;

(2) 若 G 中存在两个点 u, v 使得 $G - u, G - v, G - u - v$ 都是连通图, 则考虑...

(2.1)

若 v_i 不为 u, v 中任一者, 则根据归纳假设, 删去 u 或 v 或同时删去两者后, G' 中前 n 个点剩余的 $n - 2$ 个依然连通, 而 v_{n+1} 与 v_i 连通, 从而 $G' - u, G' - v, G' - u - v$ 都是连通图. u, v 可以继续作为这两个点;

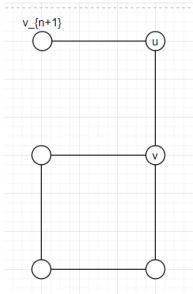
若 v_i 为 u, v 中一者, 不妨记 $v_i = u$. 此时当然有 $G' - v_{n+1} = G$ 连通, 只用考虑 $G - v$ 以及 $G - v - v_{n+1}$. 根据归纳假设 $G - v$ 连通从而同上理 $G' - v$ 连通, 而 $G' - v$ 中 v_{n+1} 度数为 1, 删去后不带来新的连通片, 故 $G' - v - v_{n+1}$ 也连通. v, v_{n+1} 可以作为这两个点;

(2.2)

$e = v_i v_j$ 在 $G' - u - v$ 中可能存在, 也可能不存在, 但肯定有 $E(G - u - v) \subseteq E(G' - u - v)$. 所以无论哪种情况, 都不会使得 $G - u - v$ 中有路连接的两点在 $G' - u - v$ 中不连通. 从而 u, v 可以继续作为这两个点.

p.s. 请读者自行感受为什么在法 2 的证明中我们要加强命题: 如果归纳时只考虑 $G - u - v$ 是否连通, 在 (2.1) 的第二种情况中就无法说明为什么

$G - v$ 连通. 事实上, 如果只知道 $G - u - v$ 连通的条件, 这一命题的确可能是不成立的, 例如考虑下面这个反例:



当然, 根据加强命题后的证明我们知道: 只要严格遵循这种算法归纳地修改 u, v , 上图所示的情况实际上是不会出现的. 这究竟是怎么做到的呢? 让我们看到上图所示的情况, 请读者自行推断: 如果在 G 中 u, v 是所示的两个点, 那么在 u, v 最后一次的改变发生前, 它们应该是哪两个点?

读者只要思考一番, 就会发现无论哪种情况都是不可能的: 如果归纳构造 G 的上一步是添加 $v_n = u$ 这个点并将其与 $v_i = v$ 连边, 那么它能够成为 u, v 之一, 一定是取代了它的唯一邻居, 从而它的邻居 $v_i = v$ 不可能还是 u, v 之一; 如果上一步是添加别的边或别的点, 都不会改变 u, v 的选取, 从而 u, v 仍是这两个点, 可以一直追溯到 $v_n = u$ 的添加 (如果追溯到那一状态时 u, v 不是现在这两个点, 那么从该状态演变过来, 现在的 u, v 也不应该是这两个点).

最后, 在上述思考的启发下, 我们重新对比法 1 和法 2, 就会发现它们依然有着神似的本质: 在法 2 中的归纳地求 u, v 的过程中, 我们总是忽略两个已有点之间的连边, 而只关注新加入的点所连的唯一邻居, 并在 u, v 之一是这个邻居时将它转移到新加入的叶子上. 不难看出这里哪里暗含了生成树的想法.

p.p.s. 本题中的归纳原理是我们遇到的第一个“归纳定义出的集合并不显然是所给集合”的案例. 出于严谨性和可读性的考虑, 读者在自行书写解答过程时最好证明这样定义出的集合正是所给集合. 借此机会, 我们正好讲解一下如何证明归纳定义出的集合的内涵. 由集合论基础知识, 证明两个集合相等, 我们需要两步 (下设 $v \geq 3$ 的连通图所成集合为 W_3 , 所定义出的集合为

W_3^* .):

(1) 证明 $W_3^* \subseteq W_3$, 即所定义出的都是 $v \geq 3$ 的连通图:

使用归纳原理证明连通性是平凡的.

(2) 证明 $W_3 \subseteq W_3^*$, 即 $v \geq 3$ 的连通图都可以如此定义出:

形式化的证明方法为: 对于每一个 $v \geq 3$ 的连通图, 给出由 P_3 出发, 使用 (2.1) 与 (2.2) 生成目标图的一个生成序列. 当然, 我们难以用一种形式描述所有 $v \geq 3$ 的连通图, 所以写出生成序列改为给出一个可以求出生成序列的算法更加方便. 算法内容是显然的 (取 G 的一棵生成树, 其中必定存在长为至少 2 的轨道, 加长 P_3 直到达到这个“主干”的长度, 添加其它的枝叶, 最后在已有点之间连缺少的边), 读者不妨自行取一个连通图 G 感受一下这个构造过程.

最后要说明的是: 为了证明关于满足性质 p 的图 G 满足结论 q , 如果要使用归纳原理, 我们实际上只需要上面的 (2), 即定义出的集合 A 含有全部这样的图 G , 并不需要它不含任何不满足 p 的图. 这是因为, 如果我们证明了 A 中所有的图都满足结论 q , 那么自然也就证明了待证命题. 至于“还有更多的我们不需要考虑的图满足结论 q ”, 并不会破坏我们的证明.

26.

给每个硬币编号, 则一共有 4 种不同的可能的情况. 每次称量可从 3 种可能性中分辨出一种, 故至少需 $\lceil \log_3 4 \rceil = 2$ 次.

算法试错即可, 略.

p.s. 实际上, 由信息论知识可知, 哪怕只知道存在一枚异常的硬币但不知其相对重量, 也可以用 2 次分出来. 算法留给读者作为习题.

如果你觉得算法很难想出, 不妨考虑额外使用一枚已知其正常的硬币.

27.

若不是, 则能够更长. 略.

3 图的连通性

题解

1.

注意到我们实际上只需要证明 $k = 1$ 的情况: 一个 k -边连通图删去 $k - 1$ 条边后, 依然是一个连通图 (即 1-边连通图), 如果 $k = 1$ 的情况下结论成立, 那么在此基础之上再删去一条边至多增加一个连通片, 从而 k -边连通图删去 k 条边后至多有 2 个连通片.

而 $k = 1$ 的情况在题 1.19(1) 中已经完成了证明.

2.

$k = 1$ 的情况在题 1.19(2) 中已经做完了: 我们可以取 n 阶星图, 由于星图本身连通但删去中心点后不连通所以点连通度为 1. 而星图删去中心后得到 n 个孤立点即 n 个连通片. 通过这样取 V' , 我们就得到了一个 $\omega(G - V')$ 可以任意大的构造.

受此启发我们可以想到对于任意 k 的构造: 定义 G 的点集为两个不交的集合 A, B , 满足 $|A| = k, |B| = n > 1$; 对于边集, 两两连接 A 内部的点, 并且连接 A 中的每一个点和 B 中的每一个点. 下面我们来验证这个构造符合要求:

先证明 G 的点连通度. 首先 A 是 G 的一个点割集, 所以有 $\kappa(G) \leq |A|$; 其次, 考虑 G 删去一部分点的导出子图, 其中只要含有任何 A 中的点就一定是连通图, 因为每个 A 中的点都与所有其它点相连. 由此我们知道任何一个点割集一定包含 A 中的所有点, 所以有 $\kappa(G) \geq |A|$. 这样我们就证明了 $\kappa(G) = |A|$.

而 $\omega(G - A)$ 可以任意大, 这样我们就得到了对任意 k 的构造.

3.

对于简单图 G , $\delta(G) \geq v - 2$ 无非只有两种情况:

① $\delta(G) = v - 1$, 即每个点的度数都是 $v - 1$, G 是一个完全图, 此时显然也有 $\kappa(G) = v - 1$.

② $\delta(G) = v - 2$, 即存在某个点的度数是 $v - 2$, 即存在某两个点之间没有连边. 将这两个点之外的点全部删去可以隔开这两个点, 从而至少存在一个大小为 $v - 2$ 的割集, $\kappa(G) \leq v - 2$. 另一方面, 如果删去 $v - 3$ 个点可以分割剩余 3 个点, 则这三个点要么形如 $K_1 \cup K_2$, 要么是三个孤立点, 无论如何都存在一个点与剩余两个点不连边, 从而其在原图 G 中度数至多为 $v - 3$, 矛盾.

这样就完成了证明.

4.

考虑 $G \cong K_2 \cup K_2$, 其是一个不连通图, 满足 $\delta(G) = 1, \kappa(G) = 0$.

5.

由于删去度数最小的点关联的所有边可以隔开这个点, 我们至少有一个大小为 $\delta(G)$ 的边割集. 从而 $\kappa'(G) \leq \delta(G)$ 是显然的, 我们只需要证明 $\kappa'(G) \geq \delta(G)$.

考虑 G 的任一边割集 $F \subseteq E(G)$, 则生成子图 $G - F$ 的点集可以划分为不连通的两部分 V_1, V_2 (V_i 内部不一定连通), 接下来我们试图证明 $|F| < \delta(G)$ 不成立即 $|F| \geq \delta(G)$. 由于 F 分隔了 V_1, V_2 , 我们实际上可以认为 F 中只有 V_1 与 V_2 之间的边. 否则, 如果 F 还有某个 V_i 内部的边, 则把这些边全部排除, 只保留 V_1 与 V_2 之间的边得到 F' , 此时 F' 依然是一个分隔了 V_1 与 V_2 的边割集. 如果我们能够对所有此类 F' 证明 $|F'| \geq \delta(G)$, 那么对于任意的边割集 F , 自然也就有 $|F| \geq |F'| \geq \delta(G)$.

考虑 V_1, V_2 中点数较小的一者 (不妨认为是 V_1) , 则有 $|V_1| \leq \frac{v}{2} \leq \delta(G)$. 又其中每个点的度数至多为 $|V_1| - 1$, 即至少要损失 $\delta(G) - (|V_1| - 1)$ 个度数. 这说明 V_1, V_2 之间删去的边至少有 $|V_1|(\delta(G) - |V_1| + 1)$ 条. 由于两项之和为 $\delta(G) + 1$, 故其积至少为 $\delta(G)$.

p.s. 本题中用到了极结构的思想: 我们对任意的边割集 F 做修改, 使得其只有 V_1, V_2 之间的边. 请读者思考如果不预先作如此处理会有怎样的麻烦: 注意到 V_1, V_2 中至少有一者点数至多为 $\frac{v}{2}$, 从而用可以点数控制度数, 计算边的损失量, 这是一个很自然的思路. 问题在于: 如何保证度数的损失量就等于边割集的大小? 如果边割集中有 V_1 内部的边, 岂不是删去一条边可以贡献两个损失量? 此时我们注意到删去这样的边对“破坏连通性”并无帮助, 从而可以只考虑不存在这种“内部边”的情况.

这样看似让 $|F'|$ 变得比 $|F|$ 小, 证明更难了; 实则以退为进, 用这种“极”的性质帮我们创造更多条件. 另一方面, 由于我们本来也要证明对这类 F' 命题成立, 所以实际上并不会给证明创造新的困难 (待证命题并不会变得更强), 可以放心大胆地使用这样的处理.

6.

证法与上一题几乎完全相同: 考虑 G 的任一点割集 $C \in V(G)$, 删去 C 中的点导出的子图 $G' = G - C$ 中, 其点集 $V(G')$ 可以被划分为两个彼此不连通的子集 V_1, V_2 .

V_1, V_2 中点数较小的一者点数至多为 $\frac{v-|C|}{2}$, 所以其中每个点度数至多为 $\frac{v-|C|-2}{2}$. 这意味着它们至少要失去 $\frac{k+|C|}{2}$ 个度数, 而这些度数的缺失只能是由 C 中的点贡献. 因此有 $|C| \geq \frac{k+|C|}{2}$ 从而 $|C| \geq k$. 这意味删去着 $k-1$ 个点无法分割 G 的其余点, 从而 G 是 k -连通的.

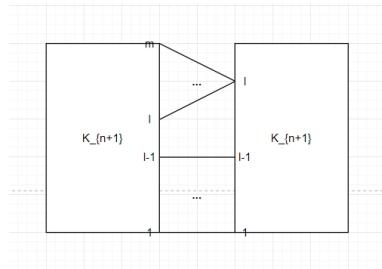
p.s. 为什么在这道题中我们不用采取与上类似的处理? 这是因为我们现在考虑的是删去点得到的导出子图. 既然只删去了 C 中的点, 那么 V_i 内部的点之间的边自然不受影响, 这些点也不会因此失去度数.

7.

由于度数是关于图的局部的性质，而点连通度和边连通度都是图整体的性质。所以我们在构造时，考虑让这个图先满足 δ 的条件，再在其上做微调，让它满足 κ 和 κ' 的条件。

为了便于操控这个图的连通度，很自然的想到先分别构造两个彼此之间不连通的连通图，最后再在这两个图之间加一些边。为了使得 $\delta(G) = n$ ，可以让这两个图都是 K_{n+1} 。为了控制边连通度为 m ，需要在这两个 K_{n+1} 之间连 m 条边；又为了让点连通度为 l ，在其中一个图中这 m 条边应该只涉及 l 个点。既然题目已经告诉我们 $l \leq m$ ，那么很自然地想到让 $m - l + 1$ 条边在一侧中关联同一个点，剩下 $l - 1$ 条边关联 $l - 1$ 个不同的点。这样这 l 个点就构成了一个点割集。至于在另一侧中，为了保证简单图的条件，就先考虑最简单的处理：让它们关联 m 个不同的点。

最后我们检查 δ 的条件有没有在上述过程中被破坏。由于 $m \leq n$ ，而两侧各有 $n + 1$ 个点，因此在两侧中都至少 1 个点在上述过程中没有被连新的边，依然保持着 $\deg = n$ 。由此我们得到了一个构造：



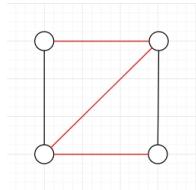
请读者自行写出这个图的定义作为练习。

p.s. 在图论中构造一个满足某些性质的图时，由于图整体的性质（例如连通度，以及第 6 章中会学到的 Hamilton 性，第 7 章会学到的染色）更容易因为一条边，一个点的加减而产生剧烈的变化，更容易被破坏，所以可以考虑先让图满足局部性质，最后再作微调以让其满足整体性质，防止后者在为了

前者所做的改动中受到影响.

8.

根据 Menger 定理, G 中 uv -点割集的大小至少为 2, 因此 u, v 间存在至少两条除端点外点不交的轨道. 但这是建立在这两条轨道都由我们挑选的前提上的: 如果第一条轨道选择得太过随意, 占用了太多的点, 那么第二条轨道自然就可能选不出来. 受此启发我们能够想到如下反例:

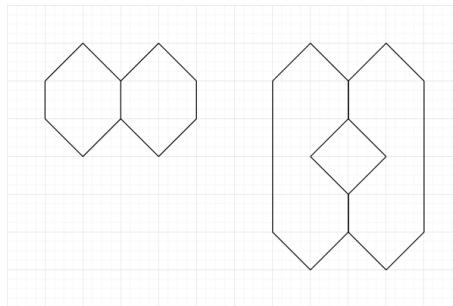


如上所示显然是一个 2-连通图. 图中标红的边给出了一条 uv -轨道, 显然不存在其它与之点不交的 uv -轨道.

9.

任取 G 中一个块 B , 则 B 单独作为一个图是 2-连通的. 如果 B 是树, 由于 K_2 是唯一的 2-连通树, 因此只能有 $B \cong K_2$; 如果 B 不是树从而含圈: 下面我们分若干情况证明 B 只能是奇圈:

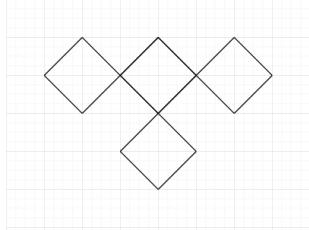
① 如果 B 含多于一个圈, 且存在两个圈 C_1, C_2 有公共边, 形如下图:



对于右图那种跟复杂的情况, 总可以调整圈的选取, 使得这两个圈的公共边只有连续的一段 (请读者自行验证这一点) . 下面我们假定 C_1, C_2 的公共边只有一段, 即 C_1, C_2 的边集的对称差也构成一个圈的边.

考虑这段些边中只属于 C_1 的边构成的集合 E_1 , 只属于 C_2 的边构成的集合 E_2 , 以及共同属于 C_1, C_2 的边构成的集合 E_3 . 那么 $E_1 \sqcup E_3, E_2 \sqcup E_3$ 都是一个圈的边 (这里 \sqcup 表示不交并), 而 $E_1 \sqcup E_3$ 也是一个圈的边, 因此这三个集合的大小均为奇数. 但这是不可能的: 三个集合的大小之和为偶数. 这种情况不存在.

② 如果 B 中含多于一个圈, 且任意两个圈之间无公共边. 则可以将每个圈收缩为一个点, 由此得到的新图一定是一棵树 T (可能就是 K_1 , 如果原图形如下图这种若干圈的直接连接) .



下面如果 T 中有割点则取一个割点, 如果 $T \cong K_2$ 或 K_1 则任取一个点. 如果这个点在原图 B 中对应一个点, 则这个点就是 B 的割点; 如果其由至少一个圈收缩而来, 则 B 中这个圈与其它部分相连的点是 B 的割点, 都与 B 是 2-连通的矛盾. 这种情况也不存在.

③ 如果 B 中仅有一个圈: 由于 2-连通图中除了 K_2 外不能有度数为 1 的点 (否则删去这个点的邻点便能分割原图), 所以 B 本身就是这个圈, 那么它当然只能是奇圈.

10.

采用反证法: 假设 v 不是 G 的割点, 那么 $G - v$ 中 G_1 剩余的点与 G_2 剩余的点依然连通. 不妨设 $G - v$ 中存在一条轨道 p , 其端点分别为 $v_1 \in V(G_1 - v), v_2 \in V(G_2 - v)$, 且中间的点 (可能实际上不存在, 即 p 就是

边 $e = v_1v_2$) 均不在 G_1 或 G_2 中. 下面我们来证明: 记 H 为点子集 $V(G_1) \cup V(G_2) \cup V(p)$ 的导出子图, 则 H 同样没有割顶, 从而与 G_1, G_2 作为块的极大性矛盾.

反证法: 假如 H 中有割顶 u :

① $u = v$: 由于 G_1, G_2 自身作为导出子图均无割顶, 因此删去 v 后 G_1, G_2 各自内部的点依然连通, 而这两个集合的点之间又通过 p 连通, 因此 $H - v$ 仍是连通图. 这种情况不成立.

② $u \in G_1$ 但 $u \neq v$: 由于 G_1 自身作为导出子图无割顶, 因此 G_1 中的其余点依然连通. 而这些点通过 v 与 G_2 中的全部点连通, 这个整体又通过 v_2 与 p 上的点连通, 因此 $H - u$ 仍是连通图. 这种情况, 以及对称的 $u \in G_2$ 的情况都不成立.

③ $u \in p$ 但 $u \neq v_1$ 或 v_2 : 此时 $V(G_1) \cup V(G_2)$ 依然连通. 而 p 上的点被 u 划分成两部分 (每一部分可能是空集), 其中靠近 v_1 的一部分通过 v_1 与这个整体连通, 而靠近 v_2 的一部分通过 v_2 与这个整体连通, 因此 $H - u$ 仍是连通图. 这种情况也不成立.

这样就证明了 H 是一个更大的无割点的导出子图, 也就完成了证明.

p.s. 不难看出, 作为这个证明的额外产物, 我们可以得到一个推论: 图 G 中两个不同的块至多有一个交点.

11.

我们考虑定义对于图 G 这样一个二分图 (称为 G 的“块图”) $B(G)$: 其一个阵营 X 中的元素 x 为 G 中所有的块, 另一个阵营 Y 中的元素 y 为 G 中所有割点. 在 $B(G)$ 中在 x 和 y 之间连边, 当且仅当在 G 中 $y \in x$, 即对应的点为对应的块与其它块的交点.

(读者不难验证, X 中的元素之并涵盖了 G 的所有点 (G 的每个点属于至少一个块), 且根据题 3.10 的结论作并时重合的点一定在 Y 这一侧出现.)

下面先证明一个引理: $B(G)$ 中无圈从而是森林 (在性质足够好的情况下可

能恰好就是一棵树)：如果 $B(G)$ 中存在圈 $x_1 - y_1 - x_2 - y_2 - \cdots - y_k - x_1$ ，则可以断言 G 中 $\bigcup_{i=1}^k V(x_i)$ 导出的子图 H 同样不存在割顶，从而与 x_i 作为 G 中块的最大性矛盾。

引理的证明思路与题 3.10 完全类似，留给读者作为练习。

由于 $B(G)$ 是森林，可以从 $B(G)$ 中取出一棵树 T ，其有至少两片叶子。注意 $B(G)$ 中的所有叶子只能由 X 这一侧的点担任即只能对应 G 中的块，这是因为 G 中一个割点 v 不可能只属于一个块（否则删去 v 不影响其所属块乃至 $G - v$ 的连通性）。现在任取两片叶子，即 G 中的块 B_1, B_2 ，则它们都是只含 G 中一个割点的块。

p.s. 不难看出，上题解答的注中提到的推论，实际上就是这题引理在 $k = 2$ 时的特定情况： $B(G)$ 中不存在导出子图 $K_{2,2}$ 。

12.

在本题的解答中，我们首先给出一个十分强大（并且超出这门课要求范围）的定理：2-连通图的结构定理。这个定理能够帮助我们近乎平凡地处理本章中很多关于 2-连通图的证明题。

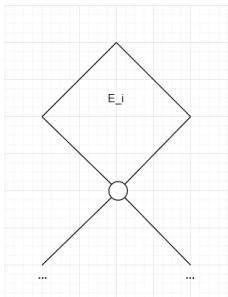
2-连通图的结构定理：一个图 G 是 2-连通图，当且仅当它可以通过以下过程构造得到：

- (1) 构造一个圈 C 作为初始状态 G_0 ；
- (2) 任取 G_i 中两个已经存在的不同的点 u, v ，在 u 和 v 之间添加一条新的轨道 $p = ux_1x_2 \cdots x_{k-1}v$ （所有提及的点 x_i 在此前的 G_i 中都不存在），这里 p 称为一个耳，记作 E_{i+1} 。由此得到 G_{i+1} ；
- (3) 重复 (2) 有限次。

我们首先解释一下这个定理：在图论中，一个耳（ear）指的是图 G 中的一

条路，其中除了两个端点可以是相同的或不同的之外，其余的点对两两不同。换言之，一个耳要么是一条轨道（两个端点不同），要么是一个圈（两个端点相同）。上述定理实际上断言了，一个 2-连通图总可以这样得到：从一片空白出发，先凭空加入一个耳，再不断在已有的图上选择两个点作为端点添加新的耳，其中除了第一个耳是圈之外，后加入的所有耳都是轨道；并且通过这个过程得到的也一定是 2-连通图。实际上，使用耳分解的概念还能给出另一个断言：一个图是连通图，当且仅当它存在“耳分解（ear decomposition）”，即可以通过先凭空添加一个耳，再在已有的图上选择两个点作为端点添加新的耳得到。注意这里我们不再要求第一个耳必须是圈，也不再要求后续的耳必须是轨道。

容易看出，2-连通图的耳分解定理中，要求第一个耳是圈是必要的，否则新建一条轨道得到的便已经不是 2-连通图；要求后续的耳 E_i 不是圈也是必要的，否则可以构造如下沙漏状的反例：



显然，如果不要求后续的耳两个端点不同，则在一个点上贴上一个圈会导致这个点成为割点。与 2-连通图矛盾。

我们先来证明上述定理：

必要性（2-连通图可以通过上述耳分解构造）：

我们直接给出求这样一个构造过程的算法：我们知道 2-连通图 G 中含圈，否则 G 是树从而有割点。任取 G 中一个圈 C 作为 G_0 ，然后重复：

- ① 如果已经有 $G_i \cong G$ ，算法停止；
- ② 如果目前 $G_i \not\cong G$ ，则 G 中还有不在 G_i 中的边 $e = uv$ (G 与 G_i 不可能

只相差点而边集完全相同, 否则 G 是非连通图). 任取 G_i 中的边 $e' = xy$, 则由于 G 是 2-连通的, G 中存在一个圈 C' 同时含有 e 与 e' . 从 e 的两侧出发, 分别找到第一个已经在 G_i 上的点 x_i, y_i (当然, 有可能 u, v 就是 x_i, y_i), 则截取 C' 上介于 x_i 与 y_i 之间的一段作为新的耳 E_{i+1} , 将 $G_i \cup E_{i+1}$ 作为新的图 G_{i+1} . 然后再次进行判断.

由于无论是一开始的圈 C_0 , 还是中间取的圈 C' , 都来自于 G 的边集, 因此每次执行②时添加的边一定是 G 中的边, 即每个 G_i 一定是 G 的子图, 算法停止时输出的一定是 G ; 又由于 G 的边数是有限的, 而算法每执行一次上述的②都会使 G_{i+1} 的边数相比 G_i 严格增加, 因此算法一定会在有限步后停止. 这样我们就证明了 G 存在上述耳分解.

充分性 (耳分解过程构造出的图一定是 2-连通的) :

我们归纳地证明构造过程中每个 G_i 都是 2-连通的即没有割点:

- (1) G_0 是圈, 当然没有割点;
- (2) 如果 G_i 没有割点, 在添加耳 (即轨道) E_{i+1} 后:

① E_{i+1} 本身长为 1 即 $E_{i+1} = e = uv$, 从而没有出现新的点. 显然, 添加一条边对于通路的存在只会有利从而对连通性只会有利. 由于 G_i 没有割点, G_{i+1} 当然也没有割点;

② E_{i+1} 本身长度超过 1. 先考虑 G_i 中已有的点 x : 由于 G_i 没有割点, 删去 x 后 G_i 其余的点依然连通, 而由于 u, v 至多被删去了一个, E_{i+1} 上的点也可以通过 u 与 v 中的至少一者与这个整体连通, 从而 x 不是割点. 再考虑 E_{i+1} 内部的点 x_i , 删去 x_i 后 G_i 原有的点依然连通, 而 E_{i+1} 上 x_i 两侧的点分别通过 u 或 v 与这个整体连通, 从而 x_i 不是割点. 这样就证明了 G_{i+1} 也没有割点.

综上, 我们完成了证明.

(当然, 接下来我们会看到, 为了做出这道题即证明一些关于 2-连通图的性质, 我们其实只需要必要性一侧. 请读者参考题 2.25 的备注.)

有了 2-连通图结构定理的准备, 下面我们开始解答题 3.12:

(1)

考虑 G 的耳分解中最后一次添加的耳 E_n . 如果 E_n 是一个恰当耳 (proper ear) 即不是一条边, 则 E_n 内部的任何点度数都为 2; 如果 E_n 是一条边即 $E_n = e$, 则 $G - e$ 依然是一个二分图, 与 G 的临界性矛盾.

(2)

(1) 的解答给我们以启发: 如果 G 是 κ 临界 2-连通图, 那么 G 的耳分解中最后一次添加的耳不能是一条边. 但我们可以想到: 如果添加一个耳 E_i 时, E_i 是一条边即不带来新的点, 那么后续添加的其它耳 E_j ($j > i$) 用到的端点并不依赖于 E_i 的存在. 换言之, E_i 是一条边时, 耳 E_{i+1} 的添加在 G 的耳分解中与 E_i 的添加可交换.

由此, 如果 G 的耳分解中存在某个耳 E_i 是一条边, 我们总是可以把它交换到最后一个, 但这样就与 G 的临界性矛盾. 所以 G 的耳分解中每次添加的耳一定不是一条边! 这样我们就能想到如何证明边和点的数量关系: 每次添加一条长为至少 2 的轨道时, 增加 k 条边与 $k - 1$ 个点, 从而边的增加量一定不超过点的增加量的两倍.

最后我们只需要归纳奠基, 即证明初始状况下成立: 由于需要 $\epsilon \leq 2v - 4$, 我们需要 $G_0 = C$ 中至少有 4 个点, 即需要证明一定可以选到一个长为 4 的圈作为 C . 由于 C 的选取是任意的, 我们只需要证明 G 中存在长为至少 4 的圈. 采用反证法: 假如 G 中所有圈都长为 3, 由于 $v \geq 4$ 一定存在至少两个这样的圈 (否则有点不在圈上从而有割点), 且一定有两个这样的圈相交于一条边 (否则如果所有 3-圈都只点相交, 这样的交点是割点), 那么这两个圈作对称差即得到一个长为 4 的圈.

综上我们可以归纳地证明 $\epsilon \leq 2v - 4$.

(3)

根据 (2) 的过程我们可以知道如何保持等号成立: 首先作为起始的圈恰好长为 4; 其次每次添加的耳是一个长为 2 的轨道. 由于每次添加这样一个耳恰好增加一个点, 我们可以根据此构造出所有阶的例子. 因此问题的关键仅仅在于每次添加耳时如何选取端点.

显然, 在 $G_0 \cong C_4$ 上, 只能选取一对不相邻的点作为端点, 选法在同构意

义下只有一种. 受此启发, 我们可以考虑每次都选择这两个点添加耳, 即 $G_k \cong K_{2,2+k}$. 由于这个图是边传递的 (所有边都是对称的), 容易证明删去任何一条边后, 两个点的阵营中与之不关联的那个点会成为割点, 从而其确实是一个最小 2-连通图.

从而 n 阶的构造为 $K_{2,n-2}$.

p.s. 上述关于耳分解构造的定理还有另一个等价的表述: 一个图 G 是 2-连通图, 当且仅当它可以通过以下过程构造得到:

- (1) 构造一个 C_3 作为 G_0 ;
- (2.1) 在 G_i 中选择两个不相邻的点 u, v , 添加一条边 $e = uv$ 得到 G_{i+1} ;
- (2.2) 在 G_i 中选择一条边 $e = uv$, 将其细分 (删去 $e = uv$, 新建一个点 x , 连接 $e_1 = xu$ 与 $e_2 = xv$) ;
- (3) 重复 (2.1) 或 (2.2).

显然存在耳分解的图可以通过连边和细分得到: 我们只需要细分 C_3 得到耳分解中作为起始状态的 C , 然后每次连一条边并细分它得到耳分解中的每个耳. 对于反方向的证明, 只需要证明连边和细分的操作都不影响一个图的 2-连通性. 这样我们就证明了对于一个图 G , 2-连通, 存在耳分解, 以及“可以通过在 C_3 上连边和细分得到”, 这三个性质是等价的.

13.

我们先定义一个概念: 图 G 的线图 $L(G)$. 给定一个图 $G = \langle V, E \rangle$, 定义其线图 $L(G)$ 的点集 $V(L(G))$ 为 G 的边集 $E(G)$, 在 $L(G)$ 两个点 e_1, e_2 之间连边, 当且仅当 e_1 和 e_2 在 G 中关联了同一个点. 可以验证, $L(G)$ 中的一条路 p' 总是对应着 G 中的一条路 p (我们可以将 $L(G)$ 中表示 p' 的点序列翻译为 G 中的边序列, 且这个边序列中相邻的边是关联的, 因此总是可以连成一条路 p), 且 p' 在 $L(G)$ 中点不重, 当且仅当 p 在 G 中边不重. 还可以验证, G' 的点连通度等于 G 的边连通度.

现在来利用 $L(G)$ 证明 Menger 定理的边版本在 G 上成立. 记无公共边的 uv -轨道的数量为 $p'(u, v)$, 最小 uv -边割集大小为 $c'(u, v)$. 由于至少需要删去这些无公共边轨道中每条轨道上的一条边才有可能分隔 u, v , 显然有 $p'(u, v) \leq c'(u, v)$. 我们实际上只用证明 $p'(u, v) \geq c'(u, v)$, 即 u, v 间至少有 $c'(u, v)$ 条边不交的轨道.

显然, $\deg(u) \geq c'(u, v)$, 否则删去 u 的所有邻边即可分隔 u 和 v , 由此即得一个更小的 uv -边割集. 同样地, $\deg(v) \geq c'(u, v)$. 现在, 在 G 的线图 $L(G)$ 中, 考虑 u, v 各自的所有邻边对应的点构成的点集 $E(u), E(v)$, 则有 $|E(u)|, |E(v)| \geq c'(u, v)$. 在 $L(G)$ 中新建两个点 u', v' , 将 u' 与 $E(u)$ 中的所有点相连, v' 与 $E(v)$ 中的所有点相连. 由于 G 中最小的 uv -边割集大小为 $c'(u, v)$, 所以 $L(G)$ 中最小的 $u'v'$ -点割集大小为 $c'(u, v)$ (请自行验证这一点!), 从而 $L(G)$ 中存在 $c'(u, v)$ 条从 u' 到 v' 的点不重的轨道. 将这些轨道的点序列翻译回 G 中的边序列, 就得到了 G 中 $c'(u, v)$ 条从 u 到 v 的边不重的轨道.

p.s. 证明本身非常综合, 但只要理解了思路就很明晰. 如果读者没有事先了解过线图的概念, 恐怕读起来就觉得惊为天人, 不知道怎么能产生这样新奇的想法. 给出这样一个证明不是要求读者也能有如此的思维能力, 而是展现“对图作修改以证明定理”中一个精彩的例子, 让读者感受这种思路的威力. 在推论 3.2 的证明中我们已经见到了这种思路的力量, 在第 5 章习题的解答中我们将再次感受这一点.

14.

@

15.

题 2.25 的解答告诉我们: 对于任何连通图 G , 取其任一生成树 T , 则对于 T 的任意两片叶子 u, v , $G - u - v$ 依然连通. 实际上读者不难理解, 它实际上

也证明了 $G - u$ 和 $G - v$ 依然连通, 即 G 的任一生成树的任一叶子不是割点.

现在, 如果 n 阶连通图 G 只有两个点不是割点, 说明 G 的任意生成树都只有这两个点作为叶子. 而这样的只含有两片叶子的树只可能是一种同构类, 即以这两个点为端点的轨道 $P_n = x_1 - x_2 - \cdots - x_n$ (这里 $u = x_1, v = x_2$). 所以我们只需要 G 中没有 P_n 以外的边.

假设 G 中还存在其它的边 $x_i - x_j$, 则可以设 $j - i \geq 2$, 这说明 x_i 和 x_j 之间还有别的点 x_k ($i < k < j$). 那么删去一个这样的点 x_k 后, 其一侧的所有点与 x_1 连通, 另一侧的所有点与 x_n 连通, 而这两部分通过 $x_i - x_j$ 连通, 从而 $G - x_k$ 连通, x_k 也不是割点. 由于 $k \neq 1$ 且 $k \neq n$, 这就与条件“只有两个非割点的点”矛盾.

16.

反证法: 如果 G 中有桥 $e = v_1v_2$, 记 $G - e$ 的两个连通片 (根据题 3.1, 只会有两个) 分别为 G_1, G_2 , 其中 $v_i \in G_i$ ($i = 1, 2$). 则 G_1 中 v_1 度数为奇数, 其余点度数均为偶数, 作为子图所有点度数和为奇数. 这是不可能的.

17.

(1)

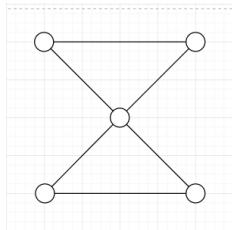
由于 G 是连通图, $\omega(G)$ 实际上就是 1, 因此 v 就是 G 的割点. 所需证即为“3 阶或以上的图中, 有桥蕴含有割点”. (我也不知道为什么要采用这样一种拐弯抹角的说法...)

考虑桥 e 关联的两点 v_1, v_2 , 其在 $G - e$ 中分属不同的连通片 G_1, G_2 . 由于 $V(G) \geq 3$, G_i 中至少有一者含至少两个点. 那么可以使用反证法证明: 删去 v_i 便可以分隔 G_i 中剩下的点与另一个连通片中的点. 从而 v_i 便是一个割点.

(2)

举例说明 (1) 的逆不成立, 即是要举例说明连通图 G 有割点不一定有割边(桥). 为了让这个割点关联的所有边都不是桥, 需要让割点与删去其后形成的每个连通片之间至少由两条边相连.

受此启发可以举出反例如下, 一个沙漏形的图:



18.

3-正则图 G 当然满足 $v(G) \geq 3$, 从而根据上题 (1) 可以平凡地证明“桥蕴含割顶”即必要性. 下面来证明充分性即“割顶蕴含桥”.

注意上题 (2) 给我们的启发: 取 G 的割顶 v , $G - v$ 中至少有两个连通片, 而 v 只有三个邻点, 因此 $G - v$ 的连通片中一定有一者 G_i 只含 v 的一个邻点 v_i . 不难验证 $e = vv_i$ 即是 G 的一座桥. 请读者自行证明这一点 (提示: 根据定义, 证明 G 中从 v 到 v_i 的路一定用到了 $e = vv_i$)

19.

我们直接给出一组构造, 然后证明它们就是取到最大/最小值的构造:

(下文中关于点与边的“层”的概念参见题 1.11 的解答.)

所选的 uv -点割集为第 1 层的所有点, 即恰有一个分量为 0 的向量对应的点 $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$. 这个点割集的大小为 n .

现在描述所选的边不重的 uv -轨道:

我们只考虑 u, v 之间长为 n 的轨道. (对于超立方体图 Q_n 中的一对对径点 v, \bar{v} (即一对在每个分量上相异的点), 不难看出其间的轨道长度至少为 n , 因为每经过一条边恰好改变一个分量, 而连接这样的两个点需要改变 n 次分量. 借用微分几何中的概念, 这样最短的轨道又被称为 $v\bar{v}$ -测地线.) . 显然, 为了让这条轨道长度为 n , 其必须恰好在每个分量上改变一次, 从而经过每个方向的边恰好一次 (如果 Q_n 中两条边由同一个分量上的相异导出, 我们称这两条边平行即方向相同). 由此我们可以在所有 uv -测地线与所有 n -排列之间定义一个一一映射: 对于 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列 $a_1a_2\dots a_n$, 其对应的轨道为从 $u = (0, 0, \dots, 0)$ 出发, 每次经过第 a_i 个分量上的相异导出的边, 最终达到 $v = (1, 1, \dots, 1)$. 例如, 在 Q_3 中, 排列 213 对应的轨道为:

$$(0, 0, 0) - (0, 1, 0) - (1, 1, 0) - (1, 1, 1)$$

这样我们就有了一个简便表示所有 uv -测地线的记法. 现在我们给出这些边不重的 uv -轨道: 其中的第一个轨道对应的序列为 $12\dots n$, 而后续的每一个轨道为上一个轨道对应序列中的所有位向前轮换一位得到. 如下所示:

$$1 \ 2 \ \dots \ n$$

$$2 \ 3 \ \dots \ 1$$

...

$$n \ 1 \ \dots \ 2$$

这样就给出了 n 条连接 u, v 的轨道. 为了证明它们是边不重的, 我们改为证明一个更强的论断: 它们是除端点 u, v 外点不重的. 注意到在每一个这样的轨道中, 经过第 i 条边的到达的点恰在 Q_n 的第 i 层, 因此如果来自两条轨道的各一个点相同, 一个必要条件它们位于这两条轨道中的同一个位置. 此外, 为了让这两个点的坐标相同, 从 $u = (0, 0 \dots, 0)$ 出发到达它们所经过的边的方向构成完全相同的集合, 即这两条轨道的对应序列的前 i 位的构成完全相同. 然而, 由于不同轨道之间通过轮换得到, 这是不可能的.

由此我们给出了连接 u, v 的一组除端点外点不重从而边不重的轨道. 这个轨道集的大小也为 n .

现在我们来证明它们分别取到题目所要求的最大值/最小值. 显然, 一组从

u 出发到 v 的边不交的轨道, 其中每条轨道的第一条边必定来自 Q_n 的第一层边, 因此任何一个这样的轨道集大小至多为 n . 由于上文中我们已经给出一组 n 条边不交的轨道, 从而有 $p'(u, v) = n$ 成立. 另一方面, 由于一组除端点外点不交的轨道总是一组边不交的轨道 (反之则不一定), 因此有 $p(u, v) \leq p'(u, v)$. 由于上文给出的这组轨道也是除端点外点不交的, 也就有 $p(u, v) = n$.

而根据 Menger 定理, 我们知道 $p(u, v) = c(u, v)$, 而上文给出的点割集大小恰好为 $n = c(u, v)$, 因此它就是一个最小点割集.

20.

本题的解答中, 我们再次使用题 3.12 解答中给出的引理: 2-连通图的结构定理.

为了证明任一 2-连通图 G 中存在可收缩边, 我们直接指出这样一条可收缩边: 我们任取 G 的一个耳分解, 取其构造过程中添加的最后一个恰当耳 (不是一条边的耳) E_i , 则 E_i 中任何一条边 e 都是可收缩的.

下面我们来证明这样取到的 e 的确符合要求, 以及这个取 e 的方法是良定义的 (这样一个 e 的确是可以取到的) :

首先可以证明一个简单的引理: 如果 2-连通图 G 在收缩某条边 $e = uv$ 后不再是 2-连通的即 $G \cdot e$ 有割点, 那么割点必然是 e 收缩得到的点 (记为 w). 证明如下:

使用反证法: 如果 $G \cdot e$ 中有 w 以外的割点 x , 那么我们断言 x 在 G 中也是割点. 再次使用反证法: 如果 x 在 G 中不是割点, 即 $G - x$ 中任意两点 y, z 有路连接, 那么考虑 y, z 在 $G \cdot e - x$ 中 (如果 y, z 中有某个点是 u 或 v , 将其替换成 w): 如果 $G - x$ 中 yz -路 p 不涉及 e , 那么其在 $G \cdot e - x$ 中依然成立, 从而 $G \cdot e - x$ 中 y, z 连通; 如果 $G - x$ 中 p 涉及 e , 那么取表示 p 的点-边交错序列, 将其中所有 e 删去, 并将 e 两侧的 u, v 全部替换成 w , 就得到了 $G \cdot e - x$ 中一条 yz -路, 从而依然有 $G \cdot e - x$ 中 y, z 连通. 这样就与 x 是 $G \cdot e$ 的割点矛盾.

有了引理之后, 我们来证明上述取法取到的 e 是可收缩的: 根据引理, 如果取到的 $e = uv$ 不是可收缩的, 那么 $G \cdot e$ 中割点一定是 e 收缩得到的 w . 显然, 删去 w 不可能在 $G \cdot e - w$ 中分隔了 w 在耳 E_i 上两侧的点 x, y , 这是因为 x, y 本就与添加 E_i 前上一个状态的图 G_{i-1} 中的某个点连通, 而 G_{i-1} 本身也是一个连通图. 因此删去 w 只可能像题 3.12 的解答中给出的漏斗状的图那样, 在 $G \cdot e$ 中分隔了 Q_i 所在的连通片与一个此后添加的耳 E_j . 这说明添加 E_j 时, 所选的端点是 Q_{j-1} 中的相邻两点 u, v , 从而 E_j 本身不能是一条边即是一个恰当耳. 但根据定义, E_i 是 G 的耳分解过程中添加的最后一个恰当耳, 而 E_j 的添加又必须在 E_i 之后, 矛盾. 这样就证明了收缩 e 后 w 依然不可能是割点, 从而 $G \cdot e$ 是 2-连通图即 e 是可收缩的.

最后我们还需要排除一种情况, 即 G 的耳分解过程中没有添加任何恰当耳. 想要避免这种情况出现, 我们可以注意到 G 的耳分解存在性的证明中, 第一个圈 C 是任取的, 这会使我们丢失一些有利的条件. 因此我们对 G 的耳分解的构造作如下调整: 在取第一个耳 C 时, 指定 G 中最短的圈作为 C , 因此添加的第一个耳 E_1 不能是一条边即不能是 C 的一条弦 (否则一定会导致存在一个更短的圈). 这样就证明了 G 一定存在一个耳分解, 其中每次添加的耳不都是一条边从而有恰当耳. 既然有恰当耳, 就一定可以找到最后一次添加的恰当耳, 从而取到可收缩的边 e .

21.

本题中我们依然使用 2-连通图的结构定理.

这次我们取 G 中最长的一个圈作为 C . 由于 $v(G) \geq 4$, 根据题 3.12(2) 的解答, 这样取到的 C 长度至少为 4, 从而每条边都是可收缩的.

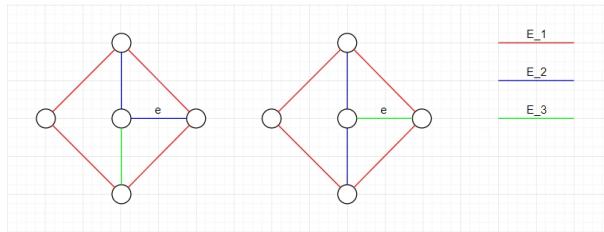
现在考虑 G 的耳分解的构造过程: 根据题 3.12(2) 的解答, 如果某次添加的耳 E_i 是一条边, 我们总可以将 E_i 与 E_{i+1} 的添加交换. 由此我们可以观察到两件事: 其一, 我们总可以通过足够的交换, 让全部非恰当耳 (即作为耳的一条边) 的添加排在全部恰当耳的添加的后面; 其二, 在前者的基础上, 我们在非恰当耳的添加的内部进行交换, 还可以让每一个非恰当耳的添加排在最后一个. 根据题 3.12(1), 如果在某个耳分解中, 最后一次添加的是非恰当耳即一条边 e , 那么 e 是可删除的. 注意“可删除”是一条边固有的性质, 与

我们所选的耳分解过程无关! 因此, 由于每条非恰当耳 E_i 都在某个耳分解中是最后一个添加的, 所以它们对应的边 e 都是可删除的.

下面我们证明所有恰当耳中的边都是可收缩的 (不依赖于与耳分解过程的选取) : 考虑 G 的一个耳分解, 显然如果排在最后一个的耳是恰当耳, 那么这个耳中的每条边都是可收缩的. 现在假如某个恰当耳 E_j 不是最后一个添加的, 那么我们暂时只知道对于 E_j 中的任意一条边 $e = uv$, $G_j \cdot e$ 依然是 2-连通的, 但 $G \cdot e$ 是否是 2-连通的尚不得而知. 然而, 考虑在 $G_j \cdot e$ 的基础上, 继续执行 E_j 之后的所有耳的添加操作 (每当某步操作涉及到 u 或 v , 便改为对 $G_j \cdot e$ 收缩得到的 w 做相同的操作), 由此得到的图即是 $G \cdot e$. 仿照题 3.12 中备注的思路, 一系列添加耳的操作总是等价于一系列连边和加细边的操作, 而连边和加细边都不会使得一个 2-连通图变成不是 2-连通的. 这样就证明了 $G \cdot e$ 也是 2-连通的.

由此我们证明了: 任取 G 的一个耳分解, 对于其中每次添加的耳 E_i 中的每条边 e , 如果 E_i 是一条边, 那么 e 是可分解的; 如果 E_i 的长度超过 1 即是恰当耳, 那么 e 是可收缩的.

p.s. 虽然此题的证明过程中我们不断强调证明每条边 e 的可收缩性/可删除性不依赖于耳分解的选取, 但解答最后给出的命题依然可能令人迷惑: 对于同一个 2-连通图 G , 其中每条边究竟来自恰当耳还是非恰当耳, 这是依赖于耳分解的选取的. 可能某条边在一个耳分解中来自恰当耳, 在另一个耳分解中便来自非恰当耳. 例如考虑下图的例子, e 在左图所示的耳分解中来自一个恰当耳, 在右图所示的耳分解中来自一个非恰当耳:



这样的边 e 究竟是可收缩的还是可删除的? 就这个具体的例子而言, $G - e$ 和 $G \cdot e$ 都是 2-连通图, 因此 e 同时是可删除的和可收缩的. 结合这个例子我们不难发现, 如果一条边 e 在两个不同的耳分解中分别来自恰当耳/非恰

当耳, 那么这无非说明它既是可删除的, 又是可收缩的, 而这并不影响题给命题的正确性.

22.

我们完全仿照推论 3.2 的证明中的技巧:

在 G 中新建一个点 y , 将 y 恰与 Y 中的所有点连边得到新图 G' . 由于 G 是 k -连通的且 $|Y| \geq k$, 根据引理 3.1, G' 仍是 k -连通的, 因此存在 k 条除端点外点不重的 xy -轨道. 这些轨道中的每一条中与 y 相邻的点必定来自 Y , 并且两两不同.

现在从 G' 中再次删去 y 导出子图 G , 那么这 k 条轨道导出的新轨道就是 G 中 k 条除 x 外点不重的轨道, 且每条轨道的另一端点都来自 Y .

23.

我们考虑仿照教材中图 3.6 给出的图 G 构造一个例子:

首先建立两个 C_5 的不交并. 记内外层的 C_5 分别为 $x_1x_2x_3x_4x_5$ 与 $y_1y_2y_3y_4y_5$, 一个自然的想法是让 x_1 和 y_5, y_1, y_2 连边并依次轮换, 即 x_i 与 y_j 连边当且仅当 $i - j \equiv -1, 0, 1 \pmod{5}$.

24.

不妨认为 $Y \cup Z = \emptyset$, 否则任取 $Y \cup Z$ 中一个点作为 z , 则从 x 到 Y 的扇形就是一个从 x 到 $Y \cup \{z\}$ 的扇形.

@

25.

这道题里的“最小”应该是错译，正确的译法应为“极小”。

在讨论满足一个性质的结构时，我们习惯称一个结构极小当且仅当从中删去任何一个元素都使其不再满足这个性质，而称一个结构最小当且仅当它是所有满足这个性质的结构中元素个数最少的之一。不难看出这样的用语与偏序集中的“极小/最小元”的用法是互洽的：极小性是一个结构的内蕴性质，我们只需要它附近没有比它更小的结构；而最小性是一个关乎全局的性质，我们需要所有其它结构都大于它或等于它。可以看出，当我们说“极小”结构时，默认的偏序关系是集合的包含关系；而当说“最小”结构时，默认的变成了集合元素个数的大于等于关系这一全序关系，从而使得谈论的“最小”结构总是存在。而且这样还保证了“最小结构总是极小结构，反之则不然”的直观认知。

下文中我们始终使用“极小” k -边连通图这样的词。

(1)

(a)

假设存在 e 不在 G 的任何 k -边割集中，则 $G - e$ 没有大小至多为 $k - 1$ 的边割集，否则 $G - e$ 中这样一个边割集 C' 加上 e 后便是 G 的一个 k -边割集，矛盾。因此 $G - e$ 删去 $k - 1$ 条边后总是连通，其也是 k -边连通图，与 G 的极小性矛盾。

(b)

任取 G 的一个点子集 $X \subseteq V(G)$ ，记 $\bar{X} = V(G) - X$ ， $(X, \bar{X}) = \{e = uv | u \in X, v \in \bar{X}\}$ 即 X 和 \bar{X} 之间的所有边构成的集合。显然 (X, \bar{X}) 是能够隔开 X 和 \bar{X} 的最小边割集，从而 G 的任何一个 k -边割集 C' 都必然是某个 X 对应的 (X, \bar{X}) ，否则存在比 C' 更小的边割集。

现在我们选取使得 $|(X, \bar{X})| = k$ 的点数最少的点集 X （这样的 X 必然存在，否则 G 的所有边割集都至少含有 $k + 1$ 条边从而是 $k + 1$ -边连通的，那么任取 $e \in E(G)$ 有 $G - e$ 是 k -边连通图，与 G 的极小性矛盾）。下面我们证明这样的 X 是一个点，从而确定一个度数为 k 的点。

使用反证法: 假定 X 不是单点集即 $|X| \geq 2$, 则显然 X 导出的子图 $G(X)$ 是一个连通图, 否则只保留其中一个连通片会得到一个 $|(X, \bar{X})|$ 不变大 (从而依然是 k) 而 $|X|$ 变小的 X , 与 X 的最小性矛盾. 任取 $e \in G(X)$, 根据 (a) 总可以取到 Y 使得 $e \in (Y, \bar{Y})$ 且 $|(Y, \bar{Y})| = k$ (否则 e 不在一个最小边割集中). 我们断言:

$$|(X \cap Y, \bar{X} \cap \bar{Y})| + |(X \cup Y, \bar{X} \cup \bar{Y})| \leq |(X, \bar{X})| + |(Y, \bar{Y})|$$

下面证明这一点:

$X \cap Y$ 到 $X \cap \bar{Y}$ 中的边在两侧各被计算一次;

$X \cap Y$ 到 $\bar{X} \cap Y$ 中的边在两侧各被计算一次;

$X \cap \bar{Y}$ 到 $\bar{X} \cap \bar{Y}$ 中的边在两侧各被计算一次;

$\bar{X} \cap Y$ 到 $\bar{X} \cap \bar{Y}$ 中的边在两侧各被计算一次;

$X \cap Y$ 到 $\bar{X} \cap \bar{Y}$ 中的边在两侧各被计算两次;

$X \cap \bar{Y}$ 到 $\bar{X} \cap Y$ 中的边只在右侧被计算一次;

这样我们就证明了断言. 注意 X 与 Y 的选取使得 $|(X, \bar{X})| = |(Y, \bar{Y})| = k$, 而由于 G 是 k -连通的, 有 $|(X \cap Y, \bar{X} \cap \bar{Y})|, |(X \cup Y, \bar{X} \cup \bar{Y})| \geq k$. 为使上式取到不等号, 必须实际上有 $|(X \cap Y, \bar{X} \cap \bar{Y})| = |(X \cup Y, \bar{X} \cup \bar{Y})| = k$ 成立. 但 Y 不包含 e 的一个点从而不包含 X , 因此 $X \cap Y$ 是一个严格小于 X 的集合, 这与 X 的最小性矛盾. 这样就证明了 X 中不能含边从而是单点集. 则 $x \in X$ 即是一个度数为 k 的点.

(c)

我们固定图的阶数 n 对 k 使用归纳法:

① $k = 1$ 时, n 个点的极小连通图就是 n 阶树, 含有 $n - 1$ 条边, 结论成立.

② 若命题对 k 成立, 考虑 $k + 1$:

取 H 为 G 的一个极小 $k - 1$ -边连通生成子图 (这样一个子图总是可以取到, 通过不断删去 G 中不改变 $k - 1$ -边连通性的边, 直到删无可删为止), 则根

据归纳假设 $|E(H)| \leq (k-1)(n-1)$. 定义 $F = E(G) - E(H)$, 则只需证明 $|F| \leq n-1$.

我们直接证明 $G(F)$ 是一个森林: 任取 $e \in F$, 由于 e 属于 G 的一个 k -边割集, 存在 $X \in V(G)$ 使得 $e \in (X, \bar{X})$ 且 $|(X, \bar{X})| = k$. 由于 H 是 $k-1$ 连通的生成子图, (X, \bar{X}) 中的边 H 至少占了 $k-1$ 条 (否则 H 中存在大小至多为 $k-2$ 的边割集), 则 F 至多占了一条. 即 $G(F)$ 中 X 与 \bar{X} 仅有 e 连接, e 是 $G(F)$ 的一座桥从而不在 $G(F)$ 的一个圈上. 由于 e 的任意性, 可知 $G(F)$ 中无圈从而是森林.

这样就完成了证明.

(2)

仿照 (1)(c) 中的思路, 对这样一个图 G , 选取其中一条边 e 使得 $G - e$ 仍是 k -边连通的, 将其删去. 重复这个操作直到不存在这样的 e , 则最终得到的图 H 是 G 的一个生成子图, 且 H 是极小 k -连通的, 从而 $\epsilon(H) \leq k(n-1)$ 即 H 满足要求.

26.

略.

27.

我们首先证明 n 为偶数, k 为奇数的情况, 完全仿照教材定理 3.9 的证明思路:

记 $k = 2r+1$. 采用反证法, 不妨假设 $H_{n,2r+1}$ 中存在大小至多为 $2r$ 的割集 C . 由于 n 为偶数时, $H_{n,2r+1}$ 是点传递的即所有点对称, 则不妨设 $H_{n,2r+1} - C$ 中 $0, i$ 两点不连通. 下面我们考虑 $S = \{0, 1, \dots, i\}$ 与 $T = \{i, i+1, \dots, 0\}$, 分情况导出矛盾:

① 如果 C 中的点在 S 或 T 中 (不妨设是 S) 只有至多 $r - 1$ 个: 由于每个点可以连到其两侧距离为 r 的点, 删去这些点无法隔开 S 中任意一个空隙两端保留下来的点, 从而 S 内部的点依然是连通的, 矛盾.

② 如果 $|S \cap C| = |T \cap C| = r$, 但 $i = \frac{n}{2}$, 则 $0, \frac{n}{2}$ 之间有边直接连接, 不可能不连通, 矛盾.

③ 如果 $|S \cap C| = |T \cap C| = r$, 但 $i \neq \frac{n}{2}$: 由对称性不妨设 $0 < i < \frac{n}{2}$, 则 $r < i$. 根据①, 为了隔开 S 中剩余的点, 删去 $|S \cap C|$ 必须构成一个大小为 r 的空隙, 即删去的所有点必须连续, $|T \cap C|$ 的情况亦然. 现在考虑 T 中 $\frac{n}{2}$ 是否依然存在: 若其存在, 则 0 可以连到 $\frac{n}{2}$, 为了隔开 $\frac{n}{2}$ 与 i , T 中这个长为 r 的空隙必须完全介于 i 和 $\frac{n}{2}$ 之间. 则此时 $i + \frac{n}{2}$ 也存在, 且其与 0 之间没有任何点被删去从而连通, 矛盾. 这告诉我们 $\frac{n}{2}$ 必须不存在, 同理 $i + \frac{n}{2}$ 也必须不存在, 从而 T 中这个空隙必须要覆盖 $\frac{n}{2}$ 到 $i + \frac{n}{2}$ 之间的所有点, 从而有 $r > i$, 矛盾.

这样我们就证明了 n 为偶数, k 为奇数的情况. 下面考虑 n 为奇数, k 为奇数的情况:

由于此时 $H_{n,k}$ 中所有点不再对称, 难以像上面那样针对所有不同的点对讨论. 但我们注意到此时 $H_{n,k}$ 收缩 $\frac{n-1}{2} \sim \frac{n+1}{2}$ 这条边后即得到 $H_{n-1,k}$, 而后者是 k -连通的. 容易证明收缩一条边不会增加边的连通性, 即 $\kappa(G) \geq \kappa(G \cdot e)$ (请读者自行证明这一点). 这样就证明了 $H_{n,k}$ 也是 k -连通的.

28.

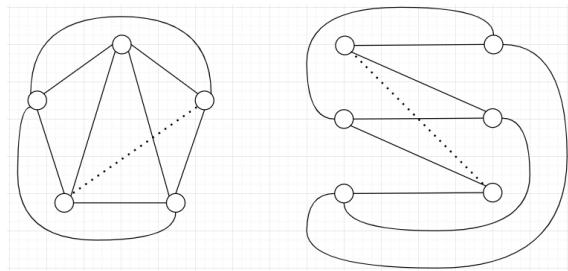
@

4 平面图

题解

1.

平面嵌入如下, 其中虚线标出了删除的边:



2.

注意到每个面至少是三边形, 因而所有面的总度数至少是 15, 边数 (棱数) 至少是 8. 下面我们分类讨论:

- ① 如果 $\epsilon = 8$, 则 $v = 5$. 此时, 面的度数序列显然只能是 $4, 3, 3, 3, 3$. 注意到四棱锥满足要求, 所以这一组取值可取.
- ② 如果 $\epsilon = 9$, 则 $v = 6$. 由于只有 5 个面, 每个面的度数至多为 4, 所以度数序列只能是 $4, 4, 4, 3, 3$, 从而其中度数为 4 的点必须两两相邻. 注意到将三棱锥的一个角砍去得到的三棱台满足要求, 所以这一组取值可取.
- ③ 如果 $\epsilon = 10$, 则 $v = 7$. 此时, 面的度数序列只能是 $4, 4, 4, 4, 4$. 由于这是一个空间中的几何体, 必有球面嵌入从而必有平面嵌入. 取其一个平面嵌入, 作这个平面嵌入的对偶图, 则其是一个 K_5 , 不是平面图, 矛盾. 所以这样的几何体不存在, 这一组取值不可取.

p.s. 由于题目只用求点数和棱数, 因此对于一组取值, 我们只需要找一个五

面体证明其存在, 不需要求出所有满足这组取值的五面体的同胚类.

3.

(1)

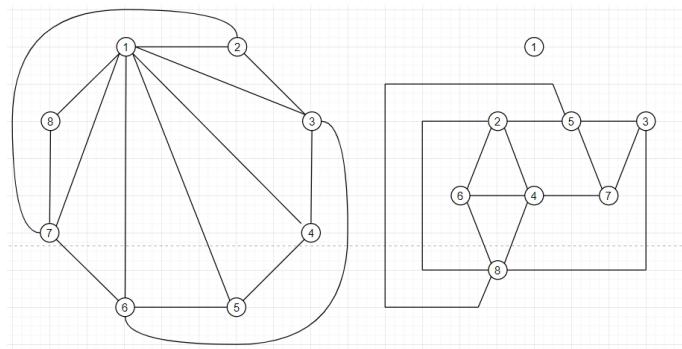
$$\epsilon(G) + \epsilon(G^c) = \epsilon(K_v) = \frac{v(v-1)}{2}$$

为使 G 与 G^c 均是平面图, 应有 $\frac{v(v-1)}{2} > 2(3v - 6)$

解不等式即可.

(2)

构造如下:



4.

G 满足 $v(G) = 8, \epsilon(G) = \frac{4v(G)}{2} = 16$. 代入 Euler 公式计算, 记得 $\phi(G) = \epsilon(G) - v(G) + 2$.

5.

对于非连通图, 注意到它的每个连通片共用同一个外部面. 除去外部面, 每个连通片均满足 $v - \epsilon + \phi = 1$.

求和, 再加上外部面即可.

6.

(1).

反证法: 若图 G 中所有面度数至少为 5 即 $\delta' \geq 5$:

则有 $2\epsilon \geq 5\phi, 2\epsilon \geq 3v$

即 $\phi \leq \frac{2}{5}\epsilon, v \leq \frac{2}{3}\epsilon$

代入 Euler 公式有 $\frac{2}{5}\epsilon + \frac{2}{3}\epsilon \geq \epsilon + 2$, 解得 $\epsilon \geq 30$.

另一方面, 我们又知道 $\phi < 12$, 所以有 $v > \epsilon - 10 \geq \frac{2}{3}\epsilon$, 矛盾.

(2).

构造: 正十二面体的平面嵌入.

p.s. 包括本题在内, 接下来的一系列题目本质都是根据可平面图满足的等式或不等式推出一个目标不等式. 注意这并不一定是普通的线性规划问题, 有时还需要根据语境注意合理性隐含的条件. 例如, 如果我们考虑的对象为 “ n 面体”, 那么除了平面图的条件外还有点度数 $\delta \geq 3$ 与面度数 $\delta' \geq 3$ 的隐含条件.

7.

使用反证法: 如果有一个平面图 G 同时满足 $\epsilon(G) < 30$ 和 $\delta(G) \geq 5$, 则有

$$2e = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) \geq 5v.$$

故 $\epsilon \geq \frac{5v}{2}$, 即有 $\epsilon < 12$.

但根据平面图的边数上限, 又有 $\epsilon \leq 3v - 6$ 即 $\frac{5v}{2} \leq 3v - 6$, 解得 $v \geq 12$, 矛盾.

8.

(1)

对于任何面 f , 有 $\deg(f) \geq k$.

故有 $2\epsilon \geq k\phi$, 即 $\phi \leq \frac{2\epsilon}{k}$.

又有 $v = \epsilon - \phi + 2 \geq \frac{(k-2)\epsilon}{k} + 2$, 将 ϵ 移到不等式的一端即得.

(2).

Petersen 图有 $k = 5, v = 10, \epsilon = 15$, 不满足不等式.

9.

下面我们通过不断讨论确定所有正多面体. 这个过程中除了利用平面图的条件外, 还要注意:

- ① 对于正多面体, 每个点关联至少 3 条边 (棱);
- ② 每个点关联的所有二棱所成角大小相等, 且这些面角的度数和小于 2π . 此外这些面角又都是正多边形的内角所以.

现在我们来讨论所有的正多面体. 首先考虑这个正多面体的每个面可以是正几边形: 由于每个点关联至少三条棱以及至少三个面, 所以面的一个内

角应小于 120° , 从而面只能是正三, 四, 五边形 (其每个内角大小分别为 $60^\circ, 90^\circ, 108^\circ$) .

① 如果每个面都是正三角形, 说明有 $\deg(f) = 3$ 从而 $\phi = \frac{2}{3}\epsilon$. 另外此时每个点可以关联三, 四或五个面即关联同样多的棱数, 三种情况下分别有 $v = \frac{2}{3}\epsilon, \frac{1}{2}\epsilon$ 或 $\frac{2}{5}\epsilon$. 第一种情况解得 $v = 4, \epsilon = 6, \phi = 4$, 对应正四面体; 第二种情况解得 $v = 6, \epsilon = 12, \phi = 8$, 对应正八面体; 第三种情况解得 $v = 12, \epsilon = 30, \phi = 20$, 对应正二十面体.

② 如果每个面都是正四边形, 说明有 $\deg(f) = 4$ 从而 $\phi = \frac{1}{2}\epsilon$. 另外此时每个点可以关联三个面即关联三条棱, 从而有 $v = \frac{2}{3}\epsilon$. 解得 $v = 8, \epsilon = 12, \phi = 6$, 对应正六面体 (正立方体) .

③ 如果每个面都是正五边形, 说明有 $\deg(f) = 5$ 从而 $\phi = \frac{2}{5}\epsilon$. 另外此时每个点可以关联三个面即关联三条棱, 从而有 $v = \frac{2}{3}\epsilon$. 解得 $v = 20, \epsilon = 30, \phi = 12$, 对应正十二面体.

p.s. 可以观察出, 正六面体与正八面体互为对偶 (点和面的地位交换), 正十二面体与正二十面体互为对偶. 至于正四面体, 它的对偶正多面体是自身.

10.

结合 Euler 公式与 $\deg(f) \geq 3$ 即可.

11.

充分性:

如果一个图 G 低于 2-连通, 说明删去 1 条边即可使 G 不连通 (即 G 中有桥) .

下证桥的两侧必定是同一个面 (进而这个面的边界是非圈回路) :

首先考虑桥的任一侧的面，它的边界上必然同时属于有删去桥后两个连通片的边。而边界上属于两个连通片的两部分之间必须要被连接至少 2 次。

如果这道桥只在回路中出现一次，两个连通片之间将有其它的边连接，与“低于 2-连通”矛盾。

故而这道桥在这个面的边界中出现两次，即桥的两侧是同一个面，因而这个面的边界有重复边，不是圈。

必要性：采用反证法：

由于所有边的边界都是回路，当存在非圈边界时，只可能是这条回路中有重复的边。但同时又知道一条边至多只能在一个面的回路中出现 2 次，故而重复的边（无论有几条）恰好出现 2 次。

现在考虑这个非圈边界上任一条出现了 2 次的边（设为 e ）。它的 2 次出现将整个边界分成两部分。删去 e 后，如果两部分上的边依然连通，则非圈边界所属的面不会成为一个面。故 e 是 G 的桥，与 2-连通矛盾。即证。

p.s. 读者或许能够注意到，解答中标红的论断缺乏严谨的证明。尽管它看上去既正确又直观，也找不到（由于题给命题的正确性，实际上不可能找到）关于它的反例，但似乎无法说清楚证明它的过程中使用的是哪一条公理或定义。

我们认为，这种非严谨性，或者说非形式性，出现的根本原因在于书上定义 4.1 的非严谨性。尽管每个图论学习者在根据定义 4.1 判断某个图是否为平面图时几乎都会给出相同的答案，但定义 4.1 依然不是完全形式化的。容易注意到，定义 4.1 所涉及的概念中其它概念都有良好的定义，或仅仅是引用了此前已经定义过的概念，但“可以画（在平面上）”没有形式化的数学含义。如果形式地改写这个命题，我们会得到：

称一个图为平面图，当且仅当存在一种它的画法，其中任意两条边都不相交；反之，称一个图为非平面图，当且仅当对于所有它的画法，其中都存在至少一对相交的边。

从这样形式化的定义出发，如果我们要证明一个图可嵌入平面，只需要给出一种的确合乎要求的画法就可以了；但要证明一个图不可嵌入平面就麻烦了：我们需要证明一个性质对“它的所有画法”成立。现在问题出现了：什么叫做“所有画法”？如果我们既没有定义“画法”这个概念，也没有给出一种能够表示所有画法的格式，我们要怎么证明一个关于“画法”的全称命题呢？

当然，限于篇幅和主题，教材不可能花费大段篇幅引入拓扑的概念与知识，何况是将其严格地运用到图论知识的讲解中。正所谓语言的含义是由使用者群体所决定的，如前文所言，定义 4.1 的非形式性大概并不会使得我们在交流中使用“平面图”这个词时指称到不同的对象。读者在本章的学习中也不必时时纠结于概念与证明的形式化。我们决定在本题的解答后附上这一段（标红的）关于定义形式性的讨论，仅作供读者拓展视野与深入思考之用。

12.

为了证明这样一个图 G 点割集的大小至多为 5，我们改为证明更强的命题：存在某个点 v 满足 $\deg(v) \leq 5$. 即这样的点割集总是可以通过“把一个点隔开”取到。

使用反证法后是显然的：如果图 G 满足 $\delta(G) \geq 6$, 则 $2\epsilon \geq 6v$ 这与平面图的性质 $\epsilon \leq 3v - 6$ 矛盾。

13.

利用欧拉公式等，然后整理式子。略。

14.

trivial 的。

15.

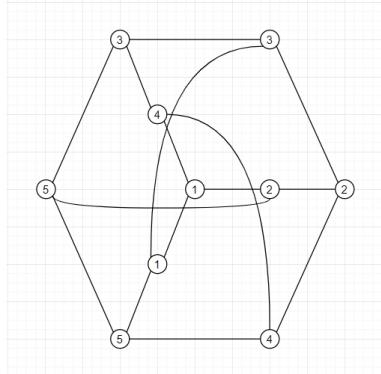
依然是 trivial 的.

16.

已知 $\theta(K_{3,3}) > 1$; 由题 4.1 可知 $K_{3,3}$ 存在只使用两层的平面嵌入. 故 $\theta = 2$.

17.

题所给图 G 按下图可收缩至 K_5 , 可知 $\theta(G) > 1$:

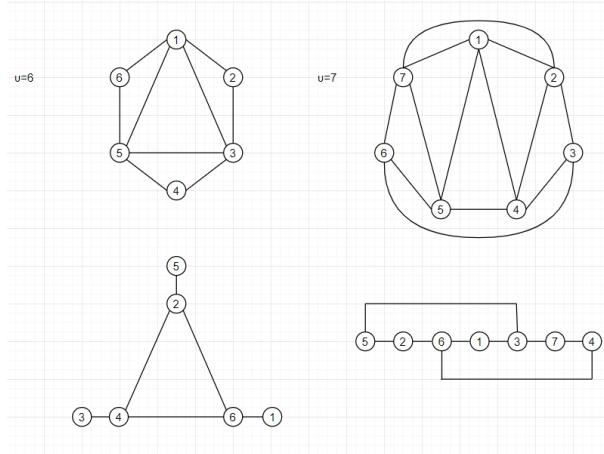


注意到将三条弯曲的边删去后得到的显然是可平面图, 而三条弯曲的边单独拿出来构成了一个 $K_2 \cup K_2 \cup K_2$, 是可平面图的不交并, 显然也是可平面图. 这样我们就得到了 G 的一个只使用两层的平面嵌入, 因此有 $\theta(G) = 2$.

18.

观察不等式右端取整函数内: 分子分母同时约去 2 后, 分子为 K_n 边数, 分母为每层平面可承载的最大边数. 显然.

$v = 3, 4$ 时 $\theta = 1$, 所要求的就是 K_3, K_4 的平面嵌入, 这是显然的; $v = 5$ 时 $\theta = 2$, 嵌入两层的方法已经在题 4.1 的解答中给出; $v = 6, 7$ 时 $\theta = 2$, 嵌入两层的方法如下图所示:



$v = 8$ 时 $\theta = 2$, 嵌入两层的方法已经在题 4.3(2) 的解答中给出.

19.

观察取整函数内分式的分子, 显然是 $K_{m,n}$ 的边数, 所以我们要证的几乎就是“二分图的每层嵌入至多有 $2v - 4$ 条边”, 注意这个边数上限与一般平面图的边数上限不同, 这种不同是缘于二分图的什么性质呢? 答案已经呼之欲出了.

回顾推论 4.2 的证明我们得到启发: 对一个二分图, 由于其无奇圈, 其平面嵌入中每个面至少是四边形, 从而有 $2\epsilon \geq 4\phi$ 即 $\epsilon \geq 2\phi$, 代入 Euler 公式就得到了 $\epsilon \leq 2v - 4$, 这样就证明了题给命题.

20.

我们以给定的这 n 个 (欧氏平面 E^2 意义下的) 点为 (图论意义下的) 点, 在两个点 x, y 之间连一条边当且仅当 $d(x, y) = 1$. 为了证明题给结论, 我们只

需证明这个图的边数上限为 $3n - 6$, 从而很自然地想到试图证明这个图是平面图, 即存在一个平面嵌入使得任意两条边不会产生交点. 事实上这个平面嵌入也是自然的: 如果 x, y 之间需要连边, 直接在 E^2 中对应的两个点之间连一条线段.

反证法: 如果这个平面嵌入使得线段 x_1y_1 与 x_2y_2 交于一点 o , 则线段 x_1o, y_1o 中较短者 (不妨设为 x_1o) 至多长为 $\frac{1}{2}$, 线段 x_2o, y_2o 中较短者 (不妨设为 x_2o) 同理. 现在考虑三角形 x_1x_2o , 则有 $d^2(x_1, x_2) < (d(x_1, o) + d(x_2, o))^2 \leq 1$, 与题设矛盾.

21.

1

22.

1

5 匹配理论

题解

1.

本题使用乘法原理.

在 K_{2n} 中决定一个完备匹配可以这样操作: 每次从当前剩余的 $2k$ 个点中取出一对点匹配, 重复 n 次直到所有点都被匹配, 操作这样一个过程的方法数为 $\prod_{i=n}^1 \binom{2i}{2} = \frac{(2n)!}{2^n}$. 此外, 两个过程决定了同一个匹配, 当且仅当它们所选的点对是完全相同的, 即它们每次的选择过程只相差一个置换, 从而同一个完备匹配会与 $n!$ 个不同的这样的过程对应. 由此总的完备匹配数量为 $\frac{(2n)!}{n!2^n}$.

在 $K_{n,n}$ 中决定一个完备匹配, 只需每次给一侧阵营中的点 x_i 从另一阵营中挑选一个剩余的点与之相配, 操作这样一个过程的方法数为 $n!$, 且两个过程决定同一个完备匹配当且仅当它们每次的选择都相同, 从而同一个完备匹配恰好对应一个这样的过程. 由此总的完备匹配数量为 $n!$.

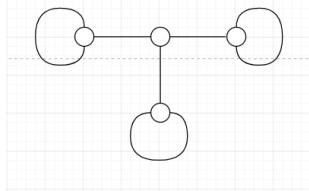
2.

使用反证法: 假定树 T 中存在两个不同的完备匹配 $M_1, M_2 \in E(T)$, 则考虑这两个边集的对称差 $M_1 \oplus M_2$, 其对应的生成子图 H 中每个点度数要么为 0, 要么为 2. 又因为 $M_1 \neq M_2$, 故 $M_1 \oplus M_2$ 非空, 对应的 H 的确有若干度数为 2 的点. 我们知道这样的图一定是若干个圈的不交并. 又因为 $M_1 \oplus M_2 \subseteq M_1 \cup M_2 \subseteq E(T)$, 说明 T 中含圈, 矛盾.

3.

k 为偶数: K_{k+1} .

k 为奇数: 从一个点出发衍生出 $k - 1$ 个点, 这 $k - 1$ 个点均有 $\frac{k-1}{2}$ 条环边.
 $k = 3$ 的情况如下图所示:



4.

读者可以想象, 这一游戏结束时的场景将是: 一方选择了一个点后, 所有与之相邻的点都被选择过, 从而另一方无处可走, 败给第一方. 由于图的有限性, 游戏必定在有限步后结束, 故而当一个算法保证一方始终有点可选时, 算法必定以另一方的落败为结束. 因此必胜策略的要义在于指出: 无论过去的选择如何, 无论对方此刻怎么选择, 我方接下来都有与之相邻的点尚未被选择从而尚可以选择 (而不必纠结于取胜那一步的场景如何). 那么匹配的思想在这里很适用.

由于必要性的情况十分显然, 我们先考虑必要性 (尽管它的陈述并不直接) :

必要性: 运用反证法: 假设 G 中有完备匹配 M , 证明先手无必胜策略.

为了证明这一点, 我们将给出一个后手的必胜策略. 显然, 当后手始终执行这个必胜策略时, 先手无法获胜, 故先手不存在任何必胜策略: 无论先手选哪个点 v , 后手下一步都选择被 M 许配给 v 的点 u 即可.

充分性: 我们给出一个先手的必胜策略:

G 中无完备匹配, 设 G 的最大匹配为 M , 即知 G 中存在不被 M 匹配的点.

先手第一步任取一个不被 M 匹配的点 v_0 . 与 v_0 相邻的点一定都被许配 (否则未被许配的点 u 与 v_0 所连的边可以加进 M 中, 与 M 的最大性矛盾), 故无论后手选择哪个与 v_0 相邻的点作为 v_1 , 先手都可以选择 v_1 被 M 许配的点 v_2 .

此后，每当后手进行选择，如果他可以选到一个未被 M 许配的点 v_{2n+1} ，那么 $v_0v_1v_2 \cdots v_{2n+1}$ 构成一条可增广轨道，与 M 的最大性矛盾。故后手能选择的一定是被 M 许配的点，此时先手再选择 M 许配给该点的点即可。

p.s. 请读者注意证明必要性时的目标转换：用证明后手有必胜策略来推出先手无必胜策略。仅从形式上看，这是一个等价变换还是有风险的加强？看起来好像是后者，毕竟先手无必胜策略似乎不是后手有必胜策略的充分条件（它当然是必要条件）。然而，博弈论中的策梅洛定理告诉我们：

信息公开的无随机因素的二人的有限博弈，或者一方有必胜策略，或者两方均有必不败策略。

（假如游戏规则下不存在平局的情况，显然可以表述为“必有一方有必胜策略”。）

在本题的案例中，当图 G 本身已经被确定，这显然是一个信息公开的无随机因素的博弈。它也显然是一个二人博弈。由于图的有限性且游戏每进行一步都会是一个点不能再被选取，它又是一个有限博弈。最后，如规则所言，它不允许平局的情况。故而我们可以放心地断言：“先手有必胜策略”的否定正是“后手有必胜策略”。

最后关于策梅洛定理闲聊几句：其详细证明过程不会在此展示，但读者可以依据正文前的解析直观地感受一下它为什么成立。另外，读者也可以试着举五个反例，以说明为什么定理中的五个条件（加粗的部分）缺一不可。

5.

“1 度因子”等价于“完备匹配”，从而“可 1 度因子分解”等价于“存在若干彼此不重的完备匹配，它们的并恰为全图所有的边”。

(1)

K_{2n} : 请参考后文题 6.12 的解答。基于其本题的解答近乎平凡。

$K_{n,n}$: 构造一个 1 度因子分解方案如下:

将 $K_{n,n}$ 中的所有点编号为 x_1, x_2, \dots, x_n 与 y_1, y_2, \dots, y_n .

$x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n$ 为 $K_{n,n}$ 的一个完备匹配.

此后, 保持匹配中每一对中的 x 不变, 每次使 y 的下标增加 1, 即可得到一个新的完备匹配, 且这些完备匹配彼此不重. 由此即可得到 n 个不重的完备匹配. 它们即构成一个 1 度因子分解方案.

(2)

我们先证明一个引理: Peterson 图删去任一完备匹配 M 后剩下的边构成两个 C_5 的不交并, 即生成子图为 $C_5 \cup C_5$.

首先, Peterson 图是 3-正则图, 删去一个完备匹配后是 2-正则图, 从而是若干不交圈的并. 由于 Peterson 的围长 (图中最短圈的长度) 为 5, 所以删去 M 后要么是一个 C_{10} , 要么是两个 C_5 的不交并 (划分成更多的圈一定会导出长度小于 5 的圈). 但如果剩下一个 C_{10} , 说明原图中有 Hamilton 圈, 与我们所知的 Peterson 图无 Hamilton 圈矛盾. 引理证毕.

有了引理后证明原命题是显然的: $C_5 \cup C_5$ 的边集无法拆成两个完备匹配的不交并, 因为单个 C_5 中不存在完备匹配.

6.

考虑一个 8×8 的正方形棋盘的每个格子的坐标 (记作 (a, b)), 不难证明两个格子相邻 (即“能够被一个 1×2 的长方形覆盖”) 的一个必要条件是: 两个格子各自的坐标中两数之和奇偶性不同. 根据这一特征, 我们先将格子划分为两个等价类 (等同于国际象棋棋盘中的黑格与白格).

以格子为点作图 G , 两点相邻当且仅当它们所对应的正方形格子在棋盘中相邻. 由上文知这是一个二分图.

显然, 所删去的对角的两个正方形属于同一个等价类. 由于此时对应的图作为二分图, 其两个阵营中点数不等, 当然不存在完备匹配. 这样就证明了题

给命题.

7.

证明:

必要性:

如果 S 为 X 或 Y 的子集, 与 Hall 定理中必要性的证明基本相同; 如果 S 同时含有 X 与 Y 的部分, 那么 $N(S \cap X)$ 与 $N(S \cap Y)$ 显然分别包含于 Y 与 X 从而不交. 加和即可.

充分性:

由条件易得 $|X| = |Y|$.

由条件, 考虑 Y, Y 本身便符合 Hall 定理的使用条件. 由 Hall 定理的充分性知, G 中存在将 Y 中点都许配的匹配, 而这也必然是 G 的完备匹配.

追问:

不成立, K_3 显然构成反例.

8.

(1)

注意到 k 次正则二分图删去一个完备匹配 (一个 1 度因子) 后即成为一个 $k - 1$ 次正则二分图, 从而这道题很适合用归纳法.

使用归纳法. 由推论 5.1 知 k 次正则二分图存在完备匹配. 其余略.

(2)

由题 1.9 知, 每个点度数都为 2 的图可表示为若干不交圈之并. 因而类似 (1), “可 2 度因子分解” 等价于 “存在若干组彼此无公共边的圈, 且每一组内

部的所有圈无公共点, 这些组的并恰为全图所有的边”.

由第 6 章知识知, 一个所有点度数都为偶数的图必有 Euler 回路. 我们任取 $2k$ 次正则图 G 的一个 Euler 回路 P .

现在我们作一个新的 2 分图 G^* , 其 X 与 Y 中均恰有 $v(G)$ 个点. 如果 P 中出现了 $v_i v_j$ 这条边且 v_j 出现在 v_i 之后, 我们便在 G^* 的 x_i 与 v_j 间连一条边. 由此, G^* 将是一个 k 次正则二分图. 由 (1), G^* 是可 1 度因子分解的.

现在我们任取 G^* 的一个 1 度因子分解方案, 然后将 G^* 中的 x_i 与 y_i 重叠成一个点 v_i 并保留原有的边关系, 则我们再次得到了 G . 此时 G^* 的 1 度因子分解方案便成为了 G 的 2 度因子分解方案.

9.

以每一行或每一列为点作 (二分) 图 G , 两点之间连边当且仅当矩阵中该行该列的值为 1.

所求证即为 König-Egerváry 定理.

10.

注意到 $A - P_k$ 即得到题目条件改为 $k - 1$ 时的所给矩阵. 那么这道题很适合使用数学归纳法.

类似第 9 题的思路, 我们可以将题目的对象转换为一个二分图 B , 一行与一列分别对应 X 与 Y 中的一个点. 则题目变为:

给定二分图 B . B 满足 $|V(X)| \geq |V(Y)|$, 且 X 中的点度数均为 k , 而 Y 中的点度数均不大于 k . 求证: 可以给定 G 的 k 个不重的匹配方案, 使得每个匹配方案均把 X 中的点完备匹配.

对 k 使用数学归纳法:

① $k = 1$: 命题显然成立, 因为可以将 X 中每个点许配给它的唯一邻居, 而由于每个 y_j 度数不大于 1 可知这些邻居彼此不同, 从而如此对应关系的确构成一个匹配

② 若命题对 k 的情况成立, 则对 $k + 1$ 的情况: 任取 $A \subseteq X$, 考虑 A 与 $N(A)$ 之间的边, A 中每个点贡献 $k + 1$ 条边, 而 $N(A) \subseteq Y$ 中每个点贡献至多 $k + 1$ 条边, 从而 $|N(A)| \geq |A|$. 由 Hall 定理知这样一个二分图 B 存在完备匹配 M , 取 M 对应的矩阵为 P_{k+1} , 并考虑删去 M 后的子图 $B - M$, 问题由此划归到 k 的情况.

11.

首先要意识到取 $S = \emptyset$, 则 $|S| - |N(S)| = 0$, 从而始终有 $\max \geq 0$, 所以不用担心溢出的情况.

先证 $|M| \leq |X| - \max_{S \subseteq X}(|S| - |N(S)|)$:

考虑使第二项取到 \max 的 S , 由于其邻居只有 $|N(S)|$ 个点, 任一匹配 M 至多把 S 中的点许配出去 $|N(S)|$ 个, 剩下的 $|S| - |N(S)|$ 个点无法被许配. 所以 M 至多许配 X 中的 $|X| - (|S| - |N(S)|)$ 个点.

再证

$$|M| \geq |X| - \max_{S \subseteq X}(|S| - |N(S)|)$$

(即的确存在一个有这么多边的匹配) :

考虑对 G 修改得到一个新二分图 G' : 记 $k = \max_{S \subseteq X}(|S| - |N(S)|)$, 在 Y 中新增 k 个点 y'_1, y'_2, \dots, y'_k , 将它们中的每个点都与 X 中的每个点全部连边, 其余不作改动. 现在 X 中的每个子集 S 相比于在 G 中都多了这 k 个邻居, 从而满足 $|N(S)| \geq |S|$. 根据 Hall 定理, 这样一个二分图 G' 有将 X 中的点都许配的匹配 M' (即 $|M'| = |X|$). 现在再把这删掉 k 个点删掉重新得到 G , 则 M' 自然导出 G 中的一个匹配 M . 由于每个 y'_i 至多关联 M' 中的一条边, 因此删去它至多破坏 M' 中一条边, 从而 $|M| \geq |M'| - k$. 这样就完成了证明.

12.

K-E 定理断言了二分图的最大匹配等于最小覆盖. 我们用其证明 *Hall* 定理时, 适合从 “最大匹配是否是完备匹配” 这种问法入手.

必要性 (存在将 X 的点都许配的匹配 $\Rightarrow (S \subseteq X \Rightarrow |N(S)| \geq |S|)$) :

Hall 定理的必要性是平凡的. 原来该怎么证还怎么证.

充分性 ($(S \subseteq X \Rightarrow |N(S)| \geq |S|) \Rightarrow$ 存在将 X 的点都许配的匹配) :

X 本身便是 G 的一个覆盖, 如果它是最小覆盖, 那么最大匹配的边数也为 $|X|$, 从而显然是将 X 完全许配的匹配. 下面我们致力于证明没有比 X 更小的覆盖.

如果存在一个覆盖 C 比 X 更小, 那么它必然缺少了 X 中的一部分点, 同时它会有 Y 中的一些点 (这里所说的“一些点”也包括没有点的情况). 对于那些不在 C 中的 x_i , 它们的边必须由 C 中 Y 内的点盖住. 我们已经有 $|C| = |C \cap X| + |C \cap Y|$, 如果 $|C \cap Y| < |X| - |C \cap X|$ (这是保证 C 优于 X 的前提), 取 $S = X/(C \cap X)$, 则由前文知 $N(S) \subseteq C \cap Y$ 从而 $|N(S)| \leq |C \cap Y| < |X| - |C \cap X| = |X/(C \cap X)|$. 矛盾.

13.

对一个二分图 B , 记其两个阵营为 X, Y , 考虑对 B 作如下改造得到 B' : 将 Y 的点两两之间连边. 此外如果 $|X| + |Y|$ 为奇数, 就新建一个点 y' , 并将其与 Y 内的所有点之间连边; 如果 $|X| + |Y|$ 为偶数就什么都不做. 显然, $v(B')$ 总为偶数.

如果在 B 中, X 存在子集 A 使得 $|A| > |N(A)|$: 考虑 $B' - N(A)$ 导出的子图. 显然 $B' - N(A)$ 中 A 中的每个点都是孤立点, 而由于将 B 改为 B' 时没有将 X 中的点与任何点连边, 因此 $B' - N(A)$ 中 A 的每个点也都是孤立点, 从而是一个奇片. 这说明 $B' - N(A)$ 中至少有 $|A|$ 个奇片, 即 $o(B' - N(A)) \geq |A| > |N(A)|$. 根据 *Tutte* 定理, 此时 B' 中没有完备匹配.

下面使用反证法: 如果 B 中有将 X 中点都许配的匹配 M , 则在 B' 中, 没有被 M 许配的点要么是 Y 中的点, 要么是可能存在的 y' , 而这些点之间一定两两连边, 导出一个完全图. 又由于 $v(B')$ 为偶数, 被 M 许配的点数也一定为偶数, 因此一定还剩下偶数个点没有被许配 (可能是 0 个). 现在可以任取它们导出的完全图中一个完备匹配与 M 相并, 就得到了一个 B' 的完备匹配, 矛盾. 因此 B 中没有将 X 中点都许配的匹配.

如果在 B 中, 对于任意 $A \subseteq X$ 都有 $|N(A)| \geq |A|$: 下面我们来证明 B' 中存在完备匹配 M' , 这样只保留 M' 中与 X 中点关联的那些边 (这些边显然不可能关联 y'), 就得到了 B 中将 X 中点都许配的匹配.

我们验证 B' 满足 Tutte 定理的条件: 任取 $V(B')$ 的一个子集 W' , 考虑 $B' - W'$ 导出的子图中的奇片数量. 由于 $Y \cap \{y'\}$ 中残留的点依然是两两相邻的, 因此 $B' - W'$ 中的连通片实际上只有两类, $Y \cap \{y'\}$ 中残留的点以及与它们相邻的 X 中的点构成一个连通片, 其余 X 中的点每个点都是孤立点, 自成一个连通片. 记这些孤立点构成的点集为 A , 则 $N(A)$ 中的点必然被全部删去了. 如果最大的连通片是偶片, 则 $|W'| \geq |N(A)| \geq |A| = o(B' - W')$; 如果最大的连通片也是奇片且 $|N(A)| > |A|$, 那么依然有 $|W'| \geq |A| + 1 = o(B' - W')$; 如果此时还有 $|N(A)| = |A|$, 那么 W' 不可能只由 $N(A)$ 构成, 否则最大的连通片为 $B' - A - N(A)$, 点数为偶数, 不是奇片, 矛盾, 从而一定有 $W' \geq |N(A)| + 1 \geq |A| + 1 = o(B' - W')$.

14.

根据 Tutte 定理我们可以改为证明: 任取 $S \subseteq V(G)$, 有 $o(G - S) \leq |G|$ 成立.

任取一点集 $S \subseteq V(G)$, 考虑 $G - S$ 的任一奇片 H , 则根据 Menger 定理的“集合对集合”版本可知 H 与 S 之间至少有 $k - 1$ 条边, 即 $|(H, S)| \geq k - 1$. 再考虑 H 中点的度数和, 可知 $k|H| = 2\epsilon(H) + |(H, S)|$. 由于 $2\epsilon(H)$ 为偶数而 $|H|$ 为奇数, k 必定与 $|(H, S)|$ 奇偶性相同, 这样就把我们此前的结论加强到了 $|(H, S)| \geq k$. 最后考虑 S 中的点的度数和, 有 $k|S| = 2\epsilon(S) + \sum_S |(H, S)| \geq k(\#H)$ (这里 $\#H$ 表示 H 的数量), 这样就

验证了 Tutte 定理的条件.

15.

必要性: 略.

充分性:

对树的顶点数量使用归纳法:

删去 v 后恰有一个奇片, 由于原图 T 是树, 显然 v 只能与每个残片中的一个点连通. 我们将 v 与那个奇片中与之相邻的点匹配. 剩下的所有残片都是偶树, 且都满足条件 (如果某个残片偶树 T'_i 有一个点 u 删去后会在 T'_i 中产生多于 1 个奇片, 则在原图 T 中删去 u 显然也会产生等量的奇片.)

16.

trivial.

17.

,

18.

用类似题 5.6 的方式用二分图描述棋盘, 然后用题 5.8.(1) 的结论证明该图可以 1 度因子分解.

19.

‘

20.

‘

6 Euler 图与 Hamilton 图

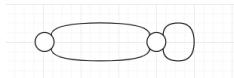
题解

1.

略.

2.

存在. 举例如下:



(如要求不能有环或重边, 在现有的环或重边上加偶数个点将其加细成轨道即可.)

3.

注意到, 若允许 G 不为连通图, 所给命题实际上并没有被加强: G 的每个连通片奇度顶点个数必仍为偶数, 一条行迹也不会跨越超过一个连通片; 故对每个连通片单独考虑即可. (类似于前文我们对定理 1.2 的处理.)

下面我们证明所给命题对所有连通图与非连通图成立, 使用数学归纳法:

- (1) $k = 1$: 由条件可推出 G 中存在 Euler 迹. 易验证 Euler 迹即为所求;
- (2) 若命题在 $k = i$ 时成立, 则当 $k = i + 1$:

任取 G 中同一个连通片中两个奇度顶点, 它们之间的最短路径显然是边不重的行迹. 取这条边作为 P_{i+1} , 删掉. 易验证此时情况回到 $k = i$ 的情况.

p.s. 在 (2) 的“验证”中, 一份完整的解答应证明所得新图依旧具有 $k = i$ 下题目给出的全部条件.

4.

trivial, 略.

5.

同上.

6.

(1) 正确. 证明使用反证法:

Eular 回路使用每一条边恰好一次, 而每次走过一条边会使得回路的终点所属的等价类发生变化. 若 G 中有奇数条边, 起点与终点所属的等价类将会不同, 与“回路”矛盾.

(2) 错误. 这一问的内容和题 6.2 完全相同.

7.

如果 G 是 Eular 图, 使用书上的算法求出 Eular 回路, 所得的输出即可作为要求的 Eular 迹.

反之, 由推论 6.1 知 G 中恰有两个奇度顶点 (不妨称为 v, u).

连接 uv 得到新图 G' . 求出 G' 的 Eular 回路, 再在这一输出中删去边 uv 即得到要求的 Eular 迹.

8.

t, 略.

9.

证明: 类似题 6.6.(1) 的证明, 考虑“来回”即可.

追问: 由此定理知, 否.

10.

(1) 删去某 5 个顶点后得到 7 个连通片.

(2) 删去某 6 个顶点后得到 7 个连通片.

11.

略.

12.

这道题是教材中为数不多的本解答作者没有独立做出来的题目之一. 由于作者搜到的它的解答只给了一个颇为精彩的构造方案, 而没有说明做题思路, 这里我们会尽可能平稳地解释如何得到这样一个思路, 以降低读者所需的洞见量.

由于一个 Hamilton 圈 (下简称“H 圈”) 需要恰好 n 条边. 从 $e(K_n)$ 可以得出: 无重 H 圈数的一个上界是 $\lfloor \frac{n(n-1)}{2n} \rfloor = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. 更具体地, 对于奇数 n , 它是 $\frac{n-1}{2}$; 对于偶数, 它是 $\frac{n-2}{2}$.

下面, 出于某种不可言说的信心, 我们试图证明这个上界是可以达到的:

我们命名 K_n 的 n 个顶点为 $1, 2, \dots, n$.

我们先注意到, 如果 $i_1 \sim i_2 \sim \dots \sim i_n \sim i_1$ (这里有 $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$) 是一条 H 圈, 则将所有顶点的编号加 1 (显然要对 n 取 mod) , 所得的新圈依然是 H 圈. 这是一个不可多得的可以批量构造 H 圈的思路 (相比之下, $1 \sim 2 \sim \dots \sim n \sim 1$ 这种 H 圈几乎没有可复制性). 唯一美中不足的是: 仅凭此我们无法保证这些 H 圈无重边. 下面我们开始考虑给 i_j 的分布添加性质, 使得这些 H 圈尽可能不重.

刚才的取模给我们以启发: 如果这个 H 圈的各个边的顶点编号之差对 n 取模后各不相同, 给这些编号加 1 后, 所用新边与原边相同的机会便会减小. 比如, 如果这个 H 圈中有 $1 \sim 2$ 这条边, 且它没有再用到其它的顶点编号差 $\text{mod } n$ 余 1 的边, 那么此后的 H 圈中用到的 $2 \sim 3, 3 \sim 4, \dots, n \sim 1$ 都不会被重复使用. 而一个数 $\text{mod } n$ 恰好有 n 个等价类 (希望读者还没有忘记代数结构课程中的数论知识), 一个 H 圈也正需要 n 条边, 实在是太契合了!

看上去这个思路很吸引人, 我们现在开始核查一些细节问题. 不幸的是, 我们的确发现两个无法解决的问题:

- (1) 一个 H 圈中相邻的两个点无法做到编号差 $\text{mod } n$ 为 0, 毕竟它们总不能是同一个点;
- (2) 边是无向的, 边 $a \sim b$ 与 $b \sim a$ 无法区分. 所以编号差 $\text{mod } n$ 大于 $\frac{n}{2}$ 的点对实际上没有意义;

有一个付出一半代价的方法可以解决这个问题 (这也正契合了文初我们给出的 $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ 这一上界):

在每条 H 圈中, 我们使用编号差 $\text{mod } n$ 余 k 的边两次. 这样我们可以生产出的 H 圈数量大概会减半, 但至少可以规避上述问题.

现在我们来开始构造作为底本的数列 i_j : 由于现在各点还有对称性, 我们选

择 1 作为 i_1 . 此后为了满足规避相同的邻点编号差, 我们选择 2 作为 i_2 , 4 作为 i_3 , 7 作为 i_4 , 超出 n 的时候就对 n 取 mod... 写到这里我们又发现一个问题: 如果两个点的编号对 n 取 mod 后重合了怎么办? 比如在 $n = 6$ 的情况里, 作为 i_1 的 1 和作为 i_4 的 7 实际上是同一个点, 而我们甚至还没有构造完一个 H 圈呢!

这时, 作者搜到的答案给了一个妙不可言的解决思路:

在取编号差的时候, 我们不是始终往同一个方向取, 而是间隔着往相反方向取. 例如: 在取了 $1 \sim 2$ 后, 我们为了添上一条编号差为 2 的边, 不取 $2 \sim 4$, 而是取 $2 \sim n$. 由此, 我们得到的 H 圈为 (先考虑比较契合的 n 为偶数的情况) :

(请读者自行跟着在草稿纸上作图: 将点 $1, 2, \dots, n$ 围成一圈, 并根据这一算法连边.)

$$1 \sim 2 \sim n \sim 3 \sim (n-1) \sim 4 \sim \dots \sim \frac{n}{2} \sim \frac{n}{2} + 2 \sim \frac{n}{2} + 1 \sim 1$$

不难理解, 这样的连法可以保证不重不漏地遍历 K_n 中所有的点. 现在我们任取一个偶数 n , 验证一下我们的批量生产方案是否可行:

取 $n = 2$, H 圈数目为 0, 平凡;

取 $n = 4$, 则所得 H 圈为 $1 \sim 2 \sim 4 \sim 3 \sim 1$, 也的确只需这一个 H 圈;

取 $n = 6$, 则所得 H 圈为 $1 \sim 2 \sim 6 \sim 3 \sim 5 \sim 4 \sim 1$, 全体加 1 后得到 $2 \sim 3 \sim 1 \sim 4 \sim 6 \sim 5 \sim 2$;

注意到这里 $1 \sim 4$ 边被用了两次, 不符合我们对“无重”的要求. 如果全体加 1 不行, 减 1 行不行呢? 读者试一下就会发现也是不行的. 其实这也在预料之中: 全体减 1 后, 重复出现的不过是原先那条加 1 后与 $1 \sim 4$ 重合的边 $3 \sim 6$ 罢了.

尝试过 $n = 8$ 等情况, 我们发现这个问题是普遍存在的: $1 \sim \frac{n}{2} + 1$ 与 $\frac{n}{2} \sim n$ 中始终会有一个在第一个 H 圈与最后一个 H 圈中被重复使用.

这是否说明我们对 n 为偶数的情况的判断过于乐观了呢? 我们暂且按下不表, 来看奇数的情况: 我们仿照上文的做法连出一条 H 圈, 在复制的过程中也发现 $1 \sim \frac{n+3}{2}$ 与 $\frac{n-1}{2} \sim n$ 这两条边总会被重复使用. 但我们也知道, n 为

奇数的情况下, K_n 有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 条边, 从数量上来说是足够做出 $\frac{n-1}{2}$ 条 H 圈的. 有没有办法优化我们制作圈的方案呢?

这里我们换一种思路, 当 n 为奇数 $2k+1$ 时, 我们不再考虑单独的构造方法, 而是试图在 $n = 2k$ 的基础上改动方案. $n = 2k$ 时, 我们将点 $1, 2, \dots, 2n$ 排成一周, 通过上文的连接方法得到了一个作为底本的 H 圈. 现在我们试图据此改造出一个合理的构造方案, 既能解决偶数情况的问题, 又能增加一条 H 圈.

现在我们把 $1 \sim \frac{n}{2} + 1$ 也就是 $1 \sim k+1$ 这条边打破, 将 1 与 $k+1$ 均与 $2k+1$ 连边, 由此得到的的确是一个从长为 $2k+1$ 的 H 圈. 精彩的是: 当我们保持 $2k+1$ 不变, 将所有其余顶点的编号每次同时 mod $2k$ 同余加 1, 我们总能得到另一个 H 圈, 而且这些 H 圈巧妙地利用上了 K_{2k+1} 相比于 K_{2k} 增加的每一条关联 $2k+1$ 的边! 最后更加完美的是, 由于 $2k+1$ 的插入, $1 \sim k+1$ 与 $k \sim 2k$ 不再会出现两次, 解决了偶数情况的问题. 至此, 我们已经给出了在 K_{2k+1} 中构造出 k 个 H 圈的方案:

$$1 \sim 2 \sim 2k \sim 3 \sim 2k-1 \sim 4 \sim \cdots \sim k \sim k+2 \sim k+1 \sim 2k+1 \sim 1.$$

容易验证这是一个 H 圈.

此后, 我们保持 $2k+1$ 不变, 每次将其余点的编号 mod $2k$ 同余加 1, 直到得到 k 个圈. 可以验证这是 k 个无重的 H 圈.

现在再回过头来看偶数的情况, 即便我们还没有办法修改原先的方案, 但上述“从 $2k$ 到 $2k+1$ ”的优化给了我们启发: 我们可以类似地将 $2k+1$ 优化成 $2k+2$, 而优化的关键便在于在 $k-2k$ 这另一条“直径”中插固定点, 以保证与 $2k+2$ 关联的边得到充分利用. 请读者尝试自行给出 n 为偶数时的构造方案的描述.

13.

题目可以被转换为如下图论情况: 图 G 满足 $v = 2n, \delta \geq n$, 求证 G 中存在 Hamilton 圈.

使用 Dirac 定理即可.

14.

Dirac 定理.

15.

,

16.

证明思路和题 6.9 中的命题几乎完全一样.

17.

(1)

我们使用归纳原理:

归纳定义所有的 $e = \frac{(v-1)(v-2)}{2} + 2$ 的图:

- (1) 在 K_{v-1} 外新建一个点 v_v , 将其与 K_{v-1} 中的任意两个点 v_i, v_j 连边, 所得图 G 满足等式;

(2) 若 G 满足等式, 将任一条边 $v_i - v_j$ 修改为 $v_i - v_k$, 所得新图 G' 依然满足等式.

下面我们用归纳原理证明:

- (1) 任选 K_{v-1} 的一个 Hamilton 圈, 将 v_v 插入 v_i 与 v_j 中即得;
- (2) G 中的 Hamilton 圈如果未被破坏, 继承即可; 如果被破坏, G 中的 Hamilton 圈在 G' 中至少会剩下一条 Hamilton 轨道. 考虑 G 中除 v_i, v_j 以外的 $v-2$ 个顶点, 它们之间即使完全连边也只能占用 $\frac{(v-2)(v-3)}{2}$ 条. 再排除这一 Hamilton 轨道中 v_i 和 v_j 关联的边, 整张图还剩下 $v-2$ 条边. 而 v_i 与 v_j 之间又没有边, 故这 $n-2$ 条边必然在 v_i, v_j 与其它顶点之间连出. 此后略.

(2)

在 K_{v-1} 外新建一个点, 这次只将该点与 K_{v-1} 中恰一个点连一条边即可. 由于新加的边是桥, Hamilton 圈无法在其连接的两部分间跨越超过一次, 但又要经过所有的点, 必然与“首尾相同”的条件矛盾. 所以不存在 Hamilton 圈.

18.

等价于证 C 上有 G 的所有点.

如果 C 上没有 G 的所有点, 那么 C 上至少有一个点 v_i 与 C 外的某点 u 相邻. 从这个点出发可以找到一条贯穿 C 中所有点直到 v_{i-1} 的轨道, 长度等同于 C 的长度, 比 C 删去一条边后更长. 矛盾.

19.

trivial.

20.

trivial.

7 图的着色

题解

1.

任取一个尚未着色的点, 由于可用色数大于 Δ , 其邻点中所有已被染色的点必定没有占用所有颜色. 任取一个未被占用的颜色给该点染色即可. 重复以上过程直到所有点都已被染色.

2.

改写该不等式使得 ϵ 单独处在不等式的一端, 得到:

$$\epsilon \leq \frac{1}{2}(v^2 - \frac{v^2}{\chi})$$

考虑 G 的任何一个使用 χ 色的恰当染色, 其中每一色的点必定构成一个独立集 (彼此之间没有边连接).

设这 χ 种颜色对应的点数分别为 v_1, v_2, \dots, v_χ , 则有 $\sum_{i=1}^\chi v_i = v$. G 的边数有上限 $\epsilon \leq \frac{v(v-1)}{2} - \sum_{i=1}^\chi \frac{v_i(v_i-1)}{2}$. 根据均值不等式容易证明右式取到最大值当且仅当 $\forall i \in [n] v_i = \frac{v}{\chi}$, 此时代入原式就得到所需的上界.

3.

反证法: 若 $\chi \geq 6$, 任取一个恰当染色, 根据点的颜色将 $V(G)$ 划分为 V_1, V_2, \dots, V_χ . 同上理可知 G 至少是一个 6 分图. 将 G 中顶点划分为两部分, 分别为 $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ 与 $V_4 \cup V_5 \cup \dots \cup V_\chi$, 则两个等价类的顶点导出子图均至少需要 3 种颜色染色 (否则原图 G 存在色数更少的恰当染色), 故而不是二分图即其中均有至少一个奇圈. 由于两个等价类没有公共点, 这两个奇圈在 G 中仍然成立且没有公共点, 与题设矛盾.

4.

考虑以下对图 G 的染色过程, 其按照 \deg 从大到小的顺序给所有定点依次染色:

在给第 i 个顶点 v_i 染色时, 如果此时可以使用 i 种颜色, 那么一定不会需要新的颜色 (眼下的颜色一定够用), 因为 i 种颜色甚至足够给 K_i 染色 (将每个点染成不同的颜色即可);

如果此时可以使用 $d_i + 1$ 种颜色, 那么也一定不会需要新的颜色, 因为与 v_i 相邻的 d_i 个顶点至多占用了 d_i 种颜色, 因此至少还有一种颜色可用.

对两个充分条件作析取, 仍然得到一个充分条件. 因此如果此时可以使用 $\min\{d_i, i\}$ 种颜色, 那么一定不会需要新的颜色. 如果在 G 的染色过程中, 始终可以使用 $\max_i \min\{d_i, i\}$ 种颜色, 那么在以上过程中轮到任何一个点染色时, 都不会出现颜色不够用的情况. 故可以按照这一流程完成 G 的染色. 故 $\max_i \min\{d_i, i\}$ 是 χ 的一个上界.

5.

任取一 χ 色的恰当染色, 将 $V(G)$ 根据点的颜色划分为等价类 V_1, V_2, \dots, V_χ . 每个等价类之间至少要连一条边, 否则这两个等价类中的点可以染成同一个颜色, 从而得到色数更少的染色方案.

由此有 $\epsilon \geq \frac{\chi(\chi-1)}{2}$, 从而有 $\lceil \sqrt{2\epsilon} \rceil \geq \lceil \sqrt{\chi(\chi-1)} \rceil$. 由于 χ 是整数, 显然有 $\lceil \sqrt{\chi(\chi-1)} \rceil = \lceil \sqrt{\chi^2} \rceil = \chi$. 故证.

6.

对 v 使用归纳法:

- ① $v = 1$: 平凡.
- ② 若命题对满足 $v = n$ 的图成立, 则考虑 $v = n + 1$ 的 G :

在 G 中任选一个点 v_{n+1} , 考虑 G 删去 V 导出的子图 G' . 根据归纳假设, $\chi(G') + \chi(G'^c) \leq n + 1$.

如果 $\chi(G') + \chi(G'^c) \leq n$, 那么我们在给 G 和 G' 染色时, 还有至少两种新颜色可以使用, 在 G' 和 G'^c 中都使用一种新颜色给 v_{n+1} 染色即可.

如果 $\chi(G') + \chi(G'^c) = n + 1$, 那么只要证明在 G 和 G^c 中的一者可以用已有的颜色给 v_{n+1} 染色就证明了命题. 考虑 $\deg_G(v_{n+1})$ 与 $\deg_{G^c}(v_{n+1})$, 两者之和为 n , 这意味着 $\deg_G(v_{n+1}) < \chi(G')$ 或 $\deg_{G^c}(v_{n+1}) < \chi(G'^c)$ 两者必居其一 (否则两式作和可得矛盾), 即至少在 G 与 G^c 的一者中, v_{n+1} 的邻点数小于给前 n 个点染色用到的色数, 从而不可能占用了该图的所有颜色. 我们在这个图中给 v_{n+1} 用一种它的邻居没有用到的颜色染色, 在另一个图中给 v_{n+1} 用一种新颜色染色即可.

7.

(1)

首先断言 χ 色临界图必然是连通图: 如果不是, 其多个连通片中至少有一个色数为 χ , 则把其它连通片删去只保留这一个, 就得到了一个色数相同的真子图, 与临界性矛盾

$\chi = 1$ 的图没有边, 只能是若干孤立点的并, 结合上述断言可知只能是一个孤立点即 K_1 .

一个图只要有边就会使得 $\chi \geq 2$, 从而 2 色临界图一定有边并且只有一条边, 否则删去其它边只保留这条边就得到了一个色数相同的真子图. 结合连通性可知 2 色临界图只能是 K_2 .

一个 $\chi \geq 3$ 的图至少含一个奇圈, 否则是二分图从而存在恰当 2 染色. 而奇圈的确是 $\chi = 3$ 的图. 如果一个 3 色临界图除了自身含有的一个奇圈之外还有别的点或边