[수학]

과학고 R&E 결과보고서

그래프 이론과 활용 가능성에 대한 연구

연 구 기 간 : 2013. 3. 1 ~ 2014. 2. 28

연 구 책 임 자 : 김건수(전북과학고)

지 도 교 사 :

참 여 학 생 : 봉승민(전북과학고)

강인(전북과학고)

김승철(전북과학고)

이상현(전북과학고)

소지섭(전북과학고)

한국과학창의재단

Korea Foundation for the Advancement of Science & Creativity

요 약 문

사업목표	그래프 이론의 여러 내용들과 이를 이용한 실생활의 문제 해결
사업추진내용	본 연구 프로그램의 교육 및 연구를 수행할 핵심 내용은 (1) 그래프 이론의 정의 및 개념 이해하기 (2)기본적인 그래프들의 개념 및 특성 이해하기 (3)오일러 공식에 대해 이해하기 (4)그래프와 행렬의 연관 관계 및 그래프의 행렬화 이해하기 (5)그래프 채색(graph coloring)에 대해 이해하기 (6)그래프의 매몰(graph embedding)과 Heawood의 지도 채색에 대해 이해하기 (7)그래프 이론의 실생활에 활용 이해하기
사업추진실적 및 성과	1.기본적인 그래프 연결그래프/완전그래프/정규그래프/이분할-완전 이분할 그래프/동형 그래프/회로그래프/평면그래프/쌍대그래프 2.오일러 공식 3.그래프와 행렬 -그래프의 수치화 -방향성이 있는 그래프의 수치화 4.그래프 채색 -꼭짓점 채색(vertex-colorings) -채색다항식(chromatic polynomial) 5.그래프의 매몰과 Heawood의 지도채색 -매몰의 정의 -류의 정의 및 그래프에 따른 류의 개수 -구, 토러스에서의 그래프 매몰 6.그래프의 실생활에 적용을 통한 문제 해결 -채색 다항식을 이용한 시간표 작성 문제 해결 -그래프의 행렬화를 이용한 연해안 생태계 문제의 해결
중심어	정점, 선분, 그래프, 다중 선분, 환, 단순 그래프, 연결, 인접, 근접, 차수, 악수정리, 연결그래프, 완전그래프, 정규그래프, 이분할 그래프, 완전 이분할 그래프, 동형그래프, 평면그래프, 회로그래프, 쌍대그래프, 오일러공식, 행렬, 그래프의 수치화, 인접행렬, 동형, 동형사상, 유향그래프, 꼭짓점 채색, 채색다항식, 그래프 매몰, 류, 구, 토러스, 시간표, 연해안 생태계

제 1 장 사업개요

1. 연구의 필요성 및 목적

우리는 지금 하루가 다르게 변화하는 시대에 살고 있다. 수학에서도 많은 이론이 발견되고 있으며 그 어느 때보다도 다양한 분야에 깊이 있게 관계되고 있다. 그 분야 중에서도 특히 그래프이론이 현대에 들어 주목을 받고 있다. 또한 실생활에 연관하여 많은 문제 해결에 기초가 되고 있으며 앞으로 컴퓨터가 계속 발전하면서 그 중요성을 더욱 드러내고 있다.

현대사회에서는 지식 기반 정보화 사회로, 대상과 대상간의 관계가 인터넷 사용의 대중화에 기인하여 더욱 더 중요시 되고 있다. 또한 경제가 활성화되고 발전하면서 이러한 관계들은 더욱 더 복잡해지고 있다. 따라서 그러한 관계들을 해석하고, 단순화하여 대상간의 관계에 관한 문제를 해결하는 능력이 나날이 현대사회에서 중대시 됨에 따라 그래프이론의 이해를 통해 이와 같은 지식 활용 과정이 가능하게 된다.

2. 연구 범위

우리 연구팀은 ‘기본적인 그래프에 대한 성질’ 악수정리, 평면그래프에서의 악수 보조정리, 오일러 공식, 완전그래프, 정규그래프, 이분할그래프, 완전 이분할 그래프, 동형그래프, 평면그래프, 회로 그래프, 경로 그래프, 입방체 그래프, 쌍대그래프, 수형도와 수식, 이진수형도, 전위순회, 중위순회, 후위순회, 생성수형도, Prim 알고리즘, Kruskal 알고리즘, Reverse-Delete 알고리즘,‘유향 그래프에서의 DMST 알고리즘, Prim DMST 알고리즘, Advanced Prim DMST 알고리즘, ‘행렬을 이용한 그래프 이론의 해결’ 그래프의 수치화, 인접행렬과 그래프, 동형사상, 유향그래프의 수치화, 차수행렬과 그래프, 꼭짓점 채색, 채색 다항식, 4색 문제, 그래프 임베딩, Heawood의 지도채색 정리 등 그래프이론의 전반적인 부분의 연구를 진행했으며 이에 대한 기초적인 자료 조사 및 기존의 연구를 토대로 실제 현대사회에서 일어나는 이산적 문제 상황을 수학적 모델(시간표 문제, 먹이사슬 등)에 적용했다.

3. 이론

그래프이론은 이산 수학의 한 분야로서 유한개의 정점과 변의 결합양식에 관한 이론이다. 그래프 이론 중에서 그래프종류는 평면그래프, 이분그래프, 완전그래프, 오일러회로, 해밀턴회로 등이 있고, 특히 수형도(트리)는 컴퓨터에 많이 이용되고 있는 분야이다. 또한 행렬을 이용하여 최단 경로를 구할 수 있고, Matrix- Tree 정리를 통한 생성수형도의 개수도 구할 수 있다. 이렇게 그래프이론은 복잡한 사회흐름을 단순화하며, 수치로 나타내기 힘들 것들을 수학적 모델링을 통하여 수치로 나타냄으로써 문제를 가시화하고, 도식화하여 더욱 쉽고, 효율적으로 해결할 수 있도록 한다. 그래서 지하철 노선도, 공학에서의 전기회로, 전 세계 공항들로 이루어진 네트워크, 도시계획, 교통문제, 조직문제, 사회구조문제, 최단거리 찾기, 컴퓨터의 이론설계, 시스템 해석, 패턴 인식, 먹이사슬 등에 그래프이론이 사용되는 등 응용분야를 넓혀가고 있다.

제 2 장 사업 추진전략 및 방법

제 1절. 추진전략

그래프에 대해서 연구하기 위해서는 몇 가지 사전 준비가 필요하다. 여러 가지 그래프, 행렬, 채색다항식, 수학적 모델링 등에 대한 개념이 필요하다. 이러한 부분이 연구 학생들에게 충분히 갖추어져 있는가를 고려하면서, 또 어느 시기에 이러한 개념들이 응용하기에 충분한 지를 충분히 검토하면서 학생들에게 과제를 자세히는 것이 좋을 것이다. 더군다나 개정된 교육과정에서는 이산수학이 포함되어 있기 때문에 그래프와 행렬에 대한 기본 개념에 대해서 알고 있을 것이다. 하지만 채색 다항식과 수학적 모델링과 같은 당장 사용해야 할 개념들은 수업을 해 주는 것이 좋다. 또한 연구 학생들이 각종 관찰 자료를 주고 수학적인 법칙을 발견할 수 있는 시간을 충분히 줄 필요가 있다. 또한 이를 체계적으로 정리하는 연습을 시킬 필요가 있다. 스스로 탐구하고 체계적이고 논리적으로 정리하는 과정은 본 연구에서 얻을 수 있는 소중한 경험이기 때문이다.

제 2절. 추진체계 및 연구방법

연구팀 조직은 연구책임교사, 연구 학생으로 구성되며, 연구팀 역할 및 연구방법은 다음과 같다.

가. 본 연구팀은 연구책임교사 1명(수학)과 학생 5명으로 구성한다.

나. 교사는 학생들이 탐구 수행을 할 수 있도록 동기부여와 간단한 내용 설명을 하며, 연구의 방법이나 사고의 전략 등을 지도한다.

다. 5명의 학생은 휴일, 저녁시간 등을 통해 수시로 만나 서로의 연구 결과 및 정보를 교환하고 토의한다. 자료 조사는 기본적으로 5명 모두의 몫이다. 다만 연구의 충실도를 위해 발표자, 발표자료 준비, 논문 작성 등 주 담당 영역을 맡는다.

라. 각 영역을 담당하는 학생은 자기 영역에 대한 자료 수집을 총괄하고, 토론을 주재하며, 보고서를 작성한다.

제 3장 사업 추진 내용 및 결과

제 1절. 사업 추진 내용

년	월	일정	연 구 활 동 및 지 도 내 용
2013	3	3주	- 연구 주제 선정 및 자료 수집
		4주	- 그래프 이론에 대한 자료 수집 심화
	4	1주	- 1차 여러 가지 그래프 세미나 (평면, 연결, 완전 그래프)
		2주	- 2차 여러 가지 그래프 세미나 (정규, 이분할, 동형 그래프)
		3주	- 3차 여러 가지 그래프 세미나 (회로, 경로, 쌍대 그래프)
		4주	- 수식과 그래프 1 (그래프 판별식에 대해)
	5	1주	- 수식과 그래프 2 (오일러 공식에서의 유도)
		2주	- 수식과 그래프 3 (그래프와 수학적 귀납법)
		3주	- 오일러 회로와 해밀턴 회로 1 (오일러 경로와 회로에 대해)
		4주	- 오일러 회로와 해밀턴 회로 2 (경로, 회로 판별식, 필요충분조건)
	6	1주	- 오일러 회로와 해밀턴 회로 3 (해밀턴 경로와 회로에 대해)
		2주	- 오일러 회로와 해밀턴 회로 4 (경로, 회로 판별식, 필요조건)
		3주	- 수학적 모델링 1 (최소 순찰 경로, 청소차)
		4주	- 4차 여러 가지 그래프 세미나 (가중 그래프, 유향 그래프)
	7	1주	- 행렬과 그래프 1 (그래프를 행렬로 나타내는 여러 가지 방법)
		2주	- 행렬과 그래프 2 (행렬식과 그래프의 관계)
		3주	- 수형도 1 (기초적인 수형도에 대해)
		4주	- 수형도 2 (숲, 생성 수형도, 부분 수형도 등)
	8	1주	- 심화 수형도 1 (트리와 이진 트리)
		2주	- 심화 수형도 2 (이진트리 탐색 알고리즘)
		3주	- 행렬과 그래프 3 (소행렬식과 여인수, 생성수형도의 관계)
		4주	- 수형도 탐색 알고리즘 1 (Prim, Kruscal 기초)
	9	1주	- 수형도 탐색 알고리즘 2 (알고리즘 보완, 실생활 설계)
		2주	- 수형도 탐색 알고리즘 3 (진보된 Prim 알고리즘, DMST)
		3주	- 수형도 탐색 알고리즘 4 (역삭제 알고리즘)
		4주	- 수학적 모델링 2 (알고리즘의 실생활에서의 응용)
	10	1주	- 수학적 모델링 3 (먹이사슬)
		2주	- 그래프 채색 1 (채색 다항식)
		3주	- 그래프 채색 2 (4색 정리와 5색 정리에 대해)
		4주	- 그래프 채색 3 (채색 공식과 부등식)
	11	1주	- 그래프 채색 4 (위상수학에서의 그래프 이론)
		2주	- 그래프 채색 5 (입체 공간에서의 류(genus)를 포함하는 채색)
		3주	- 수학적 모델링 4 (시간표 제작 (1))
		4주	- 수학적 모델링 5 (시간표 제작 (2))
	12	1주	- 성과 정리 및 보고서 작성
		2주	- 발표 자료 준비
		3주	- 평가

제 2절. 사업 결과

3월부터 12월까지의 연구 기간을 거치면서 그래프 이론에 대한 전반적인 이해는 물론 실생활에서의 그래프 이론 적용에 대해 깊게 생각해볼 수 있는 기회를 가질 수 있었다. 그래프 이론을 통해 실생활 문제에 수학이 직접적으로 어떻게 활용될 수 있는지에 대해 수학적 모델링을 진행하면서 점진적으로 알아갈 수 있었다.

제 4장 성과 및 활용 계획

1. 연구 성과

그래프 이론에 대한 이론적 탐구와 실용적 탐구를 진행하면서 이론적, 실용적으로 모두 성과를 낼 수 있었다. 이론적으로는 여러 가지 그래프와 수형도에 사용될 수 있는 수식들을 찾고 증명해 그래프 판별식 등에 이용할 수 있다는 것을 알아냈고, 실용적으로는 수학적 모델링을 통해 그래프 이론이 사회 문제 전반에 이용될 수 있다는 것을 알 수 있었다.

<u>1.1 정리</u>

Handshaking(악수정리)

$G(V,E)$가 그래프이고 $|E|$는 선분의 개수일 때, 다음 식이 성립한다.

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| \quad (G(V,E): \text{그래프}, |E|: \text{선분의 개수})$$

<u>1.2 정리</u>

그래프는 홀수 차수인 정점을 짝수 개 갖는다.

(증명)

$$2|E| = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v) \quad (V_1: \text{홀수 차수인 정점의 집합}, V_2: \text{짝수 차수인 정점의 집합})$$

이므로 $|V_1|$이 짝수이다.

<u>1.3 정리</u>

Handshaking lemma for planar graph(평면 그래프에서의 악수보조정리)

평면 그래프를 구성하는 영역들의 차수의 총합은 선분 수의 두 배이다.

<u>1.4 정리</u> 그래프 G가 v개의 정점과 e개의 선분을 가진 연결평면그래프일 때, $v \geq 3$이면 $e \leq 3v - 6$이다.

(증명) $v = 3$일 때 $e \leq 3 = 3v - 6$. 이제 $v \geq 4$일 때, G를 지도로 그리고 그 영역 수를 r이라고 하자. 각 영역에서의 선분의 수를 모두 더한 것을 N이라 하자. 그러면 각 영역에 적어도 3개의 선분이 있으므로

$$N \geq 3r$$

을 얻는다. 그리고 N에서 선분이 한 번 또는 두 번 계산되므로

$$N \leq 2e$$

를 얻는다. 그러므로 $3r \leq 2e$를 얻고

$$2 = v - e + r \leq v - e + \frac{2}{3}e = v - \frac{1}{3}e$$

즉, $e \leq 3v - 6$이다. <정리6>을 통해 K_5와 $K_{3,3}$이 평면그래프가 아님을 알 수 있다.

1.5 정리 그래프 G가 삼각형을 갖지 않는 v개의 정점과 e개의 선분으로 이루어진 연결평면단순그래프일 때, $v \geq 3$이면 $e \leq 2v-4$이다.

(증명) 삼각형이 없는 단순그래프에서 $\deg(v) \geq 4$이므로

$$N \geq 4r$$

을 얻는다. 그리고 N에서 선분이 한 번 또는 두 번 계산되므로

$$N \leq 2e$$

를 얻는다. 그러므로 $4r \leq 2e$를 얻고

$$2 = v - e + r \leq v - e + \frac{1}{2}e = v - \frac{1}{2}e$$

즉, $e \leq 2v-4$이다.

2.1 정리 꼭짓점이 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 인 그래프 G의 인접행렬을 $A = A(G)$ 라 하자. 그러면 행렬 A^P의 (i,j) 성분은 꼭짓점 v_i에서 꼭짓점 v_j로 가는 길이가 p인 길의 개수이다.

(증명)
(길이 p에 대한 수학적 귀납법)

i) $p=1$일 때는 분명히 위의 정리가 성립한다.

i)) $A^{p-1} = (a_{ij}^{(p-1)})$ 라 하고 $a_{ij}^{(p-1)}$가 꼭짓점 v_i에서 꼭짓점 v_j로 가는 길이가 $p-1$인 길의 개수라고 하자.
iii) 이제 $A^p = (a_{ij}^p)$라고 하면

$A^p = A^{p-1}A$이므로 $a_{ij}^{(p)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(p-1)} a_{kj}$ 이다.

v_i에서 v_j로 가는 길이가 p인 길은 v_i에서 v_k로 가는 길이가 $p-1$인 길과 v_k.에서 v_j로 가는 길이 가 1인 길을 붙인 것이기에 $a_{ij}^{(p)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(p-1)} a_{kj}$ 는 v_i에서 v_j로 가는 길이가 p인 길의 갯수이다.

<u>2.2 정리</u> 그래프의 인접행렬 A에 대하여 행렬 A^2의 대각선에 있는 값은 그래프의 꼭짓점의 차수와 같다.

(증명)
[4.1.2 정리]에 의해 A^2의 각 값은 해당하는 두 꼭짓점을 잇는 두 개의 변으로 이루어진 경로의 갯수이므로 A^2의 대각선의 각 값은 각 꼭짓점에서 원래 꼭짓점까지의 두 개의 변으로 이루어진 경로의 갯수이므로 각 꼭짓점에서 인접해 있는 꼭짓점의 수와 같다. 즉 각 값은 꼭짓점의 차수와 같다.

두 개의 그래프 G와 G'가 같은 개수의 Vertex와 Edge들을 가지고 있다면 두 그래프의 점들과 이들을 잇는 변의 구조가 같아서 두 그래프의 형 태가 같을까? 라는 물음을 같게 된다. 두 그래프가 점과 변 사이의 연결 구조가 같음을 그래프 동형이라 하고 이에 대한 정의를 소개할 것이다.

<u>3.1 정리</u>
$n \geq 1$일 때, 완전그래프 K_n의 채색다항식은

$$P(K_n, x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n+1)$$

(증명)
$x < n$이면 적절한 색칠이 불가능하다. 왜냐하면 K_n의 모든 꼭짓점 사이에 변이 존재하므로 한 꼭짓점에 이웃한 꼭짓점이 $n-1$개다. 따라서 이웃한 꼭짓점들을 다른 색으로 칠하려면 적어도 n가지 색이 있어야 한다. 그러므로 $x \geq n$라 가정하자. 꼭짓점 v_1에 x가지의 색을 칠할 수 있다. 꼭짓점 v_2에 $x-1$가지의 색을 칠할 수 있다. (v_1과 v_2가 이웃하여 있으므로 같은 색을 칠할 수 없다). 꼭짓점 v_3에 $x-2$가지의 색을 칠할 수 있다 (v_3는 v_1, v_2와 이웃하여 있다). 꼭짓점 v_4에 $x-3$가지의 색을 칠할 수 있다 (v_4는 v_1, v_2, v_3와 이웃하여 있다). 이와 같이 계속해 나가면 v_n에는 $x-(n-1) = x-n+1$가지의 색을 칠할 수 있다. 따라서 곱의 원리에 의하여
$P(K_n, x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n+1)$가지의 색칠하는 방법이 있다.

<u>3.2 정리</u> 그래프 K_n의 색채수는 n이다.
(증명)
$x < n$이면 $P(K_n, x) = 0$이고
$P(K_n, n) = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 1 = n!$이다. 따라서 그래프 K_n의 색채수는 n이다.

<u>**3.3 정리**</u> 완전이분그래프 $K_{r,s}$의 채색다항식은

$$P(K_{r,s},x)=x^r(x-1)^s$$

(증명)

완전이분그래프의 꼭짓점의 집합을 V라 하고 꼭짓점의 개수를 v라 하자. 그렇다면, 완전이분그래프의 꼭짓점을 두 집합으로 나눌 수 있다. 각각의 꼭짓점의 집합을 V_1, V_2라 하고, v_1, v_2가 $v_1\in V_1, v_2\in V_2$인 꼭짓점의 개수라고 하면, $v_1+v_2=v$가 성립한다. 이 때, $v_1=r, v_2=s$라 하면, V_1의 꼭짓점 집합에는 각각의 꼭짓점에 x가지의 색을 칠할 수 있고, V_2의 꼭짓점 집합에는 각각의 꼭짓점에 $x-1$가지의 색을 칠할 수 있다 (V_1의 모든 꼭짓점은 각각 V_2의 꼭짓점들과 이웃하여 있다). 따라서 곱의 원리에 의하여

$P(K_{r,s},x)=x^r(x-1)^s$가지의 색칠하는 방법이 있다.

<u>**3.4 정리**</u> 그래프 $K_{r,s}$의 색채수는 2이다.

(증명)

$x=1$이면 $P(K_{r,s},x)=0$이고

$P(K_{r,s},x)=x^r(x-1)^s$이다. 따라서 그래프 $K_{r,s}$의 색채수는 2이다.

<u>**3.5 정리**</u>

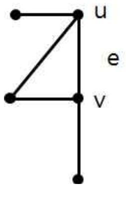
(1) 그래프 G가 꼭짓점을 공유하지 않는 두 부분그래프 G_1, G_2로 나뉠 때,

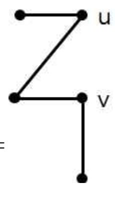
$$P(G,x)=P(G_1,x)P(G_2,x)\text{이다.}$$

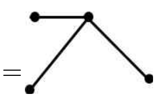
(2) 그래프 G가 꼭짓점을 공유하지 않는 m개의 그래프 $G_1, G_2, \cdots, G_m$로 나뉠 때

$$P(G,x)=P(G_1,x)P(G_2,x)\cdots P(G_m,x)\text{이다.}$$

그래프 G와 한 변 e를 택하여 $G_e=G-e$라 하고, G_e에서 두 꼭짓점을 동일시 한 것을 G^e라 하자.

$G=$ 

$G_e=$ 

$G^e=$ 

여기서 G_e는 G보다 변의 수가 하나 적고 G^e는 G보다 변의 수와 꼭지점의 수가 작다.

<u>3.6 정리</u> e가 그래프 G의 한 변일 때

$$P(G,x) = P(G_e,x) - P(G^e,x)$$

이다.

(증명) 변 e의 양끝점이 a,b라 하자. G_e의 $x-$색칠은 다음 두 종류로 분류할 수가 있다.

(ⅰ) a와 b가 다른 색

(ⅱ) a와 b가 같은 색

a와 b가 다른 색을 가지는 경우는 G의 적절한 색칠이다.

a와 b가 같은 색을 가지는 경우는 G^e의 적절한 색칠이다.

한편 G_e의 다른 꼭짓점들은 G와 똑같은 상태이다. 그러므로

$P(G_e,x) = P(G,x) + P(G^e,x)$ 또는

$P(G,x) = P(G_e,x) - P(G^e,x)$ 이다.

<u>3.7 정리</u> S_h 위의 2-cell embedding 그래프 G에서, v,e,f를 그래프 G의 꼭짓점, 모서리, 영역의 개수라 할 때 $v-e+f=2-2h$

(증명)

h의 귀납법 통해 증명한다. 우리는 이미 $h=0$에서의 결과를 알고 있다 (오일러 공식). 따라서 일반적인 S_h에 대해서 생각해보자. G의 정점을 지나지 않는 noncontractible 회로 C를 찾는다. 우리는 이미 2-cell embedding 그래프이기 때문에, 그 회로는 그 영역안에 완전히 속해있지 않는다. 따라서 그래프 G의 모서리들은 교차점을 가지고 있다.

다음으로 (a) 모든 C와 G의 교차점에 정점을 더하는 방법 혹은 (b) 매몰된 C회로를 통해 모서리를 더하는 방법을 통해 새로운 그래프인 G'을 만든다. 같은 평면에서 그 그래프는 여전히 2-cell embedding된 그래프이다.

회로 C와 그래프 G의 모서리 사이에 k개의 교차점이 있다고 해보자. 그렇다면 그래프 G'는 $v+k$개의 꼭짓점을 가지고, $e+2k$개의 모서리 (k개의 하위 영역과 k개의 새로운 모서리)와 $f+k$개의 영역을 가진다.

이제, 그 회로의 중심을 따라 자르면, handle을 따라 자르게 된다. 이것을 capping operation 이라고 부른다. 동시에, 회로 C의 각각의 정점들과 모서리들은 복제된다. 잘린 그래프 G''는 이제 $v+2k$개의 정점, $e+3k$개의 모서리를 가진다. 왜냐하면 두 개의 영역으로 잘렸기 때문에, 그 두 개의 생성된 회로 C는 경계가 있기 때문이다. 따라서 그 embedding 그래프는 $f+k+2$개의 영역을 갖게 된다 반면 그 과정에서, handle이 하나 줄어들게 된다. 수학적 귀납법에 의해

$$(v+2k)-(e+3K)+(F+k+2)=2-2(h-1)$$

3.8 정리 S_h위의 2−cell embedding 그래프 G에서, v, e, f를 그래프 G의 꼭짓점, 모서리, 영역의 개수라 할 때

$$e \le 3v + 6(h-1)$$

(증명) 각 영역에서의 선분의 수를 모두 더한 것을 N이라 하자. 그러면 각 영역에 적어도 3개의 선분이 있으므로 $N \ge 3f$ 를 얻는다. 그리고 N에서 선분이 한번 혹은 두 번 계산되므로 $N \le 2e$ 그러므로 $3f \le 2e$를 얻는다. $2-2h = v-e+f \le v-e+\frac{2}{3}e = v-\frac{1}{3}e$
즉, $e \le 3v + 6(h-1)$

3.9 정리 S_h위의 2−cell embedding 그래프 G에서, v, e, f를 그래프 G의 꼭짓점, 모서리, 영역의 개수라 할 때

$$h \ge \lceil \frac{1}{6}(e-3v)+1 \rceil$$

실제로, K_5의 경우 $e=10$, $v=5$ 로, $h \ge \lceil \frac{1}{6} \rceil$, 즉 최소의 $h=1$로, 정확히 들어맞는다. 하지만 $K_{3,3}$의 경우, $e=9, v=6$로, $h \ge \lceil -\frac{1}{2} \rceil$, 즉 최소의 $h=0$이란 값이 나온다. 이것은 실제의 경우와 다르다. 이를 위해 이분할 그래프의 경우를 따로 정의한다.

3.10 정리 S_h위의 2−cell embedding 그래프 G가 삼각형을 가지지 않을 경우, v,e,f를 그래프 G의 꼭짓점, 모서리, 영역의 개수라 할 때

$$e \le 2v + 4(h-1)$$

(증명) 삼각형이 존재하지 않으므로, $4f \le 2e$ 이다. 따라서 $f \le \frac{1}{2}e$ 이다.

$2-2h = v-e+f \le v-e+\frac{1}{2}e = v-\frac{1}{2}e$ 즉, $e \le 2v+4(h-1)$

3.11 정리 S_h위의 2−cell embedding 그래프 G가 삼각형을 가지지 않을 경우, v,e,f를 그래프 G의 꼭짓점, 모서리, 영역의 개수라 할 때

$$h \ge \lceil \frac{1}{4}(e-2v)+1 \rceil$$

이는, $K_{3,3}$의 경우인 $e=9, v=6$일 때, $h \ge \lceil \frac{1}{4} \rceil$, 즉 최소의 $h=1$로, 정확히 들어맞는다.

3.12 정리 완전그래프 K_n은 S_h위에 embedding 된다고 할 때,

$$h \ge \lceil \frac{1}{12}(n-3)(n-4) \rceil \quad (\text{단, } n \ge 3)$$

(증명) 완전그래프 K_n의 꼭짓점, 모서리의 개수는 각각 $n, \frac{n(n-1)}{2}$이므로, v,e를 꼭짓점, 모서리의 개수라 할 때, $v=n, e=\frac{n(n-1)}{2}$이다. 이 v,e를 $h \geq \lceil \frac{1}{6}(e-3v)+1 \rceil$에 대입한다. 그러면,

$$h \geq \lceil \frac{1}{6}(\frac{1}{2}n(n-1)-3n)+1 \rceil$$

$$= \lceil \frac{1}{12}(n-3)(n-4) \rceil$$

즉, K_5부터 genus가 필요하다는 사실을 이끌어 낼 수 있다. $n=3$혹은 $n=4$ 의 경우, $h=0$이 나오고, $n \geq 5$일 때부터 $h \neq 0$이 된다.

3.13 정리 완전이분할그래프 $K_{r,s}$가 S_h위에 embedding 된다고 할 때,

$$h \geq \lceil \frac{1}{4}(r-2)(s-2) \rceil \quad (\text{단, } r,s \geq 2)$$

(증명) 완전 이분할 그래프 $K_{r,s}$의 꼭짓점의 개수는 $r+s$, 모서리의 개수는 rs이다. 꼭짓점과 모서리를 v,e라 했을 때, $v=r+s$, $e=rs$이다.

완전이분할그래프는 삼각형이 존재하지 않으므로, $h \geq \lceil \frac{1}{4}(e-2v)+1 \rceil$의 v,e에 대입한다. 그러면,

$$h \geq \lceil \frac{1}{4}(rs-2(r+s))+1 \rceil$$

$$= \lceil \frac{1}{4}(r-2)(s-2) \rceil$$

즉, $K_{3,3}$부터 genus가 존재한다는 것을 알 수 있다.

2. 수학적 모델링(시간표 문제)

사업 추진에 따른 그래프 이론의 기본 및 심화적인 이해를 바탕으로 시간표 문제를 해결할 수 있는 그래프 컬러링 알고리즘을 나타낼 수 있었다. 현실 세계에서 부딪히는 문제들 중 수학적인 논리나 수식으로 해결하기 힘든 시간표 작성을 그래프 이론에 대한 총체적인 이해를 바탕으로 새롭게 작성한 것이다.

(1) Let j := 1, H:=G

(2) H상에서 가장 간선이 많은 정점을 V_j라 한다.

(3) 위에서와 같이 모든 트리플을 구한 후 y'를 찾는다. 이러한 정점이 없을 경우(즉 m_i =0) V_j에 연결되지 않고 가장 많은 간선을 가진 정점을 구하여 y'로 한다.

(4) y'를 V_j로 합치고 더 이상 가능한 노드가 없을 때까지 3에서 시작하고 더 이상 가능한 노드가 없을 경우 H:=H − $\{V_j\}$, j:=j+1를 한 후 2에서 다시 시작한다.

(5) 더 이상 정점이 존재하지 않을 경우, 중단한 후 합쳐진 모든 $V_j(1 \leq i \leq j)$에 칼라 i를 부여한다. 이것은 그래프 G상에서 j칼라링이 된다.

제 5장 결 론

그래프 이론은 실생활에서 널리 활용되어 쓰이고 있다. 그 예로는 지하철 노선도, 공학에서의 전기회로, 유기화학에서의 분자식 모형, 전 세계 공항들로 이루어진 네트워크 등 도시계획, 교통문제, 조직문제, 사회구조문제, 최단거리 찾기 등 그 응용 분야가 광범위하며 또한 그래프 이론은 실질적인 응용도 많아 최근 더욱 관심을 끌며 발전되고 있는 분야이다. 하지만 7차 개정 교육과정에서 그래프이론은 수학Ⅰ에서 큰 비중을 두고 있지 않은 부분이다. 그래서 본 연구에서는 '기본적인 그래프에 대한 성질' 악수정리, 평면그래프에서의 악수보조정리, 오일러 공식, '그래프 종류' 연결그래프, 완전그래프, 정규그래프, 이분할그래프, 완전 이분할 그래프, 동형그래프, 평면그래프, 회로 그래프, 경로 그래프, 입방체 그래프, 영 그래프, 쌍대그래프 등 ,'수형도' 수형도의 정의,정리, 이진수형도, 전위순회, 중위순회, 후위순회, 생성수형도, '수형도의 탐색 알고리즘' Prim의 알고리즘, Kruskal의 알고리즘, Reverse-Delete 알고리즘, Boruvka or Sollin 알고리즘, '유향 그래프에서의 DMST 알고리즘' Chu-Liu/Edmonds 알고리즘, Prim DMST 알고리즘, Advanced Prim DMST 알고리즘, '행렬을 이용한 그래프이론의 해결' 그래프의 수치화, 인접행렬과 그래프, 동형사상, 유향그래프의 수치화, Matrix-Tree 정리, 차수행렬과 그래프, '그래프의 채색에 관해' 꼭짓점 채색, 브룩스 정리, 채색 다항식, 4색 문제, '그래프 임베딩' 그래프의 매몰, Heawood의 지도채색 정리, 등에 대한 구체적인 지식을 얻고 결론적으로 '수학적모델링'(시간표 문제, 먹이사슬 등)을 통하여 그래프 이론에 대해 탐구했다.

이로써 우리는 7차 개정 교육과정에서의 그래프이론을 넘어서서, 그래프에 대한 전반적인 내용을 정리하였고, 정리한 내용을 토대로 우리만의 증명방법을 탐구했다. 더 나아가 수학적 모델링 적용을 통해 연구한 것을 실생활에 적용시켰다. 끝으로 R&E를 진행하면서 한 차원 높은 수학적 사고력을 가지게 되었다.

제 6 장 참고문헌

1. 그래프 칼라링 알고리즘을 이용한 시간표 작성에 관한 연구 (저자 박상혁)
2. 그래프이론과 그의 적용가능성
3. 이산수학의 효율적 지도방안 연구 : 그래프 단원을 중심으로 (저자 김규훈)
4. 실제문제들의 그래프 이론을 이용한 수학적 모델링 (저자 김은숙)
5. 4색 문제와 그래프의 응용 (저자 신지혜)
6. 이산수학 II 제2판 그래프이론 입문 (저자 정치봉)
7. 조합 및 그래프이론 (저자 김정진)
8. 그래프이론 (저자 윤영진)
9. 조합론과 그래프이론 (저자 조성진, 김한두)
10. 이산수학 (Discrete Mathematical Structures) (저자 KOLMAN, BUSBY, ROSS 옮김 김선경 김진상 승현우 이태경 임재걸)
11. 이산수학 (저자 Judith L. Gersting 공역 김문현 김응모 엄영익 조대호 추현승)
12. 이산수학 (공역 공은배 권영미 김명원 김종찬 김태완 정은화 정진우)
13. 그래프 색칠문제에 대한 연구 (저자 김경희)
14. 방향 그래프의 Prim 최소신장트리 알고리즘 (저자 최명복)
15. 수학적 모델링을 통한 고등학교 이산수학 탐색 : 그래프 영역을 중심으로 =A Search of Discrete Mathematics in High School through the Mathematical Modeling : Focuse on the Graph Theory (저자 선주달)

제 7장 부록

Ⅰ. 서론(그래프 이론의 배경)

그래프는 대상을 정점(마디; vertex)으로 그들 사이의 관계들을 선분(가지; edge, arc)으로 대체해 대상 사이에서 나타나는 관계를 편리하고 쉽게 표현한다. 이에 대한 활용은 실생활에서 여러 문제들을 그래프 문제로 모델링하고 그래프 문제를 풀어서 수학적인 해를 구한 다음에 이 해를 실생활에서의 해로 적용함으로 문제를 해결한다.

그래프는 주어진 몇 개의 정점과 그 정점을 끝점으로 하는 몇 개의 선분으로 이루어진 도형을 말한다. 지하철 노선도는 실생활에서 그래프 활용의 대표적인 경우이다. 지하철 노선도의 경우 현실적인 방위나 거리 등은 무시되고, 대폭적으로 생략된 그림이 그려지는 것이 일반적이다. 그럼에도 불구하고 그 그림이 효율적으로 표현되었다고 생각되어지는 것은 사람들에게 필요한 정보, 즉 역과 역이 몇 개의 선분으로 연결되어 있는가, 환승은 어느 역에서 하면 좋은가 등의 유용한 정보를 노선도를 통해 비교적 쉽게 파악할 수 있기 때문이다. 그래프 이론은 실제로 공학에서의 전기회로, 유기화학에서의 분자식 모형, 전 세계 공항들로 이루어진 네트워크 등 많은 예에서 찾아볼 수 있는 표현이며 교통문제, 조직문제, 사회구조문제, 최단거리 찾기 등 그 응용분야가 광범위하며 실질적인 응용도 많아 최근 더욱 관심을 끌며 발전되고 있는 분야이다.

이와 같이 여러 가지 다양한 현상에 공통적으로 적용될 수 있는 체계적인 원칙들을 이론이라 정의하면, 네트워크 또는 그래프적 구조를 지니고 있는 현상에 대한 이론을 '그래프 이론'이라 할 수 있을 것이다. 그래프는 개념 자체가 정점과 정점 사이의 추상적인 관계를 토대로 하여 이룩된 것이기에 이에 관한 이론은 거의 모든 의사결정에 응용할 수 있다고 해도 과언이 아니다.

그래프 이론을 이용한 문제 해결은 1736년 스위스의 수학자 오일러의 논문에 의해 최초로 시작되었다. 오일러(Euler)가 1736년에 발표한 논문"So-lutio Problematis ad geometriam situs pertinentis"에서 "쾨니히스베르크의 다리문제(Seven Bridges of Königsberg)"를 다루고 있다. 오일러는 순수한 수학적인 호기심에서 쾨니히스베르크(Kalinigrad)에 있는 7개의 다리를 한 번씩만 건너서 두 개의 섬과 강의 양쪽 뚝을 중복하지 않고 산책할 수 있는가를 고찰하여 보았다. 오일러 연구 이후 1852년 영국의 수학자 프랜시스 구드리가 "4색 문제"를 제시하였으며 이 문제를 풀기 위해 그래프 이론의 개념이 등장하였다.

이후의 그래프 이론은 컬코프(Kirchhoff)에 의해 전기회로에, 케일리(Cayley)에 의해 유기화학에, 해밀턴(Hamilton)에 의해서 퍼즐의 연구에 응용되었으나 그래프 이론이 학문으로 인정되고 널리 연구되기 시작한 것은 1920년대(20세기)부터다. 최근 들어 그래프 이론에 대해 관심이 높아진 이유 중 하나는 전산학, 화학, 전자공학, 언어학 등 다양한 분야에서 복잡한 문제들을 그래프로 나타내고, 그래프의 성질을 이용하여 해결하는 경우가 많고 도시계획이나 교통 문제 등과 같이 현대 생활에서 중요한 문제를 해결하는 데 그래프가 자주 사용되기 때문이다.

II. 그래프 이론

1. 포괄적인 그래프에 대해

가. 기본적인 그래프

<u>1.1.1 정의</u> 공집합이 아닌 유한개의 정점(vertex)의 집합을 $V(G)$로 나타내고 정점들 사이를 잇는 선분(edge)의 집합 $E(G)$로 나타내면 그래프 G를 $G(V,E)$라고 한다.

 정점들의 같은 쌍을 2개 또는 그 이상의 선분으로 연결한 것을 다중 선분(multiple edge)이라 하고 한 정점에서 그 자신으로 연결한 선분을 환(loop)이라고 한다. 환이나 다중 선분이 없는 그래프를 단순그래프(simple graph)라고 한다.
 정점 a와 b에 대해 선분 $e=(a,b)\in E$ 라면 e가 a와 b를 연결(connect)하고 있음을 의미하며, a는 b에 또는 b는 a에 인접(adjacent)한다고 한다. 또한 e는 a와 b에 근접되었다고 한다.
 $G(V,E)$가 그래프이고 $v\in V$는 정점일 때 v의 차수(degree) $\deg(v)$는 v에 근접된 선분의 개수를 의미한다. 하나의 선분은 정확하게 두 개의 정점들과 인접하기 때문에 정점들의 차수의 합은 $G(V,E)$에서 선분들의 수의 두 배이다. 한 선분이 두 개의 끝점을 갖는 것은, 두 손으로 악수하는 것과 같은 의미이기 때문에 악수정리라고도 한다.

나. 여러 가지 그래프

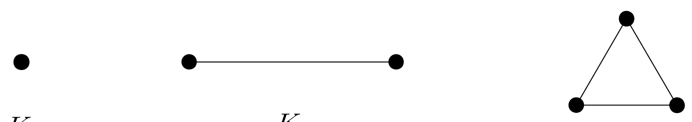
 각각의 그래프에 대해 기초적인 구조상의 특성에 맞추어 여러 가지 방법으로 그래프를 분류한다.

<u>1.1.1 정의</u> 연결그래프

 그래프에서 임의의 정점이 연결되었을 때 그 그래프를 **연결그래프**(connected graph)라고 한다. 그리고 어느 하나의 정점이라도 연결되어있지 않은 그래프를 비 연결그래프라고 한다.

<u>1.1.2 정의</u> 완전그래프

 $G(V,E)$가 그래프일 때 모든 정점 $u,v\in V(u\neq v)$에 대해 $(u,v)\in E$가 성립하면 그래프 G를 완전그래프(complete graph)라고 한다. 특별히 정점의 수가 n일 때 G를 K_n으로 나타낸다. 이것으로부터 정점의 수가 일정한 완전그래프는 유일하게 존재한다.

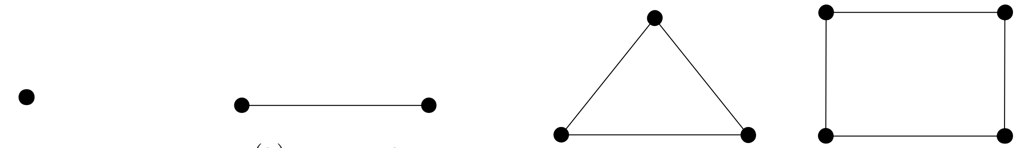


K_1 K_2 K_3

 완전그래프는 서로 다른 두 정점 사이에 항상 선분이 있으므로 K_n는 한 정점에서 $(n-1)$개의 정점과 선분을 만든다. 그러므로 각 정점의 차수 $(n-1)$이 된다. 또한, 선분은 두 정점을 연결하는 선분이므로 n개의 정점에서 서로 다른 두 정점을 뽑는 방법의 수 ${}_nC_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$이다. 즉, 완전그래프 K_n의 선분의 수는 ${}_nC_2$개다.

1.1.3 정의 정규그래프

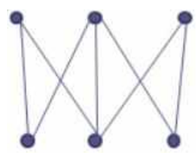
그래프에서 모든 정점의 차수가 같을 때 정규그래프(regular graph)라고 한다. 특히 모든 정점의 차수가 k인 정규그래프를 k−정규그래프라고 한다. k−정규그래프 G의 정점의 수가 n이면 G의 선분의 수는 $\frac{1}{2}kn$이다.

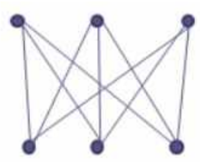


$(a)\,0-regular$ $(b)\,1-regular$ $(c)\,2-regular$

1.1.4 정의 이분할그래프, 완전 이분할 그래프

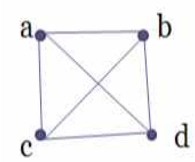
그래프 $G(V,E)$에서 E의 각 선분이 그의 한 정점은 V_1에 다른 한 정점은 V_2에 있도록 정점의 집합 V를 두 개의 서로소인 부분집합 V_1과 V_2로 분할할 수 있을 때, 이 그래프를 이분할그래프(bipartite graph)라고 한다. 이를 $K_{m,n}$로 표현한다. 그리고 $u_1 \in V_1, u_2 \in V_2$일 때 u_1과 u_2가 각각 V_2와 V_1의 임의의 정점과 오직 하나의 선분으로 연결되는 이분할 그래프를 완전 이분할 그래프라고 한다.

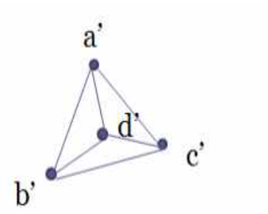




1.1.5 정의 동형그래프

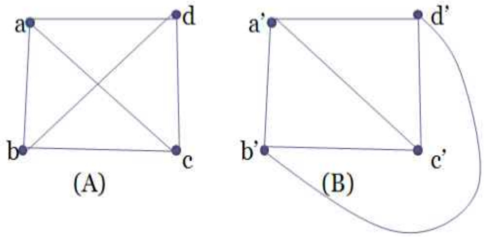
종종 두 그래프는 정확히 같은 형태를 가진다. 이것은 선분을 갖는 정점 집합 간에 일대일 대응이 존재한다는 의미에서 같은 형태이다. 즉, 두 그래프 $G_1(V_1,E_1)$과 $G_2(V_2,E_2)$에서 $f: V_1 \rightarrow V_2$를 정점들의 집합 사이의 함수로서 일대일 대응이라고 하자. $u, v \in V$에 대하여 (u,v)가 G_1의 선분이기 위한 필요충분조건은 $(f(u), f(v))$가 G_2의 변이다. 그러면 f는 G_1과 G_2 사이에 동형사상(isomorphism)이라고 하고 G_1과 G_2는 동형그래프라고 한다.





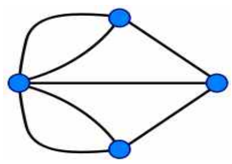
1.1.6 정의 평면그래프

선분들이 서로 교차하지 않도록 평면상에 그릴 수 있는 그래프를 평면그래프(planar graph)라고 한다. 그리고 이미 선분이 교차하지 않게 그린 그래프를 지도(map)이라고 한다. 지도의 선분을 따라 평면을 가위로 자른다면 평면은 여러 개의 조각으로 분할되는데, 이 조각을 영역(region)이라고 한다.
지도는 몇 개의 영역으로 나누어진다. 이 때, 임의의 영역 r의 차수 $\deg(r)$은 r의 경계를 이루는 회로의 길이이다.



<u>1.1.7 정의</u> 회로 그래프

단일 회로로 이루어져 있는 그래프를 회로 그래프(cycle graph)라고 하고, n개의 정점을 가질 때 C_n으로 나타낸다. C_n은 $2-regular\,graph$이고 n개의 선분을 갖는다.



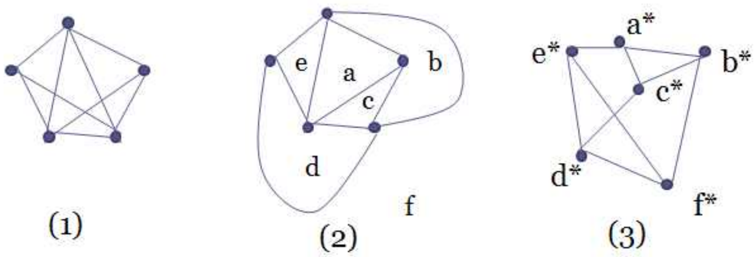
<u>1.1.8 정의</u> 쌍대그래프

연결평면그래프 G와 임의의 그래프 H에서 G의 각 영역을 점으로 대응시키고 그 면들 간의 상관관계를 선으로 나타낸 그래프가 H와 일치할 때 그 그래프 H를 G의 쌍대그래프라고 한다.

연결 평면 그래프 G의 쌍대 그래프 G^*는 다음의 세 단계를 거쳐 정의된다.

1. G의 지도를 선택한다.
2. G의 지도의 각 면의 내부에 한 점을 잡는다. 이 점을 G^*의 꼭짓점으로 한다.
3. G의 지도의 각 선분 e에 대하여 e의 양편에 있는 G^*의 꼭짓점들을 연결하여 이 선분을 G^*의 선분으로 한다.

다음은 연결평면 그래프에서 그의 쌍대그래프를 얻어내는 예이다.



(1)은 기존의 연결평면그래프이고 (2)는 그 연결평면그래프의 지도이다. 그리고 (3)은 (2)의 쌍대그래프이다.

쌍대그래프를 만들 때 주의해야 할 점은 바로 무한 면, 즉 (2)의 f를 빼놓으면 안 된다는 것이다. 이 무한 면 역시 하나의 면으로써 인접성을 지니므로 쌍대그래프 형성에 중요한 역할을 한다.

나. 오일러 공식

1.2.1 정의 Euler's formula(오일러 공식)
G가 연결 그래프일 때, 다음이 성립한다.

$$v-e+r=2 \;\; (v: \text{정점의 개수}, e: \text{선분의 개수}, r: \text{영역의 개수})$$

(증명) G를 연결 그래프라고 하고 하나의 정점으로 이루어졌다고 가정했을 때, $v=1$, $e=0$, $r=1$이다. 따라서 $v-e+r=2$이다.
다음으로 G는 두 개 이상의 정점으로 이루어졌다고 가정했을 때, G는 하나의 정점으로부터 다음의 두 가지 방법을 유한 번 사용하여 만들어질 수 있다.

- 새로운 정점을 추가하고 기존의 정점과 연결할 때 기존의 선분과 교차하지 않도록 한다.
- 이미 있던 두 정점을 연결하는데 기존의 선분과 교차하지 않도록 한다.

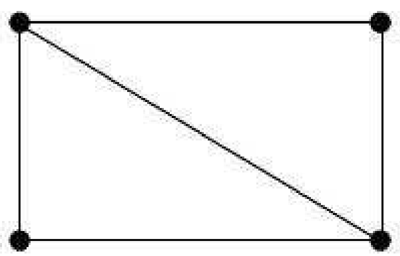
첫 번째 경우, v와 e의 값은 하나씩 증가하고 r의 값은 변하지 않으므로 오일러 공식 $v-e+r$의 값은 변하지 않는다. 두 번째의 경우, v의 값은 변하지 않고 e와 r의 값은 하나씩 증가한다. 따라서 오일러 공식 $v-e+r$의 값은 변하지 않는다. 즉, $v-e+r=2$이다.

2. 그래프와 행렬에 관해

그래프는 vertex와 edge를 이용하여 한눈에 알아보기 쉬운 시각 자료로 표현할 수 있다는 장점이 있지만, 이와는 다른 제약들도 가지고 있다. 먼저 언제나 그림으로 표현하는 것이 알아보기 쉬운 것은 아니기에 그림으로 표현했을 시 복잡한 그래프 문제는 해결하기 어려워진다는 단점이 있다. 또한 복잡한 그래프 문제를 컴퓨터를 이용하여 해결하려 해도 그림으로 표현된 그래프를 컴퓨터에 입력할 시에 입력값의 오류가 빈번하거나 자동적으로 그래프의 판별이 원활하게 이루어지지 않는 등 그래프를 시각자료로 표시했을 때 발생할 수 있는 문제 요소들이 다소 존재한다.

복잡한 그래프를 컴퓨터를 통해 해결하기 위해서는 그림으로 표현된 그래프의 수치화가 필수적이다. '그래프와 행렬'부분에서는 그래프를 수치적으로 변환시키기 위해 행렬을 사용할 것이며, 그림으로 표현된 그래프를 행렬 수치화 했을 시 파생적으로 얻을 수 있는 수학적 이론들과 그에 대한 정리들에 대하여 서술할 것이다.

가. 그래프의 수치화



[그림 1]

간단한 그래프 [그림 1]을 보자. 4개의 vertex와 5개의 edge로 이루어져 있다. 가장 먼저 인접행렬로서 그래프를 나타내는데, vertex와 vertex간의 연결의 유무는 집합 {0, 1}을 이용하며 각각에 대해 0은 vertex간의 연결이 이루어지지 않았음을, 1은 vertex간의 연결이 이루어졌음을 의미한다.

$$\begin{pmatrix} 0&1&1&1 \\ 1&0&0&1 \\ 1&0&0&1 \\ 1&1&1&0 \end{pmatrix}$$

위의 행렬은 [그림 1]의 그래프를 인접행렬로 표현한 것이다. 인접행렬의 특성상 $a_{ij}(i=j)$ 성분을 중심으로 대칭을 이룬다.

이제 그래프에 대한 인접행렬을 일반화 해보자.

<u>2.1.1 정의</u> 그래프 $G=(V,E)$에서 $V=[v_1, v_2, \cdots, v_n]$, $|V|=n$ 일 때, 다음과 같이 정의된 n차의 행렬 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 를 G 의 **인접행렬** 이라고 한다.

위의 정의에서, G가 단순 그래프인 경우에는

$$a_{ij}=\begin{cases} 1 & (v_i, v_j \in E\text{인 경우}) \\ 0 & (\text{그 밖의 경우}) \end{cases}$$

이고 또한 환(loop)이 없으므로 모든 $i=1,2,\cdots,n$에 대하여 $a_{ij=0}$ 이다. 그래프 G에 환(loop)가 있는 경우에는 한 꼭짓점을 끝점으로 가지는 고리는 2개로 센다.

그래프 G의 인접행렬 A에서 $a_{ij}=a_{ji}(1\le i,\ j\le n)$이고, 또 다음 등식이 성립한다.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = \deg v_i \qquad (1\le\ i\le\ n)$$

위 정리에 의하여 대각선 수의 총 합은 $v\in V$의 차수의 총합과 같다.

<u>2.1.2 정의</u> 두 그래프 $G=(V,E)$와 $G'=(V',E')$에서 다음 두 조건 i)와 ii)를 만족하는 함수 $f: V\to V'$를 그래프 G 에서 G'으로 가는 **동형사상** 이라고 한다.

i. f는 일대일 대응 함수이다.
ii. $(u,v)\in E \Leftrightarrow (f(u), f(v))\in E'$

즉, 함수 f가 동형이면 G에서 꼭짓점 u와 v 사이에 변이 있을 때 G'에서도 $f(u)$와 $f(v)$ 사이에 변이 있으면 그 역도 참이다. 두 그래프 G와 G' 사이에 적어도 하나의 동형사상이 있으면 두 그래프는 **동형** 이라고 하고 $G\cong G'$로 나타낸다.

보기를 하나 살펴보자.

<u>보기</u> 전단사 함수 f를 $f(a)=x$, $f(b)=y$, $f(C)=z$, $f(d)=w$로 정의하면 동형의 조건을 만족하므로 [그림 2]의 두 그래프는 동형이다.

[그림 2]

지금까지는 그래프 상에서 각 간선들의 방향을 고려하지 않은 그래프, 즉 무방향 그래프(undirectedgraph)에 관해 알아보았다. 그러나 무방향 그래프는 수로를 건설할 때 물의 흐름 방향, 전기 회로에서 전류의 흐름 방향, 프로그램에서 자료의 흐름 방향 등의 상황을 모형화하는 데는 적합하지 않다. 따라서 간선에 방향성을 부여하여 이러한 상황들을 모형화할 수 있도록 한 그래프에 관해 알아보고자 한다.

나. 방향성이 있는 그래프의 수치화

2.2.1 정의 다음 두 조건을 만족시킬 때, $D=(V,E)$를 **유향그래프** 라고 한다.

i. V는 공집합이 아닌 집합이다.
ii. E의 원소는 V의 두 원소 v,w 로 이루어진 순서쌍 (v,w)이다. 여기서 V의 원소를 **꼭지점**이라 하고, E의 원소를 **호** 라고 한다. 그리고 호 (v,w)에서 v와 w를 이 호의 **시점**과 **종점**이라고 한다.

유향 그래프 G를 나타낼 때 v에서 w로의 호는 화살표(→)로 표기한다. 따라서 (v,w)호와 (w,v)호는 서로 다른 호이다. 그리고 무방향 그래프는 대칭적이지만 방향 그래프는 비대칭적(asymmetric)이다.
유향 그래프의 인접행렬은 $A(G)$가 아닌 $D(G)$로 표현한다.

3. 그래프의 채색에 관해

가. 꼭짓점 채색 (vertex - colorings)

3.1.1 정의 그래프 G를 루프가 없는 단순 그래프라고 하자. 인접한 꼭짓점을 다른 색으로 칠하는 방법으로 G의 꼭짓점에 k개의 색을 대응하는 것을 G의 k-채색(k-coloring)이라고 한다. G가 하나의 k-채색을 갖으면, G를 k-채색가능(k-colorable)이라고 한다. G가 k-채색 가능이 되는 최소의 수 k를 G의 **채색수**(chromatic number)라고 하고, $\chi(G)$로 나타낸다.

나. 채색 다항식 (chromatic polynomial)

3.2.1 정의 변으로 연결된 두 꼭짓점을 서로 다른 색으로 모든 꼭짓점을 칠할 때, 그래프를 적절하게 색칠한다고 한다. 그래프 G의 꼭짓점을 x개 이하의 색으로 적절하게 색칠할 수 있는 방법의 수를 $P(G,x)$라고 하면 $P(G,x)$는 x에 대한 다항식이 되고, 이 다항식을 G의

채색다항식(chromatic polynomial)이라고 한다. 이 때 그래프를 적절하게 색칠할 수 있는 최소의 색의 수는 $P(G,x) \neq 0$을 만족하는 x의 최소값이라 하고 그래프 G의 색채수(chromatic number)혹은 채색수라고 한다.

그래프 G와 색의 수 x가 주어질 때 G의 색 다항식을 어떻게 구하는지 알아보자.

<u>보기</u> (1) 4개의 꼭짓점을 가진 선형그래프(Linear graph)

L_4

L_4를 x가지의 색으로 적절하게 색칠하는 방법이 몇 가지인지를 구해보자.

<u>풀이</u> 첫 번째 꼭짓점에는 x 가지의 색을 칠할 수 있다. 두 번째 꼭짓점에는 첫 번째 꼭짓점에 칠한 색을 제외한 $x-1$ 가지의 색을 칠할 수 있다. 세 번째 꼭짓점에는 두 번째 꼭짓점을 칠한 색을 제외한 $x-1$가지의 색을 칠할 수 있다. 네 번째 꼭짓점에는 세 번째 꼭짓점에 칠한 색을 제외한 $x-1$가지의 색을 칠할 수 있다.
따라서 곱의 원리에 의해 $x(x-1)(x-1)(x-1) = x(x-1)^3$가지의 색칠하는 방법이 있다. 즉, 그래프 L_4를 x가지의 색으로 적절하게 색칠하는 방법은 $P(L_4,x) = x(x-1)^3$가지이다.
위 예로부터 $P(L_4,0) = 0,\ P(L_4,1) = 0,\ P(L_4,2) = 2$임을 알 수 있다. 그러므로 x가지(x는 0 또는 1)의 색으로 그래프 L_4를 적절하게 색칠하는 방법이 없음을 알 수 있다. 그러나 2개의 색을 이용하여 그래프 L_4를 적절하게 색칠하는 2가지 방법이 있다. 따라서 그래프 L_4의 색채수는 2이다.

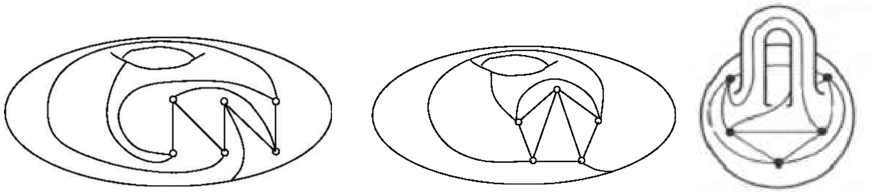
(2) $n \geq 1$일 때 n개의 꼭짓점을 가진 선형그래프 L_n에 대하여 (1)에서와 마찬가지로 $P(L_n,x) = x(x-1)^{n-1}$가지이다. 그러므로 모든 $n \geq 1$에 대하여 그래프 L_n의 색채수는 2이다. 이런 연관성은 일반적으로 성립한다.

다. 그래프의 매몰과 Heawood의 지도채색 정리

4색 정리는 평면에 그려진 임의의 지도를 채색하는 것은 4가지 색으로도 충분하다고 설명한다. 구의 표면에 그려진 임의의 지도는 구의 적도 표면에 지도로 입체적으로 투영할 수 있으므로, 구의 표면에 그려진 임의의 지도를 채색하기에 4가지 색이면 충분하다고 할 수 있다. 그러나 우리가 보려고 하는 것처럼 이것은 다른 곡면에 그려진 지도에 대하여 사실이 아니다.
여기에서 그래프의 'embedding' 개념을 이끌어 낸다.

<u>5.4.1 정의</u> 만약 그래프가 곡면에 교차점 없이 그려진다면, 그래프는 그 곡면위에 매몰(embedded) 된다고 말한다.

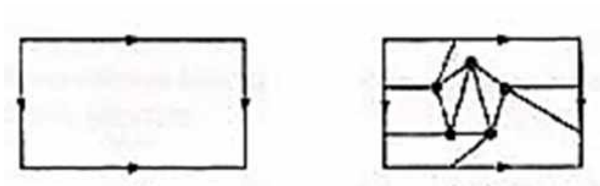
K_5와 $K_{3,3}$은 교차점들 없이 평면에 그려질 수 없다. 그렇다면 그 그래프들이 교차점 없이 그려질 수 있는 임의의 다른 표면이 있을까?



(a) (b) (c)

$K_{3,3}$은 그림 (a)에서 보인 것처럼 토러스에 embedded 할 수 있다. K_5 또한 그림 (b)에서 보인 것처럼 토러스에 embedded 할 수 있다. 그림 (c)를 보면 토러스를 구면에 하나의 손잡이가 있는 것으로 생각할 수 있다. 왜냐하면, 토러스를 한 개 손잡이가 있는 구로 차츰 변형시킬 수 있기 때문이다. 토러스의 3번째 표현법은 그 꼭대기와 바닥의 선분을 동일시하고, 오른쪽과 왼쪽의 선분을 동일시하는 직사각형이다.
튜브 형태로 하기 위해 직사각형의 위와 아래를 붙일 수 있고, 토러스 형태로 하기 위해 튜브의 양끝은 서로 붙인다.

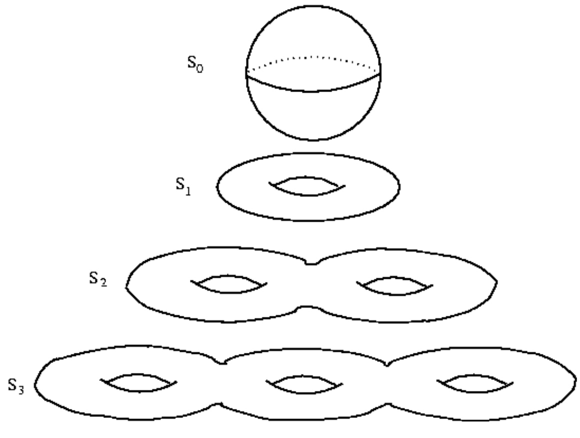
이 표현법은 아래의 그림 (a)에 나타난다. 그림 (b)는 토러스 위에 매몰된 K_5를 표현했다.



(a) (b)

g개의 손잡이를 가진 구면 또는 g개 구멍을 가진 토러스를 류의 곡면 (surface of genus) 이라고 한다.

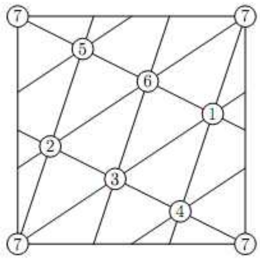
예를 들면, 구는 류(genus) 0인 곡면이고, 토러스는 류(genus) 1인 곡면이다.



S_0는 구멍이 없는 토러스이고, S_1은 구멍이 하나인 토러스, … S_{100}은 구멍이 100개인 토러스이다.

[토러스]
평면그래프와 구는 동치관계이다. 그 다음으로 가장 간단한 평면은 토러스 (혹은 도넛) 이다. 토러스는 그 안에 한 개의 구멍이 있거나, 한 개의 handle이 더해진 구이다.
토러스는 또한 왼쪽과 오른쪽, 그리고 위쪽과 아래쪽의 모서리가 동시적인 사각형을 만들

기 위해 그 handle을 펼칠 수 있다. 만약 우리가 그 그림을 뒤집거나, 그 속이 텅 빈 토러스를 자른다면 우리는 토러스가 위쪽과 아래쪽의 모서리를 붙인 후, 왼쪽과 오른쪽을 붙인 사각형이라는 것을 알 수 있다. 다음 그림은 토러스에 embedding 된 K_7이다. 이 그림을 통해, 모든 네 가지의 코너의 꼭짓점들이 같은 꼭짓점이란 것을 알 수 있다.



다음으로, 토러스에는 두 가지 종류의 회로가 존재한다. 수축 가능한 회로 (Contractible Cycle) 은 한 개의 점으로 계속해서 삭제가 되거나 수축될 수 있는 회로이다. 평면 그래프에서 모든 회로들은 contractible 이다. 하지만 다른 평면들은 그렇지 않다. 위 그림을 보면, 회로 1-3-6은 contractible 이지만, 회로 1-2-3 은 noncontractible 이다. 만약 토러스 위의 noncontractible 회로를 따라 자르면, 토러스는 구멍을 따라 잘린다. 만약 토러스 위의 contractible 회로를 따라 자르면, 토러스는 구와 토러스로 나뉜다.
만약 토러스의 경계가 contractible 회로이면, 그 영역을 2-cell 영역이라 한다. 만약 모든 영역들이 2-cell 이라면, 그 embedding은, 2-cell embedding이라고 한다.

임의의 그래프는 어떤 류 g의 곡면에 매몰(embedded)될 수 있는 것은 명백하다. 왜냐하면 충분히 류를 추가함에 따라 모든 교차점들을 쉽게 제거할 수 있기 때문이다.

그래프의 류(genus of graph)는 그래프가 매몰될 수 있는 곡면의 가장 작은 류이다.
예를 들면, K_5의 류는 1이다. 평면 그래프들은 정확하게 류가 0인 그래프이다.

Ⅲ. 연구 결과 및 고찰

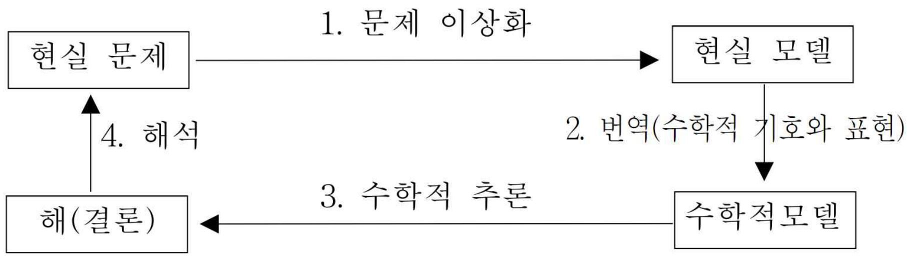
위의 연구를 바탕으로 그래프 이론의 전반적인 이해 및 심화적인 내용에 대한 탐구를 할 수 있었다. 그래프 이론은 실생활과 밀접한 연관을 지니고 있기에 연구 이론을 바탕으로 현실 세계에서 발생할 수 있는 이산적 문제 상황에 수학적 모델링을 적용하는 것은 연구 결과를 실증적으로 나타낸 예이다. 현실 상황에서 발생하는 수학적 모델은 다양하게 존재하지만 그 중 시간표 채색모델과 연해안 환경모델을 대표모델로 선정하였고 이를 연구 활동과 탐구 내용을 기반으로 하여 수학적 모델링에 적용해 보았다.

[연해안 환경문제]

수학적 모델을 현실의 문제 상황 S, 수학적 대상, 관계, 구조들의 모임 M, 그리고 S에서 M으로의 대응 f로 이루어진 순서쌍 (S,M,f)으로 정의한다. 고려하고 있는 분야에 속하는 어떤 대상, 그 대상 사이의 관계, 구조가 선택되고, 그것이 수학적 대상(집합, 도형, 함수 등), 관계, 구조로 바뀌었을 때, 바뀐 대상이 수학적 모델이다.

● 1단계 문제의 이상화 : 현실 문제에서 유용한 요소를 추출하여 문제를 단순화하여 문제해결의 관점에서 정확하게 간결한 형태로 표현한다. 이러한 과정의 결과인 문제의 단순화를 현실적 모델 (real model)이라고 한다. 이것은 아직 일상적 용어로 되어 있다.

● 2단계 번역 : 형성된 현실적 모델에서 일상용어와 개념을 수학적 기호와 표현으로 바꾼다. 결과로 산출되는 구조를 수학적 모델 (mathematical model)이라고 부른다. 수학적 모델은 수학적 대상 (집합, 수, 모형, 함수 등)과 이들 대상을 연관 짓는 표현 (방정식, 그래프, 변환, 도표 등)을 다룬다.
● 3단계 수학적 추론 : 형성된 수학적 모델에 수학적 방법과 기술 (추론, 분석, 풀이, 평가)을 이용하여 모델에 근거한 결론을 유추한다.
● 4단계 해석 : 앞서 유추된 결론을 원래의 문제 상황과 연관시킨다. 이 과정에서는 유추된 결론의 의미를 고려하여 만일 적합치 않으면, 모델 자체에 오류가 있는 것이므로 앞서의 단계를 다시 되풀이해야 하고 결론을 문제 상황에 적절한 형태로 해석해야 한다.



수학적 모델링 과정

그래프와 수학적 모델링을 생각해보자. => 실생활을 그래프로 나타내어 이를 수학적 모델링에 적용했다. 그 결과는 다음과 같다.

연해안 환경오염 수학적 모델링

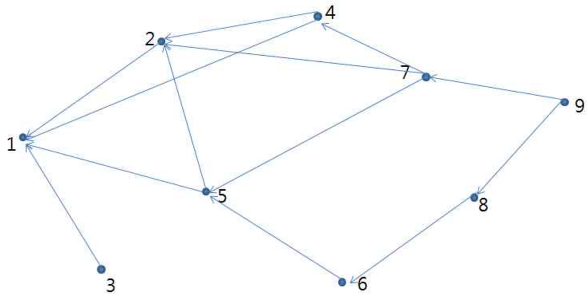
1단계 : 이산적 현실 상황
연해안은 기름 유출이나 생활 오수의 방출로 인해 심한 오염과 더불어 죽은 동물이나 식물이 분해되어 식물성 플랑크톤에 양분을 제공하는 분해 박테리아가 소멸되고 그에 따라 식물성 플랑크톤도 고사 상태이다. 연해안의 오염이 바다 생태계에 미치는 영향을 먹이 사슬에, 일어나는 변화를 토대로 분석해보고 이에 따라 강력한 대책을 마련하고자 한다.

2단계 : 현실적 모델의 구성
연해안의 생태계를 구성하는 먹이 사슬의 기본 구조를 조사하여 본 결과가 다음과 같았다. 박테리아의 분해 작용으로 식물성 플랑크톤의 양분이 만들어지고, 동물성 플랑크톤과 연체동물류는 식물성 플랑크톤을 먹이로 하고, 작은 물고기류와 갑각류는 식물성 플랑크톤과 동물성 플랑크톤을 먹이로 하며 게류는 갑각류를 먹이로 하고 연안의 주요 수산어류는 동물성 플랑크톤과 갑각류 및 작은 물고기를 먹이로 하고 이 주요 수산어류는 청새치 등의 큰 물고기와 상어류의 먹이가 되며 마지막으로 청새치 등 큰 물고기류는 상어류의 먹이가 된다.
이러한 상황에서 직접 먹이란 직접적으로 취하는 먹이를 의미하며 간접 먹이란 하나의 직접 먹이의 먹이, 즉 직접 먹이가 먹고 사는 생물을 의미한다. 예를 들어, 게류의 직접 먹이는 갑각류이고 간접 먹이는 식물성 플랑크톤과 동물성 플랑크톤이다. 이런 식의 복잡한 먹이 사슬에서 한 생물종의 수량 변화는 어떤 경우에라도 다른 생물종에게 영향을 주게 된다.

이러한 상황에서 만약 식물성 플랑크톤이 사라진다면 바다 생태계의 먹이 사슬에 어떤 영향을 주게 될까. 또 직접 먹이와 간접 먹이의 수는 어떻게 변할지 알아보자.

3단계 : 수학적 모델로 바꾸기

각 어류를 꼭짓점으로 나타내고 어류i가 어류 j의 직접 먹이이면 꼭짓점 j에서 꼭짓점i로 향하는 유향 변을 가진 유향그래프로 표현할 수 있다.



먹이 사슬을 나타낸 유향그래프

위의 그래프에서 1은 식물성 플랑크톤, 2는 동물성 플랑크톤, 3은 연체 동물류, 4는 작은 물고기, 5는 갑각류, 6은 게류, 7은 연안의 주요 수산어류, 8은 큰 물고기, 9는 상어 등 최고 포식자를 나타낸다.

위 유향그래프를 기반으로 한 9×9 인접행렬 A는 다음과 같이 정의된다.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, (j\text{에서 } i\text{로 향하는 변이 있으면}) \\ 0, (j\text{에서 } i\text{로 향하는 변이 없으면}) \end{cases}$$

a_i=1이면 어류 j가 어류 i에게 직접 먹이가 된다는 것을 의미한다. 이 행렬에서 i행의 0이 아닌 성분의 수가 어류 i의 직접 먹이의 수를 나타냄을 알 수 있다. 즉 $a_{i1}, a_{i2,} \cdots a_{i9}$중 0이 아닌 값의 수가 어류 i의 직접 먹이 수이다. 그리고 어류 j가 어류 I의 간접 먹이가 될 필요충분조건은 $a_{i1} \times a_{1j}$혹은 $a_{i2} \times a_{2j}$혹은 … $a_{i9} \times a_{9j} \neq 0$인 것이다. 이것은 $\sum_{k=1}^{9} a_{ik}a_{kj} \neq 0$과 동치이다. 즉, 어류 j가 어류i의 간접 먹이가 된다는 것은 어류 j를 직접 먹이로 하면서 동시에 어류 I의 직접 먹이가 되는 어류 k가 존재한다는 것이다. 이때 A^2의 (i,j)성분이 $\sum_{k=1}^{9} a_{ik}a_{kj}$이므로 A^2의 (i,j)성분이 0이 아닐 때 어류 j가 어류 I의 간접 먹이가 된다는 것을 알 수 있다.

이제 식물성 플랑크톤이 존재하지 않을 때의 경우 먹이사슬에 해당하는 유향 그래프의 인접 행렬을 B라 하자. 그러면 B는 A에서 1행 1열을 제거한 그래프이다. 식물성 플랑크톤이 없어질 경우, 직접먹이의 수의 변화와 간접먹이 수의 변화는 행렬 A, B, A^2, B^2의 각 행들을 비교해봄으로써 알 수 있다.

즉 위의 1,2,3 단계를 통해 연해안의 오염이 바다 생태계에 미치는 영향은 수학적 모델링을 통해 유향그래프와 인접행렬의 계산문제가 되었다.

4단계 : 수학적 결론 이끌기

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0&0\\3&2&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&2&0&0&0&0\\0&1&0&1&1&1&2&0&0\end{pmatrix}$$

$$A+A^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0&0\\3&2&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&2&0&0&0&0\\0&1&0&1&1&1&2&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0\\2&1&0&0&0&0&0&0&0\\2&1&0&0&0&0&0&0&0\\2&1&0&0&1&0&0&0&0\\3&3&0&1&1&0&0&0&0\\0&1&0&1&2&1&1&0&0\\0&1&0&1&1&1&3&1&0\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\1&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$B^2=BB=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\1&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\1&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\2&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&2&0&0&0&0\\1&0&1&1&1&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$B+B^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\1&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\2&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&2&0&0&0&0\\1&0&1&1&1&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&0&0&0\\3&0&1&1&0&0&0&0\\1&0&1&2&1&1&0&0\\1&0&1&1&1&2&1&0\end{pmatrix}$$

$A+A^2$와 $B+B^2$의 행을 비교해 보자.

먹이의 종류	$A+A^2$에서 0이 아닌 행의 수	$B+B^2$에서 0이 아닌 행의 수
2(동물성 플랑크톤)	1	0
3(연체동물류)	1	0
4(작은 물고기류)	2	1
5(갑각류)	2	1
6(게류)	3	2
7(연안의 주요 수산어류)	4	3
8(큰 물고기류1)	5	5
9(상어류)	6	6

$A+A^2$와 $B+B^2$에 0이 아닌 행의 수 비교

5단계 : 해석 및 적용하기

행렬 A의 i행에서 0이 아닌 행의 개수가 어류 i의 직접 먹이 수를 나타내며, A^2의 i행의 9이 아닌 수가 어류 i의 간접 먹이 수를 나타낸다. 그러므로 어류 i의 직간접먹이의 수는 $A+A^2$에서 i행의 0이 아닌 행들의 수이다.

따라서 위에서 얻은 표를 보면 식물성 플랑크톤이 없으면 직간접먹이의 어류가 점차 줄어 모든 어류는 영향을 받으며, 식물성 플랑크톤만을 직접 먹이로 하는 동물성 플랑크톤, 연체동물류는 곧 사라지게 될 것이고, 2차적으로 작은 물고기류, 갑각류, 게류의 수도 점차 줄어들게 될 것이다, 뿐만 아니라 우리 연안의 주요 수산 어류도 점차적으로 줄어들었음을 알 수 있다.

1. 그래프컬러링 알고리즘을 이용한 시간표 문제의 관한 연구

가. 이산적 현실 상황

시간표는 일정한 시간 영역 안에서 학생, 교수, 강의실의 요구가 공존하고 있다. 종합대학의 시간표와 같이 일정한 시간 규격을 지니지 않은 채 각각의 수업이 다른 시간 운영을 취하고 있는 상황에서 시간표를 만드는 것은 어려운 일이다. 시간표 문제는 스케줄링 문제와 같이 탐색 공간이 지수적으로 증가하고 조합이 폭발하는 특징을 지니고 있는 NP-Complete로 그 복잡도가 굉장히 높으며 시간표 문제에서는 최적해 탐색이 불가능하기 때문에 휴리스틱 접근법을 기반으로 한 반복 배정을 통해 시간표 컬러링 문제를 해결해나간다. 실제의 경우 integer programming, network flow, simulated annealing, tabu search, genetic algorithm 등 다양한 기법을 사용하는데 학교마다 문제 영역에 차이가 있기에 각각의 알고리즘에 대해 어느 것이 보다 우수하다고 말할 수 없다. 초기의 그래프 컬러링 알고리즘은 정점을 간선의 수에 따라 정렬하였고 컬러의 개수에 상한치를 두지 않은 채 그래프에 컬러를 부여했다. 이후 Welsh와 Powell의 연구는 휴리스틱에 기반을 둔 그래프 컬러링에 기초를 둔 시간표 생성 알고리즘에 모아졌다. Matula, Marble, Issacson은 간선 수가 적은 노드가 마지막으로 실행되는 (smallest degree last recursive) 알고리즘을 제안하여 이를 바탕으로 새롭게 소개될 그래프 컬러링 문제는 현재의 중심 노드에서 근접한 노드로 제한하는 탐색 방법을 이용하였다.

나. 현실적 모델의 구성

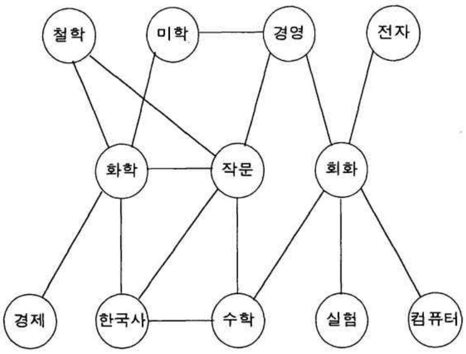


그림 21 시간표 배정에 관한 문제

그래프 컬러링 알고리즘이란 그래프 상의 노드는 모두 동일 조건하에 색을 배정하는 것으로 시간표상의 과목들을 그래프 상의 노드로 표현하고 각 과목들 간의 겹치면 안 되는 관계를 간선으로 표시한 후 충돌 관계를 고려하여 각각의 노드에 색을 배정한 것이다. 같은 컬러를 부여 받은 노드는 시간표상에서 겹칠 수 있는 과목 노드들이고 서로 다른 컬러는 겹치면 안 되는 과목들의 관계를 나타낸다. 컬러 수와 시간표의 길이는 사용이 가능한 시간표를 결정하는 전체 시간표 길이에 중대한 영역을 미친다. 이 때, 컬러 그룹을 구성하는 과목 노드들의 집합을 최대화함으로서 컬러의 수를 줄여야 최단 시간의 시간표를 생성한다.

기존의 시간표 컬러링 알고리즘의 경우 겹쳐도 되는 과목을 원소로 하여 최적의 해를 찾아내는 것에 국한되어졌다. 이렇게 생성된 시간표는 전체 시간 길이가 너무 길다는 문제점이 있다. 이러한 부분을 해결하고자 최적화 기법과 동일 컬러가 칠해지는 노드의 병합 기법을 사용하였다. 즉, 노드들의 집합을 조사한 뒤 그 컬러의 최대 시간 길이를 구한 후, 각 과목 원소들 간의 시간 길이의 차이에 의해 생기는 빈 시간대에 이미 컬러를 부여 받은 과목과 충돌되는 관계의 과목에 대해서 빈 시간대에 배정할 수 있으면 같은 컬러를 부여한 것이다.

다. 수학적 모델로 바꾸기

시간표	그래프 칼라링
과목	노드
과목간에 충돌	간선
동일 시간대 배정	같은 색을 배정
전체 시간표의 길이	사용된 전체 색의 수

표 1. 그래프 컬러링을 기반으로 한 시간표
문제의 표현

표에 제시된 항목을 바탕으로 그래프를 그려나간다. 이 때, 학생 또는 교수의 충돌과 학교측에서 미리 정의하는 이수 구분간의 겹침 관계에 의해서 과목 간의 충돌 여부가 결정되며 수강하는 학생이 교양 과목과 같이 여러 학과가 듣는 경우 충돌 관계는 더욱 더 복잡해지기에 이를 복합적으로 고려하면서 그래프를 그려야한다.

(1) 문제 해결 목적과 과정
(가) 시간 길이가 다른 시간표용 그래프에 있어서 필요 총 시간 수 최소화
(나) 시간 길이가 다른 시간표용 그래프에 있어서 전체 컬러 수의 최소화
(다) 그래프 컬러링 알고리즘을 이용한 한정된 강의실 자원의 배정

그림 1을 초기 그래프로 알고리즘을 수행하면 간선 수가 가장 큰 5번 노드를 중심 노드로 설정하여 트리플 노드를 병합한다. 그래프 상의 모든 노드가 중심 노드에 병합되면 아래의 그림 2와 같이 된다.

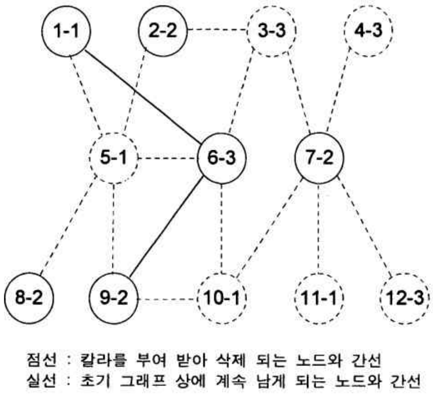


그림 2. 제일 처음 컬러는 부여 받은 후의 그래프

위의 그림2의 결과로 컬러 1 집합을 다음과 같이 구성할 수 있다.

컬러 1 ={5,3,10,4,11,12} ==> 총 시간 : 3시간
그래프 상의 노드 = {1,2,6,7,8,9}

그래프 상에서 각각의 노드를 대상으로 컬러 1과의 충돌 리스트를 구하면 다음과 같다. ( ) 안의 수는 추가병합을 원하는 충돌 과목의 시간 수이며 [ ]안의 수는 이미 컬러를 배정 받은 과목의 빈 시간 수로 충돌되는 과목의 추가 배정이 가능한 시간이다.

노드 1(1) : 5[2]

노드 1의 경우 빈 시간 [2]시간에 (1)시간 배정을 원하고 있으므로 추가 병합이 가능하다. 따라서 노드 1에 컬러 1을 부여하고 노드 5에 F노드를 연결한 후 그래프 상에서 삭제한다.

노드 2(2) : 3[0], 5[2]
노드 6(3) : 3[0], 5[2], 10[2]
노드 7(2) : 3[0], 10[2], 11[2], 12[0]

노드 2,6,7의 경우는 3시간짜리 과목 노드 3의 가능 시간이 [0]이므로 빈 시간이 존재하지 않는다. 따라서 병합이 불가능하다.

노드8(2) : 5[2] (F : 1(1))

노드 8의 경우 노드 5의 가능한 [2]시간에 (2)시간 배정을 원하고 노드 5의 F 노드 1과 충돌이 없기 때문에 컬러 1을 배정한 후 노드 5의 2번째 F노드로 연결한 후 그래프 상에서 삭제한다.

노드9(2) : 5[2] (F : 1(1), 8(2)), 10[2]

 노드 9는 노드 5,10의 비어 있는 시간이 모두 2시간이므로 가능하며 5의 F노드 1,8과 충돌이 없으므로 컬러 1을 배정하고 각각 노드 5와 10의 F노드로 연결한 후 그래프 상에서 삭제한다.
 위와 같은 과정을 거치면 전체 그래프의 충돌 노드 1,8,9가 추가로 병합이 가능하므로 중심 노드 5를 그래프 상에서 삭제하게 되면 다음의 그림3과 같다.

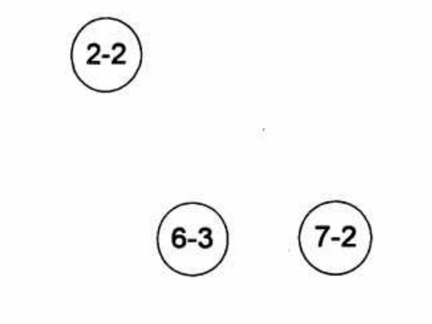


그림 3. 컬러 1을 배정 받은 모든
노드를 삭제하고 난 후의 그래프

 위의 그림 3에서 노드 2,6,7은 아무런 충돌 관계가 없으므로 같은 컬러 2의 배정이 가능하다. 결과를 보면 전체 컬러 수 2개에 시간 수 6시간으로 칼라 수를 한 개 줄이고 시간 2시간을 줄이게 되었다.

컬러 1 = {3,4,5(F : 1,8,9), 10(F : 9), 11, 12} ==> 시간 수 : 3시간
컬러 2 = {2,6,7} ==> 시간 수 : 3시간

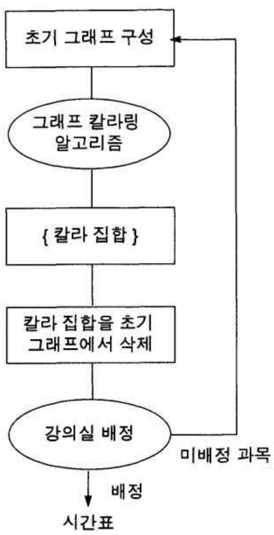


그림 4. 그래프 컬러링
알고리즘을 이용한 시간표
작성

라. 수학적 결론 이끌기

	알고리즘 1	알고리즘 2	알고리즘 3
색의 수	20	20	12
시간표 총 길이	55	43	35

<표 5> 전공 과목 배정 시 실험 결과

알고리즘 1 : 순수 그래프 칼라링 알고리즘

알고리즘 2 : 중심 노드, 병합 노드의 선정 시 간선 수보다 시간 길이를 우선으로 고려한 알고리즘

알고리즘 3 : 충돌 과목의 추가 병합으로 색의 수를 줄이는 알고리즘

표 2. 전공과목 배정 시 각각의 알고리즘에 따른 시간표 총 길이 비교

위의 표 2에서 알 수 있듯이 위에서 소개된 직접 컬러의 수를 줄이는 알고리즘 3이 전체 시간표의 길이를 현저히 줄일 수 있다.

표 2에 나타난 그래프 컬러링 알고리즘의 수행 결과에 대해 강의실 31개에 대해 강의실 배정을 하여 최종 시간표를 생성한 결과를 표 3에 나타내었다.

	알고리즘 1	알고리즘 2	알고리즘 3
색의 수	20	22	14
시간표 총 길이	55	50.5	42.5

표 3. 강의실 배정을 통한 최종 시간표 생성 결과

마. 해석 및 적용하기

시간표의 평가 기준은 실제로 사용 가능해야 한다는 점에 비추어 볼 때 전체 길이는 실제로 사용 가능한지를 판단하는 중요 척도가 된다. 본 모델링에서 제시하는 알고리즘을 이용하여 시간 길이가 서로 다른 과목들의 시간표를 작성하는 경우 정해진 과목 수에 대해 표준 시간 이내의 시간표 길이를 제시함으로써 실제 사용 가능한 시간표를 생성한다.

위의 그래프 컬러링 알고리즘은 강의실 이용을 최대화하고 인건비를 극소화하는 데 도움을 줄 것이며 원하는 시간에 강의할 수 있고 원하는 과목 수강하는 데 편리할 것이다. 또한 아래와 같은 문제점을 해결해 줄 수 있을 것으로 예상한다.

(1) 강의실 부족 해결 가능 : 학생, 교수, 강좌가 계속 늘어가고 있지만 그에 따른 강의실 증가율은 여기에 미치지 못하기에 한정된 강의실을 효율적으로 최대한 이용할 수 있다.
(2) 입출력의 효율성 증대 : 같은 정보를 매 학기 반복 입력하고 학생, 교수, 교무과에서 문서 작성기로 프린트 하는 등 입출력 인력 낭비와 입출력 오류가 많다.
(3) 강의 변동 요구에 신속히 대처 : 강의 정보(교수, 시간, 강의실, 기타 행사 등) 변동 상황은 수시로 변하므로 그 요구에 쉽게 대처해 줘야 하는데, 관련된 조건이 많으면 해결 못하는 경우가 많다.
(4) 인력 절감의 기대 : 매 학기 반복되는 일을 조교 혹은 학과장, 과사무원이 동원돼 시간을 빼앗겨 본연의 할 일을 못한다.

Ⅳ. 결론 및 논의

 그래프 이론을 실생활에서의 사용 사례는 알고리즘을 이용한 최단 경로 찾기, 수형도와 알고리즘의 결합으로 생성될 수 있는 새로운 경로 생성, 수형도와 알고리즘, 행렬, 여인수, 그래프 이론의 전반적인 내용이 다양한 범위에 걸쳐 사용되고 있는 페이스북(소셜 네트워킹 서비스) 등으로 그 사용 범위가 무궁무진하며 단적으로 정의할 수 없을 정도로 실생활 여러 부분에서 이용되고 있다. 위에서 제시된 2가지의 모델링은 이를 대표하여 그래프 이론이 실제적으로 사용되는 방법, 요소 등에 대한 이해를 돕기 위해 제작된 것이다.

우선 시간표 작성에서, 기존의 시간표는 단순히 겹치지 않는 과목만을 중심으로 고려하여 시간대를 배열한 시간표이거나 그렇지 않더라도 여러 사람이 모여 일일이 시간적, 공간적 환경과 제약을 고려하여 작성한 것이기에 시간적, 공간적 비효율을 야기하는 문제 및 그 작성 시간이 비효율적으로 오래 걸리는 문제가 발생 할 수 있다. 앞의 문제는 고등 수준의 교육기관으로 갈수록 배우는 과목의 수 및 그 난이도의 증가에 따라 큰 문제를 야기하게 된다. 여러 과목이 동시에 다른 교실에서 수업이 진행되는 경우 그 수업들을 모두 들을 필요가 있는 학생이 생기는 등의 문제가 바로 그 예이다. 그러나 그래프 이론 중 채색다항식을 이용, 이러한 시간적, 공간적 겹침을 최소화 하면 위에 제시한 문제를 포함, 많은 문제들을 해결할 수 있으므로 최대한을 효율성을 끌어 낼 수 있다. 두 번째 문제는 여러 고려요인들(수업 시간, 수업 교실, 수업 인원, 동일 학생이 여러 과목의 수업을 듣는 문제 등)을 그래프를 이용, 더욱 가시적으로 표현할 수 있게 됨으로써 시간표 작성 그 자체에 있어 시간과 인력의 소비를 줄일 수 있다. 이렇듯 그래프 이론은 시간표 작성에 대한 효과적이고 효율적인 해결책이 된다.

 이제 연해안 먹이사슬 문제를 살펴보자. 먹이 사슬과 같은 생태학적 문제 역시 그래프와 행렬을 이용, 매우 효과적이고 가시적으로 표현이 가능하다. 먹이 사슬은 매우 복잡하고 미묘한 생태학적 특성이다. 이런 복잡한 관계일수록 그 각각의 요인들의 중요도는 올라간다. 그러나 이런 먹이사슬이 복잡할수록 한 요인이 다른 요인들에게 어떤 영향을 주는지 알기가 어려워진다. 이런 각각의 요인들의 중요도를 간과한 채 한 요인에게 변화를 가하면 그것이 전체 먹이사슬에, 따라서 전체 생태계에 얼마나 큰 영향을 줄지 알 수 없다. 이런 상황에서 복잡한 먹이사슬을 그래프로, 그리고 그 그래프를 행렬로 표현하면 이런 복잡한 먹이사슬을, 그리고 그 먹이사슬에서 각각의 요인들이 서로 어떤 연관관계를 갖는지를, 따라서 한 요인에 변화를 주었을 떼 전체 생태계가 어떤 영향을 받는지를 쉽게 알 수 있다. 이는 생태학적으로 매우 중요한 효과를 갖는다. 연안의 생태계 전체가 행렬 하나로 표현됨으로써 문제 상황을 통제하기도, 그리고 문제의 발생을 막는 데에도 효과적인 해결책이 제시될 수 있다.

 이와 같이 수학의 어느 분야보다 직접적으로 현실 문제를 수학적인 접근을 통해 해결하기 쉽도록 만들어 주는 것이 바로 그래프 이론이다. 따라서 그래프 이론은 앞으로도 산업, 문화, 사회의 전반에 걸쳐 인간에게 사회 문제 해결에 있어 지대한 영향을 끼칠 것이다. 그러므로 그래프 이론의 총체적인 이해와 심화적인 개념에 대한 적극적인 토의, 수학적 모델링을 바탕으로 한 연구의 실질적인 적용은 연구목표에 부합하는 과정이자 그래프 이론의 새로운 응용방안과 이것에 대한 가능성을 다양한 방법으로 보여준 사례라 할 수 있을 것이다.

Ⅴ. 참고문헌

제 6장 참고문헌과 동일