定理 5.2.2 证明 离散数学 (2)

黄宇翔

清华大学软件学院

05/06/2022



- 4 ロ ト 4 団 ト 4 豆 ト 4 豆 - り 9 0 0 0

- 1 问题回顾
- 2 对问题的考虑和定理的理解
- 3 定理 5.2.2 的证明

◆ロト ◆団 ト ◆ 恵 ト ◆ 恵 ・ からぐ

- 1 问题回顾
- 2 对问题的考虑和定理的理解
- ③ 定理 5.2.2 的证明

◆ロト ◆団 ト ◆ 恵 ト ◆ 恵 ・ からぐ

最大匹配的边数问题

• 定理 5.2.2: 在二分图 G = (X, Y, E) 中, X 到 Y 的最大匹配边数是 $|X| - \delta(G)$, 其中

$$\delta(\textit{G}) = \max_{\textit{A} \subset \textit{X}} \delta(\textit{A}), \delta(\textit{A}) = |\textit{A}| - |\Gamma(\textit{A})|, \delta(\textit{A}) \geq 0$$

- 4 ロ ト 4 団 ト 4 豆 ト 4 豆 - り Q ()

- 1 问题回顾
- 2 对问题的考虑和定理的理解
- ③ 定理 5.2.2 的证明

◆ロト ◆問 ト ◆ 恵 ト ◆ 恵 ・ 釣 ९ ○

• $\mathfrak{M} \otimes \delta(G) = \max_{A \subset X} \delta(A), \delta(A) = |A| - |\Gamma(A)|, \delta(A) \ge 0$

定理 5.2.2 证明

- 观察 $\delta(G) = \max_{A \subseteq X} \delta(A), \delta(A) = |A| |\Gamma(A)|, \delta(A) \ge 0$

$$\delta(G) = \max_{A \subseteq X} \delta(A) \Rightarrow \exists A_0 \subseteq X, s.t. \forall A \subseteq X, \delta(A) \le \delta(A_0)$$

- (ロ) (個) (注) (注) (注) (注) の(O

- \mathfrak{M} \mathfrak{F} $\delta(G) = \max_{A \subseteq X} \delta(A), \delta(A) = |A| |\Gamma(A)|, \delta(A) \ge 0$
- •

$$\delta(G) = \max_{A \subseteq X} \delta(A) \Rightarrow \exists A_0 \subseteq X, s.t. \forall A \subseteq X, \delta(A) \le \delta(A_0)$$

• 三种可能性

- (ロ) (部) (注) (注) 注 り(C

- $\mathfrak{M} \otimes \delta(G) = \max_{A \subseteq X} \delta(A), \delta(A) = |A| |\Gamma(A)|, \delta(A) \ge 0$
- •

$$\delta(G) = \max_{A \subseteq X} \delta(A) \Rightarrow \exists A_0 \subseteq X, s.t. \forall A \subseteq X, \delta(A) \le \delta(A_0)$$

- 三种可能性
 - 不存在这样的 $A: \delta(A) \geq 0$,有完全匹配,|M| = |X|

- 4 ロ ト 4 個 ト 4 種 ト 4 種 ト - 種 - から()

- $\mathfrak{M} \otimes \delta(G) = \max_{A \subseteq X} \delta(A), \delta(A) = |A| |\Gamma(A)|, \delta(A) \ge 0$
- •

$$\delta(G) = \max_{A \subseteq X} \delta(A) \Rightarrow \exists A_0 \subseteq X, s.t. \forall A \subseteq X, \delta(A) \le \delta(A_0)$$

- 三种可能性
 - 不存在这样的 $A: \delta(A) \geq 0$,有完全匹配,|M| = |X|
 - $\delta(G) = 0$, 这说明 $\forall A \subseteq X, |\Gamma(A)| \ge |A|$, 有完全匹配, |M| = |X| 0

- 4 ロ ト 4 個 ト 4 種 ト 4 種 ト - 種 - 釣 9 0 0

- $\mathfrak{M} \otimes \delta(G) = \max_{A \subseteq X} \delta(A), \delta(A) = |A| |\Gamma(A)|, \delta(A) \ge 0$

$$\delta(G) = \max_{A \subseteq X} \delta(A) \Rightarrow \exists A_0 \subseteq X, s.t. \forall A \subseteq X, \delta(A) \le \delta(A_0)$$

- 三种可能性
 - 不存在这样的 $A: \delta(A) \geq 0$,有完全匹配,|M| = |X|
 - $\delta(G) = 0$, 这说明 $\forall A \subseteq X, |\Gamma(A)| \ge |A|$, 有完全匹配, |M| = |X| 0
 - $\delta(G) > 0$,也就是 $\delta(A_0) > 0$,需要重点考虑

- (ロ)(個)((重)(重)(の)(で

• 性质 1: $\forall B \subseteq \Gamma(A_0), |\Gamma(B)| \ge |B|$

- 性质 1: $\forall B \subseteq \Gamma(A_0), |\Gamma(B)| \ge |B|$
- 证明:

- 性质 1: $\forall B \subseteq \Gamma(A_0), |\Gamma(B)| \ge |B|$
- 证明:
 - 断言:存在 $\Gamma(B)$ 的一部分在 A_0 中,记作 $\Gamma(B)|_{A_0}$

- 性质 1: $\forall B \subseteq \Gamma(A_0), |\Gamma(B)| \ge |B|$
- 证明:
 - 断言:存在 Γ(B) 的一部分在 A₀ 中,记作 Γ(B)|_{A₀} (原因:若 Γ(B)) 完全不在 A₀ 中,则 B 不应该出现在 Γ(A₀) 中)

定理 5.2.2 证明

- 性质 1: $\forall B \subseteq \Gamma(A_0), |\Gamma(B)| \ge |B|$
- 证明:
 - 断言:存在 $\Gamma(B)$ 的一部分在 A_0 中,记作 $\Gamma(B)|_{A_0}$ (原因:若 $\Gamma(B)$ 完全不在 A_0 中,则 B 不应该出现在 $\Gamma(A_0)$ 中)
 - 考察 Γ(B)|_{A0}.

◆ロト ◆団 ト ◆ 差 ト ◆ 差 ト り 気 で の へ で

- 性质 1: $\forall B \subseteq \Gamma(A_0), |\Gamma(B)| \ge |B|$
- 证明:
 - 断言:存在 $\Gamma(B)$ 的一部分在 A_0 中,记作 $\Gamma(B)|_{A_0}$ (原因:若 $\Gamma(B)$ 完全不在 A_0 中,则 B 不应该出现在 $\Gamma(A_0)$ 中)
 - 考察 Γ(B)|_{A0}.若 |Γ(B)|_{A0}| < |B|, 那么 A0 不符合要求,

- 性质 1: $\forall B \subseteq \Gamma(A_0), |\Gamma(B)| \ge |B|$
- 证明:
 - 断言:存在 Γ(B) 的一部分在 A₀ 中,记作 Γ(B)|_{A₀} (原因:若 Γ(B)) 完全不在 A₀ 中,则 B 不应该出现在 Γ(A₀) 中)
 - 考察 $\Gamma(B)|_{A_0}$.若 $|\Gamma(B)|_{A_0}| < |B|$, 那么 A_0 不符合要求, $B \subseteq \Gamma(\Gamma(B)|_{A_0})$,

- (ロ) (個) (注) (注) (注) (注) の(O

- 性质 1: $\forall B \subseteq \Gamma(A_0), |\Gamma(B)| \ge |B|$
- 证明:
 - 断言:存在 Γ(B) 的一部分在 A₀ 中,记作 Γ(B)|_{A₀} (原因:若 Γ(B)) 完全不在 A₀ 中,则 B 不应该出现在 Γ(A₀) 中)
 - 考察 $\Gamma(B)|_{A_0}$.若 $|\Gamma(B)|_{A_0}| < |B|$,那么 A_0 不符合要求, $B \subseteq \Gamma(\Gamma(B)|_{A_0})$,

$$|\Gamma(B)|_{A_0}| - |\Gamma(\Gamma(B)|_{A_0})|$$

- (ロ) (個) (注) (注) (注) (注) の(O

- 性质 1: $\forall B \subseteq \Gamma(A_0), |\Gamma(B)| \ge |B|$
- 证明:
 - 断言:存在 $\Gamma(B)$ 的一部分在 A_0 中,记作 $\Gamma(B)|_{A_0}$ (原因:若 $\Gamma(B)$ 完全不在 A_0 中,则 B 不应该出现在 $\Gamma(A_0)$ 中)
 - 考察 $\Gamma(B)|_{A_0}$.若 $|\Gamma(B)|_{A_0}| < |B|$,那么 A_0 不符合要求, $B \subseteq \Gamma(\Gamma(B)|_{A_0})$,

$$|\Gamma(B)|_{A_0}| - |\Gamma(\Gamma(B)|_{A_0})| \le |\Gamma(B)|_{A_0}| - |B| < 0$$

- (ロ) (部) (注) (注) 注 り(C

- 性质 1: $\forall B \subseteq \Gamma(A_0), |\Gamma(B)| \ge |B|$
- 证明:
 - 断言:存在 $\Gamma(B)$ 的一部分在 A_0 中,记作 $\Gamma(B)|_{A_0}$ (原因:若 $\Gamma(B)$ 完全不在 A_0 中,则 B 不应该出现在 $\Gamma(A_0)$ 中)
 - 考察 $\Gamma(B)|_{A_0}$.若 $|\Gamma(B)|_{A_0}| < |B|$, 那么 A_0 不符合要求, $B \subseteq \Gamma(\Gamma(B)|_{A_0})$,

$$|\Gamma(B)|_{A_0}| - |\Gamma(\Gamma(B)|_{A_0})| \le |\Gamma(B)|_{A_0}| - |B| < 0$$

从 A_0 中去掉 $\Gamma(B)|_{A_0}$, $|A| - |\Gamma(A)|$ 更大

- 4 ロ ト 4 団 ト 4 重 ト 4 重 ト 9 Q C

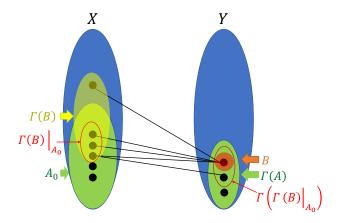
- 性质 1: $\forall B \subseteq \Gamma(A_0), |\Gamma(B)| \ge |B|$
- 证明:
 - 断言:存在 Γ(B) 的一部分在 A₀ 中,记作 Γ(B)|_{A₀} (原因:若 Γ(B) 完全不在 A₀ 中,则 B 不应该出现在 Γ(A₀) 中)
 - 考察 $\Gamma(B)|_{A_0}$.若 $|\Gamma(B)|_{A_0}| < |B|$,那么 A_0 不符合要求, $B \subseteq \Gamma(\Gamma(B)|_{A_0})$,

$$|\Gamma(B)|_{A_0}| - |\Gamma(\Gamma(B)|_{A_0})| \le |\Gamma(B)|_{A_0}| - |B| < 0$$

从 A_0 中去掉 $\Gamma(B)|_{A_0}$, $|A| - |\Gamma(A)|$ 更大

推论 1: 从 Γ(A₀) 到 A₀ 有完全匹配, 大小为 |M₀| = |Γ(A₀)|

- (ロ) (御) (注) (注) 注 り(0



若 |Γ(B)|_{A0}| < |B|, 就有

 $|\Gamma(B)|_{A_0}| - |\Gamma(\Gamma(B)|_{A_0})| \le |\Gamma(B)|_{A_0}| - |B| < 0$

• 性质 2: $\forall A_1 \subseteq X - A_0, |A_1| \leq |\Gamma(A_1)|_{Y - \Gamma(A_0)}|$

- (ロ) (部) (注) (注) 注 り(C

- 性质 2: $\forall A_1 \subseteq X A_0, |A_1| \leq |\Gamma(A_1)|_{Y \Gamma(A_0)}$
- 证明:

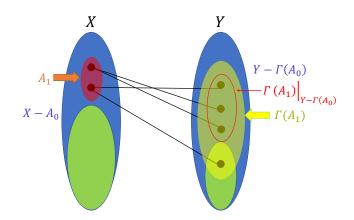
- (ロ) (部) (注) (注) (注) (9)(()

- 性质 2: $\forall A_1 \subseteq X A_0, |A_1| \leq |\Gamma(A_1)|_{Y \Gamma(A_0)}$
- 证明:
 - 使用反证法, 假设 $|A_1| > |\Gamma(A_1)|_{Y-\Gamma(A_0)}|$

- 性质 2: $\forall A_1 \subseteq X A_0, |A_1| \leq |\Gamma(A_1)|_{Y \Gamma(A_0)}$
- 证明:
 - 使用反证法,假设 |A₁| > |Γ(A₁)|_{Y-Γ(A₀)}|
 - A₀ 不符合要求,因为 A₀ 加入 A₁, |A₀| |Γ(A₀)| 会更大

- 性质 2: $\forall A_1 \subseteq X A_0, |A_1| \leq |\Gamma(A_1)|_{Y \Gamma(A_0)}|$
- 证明:
 - 使用反证法, 假设 $|A_1| > |\Gamma(A_1)|_{Y-\Gamma(A_0)}|$
 - A₀ 不符合要求,因为 A₀ 加入 A₁, |A₀| |Γ(A₀)| 会更大
- 推论 2: 对于 $G' = (X A_0, Y \Gamma(A_0), E')$,存在完全匹配, $|M'| = |X A_0|$

- 4 ロ ト 4 個 ト 4 重 ト 4 重 ト 9 Q C



• 若 $|A_1| > |\Gamma(A_1)|_{Y-\Gamma(A_0)}|$,能找到更大的 A_0

- 4ロト 4団ト 4 恵ト 4 恵 ト 9 Q C

- 1 问题回顾
- ② 对问题的考虑和定理的理解
- 3 定理 5.2.2 的证明

◆ロト ◆問 ト ◆ 恵 ト ◆ 恵 ・ 釣 ९ ○

• 定理 5.2.2 回忆: 在二分图 G = (X, Y, E) 中, X 到 Y 的最大匹配边数是 $|X| - \delta(G)$, 其中

$$\delta(G) = \max_{A \subseteq X} \delta(A), \delta(A) = |A| - |\Gamma(A)|, \delta(A) \ge 0$$

定理 5.2.2 证明

• 定理 5.2.2 回忆: 在二分图 G = (X, Y, E) 中, X 到 Y 的最大匹配边数是 $|X| - \delta(G)$, 其中

$$\delta(\mathcal{G}) = \max_{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}} \delta(\mathcal{A}), \delta(\mathcal{A}) = |\mathcal{A}| - |\Gamma(\mathcal{A})|, \delta(\mathcal{A}) \geq 0$$

对于 G = (X, Y, E)

• 定理 5.2.2 回忆: 在二分图 G = (X, Y, E) 中, X 到 Y 的最大匹配边数是 $|X| - \delta(G)$, 其中

$$\delta(\mathcal{G}) = \max_{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}} \delta(\mathcal{A}), \delta(\mathcal{A}) = |\mathcal{A}| - |\Gamma(\mathcal{A})|, \delta(\mathcal{A}) \ge 0$$

• 对于 G = (X, Y, E) 作分割 $G = G_0 + G' + E_e$,

(ロ) (回) (目) (目) (目) (回)

• 定理 5.2.2 回忆: 在二分图 G = (X, Y, E) 中, X 到 Y 的最大匹配边数是 $|X| - \delta(G)$, 其中

$$\delta(\mathcal{G}) = \max_{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}} \delta(\mathcal{A}), \delta(\mathcal{A}) = |\mathcal{A}| - |\Gamma(\mathcal{A})|, \delta(\mathcal{A}) \ge 0$$

• 对于 G = (X, Y, E) 作分割 $G = G_0 + G' + E_e$, $G_0 = (A_0, \Gamma(A_0), E_0)$,

• 定理 5.2.2 回忆: 在二分图 G = (X, Y, E) 中, X 到 Y 的最大匹配边数是 $|X| - \delta(G)$, 其中

$$\delta(\textit{G}) = \max_{\textit{A} \subseteq \textit{X}} \delta(\textit{A}), \delta(\textit{A}) = |\textit{A}| - |\Gamma(\textit{A})|, \delta(\textit{A}) \geq 0$$

• 对于 G = (X, Y, E) 作分割 $G = G_0 + G' + E_e$, $G_0 = (A_0, \Gamma(A_0), E_0)$, $G' = (X - A_0, Y - \Gamma(A_0), E')$

• 定理 5.2.2 回忆: 在二分图 G = (X, Y, E) 中, X 到 Y 的最大匹配边数是 $|X| - \delta(G)$, 其中

$$\delta(\mathcal{G}) = \max_{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}} \delta(\mathcal{A}), \delta(\mathcal{A}) = |\mathcal{A}| - |\Gamma(\mathcal{A})|, \delta(\mathcal{A}) \ge 0$$

- 对于 G = (X, Y, E) 作分割 $G = G_0 + G' + E_e$, $G_0 = (A_0, \Gamma(A_0), E_0)$, $G' = (X A_0, Y \Gamma(A_0), E')$
- 其中, A_0 满足 $\forall A \subseteq X, \delta(A) \leq \delta(A_0)$

定理 5.2.2 回忆: 在二分图 G = (X, Y, E) 中, X 到 Y 的最大匹配边数是 |X| – δ(G), 其中

$$\delta(\textit{G}) = \max_{\textit{A} \subseteq \textit{X}} \delta(\textit{A}), \delta(\textit{A}) = |\textit{A}| - |\Gamma(\textit{A})|, \delta(\textit{A}) \geq 0$$

- 对于 G = (X, Y, E) 作分割 $G = G_0 + G' + E_e$, $G_0 = (A_0, \Gamma(A_0), E_0)$, $G' = (X A_0, Y \Gamma(A_0), E')$
- 其中, A_0 满足 $\forall A \subseteq X, \delta(A) \leq \delta(A_0)$
- 容易观察到, G₀, G' 两部分没有重合的点, 两部分的匹配之 并是 G 的匹配

• 定理 5.2.2 回忆: 在二分图 *G* = (*X*, *Y*, *E*) 中, *X* 到 *Y* 的最 大匹配边数是 $|X| - \delta(G)$, 其中

$$\delta(\textit{G}) = \max_{\textit{A} \subseteq \textit{X}} \delta(\textit{A}), \delta(\textit{A}) = |\textit{A}| - |\Gamma(\textit{A})|, \delta(\textit{A}) \geq 0$$

- 对于 G = (X, Y, E) 作分割 $G = G_0 + G' + E_e$, $G_0 = (A_0, \Gamma(A_0), E_0), G' = (X - A_0, Y - \Gamma(A_0), E')$
- 其中, A₀ 满足 ∀A ⊂ X, δ(A) < δ(A₀)
- 容易观察到, Go, G' 两部分没有重合的点, 两部分的匹配之 并是 G 的匹配
- 那么 G 有匹配 M = M₀ + M′,

定理 5.2.2 回忆: 在二分图 G = (X, Y, E) 中, X 到 Y 的最大匹配边数是 |X| – δ(G), 其中

$$\delta(\textit{G}) = \max_{\textit{A} \subseteq \textit{X}} \delta(\textit{A}), \delta(\textit{A}) = |\textit{A}| - |\Gamma(\textit{A})|, \delta(\textit{A}) \geq 0$$

- 对于 G = (X, Y, E) 作分割 $G = G_0 + G' + E_e$, $G_0 = (A_0, \Gamma(A_0), E_0)$, $G' = (X A_0, Y \Gamma(A_0), E')$
- 其中, A_0 满足 $\forall A \subseteq X, \delta(A) \leq \delta(A_0)$
- 容易观察到, G_0, G' 两部分没有重合的点,两部分的匹配之 并是 G 的匹配
- 那么 G 有匹配 M = M₀ + M', 依据推论 1、2,

- 4 ロ ト 4 昼 ト 4 差 ト 4 差 ト 9 年 9 9 9 0 0

定理 5.2.2 回忆: 在二分图 G = (X, Y, E) 中, X 到 Y 的最大匹配边数是 |X| – δ(G), 其中

$$\delta(\textit{G}) = \max_{\textit{A} \subseteq \textit{X}} \delta(\textit{A}), \delta(\textit{A}) = |\textit{A}| - |\Gamma(\textit{A})|, \delta(\textit{A}) \geq 0$$

- 对于 G = (X, Y, E) 作分割 $G = G_0 + G' + E_e$, $G_0 = (A_0, \Gamma(A_0), E_0)$, $G' = (X A_0, Y \Gamma(A_0), E')$
- 其中, A_0 满足 $\forall A \subseteq X, \delta(A) \leq \delta(A_0)$
- 容易观察到, G_0 ,G' 两部分没有重合的点,两部分的匹配之并是 G 的匹配
- 那么 G 有匹配 $M = M_0 + M'$,依据推论 1、2, M_0 是 $X A_0$ 到 $Y \Gamma(A_0)$ 的完全匹配,

- 4 ロ ト 4 昼 ト 4 差 ト - 差 - 夕 Q ()

定理 5.2.2 回忆: 在二分图 G = (X, Y, E) 中, X 到 Y 的最大匹配边数是 |X| – δ(G), 其中

$$\delta(\textit{G}) = \max_{\textit{A} \subseteq \textit{X}} \delta(\textit{A}), \delta(\textit{A}) = |\textit{A}| - |\Gamma(\textit{A})|, \delta(\textit{A}) \geq 0$$

- 对于 G = (X, Y, E) 作分割 $G = G_0 + G' + E_e$, $G_0 = (A_0, \Gamma(A_0), E_0)$, $G' = (X A_0, Y \Gamma(A_0), E')$
- 其中, A_0 满足 $\forall A \subseteq X, \delta(A) \leq \delta(A_0)$
- 容易观察到, G_0, G' 两部分没有重合的点,两部分的匹配之 并是 G 的匹配
- 那么 G 有匹配 M = M₀ + M', 依据推论 1、2, M₀ 是
 X A₀ 到 Y Γ(A₀) 的完全匹配, M' 是 Γ(A₀) 到 A₀ 的完全匹配

- 4 ロ ト 4 昼 ト 4 差 ト - 差 - 夕 Q ()

定理 5.2.2 回忆: 在二分图 G = (X, Y, E) 中, X 到 Y 的最大匹配边数是 |X| – δ(G), 其中

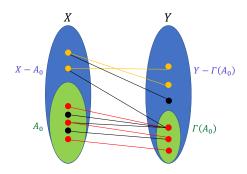
$$\delta(\textit{G}) = \max_{\textit{A} \subseteq \textit{X}} \delta(\textit{A}), \delta(\textit{A}) = |\textit{A}| - |\Gamma(\textit{A})|, \delta(\textit{A}) \geq 0$$

- 对于 G = (X, Y, E) 作分割 $G = G_0 + G' + E_e$, $G_0 = (A_0, \Gamma(A_0), E_0)$, $G' = (X A_0, Y \Gamma(A_0), E')$
- 其中, A_0 满足 $\forall A \subseteq X, \delta(A) \leq \delta(A_0)$
- 容易观察到, G_0, G' 两部分没有重合的点,两部分的匹配之 并是 G 的匹配
- 那么 G 有匹配 M = M₀ + M', 依据推论 1、2, M₀ 是
 X A₀ 到 Y Γ(A₀) 的完全匹配, M' 是 Γ(A₀) 到 A₀ 的完全匹配

•

$$|M| = |M_0| + |M'| = |X| - |A_0| + |\Gamma(A_0)|$$

- 4 ロ ト 4 昼 ト 4 差 ト - 差 - 夕 Q ()



• M 是最大匹配: $\Gamma(A_0)$ 与 $X - A_0$ 中的结点均为饱和结点,且 A_0 与 $Y - \Gamma(A_0)$ 之间无边

- 4ロト 4回ト 4 注 ト 4 注 ト 9 Q Q

• M 是 G 的匹配

- M是G的匹配
- M 是 G 的最大匹配 (严谨证明已发在网络学堂讨论区, 使用可增广道路证明)

- 4 ロ ト 4 団 ト 4 重 ト 4 重 ト 9 Q CP

- M 是 G 的匹配
- M 是 G 的最大匹配 (严谨证明已发在网络学堂讨论区, 使用可增广道路证明)
- 证毕

- 4 D ト 4 団 ト 4 豆 ト 4 豆 ト 9 Q CP

- M是G的匹配
- M 是 G 的最大匹配 (严谨证明已发在网络学堂讨论区, 使用可增广道路证明)
- 证毕
- G 的最大匹配是 M, $|M| = |X| |A_0| + |\Gamma(A_0)|$, 即

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{X}| - \delta(\mathbf{G}), \delta(\mathbf{G}) = \max_{\mathbf{A} \subseteq \mathbf{X}} \delta(\mathbf{A}), \delta(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| - |\Gamma(\mathbf{A})|, \delta(\mathbf{A}) \ge 0$$