1. 数学归纳法

当 $k=1$ 时，显然成立

设对于 k 的假设成立，则对于 $k+1$ 情形，G 可以分成为 k 个

连通支和1个连通支做两部分。

$\underbrace{k\text{连通支}}_{G_1}$ 和 $\underbrace{1\text{个连通支}}_{G_2}$

则 $m_1 \le \frac{1}{2}(n_1-k+1)(n_1-k)$

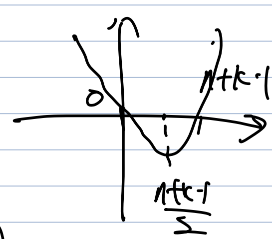
$m_2 \le \frac{1}{2}(n-n_1)(n-n_1-1)$，而 $n_1 \le n-1$

$\therefore\ m = m_1+m_2 \le \frac{1}{2}\left((n_1-k)^2+(n_1-k)+(n-n_1)^2-(n-n_1)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(2n_1^2+(-2k-2n+2)n_1+n^2+k^2-k-n\right)$

$= \frac{1}{2}\left(2n_1(n_1-k-n+1)+n^2+k^2-k-n\right)$

而 $n_1 \le n-1$，$k+1 \le n \Rightarrow \frac{n+k-1}{2} \le n-1$



$\therefore$ 当 $n_1=n-1$ 时，m 取最大值。

即 $m \le \frac{1}{2}\left(2(n-1)(n-1-k-n+1)+n^2+k^2-k-n\right)$

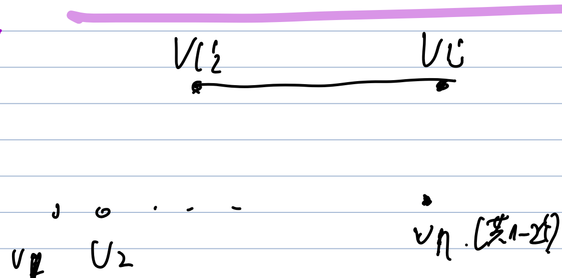
$= \frac{1}{2}\left(-2nk+2k+n^2+k^2-k-n\right) = \frac{1}{2}(n^2+k^2-2nk+k-n)$

$= \frac{1}{2}\left((n-k)^2-(n-k)\right) = \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$

5. a. 由题意可知，对于某一个边 $e_l=(v_i,v_j)\in E(G)$,

$d(v_i)+d(v_j)\le n-2+2=n$

注:



对于 v_k $(1\le k\le n,\ k\ne i,j)$

$$\Big(\big((v_i,v_k)\in E(G)\big)\vee\big((v_j,v_k)\in E(G)\big)\Big)\vee\Big(\big((v_k,v_j)\notin E(G)\big)\wedge\big((v_k,v_i)\notin E(G)\big)\Big)$$

$d(v_i)+=1$　　$d(v_j)+=1$　　$d(v_i)+d(v_k)+=0$

由于 $d(v_i)$是$E(G)$中，包含 v_i 为端点的边的个数，

对于每一个 $e_l\in E(G)$，加起来其两个端点的度之和，得

$$\underbrace{d(v_1)+\cdots+d(v_1)}_{d(v_1)个}+\cdots+\underbrace{d(v_i)+\cdots+d(v_i)}_{d(v_i)个}\cdots+\underbrace{d(v_n)+\cdots+d(v_n)}_{d(v_n)个}$$

$\le m\times n$. 即 $\sum d^2(v_i)\le mn$

b. 用数学归纳法，$n=1,2$时，显然成立，

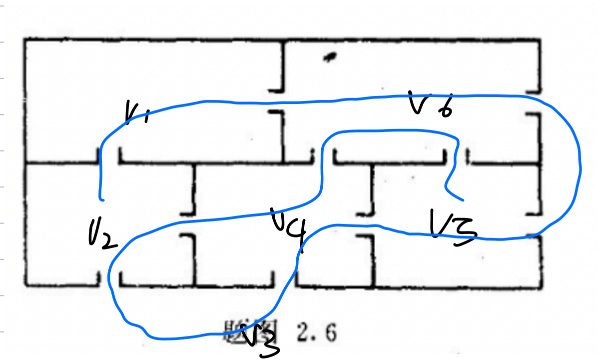
设G中结点数小于n时成立，则当$|V(G)|=n$时，

删除边(u,v)以及与u,v相关的所有边和点u,v

得G'，由归纳假设，$m'\le\frac{(n-2)^2}{4}$，那再从G'回到

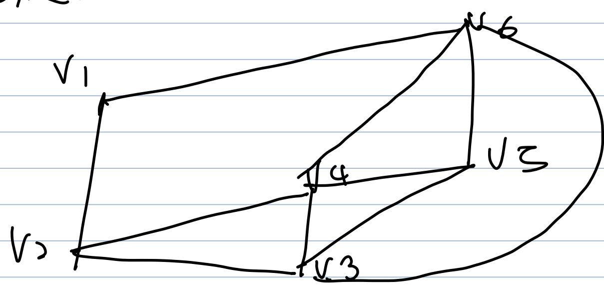
G时，最多只能增加$(n-2)+1$条边，即 $m\le\frac{(n-2)^2}{4}+n-1=\frac{n^2}{4}$

6、



题图 2.6

问题相当于问是否存在欧拉道路



∵本图只有2个度为奇的结点 v2、v5

∴ G存在欧拉道路

实际例子看图2.6

10.

每一个人用一个结点表示，相互认识则用边连接相应的结点，得简单图G. 若G中有H回路，问题得证

对任意两点 $v_i, v_j \in V(G)$，都有 $d(v_i)+d(v_j)\ge n-2$

① 若 v_i 与 v_j 相互认识，则 $d(v_i)+d(v_j)\ge n$

② 若 (v_j) 不认识，则若从 $E(G)-\{v_i, v_j\}$ 中，任取一点 v_k，

必须有 $(v_i, v_k)\in E(G)$，$(v_j, v_k)\in E(G)$，否则设 $(v_i, v_k)\notin E(G)$

那么 v_j 与 v_k 会在一起不认识 v_i。

这时，∵ $n\ge 4$，∴ $|E(G)-\{v_i, v_j\}|\ge 2$ 由于 v_k 的任意性，

$$d(v_i)+d(v_j)\ge n-2+2=n.$$

综上，由推理 2.4.1，知G中存在H回路.

(严格地说，

$d(v_i)+d(v_j)\ge 2(n-2)$

$=2n-4\ge n$)

12.（H道路） 不能

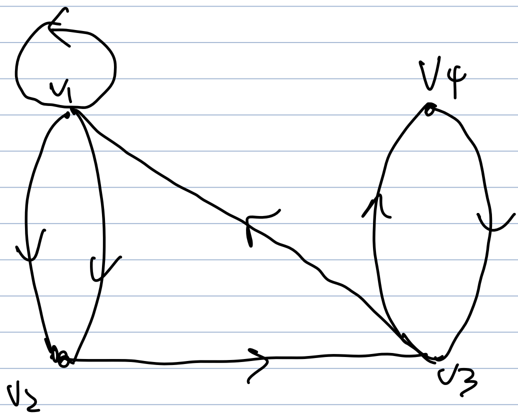
设每一个小立方体为一个点，两个小立方体之间有共同面则对应这两个点间的边。

设最左下角点为黑色，依据相邻点不同色原则给所有点着色，则黑点有14个，白点有13个。

而题目要求找从黑点开始最终到达白点的H道路，这样的H道路不可能存在

∴不能

练习题：本题题目给的"通路"，就理解成"道路"



α_1 ($\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n$)
α_2 (α_1+)
α_3
α_n

设A是G的类似邻接矩阵，其元素 a_{ij} 表示从v_i到v_j的道路数

则从v_1到v_4的长度为 1, 2, 3, 4 的道路数分别是

a_{14} $a^{(2)}_{14}$ $a^{(3)}_{14}$ $a^{(4)}_{14}$

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix},\quad A^2=\begin{bmatrix}1&2&2&0\\1&0&0&1\\1&2&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}3&2&2&2\\1&2&1&0\\2&2&2&1\\1&2&1&0\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}5&6&2&2\\2&2&2&1\\4&4&3&2\\2&2&2&1\end{bmatrix}$$

$a_{14}=0$，$a^{(2)}_{14}=0$，$a^{(3)}_{14}=2$，$a^{(4)}_{14}=2$