Prufer 序列及其应用

计14 王博文

问题引入

习题三 3.

- 令 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ 是给定结点，$d_1, d_2, \ldots, d_n$ 是给定的数，满足：

$$\sum d_i = 2n-2, d_i \geq 1.$$

- 证明在集合 $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 上满足 $d(v_i) = d_i, i = 1,2, \ldots, n$ 的树的数目是：

$$\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!\cdots(d_n-1)!}.$$

问题引入

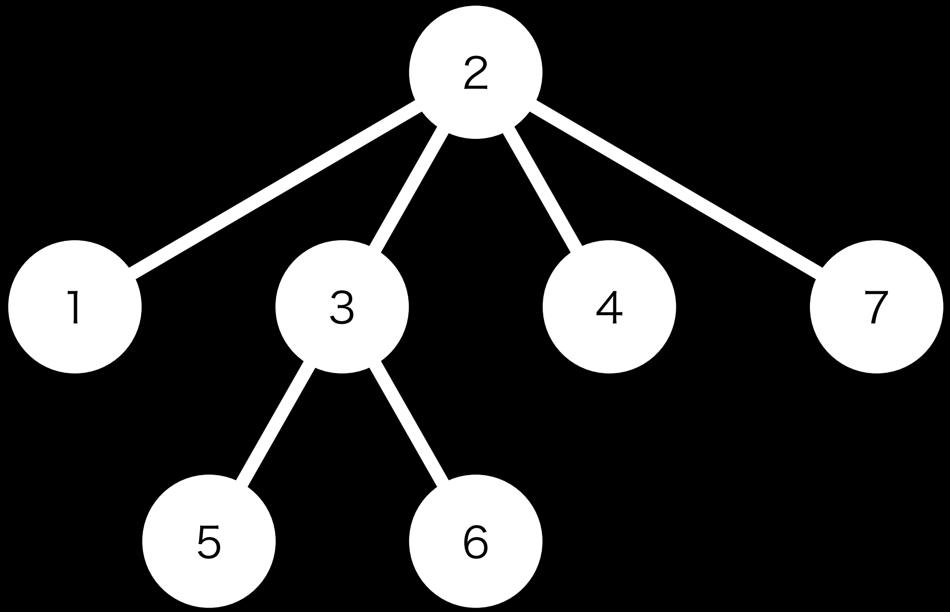
习题三 3.

- 如何考虑?

问题引入

习题三 3.

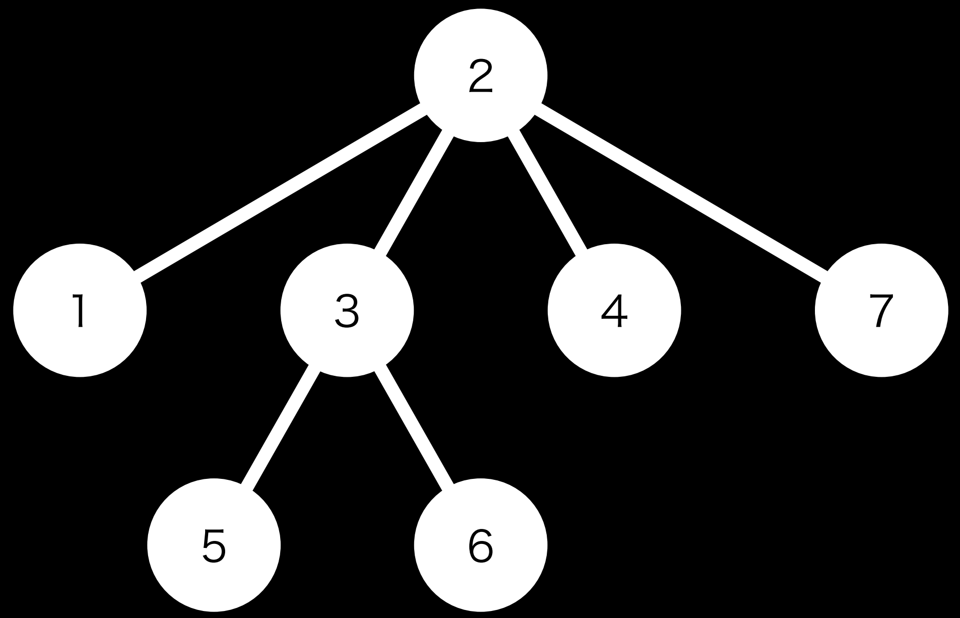
- 计数问题：转化为序列计数
- 随便找一个点当根进行深搜，考虑深搜序？



问题引入

习题三 3.

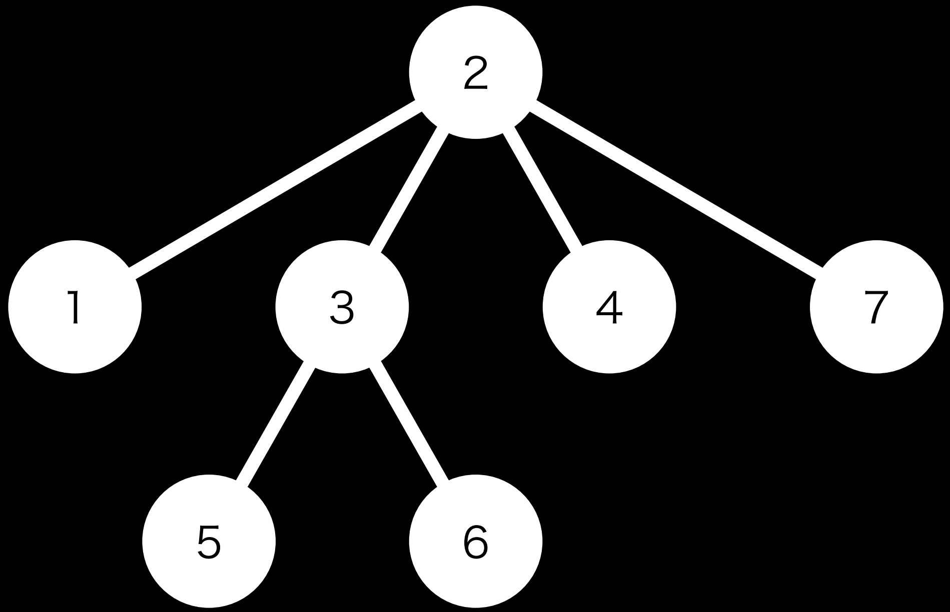
- 深搜序不唯一：起点不同，深搜序也不同
- $S_1 = \{2,1,3,5,6,4,7\}$
- $S_2 = \{1,2,3,5,6,4,7\}$
- 解决方案：随便抓一个点当根



问题引入

习题三 3.

- 每个子树的顺序可以交换，如何处理?
- $S_1 = \{2,1,3,5,6,4,7\}$
- $S_2 = \{2,1,7,4,3,6,5\}$
- 解决方案：优先访问编号小的结点



问题引入

习题三 3.

- 考虑如何构造深搜序列
- 处理点的度数比较麻烦，例如：
- 怎么在序列中体现点的度数？子树个数？但是子树大小不知道
- 启发：一个点的度数是它邻点的个数，可以用邻点个数表示度数
- 怎么处理叶子结点？如果根结点连的点度数全为 1，其他点就没地方放了
- 启发：从叶子出发，向上走

Prufer 序列

- 由德国数学家 Heinz Prüfer 于 1918 年证明 Cayley 公式时提出
- 建立了结点带标号的树与一个序列之间的双射
- 在图论中有广泛应用

标号树 $\mapsto$ Prufer 序列

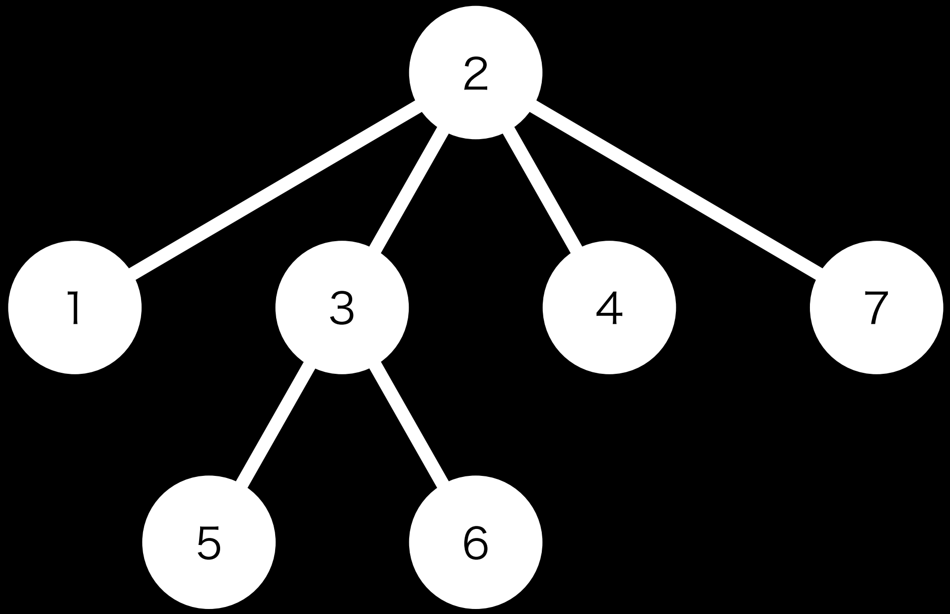
- 1. 令 v_0 为当前 G 中 $\{v|d(v) = 1\}$ 中标号最小的结点;
- 2. 将与 v_0 相邻的结点加入 Prufer 序列 S，然后从 G 中删去 v_0;
- 3. 若 $|V(G)| = 2$ 则结束，否则回到步骤 1.

标号树 $\mapsto$ Prufer 序列

例

- 1. 令 v_0 为当前 G 中 $\{v|d(v) = 1\}$ 中标号最小的结点；

- $S = \{\}$

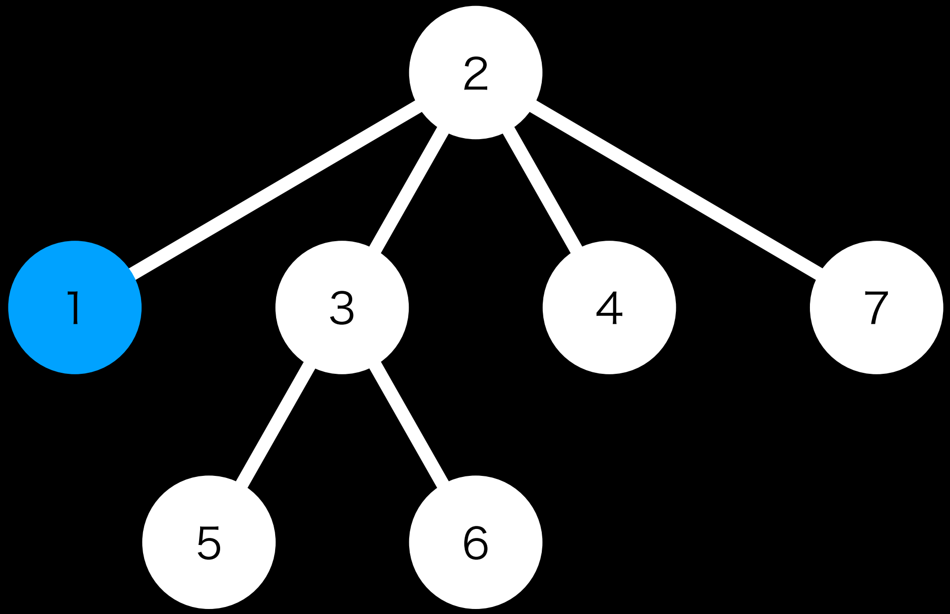


标号树 $\mapsto$ Prufer 序列

例

- 1. 令 v_0 为当前 G 中 $\{v|d(v) = 1\}$ 中标号最小的结点;

- $S = \{\}$

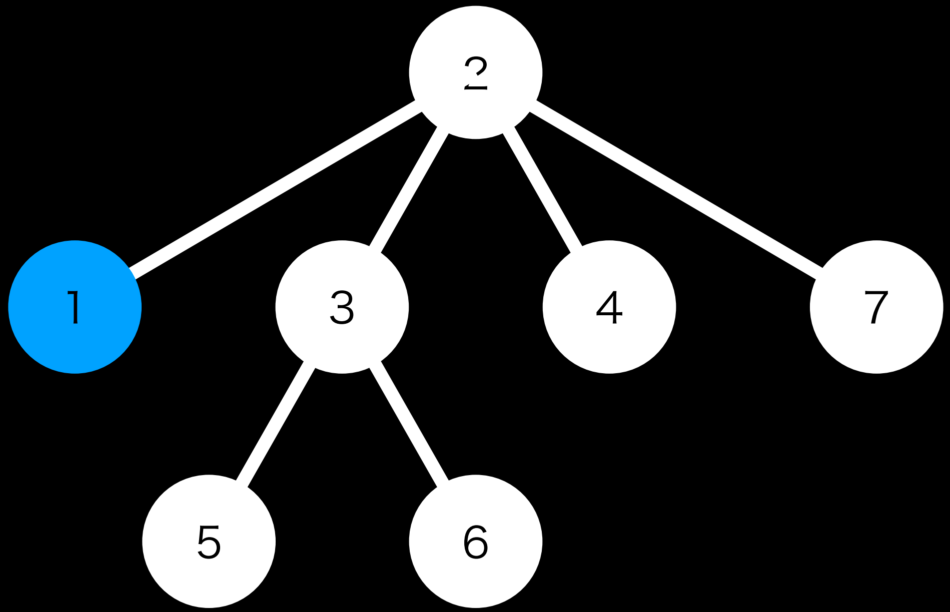


标号树 ↦ Prufer 序列

例

- 2. 将与 v_0 相邻的结点加入 Prufer 序列 S，然后从 G 中删去 v_0；

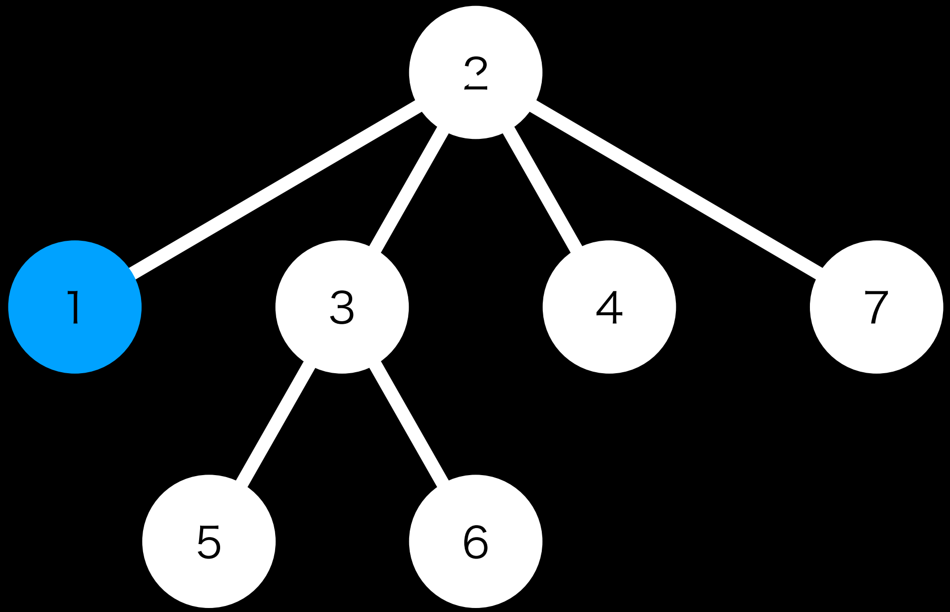
- $S = \{\}$



标号树 ↦ Prufer 序列

例

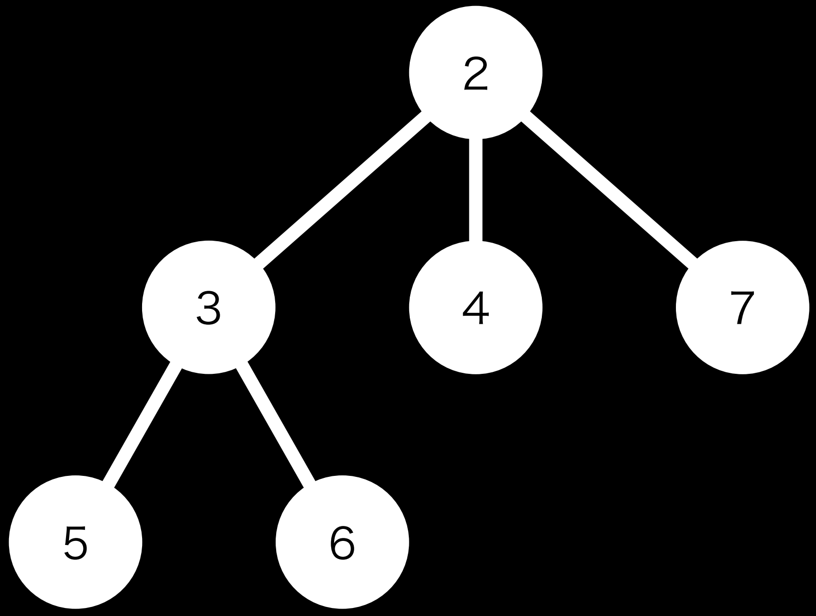
- 2. 将与 v_0 相邻的结点加入 Prufer 序列 S，然后从 G 中删去 v_0；
- $S = \{2\}$



标号树 $\mapsto$ Prufer 序列

例

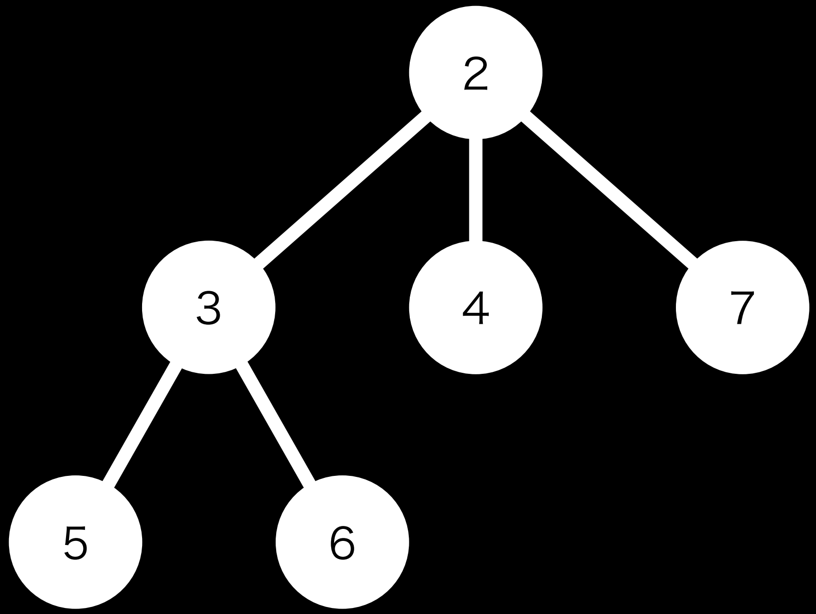
- 2. 将与 v_0 相邻的结点加入 Prufer 序列 S，然后从 G 中删去 v_0；
- $S = \{2\}$



标号树 $\mapsto$ Prufer 序列

例

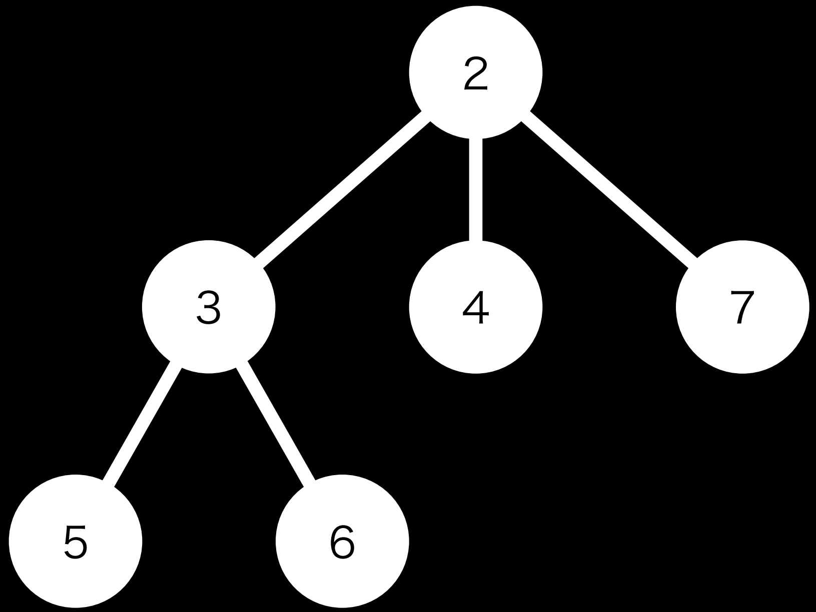
- 3. 若 $|V(G)| = 2$ 则结束，否则回到步骤 1.
- $S = \{2\}$



标号树 $\mapsto$ Prufer 序列

例

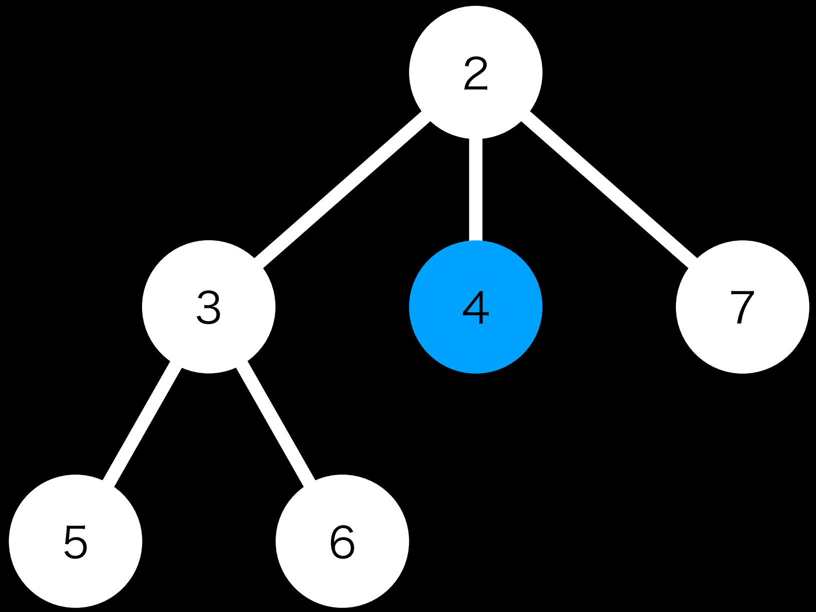
- 1. 令 v_0 为当前 G 中 $\{v|d(v) = 1\}$ 中标号最小的结点；
- $S = \{2\}$



标号树 $\mapsto$ Prufer 序列

例

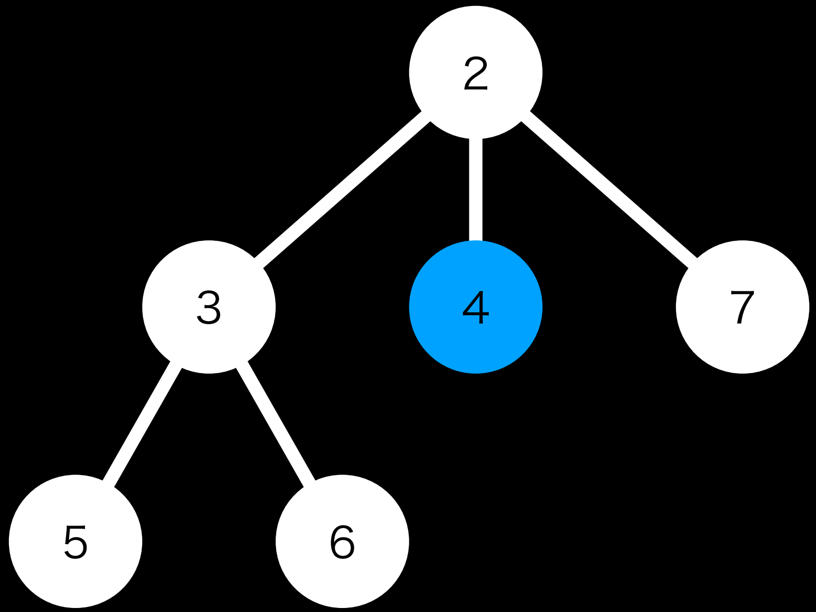
- 1. 令 v_0 为当前 G 中 $\{v|d(v) = 1\}$ 中标号最小的结点;
- $S = \{2\}$



标号树 $\mapsto$ Prufer 序列

例

- 2. 将与 v_0 相邻的结点加入 Prufer 序列 S，然后从 G 中删去 v_0；
- $S = \{2\}$

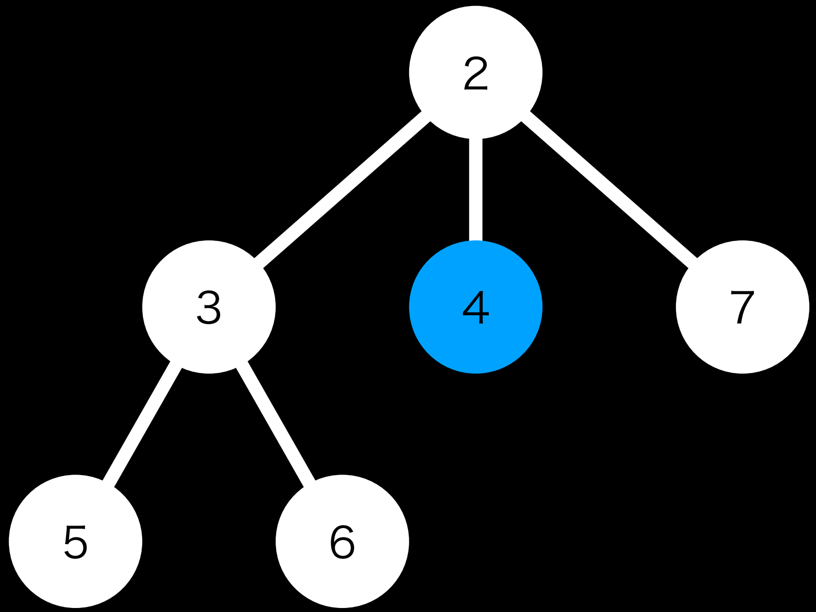


标号树 $\mapsto$ Prufer 序列

例

- 2. 将与 v_0 相邻的结点加入 Prufer 序列 S，然后从 G 中删去 v_0；

- $S = \{2,2\}$

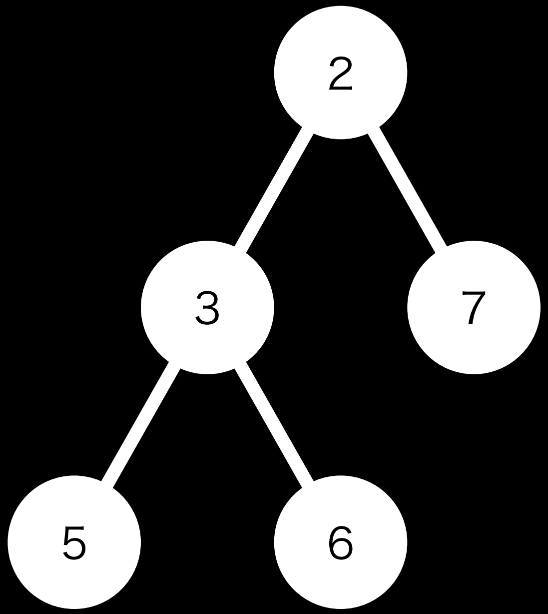


标号树 $\mapsto$ Prufer 序列

例

- 2. 将与 v_0 相邻的结点加入 Prufer 序列 S，然后从 G 中删去 v_0；

- $S = \{2,2\}$

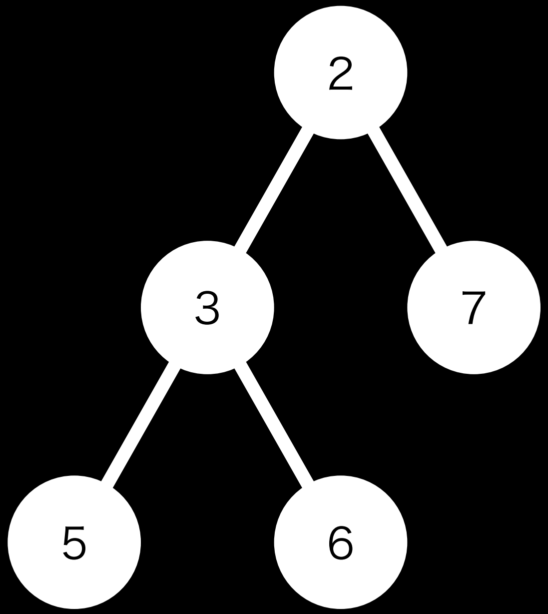


标号树 $\mapsto$ Prufer 序列

例

- 3. 若 $|V(G)| = 2$ 则结束，否则回到步骤 1.

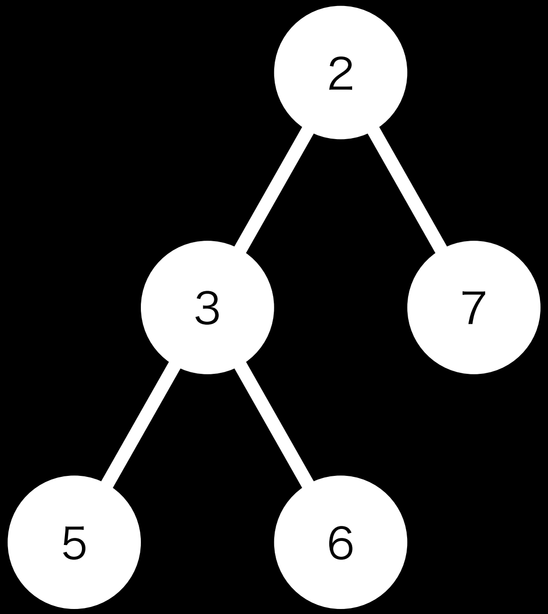
- $S = \{2,2\}$



标号树 ↦ Prufer 序列

例

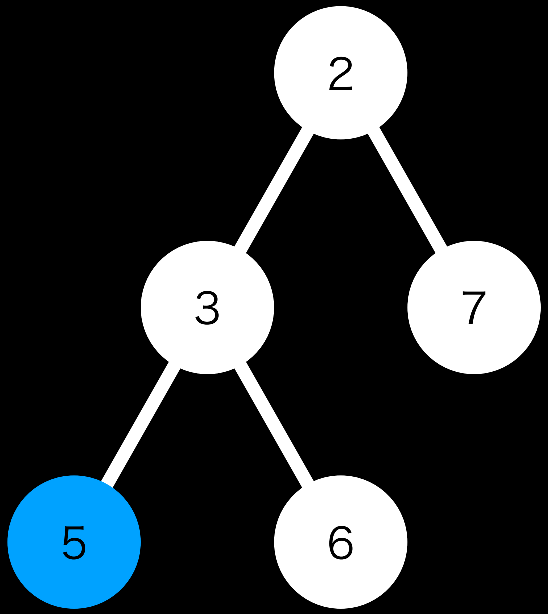
- 1. 令 v_0 为当前 G 中 $\{v|d(v) = 1\}$ 中标号最小的结点；
- $S = \{2,2\}$



标号树 ↦ Prufer 序列

例

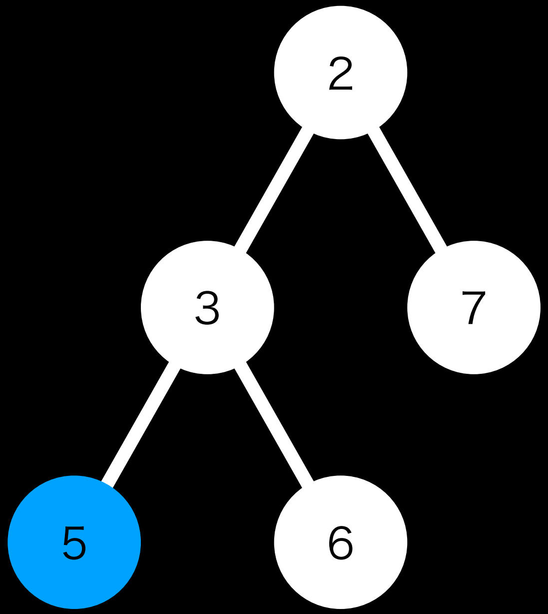
- 1. 令 v_0 为当前 G 中 $\{v|d(v)=1\}$ 中标号最小的结点;
- $S=\{2,2\}$



标号树 ↦ Prufer 序列

例

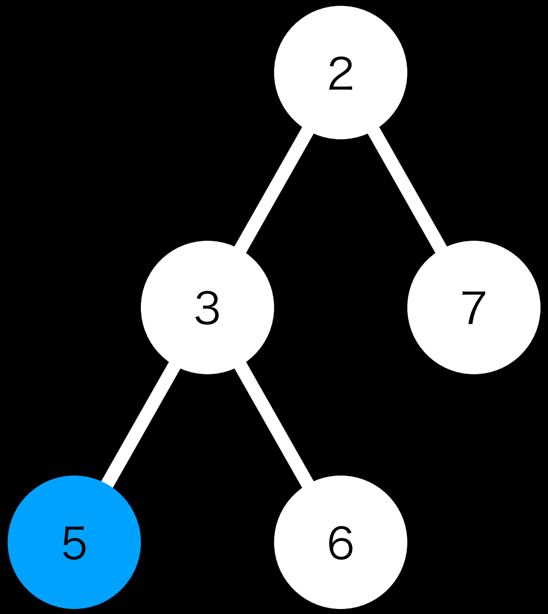
- 2. 将与 v_0 相邻的结点加入 Prufer 序列 S，然后从 G 中删去 v_0；
- $S = \{2,2\}$



标号树 ↦ Prufer 序列

例

- 2. 将与 v_0 相邻的结点加入 Prufer 序列 S，然后从 G 中删去 v_0；
- $S = \{2,2,3\}$

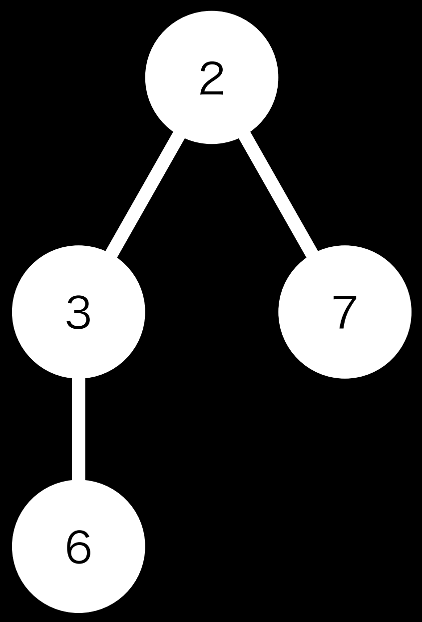


标号树 ↦ Prufer 序列

例

- 2. 将与 v_0 相邻的结点加入 Prufer 序列 S，然后从 G 中删去 v_0；

- $S=\{2,2,3\}$

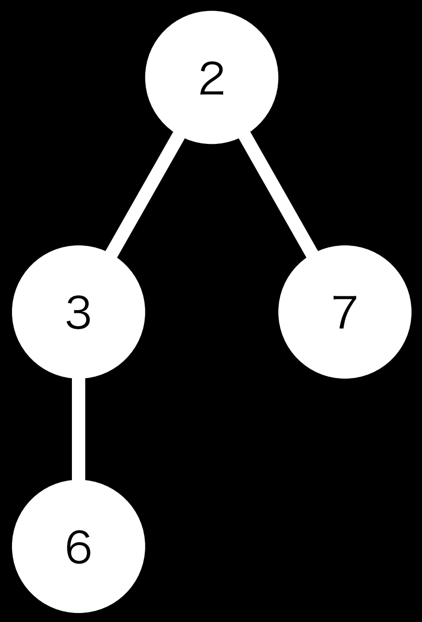


标号树 ↦ Prufer 序列

例

- 3. 若 $|V(G)| = 2$ 则结束，否则回到步骤 1.

- $S = \{2,2,3\}$

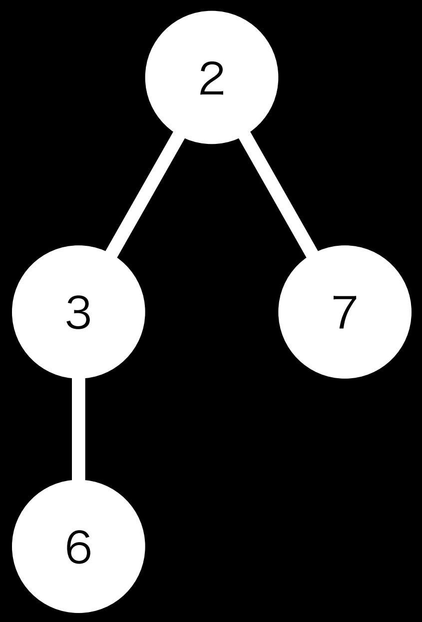


标号树 ↦ Prufer 序列

例

- 1. 令 v_0 为当前 G 中 $\{v|d(v) = 1\}$ 中标号最小的结点;

- $S = \{2,2,3\}$

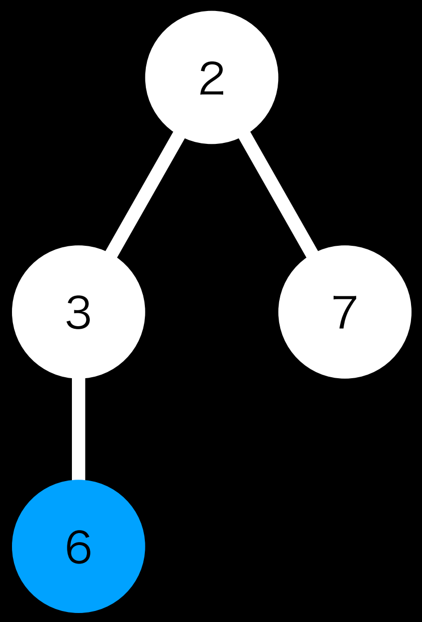


标号树 $\mapsto$ Prufer 序列

例

- 1. 令 v_0 为当前 G 中 $\{v|d(v) = 1\}$ 中标号最小的结点;

- $S = \{2,2,3\}$

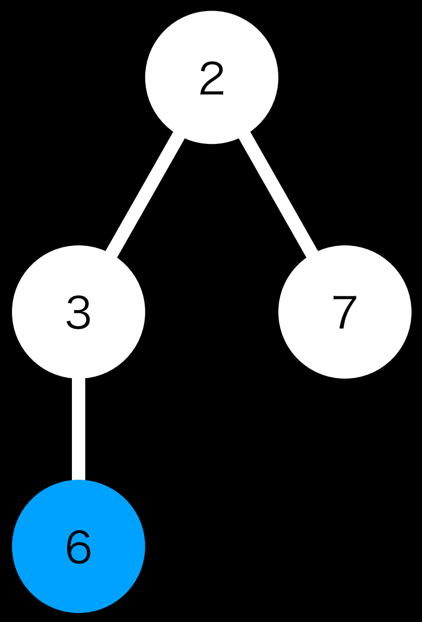


标号树 ↦ Prufer 序列

例

- 2. 将与 v_0 相邻的结点加入 Prufer 序列 S，然后从 G 中删去 v_0;

- $S = \{2,2,3\}$

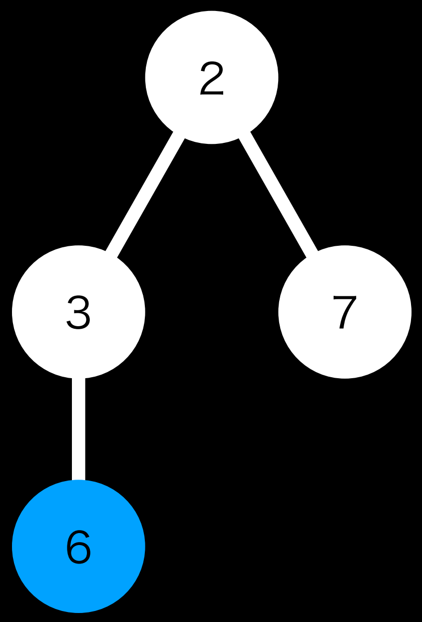


标号树 ↦ Prufer 序列

例

- 2. 将与 v_0 相邻的结点加入 Prufer 序列 S，然后从 G 中删去 v_0；

- $S=\{2,2,3,3\}$

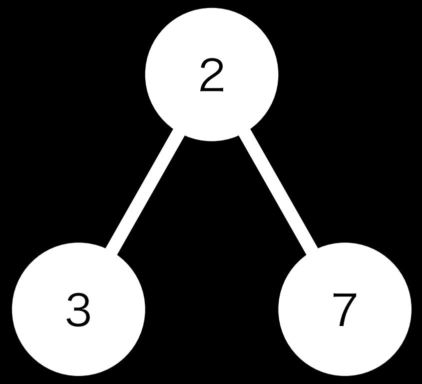


标号树 ↦ Prufer 序列

例

- 2. 将与 v_0 相邻的结点加入 Prufer 序列 S，然后从 G 中删去 v_0；

- $S = \{2,2,3,3\}$

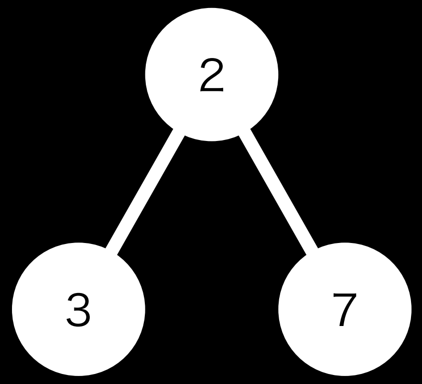


标号树 $\mapsto$ Prufer 序列

例

- 3. 若 $|V(G)| = 2$ 则结束，否则回到步骤 1.

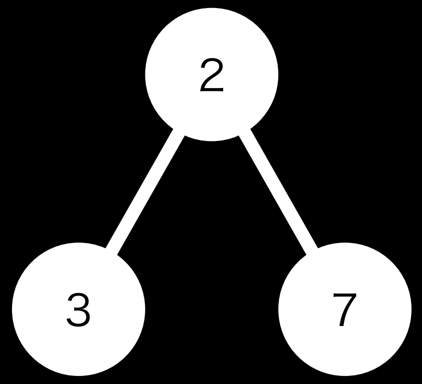
- $S = \{2,2,3,3\}$



标号树 ↦ Prufer 序列

例

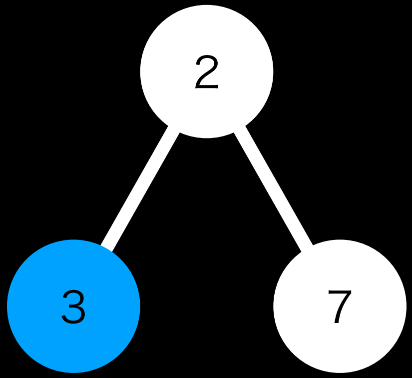
- 1. 令 v_0 为当前 G 中 $\{v|d(v) = 1\}$ 中标号最小的结点；
- $S = \{2,2,3,3\}$



标号树 ↦ Prufer 序列

例

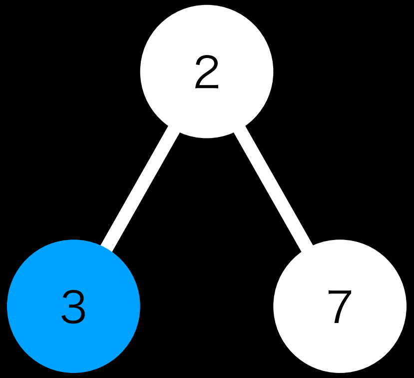
- 1\. 令 v_0 为当前 G 中 $\{v|d(v) = 1\}$ 中标号最小的结点;
- $S = \{2,2,3,3\}$



标号树 $\mapsto$ Prufer 序列

例

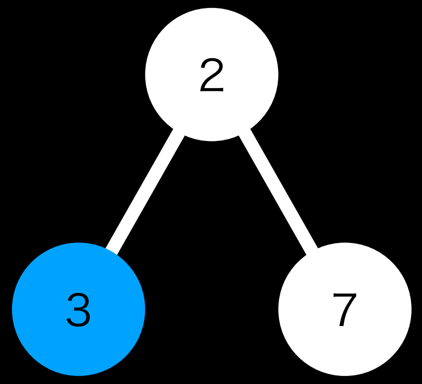
- 2. 将与 v_0 相邻的结点加入 Prufer 序列 S，然后从 G 中删去 v_0；
- $S = \{2,2,3,3\}$



标号树 ↦ Prufer 序列

例

- 2. 将与 v_0 相邻的结点加入 Prufer 序列 S，然后从 G 中删去 v_0；
- $S = \{2,2,3,3,2\}$

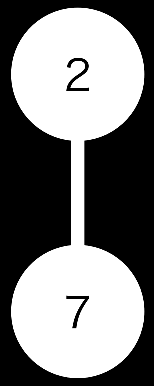


标号树 ↦ Prufer 序列

例

- 2. 将与 v_0 相邻的结点加入 Prufer 序列 S，然后从 G 中删去 v_0；

- $S = \{2,2,3,3,2\}$

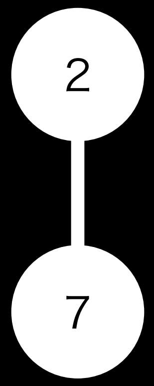


标号树 ↦ Prufer 序列

例

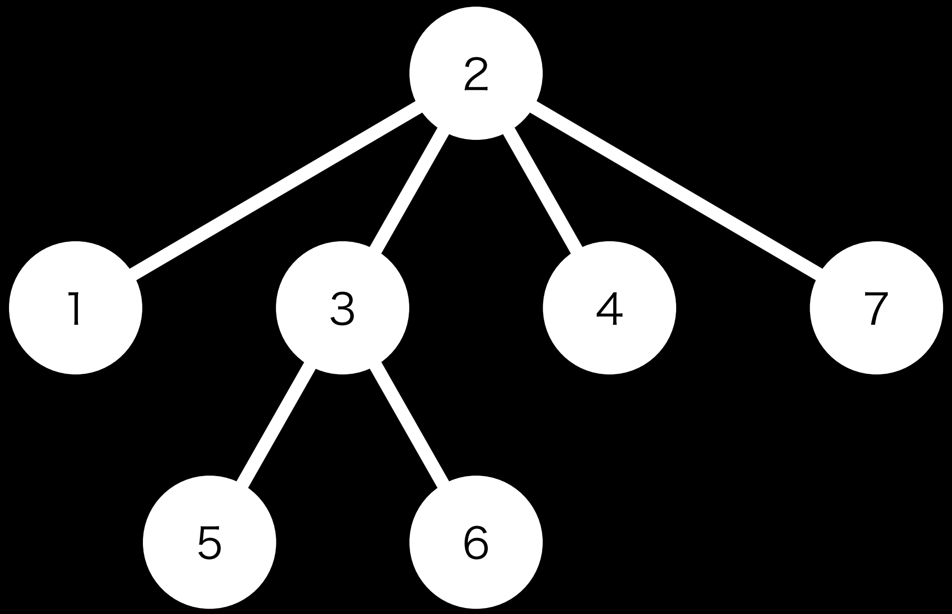
- 3. 若 $|V(G)| = 2$ 则结束，否则回到步骤 1.

- $S = \{2,2,3,3,2\}$



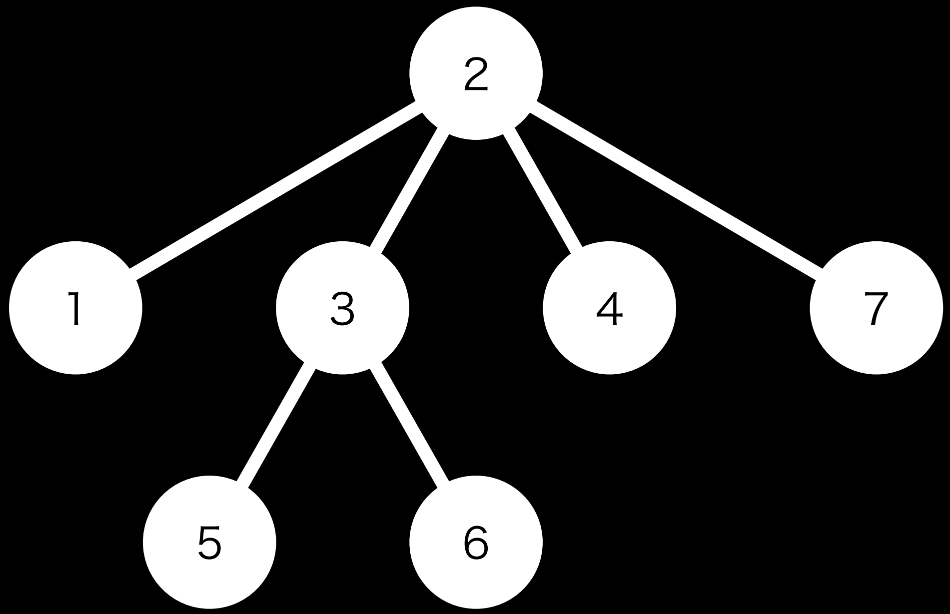
标号树 ↦ Prufer 序列

- $S = \{2,2,3,3,2\}$
  - 每一步操作都是确定性的
  - 因此 Prufer 序列唯一



Prufer 序列的性质

- $S = \{2,2,3,3,2\}$
  - 点 v_i 恰好出现 $d(v_i) - 1$ 次
  - 为什么最后剩一条边不删掉？
  - 因为那样会导致最后一个点（实际上一定是编号最大的点）出现 $d(v_i)$ 次



Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

- 完全类似的做法，只不过这一次删边变成了加边
- 0. 记点集 $V=\{v_1,\dots,v_n\}$，其中 $n=|S|+2$。为每个节点赋予度数：令 $d(v_i)$ 为 v_i 在 Prufer 序列 S 中出现次数 $+1$;
- 1. 令 v_0 为当前 V 中 $\{v|d(v)=1\}$ 中标号最小的结点;
- 2. 从 S 中取出首项 s_0，连边 (v_0,s_0)，然后从 V 中删去 v_0，从 S 中删去 s_0;
- 3. 令 $d(s_0)\leftarrow d(s_0)-1$;
- 4. 若 $|S|=0$，则一定有 $|V|=2$，设 $V=\{v_i,v_j\}$，连边 (v_i,v_j)，结束；否则回到步骤 1.

Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

- 0. 记点集 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$，其中 $n = |S| + 2$。为每个节点赋予度数：令 $d(v_i)$ 为 v_i 在 Prufer 序列 S 中出现次数 $+1$；

- $S = \{2,2,3,3,2\}$
- $V = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
- $d = \{1,4,3,1,1,1,1\}$

Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

- 1. 令 v_0 为当前 V 中 $\{v|d(v)=1\}$ 中标号最小的结点；
- $S=\{2,2,3,3,2\}$
- $V=\{1,2,3,4,5,6,7\}$
- $d=\{1,4,3,1,1,1,1\}$

Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

- 1. 令 v_0 为当前 V 中 $\{v|d(v) = 1\}$ 中标号最小的结点；
- $S = \{2,2,3,3,2\}$
- $V = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
- $d = \{1,4,3,1,1,1,1\}$
- $v_0 = 1$

Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

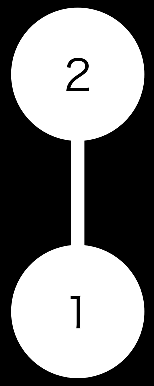
例

- 2. 从 S 中取出首项 s_0，连边 (v_0, s_0)，然后从 V 中删去v_0，从 S 中删去 s_0；
- $S = \{2,2,3,3,2\}$
- $V = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
- $d = \{1,4,3,1,1,1,1\}$
- $v_0 = 1$

Prufer 序列 ↦ 标号树

例

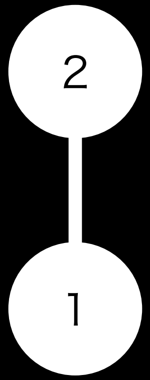
- 2. 从 S 中取出首项 s_0，连边 (v_0, s_0)，然后从 V 中删去v_0，从 S 中删去 s_0；
- $S = \{2,2,3,3,2\}$
- $V = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
- $d = \{1,4,3,1,1,1,1\}$
- $v_0 = 1$



Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

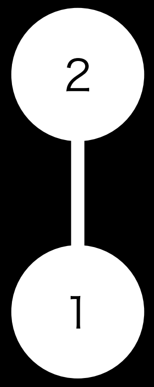
- 2. 从 S 中取出首项 s_0，连边 (v_0, s_0)，然后从 V 中删去v_0，从 S 中删去 s_0；
- $S = \{2,3,3,2\}$
- $V = \{2,3,4,5,6,7\}$
- $d = \{4,3,1,1,1,1\}$



Prufer 序列 ↦ 标号树

例

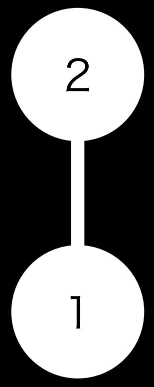
- 3. 令 $d(s_0) \leftarrow d(s_0) - 1$;
- $S = \{2,3,3,2\}$
- $V = \{2,3,4,5,6,7\}$
- $d = \{4,3,1,1,1,1\}$



Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

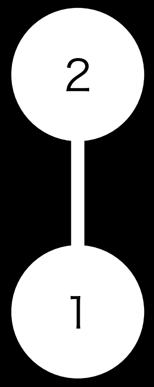
- 3. 令 $d(s_0) \leftarrow d(s_0) - 1$;
- $S = \{2,3,3,2\}$
- $V = \{2,3,4,5,6,7\}$
- $d = \{3,3,1,1,1,1\}$



Prufer 序列 ↦ 标号树

例

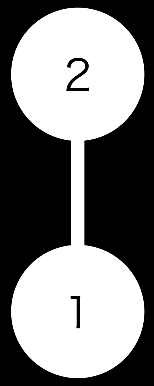
- 4. 若 $|S| = 0$，则……；否则回到步骤 1.
- $S = \{2,3,3,2\}$
- $V = \{2,3,4,5,6,7\}$
- $d = \{3,3,1,1,1,1\}$



Prufer 序列 ↦ 标号树

例

- 1. 令 v_0 为当前 V 中 $\{v|d(v) = 1\}$ 中标号最小的结点;
- $S = \{2,3,3,2\}$
- $V = \{2,3,4,5,6,7\}$
- $d = \{3,3,1,1,1,1\}$

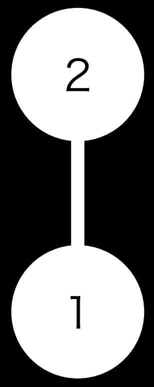


Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

- 1. 令 v_0 为当前 V 中 $\{v|d(v) = 1\}$ 中标号最小的结点；

- $S = \{2,3,3,2\}$
- $V = \{2,3,4,5,6,7\}$
- $d = \{3,3,1,1,1,1\}$
- $v_0 = 4$

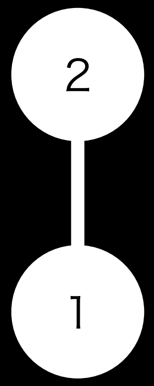


Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

- 2. 从 S 中取出首项 s_0，连边 (v_0, s_0)，然后从 V 中删去v_0，从 S 中删去 s_0；

- $S = \{2,3,3,2\}$
- $V = \{2,3,4,5,6,7\}$
- $d = \{3,3,1,1,1,1\}$
- $v_0 = 4$

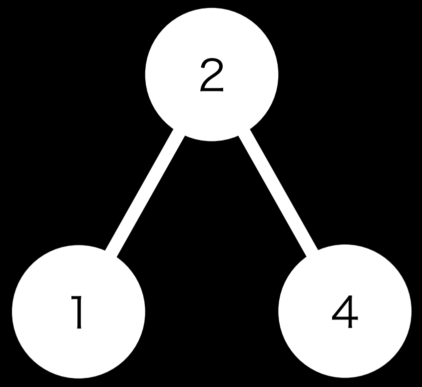


Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

- 2. 从 S 中取出首项 s_0，连边 (v_0, s_0)，然后从 V 中删去v_0，从 S 中删去 s_0；

- $S = \{2,3,3,2\}$
- $V = \{2,3,4,5,6,7\}$
- $d = \{3,3,1,1,1,1\}$
- $v_0 = 4$

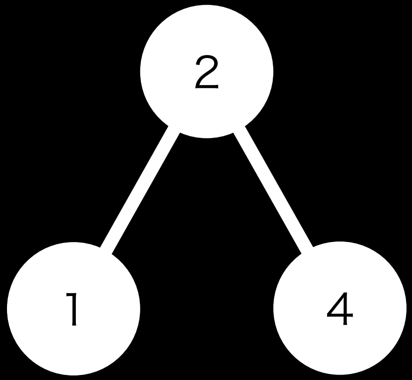


Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

- 2. 从 S 中取出首项 s_0，连边 (v_0, s_0)，然后从 V 中删去v_0，从 S 中删去 s_0；

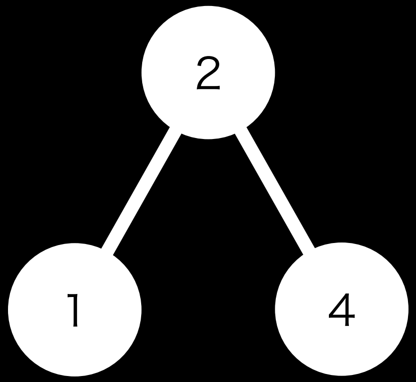
- $S = \{3,3,2\}$
- $V = \{2,3,5,6,7\}$
- $d = \{3,3,1,1,1\}$



Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

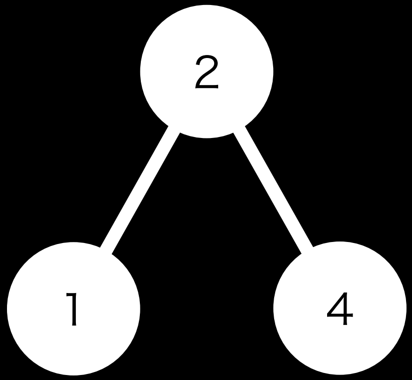
- 3. 令 $d(s_0) \leftarrow d(s_0) - 1$;
- $S = \{3,3,2\}$
- $V = \{2,3,5,6,7\}$
- $d = \{3,3,1,1,1\}$



Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

- 3. 令 $d(s_0) \leftarrow d(s_0) - 1$;
- $S = \{3,3,2\}$
- $V = \{2,3,5,6,7\}$
- $d = \{2,3,1,1,1\}$

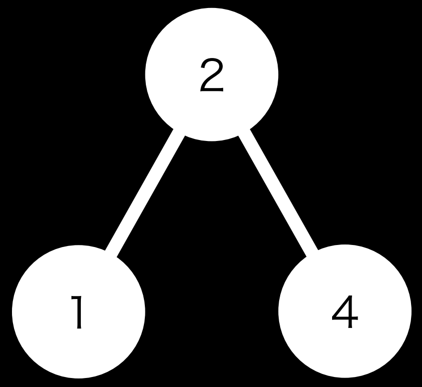


Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

- 4. 若 $|S| = 0$，则……；否则回到步骤 1.

- $S = \{3,3,2\}$
- $V = \{2,3,5,6,7\}$
- $d = \{2,3,1,1,1\}$

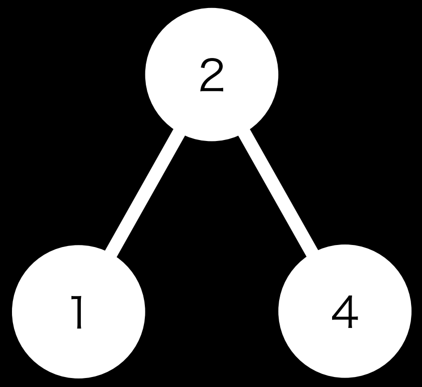


Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

- 1. 令 v_0 为当前 V 中 $\{v|d(v) = 1\}$ 中标号最小的结点；

- $S = \{3,3,2\}$
- $V = \{2,3,5,6,7\}$
- $d = \{2,3,1,1,1\}$

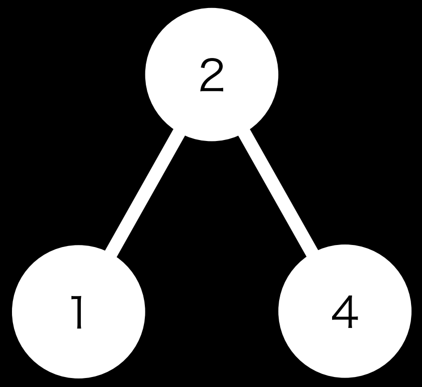


Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

- 1. 令 v_0 为当前 V 中 $\{v|d(v) = 1\}$ 中标号最小的结点;

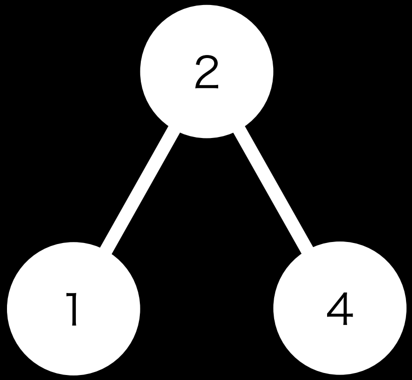
- $S = \{3,3,2\}$
- $V = \{2,3,5,6,7\}$
- $d = \{2,3,1,1,1\}$
- $v_0 = 5$



Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

- 2. 从 S 中取出首项 s_0，连边 (v_0, s_0)，然后从 V 中删去v_0，从 S 中删去 s_0；
- $S = \{3,3,2\}$
- $V = \{2,3,5,6,7\}$
- $d = \{2,3,1,1,1\}$
- $v_0 = 5$

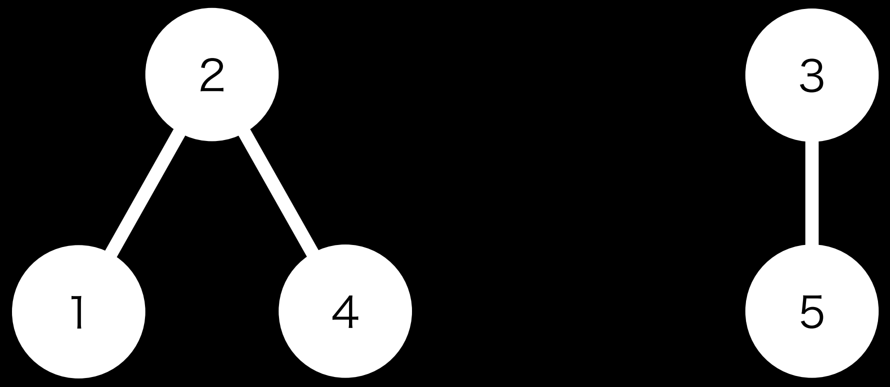


Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

- 2. 从 S 中取出首项 s_0，连边 (v_0, s_0)，然后从 V 中删去v_0，从 S 中删去 s_0；

- $S = \{3,3,2\}$
- $V = \{2,3,5,6,7\}$
- $d = \{2,3,1,1,1\}$
- $v_0 = 5$

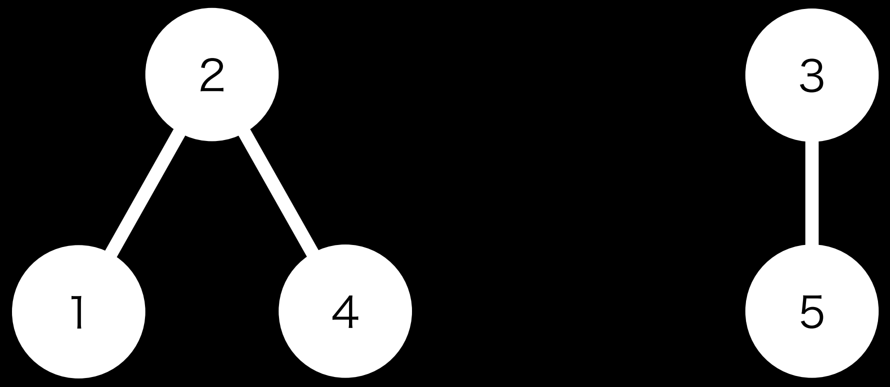


Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

- 2. 从 S 中取出首项 s_0，连边 (v_0, s_0)，然后从 V 中删去v_0，从 S 中删去 s_0；

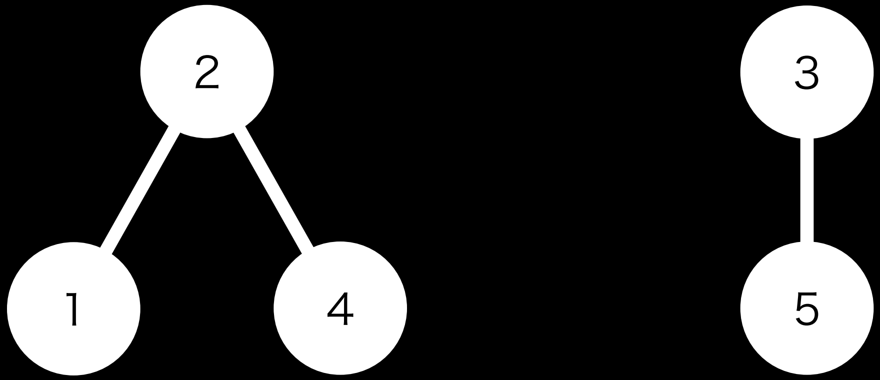
- $S = \{3,2\}$
- $V = \{2,3,6,7\}$
- $d = \{2,3,1,1\}$



Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

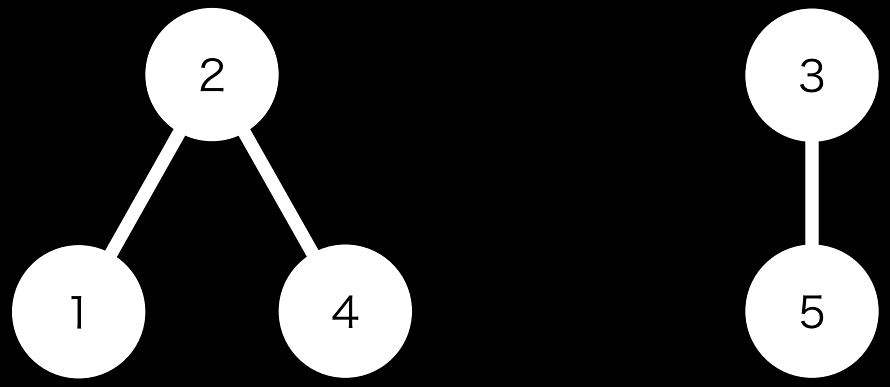
- 3. 令 $d(s_0) \leftarrow d(s_0) - 1$;
- $S = \{3,2\}$
- $V = \{2,3,6,7\}$
- $d = \{2,3,1,1\}$



Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

- 3. 令 $d(s_0) \leftarrow d(s_0) - 1$;
- $S = \{3,2\}$
- $V = \{2,3,6,7\}$
- $d = \{2,2,1,1\}$

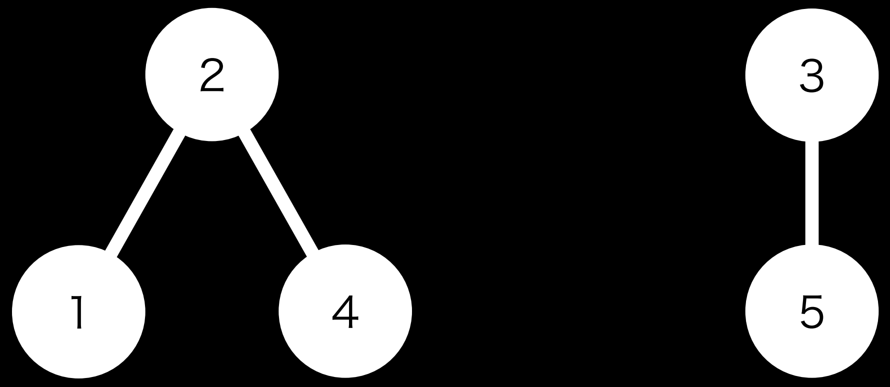


Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

- 4. 若 $|S| = 0$，则……；否则回到步骤 1.

- $S = \{3,2\}$
- $V = \{2,3,6,7\}$
- $d = \{2,2,1,1\}$

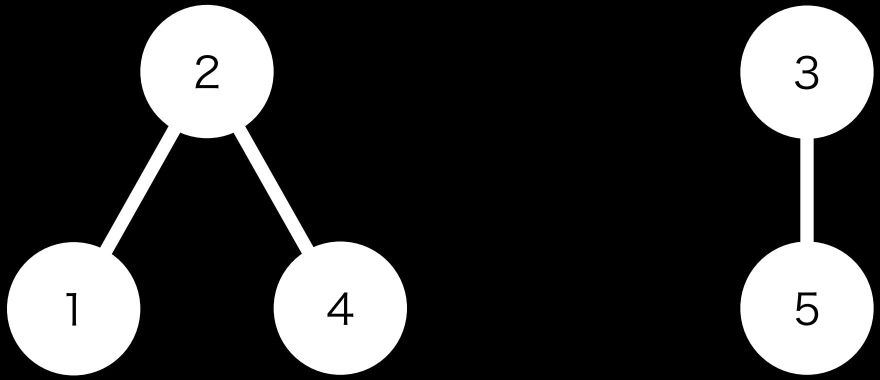


Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

- 1. 令 v_0 为当前 V 中 $\{v|d(v) = 1\}$ 中标号最小的结点;

- $S = \{3,2\}$
- $V = \{2,3,6,7\}$
- $d = \{2,2,1,1\}$

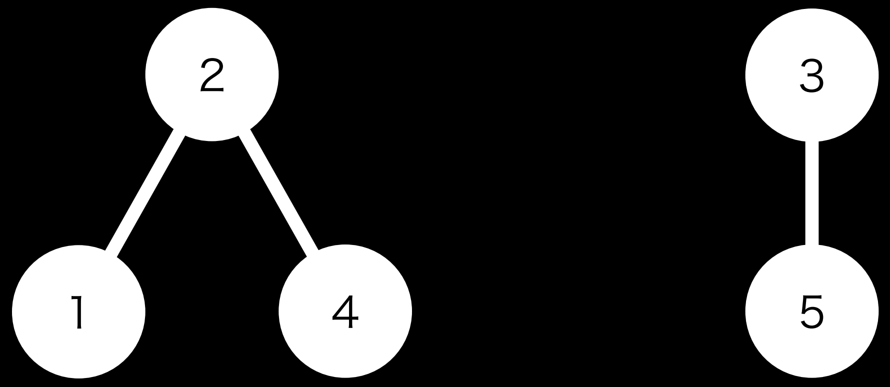


Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

- 1. 令 v_0 为当前 V 中 $\{v|d(v) = 1\}$ 中标号最小的结点;

- $S = \{3,2\}$
- $V = \{2,3,6,7\}$
- $d = \{2,2,1,1\}$
- $v_0 = 6$

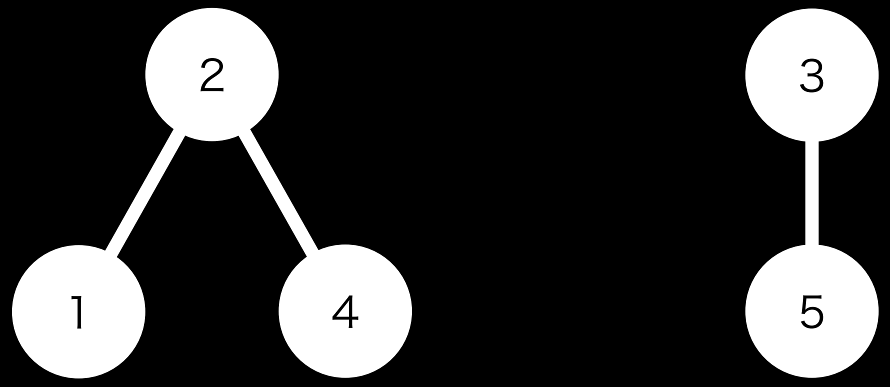


Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

- 2. 从 S 中取出首项 s_0，连边 (v_0, s_0)，然后从 V 中删去v_0，从 S 中删去 s_0；

- $S = \{3,2\}$
- $V = \{2,3,6,7\}$
- $d = \{2,2,1,1\}$
- $v_0 = 6$

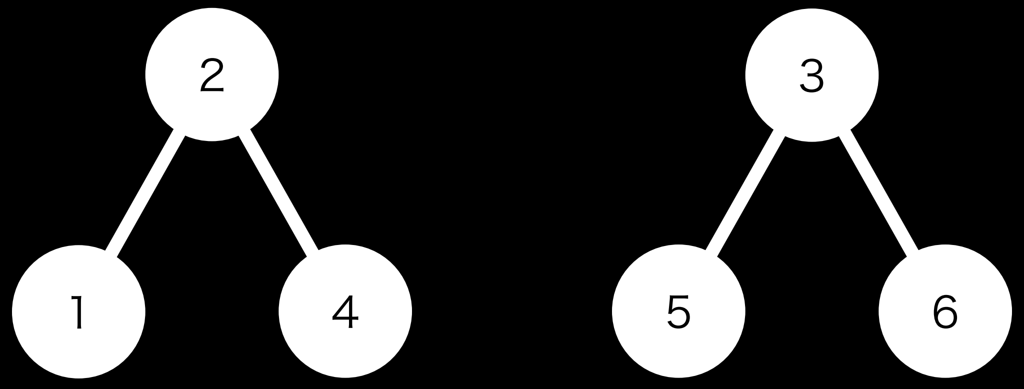


Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

- 2. 从 S 中取出首项 s_0，连边 (v_0, s_0)，然后从 V 中删去v_0，从 S 中删去 s_0；

- $S = \{3,2\}$
- $V = \{2,3,6,7\}$
- $d = \{2,2,1,1\}$
- $v_0 = 6$

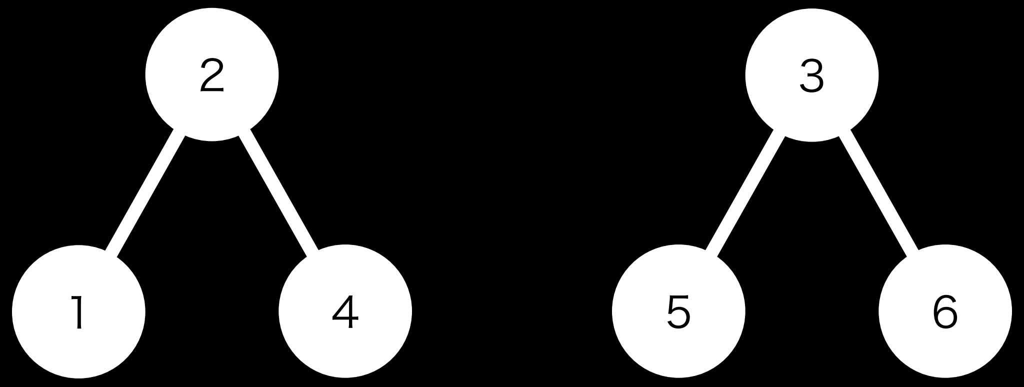


Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

- 2. 从 S 中取出首项 s_0，连边 (v_0, s_0)，然后从 V 中删去v_0，从 S 中删去 s_0；

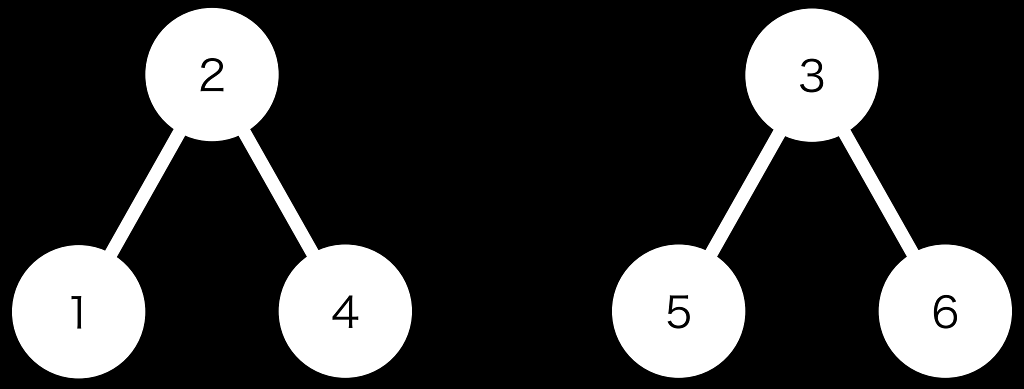
- $S = \{2\}$
- $V = \{2,3,7\}$
- $d = \{2,2,1\}$



Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

- 3. 令 $d(s_0) \leftarrow d(s_0) - 1$;
- $S = \{2\}$
- $V = \{2,3,7\}$
- $d = \{2,2,1\}$

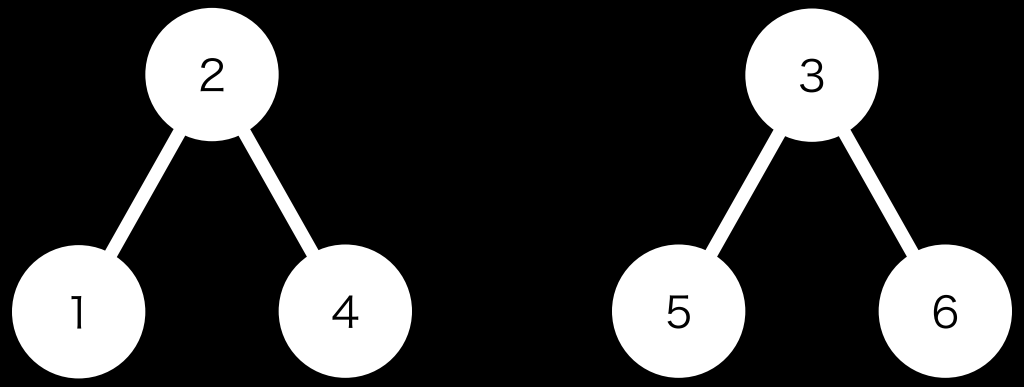


Prufer 序列 ↦ 标号树

例

- 3. 令 $d(s_0) \leftarrow d(s_0) - 1$;

- $S = \{2\}$
- $V = \{2,3,7\}$
- $d = \{2,1,1\}$

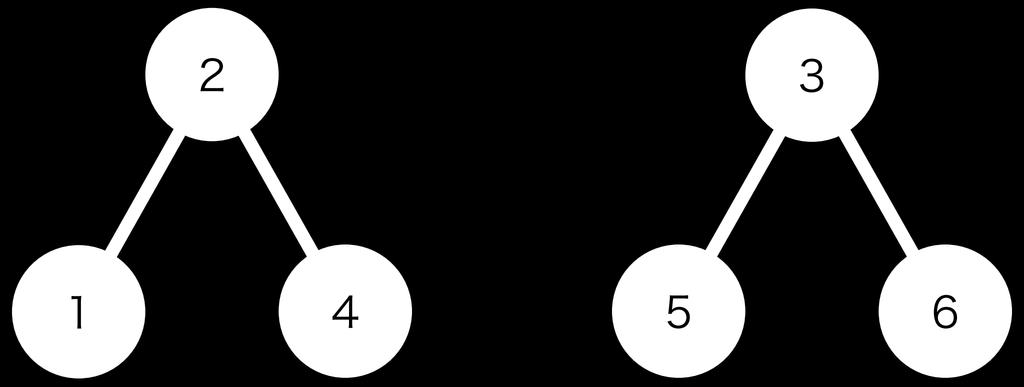


Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

- 4. 若 $|S| = 0$，则……；否则回到步骤 1.

- $S = \{2\}$
- $V = \{2,3,7\}$
- $d = \{2,1,1\}$

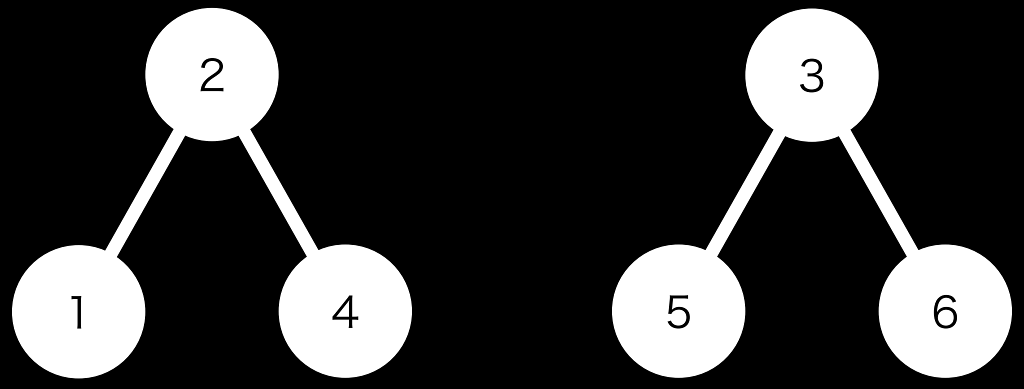


Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

- 1. 令 v_0 为当前 V 中 $\{v|d(v) = 1\}$ 中标号最小的结点；

- $S = \{2\}$
- $V = \{2,3,7\}$
- $d = \{2,1,1\}$

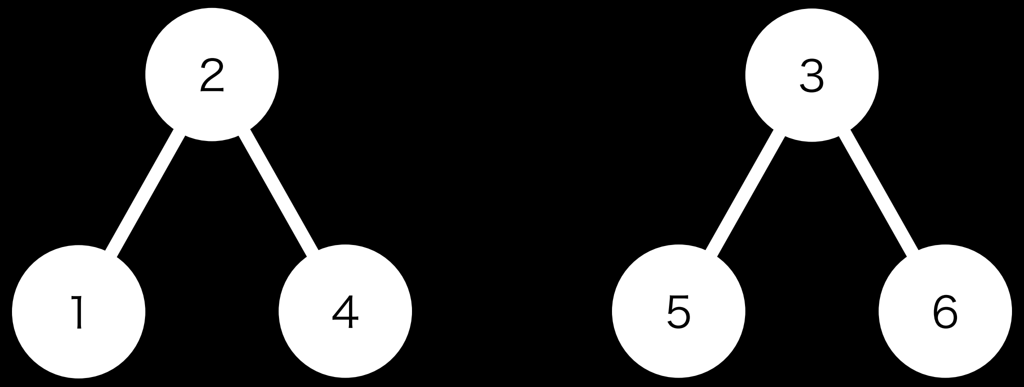


Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

- 1. 令 v_0 为当前 V 中 $\{v|d(v) = 1\}$ 中标号最小的结点；

- $S = \{2\}$
- $V = \{2,3,7\}$
- $d = \{2,1,1\}$
- $v_0 = 3$

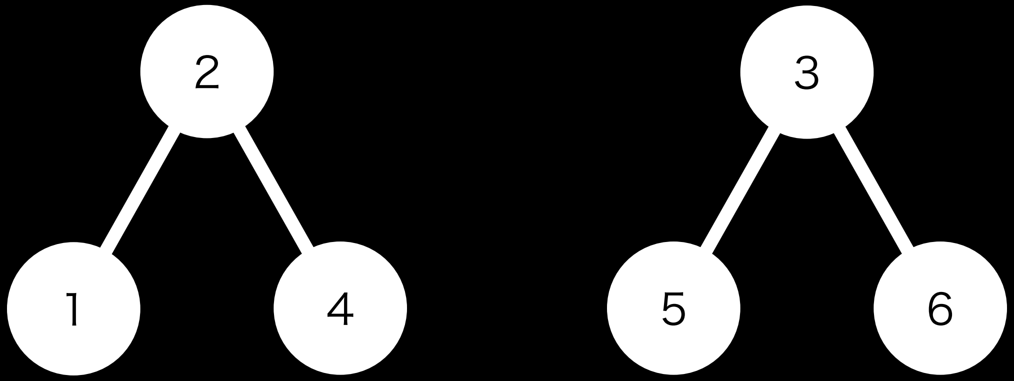


Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

- 2. 从 S 中取出首项 s_0，连边 (v_0, s_0)，然后从 V 中删去v_0，从 S 中删去 s_0；

- $S = \{2\}$
- $V = \{2,3,7\}$
- $d = \{2,1,1\}$
- $v_0 = 3$

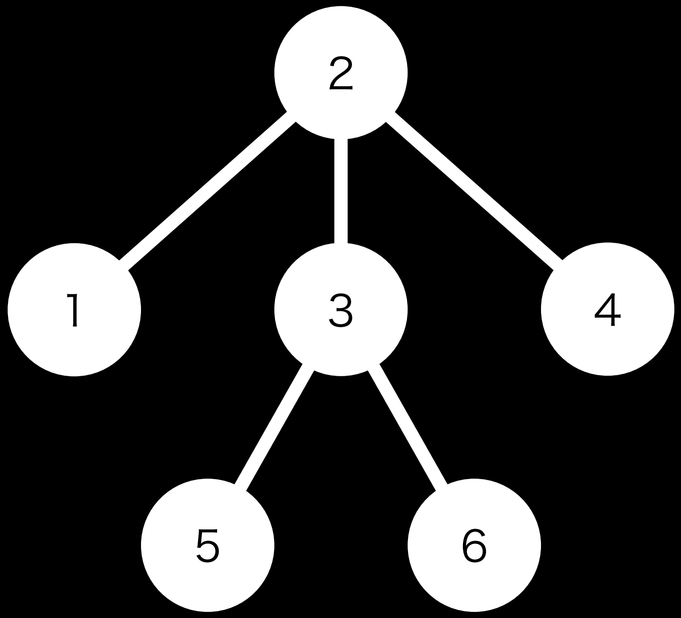


Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

- 2. 从 S 中取出首项 s_0，连边 (v_0, s_0)，然后从 V 中删去v_0，从 S 中删去 s_0；

- $S = \{2\}$
- $V = \{2,3,7\}$
- $d = \{2,1,1\}$
- $v_0 = 3$

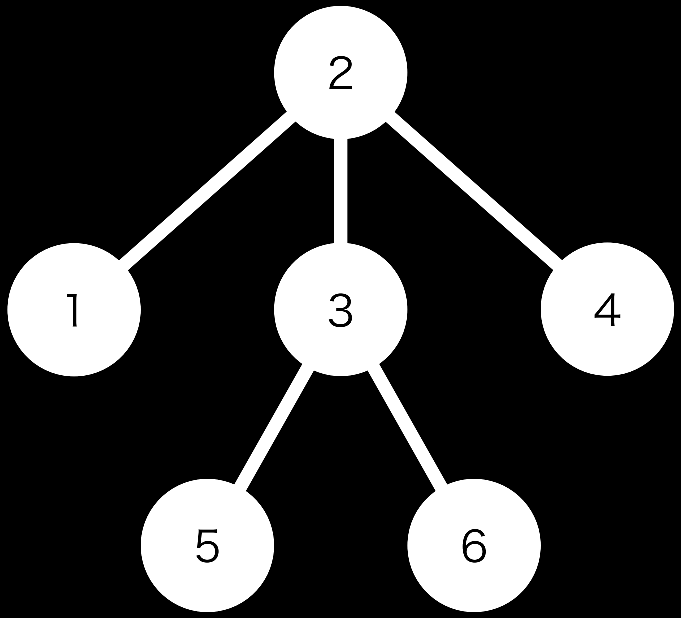


Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

- 2. 从 S 中取出首项 s_0，连边 (v_0, s_0)，然后从 V 中删去v_0，从 S 中删去 s_0；

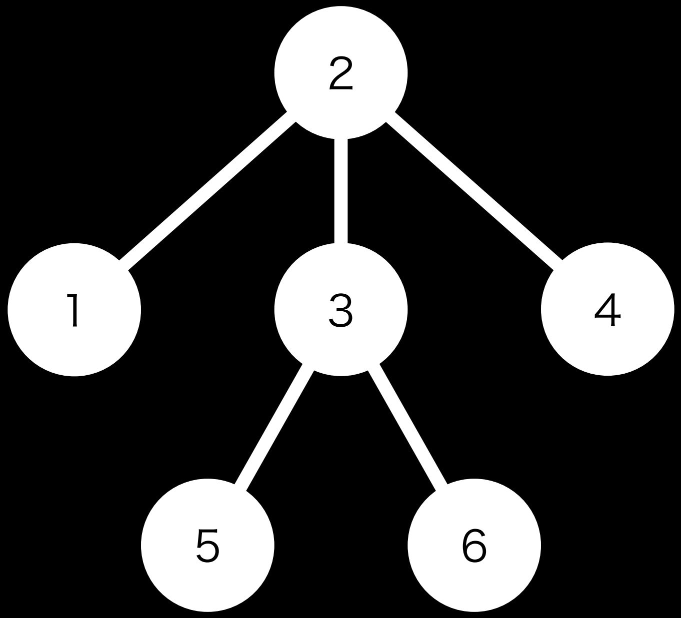
- $S = \{\}$
- $V = \{2,7\}$
- $d = \{2,1\}$



Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

- 3. 令 $d(s_0) \leftarrow d(s_0) - 1$;
- $S = \{\}$
- $V = \{2,7\}$
- $d = \{2,1\}$

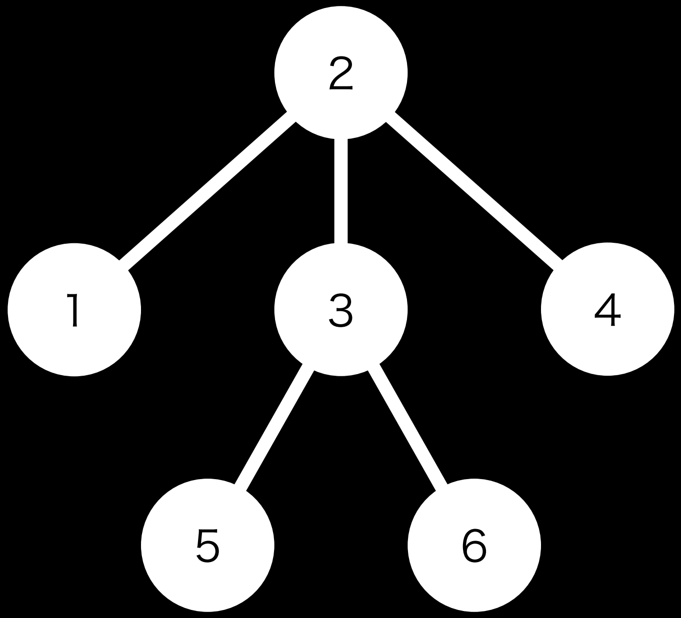


Prufer 序列 ↦ 标号树

例

- 3. 令 $d(s_0) \leftarrow d(s_0) - 1$;

- $S = \{\}$
- $V = \{2,7\}$
- $d = \{1,1\}$

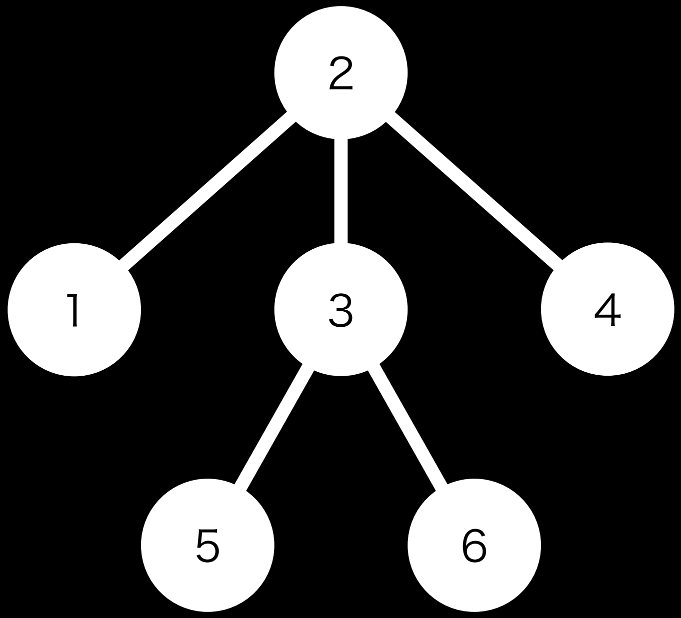


Prufer 序列 ↦ 标号树

例

- 4. 若 $|S| = 0$，则一定 $|V| = 2$，设 $V = \{v_i, v_j\}$，连边 (v_i, v_j)，结束；否则回到步骤 1.

- $S = \{\}$
- $V = \{2,7\}$
- $d = \{1,1\}$

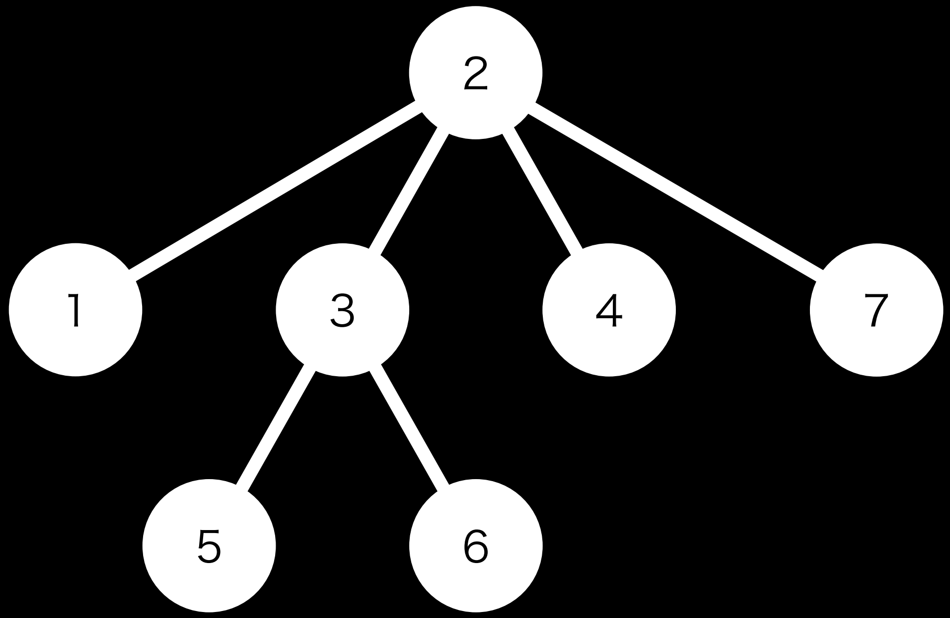


Prufer 序列 $\mapsto$ 标号树

例

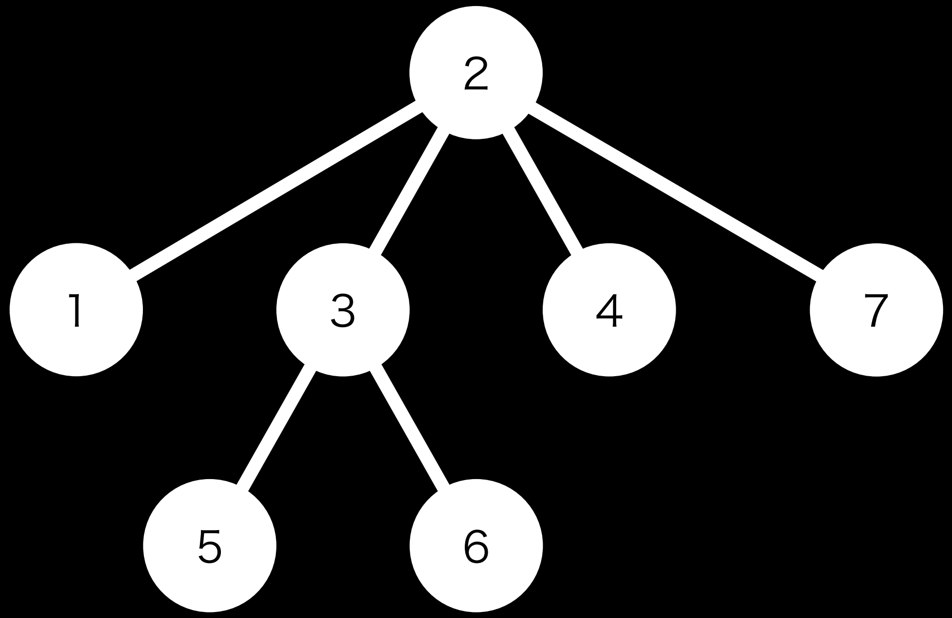
- 4. 若 $|S| = 0$，则一定 $|V| = 2$，设 $V = \{v_i, v_j\}$，连边 (v_i, v_j)，结束；否则回到步骤 1.

- $S = \{\}$
- $V = \{2,7\}$
- $d = \{1,1\}$



Prufer 序列 ↦ 标号树

- $S = \{2,2,3,3,2\}$
  - 由 Prufer 序列可以还原原树
  - 因此，Prufer 序列与标号树一一对应



Cayley 公式

- 有 n 个结点的标号树的数量为 n^{n-2}.
- **证明**：由 Prufer 序列与标号树的一一对应性，只需求长度为 $n-2$ 的 Prufer 序列的数量.
- 序列的每个位置共有 n 种可能选择，故不同的 Prufer 序列共有 n^{n-2} 个.
- 则有 n 个结点的标号树的数量为 n^{n-2}.

推论 1

- 有 n 个结点的标号有根树的数量为 n^{n-1}.
- **证明**：首先选取一棵无根树，有 n^{n-2} 种选择.
- 然后任意选一点作为根，有 n 种选择.

推论 2

- 有 n 个结点的标号有根森林的数量为 $(n+1)^{n-1}$.
- **证明**：建立虚拟结点 v_0，则这 $n+1$ 个点可以构成 $(n+1)^{n-1}$ 种无根树.
- 将 v_0 删去，得到的就是一个有根森林.

推论 3

- 标号完全二分图 $G(A,B)$ 的生成树数量为 $n_1^{n_2-1}n_2^{n_1-1}$.
- 其中 $|A|=n_1,|B|=n_2$.
- **证明**：被删掉的点与加入序列的点属于不同集合. 而最后剩下了一条边.
- 这说明 A 中结点出现次数为 n_2-1，B 中结点出现次数为 n_1-1.
- 取序列 S_1 为 Prufer 序列与 A 之交，则 S_1 的数量为 $n_1^{n_2-1}$.
- 取序列 S_2 为 Prufer 序列与 B 之交，则 S_2 的数量为 $n_2^{n_1-1}$.

推论 3

- 考虑二分图的要求，略微修改构造树的过程.
- 每次取完 v_0 后，若 $v_0 \in A$ 则从 S_2，否则从 S_1 取首项进行连边.
- 则这样生成的树符合二分图的要求，因此是原二分图的生成树.
- 即：给定 S_1, S_2 存在唯一完全二分图的生成树与之对应.
- 故答案为 $n_1^{n_2-1} n_2^{n_1-1}$.

简单的实用用途

- 要生成随机的树，直接构造不好考虑
- 直接随机一个 Prufer 序列来构造树，简单方便

问题解决

习题三 3.

- 令 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ 是给定结点，$d_1, d_2, \ldots, d_n$ 是给定的数，满足：

$$\sum d_i = 2n - 2, d_i \geq 1.$$

- 证明在集合 $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 上满足 $d(v_i) = d_i, i = 1,2, \ldots, n$ 的树的数目是：

$$\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!\cdots(d_n-1)!}.$$

问题解决

习题三 3.

- **证明**：对于结点 v_i，其在 Prufer 序列中恰好出现 d_i-1 次.
- 则 Prufer 序列是 $\overbrace{v_1,\ldots,v_1}^{(d_1-1)\text{个}},\overbrace{v_2,\ldots,v_2}^{(d_2-1)\text{个}},\cdots,\overbrace{v_n,\ldots,v_n}^{(d_n-1)\text{个}}$ 的一个排列.
- 先计算 $n-2$ 的排列数，再除以重复计算的排列数即得到答案为：

$$\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!\cdots(d_n-1)!}.$$

End

Thanks for listening