定理 8.4.2 的图论证明

离散数学 (2)

黄宇翔

清华大学计算机系

05/29/2022

1 问题回顾与讨论

2 回路和引理的证明

3 回路和引理在置换分解中的应用

定理 8.4.2

- 定理 8.4.2：任何置换都可表为不相交轮换的乘积
- 置换：$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$
- 轮换：$\gamma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{s-1} & i_s \\ i_2 & i_3 & \dots & i_s & i_1 \end{pmatrix}$
- 看起来像图？

转化为图论问题

- 置换：$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$
- 建有向图：
$$G = G(V, E), V = \{1, 2, \dots, n\}$$
$$E = \{(1, \sigma(1)), (2, \sigma(2)), \dots, (n, \sigma(n))\}$$
- 图的特征：每个点只有一条出边，也只有一条入边
-
$$\forall v \in V, d^+(v) = d^-(v) = 1$$

转化为图论问题

- 轮换：$\gamma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{s-1} & i_s \\ i_2 & i_3 & \cdots & i_s & i_1 \end{pmatrix}$
- 一条回路：

$$P = \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_{s-1}, i_s), (i_s, i_1)\}$$

- 回路和引理：任给图 $G = G(V, E)$，若 $\forall v \in V, d^+(v) = d^-(v) = 1$，则该图可以拆成若干回路的和，即 $E = P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_k, P_i$ 是回路

1. 问题回顾与讨论
2. 回路和引理的证明
3. 回路和引理在置换分解中的应用

回路和引理的证明

- 回路和引理回忆：任给图 $G = G(V, E)$，若 $\forall v \in V, d^+(v) = d^-(v) = 1$，则该图可以拆成若干回路的和

1 构造回路：

  1.1 任取 $v_0 \in V$，取 $P_e = \emptyset, P_v = \{v_0\}$

  1.2 若 $\exists v \in P_v$ 满足 $\Gamma(v) \notin P_v$，则 $P_e \leftarrow P_e \cup \{(v, \Gamma(v))\}$，$P_v \leftarrow P_v \cup \{\Gamma(v)\}$，转 1.2

  1.3 P_e 是一条回路

2 $G \leftarrow (V - P_v, E - P_e)$，若 $G \neq \emptyset$ 转 1

- 证明上述算法的正确性：
  - 步骤 1.2: 若存在这样的 v，则只能有一个这样的 v，因为对于非最后一次扩展的结点 v，其直接后继 $\Gamma(v)$ 已经被扩展进入 P_v（图中每个结点只有一个直接后继）
  - 对于最后被扩展进入的结点 v_l，若非 $\Gamma(v_l) = v_0$，就有 $\Gamma(v_l) \notin V_e$
  - 因为若 $\Gamma(v_l) = v_t, v_t \in P_v, v_t \neq v_0$，考虑到 $\Gamma(v_{t-1}) = v_t$，则 $d^-(v_t) = 2$，矛盾

回路和引理的证明（续）

- 回路和引理回忆：任给图 $G = G(V, E)$，若 $\forall v \in V, d^+(v) = d^-(v) = 1$，则该图可以拆成若干回路的和

1 构造回路：
   1.1 任取 $v_0 \in V$，取 $P_e = \emptyset, P_v = \{v_0\}$
   1.2 若 $\exists v \in P_v$ 满足 $\Gamma(v) \notin P_v$，则 $P_e \leftarrow P_e \cup \{(v, \Gamma(v))\}$，$P_v \leftarrow P_v \cup \{\Gamma(v)\}$，转 1.2
   1.3 P_e 是一条回路

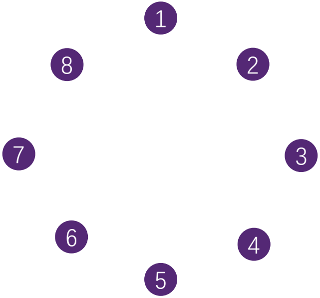
2 $G \leftarrow (V - P_v, E - P_e)$，若 $G \neq \emptyset$ 转 1

- 证明上述算法的正确性：
  - 由于 $|V|$ 是有限数，步骤 1.2 在有限步内停止，一定 $\exists v_k, s.t. \Gamma(v_k) = v_0$，则一定能形成回路
  - 由于 $|V|$ 是有限数，步骤 2 在有限步内停止。此算法可以将图 G 拆分成若干回路的和

1. 问题回顾与讨论
2. 回路和引理的证明
3. 回路和引理在置换分解中的应用

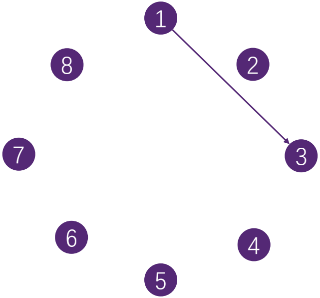
回路和引理在置换分解中的应用

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 6 & 1 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$



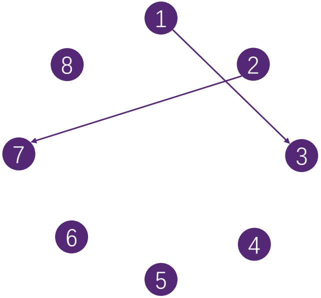
回路和引理在置换分解中的应用

$$\sigma = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\3\end{matrix}} & \begin{matrix}2\\7\end{matrix} & \begin{matrix}3\\2\end{matrix} & \begin{matrix}4\\6\end{matrix} & \begin{matrix}5\\1\end{matrix} & \begin{matrix}6\\4\end{matrix} & \begin{matrix}7\\5\end{matrix} & \begin{matrix}8\\8\end{matrix} \end{pmatrix}$$



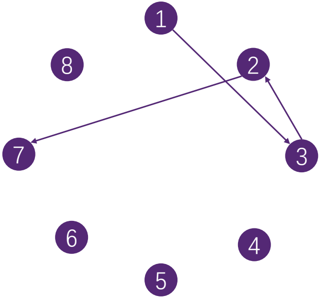
回路和引理在置换分解中的应用

$$\sigma = \left(\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\ \boxed{\begin{matrix}2\\7\end{matrix}}\ \begin{matrix}3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\2 & 6 & 1 & 4 & 5 & 8\end{matrix}\right)$$



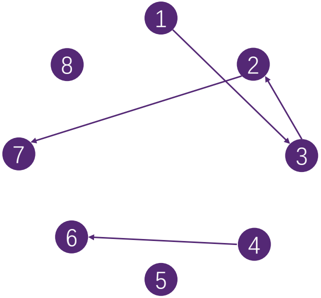
回路和引理在置换分解中的应用

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & & 6 & 1 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$



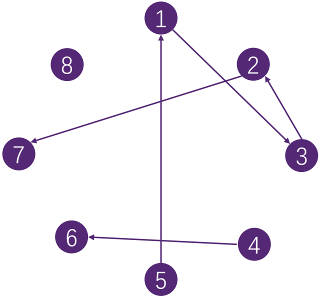
回路和引理在置换分解中的应用

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 6 \end{matrix}} & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & & 1 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$



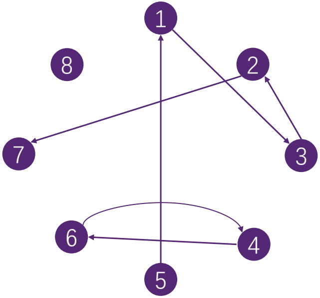
回路和引理在置换分解中的应用

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \boxed{5} & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 6 & \boxed{1} & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$



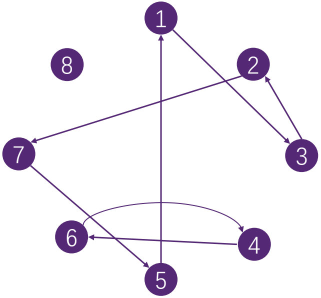
回路和引理在置换分解中的应用

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \boxed{\begin{matrix} 6 \\ 4 \end{matrix}} & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 6 & 1 & & 5 & 8 \end{pmatrix}$$



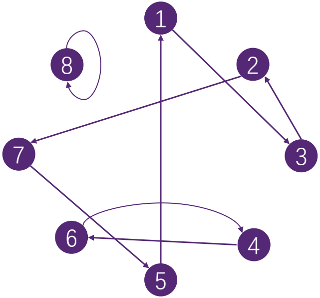
回路和引理在置换分解中的应用

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \boxed{\begin{matrix} 7 \\ 5 \end{matrix}} & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 6 & 1 & 4 & & 8 \end{pmatrix}$$



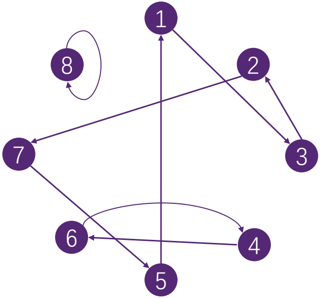
回路和引理在置换分解中的应用

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \boxed{8} \\ 3 & 7 & 2 & 6 & 1 & 4 & 5 & \boxed{8} \end{pmatrix}$$



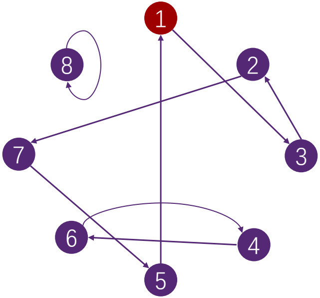
回路和引理在置换分解中的应用

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 6 & 1 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$



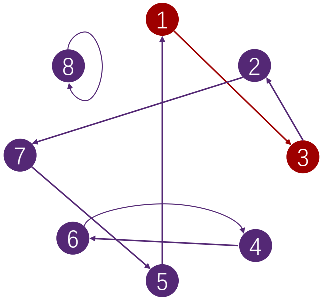
回路和引理在置换分解中的应用

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 6 & 1 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$



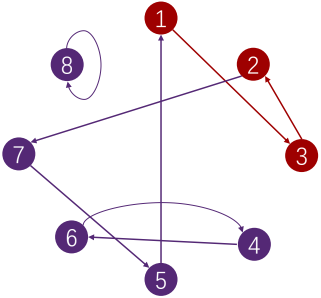
回路和引理在置换分解中的应用

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 6 & 1 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$



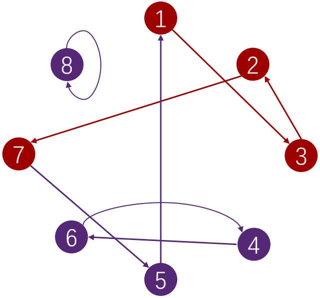
回路和引理在置换分解中的应用

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 6 & 1 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$



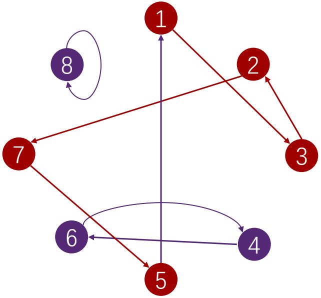
回路和引理在置换分解中的应用

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 6 & 1 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$



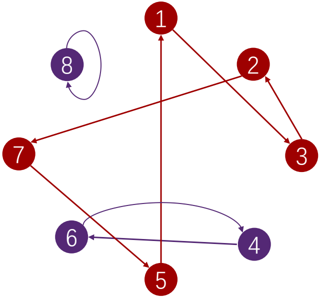
回路和引理在置换分解中的应用

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 6 & 1 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$



回路和引理在置换分解中的应用

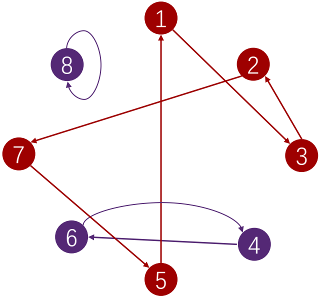
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 6 & 1 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$



回路和引理在置换分解中的应用

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 6 & 1 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

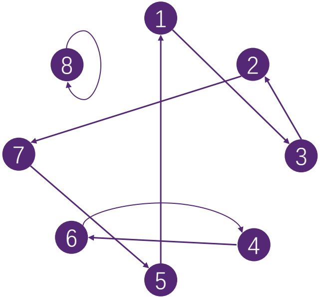
$$\gamma_1 = (1\ 3\ 2\ 7\ 5)$$



回路和引理在置换分解中的应用

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 6 & 1 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

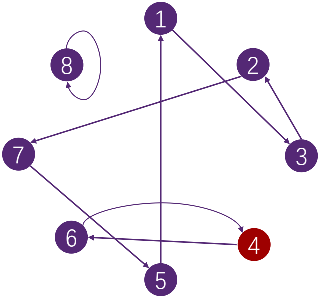
$$\gamma_1 = (1\ 3\ 2\ 7\ 5)$$



回路和引理在置换分解中的应用

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 6 & 1 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

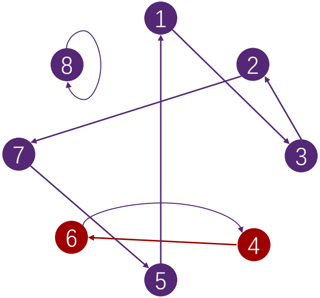
$$\gamma_1 = (1\ 3\ 2\ 7\ 5)$$



回路和引理在置换分解中的应用

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 6 & 1 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

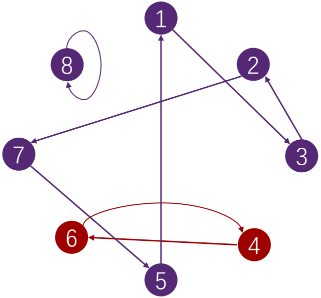
$$\gamma_1 = (1\ 3\ 2\ 7\ 5)$$



回路和引理在置换分解中的应用

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 6 & 1 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

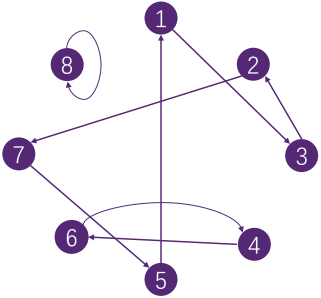
$\gamma_1 = (1\ 3\ 2\ 7\ 5)$ $\gamma_2 = (4\ 6)$



回路和引理在置换分解中的应用

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 6 & 1 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$\gamma_1 = (1\ 3\ 2\ 7\ 5)$ $\gamma_2 = (4\ 6)$

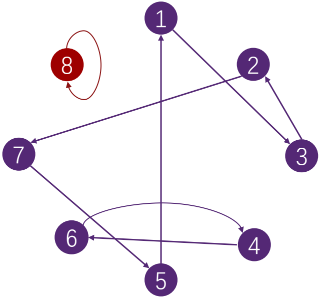


回路和引理在置换分解中的应用

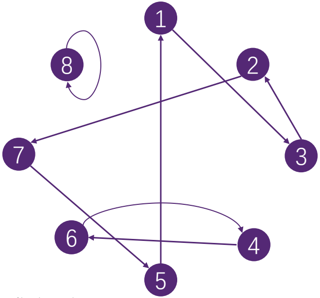
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 6 & 1 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$\gamma_1 = (1\ 3\ 2\ 7\ 5)$ $\gamma_2 = (4\ 6)$

$\gamma_3 = (8) = I_8$



回路和引理在置换分解中的应用



$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 6 & 1 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$\gamma_1 = (1\ 3\ 2\ 7\ 5)$ $\gamma_2 = (4\ 6)$

$\gamma_3 = (8) = I_8$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 6 & 1 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2\ 7\ 5)(4\ 6)$$

谢谢！

- “任何置换都可表为不相交轮换的乘积”

$$\Updownarrow$$

" 任给图 $G = G(V, E)$，若 $\forall v \in V, d^+(v) = d^-(v) = 1$，则该图可以拆成若干回路的和"