

1. 一棵树有 n_2 个结点的度为 2, n_3 个结点的度为 3, \dots , n_k 个结点的度为 k . 问有多少个度为 1 的结点。树叶??

$$\text{树的总边数为 } n-1 \Rightarrow \sum_i d(v_i) = 2(n-1)$$

\therefore 度为 1 的结点数

$$\frac{2(n-1) - 2n_2 - 3n_3 - \dots - kn_k}{1}$$

2. 证明树中最长道路的两端点一定都是树叶。

证明: 设 G 是树, 其最长道路为 $P(u, v)$
(反证法)

假设 P 的任意一个端点比如 u 不是树叶. (不失一般性)

则 $\because d(u) \geq 2$ 且 G 不存在回路 \therefore 必存在 $e(u, u') \notin P(u, v)$.

则 $\because P(u, v) + e(u, u')$ 比 $P(u, v)$ 要长. 这与 $P(u, v)$ 是最长道路矛盾

故, 树中最长道路的两端点只能是树叶.