# 11.平面图

1.证明图11.18所示二图均为平面图
证明：只要找出它们各自的平面即可（图略）

2.用约当定理证明K3,3不是平面图
证明：与用约当定理证明K5不是平面图的例子过程类似，划出图（略）

3.证明正多面体图(柏拉图)有且仅有5种

显然至少存在5种正多面体，见书中186页。下面证明最多存在5种正多面体：

对于正多面体，假设它的各面都是正l边形，而且每一个顶角处有k个边相遇。这样就有：
l*F = 2*E, (1)
k*V = 2*E. (2)
(1)的右边系数2是因为每边出现在2面中，(2)的右边系数2是因为每边通过2个顶角。

把(1)和(2)代入欧拉公式V-E+F=2中，就得到：
2*E/l - E + 2*E/k = 2，即1/l + 1/k = 1/2 + 1/E

显然l>=3,k>=3，因为多边形至少有3边，而在每个顶点处也至少有3边。

但l>3且k>3又是不可能的，否则那样就有1/l + 1/k <= 1/4 +1/4 = 1/2,
这与E>0相矛盾。所以l和k中至少有一个为3。

如果l=3，那么1/3 + 1/k = 1/2 + 1/E，1/k - 1/6 = 1/E。
解得k=3,4,5，对应的E=6,12,30；
而F=4,8,20，这就给出了正四面体、正八面体和正二十面体。

如果k=3，那么1/l + 1/3 = 1/2 + 1/E，1/l - 1/6 = 1/E。
解得l=3,4,5，对应的E=6,12,30；
而F=4,6,12，这就给出了正四面体，正六面体(即立方体)和正十二面体。

其中有2个都是正四面体，即最多存在5种正多面体，证毕。

4.设G是简单平面图，面数r<12,δ（G）≥3
1)G中存在次数小于等于4的面
2）举例说明，如果r=12,其他条件不变，那么(1)中的结论也不为真
不妨设G是连通的，否则对G的每个分支进行讨论：

根据欧拉公式，n-m+r = 2；
又已知 r<12 且 n <= 2*m/3 (因为δ(G)>=3)；
代入得到 2*m/3 - m + 12 > 2，解得 m < 30。

若G所有的面均至少由5条边围成，那么5*r <= 2*m，即r <= 2*m/5；
将 r <= 2*m/5 和 n <= 2*m/3 代入欧拉公式 n-m+r = 2 得到
2*m/3 - m + 2*m/5 >= 2，解得 m >= 30。

这与已知的m < 30相矛盾。

所以，G中存在次数<=4的面。

(2)正十二面体，面数r=12，δ(G)=3，所有面的次数=5。

5. 设G是n阶m条边的简单平面图，已知m<30，证明存在 v ∈V(G),使得d(G)≤ 4

5.证明:
不妨设G是连通的，否则G的每个连通分支的边数m<30，可以对G的连通分支
进行讨论:

5.1 若G中无回路，则G必为树，G中至少存在2个树叶，使得d(V)=1，满足要求。

5.2 若G中有回路，由于G为简单图，因而G中的每个面至少由3条边围成，根据
定理11.10，m <= 3*n-6。

用反证法，如果G中所有顶点的度数>=5，由握手定理可知:
2*m > 5*n，解得 n <= 2*m/5。

将 n <= 2*m/5 代入 m <= 3*n-6 得:
m <= 6*m/5-6，解得 m >= 30。这与已知的 m<30 相矛盾。

因此G中存在顶点v满足d(v)<=4。

6，设G是n阶m条边的简单连通平面图，证明:

当n=7时，m=15时
6.证明:
已知G是连通的无向简单图，但G不可能是树，否则m=n-1，这与已知的n=7,m=15相矛盾。

G上必然有回路，回路至少由3条边构成，即G的平面的每个面至少由l(l>=3)条边围成，
根据定理11.8，m <= l*(n-2)/(l-2)，将n=7,m=15代入解得l<=3。

所以G的平面的每个面都由3条边围成，根据定理11.4，G为极大平面图。

7.设G是n(n≥11)无向简单图，证明 G或者G的补图必为非平面图

证明:

_
|V(G)|+|V(G)| = |Kn| = n(n-1)/2

_ _
如果G和G都是平面图，那么|V(G)| <= 3*n-6, |V(G)| <= 3*n-6,

_
即|V(G)|+|V(G)| < 6*n-12,

_
与|V(G)|+|V(G)| = n(n-1)/2联立，得到n(n-1)/2 <= 6*n-12，解得 n < 11 且 n > 1
,
这与已知的 n >= 11 相矛盾。

_ _
因此G或G必有一个不是平面图。

8.利用欧拉公式证明定理11。4的充分性
证明:
设G的边数为m，面数为r。由于G的每个面的边界都是3，所以3*r = 2*m，解得r = 2*m/3
。

把 r = 2*m/3 代入欧拉公式 n-m+r = 2 得：n = m-r+2 = m-2*m/3+2 = m/3+2

如果G不是极大平面图，必存在二顶点u,v不相邻，G∪(u, v) = G' 仍为平面图，
G'的边数、顶点数、面数分别为m' = m+1、n' = n = m/3+2、r' = r+1。

根据定理11.10，m' <= 3*n'-6 (书上是用欧拉定理证明了定理11.10)，
即m+1 <= 3*(m/3+2)-6 = m，这不可能，所以G是极大平面图。

9．证明图11.19所示得各图均为非平面图
证明：a)将中间的那个顶点和最上面的那个顶点收缩

将上面的那个顶点和左面，或者右面的那个地点收缩，所得图为K5,所以a为非平面图
b)画出一条回路，根据约当定理，按照例题过程（证明K5是非平面图的过程）
c)K3,3是C的子图，所以c是非平面图

10.画出所有6阶连通的简单非同构的非平面图
答：在K5的基础上画图，图略

11,设n阶m条边的平面图是自对偶图，证明m=2n-2
证明：假设该平面图有r个面，根据欧拉定理，n-m+r = 2；

该平面图的对偶图的顶点数n'、边数m'、面数r'分别为
n' = r
m' = m
r' = n

又因为该平面图是自对偶图，所以 n = n' = r，即r=n。
代入欧拉公式得 m = 2*n-2。

12,设G为n(n≥4)阶极大的平面图，证明G的对偶图G*是2—边连通的3-正则图
证明：(1)由对偶图的性质可知，G*连通。又因为极大平面图均为简单图，所以G中无环，
故G*中无桥，于是G*2边—连通。

(2)由于G的阶数n≥4，由定理17.7可知G的每个面的次数均为3，因而G*为简单平面
图，且每个顶点的度数均为3，故G*为3—正则图。

13,设G是2-边连通的简单平面图，且每两个面的边界至多有一条公共边，证明G中至少有
两个面的次数相同。
证明做G的对偶图G*

，只要证明G*上至少有2个顶点的度数相同即可。

G是连通图，显然G*也是连通图。

设G*上有n个顶点，这n个顶点的度数只能是1至n-1，根据鸽巢原理，至少有2个
顶点的度数相同。

14．证明：平面图G的对偶图G*是欧拉图当且仅当G中每个面的次数均为偶数
证明：显然G*是无向连通图。

G中每个面的次数均为偶数
<=> G*上每个顶点的度数都是偶数
<=> G*是欧拉图。

15.证明：不存在具有5个面，且每个面的边界都共享一条公共边的平面图.
证明用反证法，如果存在这样的平面图G，那么G的对偶图G*也是平面图。

显然G*有5个顶点，且每个顶点与另外4个顶点都相邻，即G*是K5。
已知K5不是平面图。这互相矛盾。

所以不存在题目中所说的平面图。

16. 设G是连通的3-正则平面图，ri是G中次数为I的面的个数，证明：
12=3r3+2r4+r5-r7-2r8-3r9-..
由于G是3-正则图，所以 3*n = 2*m。
即 3*r3+4*r4+5*r5+.... = 2*m
3*r3+4*r4+5*r5+.... = 3*n

又因为 $r_3+r_4+r_5+.... = r$，
代入欧拉公式 $m-n+r = 2$，得
$(3*r_3+4*r_4+5*r_5+....)/2-(3*r_3+4*r_4+5*r_5+....)/3+(r_3+r_4+r_5+....) = 2$

化简得：$12 = 3*r_3+2*r_4+r_5-r_7-2*r_8-3*r_9-....$

外平面图，考不考，下轮复习的时候再看吧！
17．设G是$n(n\geq 7)$阶外平面图，证明 G 不是外平面图
18．证明11.17(b)是哈密顿图，但不存在既含边$e_1$又含边$e_2$的哈密顿回路
19.证明 图11.15所示的是托特图，而不是哈密顿图