

上节课主要内容

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_{\infty} \vec{D} \cdot \vec{E} dV$$

$$W_{e0} = \frac{1}{2} \iiint \varepsilon_0 E^2 dV$$

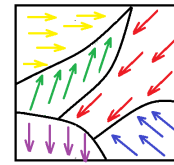
$$W_{\text{极}} = \frac{1}{2} \iiint \vec{P} \cdot \vec{E} dV$$

$$W_e = W_{e0} + W_{\text{极}}$$

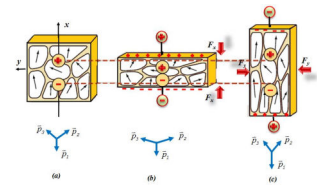
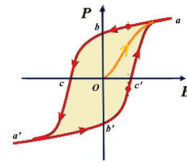
$$\omega_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{E} = \omega_{e0} + \omega_{\text{极}}$$

静电能密度 ω_e =宏观静电能密度 ω_{e0} +极化能密度 $\omega_{\text{极}}$

1



铁电体的极化过程和电滞回线

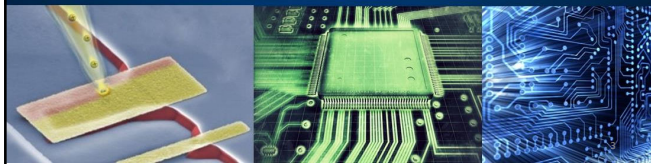


压电效应

2

第3章 电流与电路

§ 3-1 电流与电流密度



§ 3.1.1 电流的形成

1. 产生电流的条件

电荷流动形成电流。电流是大量电荷的定向运动。

条件1: 存在载流子

要产生电流, 必须存在可以自由运动的电荷, 即载流子, 载流子可以是电子、正、负离子。

条件2: 存在迫使电荷作定向运动的某种作用

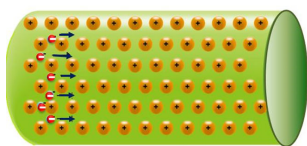
由于导体对载流子的定向运动具有阻力, 要维持电荷的定向运动, 需要有一种作用克服这种阻力来保持电荷的定向运动。这种作用有**机械作用**、**化学作用**、**电磁作用**等等。

4

不同材料中的载流子

(1) 金属导体中电流的载流子是自由电子

- 金属中存在大量自由电子, 当金属处在电场中时, **自由电子因电场力而作定向运动**, 从而形成金属中的电流。
- 由于电子的质量很小, 金属中的电流**不会引起宏观上可观察到的质量迁移**。



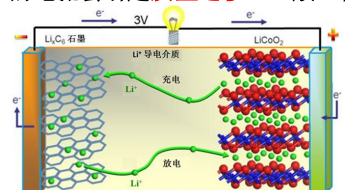
电子 原子核

5

(2) 电解质溶液中的载流子是正负离子

- 当酸、碱、盐等电解质溶液处在电场中时, **正、负离子因受电场作用而分别向相反方向作定向运动**, 从而形成电解质溶液中的电流。
- 从电量迁移的角度来看, 正电荷向某一方向运动和负电荷向相反方向运动产生的效果是相同的。
- 电解质溶液中的电流会引起**质量迁移**, 一般还伴随**化学反应**。

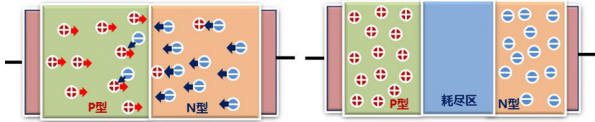
锂电池中的电流



6

(3) 半导体材料中的载流子是电子或空穴

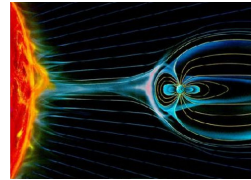
- 半导体材料中的载流子是电子(导带中)和带正电的空穴(价带中)，**电子或空穴在电场作用下形成半导体中的电流。**
- 半导体中载流子的密度和定向运动与**电场强度、频率、温度、光照**等因素密切相关。



7

(4) 导电气体中的载流子是电子和正、负离子

- 通常，气体中没有可以自由移动的电荷，故气体没有导电性，是良好的绝缘体。
- 但是，紫外线、X射线、宇宙线以及火焰等电离剂会使**气体分子电离，产生电子和正、负离子，从而使气体具有导电性。**



8

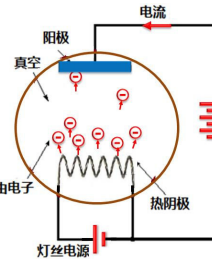
2. 真空中的电流

(1) 热电子发射

- ✦ 真空中没有自由电荷，故在一般情况下真空中不会有电流。
- ✦ 金属中有可自由运动的电子，但由于金属表面存在着阻碍电子逃脱出去的作用力，电子逸出需克服这种阻力做功，称为**逸出功**。
- ✦ 室温下，电子作无规则的热运动的动能远小于逸出功，因此电子很难进入真空形成电流。
- ✦ 当金属温度上升到1000℃以上时，**动能超过逸出功的电子数目急剧增多，大量电子由金属中逸出，这就是热电子发射。**

9

- ✦ 若无外电场，逸出的热电子在金属表面附近堆积，成为**空间电荷**，它将**阻止热电子继续发射**。



- ✦ 通常以发射热电子的**金属丝为阴极**，**另一金属板为阳极**，其间**加电压**，使热电子在电场作用下**从阴极到达阳极**，这样不断发射，不断流动，**形成电流**。
- ✦ 许多电真空器件(如真空二极管)中的电流就是由阴极发出的热电子形成的。

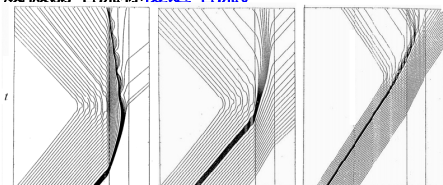
10

- ✦ 由于**热电子发射取决于材料的逸出功及其温度**，应选用**熔点高而逸出功低**的材料来做**阴极**，常用的纯金属阴极、碳化钨钨阴极、氧化物阴极、钍钨阴极、钨钨阴极、硼化钨阴极等。
- ✦ **纯金属阴极**通常用**钨丝**加工而成。其发射电流稳定，不需激活，可暴露大气，适用于可拆卸的器件，但工作温度高。
- ✦ 除热电子发射外，靠电子流或离子流轰击金属表面产生电子发射的，称为**二次电子发射**；
- ✦ 靠外加强电场引起电子发射的称为**场致发射**；
- ✦ 靠光照射金属表面引起电子发射的称为**光电发射**。各种电子发射都有其特殊的应用。

11

(2) 隧道电流

- ✦ 经典物理理论认为，当粒子动能 E 低于势垒高度 V_0 时，不可能越过此势垒，即透射系数为0。
- ✦ 微观粒子具有波粒二象性，按量子力学的计算，一般情况下，**透射系数不为0**。即**粒子可以穿过比它能量更高的势垒**，这个现象叫**隧道效应**。电子隧穿形成微弱电流称**隧道电流**。

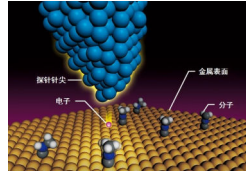


随粒子能量的增加，隧穿几率逐渐增加

12

- 1982年，IBM苏黎世实验室的G. Bining和 J. H. Rohrer 研制出一种新型的表面分析仪器——**扫描隧道显微镜 STM**。1983年，他们第一次利用STM在硅单晶表面观察到周期性排列的硅原子阵列，这是人类有史以来第一次**直接看到原子**。

- STM的发明是20世纪80年代世界十大科技成就之一，对表面物理、化学、材料科学、生命科学、微电子技术等研究领域有十分重大的意义和广阔的应用前景。由于这一成就，**Bining和Rohrer**获得了**1986年诺贝尔物理学奖**。



13

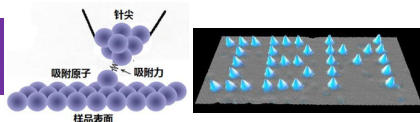
- STM有一个针尖在表面上扫描，针尖和样品间的距离小于1 nm时，就会有**隧道电流**，这个**隧道电流与针尖和样品间的距离呈指数关系**，距离减小0.1 nm，隧道电流增加约1个量级，十分敏感。STM有两种工作模式：

$$I = I_0 e^{-\kappa z}$$

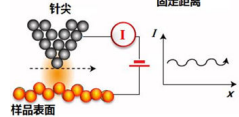
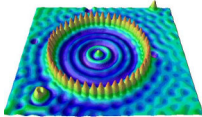
- **恒流模式**：控制隧道电流恒定不变，就意味着控制了**针尖和样品间的距离不变**，**针尖将随样品表面的形貌起伏而起伏**，将针尖高低运动的轨迹记录下来，就得到表面原子的形貌。
- **恒高模式**：控制针尖高度不变，则**针尖与样品间的距离变化**，引起隧道电流的明显变化，记录电流变化曲线，就可以给出高度的变化(即表面形貌)。

14

利用 STM 如何操纵原子



扫描隧道显微镜的操纵原理是，在针尖上加一个很微弱的电流，这个电流产生一个电场，当两个物体非常接近的时候，会有**排斥力**，但到一定程度它又会有**吸引力**，在吸引力的范围内，一般在**几个埃**的时候，把针尖提上来，原子就跟着上来了，把它放到哪儿它就在哪，这个方法可**操纵吸附在表面的原子、分子**。



15

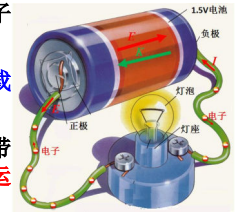
3. 电流的方向

- 金属中的自由电子不规则运动的**平均速率**非常大，其数值约为 **10^6 m/s** 。但是，**电子的平均速度为零**，故**电子的不规则运动并不引起宏观上的电流**。

- 在电场作用下，导体中自由电子做定向运动，形成电流。

- 电流的方向**：规定为带正电的载流子的定向运动方向。

- 很多情况下，实际的载流子是带负电的电子。因此，**电子定向运动的反方向为电流方向**。



16

§ 3.1.2 电流强度与电流密度

1. 电流强度

电荷的(定向)运动形成电流，**电流强度即单位时间内通过导体横截面的电量**。

设在时间间隔 Δt 通过某一截面的电量为 ΔQ ，则电流强度为：

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad \text{单位: C/s, 称为安培 A}$$



17

2. 电流密度



- 电流强度 I** 只表示导体中某一截面的总电流大小，而不能描述电流沿截面的分布情况。

- 电流是有方向的，它指向正电荷运动的方向。

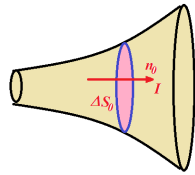
- 导体中各点的电流不仅强弱有别，而且方向也可能不一致。

- 为了描述**导体中各点电流的大小和方向**，人们引入一个更“精细”的物理量——**电流密度**。

18

- 考虑导体中某一给定点 P ，在该点沿**电流方向**作一单位矢量 \vec{n}_0 ，并取一面元 ΔS_0 与 \vec{n}_0 垂直，设通过 ΔS_0 的电流强度为 ΔI ，则定义 P 点处电流密度为

$$\vec{j} = \frac{\Delta I}{\Delta S_0} \vec{n}_0$$



I 恒定
 j 越来越小

- 电流密度是矢量

方向：导体中某点**电流的方向**

数值：等于通过垂直于该点电流方向的**单位面积的电流强度**

单位：安培 / 米² (A/m²)。

19

- 电流强度与电流密度之间的关系为：

$$\Delta I = \vec{j} \cdot \Delta \vec{S}$$

- 通过导体任一有限截面 S 的电流强度为：

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

- 设 n 为单位体积中自由电子数量， \vec{v} 为电子定向漂移速度，则

$$\Delta Q = \rho \Delta V = ne \cdot \Delta S \Delta l$$

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{ne \cdot \Delta S \Delta l}{\Delta t} = ne \Delta S v$$

电子定向漂移速度与电流密度之间的关系：

$$\vec{j} = \frac{\Delta I}{\Delta S} \vec{n}_0 = ne \vec{v}$$

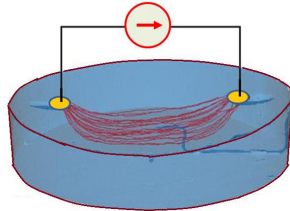
20

- 电流密度是空间位置的函数，描述了导体中的电流分布，称为**电流场**。

- 为了形象地描述电流场，引入“**电流线**”的概念：即电流所在空间的一组曲线，其上任一点的**切线方向**和该点的**电流密度方向**一致。

- 电流线围成的管状区域称为**电流管**。

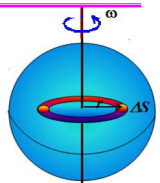
$$\vec{j} = \vec{j}(x, y, z)$$



1

【例61】 电荷量 Q 均匀地分布在半径为 R 的球体内，该球以均匀角速度 ω 绕它的一个固定直径旋转。求球内离转轴为 r 处的电流密度 j 。

【解】 在包括转轴的一个固定平面内，离转轴为 r 处，设想一个面积元 ΔS 。将该面元绕转轴转动一周，划出一个**体积为 $2\pi r \Delta S$** 的环带，电荷量为：



$$\Delta Q = \rho \Delta V = \rho 2\pi r \Delta S = \frac{Q}{4\pi R^3 / 3} 2\pi r \Delta S = \frac{3Q}{2R^3} r \Delta S$$

电流为
$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \Delta Q = \frac{3Q\omega}{4\pi R^3} r \Delta S$$

22

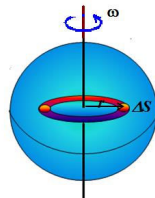
于是 r 处的电流密度的大小为：

$$j = \frac{\Delta I}{\Delta S} = \frac{3Q}{4\pi R^3} \omega r$$

考虑到方向，有：

$$\vec{j} = \frac{3Q}{4\pi R^3} \vec{\omega} \times \vec{r}$$

电流密度沿环的切向方向



23

§ 3.1.3 电流连续性方程

1. 电流连续性方程的积分形式

按照电荷守恒定律，电荷只能由一个物体转移到另一个物体，或由物体的某一部分转移到其它部分，电荷的代数和保持不变。

因此，单位时间内流出曲面 S 的电量，应等于同一段时间内 S 围成的区域 V 中电量的减少：

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho_e dV$$

这是**电流连续性方程的积分形式**，它反映电流分布和电荷分布之间存在的普遍关系，它是**电荷守恒定律**的数学表示。

24

2. 电流连续性方程的微分形式

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{j} dV = - \iiint_V \frac{\partial \rho_e}{\partial t} dV$$

电流连续方程的微分形式为:

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0$$

反映了空间某点的电流密度 \vec{j} 和电荷密度 ρ 的一一对应关系。

25

3. 电流连续性方程的意义

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = - \frac{dq}{dt} = - \frac{d}{dt} \iiint_V \rho_e dV$$

电流线只能起、止于电荷随时间变化的地方

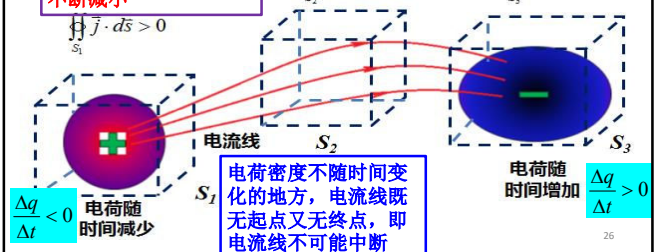
电流线的终点的附近的区域中, 会出现正电荷的不断积累, 即电荷密度不断增加

电流线的起点附近的区域中, 会出现负电荷的不断积累, 即电荷密度不断减小

$$\oiint_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} > 0$$

$$\oiint_{S_2} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oiint_{S_3} \vec{j} \cdot d\vec{S} < 0$$



26

§ 3.1.4 稳恒条件

1. 稳恒条件的积分形式

- 对稳恒电流, 空间任一封闭曲面内的电量 q 保持不变。即在任何地点, 其流失的电荷必被别处流来的电荷补充。 $\frac{dq}{dt} = 0$
- 电荷的流动过程是空间每一点的一些电荷被另一些电荷代替的过程。
- 空间任一点的电荷积累将导致电流稳恒性的破坏。由电流的连续性方程有

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

27

2. 稳恒条件的微分形式

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

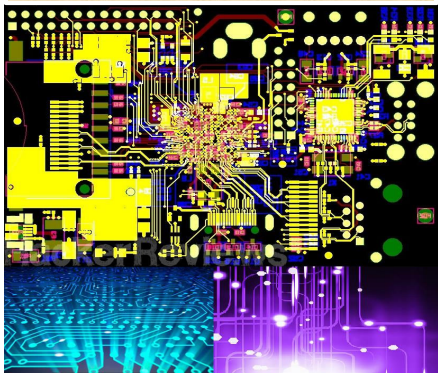
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

电荷的分布 ρ 不因电流的存在随时间而变化 $\partial \rho / \partial t = 0$, 由它产生的电场亦不随时间变化 $\partial \vec{E} / \partial t = 0$, 这种电场称为**稳恒电场**, 它是一种静态电场。

稳恒电场与静电场有相同的性质, 服从相同的场方程式, 电势的概念对稳恒电场仍然有效。

28

§ 3-2 欧姆定律



29

§ 3.2.1 欧姆与欧姆定律

一、欧姆定律的发现

- 1825年, 德国物理学家欧姆(G.S.Ohm)在几年的研究基础上发表论文《金属传导接触电所遵循的定律的暂时报告》, 介绍他用实验研究载流导线产生的电磁力与导线长度的关系。
- 1826年, 欧姆在题为《金属传导接触电所遵循的定律的测定以及关于伏打装置和施威格倍增器的理论提纲》的论文中, 给出了他总结实验结果得到的电路定律, 被称为**欧姆定律**, 是电磁学的基本定律之一。

30

- 由于当时的伏打电池输出不稳定，电极又容易极化(电极电位发生变化)，很难做好实验。欧姆采用稳定的温差电偶做电源。

- 1826年4月，欧姆又发表了题为《由伽伐尼电力产生的验电器现象的理论尝试》的论文，得到

$$F = \sigma S \frac{a}{l}$$

F : 通过长度为 l 的导线的电流强度,
 S : 导线的横截面积, σ : 电导率(欧姆称电导能力), a : 导线两端的电压

- 1827年，欧姆出版了《用数学研究的伽伐尼电路》一书，在这本书里，欧姆假定了电路的三条基本原理，由此建立电路的运动学方程，通过求解运动学方程得到他一年前通过实验发现的定律。

- 1841年，欧姆得到英国皇家学会授予的开普利奖章。

31

二、欧姆定律

1. 欧姆定律的微观形式

- 实验指出，当金属导体中存在电场时，导体中便出现电流。当导体中的电场恒定时，形成的电流也是恒定的。保持金属的温度恒定，金属中的电流密度 \vec{j} 与该处的电场强度 \vec{E} 成正比，即：

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \sigma: \text{金属的电导率}$$

上式称为**欧姆定律的微观形式**，也就是**导体导电性的本构方程**，它反映了导体内部任一点的**电流密度**与该点的**电场分布和电导率**的关系。

32

- 电导率 σ 的倒数称为电阻率，用 ρ 表示

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

- 在 SI 单位制中，电导率的单位是(欧·米)⁻¹，或 $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ；电阻率的单位是(欧·米)，或 $\Omega \cdot \text{m}$ ，这里 Ω 是电阻的单位，称为欧姆。

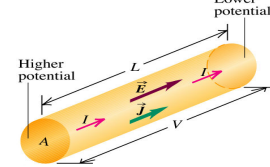
- 若导体是均匀的，则导体内各处的电导率都相等，若导体是非均匀的，则电导率是位置的函数。

33

- 当电场不太强时，线性各向同性导体的电导率 σ 与电场强度 E 无关。
- 在更加一般的情况下，电导率 σ 本身也可以是电场强度 E 的函数，这时

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \sigma = \sigma(\vec{E})$$

这时阻力就不再与定向速度成正比了。



34

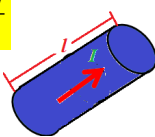
2. 欧姆定律的宏观形式

- 稳恒电流的闭合性要求：通过导体任一截面的**电流相等**。显然，导线的每一横截面都是等势面，相距为 l 的两个横截面之间的电势差为：

$$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int \frac{\vec{j}}{\sigma} \cdot d\vec{l} = \int \rho \vec{j} \cdot d\vec{l} = I \int \frac{\rho dl}{S} \quad j = \frac{I}{S}$$

$$\text{设} \quad R = \int \frac{\rho dl}{S} \quad \text{or} \quad R = \frac{\rho L}{S}$$

$$\text{则} \quad U = IR \quad I = \frac{U}{R}$$



欧姆定律的宏观形式

35

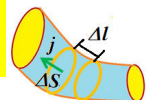
- 欧姆定律积分形式：

$$I = \frac{U}{R} \quad \Rightarrow \quad \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \frac{\int \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\int \frac{\rho dl}{S}}$$

对一段导体，有

$$\Delta I = \frac{\Delta U}{\rho \Delta l / \Delta S} = \frac{1}{\rho} \Delta S \cdot \frac{\Delta U}{\Delta l} \quad \sigma = \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{\Delta I}{\Delta S} = \sigma \frac{\Delta U}{\Delta l} \quad \Rightarrow \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$



36

实际上即使同一导体，当电流流动的方式不同时，对应的电阻也不同。如圆筒形导体，电流沿筒的轴向流动时的电阻与电流沿筒的径向流动时的电阻就是完全不同的。

尽管电阻与导体形状及电流流动方式有关，但电阻率却与这些因素无关，仅由材料性质决定。

材料	电阻率 $\Omega\cdot\text{m}$	材料	电阻率 $\Omega\cdot\text{m}$
铜	1.67×10^{-8}	锗	0.64
铁	9.71×10^{-8}	石墨	1.4×10^{-5}
镍	9.71×10^{-8}	玻璃	$10^{10}\sim 10^{14}$
锡	1.59×10^{-8}	石英	1×10^{13}
钨	5.51×10^{-8}	食盐饱和溶液	4.4×10^{-2}
汞	9.58×10^{-8}	硫	2×10^{19}
镍铬合金	100×10^{-8}	木材	$10^8\sim 10^{11}$

37

3. 欧姆定律的实质

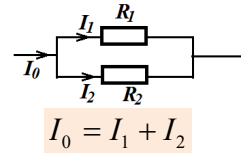
欧姆定律的实质：在恒定电流的情况下，导体内的电流分布遵循欧姆定律时，所产生的焦耳热为最小。

【例62】证明图示的简单电流分配，满足消耗最小

【证明】

$$P = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2$$

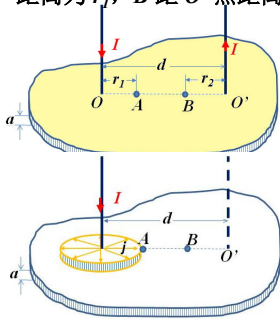
$$= I_1^2 R_1 + (I_0 - I_1)^2 R_2$$



$$\frac{dP}{dI_1} = 2I_1 R_1 - 2(I_0 - I_1) R_2 = 0 \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{I_1}{I_0 - I_1} = \frac{R_2}{R_1}$$

38

【例63】一无限大平面金属薄膜，厚度为 a ，电阻率为 ρ ，电流自 O 点注入，从 O' 点流出， OO' 之间的距离为 d ，在 OO' 的连线上有 A, B 两点， A 距 O 距离为 r_1 ， B 距 O' 点距离为 r_2 ，求 AB 之间的电阻。



【解】应用叠加原理，只考虑从 O 点流入；则在薄膜上的电流是以 O 为圆心， r 为半径的圆柱侧面上均匀分布，电流密度为

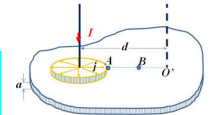
$$j = \frac{I}{S} \quad j = \frac{I}{2\pi r a}$$

39

相应的电场强度

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} = \frac{I}{2\pi r a \sigma} \vec{e}_r = \frac{\rho I}{2\pi r a} \vec{e}_r$$



A, B 两点的电势差为

$$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

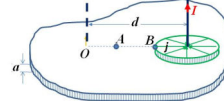
$$U_{AB} = \int_{r_1}^{d-r_2} \frac{\rho I}{2\pi r a} \vec{e}_r \cdot d\vec{r} = \frac{\rho I}{2\pi a} \ln \frac{d-r_2}{r_1}$$

同理，考虑 O' 流出电流 I ，以 O' 为中心，半径为 r 的圆柱面上电流密度处处相等，电场强度方向不变，但与以 O' 为中心的 r 方向相反， A, B 两点的电势差为

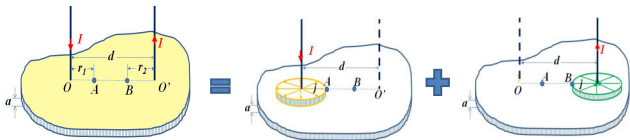
$$U'_{AB} = \int_{d-r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{d-r_1}^{r_2} -\frac{\rho I}{2\pi a} \ln \frac{r_2}{d-r_1} \vec{e}_r \cdot d\vec{r}$$

$$= \frac{\rho I}{2\pi a} \ln \frac{d-r_1}{r_2}$$



40



以上两种情况迭加，得到 A, B 两点的总电势差为

$$U_{AB} = U_{AB} + U'_{AB} = \frac{\rho I}{2\pi a} \ln \frac{(d-r_1)(d-r_2)}{r_1 r_2}$$

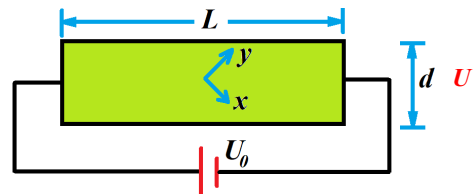
则 A, B 两点的电阻为

$$R = \frac{U}{I} \quad R = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{\rho}{2\pi a} \ln \frac{(d-r_1)(d-r_2)}{r_1 r_2}$$

41

【例64】电流密度与电场的关系为 $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

在研究液晶薄片时发现，薄片的电导性具有各向异性的特点，沿 x 轴它最大，而沿 y 轴它最小。现从薄片上切下一小块，长为 L ，宽为 d ($L \gg d$)，与 x 轴与 y 轴成 45° 的长方形，在平面两端接上电源，电压为 U_0 ，测量横向两端的电压为 U ($U \ll U_0$)，求沿 x 轴和 y 轴的电导率之比 σ_x/σ_y 。



【解】因为各向异性，沿x轴和y轴的电导率不一样

$$j_x = \sigma_x E_x, \quad j_y = \sigma_y E_y$$

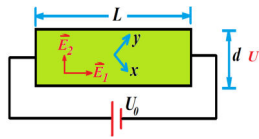
水平方向和垂直方向的电场为：

$$E_1 = \frac{U_0}{L}, \quad E_2 = \frac{U}{d}$$

$$E_x = (E_1 - E_2) \cos 45^\circ = \frac{E_1 - E_2}{\sqrt{2}}, \quad E_y = (E_1 + E_2) \sin 45^\circ = \frac{E_1 + E_2}{\sqrt{2}}$$

由于电流沿平面流动 $j_x = j_y \Rightarrow \sigma_x E_x = \sigma_y E_y$

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{E_y}{E_x} = \frac{E_1 + E_2}{E_1 - E_2} = \frac{U_0/L + U/d}{U_0/L - U/d}$$



【例65】求半径为a, b的同心球形导体之间的电阻，设导体之间充满电导率为σ的物质。

【解法1】设在内外球之间加一电压(内球电压高)，则有电流通过内球流到外球，设内球带电量为Q，由高斯定理：

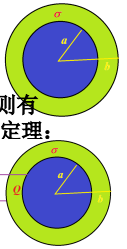
$$\bar{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \bar{e}_r, \quad \bar{j} = \sigma \bar{E} = \frac{\sigma Q}{4\pi\epsilon r^2} \bar{e}_r$$

流出的总电流为：

$$I = \sum \bar{j} \cdot \Delta \bar{S} = \frac{\sigma Q}{4\pi\epsilon r^2} \bar{e}_r \cdot 4\pi r^2 \bar{e}_r = \frac{\sigma Q}{\epsilon} \Rightarrow Q = \frac{\epsilon I}{\sigma}$$

$$\bar{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \bar{e}_r = \frac{I}{4\pi\sigma r^2} \bar{e}_r$$

$$\Delta U = \int_a^b E dr = \frac{I}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \Rightarrow R = \frac{\Delta U}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$



【解法2】直接从电阻的积分定义解

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int \bar{E} \cdot d\bar{l}}{\oint \bar{j} \cdot d\bar{S}} = \frac{\int \bar{E} \cdot d\bar{l}}{\sigma \oint \bar{E} \cdot d\bar{S}} = \frac{Q}{\sigma Q / \epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

高斯定理

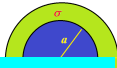
【解法3】从电阻的定义求

$$R = \rho \frac{L}{S} = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{S} = \frac{1}{\sigma} \int_a^b \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

【解法4】由电容求解

$$RC = \rho \epsilon_0 = \frac{\epsilon_0}{\sigma} \quad \text{球形电容器电容为} \quad C = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a}$$

$$R = \frac{\epsilon_0}{\sigma C} = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{b-a}{ab} \right)$$

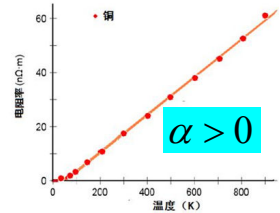


4. 电阻率与温度的关系

材料的电阻率与温度有关。实验测量表明，温度变化的范围不很大时，纯金属的电阻率与温度近似成线性关系，即

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha T)$$

式中ρ是T°C时的电阻率，ρ₀是0°C时的电阻率，α称为电阻的温度系数。大部分金属的电阻温度系数在0.4%/°C左右。



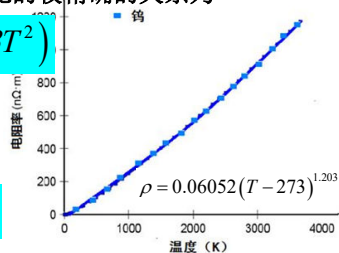
(1) 导体电阻和温度的关系 $R = R_0 (1 + \alpha T)$

(2) 导体电阻随温度变化的较精确的关系为

$$R = R_0 (1 + \alpha T + \beta T^2)$$

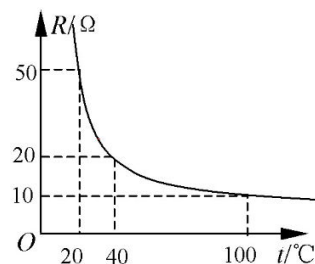
(3) 有些情况下电阻率随温度呈指数变化关系

$$R = \alpha (T - T_0)^\beta + C$$



导体电阻随温度变化的微观机理：温度越高，晶格振动越剧烈，电子受到的晶格散射增加，阻碍电子的定向运动，使电阻增大。

绝缘体和半导体具有负电阻温度系数，即电阻率随温度升高而减少，且电阻率随温度的变化比金属的更大。

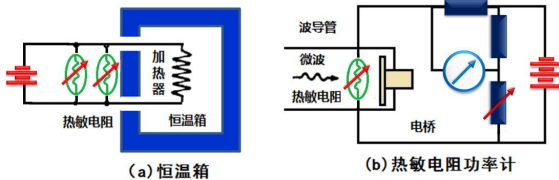


半导体电阻随温度变化的微观机理：温度升高使本征激发带来的载流子浓度n大大提高，使电阻降低。

热敏电阻

热敏电阻：随温度变化比较灵敏的电阻。

电桥型热敏电阻温度计：把热敏电阻接到电桥的一个臂上，如果电流计的灵敏度为 $2 \times 10^{-10} \text{A}$ ，可以测量出 0.0005°C 的温度变化。将电流计上的信号取出并放大，再送到加热的控制器就可以进行温度的调节和控制。



19

§ 3.2.2 电流的功和功率

电流通过导体时，电场对电荷做功：

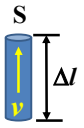
$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = Nq\vec{E} \cdot d\vec{l} = Nq\vec{E} \cdot \vec{v}dt$$

N 为长为 Δl 、截面积为 S 的导线内的自由电荷数目， v 为电荷定向运动速度。单位体积内的自由电荷数目为 n ，则 $N = nS\Delta l$ 。

电流的功率：单位时间所做的功

$$P = \frac{dA}{dt} = Nq\vec{v} \cdot \vec{E} = (nqvS)(\vec{E} \cdot \Delta\vec{l}) = IU$$

$$I = U/R \Rightarrow P = IU = I^2R = U^2/R$$



50

电场作的功将转变成其他形式的能量。电场所作的功为：

$$\Delta A = I^2 R \Delta t$$

实验表明，电流通过欧姆介质时，由于自由电子不断与分子或晶格发生碰撞，电能将以发热的形式释放出来，即

$$Q = \Delta A = I^2 R \Delta t \quad \text{焦耳定律}$$

$$P = Q / \Delta t = I^2 R$$

焦耳定律只对纯电阻 R 的情况成立，如果不是纯电阻，则无焦耳热功，但电功率仍有意义。

51

电功率密度 p ：单位体积的导体内的电功率。由欧姆定律的微分形式，可得：

$$p = \frac{P}{\Delta V} = \frac{I}{S} \cdot \frac{U}{\Delta l} \quad j = \frac{I}{S}, E = \frac{U}{l}$$

$$p = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j^2}{\sigma} \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

焦耳定律的微分形式

52

【例66】 半径分别为 a 、 b ($a < b$) 的同轴金属球面，中间填充了电导率为 σ 、介电常数为 ϵ 的介质。设 $t=0$ 时，内球上突然出现了总电量 q_0 。

- (1) 计算介质中的电流
- (2) 计算此电流产生的焦耳热。

【解】 (1) 电荷由内壳逐渐移向外壳，形成电流 I ，设 t 时刻半径为 r 的球内的电量为 q ，则由高斯定理得电场 E 为：

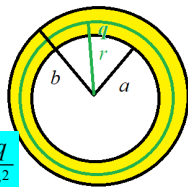
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2}$$

由欧姆定律的微分形式得电流密度为：

$$j = \sigma E = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2}$$

根据电流连续性方程

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} \Rightarrow j \cdot 4\pi r^2 = -\frac{dq}{dt}$$

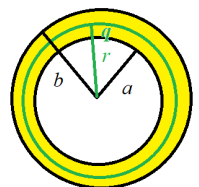


$$j \cdot 4\pi r^2 = -\frac{dq}{dt}$$

$$j = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2}$$

初始条件： $q_{t=0} = q_0$

$$q = q_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}$$



$$j = \sigma E = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} = \frac{\sigma q_0}{4\pi\epsilon r^2} e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}$$

$$I = jS = j \cdot 4\pi r^2 = \frac{\sigma q_0}{\epsilon} e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t} \quad \text{I与t相关!}$$

54

(2)求电流产生的焦耳热

介质中的电功率密度 p 为

$$p = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j^2}{\sigma} = \frac{\sigma q_0^2}{(4\pi\epsilon)^2 r^4} e^{-\frac{2\sigma_t}{\epsilon}}$$



电功率

$$P = \frac{P}{\Delta V}$$

$$P = \iiint p dV = \int_a^b \frac{\sigma q_0^2}{(4\pi\epsilon)^2 r^4} e^{-\frac{2\sigma_t}{\epsilon}} \cdot 4\pi r^2 dr$$

电流产生的焦耳热

$$Q = \int_0^\infty P dt = \dots = \frac{q_0^2}{8\pi\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

55

§ 3.2.3 不同导体分界面电流的关系

稳恒电流满足的两个基本方程为

$$\begin{cases} \oiint \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0 \end{cases}$$

应用这两个方程到两种介质分界面上,可以得到**稳恒电流在界面上的边界条件**。

56

由

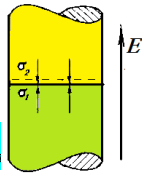
$$\oiint \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$j_{1n} = j_{2n}$$

由

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$\sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}$$

在两种导电介质(电导率为 σ_1 、 σ_2)的交界面上

$$\sigma_1 \neq \sigma_2$$

$$E_{1n} \neq E_{2n}$$

电场强度法向分量不连续,发生突变

- 电场强度的法向分量发生突变的地方,必有面电荷分布;但这里的面电荷不是极化电荷,而是**自由电荷**。所以当稳恒电流通过两种不同的导体时,在导体的**交界面上**积聚着面电荷。

57

- 因为稳恒电场仍然是无旋电场,故在**边界面上**场强的切向分量是连续的,但**电流密度的切向分量**则是不连续的,即:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$\frac{j_{1t}}{j_{2t}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

$$j_{1t} \neq j_{2t}$$

- 以一定边界分开的两种导电材料(σ_1 、 σ_2)中的电场分布,与以相同边界分开的两种电介质(ϵ_1 、 ϵ_2)中的静电场分布是相同的,只要对应的电导率与介电常数成比例,即:

$$\epsilon_1 / \epsilon_2 \leftrightarrow \sigma_1 / \sigma_2$$

- 可用导电介质中形成的稳恒电流场来模拟在相应介电常数的电介质中形成的静电场(电解槽法模拟静电场)。

58

不同导体界面积累的自由电荷

将介质中的高斯定理应用到两介质的交界面得到介质分界面两边的电位移矢量 D 满足:

$$(D_{2n} - D_{1n}) = \sigma_0 \quad \sigma_0 \text{ 为分界面上的自由电荷面密度}$$

$$(\epsilon_0 \epsilon_{r2} E_{2n} - \epsilon_0 \epsilon_{r1} E_{1n}) = \sigma_0$$

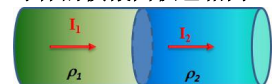
当电流从一个导体进入另一个导体时,可近似认为 $\epsilon_{r1} \approx \epsilon_{r2} \approx 1$,由 $j = \sigma E$,得分界面上的自由电荷面密度

$$\sigma_0 = \epsilon_0 \left(\frac{j_{2n}}{\sigma_2} - \frac{j_{1n}}{\sigma_1} \right) = \epsilon_0 (\rho_2 j_{2n} - \rho_1 j_{1n})$$

59

若两边的电流强度相同,导体的横截面积也相同

$$I_1 = I_2 = I$$



$$Q_0 = \sigma_0 S = \epsilon_0 (\rho_2 I_2 - \rho_1 I_1) = \epsilon_0 I (\rho_2 - \rho_1) \neq 0$$

即在两种导体的分界面上将出现自由电荷的积累,大小与两导体的电阻率相关。 Q_0 是不随时间变化的定值,因此这个电荷积累不影响稳恒电流的连续性。

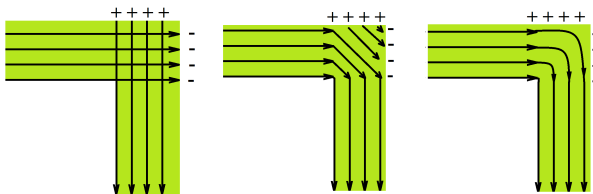
估算1A的电流流过导线,导线的一端是铜,一端是铁,界面面积相同,界面上的积累的电荷量为:

$$Q_0 = \epsilon_0 I (\rho_2 - \rho_1) \approx 5 \times 10^{-18} \text{ C} \approx 31.25e \quad \text{只有几十个电子}$$

积累的电荷量很小!该现象不能用经典电磁学解释,只有量子力学才能解释。

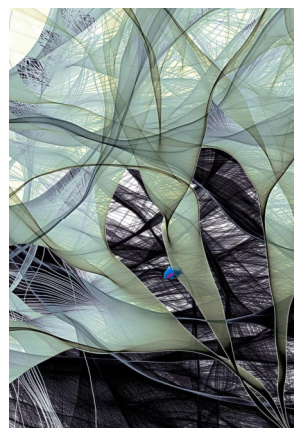
60

【导线拐弯处的电荷积累】



$$Q = \sigma_0 S = \epsilon_0 E S = \epsilon_0 \frac{j}{\sigma} S = \epsilon_0 \rho I$$

A. Butoni and J.-M. Levy-L'ebond, *Electricité et Magnétisme* (Librairie Vuibert, Paris, 1999)

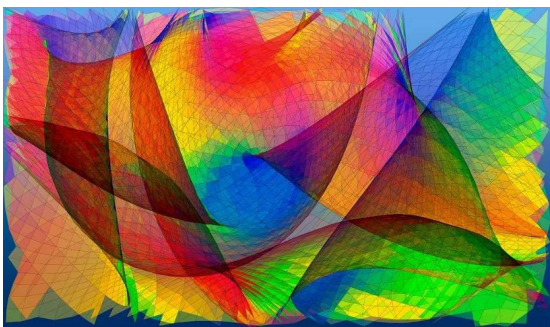


哈佛大学教授 Eric Heller “用电流作画的人” 拍摄的一组电流图片。灵感来自哈佛大学 M.Topinka、B. Leroy 和 R. Westervelt 教授的电流实验，Eric Heller 的研究团队进行了理论部分的工作。

右图显示了电磁波因为焦散而产生了交叉和聚集，看上去就像美丽的水藻一般。

光学焦散：光线穿过一个透明物体时，由于对象表面不平整，使得光线折射不是平行发生而出现漫折射，如波光粼粼的水面就是一种焦散。

“接近混乱：来自量子边界的视觉”



从高维投影到低维时出现的焦散——通过把一张透明彩色三维曲面板投影到一个平面上形成，它呈现出了焦散现象的几个重要特征：折叠、汇聚尖端和燕尾状分岔。

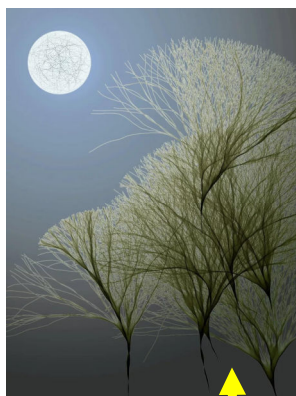


在尺寸只有细菌大小，甚至细菌的百分之一大小的电气设备上，微小瑕疵会导致电子通过时出现散射。

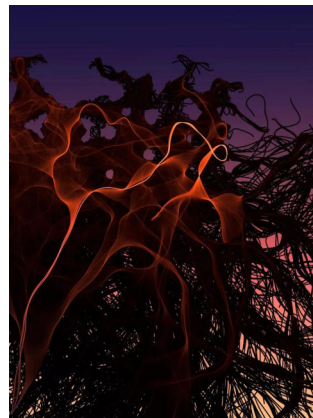
Heller 他们发现，电子倾向于聚集并形成分支。

该图的特点是，电子在非常小的初始角度范围内发射，就如同一条又细又窄的“茎”，很快分叉，呈扇形展开，这是它们进入混沌运动的开始阶段。

球体表面上的
随机量子波



一定角度范围内发射形成的混沌电子路径



电流以微米级“二维电子气”（2DEG）形态穿过设备时所呈现出来的样子(像榕树)。

由于周围有一些带正电的原子，所以带负电的电子的穿行路径会因为受到吸引出现一些平滑偏转。

这张图片中，电子从左下方出发，并且被加了一个电压，导致它们向右上攀登的速度被减缓，最终折返向下。

