对应用构造法解题的一些思考

——以习题三的第3题为例

张一可 计15 2021010793

题目：

- 令$v_1, v_2, \ldots, v_n$是给定结点，$d_1, d_2, \ldots, d_n$是给定的数，满足$\sum d_i = 2n-2$，$d_i \geq 1$。证明在集合$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$上满足$d(v_{\mathrm{i}}) = d_i$，$i = 1,2, \ldots, n$的树的数目是

$$\frac{(n-2)!}{(d_1-1)! \cdots (d_n-1)!}$$

翻译题目：

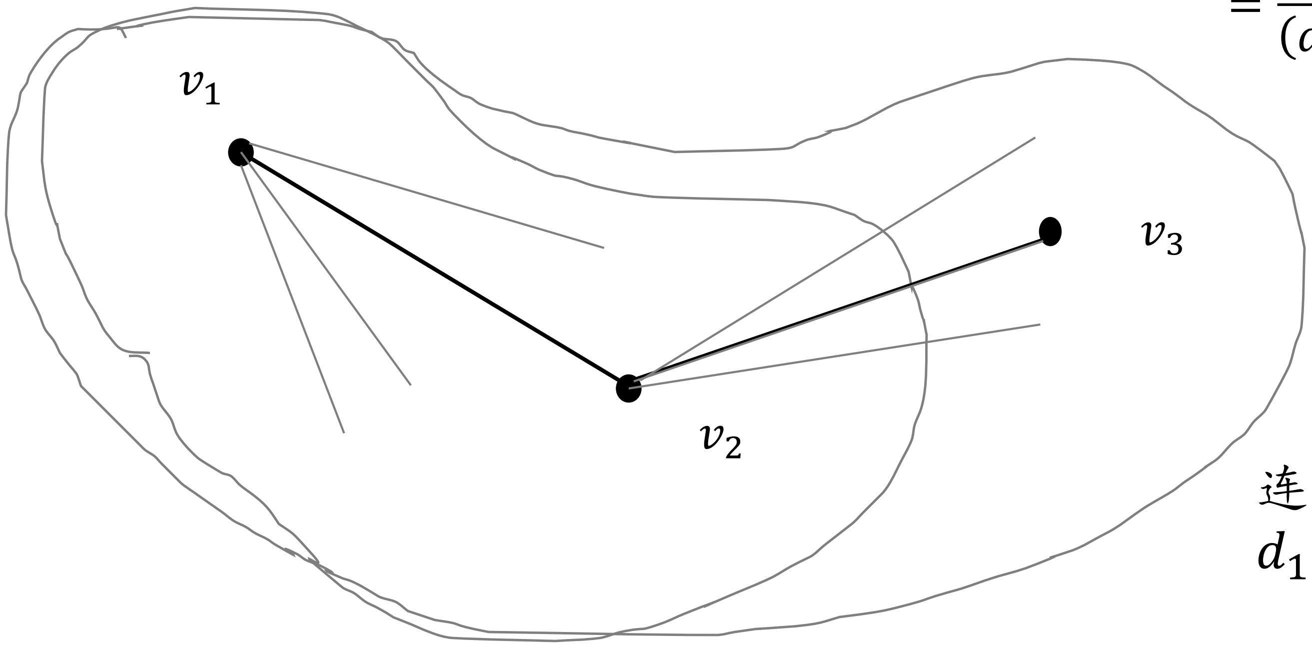
- n个结点： $v_1, v_2, \dots, v_n$
- 度确定： $d_1, d_2, \dots, d_n$
- 满足$\sum d_i = 2n - 2$ $\Longrightarrow$边数$\mathrm{m} = \frac{1}{2}\sum d_i = n - 1$
- 证明满足这样的度关系的树的数目是

$$\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!\cdots(d_n-1)!}$$

树的等价定义

- $n-1$条边 +连通图 =树
- $n-1$条边 +无回路 =树
- 只要我们构造的图满足这两个条件之一，它就是一棵树了！

一张草稿纸：



$$C_{n-2}^{d_1-1} \quad C_{n-d_1-1}^{d_2-1} \quad C_{n-d_1-d_2}^{d_3-1}$$

$$=\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!\,\cancel{(n-d_1-1)!}}\;\frac{\cancel{(n-d_1-1)!}}{(d_2-1)!\,\cancel{(n-d_1-d_2)!}}$$

$$\frac{\cancel{(n-d_1-d_2)!}}{(d_3-1)!\,(n-d_1-d_2-d_3+1)!}$$

结点集的迭代速度为d_i-1

连通图结点数为
d_1+d_2

构成连通图，共有
d_1+1个结点

构造过程：

- 从V中任取一条边，构成结点集$V' = \{v_{i_1}, v_{i_2}\}$（？），将它们初始化标记为0，记$n_1 = |V'| = 2$
- 对于$\forall v_{i_1} \in V'$，从$V - V'$中选取它的$d_{i_1} - 1$条出边, 共有$\mathrm{C}_{n-n_1}^{d_{i_1}-1}$种选法
- 并把取定的这$d_{i_1} - 1$个结点纳入V'，则应有$\mathrm{n}_2 = |V'| = n_1 + d_{i_1} - 1$，即$n_2 - n_1 = d_{i_1} - 1$
- v_{i_1}的所有出边均已确定，可将其标记为1

构造过程：

- 再从V'中任取一未被标记过的结点，设为v_{i_2}
- 由于所构造的图不能含有回路，只能从$V-V'$中为它选取它的$d_{i_2}-1$条出边，有$C_{n-n_2}^{d_{i_2}-1}$种选法
- 把这些结点纳入V'，将$|V'|$更新为 n_3，有$n_3-n_2=d_{i_2}-1$
- 若$d_{i_2}=1$， v_{i_2}为叶子结点，视为它的全部出边均已确定，将其标记为1，可再从V'中选取下一结点，进行上述操作

构造过程：

- 重复上述操作，直至V中结点均被纳入V'且均已被标记，
- 注意到在每一步中，有$n_{j+1}-n_j=d_{i_j}-1$，即$(n-n_{j+1})!=\left(n-n_j+d_{i_j}-1\right)!$，$n=1,2,\ldots,n-1$
- 总共可以构造的树的数目为$C_{n-\mathrm{n}_1}^{\mathrm{d}_{i_1}-1}\ C_{n-\mathrm{n}_2}^{\mathrm{d}_{i_2}-1}\cdots\ C_{n-\mathrm{n}_n}^{\mathrm{d}_{i_n}-1}$

$$=\frac{(n-n_1)!}{\left(d_{i_1}-1\right)!\left(n-n_1-d_{i_1}+1\right)!}\ \frac{(n-n_2)!}{\left(d_{i_2}-1\right)!\left(n-n_2-d_{i_2}+1\right)!}\cdots\ \frac{(n-n_n)!}{\left(d_{i_n}-1\right)!\left(n-n_n-d_{i_n}+1\right)!}$$

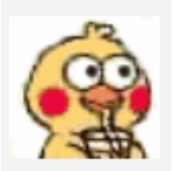
$$=\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!\cdots(d_n-1)!}$$

存在的（巨大）问题：

- 用哪条边来初始化V'呢？
- 每次都可以从所有结点里取边吗？

（很不严谨的证明过程，请勿模仿）

- 请听下一位同学的讲解！

上述思考路径带来的启发：

- 从定义入手，满足定义的构造即为所求
- 从最简单的情形入手，再对证明过程进行优化（虽然不一定能优化得了）
- 综合考虑需证明的等式带来的提示

谢谢！欢迎批评指正！