

## 上节课主要内容

闭合载流线圈在磁场中受的力和力矩

$$\vec{F} = (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B} \quad \vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \quad \vec{m} = I\vec{S} = \frac{I}{2} \oint_L \vec{r} \times d\vec{r}$$

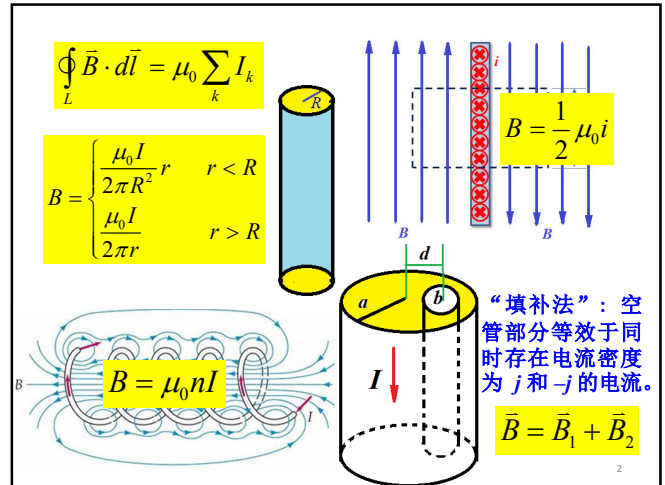
均匀磁场,  $F=0$  磁矩

磁场高斯定理  $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$  无源

安培环路定理  $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k$  有旋

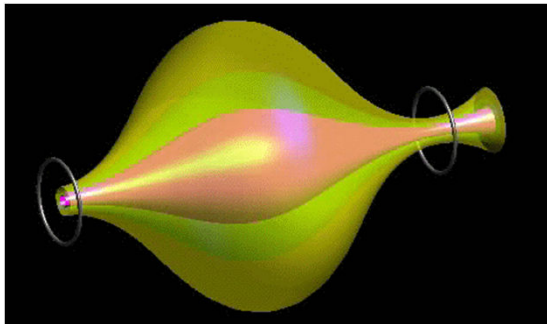
$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

1



2

## § 4-3 带电粒子在磁场中的运动



3

## § 4.4.1 带电粒子在均匀磁场中的运动

### 一、洛伦兹力

- 1826年, 安培给出了电流元之间作用力;
- 1867年, Maxwell方程组用矢势  $A$  和标势  $\varphi$  表示;
- 1885年, 赫兹和亥维赛简化Maxwell方程, 用  $E$  和  $B$  表示;
- 1889年, 亥维赛在论文中给出带电粒子在磁场中的力:

$$F = \mu_0 q V u H$$

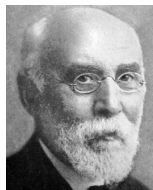
4

- 1881年, J. J. Thomson 给出了电荷在磁场中的作用力:

$$\vec{F} = \frac{q}{2} \vec{v} \times \vec{B}$$

- 洛伦兹认为赫兹铲除原麦克斯韦方程组中的势是完全必要的, 但是简化后的方程还不能解释电磁场中的电荷运动。他在1892年的论文中结合麦克斯韦的电磁场理论和克劳修斯的电动力学, 推导出电荷在场中受力的公式, 即著名的洛伦兹公式

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$



Hendrik Antoon Lorentz  
(1853-1928)

5

## 从安培力到洛伦兹力

电流元  $Idl$  在磁场  $B$  中的安培力为:

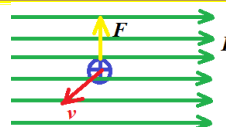
$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

电流是电荷的定向运动引起的。

安培力的实质是电荷在磁场中运动受力的宏观表现!

### (a) 单个带电粒子运动

$$Id\vec{l} = \frac{q}{t} d\vec{l} = q\vec{v}$$



故带电粒子  $q$  在磁场  $B$  中受力:

$$\therefore \vec{f} = Id\vec{l} \times \vec{B} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

6

**(b)一段导体中粒子运动**

导体中的电流  $I=nqvS$ ,  $S$  为电流元的截面积:

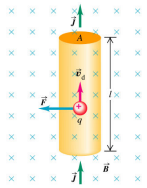
$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} = nqvS d\vec{l} \times \vec{B}$$

该电流元中, 运动的带电粒子数为:  $dN=ndV=nSdl$ , 所以每个运动的带电粒子受力为:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dN} = \frac{nqvS d\vec{l} \times \vec{B}}{nSdl} = \frac{qv d\vec{l} \times \vec{B}}{dl}$$

粒子带正电,  $v$  与  $d\vec{l}$  同向; 粒子带负电,  $v$  与  $d\vec{l}$  反向。故上式可写成:

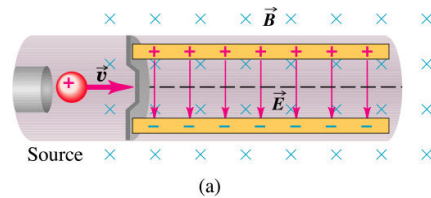
$$\vec{f} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad \text{该力是安培力的微观形式}$$



带电粒子在**磁场和电场**都存在的空间受到的作用力为:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

该式也称**洛伦兹力**。

**二、带电粒子在均匀磁场中的运动****1. 洛伦兹力不做功**

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{F} \perp \vec{B}, \vec{F} \perp \vec{v}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = (q\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = 0$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

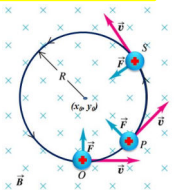
①  $F \perp v$ , 洛伦兹力不对粒子做功

② 粒子在磁场中的动能守恒

③ 粒子的运动速率保持常数

④ 粒子的速度方向可变化

$$\frac{1}{2} m v^2 = C \Rightarrow |v| = C$$

**2. 带电粒子在均匀磁场中运动**

粒子的运动方程为  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$

对于均匀磁场,  $B$  为常数, 设**磁场沿  $z$  方向**

$$\vec{F} \perp \vec{B}$$

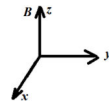
$$\vec{B} = B\vec{e}_z \Rightarrow \begin{cases} F_z = 0 \\ v_z = \text{const} \end{cases} \quad \text{粒子在平行于磁场方向的运动速度 } v_z \text{ 保持不变}$$

带电粒子在  $xy$  平面上运动

$$\begin{aligned} F_x &= qv_y \times B_z \\ F_y &= -qv_x \times B_z \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{F_x}{m} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m} v_y B \\ \frac{F_y}{m} = \frac{dv_y}{dt} = -\frac{q}{m} v_x B \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$



(1)式求导并  
将(2)式代入

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\frac{q^2 B^2}{m^2} v_x = -\omega^2 v_x$$

$$\omega = \frac{qB}{m}$$

回旋角频率

解为:

$$v_x = v_{\perp} \cos(\omega t + \varphi)$$

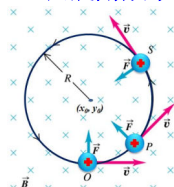
类似可得

$$v_y = -v_{\perp} \sin(\omega t + \varphi)$$

$\varphi$ : 初始位相, 由初始条件决定。

$v_{\perp}$ : 垂直磁场方向的速度分量。由于总速度不变, 平行磁场方向的速度分量  $v_z$  也不变, 所以  $v_{\perp}$  是常数。

$$v_{\perp} = \sqrt{v^2 - v_z^2}$$



进一步积分, 可解出粒子运动方程

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{v_{\perp}}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) \\ y = y_0 + \frac{v_{\perp}}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

带电粒子在  $xy$  平面上作**圆周运动**

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (v_{\perp} / \omega)^2$$

其**回旋半径**为:

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \frac{v_{\perp}}{\omega} = \frac{mv_{\perp}}{qB}$$

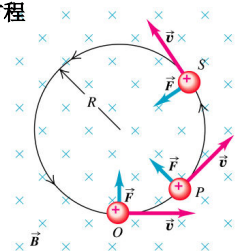
$$\omega = \frac{qB}{m}$$

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB}$$

周期为:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$$

$T$  与粒子速度无关, 仅取决于磁感应强度  $B$  及荷质比  $(q/m)$



相对论情况下，粒子质量随速度增加而增加  $m = \gamma m_0$

粒子回旋半径  $R = \frac{\gamma m_0 v_{\perp}}{qB}$  速度越大，回旋半径越大  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

回旋频率  $\omega = \frac{qB}{\gamma m_0}$  速度增加，回旋频率减小

周期  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\gamma m_0}{qB}$  速度增加，周期变长

现代的粒子加速器产生的粒子绝大多数达到了相对论区域，因此使用粒子在磁场中运动的周期和半径是要注意使用相对论情况下的结果

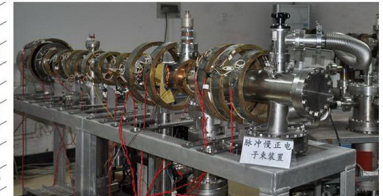
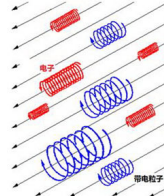
13

### 任意方向的均匀磁场

磁感应强度  $B$  与带电粒子速度  $v$  夹角为  $\theta$ ， $v$  可分解为垂直于  $B$  和平行于  $B$  的两个分量：

$$\begin{cases} v_{\parallel} = v \cos \theta \\ v_{\perp} = v \sin \theta \end{cases}$$

$v_{\perp}$  分量做圆周运动  
 $v_{\parallel}$  分量做匀速直线运动  
合成的结果为螺旋运动



用螺线管输运正电子的装置(科大固体物理实验室)

### 粒子在均匀磁场中运动时的能量守恒

带电粒子在电场和磁场中的受力  $\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$   $\vec{p} = m\vec{v}$

对高速运动，利用狭义相对论中的能量-动量方程：

此处  $E$  为能量  $E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$   $\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = 0$

上式两边对时间求导：

$$E \frac{dE}{dt} = c^2 \vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = c^2 m \vec{v} \cdot q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = c^2 m q \vec{v} \cdot \vec{E}$$

当电场  $\vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0, E = \text{const}$   $E$  为能量

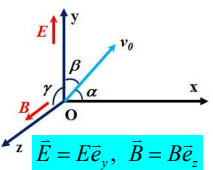
粒子在无电场、只有均匀磁场的空间运动时，总能量是守恒量！

15

### 三、带电粒子在均匀电磁场中的运动

#### 带电粒子在相互垂直的均匀电场和磁场中运动

空间存在相互垂直的匀强电场  $E$  和匀强磁场  $B$ ，向这个区域发射一质量为  $m$ 、电荷为  $q(>0)$  的带电粒子。取入射点为坐标原点，带电粒子在入射点处的初速度为



$$\vec{v}_0 = v_0 \cos \alpha \vec{e}_x + v_0 \cos \beta \vec{e}_y + v_0 \cos \gamma \vec{e}_z$$

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  是方向余弦  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

16

带电粒子受到的作用力为

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$F_x = qBv_y = m \frac{dv_x}{dt} \quad (1)$$

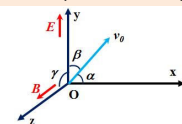
$$F_y = qE - qBv_x = m \frac{dv_y}{dt} \quad (2)$$

$$F_z = 0 = m \frac{dv_z}{dt} \quad (3)$$

$$\vec{F}_E = qE \vec{e}_y, \quad \vec{F}_B = qBv_y \vec{e}_x - qBv_x \vec{e}_y$$

$$\vec{E} = E \vec{e}_y$$

$$\vec{B} = B \vec{e}_z$$



第(2)式两边对  $t$  求导，再将(1)式代入，可得

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} + \left( \frac{qB}{m} \right)^2 v_y = 0$$

$$\omega = qB/m$$

$$\begin{cases} v_y = v_{\perp} \cos(\omega t + \varphi) \\ v_x = \frac{E}{B} + v_{\perp} \sin(\omega t + \varphi) \\ v_z = v_{\parallel} = v_0 \cos \gamma \end{cases}$$

17

用  $t=0$  时的初始速度值，可得到：

$$\begin{aligned} v_{\perp} &= \sqrt{(v_0 \cos \alpha - E/B)^2 + v_0^2 \cos^2 \beta} \\ \sin \varphi &= \frac{v_0 \cos \alpha - E/B}{v_{\perp}} \\ \cos \varphi &= \frac{v_0 \cos \beta}{v_{\perp}} \end{aligned}$$

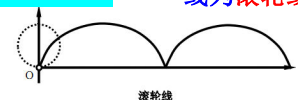
对速度的三个分量再积分，得到粒子的运动轨迹：

$$x = x_0 + \frac{E}{B} t - \frac{v_{\perp}}{\omega} [\cos(\omega t + \varphi) - \cos \varphi]$$

$$y = y_0 + \frac{v_{\perp}}{\omega} [\sin(\omega t + \varphi) - \sin \varphi]$$

$$z = z_0 + v_0 t \cos \gamma$$

带电粒子在相互垂直的电磁场中的运动曲线为滚轮线。



滚轮线

18

引进漂移速度

$$v_E = \frac{E}{B} \quad \text{or} \quad \vec{v}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$$

前面的运动方程就是粒子轨迹中心在电场作用下发生漂移。

粒子回旋中心从初速位置 $(x_0, y_0, z_0)$ 沿轨道 $(x_0 + v_E t, y_0, z_0 + v_z t)$ 以速度 $(v_E, 0, v_z)$ 运动!

除电漂移外,重力和其他非电力也可引起粒子漂移,非电力漂移引起的漂移速度为:

$$\vec{v}_F = \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{qB^2}$$

重力漂移速度

$$\vec{v}_g = \frac{m\vec{g} \times \vec{B}}{qB^2}$$

19

## § 4.4.2 带电粒子在非均匀磁场中的运动

### 一、带电粒子在轴对称缓变磁场中的磁矩守恒

取柱坐标系 $(r, \varphi, z)$ , 磁场相对 $z$ 轴对称, 则

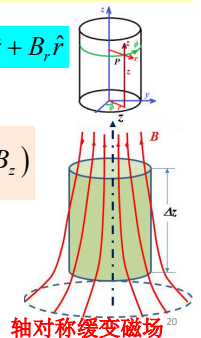
$$B_\phi = 0 \quad \vec{B} = B_z \hat{z} + B_r \hat{r}$$

$$\vec{v} = v_{||} \hat{z} + v_\perp \hat{\phi}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}(B_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(B_z)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \downarrow \quad B_\phi = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rB_r) = -\frac{\partial}{\partial z}(B_z)$$



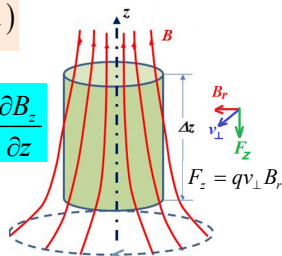
轴对称缓变磁场

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rB_r) = -\frac{\partial}{\partial z}(B_z)$$

$B_z$  随  $r$  缓变(忽略  $B_z$  随  $r$  的变化)

$$rB_r = -\int r \frac{\partial}{\partial z}(B_z) dr = -\frac{r^2}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$B_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$



由于  $B_r$  的出现, 且  $B \perp v_\perp$ , 粒子将受到  $z$  方向上的洛伦兹力  $F_z$ , 该力由强磁场区指向弱磁场区。沿  $z$  方向粒子的运动方程为:

$$F_z = ma_z = m \frac{dv_z}{dt} = qv_\perp B_r = -qv_\perp \frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

21

由上式得:  $\frac{dv_z}{dt} = -\frac{qv_\perp r}{2m} \frac{\partial B_z}{\partial z}$   $r = \frac{v_\perp m}{qB}$   $r$  为粒子的回旋半径

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{v_\perp^2}{2B} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$\frac{dB_z}{dt} = \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{dz}{dt} = v_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

用  $mv_z$  乘上式两边

$$mv_z \frac{dv_z}{dt} = -mv_z \frac{v_\perp^2}{2B} \frac{\partial B_z}{\partial z} = -m \frac{v_\perp^2}{2B} \left( v_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) = -m \frac{v_\perp^2}{2B} \left( \frac{dB_z}{dt} \right)$$

$$\text{所以 } \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv_z^2 \right) = -\frac{mv_\perp^2}{2B} \frac{dB_z}{dt} \quad \text{Z轴上 } B=B_z$$

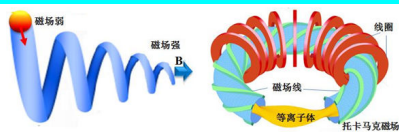
22

带电粒子绕磁场的快速回旋, 形成一圆电流环, 该电流环的磁矩称为粒子的(回旋)磁矩  $\mu$ , 则

$$\mu = IS = \frac{q}{T} \pi r^2 = \frac{1}{2} \frac{mv_\perp^2}{B} \quad T = \frac{2\pi m}{qB} \quad r = \frac{v_\perp m}{qB}$$

将  $\mu$  代入前式可得

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv_z^2 \right) = -m \frac{v_\perp^2}{2B} \frac{dB}{dt} = -\mu \frac{dB}{dt}$$



23

粒子的动能是守恒量, 即  $\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv_z^2 + \frac{1}{2} mv_\perp^2 \right) = 0$

$$\text{粒子的回旋磁矩 } \mu = \frac{1}{2} \frac{mv_\perp^2}{B}$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv_z^2 \right) = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv_\perp^2 \right) = -\frac{d}{dt} (\mu B) = -B \frac{d\mu}{dt} - \mu \frac{dB}{dt}$$

$$\text{又前面已经有 } \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv_z^2 \right) = -\mu \frac{dB}{dt}$$

$$\therefore \frac{d\mu}{dt} \equiv 0$$

$\mu = \text{const}$  带电粒子在缓变磁场中(回旋)磁矩守恒!

$$\mu = IS$$

24

$$R = \frac{v_{\perp} m}{qB}$$

$$\mu = \frac{1}{2} m \frac{v_{\perp}^2}{B} = \text{const}$$

$$R = \sqrt{\frac{2\mu m}{q^2 B}}$$

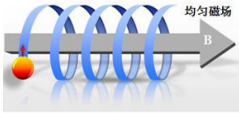
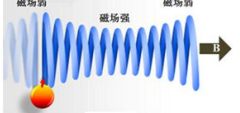
回旋半径

$$h = v_z T = \frac{2\pi m v_z}{qB}$$

螺距

$$\therefore B \uparrow \Rightarrow \begin{cases} v_{\perp} \uparrow, v_z \downarrow \\ R \downarrow, h \downarrow \end{cases}$$

带电粒子从弱磁场进入强磁场区域时，回旋半径和螺距都减少

25

## 二、应用举例

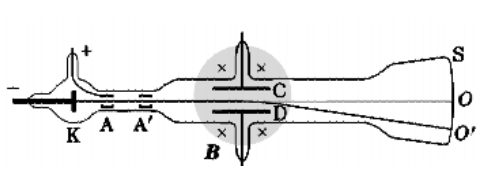
1. 荷质比的测定
2. 磁镜
3. 磁聚焦
4. 回旋加速器
5. 等离子体的磁约束

26

### 1. 荷质比的测定

- ✦ 1897年, *J. J. Thomson*通过电场和磁场对阴极射线的作用, 得出**阴极射线不是以太, 而是物质粒子的结论**, 并测出了这些粒子的**荷质比( $q/m$ )**。发现该荷质比比氢离子的荷质比大1000倍, 说明这种带电粒子比原子更小, **由此发现了电子**;
- ✦ 1909年, *Milikan*发现了**电子的量子化**—各种电荷的电量总是某一个数值的**整数倍 ( $Q=Ne$ )**。
- ✦ 1904年, *Kaufmann*发现荷质比随速度变化, 随后确定了电荷不随速度变化, 而是**质量随速度变化**, 为**狭义相对论**提供了重要的实验基础。

27



✦ 原理: 磁力和电力平衡

$qE = qvB$

$v = E / B$

$R = \frac{mv}{qB}$

$$\frac{q}{m} = \frac{v}{RB} = \frac{E}{RB^2} = 1.759 \times 10^{11} \text{ C / Kg}$$

28

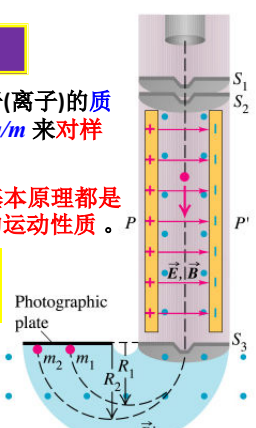
### 质谱仪

- ✦ 质谱仪是通过测量电离原子(离子)的**质量  $m$  或电荷与质量的比值  $q/m$**  来**对样品成分进行分析**。
- ✦ 实现质谱仪有多种方案, **基本原理都是利用带电粒子在电磁场中的运动性质**。

$R = \frac{v_{\perp}}{\omega} = \frac{v_{\perp} m}{qB}$

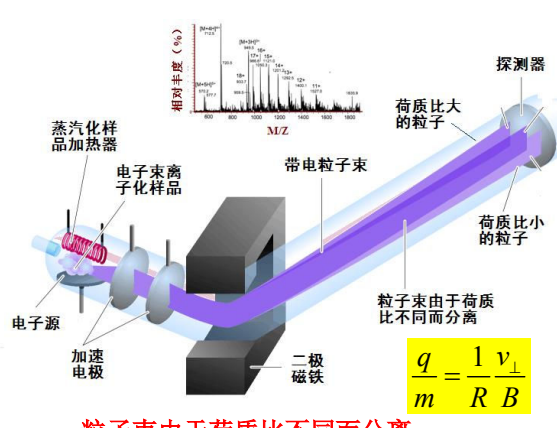
$\frac{q}{m} = \frac{v_{\perp}}{RB}$

由测量所得  $R$  可得带电粒子的**荷质比**, 并可利用它来**分离同位素, 分析丰度**。



丰度: 体系中被研究元素的相对含量, 用质量百分比表示。

29



粒子束由于荷质比不同而分离

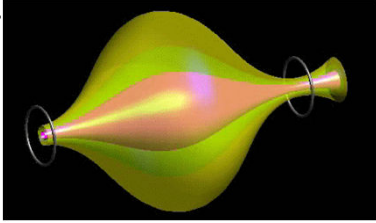
$$\frac{q}{m} = \frac{1}{R} \frac{v_{\perp}}{B}$$

30



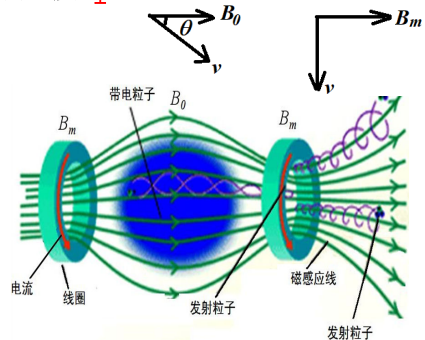
## 2. 磁 镜

- 磁镜指具有**两端强、中间弱**的磁场位形的装置
- 最简单的磁镜由两个**电流方向相同的线圈**组成，当两组线圈距离较大时，中间区域的磁场较小，中间磁感应线将出现鼓出的形状，这种磁场称为磁镜。



31

设最弱处中间部分的磁感应强度为  $B_0$ ，粒子在该处运动的速度与  $B_0$  的夹角为  $\theta$ ，设粒子达到磁场最强处  $B_m$  时，粒子速度的平行磁场分量  $v_{\parallel}$  恰好为 0，即该处粒子的速度  $v_{\perp} = v$



32

轴对称缓变磁场下**磁矩守恒**：

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{mv_{\perp}^2}{B}$$

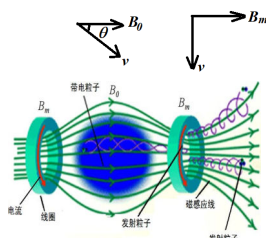
$$\mu = \frac{\frac{1}{2} mv^2 \sin^2 \theta}{B_0} = \frac{\frac{1}{2} mv^2}{B_m}$$

$$\sin \theta_m = \sqrt{\frac{B_0}{B_m}} = \sqrt{\frac{1}{R_m}}$$

$$R_m = \frac{B_m}{B_0}$$

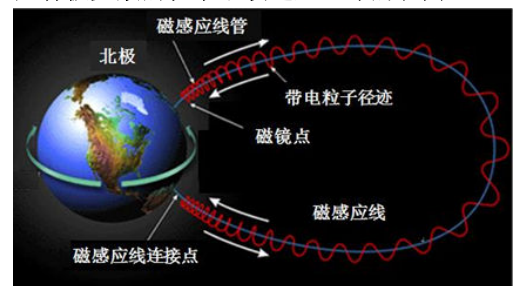
$R_m$  为磁镜比  
(不是半径)

$\theta < \theta_m$  的粒子将穿过磁镜而损失掉，只有  $\theta > \theta_m$  的粒子将被约束在磁镜中，这些粒子永远不能从磁镜中逃逸出去。



33

- 地球的磁场就是一个天然的磁镜捕捉器。宇宙射线中各种粒子束进入到地磁场区域时，一部分粒子将被地磁场形成的磁镜所捕获，只有极少数的粒子继续进入地球的表面。

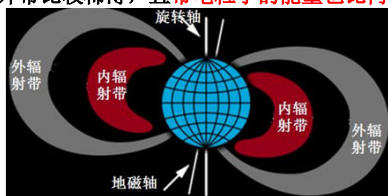


34

- 地球表面上空有两条主要的粒子带：电子带和质子带，这些粒子带被称为**范阿伦(Van Allen)带**。

- 内辐射带**的高度在1~2个地球半径之间，范围限于磁纬度 $\pm 40^\circ$ 之间，东西半球不对称；该辐射带内含有**能量为50 MeV的质子和能量大于30 MeV的电子**。

- 外辐射带**的高度在3~4个地球半径之间，起始高度为13000~19000 Km，厚约6000Km，范围可延伸到磁纬度 $50^\circ \sim 60^\circ$ ，外带比较稀薄，且**带电粒子的能量也比内辐射带小**。



35

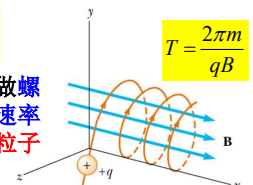
## 3. 磁聚焦

- 利用带电粒子在均匀磁场中做**螺旋运动**、及**回旋周期与粒子速率无关**的特性，可实现对**带电粒子束的聚焦**。

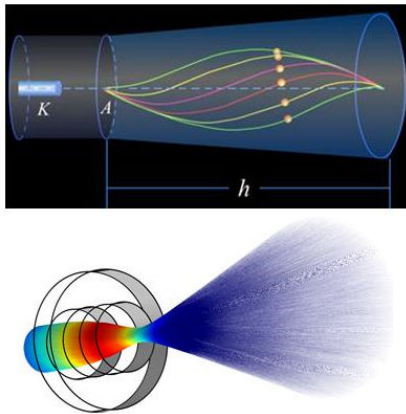
- 一般粒子束成细锥状，粒子速率几乎相等，但**方向略有差别**。若不采取措施，粒子束在运动过程中会逐渐**发散**。

- 当沿粒子束运动方向加上一**均匀磁场**时，所有粒子都绕磁感应线做**螺旋运动**，且**回旋周期相等**。

- 通常粒子束锥角很小，所有粒子的  $v_{\parallel}$  几乎相等。经过一个回旋周期后，全部粒子沿磁场方向走过同样距离  $h = 2\pi m v_{\parallel} / (qB)$  之后又重新汇聚于一点。



36



$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

$$R = \frac{v_{\perp} m}{qB}$$

$$d = v_{\parallel} T$$

磁聚焦广泛应用于电真空器件中对电子束的聚焦

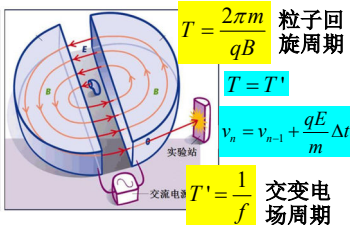
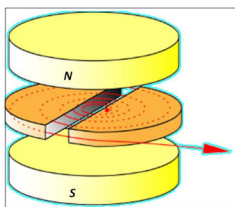
37

## 4. 回旋加速器

- 1929年, 美国科学家劳伦斯提出了能够加速带电粒子的装置(“原子击破器”), 后来被称为**回旋加速器**。
- 1932年建成世界第一台回旋加速器, 直径只有**27厘米**, 可以拿在手中, 能量可达**1 MeV**并开始运行。
- 40年代初, 加速器的能量达到**40 MeV**, 远远超过了天然放射源的能量。可用于加速**质子、 $\alpha$ 粒子和氦核等带电粒子**。由此发现了许多新的核反应, 产生了几百种稳定的和放射性的同位素。
- 由于在回旋加速器及其应用技术方面的成就, 劳伦斯获得**1939年度诺贝尔物理学奖**。



38



$$T = \frac{2\pi m}{qB} \quad \text{粒子回旋周期}$$

$$T = T'$$

$$v_n = v_{n-1} + \frac{qE}{m} \Delta t$$

$$T' = \frac{1}{f} \quad \text{交变电场周期}$$

- 回旋加速器的主要部分为**两个D形盒**, 一均匀磁场 **$B$** 垂直于D形盒的底面, 在两个D形盒间加交变电压, 在盒间的缝隙处产生交变电场 **$E$** 。
- 磁场作用下, 带电粒子做圆周运动, 在非相对论近似下, 粒子运动周期 **$T$** 与粒子的速率、回旋半径无关。
- 调节交变电场的周期 **$T'$** , 使之等于粒子回旋周期 **$T$** , 则带电粒子每次经过缝隙时都会受到该电场的加速。

39

- 当 **$v \sim c$** 时, 固定的交变电场周期不能保证D形盒间隙总使粒子加速, 为了使之与 **$T$** 同步, 需要使**交变电场与粒子回旋运动在时间上同步**, 这类加速器称为**同步回旋加速器**。

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$m = \gamma m_0$$

$$T = \frac{2\pi \gamma m_0}{qB}$$

$$R = \frac{\gamma m_0 v_{\perp}}{qB}$$

$$v \uparrow \Rightarrow \gamma \uparrow \Rightarrow m \uparrow, T \uparrow, R \uparrow$$



40

- 随着粒子速度的增加, 还可**通过增加磁场 **$B$**** , 以保持回旋半径 **$R$** 增加有限。经过这种改进后的回旋加速器可加速质子到**数百 MeV**。

$$R = \frac{\gamma m_0 v_{\perp}}{qB}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{q^2 B^2 R^2}{2m}$$

- 对同样动能的粒子, 质量越小则速度越大, 相对论效应越明显, 因此**回旋加速器适合加速重粒子**。
- 半径 **$R$** 越大, 相邻轨道半径的增值越小,  $\Delta R \propto 1/R$ ;
- 带电粒子做加速运动都会产生电磁辐射, 匀速圆周运动是一种加速运动, 它产生的辐射称为**回旋同步辐射**, 是回旋加速器中最主要的能量损失机制, 使得被加速的粒子能量受到限制。

41

- 回旋加速器可加速的最大速度和动能分别为:

$$v_{\max} = \frac{qBR}{m}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{q^2 B^2 R^2}{2m}$$

频率

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}$$

例如, 美国匹兹堡大学有一回旋加速器, 振荡频率 **$f$** 为 **$1.2 \times 10^7$  Hz**, D形盒的半径为**21 英寸**, 则加速氘所需的磁场

$$B = \frac{2\pi f m}{q} = 1.6 (Wb / m^2)$$

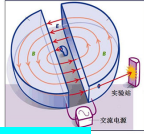
动能为

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{q^2 B^2 R^2}{2m} = 17 (MeV)$$

42

【例11】一回旋加速器D形电极圆周的最大半径为60 cm，用它来加速质量为  $1.67 \times 10^{-27}$  kg、电荷量为  $1.6 \times 10^{-19}$  C的质子，两D形电极间的距离为1.0 cm，加速电压为  $2 \times 10^4$  V，其间电场是均匀的，求将质子从静止加速到4.0 MeV所需的时间。

【解】带电粒子在回旋加速器中的运动可分解为两部分：(1) D形盒内的匀速圆周运动，速率不变。(2) 盒间缝隙处在电场下的加速直线运动，每次增加动能  $qU$ 。



获得  $E_K$  动能需经过盒缝隙加速的次数为： $n = E_K / qU$

每次经过盒缝隙时的加速度为： $a = F / m = qE / m = qU / dm$

匀加速直线运动的总距离为： $S = nd = \frac{1}{2} at_1^2 = \frac{1}{2} \frac{qU}{dm} t_1^2$

经过盒缝隙的总时间  $t_1$  为： $t_1 = d \sqrt{\frac{2nm}{qU}} = \frac{d}{qU} \sqrt{2mE_K}$

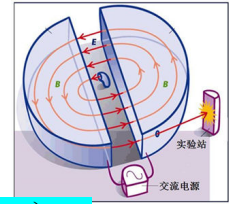
43

D形盒内匀速圆周运动的周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$$

$$F = qvB = m \frac{v^2}{R}$$

$$B = \frac{mv}{qR} = \frac{\sqrt{2mE_K}}{qR}$$



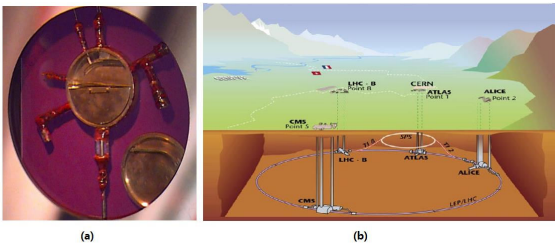
粒子在盒间缝隙加速  $n$  次，则在半圆的D形盒中圆周运动  $n-1$  次

$$t_2 = (n-1) \frac{T}{2} = (n-1) \frac{\pi m}{qB} = \left( \frac{E_K}{qU} - 1 \right) \frac{\pi m}{qB}$$

$$t = t_1 + t_2 = \dots$$

44

世界上最小的回旋加速器 **10cm**

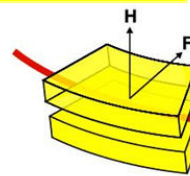


世界上最大的回旋加速器：CERN的强子对撞机(LHC)，横跨法国和瑞士边界，周长**达27 Km**。加速质子和反质子能量**达7 TeV**，它不是回旋加速器，而是让两束质子运行在环形轨道上，发生碰撞，产生各种新粒子，正反质子对撞的能量达**14 TeV (1 TeV=10<sup>6</sup> MeV)**

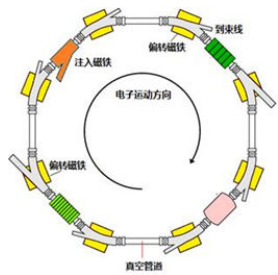
45

## 5. 二极磁铁和四极磁铁

### 二极磁铁



两个磁极组成，磁场近似垂直于磁铁表面



粒子加速器中，对带电粒子束进行方向改变的磁铁主要是**二极磁铁**；二极磁铁又称为**偏转磁铁**，可以把带电粒子束**偏转**到某个特定的区域。

46

环形加速器束流线上通常有许多二级磁铁。

二极磁铁还可以做**动量分析器**使用，这是由于不同动量  $p$  的粒子在偏转磁铁的磁场中有不同的偏转半径。

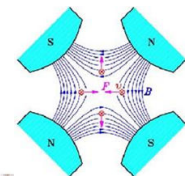
$$F = m \frac{v^2}{R} = qvB \quad \Rightarrow \quad \frac{mv}{R} = \frac{p}{R} = qB$$

$$p \propto R \quad \leftarrow \quad p = qBR$$

动量分析器

47

### 四极磁铁



四极磁铁由**四个磁极交错放置**，主要功能是对**带电粒子束聚焦**



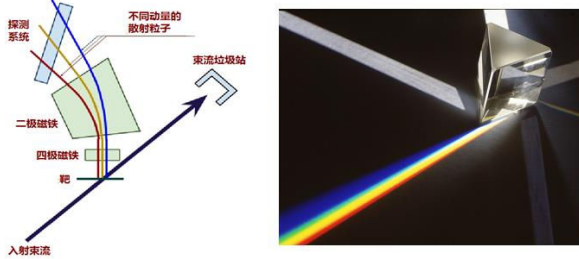
带电粒子束通过中心时，洛伦兹力的作用会使粒子束在一个方向上向中心运动(**聚束**)，另一个方向上离开中心(**散束**)。

为了得到高质量的聚束效果，需在粒子束线上**放置多组四极磁铁**，交互地在不同方向上对粒子束**聚束**。

48



二极磁铁和四极磁铁组合可以使粒子束得到**聚焦效果**，这种组合对粒子束的偏转作用与光学中的三棱镜分光原理类似。

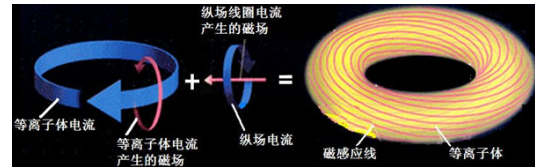
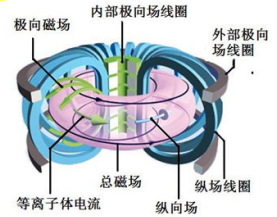


49

## 6. 等离子体的磁约束

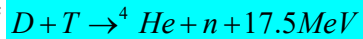
**托卡马克**是目前约束等离子体的主要装置，将高温等离子体约束在其中。

其中的磁场主要由：内、外部极向场线圈产生的**极向磁场**和纵场线圈产生的**纵向磁场**，这两种磁场叠加，形成了**环形的磁场分布**。



50

约束在环内的等离子体中的离子在高温下发生**核聚变反应**，**释放出大量核能**，为人类提供新的取之不尽、污染最小的能源。如：



产生核聚变需要极高的温度。估算核聚变需要的温度：把带正电的两个粒子聚合在一起，需要克服库仑势能：

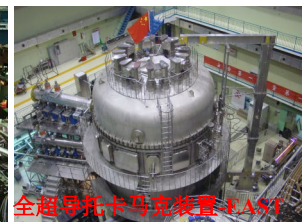
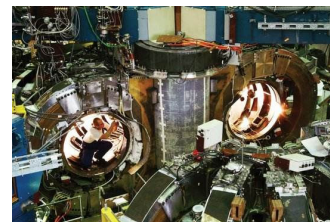
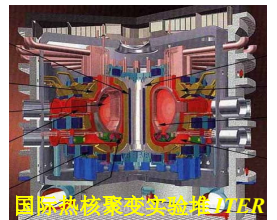
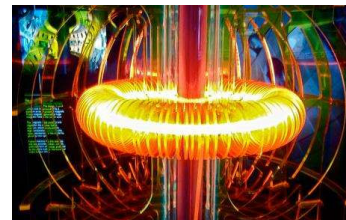
$$E_k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \approx 10^{-13} \text{ J}$$

$$T = \frac{E_k}{k} \approx 7 \times 10^9 \text{ K}$$

实际发生聚变(点火)温度为  $10^8 - 10^9 \text{ K}$  (1亿度)



51



全超导托卡马克装置 EAST  
中科院等离子体物理研究所

## § 4.5 霍尔效应

### 一、霍尔效应

- 霍尔效应是 **A.H.Hall** 于1879年在研究金属的导电机制时发现的，当时霍尔还是美国霍普金斯大学的研究生。
- 后来发现**半导体的霍尔效应比金属强很多**，利用这种现象制成的各种**霍尔元件**，广泛地应用于工业自动化技术、检测技术及信息处理方面。
- 霍尔效应是研究半导体材料性能的基本方法。
- 通过实验测定的**霍尔系数**，能够判断半导体材料的**导电类型**，**载流子浓度**及**载流子迁移率**等重要参数。

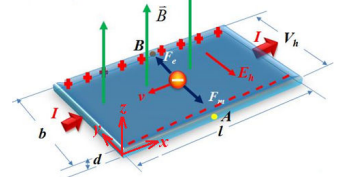
53

设一块长为  $l$ 、宽为  $b$ 、厚为  $d$  的  $N$  型单晶薄片，置于沿  $z$  轴方向的**磁场  $B$**  中，在  $x$  方向通以**电流  $I$** ，则其中的载流子——电子受到的**洛伦兹力**为：

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = -evB\vec{e}_y \quad \text{方向为 } Y \text{ 轴负方向}$$

电子在这样的洛伦兹力作用下偏转，向 **A 侧面** 积累

在垂直电流方向的导体板的两端面上出现电势差，形成一个沿  $Y$  轴负方向的横向电场  $E$ ，该**电场对电子的作用力沿  $Y$  轴正方向**。



54

设  $A-B$  间的电位差为  $U_h$  (即霍尔电压), 则

$$\vec{E}_h = -\frac{U_h}{b} \vec{e}_y$$

$$\vec{F}_e = -e\vec{E}_h = e\frac{U_h}{b} \vec{e}_y$$

当洛伦兹力与电力平衡时, 载流子不再偏转

$$\vec{F}_e = -\vec{F}_m$$

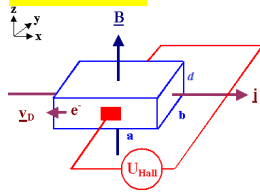
$$e\frac{U_h}{b} \vec{e}_y = evB\vec{e}_y$$

$$U_h = vbB$$

流过样品横截面的电流  $I$  为

$$j = nev \quad I = jS = nevb d$$

$n$  为电子浓度  $v = I / nebd$



55

$$\therefore U_h = \frac{1}{ne} \frac{IB}{d} = R_h \frac{IB}{d} \quad R_h = \frac{1}{ne}$$

$R_h$  称为霍尔系数, 表示材料产生霍尔效应的本领大小

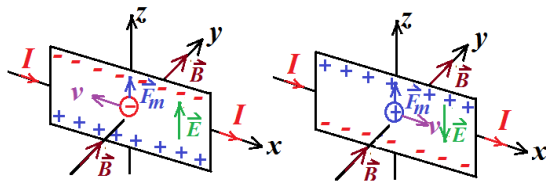
$$\text{或写成} \quad U_h = K_h IB \quad K_h = \frac{1}{ned}$$

✦  $K_h$  称为霍尔元件的灵敏度,  $K_h$  越大, 越易获得较大霍尔电压。

✦  $K_h$  与  $n$  成反比, 半导体的载流子浓度  $n$  远比金属的载流子浓度小, 相应的  $K_h$  大, 所以用半导体材料做霍尔元件灵敏度较高。

✦  $K_h$  与样品厚度  $d$  成反比, 所以霍尔片都切得很薄, 一般  $d \sim 0.2 \text{ mm}$ 。

56



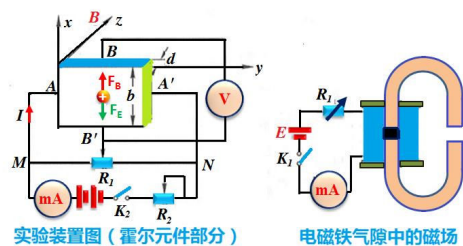
✦ 给定  $I, B$  方向, 洛伦兹力方向是确定的, 测量电压  $U$ , 由  $U$  的正负可判定载流子是正电荷 ( $p$  型半导体) 还是负电荷 (电子,  $n$  型半导体);

✦ 由  $I, B, d, U$ , 可得载流子浓度  $n$

$$n = \frac{IB}{U_h d e}$$

57

✦ 通过霍尔效应测量磁场



实验装置图 (霍尔元件部分)

电磁铁气隙中的磁场

选定霍尔元件 (即霍尔系数  $R_h$  确定), 保持控制电流  $I$  不变, 则霍尔电压  $U_h$  与被测磁感应强度  $B$  成正比

$$B = \frac{U_h d}{I R_h}$$

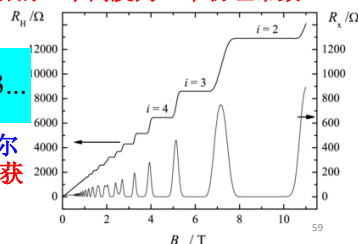
58

## 二、量子霍尔效应

✦ 1980年, 德国马普所物理学家克利青 **Klaus von Klitzing** 等人在低温 (几 K)、强磁场 ( $1 \sim 10 \text{ T}$ ) 下研究二维电子气的霍尔效应时, 发现霍尔电阻随磁场的增大作台阶状升高, 台阶的一个高度为一个物理常数  $h/e^2$  除以整数  $n$ , 即

$$R_H = \frac{1}{i} \frac{h}{e^2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

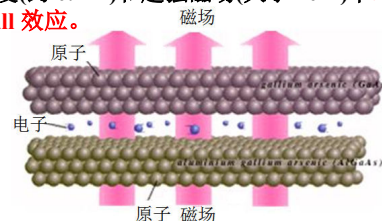
✦ 此现象被称为量子霍尔效应。1985年 **Klitzing** 获诺贝尔物理学奖



59

## 三、分数量子霍尔效应

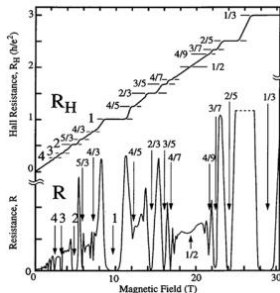
1982年, 美国加州斯坦福大学的 **劳克林 (P.B. Laughlin)**, 美国纽约哥伦比亚大学与新泽西州贝尔实验室的 **施特默 (H.L. Stormer)** 和美国新泽西州普林斯顿大学电气工程的华裔美籍科学家 **崔奇 (D.C. Tsui)** 等人在研究极低温度 (约  $0.1 \text{ K}$ ) 和超强磁场 (大于  $10 \text{ T}$ ) 下二维电子气的 **Hall 效应**。



60

- 他们发现 **Hall 电阻**随磁场的变化比  $h/e^2$  更大的台阶，这个台阶不仅出现在  $i$  为整数时，而且出现在分母为奇数的分数，这就是**分数量子 Hall 效应**。

- 这一发现对理论工作者提出了更大的挑战，近几年来**分数Hall 效应**的理论解释也取得了一些进展。



1/3, 2/5, 3/7, 4/9, 5/11, 6/13, 7/15...  
2/3, 3/5, 4/7, 5/9, 6/11, 7/13...  
5/3, 8/5, 11/7, 14/9...  
4/3, 7/5, 10/7, 13/9...  
1/5, 2/9, 3/13...  
2/7, 3/11...  
1/7...

1998年崔奇等三人  
荣获诺贝尔物理学

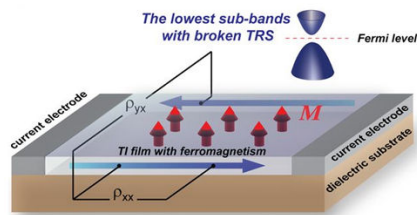
61

## 四、量子反常霍尔效应

- 量子反常霍尔效应**—不需要外加磁场的量子霍尔效应。
- 1988年，美国物理学家 *M. Haldane* 提出可能存在不需要外磁场的量子霍尔效应。
- 2010年，中科院物理所 **方忠**、**戴希** 带领的团队与 **张首晟** 教授等合作，从理论与材料设计上取得了突破，他们提出 **Cr 或 Fe 磁性离子掺杂的  $Bi_2Te_3$ 、 $Bi_2Se_3$ 、 $Sb_2Te_3$  族拓扑绝缘体** 中存在着特殊的 **Vleck 铁磁交换机制**，能形成稳定的铁磁绝缘体，是实现量子反常霍尔效应的最佳体系。

62

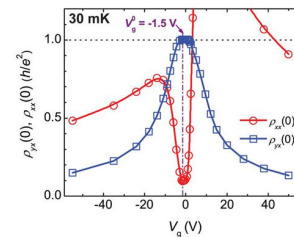
- 2013年3月14日中科院科学家 **薛其坤** 的研究团队在 **《Science》** 上发表了世界**首次**在**实验上**实现了量子反常霍尔效应：



量子反常霍尔效应的示意图，**拓扑非平庸的能带结构**产生具有**手征性的边缘态**，从而导致量子反常霍尔效应

63

- 量子反常霍尔效应**由于**不必外加磁场**，与已知的量子霍尔效应具有完全不同的物理本质，是一种全新的量子效应。
- 因为无需高强磁场，量子反常霍尔效应可能在未来电子器件中发挥特殊作用，有可能制备出**低能耗的高速电子器件**。



64

## 五、电阻单位和精细结构常数的标准

### 1. 电阻标准

- 国际计量委员会建议从1990年1月1日起在世界范围内启用**量子化霍尔电阻标准**代替原来的**电阻实物标准**

$$R_K = \frac{h}{e^2} = 25812.807\Omega$$

优点：

- (1) 各国测量结果的**一致性**很好
- (2) 精度达到  **$10^{-8}$  量级** 甚至更高
- (3) **量子霍尔电阻不随时间变化**，而实物电阻线圈的阻值会随时间变化产生不确定性。

65

### 2. 精细结构常数标准

- 精细结构常数  $\alpha$  是**波尔**在计算氢原子的能级时被引进的。
- 1891年，**麦克斯韦**通过更精确的实验发现，原子光谱的每一条谱线，实际上是由两条或多条靠得很近的谱线组成的，这种细微的结构称为**光谱线的精细结构**。
- 狄拉克**进一步提出了电子的相对论量子力学方程(狄拉克方程)，解释了光谱的精细结构——认为它是**电子的自旋磁矩与电子绕核运行形成的磁场耦合的结果**。
- 描述光与电磁相互作用最完善的理论是量子电动力学，认为两个带电粒子(如两个电子)是通过互相**交换光子**而相互作用的。这种交换可以有很多种不同复杂程度的交换方式，它们对最终作用的贡献随着过程中光子的吸收或发射次数呈指数式下降，而这个指数的底，正好就是精细结构常数。**精细结构常数是电磁相互作用中电荷之间耦合强度的一种度量**。

66

半经典半量子的理论推导

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$$

- 精细结构常数的数值无法从量子动力学推导出，只能通过实验测定。2002年国际推荐值为

$$\alpha = 7.297352568(24) \times 10^{-3} = \frac{1}{137.03599911(46)} \approx \frac{1}{137}$$

费因曼所说的：“这个数字自五十多年前发现以来一直是个谜。所有优秀的理论物理学家都将这个数贴在墙上，为它大伤脑筋.....它是物理学中最大的谜之一，**一个该死的谜**：一个魔数来到我们身边，可是没人能理解它。你也许会说‘上帝之手’写下了这个数字，而‘我们不知道他是怎样下的笔’”。

- 量子霍尔效应提供了一种用半导体内的宏观霍尔效应测定精细结构常数的新方法。

$$\alpha = 1/2\epsilon_0 c R_k$$

67

## 思考题

- 1.带电粒子在各种电磁场中的运动轨迹模拟
- 2.量子反常Hall效应的原理以及应用。

作业 4.24, 4.25, 4.27, 4.28

68