1、 ① 设 V 是不同工厂集，E 是有业务联系的两座工厂关系集

则 $\sum_{v\in V(G)} d(v)=2m$. （$G=(V,E)$. n座工厂、m个关系）

但 $9\times3=27$ 是奇数. 这种情况不可能存在

② 由图的性质，V_e 是度为偶的结点集

V_o 是度为奇的结点集时

$$\sum_{v\in V_e} d(v)+\sum_{v\in V_o} d(v)=2m \quad (\text{偶数})$$

但有座工厂的度都为奇数时. $\sum_{v\in V_o} d(v)$ 为奇，$\sum_{v\in V_e} d(v)$ 为偶

加起来为奇数， ∴ 这种情况不可能存在

2. 如果 G 至少存在一个孤立结点，

G 中最多只能存在 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 条边 即 $m\le\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$

∴ 如果 $m>\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. G 中一定不存在孤立结点

3. 设 $d^+(v_1)=\alpha_1$, $d^+(v_2)=\alpha_2$ … $d^+(v_n)=\alpha_n$.

则 $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\frac{1}{2}n(n-1)$，且 ∵ $d^+(v_i)+d^-(v_i)=n-1$

∴ $d^-(v_i)=n-1-\alpha_i$.

$\therefore \sum_{v_i \in V} (d^-(v_i)) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$

$= n(n-1)^2 - 2\underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2 \cdots + \alpha_n)}_{\frac{1}{2}n(n-1)}(n-1) + \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2$

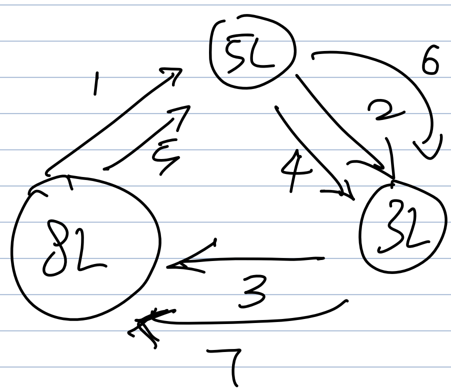
$\geq (n-1)^2 - 2\alpha_1(n-1) + \alpha_1^2 = d^-(v_1)^2 = \sum_{v_i \in V} (d^-(v_i))^2$

$+ (n-1)^2 - 2\alpha_2(n-1) + \alpha_2^2 \qquad + d^-(v_2)^2$

$\vdots \qquad \vdots$

$+ (n-1)^2 - 2\alpha_n(n-1) + \alpha_n^2 \qquad + d^-(v_n)^2$

4.



$(8, 0, 0) \to (3, 5, 0)$

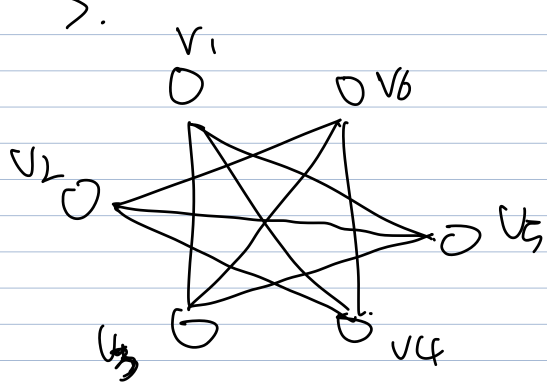
$\to (3, 2, 3) \to (6, 2, 0)$

$\to (6, 0, 2) \to (1, 5, 2)$

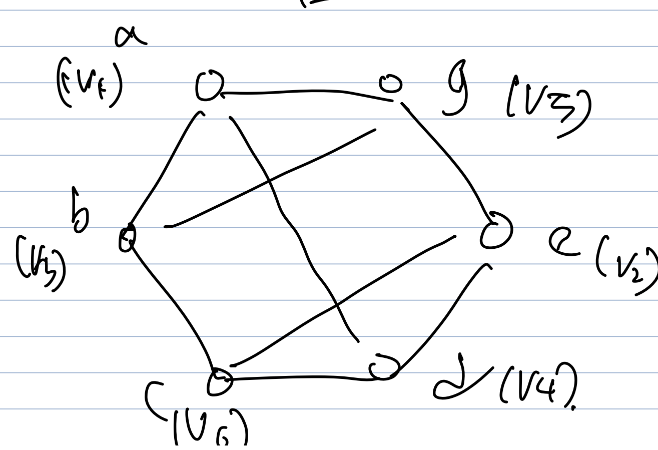
$\to (1, 4, 3) \to (4, 4, 0)$

5.

G_2.



G_2



所以 ∴ G_1 与 G_2 同构.

设 $f(v_1)=a$, $f(v_2)=e$, $f(v_3)=b$; $f(v_4)=d$, $f(v_5)=g$
$f(v_6)=c$

$(v_1,v_3)\in E_1 \leftrightarrow (a,b)\in E_2$ | $(v_2,v_6)\leftrightarrow(c,e)$
$(v_1,v_5)\in E_1 \leftrightarrow (a,g)\in E_2$ | $(v_2,v_5)\leftrightarrow(e,g)$
$(v_1,v_4)\in E_1 \leftrightarrow \langle a,d\rangle\in E_2$ | $(v_2,v_4)\leftrightarrow(e,d)$
$(v_3,v_6)\leftrightarrow(b,c)$ | $(v_3,v_5)\leftrightarrow(b,g)$

$(v_4,v_6)\leftrightarrow(d,c)$

同构

7. $f(v_1)=b$, $f(v_3)=c$, $f(v_6)=f$
$f(v_2)=a$, $f(v_4)=e$, $f(v_5)=d$

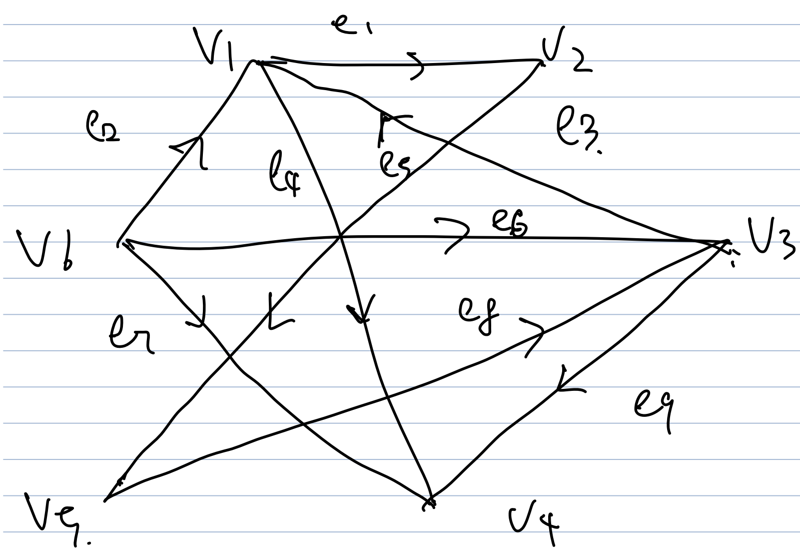
$(v_1,v_2)\leftrightarrow(b,a)$ | $(v_2,v_5)\leftrightarrow(a,d)$ | $(v_6,v_4)\leftrightarrow(f,e)$
$(v_1,v_4)\leftrightarrow(b,e)$ | $(v_3,v_1)\leftrightarrow(c,b)$ |
$(v_6,v_1)\leftrightarrow(f,b)$ | $(v_3,v_4)\leftrightarrow(c,e)$ |
$(v_6,v_3)\leftrightarrow(f,c)$ | $(v_5,v_3)\leftrightarrow(d,c)$ |

8. 邻接矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

关联矩阵

$$A=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{array}\end{array}$$



逆列表

A: (1 6 2 1 3 6 6 5 3)

B: (2 1 5 4 1 3 4 3 4)

正向表

A 1 3 4 6 6 7 10

B. 2. 4 5 1 4 3 1 3 4

-