上节课主要内容

- 电介质的物态方程 $\vec{P}=\varepsilon_0\chi\vec{E}$ $\varepsilon_r=1+\chi$
- 电位移矢量 $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon\vec{E}$ $\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$
- 有电介质时的高斯定理 $\oint\!\!\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum_{S内} q_0$， $\nabla\cdot\vec{D}=\rho_0$
- 有电介质时的环路定理 $\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$， $\nabla\times\vec{E}=0$
- 介质中的边值关系 $D_{2n}-D_{1n}=\sigma_0$， $E_{1t}=E_{2t}$
- 电场与电势的关系 $\vec{E}=-\nabla U$

1

§ 8.1.1 静电场的泊松方程和拉普拉斯方程

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{E}=-\nabla U \quad\Rightarrow\quad \nabla^2 U=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

泊松方程

$$\nabla^2 U=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

拉普拉斯方程 ρ=0

§ 8.1.2 边值问题和静电场的唯一性定理

1. 边值问题

- 第一类边值问题: 给定整个边界上的电势值U
- 第二类边值问题: 给定整个边界上的电势的法向导数值$\partial U/\partial n$
- 第三类边值问题: 给定部分边界上的U，部分$\partial U/\partial n$

2

2. 唯一性定理

满足泊松方程或拉普拉斯方程、及所给的全部边界条件的电场解是唯一的。

- 可以采用多种形式的求解方法，包括某些特殊、简便的方法，甚至是直接观察、猜测的方法。
- 只要能找到一个既满足泊松方程/拉普拉斯方程，又满足边界条件的解，则此解必定是该问题的唯一正确解！无须再做进一步的验证。
- 如果得到了不同形式的解，也只是形式上的不同，电场是唯一的。

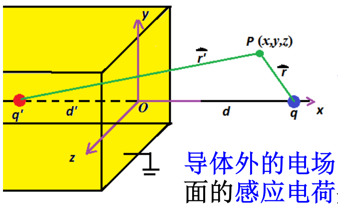
§ 8.1.3 电像法

- 电像法：求解静电场的一种特殊方法，特别适用于对称性的边界，如平面、球面、圆柱面等导体前存在点电荷或线电荷情况。
- 像电荷的作用：代替导体表面感应电荷或介质界面极化电荷，像电荷实际上并不存在。
- 像电荷和真实电荷给出的电势满足边界条件。

3

点电荷对无限大接地导体的电像

【例47】一点电荷q，位于无限大接地导体旁，距离导体表面为d。求(1)空间电势分布, (2)电场分布, (3)导体表面感应电荷密度, (4)电荷所受的力。



【解】导体外点电荷q的存在，导致导体表面有感应电荷，感应电荷的分布比较复杂。

导体外的电场：由点电荷和导体表面的感应电荷共同产生

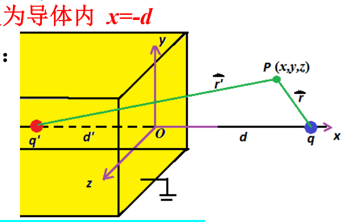
边界条件：导体表面$U=0$ (导体接地)

4

将感应电荷的贡献用一虚拟(像)电荷来代替

为了保证满足边界条件($U=0$)，只要选择像电荷的值 $q'=-q$，像电荷的位置为导体内 $x=-d$

(1) $x>0$区域 P 点的电势为:



$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r}+\frac{q'}{r'}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{1/2}}-\frac{1}{\left[(x+d)^2+y^2+z^2\right]^{1/2}}\right\}$$

该式满足边界条件：$U_{x=0}=0$

根据唯一性定理，U 是正确的!

5

(2) $x>0$ 区域的电场强度为: $\vec{E}=-\nabla U$

$$E_x=-\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{(x-d)}{\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}-\frac{(x+d)}{\left[(x+d)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}\right\}$$

$$E_y=-\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{qy}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}-\frac{1}{\left[(x+d)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}\right\}$$

$$E_z=-\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{qz}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}-\frac{1}{\left[(x+d)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}\right\}$$

6

导体外表面($x=0$)的电场强度为：$E_y=E_z=0$

$$\vec{E}_n=\vec{E}_x(0,y,z)=\frac{-qd}{2\pi\varepsilon_0\left(d^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\hat{x}$$

E 垂直于导体表面

(3)导体表面的感应电荷面密度为：

$$\sigma_S(0,y,z)=\varepsilon_0 E_n(0,y,z)=\frac{-qd}{2\pi\left(d^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

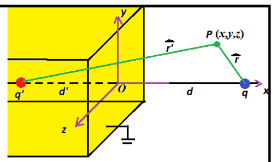
导体表面的总感应电荷为：

$$q_S=\iint_S \sigma_S dS=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-qd}{2\pi\left(d^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}dydz=-q$$

7

(4) 点电荷q所受的力

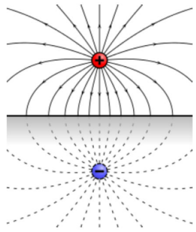
需计算 q 所在处(由感应电荷所产生的)电场强度。



感应电荷在 $x>0$ 区间的作用等效于像电荷 ($-q$) 在 $x>0$ 区间的作用

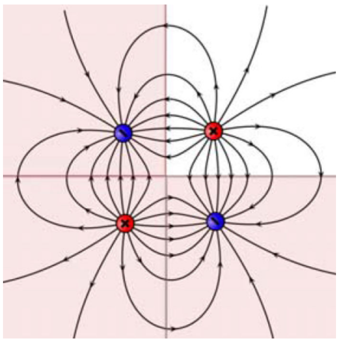
$$\vec{E}'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{(2d)^2}\hat{x}=-\frac{q}{16\pi\varepsilon_0 d^2}\hat{x}$$

$$\vec{F}=q\vec{E}'=-\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d^2}\hat{x}$$



负号表示作用力为吸引力

8



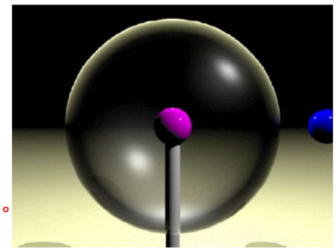
三个像电荷，确保直角表面U=0

接地直角导体平面，点电荷的电像

9

§ 2-4 静电场的能量

- 对一个带电系统而言，其带电过程总是伴随着电荷相对运动，在这个过程中外力必须克服电荷间的相互作用而做功。
- 外界做功所消耗的能量将转换为带电系统的静电能。



带电系统的静电能由系统的电荷分布决定！

10

§ 2.4.1 点电荷系统的静电相互作用能

- 点电荷组彼此之间的距离为无限大时($r_{ij}\to\infty$)，电荷间库仑力(静电相互作用力)为零(F=0)，通常取此时的相互作用能为零(E=0)。
- 当把这些点电荷由无限远离状态(零能态)移到各自的指定位置时，外界必须克服静电力做功，该功被定义为指定位置下点电荷之间的相互作用能，简称为点电荷系统的静电能。
- 外界所做的功与各点电荷的移入次序和路径无关，即静电能只与点电荷间相对位置有关。

11

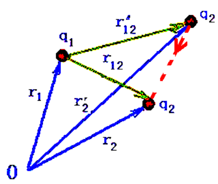
一、两个点电荷系统

把 q_1 和 q_2 分别从无限远处移至 r_1 和 r_2 处。

(1)先把 q_1 从无限远处移至 r_1 处：此过程中，空间没有电场$E=0$，电荷不受电场作用($F=0$)，不需要做功。

(2)再把 q_2 从无限远处移至 r_2处：

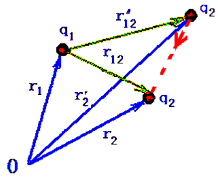
此过程中，q_2 处于 q_1 产生的电场中，需要克服电场力做功。



所做的功将转化为两个电荷系统的相互作用能$W_{互}$。

12

q_1 在*$q_2(r_2')$*处产生的电场为：



$$\vec{E}_{12}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}'_{12}}{r'^3_{12}}$$

U_{ij}: i 源电荷，j 场位置

U_{12}:电荷q_1产生的电场，在r_{12}处的电势

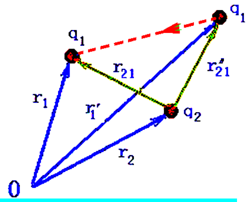
q_2从无限远处移至r_2处，克服q_1的电场力做功：

$$W'_{12}=-\int_{\infty}^{r_2}q_2\vec{E}_{12}\cdot d\vec{l}=-\int_{\infty}^{r_2}\frac{q_2q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}'_{12}}{r'^3_{12}}\cdot d\vec{l}$$

$$=-\int_{\infty}^{r_{12}}\frac{q_2q_1}{4\pi\varepsilon_0 r'^2_{12}}dr'_{12}=q_2\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}=q_2U_{12}$$

13

该过程顺序也可反过来：先移动q_2，后移动q_1，同理有：



$$W'_{21}=-\int_{\infty}^{r_1}q_1\vec{E}_{21}\cdot d\vec{l}=-\int_{\infty}^{r_1}\frac{q_1q_2\vec{r}'_{21}}{4\pi\varepsilon_0 r'^3_{21}}\cdot d\vec{l}$$

$$=-\int_{\infty}^{r_{21}}\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r'^2_{21}}dr'_{21}=q_1\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}}=q_1U_{21}$$

U_{21}: 电荷 q_2 产生的电场，在 r_{21} 处的电势

14

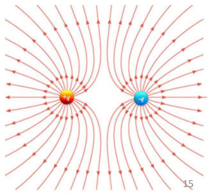
$$W_{互}=W'_{12}=W'_{21}$$

$$W_{互}=q_2U_{12}=q_1U_{21}=\frac{1}{2}\left(q_1U_{21}+q_2U_{12}\right)$$

写成对称形式

若用 U_i 表示除自身(q_i)外，另一个点电荷在该处(q_i处)所产生的势，则可写成：

$$\therefore W_{互}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}q_iU_i$$



相互作用能与电荷的移动次序无关

15

二、N个点电荷系统

把 2 个点电荷系统的相互作用能推广到 N个点电荷系统，有：

$$W_{互}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_iU_i$$

求和中，任何一对点电荷之间的相互作用能都计算了两次，因此有1/2

U_i表示除自身(q_i)外，所有其它点电荷在电荷 q_i 处所产生的电势，表达式为：

$$U_i=\sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{N}U_{ji}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{N}\frac{q_j}{r_{ij}}$$

16

因此，N 个点电荷组成的点电荷组，其静电相互作用能为：

$$W_{互}=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{N}\frac{q_iq_j}{r_{ij}}$$

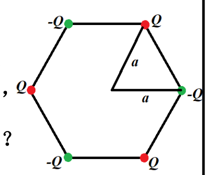
下标 i 和 j 对称，表示外界做功与电荷移入的次序无关。

点电荷体系的静电能(点电荷体系的相互作用能)，就是建立这种电荷分布需要外界提供的能量。

外界为建立这种电荷分布需要做功，这个功以静电能的形式储存在电场中。

17

【例48】在边长为a的正六边形各顶点有固定的点电荷，它们的电量相间地为+Q和-Q。求：(1)系统的静电能；(2)若外力将其中相邻的两个点电荷缓慢地移到无限远处，移动过程中始终保持两个电荷距离不变，其余4个电荷位置不变，外力需做多少功？



【解】任一电荷+Q处的电势为：

$$U_+=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-Q}{a}+\frac{-Q}{a}+\frac{Q}{\sqrt{3}a}+\frac{Q}{\sqrt{3}a}+\frac{-Q}{2a}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{5}{2}\right)$$

任一电荷-Q处的电势为：$U_-=-U_+$

(1)系统的静电能为 $W_{互}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_iU_i$

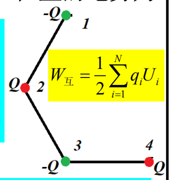
$$W_{互0}=\frac{1}{2}\left[3QU_++3(-Q)U_-\right]=3QU_+=\frac{3Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{5}{2}\right]$$

18

(2)移走两个相邻电荷，剩余四个点电荷，所在位置的电势为

$$U_1=-U_4=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{a}+\frac{-Q}{\sqrt{3}a}+\frac{Q}{2a}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$U_2=-U_3=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-Q}{a}+\frac{-Q}{a}+\frac{Q}{\sqrt{3}a}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-2\right)$$



$$W_{互}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_iU_i$$

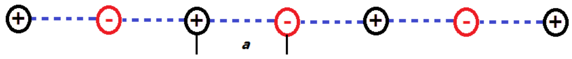
$$W_{互1}=\frac{1}{2}\left[(-Q)U_1+QU_2+(-Q)U_3+QU_4\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{a}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{7}{2}\right)$$

移到无限远处的两个电荷 $U_5=-U_6=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}$ $W_{互2}=\frac{1}{2}\left[(-Q)U_5+QU_6\right]=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{a}$

外力所做的功等于系统静电能的改变

$$A=\left(W_{互1}+W_{互2}\right)-W_{互0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{a}\left(3-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

【例49】一价正离子和负离子交错排列成一维无限长阵列，计算一个离子与其它离子的相互作用能。设相邻离子间的间距为 a。



【解】一个正离子处，所有其它正离子产生的电势为：

$$U_+=2\left[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{4a}+\frac{1}{6a}+\cdots\right)\right]=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\right)$$

一个正离子处，所有其它负离子产生的电势为：

$$U_-=2\left[\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{3a}+\frac{1}{5a}+\cdots\right)\right]=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a}\left(-1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\cdots\right)$$

故在一个正离子处，所有其它离子产生的电势为：

$$U=U_++U_-=-\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots\right)=-\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a}\ln 2$$

因此，一个正离子与所有其它离子产生的相互作用能为：

$$W_+=qU=-\frac{\ln 2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}$$

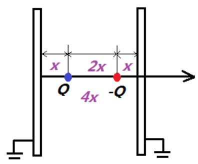
为什么没有1/2?

这里算的是一个离子，不是整个体系，没有重复计算，故没有1/2。

由于能量与电荷平方有关，故一个负离子与其它离子的相互作用能也为：

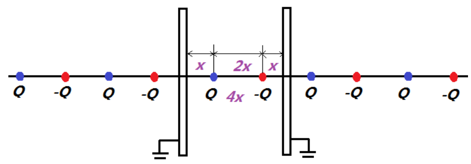
$$W_-=W_+=-\frac{\ln 2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}$$

【例50】两块无限大接地导体平面相距 $4x$，其间有2个点电荷($+Q$,$-Q$)，距离其中一个板分别为 x,$3x$. 求把这两个电荷移到很远处(它们之间相距亦很远)，需要做多大的功?



【解】其实是求体系的静电能。

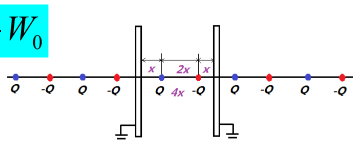
用镜像法，导体板上感应电荷的贡献由像电荷的贡献来代替。点电荷和像电荷形成的系统相当于上题的正离子和负离子交错排列的一维无限长阵列



所做的功等于系统的能量增加:

$$A=W_1-W_0$$

末态: $W_1=0$



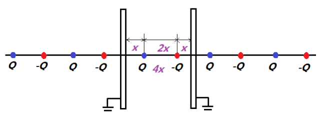
初态: $$W_0=\frac{1}{2}QU_++\frac{1}{2}(-Q)U_-$$

U_+: $+Q$ 处、所有其它电荷($-Q$ 和像电荷，不包括 $+Q$ 本身)产生的电势；

U_-: $-Q$ 处、所有其它电荷($+Q$ 和像电荷，不包括 $-Q$本身)产生的电势。

$$U_+=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{2Q}{2x}+\frac{2Q}{4x}-\frac{2Q}{6x}+\cdots\right]=\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 x}\ln 2$$

$$U_-=-U_+=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x}\ln 2$$



体系的静电能为:

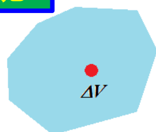
$$W_0=\frac{1}{2}QU_++\frac{1}{2}(-Q)U_-=-\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 x}\ln 2$$

把这两个电荷分别移到很远处需要做的功为: $A=0-W_0=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 x}\ln 2$

§ 2.4.2 带电体的静电能

一、单个带电体的静电能

1. 体分布电荷



把点电荷体系的相互作用能推广到连续分布的带电体系，将体电荷无限分割，并把每个电荷元 $dq=\rho_e dV$ 当作点电荷处理，有：

$$W_{互}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_iU_i \Rightarrow W_e=\frac{1}{2}\iiint_V \rho_e(\vec{r})U_1(\vec{r})dV$$

$U_1(r)$表示除体电荷元 $\rho_e(r)dV$ 外，其它所有电荷在 r 处所产生的电势。

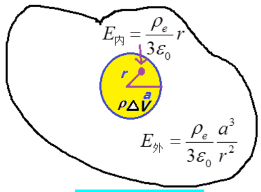
25

设$U(r)$表示所有电荷，包括电荷元$\rho_e(r)dV$，在 r 处所产生的电势， 则 $U(r)$ 和 $U_1(r)$ 的关系如何？

设dV为半径为 a的小球，电荷密度为 ρ_e，则由电荷元 $\rho_e(r)dV$ 在球体内任一点引起的电势为：

$$U'(\vec{r})=\int_r^a \vec{E}_{内}d\vec{r}+\int_a^\infty \vec{E}_{外}d\vec{r}$$

$$=\frac{\rho_e}{3\varepsilon_0}\left(\frac{3}{2}a^2-\frac{1}{2}r^2\right)$$



作为电荷元，球需要取得足够小 $a\to 0$，$r<a\to 0$ $\Rightarrow U'(\vec{r})\to 0$

即电荷元$\rho_e(r)dV$在 r 处产生的电势$U'(r)$随 ΔV 趋于零而趋于零。

26

$$U_1(\vec{r})=U(\vec{r})-U'(\vec{r})\approx U(\vec{r})$$

$\Delta V\to 0$ 时， $U(r)$ 和 $U_1(r)$ 的差别可以忽略。

所以，静电能公式可以改写为：

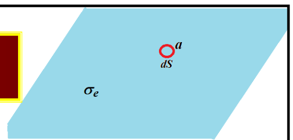
$$W_e=\frac{1}{2}\iiint_V \rho_e(\vec{r})U(\vec{r})dV$$

这就是体电荷分布的静电能公式。

$U(r)$表示所有电荷在 r 处所产生的电势。

27

2. 面分布电荷



设面电荷元为半径为 a 的圆 $dq=\sigma_e(r)dS$

面电荷元在圆心处产生的电势 [见1-4.pdf，例24]

$$U'(r)=\frac{\sigma_e(r)a}{2\varepsilon_0}\xrightarrow{a\to 0}U'(r)\to 0$$

$$U_1(\vec{r})=U(\vec{r})-U'(\vec{r})\approx U(\vec{r})$$

面电荷分布的静电能公式

$$\therefore W_e=\frac{1}{2}\iint_S \sigma_e(\vec{r})U(\vec{r})dS$$

$U(r)$表示所有电荷在 r 处所产生的电势

28

3. 线分布电荷

线电荷分布的静电能也可以由下式计算吗?

$$W_e=\frac{1}{2}\int_L \lambda_e(l)U(l)dl$$

线电荷λ的电场和电势为:

$$E(r)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

$$U'(r)=U(r)-U_1(r)\propto \ln r\xrightarrow{r\to 0}\infty$$

线电荷元 $\lambda_e(l)dl$ 在自身处产生的电势$U'(r)$ 不会随 r 趋于零而趋于零，反而会趋于无穷大！

$U(r)$和$U_1(r)$的差别不可忽略！静电能不能用上式代替!

29

进一步，线电荷分布的静电能可以由下式计算吗?

$$W_e=\frac{1}{2}\int_L \lambda_e(l)U_1(l)dl$$

回答也是否定的! 实际上，$U_1(r)$也会趋于无限大（可严格证明，但已超出本书范围）。 以至于按上式计算的W_e将为无限大。

原因是：要把电荷从无限分散状态压缩到一条几何线上，外界要做无穷大的功，这显然是办不到的。

在计算静电能时，无论半径怎样小的带电柱体都不能当作线电荷处理。

30

- 事实上，用体电荷分布的静电能公式计算点电荷的静电能时，也会出现发散问题。
- 因为要把电荷从极分散状态压缩到一个几何点上，外界需要做无穷大的功，这也是不可能的。
- 点电荷只是一种理想模型，它并非尺寸为零的几何点，而是尺寸有限、但远小于考察距离的带电体。
- 当考察距离与带电体尺寸相当时，这时的带电体就不能看作点电荷了。

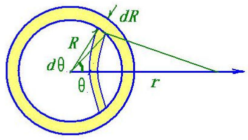
在计算静电能时，无论怎样小的带电体都不能当作点电荷处理。

31

【例51】设氢原子处于基态时，核外电荷分布为

$$\rho(r)=-\frac{q}{\pi a^3}e^{-\frac{2r}{a}}$$

式中 q 是电子的电荷量，a 是玻尔半径，r 是到核心的距离，求静电能。



【解】由高斯定理，球内电场为：

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=E\cdot 4\pi r^2=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$Q=\iiint_V \rho(r)dV=\int_0^r \rho(r)4\pi r^2dr=\int_0^r -\frac{q}{\pi a^3}e^{-\frac{2r}{a}}4\pi r^2dr$$

$$=q\left[\frac{r^2}{2a^2}e^{-\frac{2}{a}r}+\left(\frac{2r}{a}+1\right)e^{-\frac{2r}{a}}-1\right]$$

32

$$E(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[\frac{r^2}{2a^2}e^{-\frac{2}{a}r}+\left(\frac{2r}{a}+1\right)e^{-\frac{2r}{a}}-1\right]$$

$$U(r)=\int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{r}\right)e^{-2r/a}-\frac{1}{r}\right]$$

体带电体的静电能为： $W=\frac{1}{2}\iiint_V \rho(r)U(r)dV$

$$W=\frac{1}{2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty\left(-\frac{q}{\pi a^3}e^{-2r/a}\right)\left[\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{r}\right)e^{-2r/a}-\frac{1}{r}\right]4\pi r^2dr$$

$$=-\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\left[\frac{1}{a}\frac{2}{(4/a)^3}+\frac{1}{(4/a)^2}-\frac{1}{(2/a)^2}\right]$$

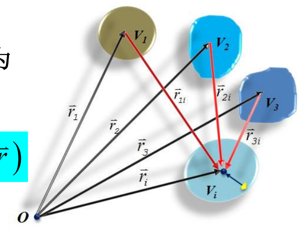
$$=\frac{5q^2}{64\pi\varepsilon_0 a}$$

33

二、多个带电体的静电能

空间的总电势可以分为两部分：

$$U(\vec{r})=U_i(\vec{r})+U^{(i)}(\vec{r})$$



- $U_i(r)$表示除第 i 个带电体外，所有其它带电体在 r 处产生的电势；
- $U^{(i)}(r)$表示第 i 个带电体在 r 处产生的电势

34

1. 体带电体和体带电体间

$$W_e=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\iiint_{V_i}\rho_e(r)U(r)dV \quad \text{总静电能}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\iiint_{V_i}\rho_e(r)U^{(i)}(r)dV+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\iiint_{V_i}\rho_e(r)U_i(r)dV$$

$U^{(i)}(r)$:第 i 个带电体在 r 处产生的电势

即 $W_{静}=W_{自}+W_{互}$

$$W_{自}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\iiint_{V_i}\rho_e(r)U^{(i)}(r)dV$$

$W_{自}$:带电体的自能

$W_{互}$:带电体的互能

$$W_{互}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\iiint_{V_i}\rho_e(r)U_i(r)dV$$

$U_i(r)$:除i 外所有其它带电体在 r 处产生的电势

35

- 计算多个带电体组成的系统的静电能时，不仅要计算带电体之间的相互作用能，还要计算每一个带电体的自能。 $W_{静}=W_{自}+W_{互}$
- 计算某个带电体的自能时，带电体不能用点电荷或线电荷近似，因为这会导致发散困难，自能将变为无穷大。
- 前面计算的点电荷体系的电场能量，实际上只计算了点电荷间的相互作用能，而不包括其自能(发散、无穷大、无法计算)。

点电荷体系 $W_{静电能(点电荷体系)}=W_{互}$

36

- 计算带电体的互能时，只要第 i 个带电体(位于 r_i 处)的尺寸远小于它和其它带电体的距离，就可当成点电荷处理。此时有：

$$U_i(\vec{r})\approx U_i(\vec{r}_i)=U_i$$

U_i 表示除第 i 个带电体外，其它带电体在 r_i 处的电势；

$$\frac{1}{2}\iiint_{V_i}\rho_e(\vec{r})U_i(\vec{r})dV\approx\frac{1}{2}U_i\iiint_{V_i}\rho_e(\vec{r})dV=\frac{1}{2}q_iU_i$$

- 当所有带电体的自身尺寸都远小于它们间的距离时，有：

$$W_{互}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\iiint_{V_i}\rho_e(r)U_i(r)dV=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_iU_i$$

与多个点电荷组成的体系一致

2. 体带电体和面带电体间

$$W_{互}=\frac{1}{2}\iiint_{V_1}\rho_1(\vec{r}_1)U_1(\vec{r}_1)dV_1+\frac{1}{2}\iint_{S_2}\sigma_2(\vec{r}_2)U_2(\vec{r}_2)dS_2$$

3. 体带电体和线带电体间

$$W_{互}=\frac{1}{2}\iiint_{V_1}\rho_1(\vec{r}_1)U_1(\vec{r}_1)dV_1+\frac{1}{2}\int_{L_2}\lambda_2(\vec{r}_2)U_2(\vec{r}_2)dl_2$$

$U_i(r)$表示除第 i 个带电体外，所有其它带电体在 r 处产生的电势；

4. 带电导体间

导体的特点：(1)电荷分布在导体表面(面电荷σ_e)；
(2) 整个导体是等势体(U_i)。

N 个带电导体组成的体系的总静电能为：

$$W_e=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\iint_{S_i}\sigma_e(\vec{r}_i)U_i(\vec{r}_i)dS_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}U_i\iint_{S_i}\sigma_e(\vec{r}_i)dS_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_iU_i$$

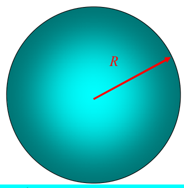
$$q_i=\iint_{S_i}\sigma_e(\vec{r}_i)dS$$

q_i、U_i第 i 个导体的电量和电势

即 $$W_e=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_iU_i$$

形式上与点电荷组的相互作用能一样

【例52】求体电荷密度为 ρ、半径为R 的均匀带电球体的自能(静电能)。



【解】由高斯定理，得：

$$\oint_S\vec{E}\cdot d\vec{S}=E4\pi r^2=\begin{cases}\dfrac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} & (r<R)\\[2ex] \dfrac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0} & (r\geq R)\end{cases}$$

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r} & (r<R)\\[2ex] \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{r} & (r\geq R)\end{cases}$$

$$U(r)=\int_r^R\vec{E}\cdot d\vec{r}+\int_R^\infty\vec{E}\cdot d\vec{r}=\frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(3R^2-r^2\right)$$

$$U(r)=\frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(3R^2-r^2\right)$$

$$W_e=\frac{1}{2}\iiint\rho(r)U(r)dV$$

$$W_e=\frac{\rho^2}{12\varepsilon_0}\int_0^R\left(3R^2-r^2\right)4\pi r^2dr$$

$$=\frac{4\pi\rho^2R^5}{15\varepsilon_0}=\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0R}$$

$$Q=\rho_e\frac{4}{3}\pi R^3$$

若带电球的半径 $R\to0$，保持 Q 不变，则 $W_e\to\infty$，即点电荷具有无穷大的自能(自能发散)!

【例53】孤立带电导体球，电量为 q，半径为 R，求其静电能。

【解】孤立导体球的电容为：$C=4\pi\varepsilon_0R$

带电量为 q 时的电势为 $U=\dfrac{q}{C}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0R}$

导体球静电能为 $W_e=\dfrac{1}{2}qU=\dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0R}$

电荷分布在球表面(导体)比电荷均匀分布在整个球体内的能量 $\dfrac{3}{5}\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0R}$ 小！

静电能与电荷分布有关！

- 电子为最小的带电体，若把电子看作点电荷则其自能将趋于无限大，在理论上造成发散困难。
- 为了避免发散困难，必须假定电子的电荷分布在一定区域中，例如分布在半径为 R_e 的球体内，此时，常把 R_e 称为电子的经典半径。
- 假设电子的能量 $W=mc^2$ 全部来自于静电能 W_e，则

$$m_e c^2 \approx \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R_e}$$

$$R_e \approx 2.8\times10^{-15}m$$ 远小于原子半径 $10^{-10}m$

43

$$\text{静电能（静电场的能量）} = \begin{cases} \text{带电体的自能} \\ + \\ \text{带电体的相互作用能(互能)} \end{cases}$$

- 点电荷体系 (没有点电荷自能概念)

静电能=点电荷间的相互作用能

- 多个带电体

静电能= $\sum_i$ 带电体自能+带电体间的互能

44

三、电介质中的静电能

- 电场中存在电介质时，除了一定分布的自由电荷外，还存在极化电荷。
- 自由电荷是可以运动、转移的电荷；
- 极化电荷是在电场作用下诱导出来的束缚电荷，其分布取决于介质的性质和形状。
- 从产生电场这一角度来看，宏观电磁理论认为自由电荷与极化电荷是等价的。
- 但在真空中建立一定的自由电荷分布，与有介质存在时、建立与该自由电荷分布相同的总电荷分布，需作的功是不同的。

45

1. 静电能

系统的静电能：在建立给定的自由电荷分布 $\rho_0(\mathbf{r})$ 的过程中，外力对系统所作的功 A。

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint \rho_0(r)U(r)dV \qquad W_e = A$$

- 然而，体系静电能并不仅与自由电荷 $\rho_0(\mathbf{r})$ 有关，与极化电荷 $\rho'(\mathbf{r})$ 也有关。
- 极化电荷的贡献体现在 $U(r)$ 上，因为 $U(r)$ 是 $\rho(\mathbf{r})$ 和 $\rho'(\mathbf{r})$ 的共同贡献。
- 式中1/2的出现是由于电场并非事先就有的，而是随着电荷的移入，逐步建立的结果

46

2. 宏观静电能

- 宏观静电能 W_{e0} 可以理解为在建立宏观电荷分布 [$\rho_0(r)$ 和 $\rho'(r)$] 过程中，系统所储存的静电能。

$$\rho(\vec r) = \rho_0(\vec r) + \rho'(\vec r)$$ 自由电荷+极化电荷

$$W_{e0} = \frac{1}{2}\iiint_{V_0} \rho_0(\vec r)U(\vec r)dV + \frac{1}{2}\iiint_{V'} \rho'(\vec r)U(\vec r)dV$$

V_0 和 V' 分别为自由电荷和极化电荷所在的空间区域

47

宏观静电能 W_{e0} $\quad W_{e0} \neq W_e \quad$ 静电能 W_e $\quad W_e = A$

$$W_{e0} \neq A$$ 系统宏观静电能的增加并不等于外界所做的功！

外界所做的功可分为两部分：

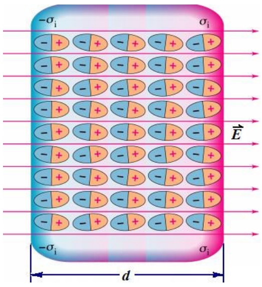
(1) 克服宏观电荷(ρ 和 ρ')间的静电力作功，转化为系统的宏观静电能 W_{e0}；

(2) 克服分子内部(位移极化)或分子之间(取向极化)的相互作用作功(极化功)，使介质极化，转化为系统中介质的极化能 $W_{极}$)。

48

3. 极化能

内部极化电荷体密度 ρ'=0，虽然对宏观静电能W_{e0}无贡献，但介质内部的分子取向发生了变化，要消耗一部分能量，该部分能量为$W_{极}$



静态电荷分布　位移或取向极化

$$W_e = W_{e0} + W_{极}$$

- 系统的静电能W_e是系统的宏观静电能W_{e0}与介质的极化能$W_{极}$之和。
- 外界做功等于系统静电能的变化。

系统的静电能W_e　$W_e = \frac{1}{2}\iiint \rho_0(r)U(r)dV$

系统的宏观静电能W_{e0}

$$W_{e0} = \frac{1}{2}\iiint_{V_0} \rho_0(\vec r)U(\vec r)dV + \frac{1}{2}\iiint_{V'} \rho'(\vec r)U(\vec r)dV$$

介质极化能　$W_{极} = W_e - W_{e0} = -\frac{1}{2}\iiint_V \rho'(\vec r)U(\vec r)dV$

- 负号表示系统(即电场)对极化电荷做正功，而不是外界克服静电力做功。
- 极化能(功)不只是与 ρ'(r)有关，也与 ρ(r)有关，表现在$U(r)$上。

三、电荷体系在外电场中的静电能

已知空间某点，若外电场在此点形成的电势为 U，则电荷 q 在外场中的电势能为：

$$W = qU$$

(注意：没有1/2)!

这种电势能本质上是电荷 q 和外电场的相互作用能(互能)。

设考察的体系为电荷密度为$\rho_1(r_1)$的体电荷，体积为V_1。外电场由电荷密度为$\rho_2(r_2)$的体电荷(体积为V_2)产生。这两个电荷体系的互能为：

$$W_{互} = \frac{1}{2}\iiint_{V_1} \rho_1(r_1)U_1(r_1)dV_1 + \frac{1}{2}\iiint_{V_2} \rho_2(r_2)U_2(r_2)dV_2$$

$U_1(r_1)$为体电荷$\rho_2(r_2)$在r_1处的电势，$U_2(r_2)$为体电荷$\rho_1(r_1)$在r_2处的电势。

$$U_1(r_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V_2}\frac{\rho_2(r_2)}{|\vec r_1 - \vec r_2|}dV_2,\quad U_2(r_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V_1}\frac{\rho_1(r_1)}{|\vec r_1 - \vec r_2|}dV_1$$

$$\frac{1}{2}\iiint_{V_1}\rho_1(r_1)U_1(r_1)dV_1 = \frac{1}{2}\iiint_{V_2}\rho_2(r_2)U_2(r_2)dV_2 = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\iiint_{V_1}\iiint_{V_2}\frac{\rho_1(r_1)\rho_2(r_2)}{|\vec r_1 - \vec r_2|}dV_1 dV_2$$

$$\therefore W_{互} = \iiint_{V_1}\rho_1(r)U_1(r)dV = \iiint_{V_2}\rho_2(r)U_2(r)dV$$

这里省略了r和dV的下标，因为积分区间已分别用V_1、V_2限定。

作简记：$\rho_1(r_1)\to\rho(r)$，$V_1\to V$，$U_1(r_1)\to U(r)$

$$W_e = W_{互} = \iiint_V \rho(r)U(r)dV$$

$U(r)$：外场产生的电势

- 电荷体系在外电场中的静电能(电势能)本质上是一种相互作用能；
- 它等于电荷体系各个部分在外电场中静电能的叠加

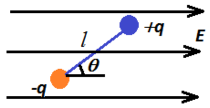
点电荷体系在外场中的静电能：

$$W_e = \sum_{i=1}^{N} q_i U(r_i)$$

$U(r_i)$：外场在点电荷q_i处的电势，不是其他点电荷在该点的电势。

- 电荷体系在外电场中的静电能属于相互作用能，它不包括电荷体系本身的自能。
- 这一静电能由电荷体系与外场之间的相互作用决定，与各自内部的相互作用无关。
- 对电荷分布固定的电荷体系，在给定外场中的运动，这时电荷体系的自能不变，电荷体系的整体运动只是改变它在外电场中的静电能。

【例54】求电偶极子p在均匀外场E中的静电能，电偶极矩与外场场强间的夹角为θ。



【解】 $W_e=\sum_{i=1}^{N}q_iU(r_i)$ 没有1/2

$=(+q)U_{+q}+(-q)U_{-q}$

$=-qEl\cos\theta=-pE\cos\theta$

U_{+q}、U_{-q}是外场E在$+q$、$-q$处引起的电势

$\vec{E}=-\nabla U$

写成矢量形式，有： $W=-\vec{p}\cdot\vec{E}$

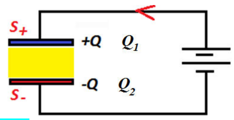
电偶极子 p 在均匀外场 E 中的静电能

§ 2.4.3 电容器的储能

1. 从外界做功计算电容器的静电能

充电过程中，电源将电荷dq从电容器正极板搬运到负极板时，电源所做的功为

$dA=Udq=\frac{q}{C}dq$



q: $0\to Q$，电源所做的功 $A=\int dA=\int_0^Q\frac{q}{C}dq=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ $C=\varepsilon_r C_0$

电容器的静电能(储能)

$W_e=A=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}QU$

有、无介质时，C不相同

带相同电量的电容器的静电能还与介质相关。

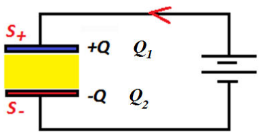
2. 从两带电导体计算电容器的静电能

$W_e=\frac{1}{2}\iint_S\sigma_e(\vec{r})U(\vec{r})dS$

$W_e=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\iint_{S_i}\sigma_e U_i dS_i$

$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}QU_i$

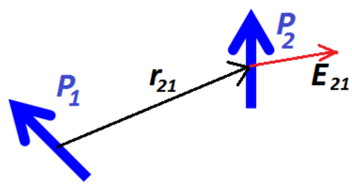
$=\frac{1}{2}QU_1+\frac{1}{2}(-Q)U_2$ 令 $U=U_1-U_2$



两极板上电量为+Q, -Q, 电势为U1、U2

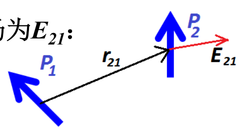
$W_e==\frac{1}{2}QU=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}CU^2$ 电容器的静电能(储能)

【例55】计算两个电偶极子的相互作用能。设两个电偶极子的电偶极矩分别为p_1和p_2，相对位置由r_{21}决定。



【解】设p_1在p_2处产生的电场为E_{21}：

$E_{21}=\frac{3(\vec{p}_1\cdot\vec{e}_{r21})\vec{e}_{r21}-\vec{p}_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}^3}$



p_2在电场E_{21}(由p_1产生)中的静电能为: $W=-\vec{p}\cdot\vec{E}$

$W_{21}=-\vec{p}_2\cdot\vec{E}_{21}=-\frac{3(\vec{p}_1\cdot\vec{e}_{r21})(\vec{p}_2\cdot\vec{e}_{r21})-\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}^3}$

由于对称性，交换p_1与p_2结果不变，即与p_1处在p_2产生的电场中的能量相等：

$$W_{21}=W_{12}$$

因此，两电偶极子的相互作用能为：

$W=\frac{1}{2}(W_{21}+W_{12})=-\frac{1}{2}(\vec{p}_1\cdot\vec{E}_{12}+\vec{p}_2\vec{E}_{21})$

类似地，N个电偶极子的相互作用能为：

$$W=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i\cdot\vec{E}_i$$ 为什么有1/2?

E_i为除p_i外，其它电偶极子在p_i处产生的电场强度

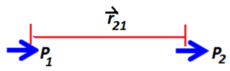
讨论：

$$W_{21}=W_{12}=-\frac{3(\vec{p}_1\cdot\vec{e}_{r21})(\vec{p}_2\cdot\vec{e}_{r21})-\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}^3}$$

- 两偶极子间的相互作用能不仅取决于两偶极子间的相对距离 r_{21}，还取决r_{21}、p_1、p_2三者间的相对取向；
- 故两偶极子间的相互作用力不是有心力；
- 若不考虑偶极子自身的转动，只考虑偶极子作为整体的运动，则在偶极子相互作用下的运动，其角动量不守恒。

61

几个特例：(a) p_1和p_2沿它们的连线



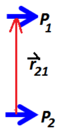
$$\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2=p_1p_2$$
$$\vec{p}_1\cdot\vec{e}_{r21}=p_1$$
$$\vec{p}_2\cdot\vec{e}_{r21}=p_2$$

$$W_{21}=-\vec{p}_2\cdot\vec{E}_{21}$$
$$=-\frac{3(\vec{p}_1\cdot\vec{e}_{r21})(\vec{p}_2\cdot\vec{e}_{r21})-\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}^3}$$
$$=-\frac{2p_1p_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}^3}$$

$W_{21}<0$，表明两电偶极子相互吸引

62

(b) p_1和p_2平行，但与连线r_{21}垂直



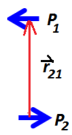
$$\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2=p_1p_2$$
$$\vec{p}_1\cdot\vec{e}_{r21}=\vec{p}_2\cdot\vec{e}_{r21}=0$$

$$W_{21}=-\vec{p}_2\cdot\vec{E}_{21}$$
$$=-\frac{3(\vec{p}_1\cdot\vec{e}_{r21})(\vec{p}_2\cdot\vec{e}_{r21})-\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}^3}$$
$$=\frac{p_1p_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}^3}$$

$W_{21}>0$，表明两电偶极子相互排斥

63

(c) p_1和p_2反平行，但与连线r_{21}垂直。



$$\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2=-p_1p_2$$
$$\vec{p}_1\cdot\vec{e}_{r21}=\vec{p}_2\cdot\vec{e}_{r21}=0$$

$$W_{21}=-\vec{p}_2\cdot\vec{E}_{21}$$

$W_{21}<0$，表明两电偶极子相互吸引

$$=-\frac{3(\vec{p}_1\cdot\vec{e}_{r21})(\vec{p}_2\cdot\vec{e}_{r21})-\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}^3}=-\frac{p_1p_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}^3}$$

两偶极子的相互作用(吸引、排斥)与偶极子的取向、排列强烈相关！

64