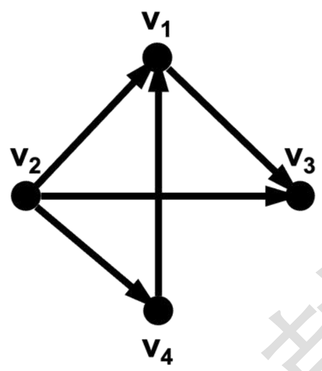
《离散数学 II》2022 年春季学期期末考试（线上考场）

姓 名 ________ 学 号 ________ 班 级 ________

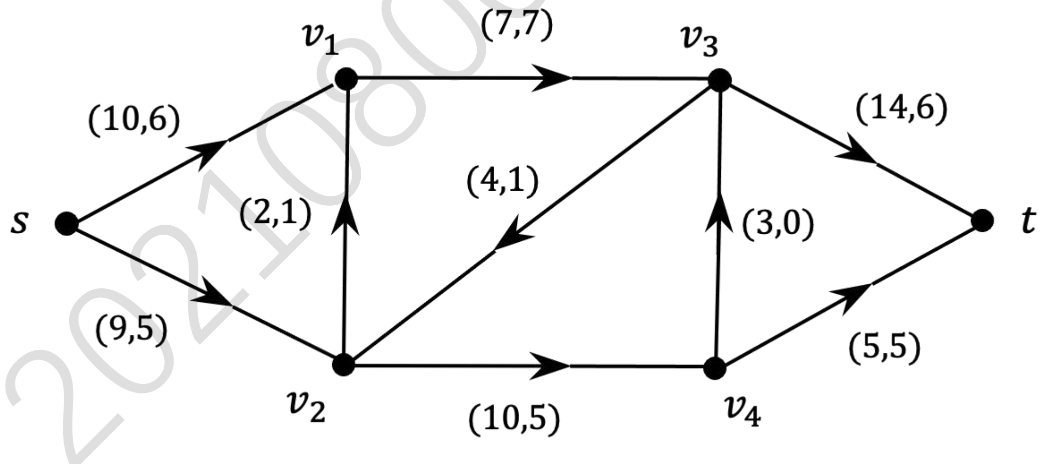
一、给定有向图 G（如图），请计算：

(1) 不同**支撑树**的数目。

(2) 以$\boldsymbol{v_2}$为根的不同**根树**数目。



二、（1）求下图所示网络的最大流和最小割切。其中各边所标数值对 (x,y) 中 x 表示容量，y 表示容许流。



（2）对任意网络流图 N 和 N 上的任意最大流，是否总存在一条边 e，使得增加e的容量后，网络的最大流也随之增加？若是，请给出证明。若否，请给出理由。

（3）对任意网络流图 N，它的一个最小割切为 $(S,\overline{S})$。现令 N 中每条边的容量都增加 1，得到新的网络流图 G，$(S,\overline{S})$ 是否仍为 G 的一个最小割切？若是，请给出证明。若否，请给出理由。

三、请你求出该字符串的**最优哈夫曼编码方案**，具体要求：

(1)画出对应的哈夫曼树；

(2)计算字符串二进制编码的最优总长度；

(3)给出一种具体的哈夫曼编码方案。

字母	a	b	c	d	e	f	g
频次	28	66	14	192	33	12	58

四、

(1)给定无向图 $G=(V,E)$ 和 $G'=(V',E')$（如图所示），请分别**画出** G 和 G' 的**最小生成树**，并分别求出其**边权和**。

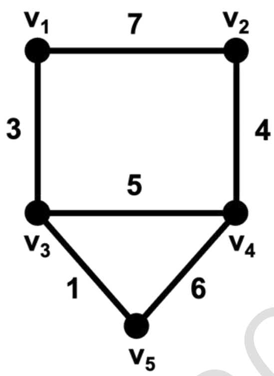


图 G

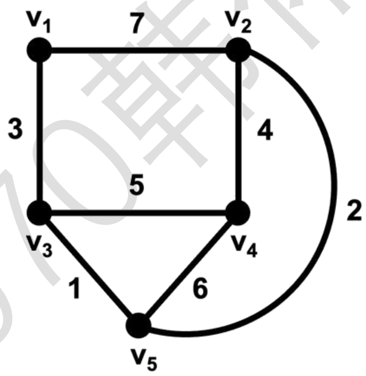


图 G'

(2)已知无向图 $G=(V,E)$，其各边的权值两两不同。求证：G 具有唯一的最小生成树。

(3)已知无向图 $G=(V,E)$ 和不在 E 中的边 e，令 $G'=(V,E\cup\{e\})$。已知集合 $E\cup\{e\}$ 中**各边的权值两两不同**。

求证：令 T 为 G 的最小生成树，T' 为 G' 的最小生成树，E_T 和 $E_{T'}$ 分别为 T 和 T' 的边集，则 $\left|E_T \oplus E_{T'}\right| \le 2$。

五、一群小朋友围在一起做游戏。游戏规则如下：

① 游戏需要偶数个小朋友参与。

② 小朋友们首先围成一个圈，从某个小朋友开始为 0 号小朋友，逆时针为小朋友们依次编号为 0、1、2、……、2N-1。

③ 每个小朋友先伸出自己的右手，和自己对面的小朋友的右手握住。具体地来说，当有 $2N$个小朋友参与游戏时，i号小朋友的“对面”指的是 $(i+N)\%2N$ 号小朋友。

④ 相邻的两个小朋友为一组，两个小朋友的左手互相握住。

当小朋友们按照以上规则握手完成后，大家形成了一个结。小朋友们试图解开这个结，如果能将这个结解开为一个大圈，则认为游戏成功结束。
在解开的过程中，允许手握着的方式发生改变，但是不允许手之间分开。同时，解开结，围成一个圈以后，允许有的小朋友面朝圈内，有的小朋友面向圈外。

现在小朋友们想要知道这些问题：

(1) 这个游戏是一定有解的吗？ “有解”在本题中的含义是，可以从一个结的状态，在不违反游戏规则的情况下，通过小朋友们的神奇走位，变化为大家手拉手围成一个圈的形态。

(2) 如果一定有解，如何证明？如果不一定有解，那么在什么情况下有解，为什么？

六、

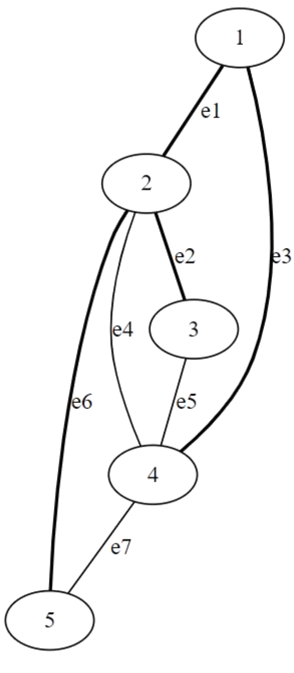
(1) 计算题图的基本回路矩阵，以$e1, e2, e3, e6$ 为树枝边。

(2) 对于任意简单连通的无向图G，节点数为 n，边数为 m。我们定义**超回路**是任意多个（可以为 0 或 1 个）边不相交的回路的并集。

求证：

(a) 图G中任意一个回路C与任意超回路Q的对称差一定是一个超回路 Q'。

(b) G中不同的非空超回路个数为 $2^{m-n+1}-1$。



七、有向图$G=(V,E)$的路径覆盖是指一个结点不相交的路径集合P，使得V中每个结点恰好在P的一条路径上出现。路径的起始点和终结点可以是任意结点，也可以有任意长度（包括长度 0）。图G的一个最小路径覆盖指包含路径条数最少的路径覆盖。请给出有效算法，找到有向无环图$G=(V,E)$的一个最小路径覆盖，并证明该算法的正确性。

八、设 f 是 群G 到 群G'的同态，求证：f 是单同态的充要条件是 $Ker\,f=\{e\}$

九、求证：任何置换都可表示为不相交轮换的乘积

十、H 是有限群 G 的子群，$|H|=n$，若 H **是唯一的** n 阶子群

求证：H 是 G 的正规子群

十一、设 G 是 pq 阶交换群，p、q为不相等的素数。

对于 G 的任一子群 H，求证：G/H是循环群。