1. 设简单平面图的域数目 $d<12$，每点度 $d(v_i)\geq 3$，证明至少有一个域的边界数小于5。

证：

$\because \sum d(v_i) = 2m \quad \therefore 2m \geq 3n$．$\quad m \geq \frac{3}{2}n$

假设每一个域的边界数均大于等于5，则

$5d \leq 2m$，$\quad d \leq \frac{2}{5}m$．

$\therefore$ 由欧拉公式，$d = m-n+2 \leq \frac{2}{5}m$．，$3m \leq 5n-10$

$\because \frac{3}{2}n \leq m$，get $\frac{9}{2}n \leq 5n-10$，$\quad 20 \leq n \Rightarrow 30 \leq m$

$\Rightarrow m-n \geq 10$，$d = m-n+2 \geq 12$ 与 $d<12$ 矛盾

$\therefore$ 假设不成立 至少有一个域的边界小于5

3. 设 G 是结点数大于 10 的简单图，证明 G 和 $\bar{G}$ 至少有一个是非平面图。

证：$n>10$

假设 G 和 $\bar{G}$ 都是平面图，令它们边数分别为 m_1, m_2 则

$m_1 \leq 3n-6$，$\quad m_2 \leq 3n-6$，$\quad n^2-13n+24 \leq 0$

$m_1+m_2 = \frac{1}{2}n(n-1) \leq 6n-12$，

得 $\frac{13-\sqrt{73}}{2} \leq n \leq \frac{13+\sqrt{73}}{2} \approx 10.xx$

$\therefore \frac{13-\sqrt{73}}{2} \leq n \leq 10$ 这与 $n>10$ 矛盾．

$\therefore$ 假设不成立，G 和 $\bar{G}$ 中至少有一个是非平面图。

7. 试证：不存在这样的平面图，它有5个域，且任意两个域之间至少有一条公共边

$d = m - n + 2 = 5 \quad m = n + 3$

证：假设存在这样的平面图 G，则 G 的对偶图 G^*，

$m^* = m$，$n^* = d = 5$，且每个结点与其他4个结点都相邻

$\Rightarrow G^*$ 包含 $K^{(1)}$ $\Rightarrow G^*$ 不是平面图

这与 G^* 是对偶图矛盾，∴假设不成立。命题得证

8. 设简单平面图 G 的结点数 $n \geq 4$，证明 G 中至少有4个结点的度不大于5。

$n \geq 4$

证：对于 $n = 5$ 和 $n = 6$，显然成立。而对于 $7 \leq n$

① 当 $n = 7$ 时，$m \leq 3 \times 7 - 6 = 15$

若 G 中至多有3个度小于等于5的结点，设度小于等于5的结点数为 k

当 $k \leq 2$ 时，其余 $7-k$ 个结点是 K 型子图，故矛盾

当 $k = 3$ 时，其余4个结点都与满足条件的3个结点相邻

则 $m = 3 \times 4 + 6 = 18 > 15$ 矛盾

∴ $n = 7$ 时，$k \geq 4$

② 当 $n \geq 8$ 时

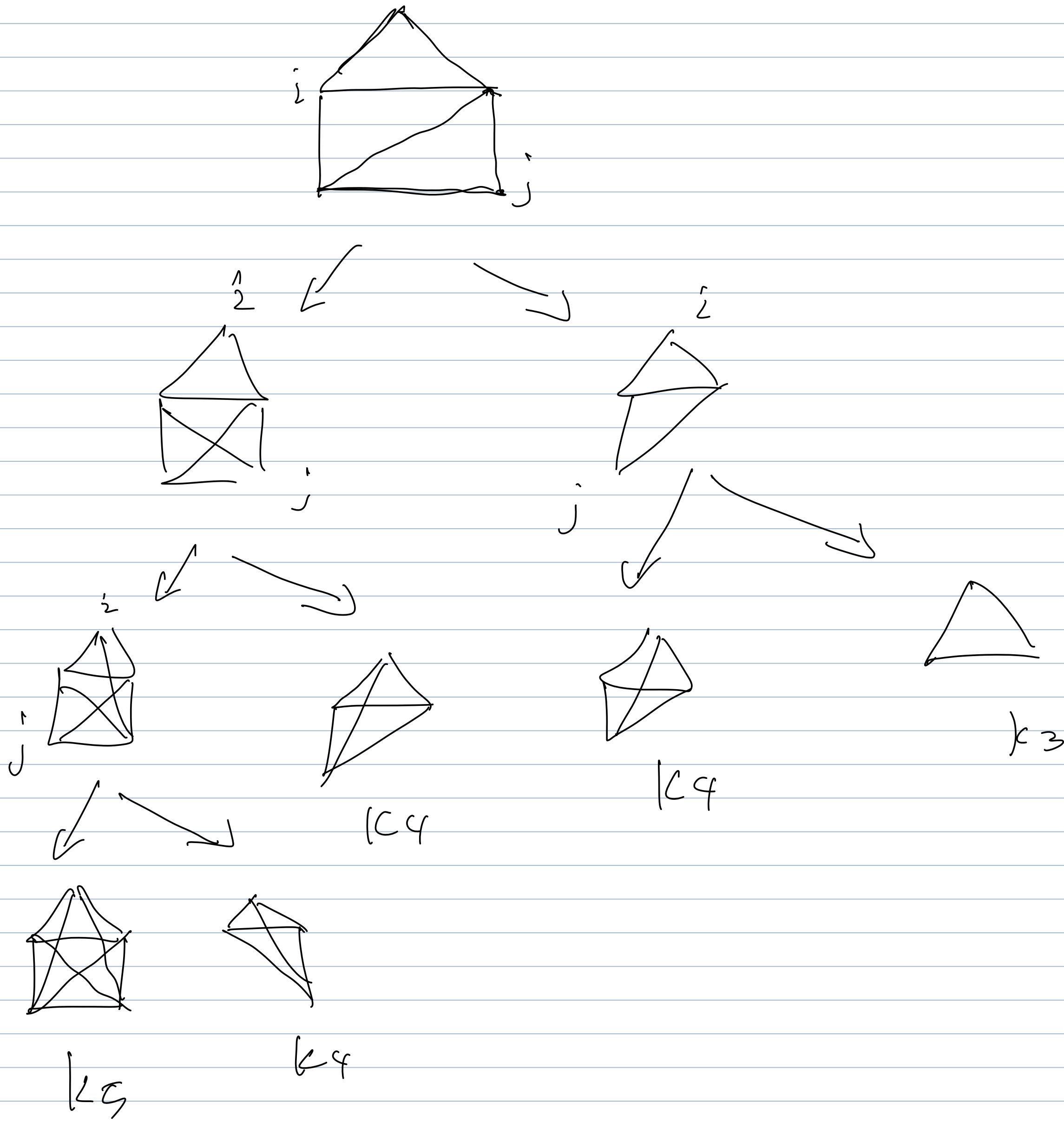
由 $\frac{6 \times (n-k)}{2} \leq m \leq 3n - 6$，得 $3n - 3k \leq m \leq 3n - 6$ ∴ $k \geq 2$

而当 $k = 2$ 时，只由其余 $(n-k)$ 个点构成的图 G' 各结点度大于等于4，必含 $K^{(2)}$ 型子图 故 $k \geq 4$

$k = 3$ 时 (1) 3，必含 $K^{(1)}$ 型子图

综上 G 中至少有4个结点度不大于5

13. 试求图 4.13 的色数与色数多项式



$\therefore \chi(G)=3$

色数多项式为 $f(G,t) = f(K_5,t) + 3f(K_4,t) + f(K_3,t)$

$= t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4) + 3t(t-1)(t-2)(t-3) + t(t-1)(t-2)$

$= t(t-1)(t-2)(t^2-4t+4)$

$= t(t-1)(t-2)^3$