

上节课主要内容

电磁感应定律

单位电荷的
洛伦兹力

$$\vec{K}_{\text{动-非}} = \vec{v} \times \vec{B}$$

涡旋电场

$$\vec{K}_{\text{感-非}} = \vec{E}_{\text{旋}}$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{\text{动}} = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ \varepsilon_{\text{感}} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} \end{cases}$$

$$\oint_L \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oiint_S \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_L \vec{E}_{\text{静}} \cdot d\vec{l} = 0$$

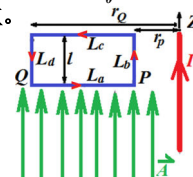
$$\oiint_S \vec{E}_{\text{静}} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_i$$

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{静}} + \vec{E}_{\text{旋}}$$

$$\vec{E}_{\text{静}} = -\nabla U$$

$$\vec{E}_{\text{旋}} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

A为磁矢势

 $E_{\text{旋}}$ 与产生B的电流I的方向平行或反平行【例31】一无限长直导线，通有随时间变化的电流 $I = I_0 \sin \omega t$ ，求其在导线外部两点P、Q 涡旋电场的差值。【解】导线外做一个矩形回路，设逆时针方向为回路绕行方向。 $E_{\text{旋}}$ 与产生B的电流方向相同或相反，以z方向为正方向，则

$$\oint_L \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} = \left(\int_{L_a} + \int_{L_b} + \int_{L_c} + \int_{L_d} \right) \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} = \left(0 + \int_{L_b} + 0 + \int_{L_d} \right) \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} = E_{\text{旋}} l - E_{\text{旋}} l$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2\pi r} I_0 \sin \omega t$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\mu_0}{2\pi r} I_0 \omega \cos \omega t$$

$$dS = l dr$$

$$-\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\int_{r_p}^{r_Q} \frac{\mu_0}{2\pi r} I_0 \omega \cos \omega t \cdot l dr = -\frac{\mu_0 I_0 \omega \cos \omega t}{2\pi} l \ln \frac{r_Q}{r_p}$$

$$E_p - E_Q = -\frac{\mu_0 I_0 \omega \cos \omega t}{2\pi} \ln \frac{r_Q}{r_p}$$

2

§ 6.2.4 涡电流和趋肤效应

一、涡电流

1. 涡电流

1855年，傅科发现金属块处在变化的磁场中或相对于磁场运动时，在它们的内部也会产生感应电流，也称为傅科电流。

铁芯可看作是由一系列半径逐渐变化的圆柱状薄壳组成，每层薄壳自成一个闭合回路。

在交变磁场中，通过这些薄壳的磁通量在不断地变化，产生感应电动势(感生电动势)，从而在一层层的闭合回路中产生感应电流。

傅科的涡电流效应 (Eddy current)
1855年获科普利奖

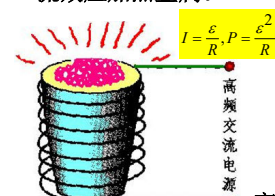
$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -S \frac{dB}{dt}$

3

从上端俯视，电流的流线呈闭合的涡旋状，因而这种感应电流叫做涡电流(Eddy Current)，简称为涡流。

涡流的方向可以通过楞次定律来判定。

由于大块金属的电阻很小，因此涡流可达非常大的强度，甚至可融化金属。工业上常用涡电流效应加热金属。



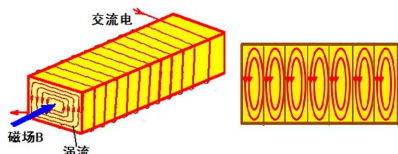
高频电流的涡电流可以加热钢水

大部分情况下，是不希望产生涡流的。例如作为各种变压器的铁芯，若涡流过大会使铁芯温度很高，既造成了能量的损失又不安全。减少涡电流的主要方法有：

① 采用高电阻率的材料，如硅钢，在钢中增加硅，电阻率 ρ (40~50 $\mu\Omega \cdot \text{cm}$) 比纯钢的电阻率 (10 $\mu\Omega \cdot \text{cm}$) 大 4~5 倍，而磁导率 μ 变化不大。

② 采用多层绝缘片叠加而成，减少涡电流的导体截面积S，即增大电阻值。

$$R = \rho \frac{l}{S}$$



5

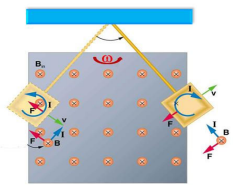
2. 电磁阻尼

涡电流除了热效应外，还有机械效应，即大块金属在磁场中运动，会受到很大的阻力。

如图是一个金属摆，当金属摆下落进入/离开磁场时，摆上的磁通量会增加/减少，金属板上产生涡电流，涡电流在磁场中受到的安培力是阻力；所以摆很快就会停止摆动。



进入磁场区域，阻止磁通量增加，感应电流逆时针方向



离开磁场区域，阻止磁通量减小，感应电流顺时针方向

6

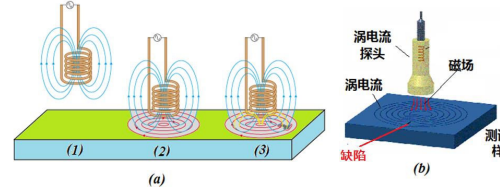


7

利用涡电流效应探测样品缺陷

加交流电的线圈靠近导体材料时，导体材料上会感应出涡电流。

涡电流产生的磁场叠加到原来螺线管的磁场上，如果测出这个磁场的变化，就可以获得导体材料的一些特性，如导体材料中有缺陷，通过与无缺陷样品的比较，可获得缺陷的分布特性。



8

二、趋肤效应

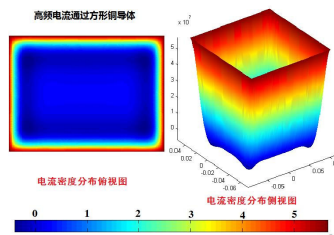
1. 趋肤效应现象

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -S \frac{dB}{dt}$$

当交变电流通过导电圆柱体时，电流密度分布不再均匀，越靠近导体表面处，电流密度越大，称趋肤效应。

趋肤效应的结果使有效面积减少，电阻增加。

方形铜导体通以高频电流时的电流密度分布模拟计算图



9

2. 趋肤效应的机制

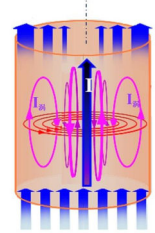
导体内: $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$

$\vec{j} = \sigma \vec{E} \rightarrow \nabla \cdot \vec{j} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho$

由电流连续性方程得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \rho$$

解得: $\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{\sigma t}{\varepsilon}} = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ 其中 $\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$



10

当 $\omega \ll \frac{1}{\tau} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ 或 $\frac{\sigma}{\varepsilon \omega} \gg 1$

σ 很大，是良导体，良导体内无自由电荷分布，电荷只能分布在导体表面

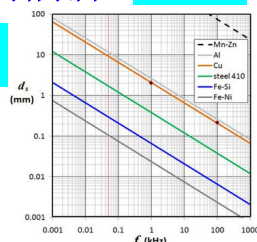
$$\rho(t) = 0$$

$$\vec{E} = E_0 e^{-\alpha z} e^{i(\beta z - \omega t)}$$

$$\vec{j} = j_0 e^{-d/d_s}$$

d_s 为趋肤深度

各金属材料在不同频率的交流电下的趋肤深度



11

$$d_s = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \mu_r \sigma}} \quad f = \frac{\omega}{2\pi}$$

频率 ω 越高，磁导率 μ_r 越大，则 d_s 越小，趋肤效应越明显

对铜材料 $\sigma = 5.9 \times 10^7 (\Omega m)^{-1}$, $\mu_r = 1$

$$d_s (f = 1 \text{ kHz}) = 2.1 \text{ mm}$$

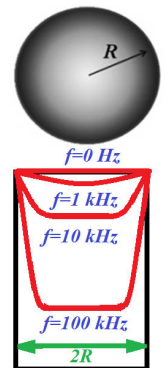
$$d_s (f = 100 \text{ kHz}) = 0.21 \text{ mm}$$

对铁材料，由于 μ_r 很大，趋肤效应更明显

$$\sigma = 1 \times 10^6 (\Omega m)^{-1} \quad \mu_r = 2000$$

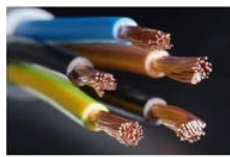
$$d_s (f = 1 \text{ kHz}) = 0.63 \text{ mm}$$

$$d_s (f = 100 \text{ kHz}) = 0.063 \text{ mm}$$



12

- 由于趋肤效应，电流主要集中在导线表面，**表面产生大量焦耳热**，易使金属表面起保护作用的绝缘层老化甚至起火，因此一般**高频电缆常用细导线编织成束，代替实心导线**。



- 趋肤效应的主要应用：**表面淬火**，使材料表面**硬度增加**，这在制作刀具时是常用的办法。



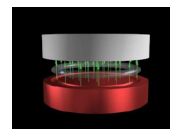
13

§ 6.2.5 电磁感应的应用

电子感应加速器

$$\oint_L \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

- 电子感应加速器是利用**变化磁场 $B(t)$ 产生的涡旋电场 $E_{\text{旋}}$ 来加速电子**。
- 当电磁铁用低频的、强大的**交变电流 $I(t)$** 励磁时，真空室中会产生很强的**涡旋电场**。
- 由电子枪发射的电子，一方面在**洛伦兹力(径向) F_1** 作用下做**圆周运动**，另一方面受**涡旋电场力(切向) F_2** ，作**加速运动**。



14

设磁场随时间的变化为

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \sin \omega t$$

$$\oint_L \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

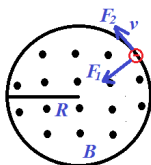
$$\nabla \times \vec{E}_{\text{旋}} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \vec{E}_{\text{旋}} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \vec{B}_0 \omega \cos \omega t$$

因 $\nabla \times$ 不对时间 t 作用，故

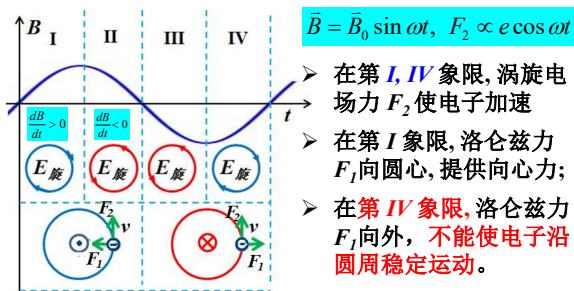
$$E_{\text{旋}} \propto -\cos \omega t$$

电子在切向受涡旋电场的力而加速：

$$F_2 = -eE_{\text{旋}} \propto e \cos \omega t$$



15



- 因此，必须使电子在第一个 **1/4 周期** 结束前，已经在磁场中旋转很多圈，**加速到足够高的能量**，在第二个 **1/4 周期** 到来前，从真空室中偏转出来，输运到实验靶站上。这是**电子加速器的基本条件**。

16

设 B_R 为电子运行轨道上的磁感应强度，则

$$F_1 = evB_R = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow mv = eRB_R \quad (1)$$

$$F_2 = -eE_{\text{旋}} = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow \oint_L \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} = E_{\text{旋}} 2\pi R = - \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \frac{e}{2\pi R} d\Phi = mdv$$

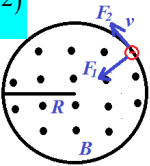
设电子初始速度为 0，则对上式两边积分得：

$$mv = \frac{e}{2\pi R} \int_S d\Phi = \frac{e}{2\pi R} \cdot \pi R^2 \bar{B} = \frac{eR}{2} \bar{B} \quad (2)$$

$$(1)(2) \text{ 式比较得: } B_R = \frac{1}{2} \bar{B}$$

轨道内 B 的平均值

轨道上 B_R 等于轨道内 B 的平均值一半时，电子能够稳定地在圆周轨道上被加速



17

- 电子在涡旋电场中运动一周，被加速获得的能量为：

$$\Delta W = F_2 l = -eE_{\text{旋}} 2\pi R = \frac{e\Delta\Phi}{T} = \frac{ev\Delta\Phi}{2\pi R}$$

$$\varepsilon = \oint_L \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} = E_{\text{旋}} 2\pi R = -d\Phi / dt$$

- 加速能量与磁通量成正比，与半径 R 成反比**。在轨道半径大的感应加速器中，加速粒子到相同的能量，其磁通利用率不如尺寸小的加速器有效。
- 一台 **100 MeV** 的大型电子加速器，可将电子加速到 **0.999986c**，其电磁铁重达 **100 吨**，功率 **500 千瓦**，环行室直径 **1.5 公里**，电子加速路程超过 **1000 km**。



1940年美国伊利诺依大学Kerst建成第一台感应加速器，加速能量为2.3 MeV

18

- ✦ 用感应加速器加速比电子静止质量大得多的粒子或离子并不适宜

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi R}{ev} \Delta W$$

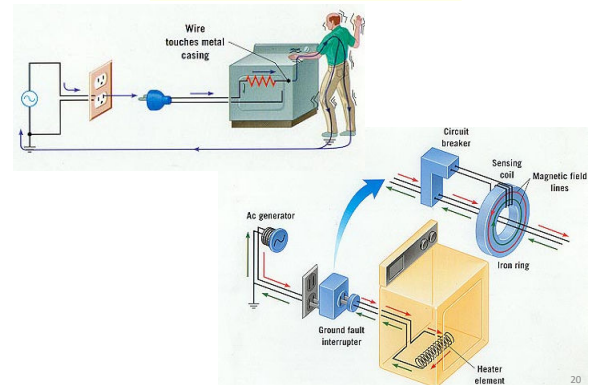
B相同, ΔW 相同时
 $m \uparrow \Rightarrow v \downarrow, R \uparrow$, 需要的 $\Delta\Phi \uparrow$

- ✦ 电子感应加速器的特点:

- (1) 加速电子的能量范围在10~50 MeV比较合理;
- (2) 引出电子束的**能量均匀性较好**, 采用单脉冲引出时, 能量的单色性更好;
- (3) 改变引出的时间, 可灵活地**调节最终加速能量**;
- (4) 平均电流强度一般仅达几十 μA 级, 使用脉冲时, 电流强度可达mA级; 引出**效率**可达75%。

19

漏电保护器



20

电磁加热炉



电声设备



21

§ 6-3 互感和自感

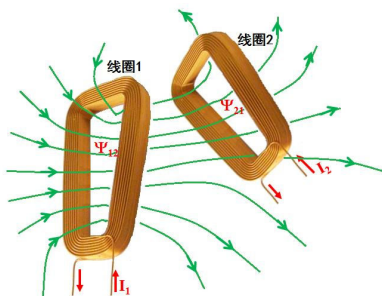


22

§ 6.3.1 互感和互感系数

1. 互感

当一个线圈中的电流变化时, 在另一个线圈中产生感应电动势, 称**互感电动势**。



23

2. 互感系数的第一种定义

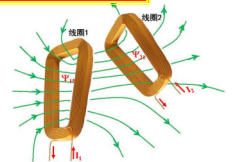
- ✦ 线圈1激发的磁场, 在线圈2中的总磁通量 Φ_{21} , **只与线圈1中的电流 I_1 有关**:

$$\Phi_{21} = M_{21} I_1$$

- ✦ 同理, 线圈2激发磁场在线圈1中的总磁通量 Φ_{12} 为:

$$\Phi_{12} = M_{12} I_2$$

M_{21} 和 M_{12} 为互感系数的第一种定义, 简称互感。



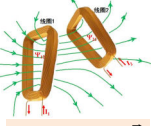
24

3. 互感系数的对称性

互感系数有对称性，即下标交换不变 $M_{12} = M_{21}$

【证明】

$$\begin{aligned}\Phi_{21} &= \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \iint_{S_2} (\nabla \times \vec{A}_1) \cdot d\vec{S}_2 = \oint_{L_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 \\ &= \oint_{L_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_1} \frac{I_1 d\vec{l}_1}{r} \cdot d\vec{l}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{L_2} \oint_{L_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r}\end{aligned}$$



$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_1} \frac{I_1 d\vec{l}_1}{r}$$

\vec{A} 为磁矢势

$$\Phi_{21} = M_{21} I_1 \quad M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_2} \oint_{L_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r}$$

25

同理可得

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_2} \oint_{L_1} \frac{d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1}{r}$$

$$\therefore d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2 = d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1$$

$$\therefore M_{12} = M_{21} = M$$

互感系数有对称性

多个线圈存在时，任意两个线圈之间的互感系数为：

$$M_{ji} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_j} \oint_{L_i} \frac{d\vec{l}_i \cdot d\vec{l}_j}{r} = M_{ij}$$

$$1 \text{ 亨利} = \frac{1 \text{ 韦伯}}{1 \text{ 安培}} = \frac{1 \text{ 伏特} \cdot \text{秒}}{1 \text{ 安培}}$$

$$1 \text{ H} = 10^3 \text{ mH} = 10^6 \text{ } \mu\text{H}$$

互感系数是由回路自身的几何特性、相对位形和介质特性决定的，与线圈中是否加电流无关。

26

4. 互感电动势

只有两个线圈存在时， I_1 变化在线圈2中激发的感应电动势为：

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt} \quad \Phi_{21} = MI_1$$

I_2 变化在线圈1中激发的感应电动势为

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M \frac{dI_2}{dt} \quad \Phi_{12} = MI_2$$

27

5. 互感系数的第二种定义

由上面的互感电动势，可得互感系数的第二种定义

$$M = -\frac{\varepsilon_2}{dI_1/dt} = -\frac{\varepsilon_1}{dI_2/dt}$$

➢ 在没有铁磁质、回路不变形时，两种定义是等效的。

➢ 第一种定义通常用于计算，第二种定义常用于测量。

➢ M 可正可负， M 取正时，表明其互感电动势与该线圈原有的电动势(或电流)是相互加强的；反之， M 取负值，表明两者是相互抵消的。

28

【例32】在横截面积为 S ，长为 l 的螺线管上，重叠绕制两组线圈，匝数为 N_1 和 N_2 ，求互感。

【解】设在匝数为 N_1 的那组线圈上通电流 I_1 ，则它在螺线管内部产生的磁感应强度为：

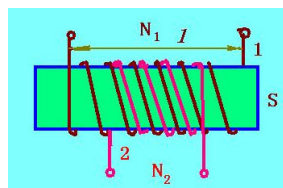
$$B_1 = \mu_0 n I_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1$$

两线圈重叠，线圈2中的磁通量为：

$$\Phi_{21} = N_2 B_1 S = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S I_1$$

互感系数为：

$$M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l^2} S l = \mu_0 n_1 n_2 V$$



29

【例33】如图，两个同心共面的圆线圈半径分别为 a 、 b ， $b \gg a$ ，线圈 b 中通有电流 I 。设 b 中电流产生的磁场在 a 中近似为常数，求：(1) 互感系数 M ；(2) 若 $I_a = I_0 \sin \omega t$ ，则 ε_b 为多少？

【解】(1) 求互感：半径为 b 的圆环电流 I 在圆心处产生的磁感应强度为：

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L I d\vec{l} \times \frac{\vec{e}_R}{R^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2b}$$

该磁场穿过 a 线圈磁通量为

$$\Phi = B S_a = \frac{\mu_0 I}{2b} \pi a^2$$

互感

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 \pi a^2}{2b}$$



30

(2)若 $I_a = I_0 \sin \omega t$, 则 ε_b 为多少?

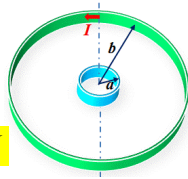
$$\varepsilon_b = -\frac{d\Phi_b}{dt} \quad M_{ab} = M_{ba} = M$$

小线圈 a 中电流在大线圈 b 中产生的磁通量为

$$\Phi_b = \Phi_{ba} = M_{ba} I_a = M I_0 \sin \omega t$$

则互感电动势为:

$$\varepsilon_b = -\frac{d\Phi_b}{dt} = -M I_0 \omega \cos \omega t = -\frac{\mu_0 \pi a^2}{2b} \omega I_0 \cos \omega t$$



31

§ 6.3.2 自感与自感系数

1. 自感

线圈中的电流变化会在线圈自身中产生感应电动势, 称自感电动势.

2. 自感系数

$$I(t) \rightarrow B(t) \rightarrow \Phi(t)$$

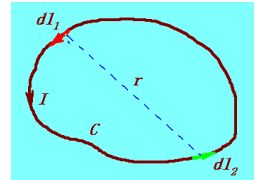
$$\Phi = LI$$

自感系数同样有第一种定义

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

单位: 亨利 H

$$L = M_{11} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r}$$



3. 自感电动势

$$\Phi = LI$$

I 变化激发在自身线圈中的感应电动势为自感电动势:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

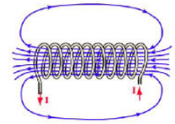
自感系数同样有第二种定义:

$$L = -\frac{\varepsilon}{dI/dt}$$

- 在没有铁磁质和回路不变形时, 两种定义也是等效的。
- 自感系数是由回路自身的几何特性和介质特性决定的; 与是否通有电流无关系。
- 与 M 可取正负值不同, L 总取正值

33

【例34】求长为 l 、匝数为 N 、截面积为 S 的理想螺线管的自感系数



【解】设线圈中通电流 I , 则螺线管中磁感应强度为:

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

理想螺线管, 不考虑漏磁, 通过每个线圈的磁通量相等, 则

$$\Psi = N\Phi = NBS = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} I$$

自感系数为 $L = \frac{\Psi}{I} = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}$

34

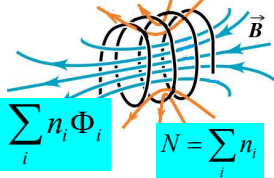
若不是理想螺线管, 有漏磁, 则通过每匝线圈的磁通量互不相等, 中间的线圈磁通量大, 两边的线圈磁通量小。

设有 n_1 匝线圈的磁通量是 Φ_1 , 有 n_2 匝线圈的磁通量 Φ_2, \dots , 换一种说法, 即与 Φ_1 交链的是 n_1 匝电流, 与 Φ_2 交链的是 n_2 匝电流, \dots ,

那么总磁通量为:

$$\Psi = n_1 \Phi_1 + n_2 \Phi_2 + \dots = \sum_i n_i \Phi_i$$

$$N = \sum_i n_i$$



自感系数为: $L = \frac{\Psi}{I} = \frac{1}{I} \sum_i n_i \Phi_i$

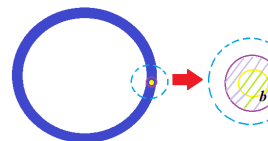
35

线电流 I

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$r \rightarrow 0, B \rightarrow \infty$ 点接近导线时, 必须考虑导线有一定半径

对粗导线构成的回路, 整个回路的电流为 I , 回路仅包含一匝线圈, 导线内的磁通量 $d\Phi_m$ 只与部分电流 I' 相交链, 即与 I' 相联系的电流只有 I'/I 匝



磁感线 a 包围整个导线中的电流 I , 与整个电流互相交链;

磁感线 b 则仅包围部分电流 I' , 即只与部分电流相交链, 只通过这部分电流回路所围的面积。

$$d\Psi_m = \frac{I'}{I} d\Phi_m$$

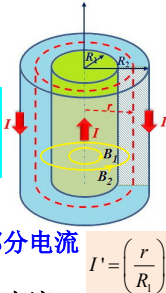
$$\Psi_m = \int \frac{I'}{I} d\Phi_m$$

36

【例35】计算同轴电缆的自感，内圆柱是实心的，半径为 R_1 ，外圆柱半径为 R_2 ，电流沿内圆柱均匀分布。

【解】由环路定理，得电缆中的磁场分布为：

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \begin{cases} \mu_0 I' = \mu_0 \frac{I}{\pi R_1^2} \pi r^2 & (r < R_1) \\ \mu_0 I & (R_1 < r < R_2) \end{cases}$$



$$B_1 = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2} r, \quad (r < R_1)$$

B_1 仅交链部分电流

$$I' = \left(\frac{r}{R_1}\right)^2 I$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (R_1 < r < R_2)$$

B_2 交链整个电流 I

37

$$\Psi_m = \int \frac{I'}{I} d\Phi_m \quad B_1 \text{ 对磁通量的贡献为:}$$

$$dS = l dr$$

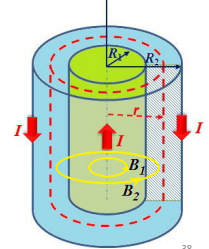
$$\Psi_1 = \int \frac{I'}{I} B_1 dS = \int_0^{R_1} \frac{r^2}{R_1^2} \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2} r l dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi R_1^4} \int_0^{R_1} r^3 dr = \frac{\mu_0 I l}{8\pi}$$

B_2 对磁通量的贡献为：

$$\Psi_2 = \int B_2 dS = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

总磁通量为：

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{\mu_0 I l}{8\pi}$$



38

$$\Psi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{\mu_0 I l}{8\pi}$$

单位长度的电感为： $L = \frac{\Psi}{I l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right)$

若是由空心圆筒构成的同轴电缆，则

$$B_1 = 0, \quad (r < R_1)$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

单位长度的电感为：

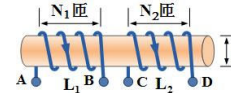
$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

39

§ 6.3.3 自感系数和互感系数的关系

1. 无漏磁条件

在两组线圈间不存在漏磁，即两个线圈中，每一个线圈所产生的磁通量，对于每一匝来说都相等，并且全部穿过另一个线圈的每一匝。



Φ_{21} : 线圈 1 激发的磁场，在线圈 2 中的磁通量

$$\text{互感} \quad M = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} = \frac{N_1 \Phi_{12}}{I_2}$$

$$\text{自感} \quad L_1 = \frac{N_1 \Phi_1}{I_1}, \quad L_2 = \frac{N_2 \Phi_2}{I_2}$$

无磁漏

$$\therefore \Phi_{12} = \Phi_2, \quad \Phi_{21} = \Phi_1$$

40

$$M = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} = \frac{N_2 \Phi_1}{I_1}, \quad M = \frac{N_1 \Phi_{12}}{I_2} = \frac{N_1 \Phi_2}{I_2}$$

$$M^2 = \frac{N_2 \Phi_1}{I_1} \cdot \frac{N_1 \Phi_2}{I_2} = \frac{N_1 \Phi_1}{I_1} \cdot \frac{N_2 \Phi_2}{I_2} = L_1 L_2$$

$$\therefore M = \sqrt{L_1 L_2}$$

一般情况下，或多或少存在漏磁。在工程中通常有：

$$M = k \sqrt{L_1 L_2}, \quad k \leq 1$$

k 称为耦合系数，与线圈的结构、相互几何位置、空间磁介质有关

$k=0$ 表示两线圈无耦合， $k=1$ 表示两线圈理想耦合

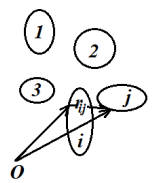
变压器主副线圈间存在很好的耦合 $k=0.98$

41

2. 线圈系统的电感

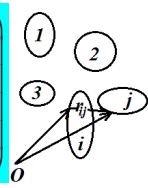
系统存在很多个线圈时，每个线圈之间都会存在互感，同时每个线圈本身存在自感，因此每个线圈上的磁通量由自感通量和互感通量组成，写成下式：

$$\begin{cases} \Phi_1 = L_{11} I_1 + M_{12} I_2 + \cdots + M_{1n} I_n \\ \Phi_2 = M_{21} I_1 + L_{22} I_2 + \cdots + M_{2n} I_n \\ \vdots \\ \Phi_n = M_{n1} I_1 + M_{n2} I_2 + \cdots + L_{nn} I_n \end{cases}$$



42

写成矩阵形式为：

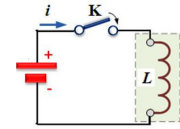
$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & L_{22} & \cdots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & L_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix}$$


其中 $M_{ij} = M_{ji}$

43

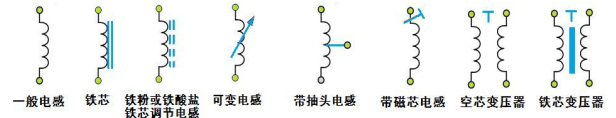
§ 6.3.4 电感的串联和并联

电感是交流电路的重要元件，在电路用字母 L 表示



电感器的主要作用

对交流信号进行隔离、滤波或与电容器、电阻器等组成谐振电路等。



各种自感线圈在电路中的符号

44

1. 电感串联

A. 磁场加强

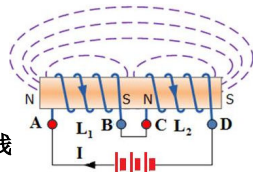
两线圈串联，电流分别从两个线圈的对应端口同时流入或流出。

若产生的磁通相互加强时，则这两个对应端口称为两互感线圈的同名端。

同名端串联，每个线圈的总磁通量分别为：

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} = L_1 I_1 + M I_2$$

$$\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21} = L_2 I_2 + M I_1$$



45

线圈串联 $I_1 = I_2$

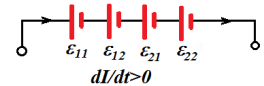
两线圈串联后的总磁通：

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = L_1 I + M I + L_2 I + M I = L_{\text{顺}} I$$

$$\therefore L_{\text{顺}} = L_1 + L_2 + 2M$$

有互感时，两个线圈串联后的自感并不等于每个自感之和

该结果也可以通过计算感应电动势求得，总电动势由四个电动势串联而成。



46

B. 磁场减弱

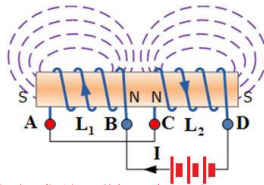
两线圈中的电流连接使磁场相互减弱，总电感为

$$L_{\text{反}} = L_1 + L_2 - 2M$$

有互感时，两个线圈串联后的自感并不等于每个自感之和

可以利用上面的关系测量两固定线圈间的互感：把两线圈顺串联一次，然后反向串联一次，则

$$M = \frac{L_{\text{顺}} - L_{\text{反}}}{4}$$



47

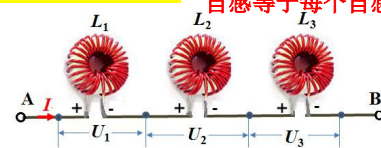
C. 磁场不变—无互感的电感串联

如果串联的感应线圈之间磁通量没有交链，或者各自是相互独立的，则它们之间不存在互感

$$U = L \frac{dI}{dt} = U_{L_1} + U_{L_2} + U_{L_3} = L_1 \frac{dI}{dt} + L_2 \frac{dI}{dt} + L_3 \frac{dI}{dt}$$

$$L = L_1 + L_2 + L_3$$

无互感线圈 ($k=0$) 串联后的自感等于每个自感之和



48

2. 电感并联

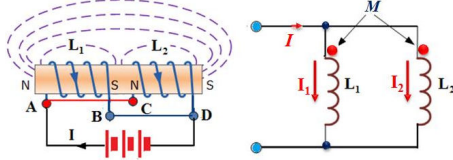
A. 同名端相接

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$$

$$\mathcal{E}_1 = -(L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt})$$

$$\mathcal{E}_2 = -(L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt})$$

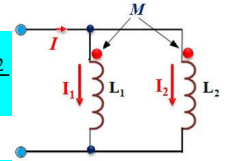
$$\therefore L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} = L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt}$$



49

并联电路，电流关系为：

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt}$$



解上面的2个方程组，有：

$$\begin{cases} \frac{dI_1}{dt} = \frac{L_2 - M}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{dI}{dt} \\ \frac{dI_2}{dt} = \frac{L_1 - M}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{dI}{dt} \end{cases}$$

$$\therefore \mathcal{E} = -\frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{dI}{dt} \rightarrow L_{\text{同}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

50

$$L_{\text{同}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

自感系数总是大于0的数值

串联时有 $L_{\text{反}} = L_1 + L_2 - 2M > 0$

分母大于0，必须要求分子也大于0，所以

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

在无耦合情况， $k=0$ ， $M=0$

$$L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \quad \text{或} \quad \frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \quad \text{与电阻并联公式类似}$$

51

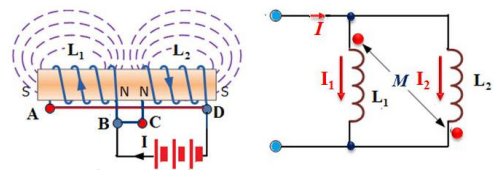
B. 异名端相接

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$$

仅在同名端结果中用 $-M$ 代替 M 即可

$$L_{\text{异}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

分母和分子均恒为正



52

综合以上两种情况，并联线圈的总自感为：

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M}$$

讨论： 若 $L_1 = L_2 = L_0$ 且理想耦合下 ($M = L_0$)，则

同名端并联时 $L = \frac{L_0^2 - M^2}{2(L_0 - M)} = \frac{1}{2}(L_0 + M) \xrightarrow{M=L_0} L_0$

异名端并联时 $L = \frac{L_0^2 - M^2}{2(L_0 + M)} = \frac{1}{2}(L_0 - M) \xrightarrow{M=L_0} 0$

意味着随意将两个理想耦合的线圈并联，有可能出现“短路”！

变压器中将绕组引线误接发生这类并联时，将会导致短路而烧坏变压器或毁坏电源！

53

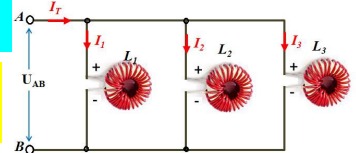
C. 无互感的线圈并联

则线圈之间没有互感， $M=0$ ，此时

$$U_{AB} = L \frac{d}{dt}(I_1 + I_2 + I_3) \quad \text{又} \quad U_{AB} = L_1 \frac{dI_1}{dt} = L_2 \frac{dI_2}{dt} = L_3 \frac{dI_3}{dt}$$

$$= L \left(\frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} + \frac{dI_3}{dt} \right)$$

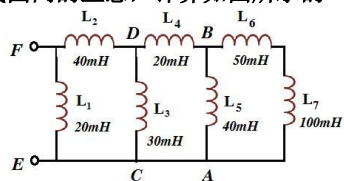
$$\therefore \frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}$$



无耦合(无互感)的线圈串、并联的自感计算公式与电阻的串、并联计算公式在形式上一致！

54

【例36】不考虑线圈间的互感，计算如图所示的等效电感 L_{EF}



【解】 L_{AB} : L_6 - L_7 串联再与 L_5 并联

$$L_{AB} = \frac{L_5 \times (L_6 + L_7)}{L_5 + L_6 + L_7} = 36.8 \text{ mH}$$

L_{CD} : L_4 - L_{AB} 串联再与 L_3 并联

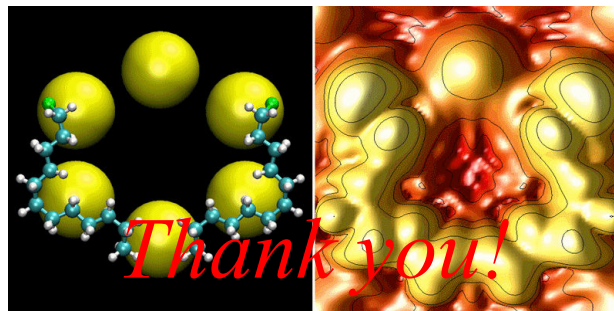
$$L_{CD} = \frac{L_3 \times (L_4 + L_{AB})}{L_3 + L_4 + L_{AB}} = 19.6 \text{ mH}$$

L_{EF} : L_2 - L_{CD} 串联再与 L_1 并联

$$L_{EF} = \frac{L_1 \times (L_2 + L_{CD})}{L_1 + L_2 + L_{CD}} = 15 \text{ mH}$$

55

作业 6.10, 6.13, 6.16, 6.18



56