

上节课主要内容

洛伦兹力

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

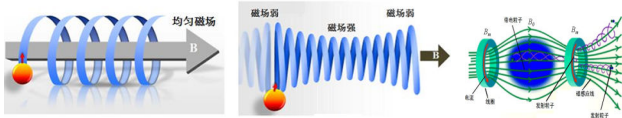
$F \perp V$, 洛伦兹力
不对粒子做功

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$$

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB}$$

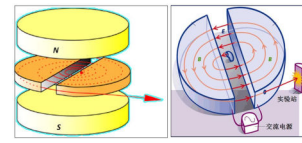
T 与 V 无关(磁聚焦)

R 与 q/m 荷质比有关(质谱仪)



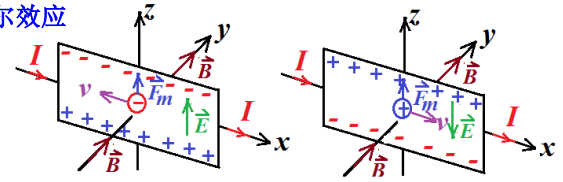
带电粒子在轴对称缓变磁场中的磁矩守恒(磁矩)

1



回旋加速器 { 磁场—回旋
电场—加速

霍尔效应



$$\vec{F}_e = -\vec{F}_m$$

$$n = \frac{IB}{U_h de}$$

载流子种类、浓度

2

磁场对电流的作用

由洛伦兹力和安培定律, 可求得外磁场 B 对运动点电荷、线电流、面电流和体电流的作用力

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

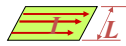
$$\vec{F} = \int_L Id\vec{l} \times \vec{B}$$

B 为外磁场, 即
除受力体电流之
外所产生的磁场

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

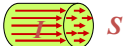
$$\vec{F} = \iint_S \vec{i} dS \times \vec{B}$$

$$i = \frac{I}{L}$$



$$\vec{F} = \iiint_V \vec{j} dV \times \vec{B}$$

$$j = \frac{I}{S}$$

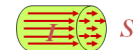


3

有时候, 外磁场 B 与受作用电流元的磁场 $d\vec{B}$ 合成的总磁场 B_t 容易计算。那么外磁场 B 为

$$\vec{B} = \vec{B}_t - d\vec{B}$$

(1) 体电流元 $j dV$



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{j dV \times \vec{r}}{r^3}$$

$$d\vec{B} \propto \frac{dV}{r^2} \propto r$$

$$r \rightarrow 0, d\vec{B} \rightarrow 0$$

$$\vec{B} = \vec{B}_t - d\vec{B} \approx \vec{B}_t$$

可用总磁场 B_t 代替 B

4

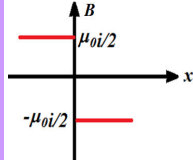
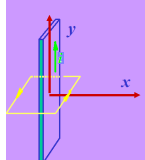
(2) 面电流元 $i dS$



$$i = \frac{I}{L}$$

做一矩形回路, 由环路定理

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k$$



$$dB(x) 2l = \mu_0 i l$$

$$d\vec{B}(x) = -\mu_0 i / 2 \vec{e}_z$$

面电流元 $i dS$ 两侧磁感应强度 $d\vec{B}(x)$ 存在间断, 大小都为 $\mu_0 i / 2$, 但方向相反, 方向与面元相切。同理, 总磁场 B_t 也是由面电流产生, 两侧有同样性质的间断

$$\vec{B} = \vec{B}_t - d\vec{B}$$

但由此计算的外磁场 B 不会间断, 即在面电流元所在处磁场连续。这时可用 B_t 的平均值代替。

5

(2) 线电流元 $I d\vec{l}$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$r \rightarrow 0, d\vec{B} \rightarrow \infty$$

所以上述简化不能推广到线电流元。

可以证明: 一个闭合线电流中的任一小段线电流所受的内力趋于无穷大。

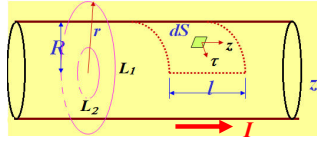
其原因是实际上不存在导线半径 $r \rightarrow 0$ 的线电流。

在需要这种内力时, 必须放弃线电流的近似, 计入通电导线有限截面尺寸的效应。

6

【例12】半径为 R 的无限长圆柱面上沿轴向通有电流 I ，电流均匀分布，求一段长为 l 的半圆柱面上的面电流所受的力及圆柱面的压强。

【解】求的是面电流受力



$$\vec{F} = \iint_S \vec{i} dS \times \vec{B} \quad \vec{B} \text{ 是外磁场, 必须由总磁场减去面电流 } i dS \text{ 本身产生的磁场 } d\vec{B} \quad \vec{B} = \vec{B}_t - d\vec{B}$$

(1) 先求总磁场 B_t , $r > R$ 时, 作 L_1 环路

$$B_t 2\pi r = \mu_0 I \quad \vec{B}_t = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{\tau} \quad \vec{B}_t \Big|_{r \rightarrow R^+} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{\tau} = \mu_0 i \vec{\tau} \quad i = \frac{I}{2\pi R} \quad \text{面电流密度}$$

$r < R$ 时, 作 L_2 环路, 则

$$B_t 2\pi r = \mu_0 I = 0$$

$$\vec{B}_t = 0$$

$$\vec{B}_t \Big|_{r \rightarrow R^-} = 0$$

面电流内、外 B_t 不连续

$$\vec{B}_t \Big|_{r \rightarrow R^+} = \mu_0 i \vec{\tau}$$

$$\Delta B_t = \left| \vec{B}_{t, r \rightarrow R^+} - \vec{B}_{t, r \rightarrow R^-} \right| = \mu_0 i$$

内、外平均值

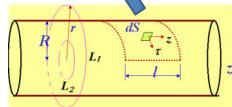
$$\overline{\Delta B_t} = \frac{1}{2} \mu_0 i$$

8

(2) 再求面电流元 $i dS$ 产生的磁场 $d\vec{B}$

$r \rightarrow R$ 时, 相当于无限大载流平面, 由环路定理得

$$\begin{cases} d\vec{B}_{\text{外}} = \frac{\mu_0 i}{2} \vec{\tau} \\ d\vec{B}_{\text{内}} = -\frac{\mu_0 i}{2} \vec{\tau} \end{cases} \quad \text{内、外 } d\vec{B} \text{ 也不连续}$$



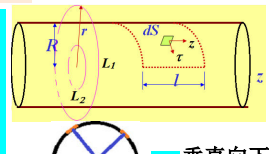
对面元 $i dS$ 来说, 其外磁场为

$$\vec{B} = \vec{B}_t - d\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 i \vec{\tau} - \frac{\mu_0 i}{2} \vec{\tau} = \frac{\mu_0 i}{2} \vec{\tau}, & r > R \\ 0 - \left(-\frac{\mu_0 i}{2} \vec{\tau}\right) = \frac{\mu_0 i}{2} \vec{\tau}, & r < R \end{cases} \quad \text{内、外侧连续!} \quad \vec{B} = \overline{\Delta B_t} = \frac{\mu_0 i}{2} \vec{\tau}$$

9

(3) 求面电流受到的力 $i = \frac{I}{2\pi R} \quad \vec{B} = \vec{B}_t - d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2} \vec{\tau}$

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= \vec{i} dS \times \vec{B} = \vec{i} dS \times \frac{\mu_0 i}{2} \vec{\tau} \\ &= \frac{\mu_0 i^2}{2} dS (\vec{e}_z \times \vec{\tau}) = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2} dS \vec{e}_r \end{aligned}$$



半圆柱面受到的压力 曲面投影 \vec{b} 垂直向下 单位矢量

$$\vec{F} = \iint_S d\vec{F} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2} \iint_S dS \vec{e}_r = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2} 2Rl \vec{b} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi^2 R} \vec{b}$$

$$\text{圆柱面的压强} \quad p = \frac{dF}{dS} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2}$$

10

§ 4-6 磁矢势

一、磁矢势的导出

1. 磁场中不存在标量磁势

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla \times (\nabla U) = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla U$$

由静电场的环路定理, 推出电场中存在电势, 电势是一个标量。

$$\nabla \times \vec{B} \neq 0 \Rightarrow \vec{B} \neq -\nabla U_m$$

磁场的旋度不等于零, 因此没有类似于电势的标量磁势存在, 但是存在矢量磁势(磁矢势)。

12

2. 磁矢势表达式

对任意矢量 $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ 都可证明 $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) \equiv 0$

【证明】

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} = 0 \end{aligned}$$

$\nabla \cdot \vec{B}$ 的散度为零，根据矢量分析， \vec{B} 可以用另一个矢量的旋度来表示，即：

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) \equiv 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) \equiv 0 \end{array} \right\} \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

\vec{A} 称为磁矢势，或磁矢位

3. 磁矢势与电流的关系

$$\nabla \times (\varphi \vec{C}) = \nabla \varphi \times \vec{C} + \varphi \nabla \times \vec{C} \quad \nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\vec{R}}{R^3} \quad \nabla \times d\vec{l}' = 0$$

利用矢量运算可得

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{Id\vec{l}' \times \vec{R}}{R^3} = \nabla \times \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{d\vec{l}'}{R} \right)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

磁矢势的方向：与电流元方向相同，与磁场方向垂直

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{Id\vec{l}'}{R}$$

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l}'}{R}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{id\vec{S}'}{R}$$

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{id\vec{S}'}{R}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}dV'}{R}$$

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}dV'}{R}$$

4. 磁矢势的物理意义

$$\text{对任意矢量} \quad \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$



$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

磁矢势的物理意义(不像是物理意义)：在任意时刻， \vec{A} 沿任一闭合回路的线积分，等于通过该回路形成的面积内的磁通量。

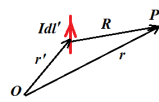
5. 磁矢势的散度

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{Id\vec{l}'}{R} \quad \nabla \cdot \vec{A} = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{Id\vec{l}'}{R} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \nabla \cdot \left(\frac{d\vec{l}'}{R} \right)$$

$$\nabla \cdot (\varphi \vec{A}) = \vec{A} \cdot \nabla \varphi + \varphi \nabla \cdot \vec{A}$$

$$\varphi = \frac{1}{R}, \vec{A} = d\vec{l}', \quad \nabla \cdot d\vec{l}' = 0$$

$$\nabla \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right) = 0 \quad \dots\dots$$



由矢量运算可证明

$$\nabla \cdot \vec{A} \equiv 0 \quad \text{对面电流和体电流，该式均成立}$$

二、磁矢势满足的方程

$$\text{由矢量分析公式：} \quad \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\text{因为：} \quad \nabla \times \vec{A} = \vec{B} \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \nabla \cdot \vec{A} = 0$$

$$\text{所以} \quad \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \nabla^2 A_x = -\mu_0 j_x \\ \nabla^2 A_y = -\mu_0 j_y \\ \nabla^2 A_z = -\mu_0 j_z \end{cases}$$

磁矢势的泊松方程

$$\text{无源区 } j=0 \quad \nabla^2 \vec{A} = 0 \quad \text{磁矢势的拉普拉斯方程}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla U \\ \nabla \times \vec{E} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla \times (\nabla U) = 0$$

所以 $A(r)$ 和 $A(r)+\nabla U$ 对应于同一磁感应强度 B ，即：

$$\vec{B} = \nabla \times (\vec{A} + \nabla U) = \nabla \times \vec{A}$$

19

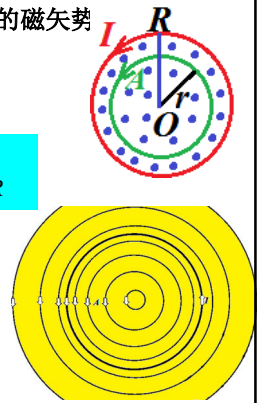
【例-磁13】求无限长密绕螺线管的磁矢势

【解】 $\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = 2\pi r A \quad B = \begin{cases} \mu_0 n I & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

$$\iint_S B dS = \begin{cases} \pi r^2 \mu_0 n I, & r < R \\ \pi R^2 \mu_0 n I, & R < r < \infty \end{cases}$$

$$A = \begin{cases} \frac{\mu_0 n I}{2} r, & r < R \\ \frac{\mu_0 n I}{2} \frac{R^2}{r}, & r > R \end{cases}$$



不是等间隔

20

【例-磁14】一对平行无限长直导线，载有等量反向电流 I ，求磁矢势。

【解】先求一根无限长直导线的磁矢势，作一个矩形回路。

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \text{A 方向与电流元方向相同}$$

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \left(\int_{L_a} + \int_{L_b} + \int_{L_c} + \int_{L_d} \right) \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

$$= 0 + \int_{L_a} \vec{A}_p \cdot d\vec{l} + 0 + \int_{L_d} \vec{A}_Q \cdot d\vec{l} = A_p l - A_Q l$$

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_p^Q \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{r_Q}{r_p}$$

$$A_p - A_Q = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_Q}{r_p}$$

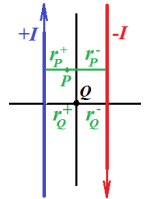
一根长导线在空间任两点间的矢势差

21

现在是一对具有反向电流的无限长直导线，取两电流中心线上一点 Q 作磁矢势的零点

$$+I \text{ 产生的磁矢势为: } A_p^+ - A_Q^+ = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_Q^+}{r_p^+}$$

$$-I \text{ 产生的磁矢势为: } A_p^- - A_Q^- = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_Q^-}{r_p^-}$$

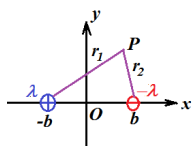


则等量反向电流在任一点产生的磁矢势为：

$$A_p = A_p^+ + A_p^- = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_Q^+}{r_p^+} - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_Q^-}{r_p^-} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_p^-}{r_p^+}$$

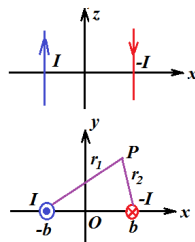
22

静电势与磁矢势比较



平行双带电线电场引起的空间任一点的电势

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$



平行双载流电线磁场引起的空间任一点磁矢势

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

23

三、 $A-B$ (Aharonov-Bohm)效应

1. 基本物理量和非基本物理量

通常把那些出现在基本方程中，有

- 明确的定义
- 具有“真实的”物理意义
- 客观存在的
- 可观测的

物理量叫“基本物理量”或者“真实的物理量”；否则为“非基本物理量”。

24

力是基本物理量

- 力描述物体之间的相互作用
- 决定物体的运动状态的变化
- 客观存在
- 可测量

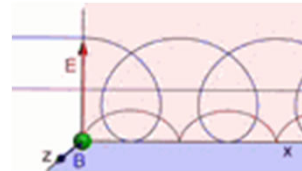
势能是非基本物理量

- 势能也描述物体相互作用，但不如力那样直接和具体。
- 势能的零点的不同选取，导致势能具有不确定性

25

Maxwell 电磁理论中 E 和 B 是基本物理量

- E 是单位正电荷所受的力；
- B 可根据洛伦兹力公式或安培力公式来理解；
- 根据 Maxwell 方程解出的 E 和 B ，就完全可以确定电磁场的状态；
- 电场强度 E 和磁感应强度 B 是基本物理量。



26

矢势 A 和标势 φ

- 电磁场也可以用一组矢势 A 和标势 φ 来描述

矢势和标势与 B 和 E 的关系

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

- 当矢势和标势作如下规范变换时， E 和 B 保持不变 (ψ 是时空的任意标量函数)：

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \psi$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

$$-\nabla \varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}$$

- 即对于确定的电磁场，可因为不同的规范选取，导致 A 和 φ 具有不确定性(数值不唯一)。

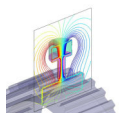
27

经典物理认为 A 和 φ 是非基本物理量

- 静电势(电标势) φ 是在电场的基础上，利用环路定理引入，它具有物理意义，虽然数值不唯一，但在实验上是可测量值；
- 磁矢势 A 是在磁场高斯定理基础上引入，但引入时，并未明确它的物理意义，数值不唯一；在经典物理范畴内，也不能在实验上观测到， A 纯属为了计算方便引入的辅助物理量；
- 在沿袭至今的经典电动力学中，矢势和标势被看作是一组并不具有“真实”物理意义的辅助物理量； A 和 φ 为非基本物理量。

28

电磁学中 E 、 B 和 A 、 φ 哪一组物理量是基本物理量？存在争论！



Maxwell 电磁理论建立初期

Maxwell 本人认为：矢势是一个基本物理量，具有“真实的”物理意义，即描述电紧张状态。

现今教科书中

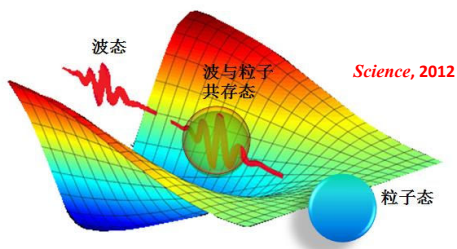
现代教科书中的 Maxwell 方程组是被 Hertz、Heaviside 等人改造、归纳、整理了的、具有对称形式的简洁的方程组，其中 E 和 B 是被看作描述电磁场的基本物理量；

29

量子力学的诞生带来的变革

- 在量子力学中，力的概念变得十分次要，而能量、动量却成为重要概念。
- 微观粒子具有波粒二象性，粒子的状态由微观粒子在空间和时间里变化着的概率波描述；
 - 波函数的频率—粒子的能量
 - 波长—粒子的动量
- 粒子没有确定的运动轨迹，即使研究力，也无法测量力的大小。

30



光既可以表现出粒子形式，又可以呈现出波动特征。但以前实验上并未发现光同时表现出这两种特征。

2012年科大李传锋、英国Alberto Peruzzo, 法国Florian Kaiser 等对“光子是粒子还是波”进行了细致的实验，证实了**实验中光子同时表现出既象波又象粒子的性质**。

31

量子力学中

量子力学中，对于带电粒子的描述，都不可避免地会出现矢势和标势 A 、 ϕ

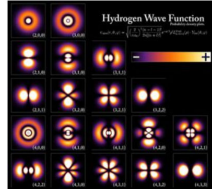
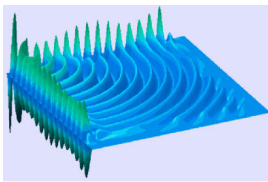
例如带电粒子的基本方程—薛定谔方程

$$\frac{1}{2m} \left[(-i\hbar \nabla - e\vec{A})^2 + e\phi + U \right] \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

电磁场的矢势 A 和标势 ϕ 以动量和能量的地位出现在方程中，表明 A 、 ϕ 本身是决定电子运动的。

32

但由于矢势和标势经规范变换时，仅导致波函数多一个**相因子**(方程定域规范变换不变性)；因此很长时间内，人们一直认为在量子力学中，也如同在经典力学中一样，只有电磁场的场强才具有可观测的物理效应， A 、 ϕ 并不具有直接可观测的物理效应。



33

Aharonov 和 Bohm 的预言

Aharonov 和 Bohm 考虑到微观粒子具有波粒二相性，描述微观粒子的波函数**不仅有波幅而且有相位**；

他们设想在**电磁场强度为零的空间中**，只要**电磁矢势 A 和标势 ϕ 不为零**，则运动着的两束相干的带电粒子，其波函数会受矢势或标势的影响而出现不同的相位变化；从而， A 和 ϕ 有可观测的物理效应，这一效应被称为 **A - B 效应**。

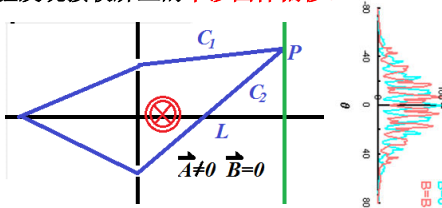
Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev.* 115, 485 (1959)

34

电子双缝衍射实验

双缝后不存在磁体($B=0$)，由于电子的波动性，通过双缝后，在接收屏上将出现**双缝干涉花样**。

若紧靠双缝的后面放一个小的**通电密绕长直螺线管**，电子通过双缝后在螺线管外($B=0$)的两侧经过，实验发现接收屏上的**干涉图样偏移**。

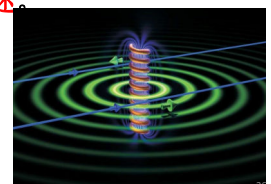
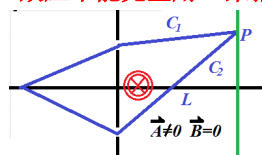


35

也许有人会认为，是螺线管内的 B 直接作用到管外的电子上，但是这种想法是和局域相互作用的原理相违背的。

局域相互作用是电磁相互作用的一个基本原理，即某点上的电荷电流仅受到该点邻域上场的的作用。

A - B 效应是一个量子力学现象， A - B 效应的存在揭示了经典电动力学的缺陷，即说明**磁场的物理效应不能完全用 B 来描述**。



36

干涉图样偏移的原因

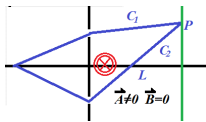
- 电子经过两侧路径的相差：

$$\delta = \frac{S_1 - S_2}{\hbar} = \frac{e}{c\hbar} \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{e}{c\hbar} \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

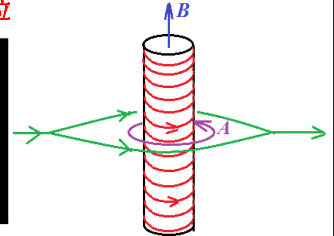
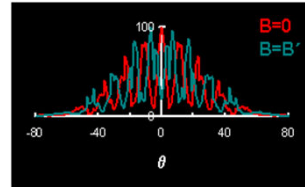
$$= \frac{e}{c\hbar} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{e}{c\hbar} \Phi = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad \Phi_0 = \frac{hc}{e}$$

Φ 是由路径 1 和 2 所包围面积内的磁通

虽然在电子所通过的**路径上** $B=0$ ，但由于**矢势不为零** $A \neq 0$ ，因而，干涉强度随磁通量做周期性变化。



- 经典物理**：电子束通路上没有磁场，没有磁力作用在电子上，螺线管中磁场不会产生任何影响。
- 量子力学**：电子将感受到与磁通量 Φ 相联系的磁矢势 A 的存在，波函数将附加一与磁矢势 A 有关、依赖于路径的相位



相因子不改变衍射的强度分布，但可造成条纹的移动！

$$\delta = \frac{e}{c\hbar} \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{e}{c\hbar} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{e}{c\hbar} \Phi$$

- 实验上能否观察到干涉花样的变化，成为磁矢势是否具有基本意义的重要判据。
- 1960年， A - B 效应被英国的 *Chambers* 从实验上予以证实 [*R.G. Chambers, Phys. Rev. Lett, 5, 3(1960)*]。
- 他从实验中观察到：因直径为 1 微米、长为 0.5 毫米的磁化了的铁晶须的存在，而造成的干涉条纹的平移。
- Chambers* 认为，电子传播区中，这根铁晶须所产生的磁场很小，按经典的观点，不能解释所观察到的偏移的大小。从而推断：**矢势造成如同 A - B 预言的电子波函数相位的变化。**

39

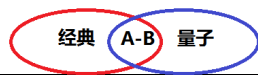
- 随后美国、德国、意大利等几个实验小组也陆续进行了类似的实验，都**支持了这一预言**。
- 尽管如此，由于电子的波长很短，限制磁场的区域很小，螺线管半径不但必须很小，长度还要无限长，这些条件很难得到实验保证，因而**有人对实验结果的可靠性表示怀疑**。
- 认为干涉条纹可能是**晶须的漏磁通**造成的；
- 直到 1980 年，还有人认为“ A - B 效应还没有被实验证实”。

40

- 直到1986年，日本物理学家 *A. Tonomura* 为了**消除漏磁的影响**，用**超导材料**将磁场屏蔽以后，所证实的 **A - B 效应**才被物理界普遍接受。

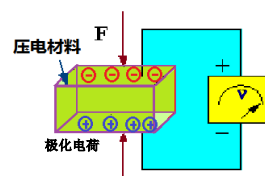
PHYSICAL REVIEW A
VOLUME 34, NUMBER 2
AUGUST 1986
Experimental confirmation of Aharonov-Bohm effect
using a toroidal magnetic field confined by a superconductor
Nobuyuki Osakabe, Tuzuyoshi Matsuda, Takeshi Kawasaki, Junji Endo, and Akira Tonomura
Advanced Research Laboratory, Hitachi Ltd., Kokubunji, Tokyo 185, Japan
Shinichiro Yano and Hiroji Yamada
Central Research Laboratory, Hitachi Ltd., Kokubunji, Tokyo 185, Japan
(Received 21 January 1986)

- Tonomura* 等还定量地测量出条纹移动的距离，其结果与理论计算符合得很好，并以清晰的图象证实干涉条纹在不动的包迹线里移动。
- A - B 效应的证实对物理学的影响是深远的。

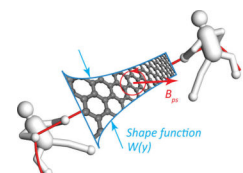


41

四、压磁效应和质磁场

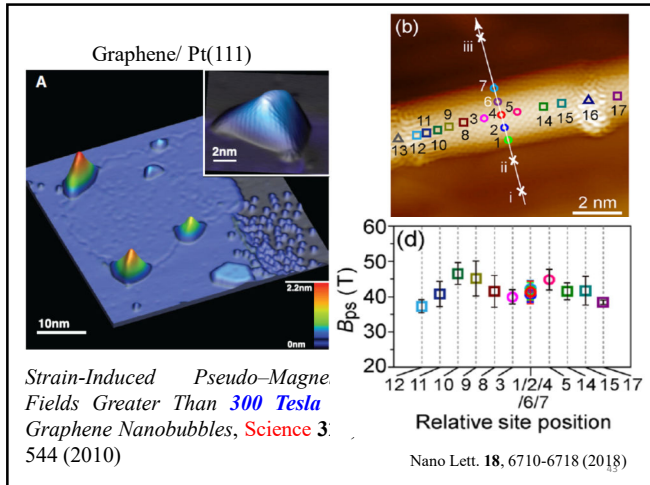


压电效应
压力→电势差→电场

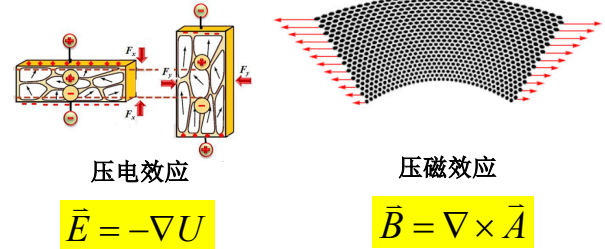


压磁效应
压力→磁矢势→磁场

?



石墨烯中是如何得到赝磁场的?



$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) \vec{e}_z$$

石墨烯中的磁矢势 PRB 77, 205421, 2008

ϵ 为应变

$$\begin{cases} A_x = \pm \frac{\beta}{a} (\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}) \\ A_y = \mp 2 \frac{\beta}{a} \epsilon_{xy} \\ A_z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \epsilon_{xx} \approx \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \epsilon_{yy} \approx \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \epsilon_{xy} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \end{cases}$$

$B_x = 0, B_y = 0$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = -\frac{\beta}{a} \left(2 \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial x} \right) = -\frac{\beta}{a} \left(2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right)$$

$$\mu_x(x, y) = \frac{xy}{R}, \quad \mu_y(x, y) = -\frac{x^2}{2R}$$

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{y}{R} \\ \epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \\ \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{R} - \frac{x}{R} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} = \frac{1}{R}, \quad \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial x} = 0$$

非均匀应变!

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = -\frac{\beta}{a} \left(2 \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial x} \right)$$

$$B_s = -\frac{\beta}{aR}$$

梯度应变产生垂直于表面的均匀磁场

$$u_x(x, y) = (R+y) \sin \left[\frac{2x}{L} \arcsin \left(\frac{L}{2R} \right) \right] - x$$

$$u_y(x, y) = (R+y) \cos \left[\frac{2x}{L} \arcsin \left(\frac{L}{2R} \right) \right] - R - y$$

B_z 在 xy 平面内变化缓慢 PRB 81, 035408 (2010)

$$B_z(x, y) = -4c \frac{\beta \Phi_0}{aL} \arcsin \left(\frac{L}{2R} \right) \cos \left[\frac{2x}{L} \arcsin \left(\frac{L}{2R} \right) \right] \left[1 - \frac{R+y}{L} \arcsin \left(\frac{L}{2R} \right) \right]$$

$$u_r = cr^2 \sin 3\theta, \quad u_\theta = cr^2 \cos 3\theta$$

Nat. Phys. **6**, (2010) 30

$$B_s = \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{A_\theta}{r} = \frac{8\beta c}{a}$$

问题

1. 磁矢势的意义和相关研究。
2. 材料中应变引起的赝磁场的理论与实验研究。

作业 4.29, 4.30, 4.31, 4.35

Thank you!