矩阵树定理
Matrix-tree Theorem

周韧平

计算机系

目录

定理内容及证明

一些基本定义

- 无向图G=（V，E）有p个顶点，q条边，没有自环，给每条边任意指定一个方向，其关联矩阵M（G）为一个 $p \times q$ 大小的矩阵，定义为

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i\text{是}e_j\text{的起点} \\ -1 & v_i\text{是}e_j\text{的终点} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

- 定义G的**拉普拉斯矩阵**（Laplacian matrix）L（G）为一个 $p \times p$ 大小的矩阵,其每个元素为

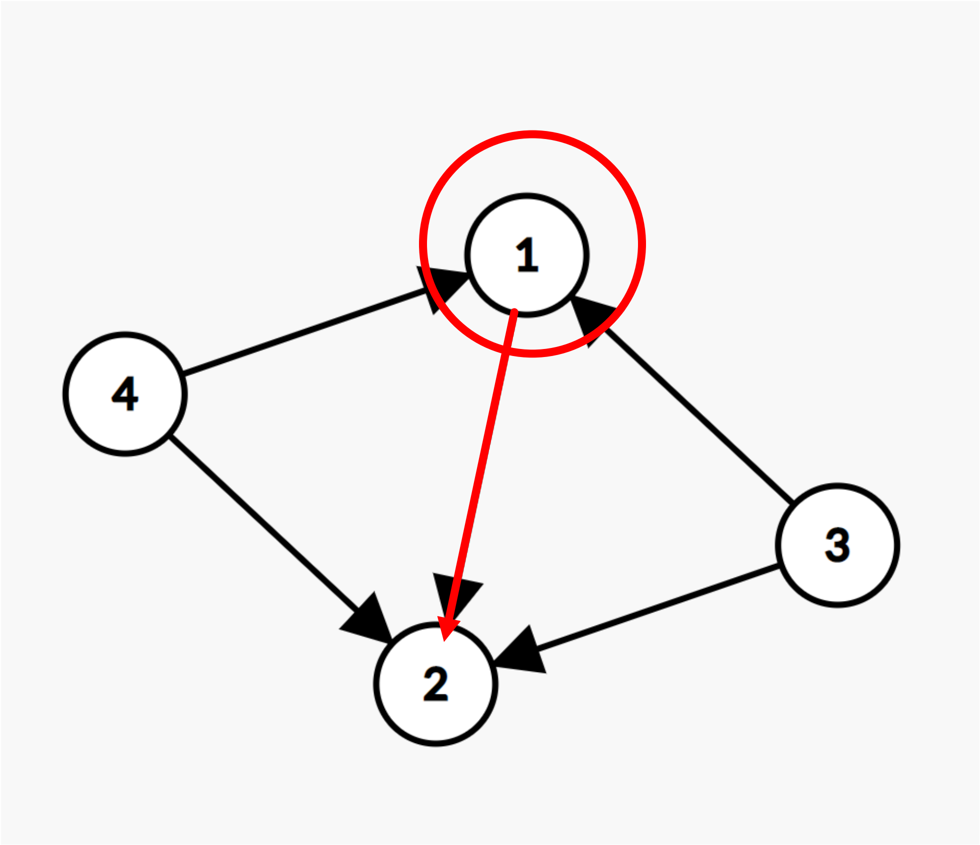
$$L_{ij} = \begin{cases} -m_{ij} & i \neq j\text{，}v_i\text{和}v_j\text{之间有}m_{ij}\text{条边} \\ deg(v_i) & i = j \end{cases}$$

举例

- 右图的关联矩阵和拉普拉斯矩阵为

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} \boxed{3} & \boxed{-1} & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



引理

- 图G=（V，E）拉普拉斯矩阵L和关联矩阵的关系为

$$MM^T = L$$

- 证明：由邻接矩阵的定义可得

$$(MM^T)_{ij} = \sum_{e_k \in E} M_{ik} M^T_{kj} = \sum_{e_k \in E} M_{ik} M_{jk}$$

M_{ik}:第i个结点和第k条边的关系

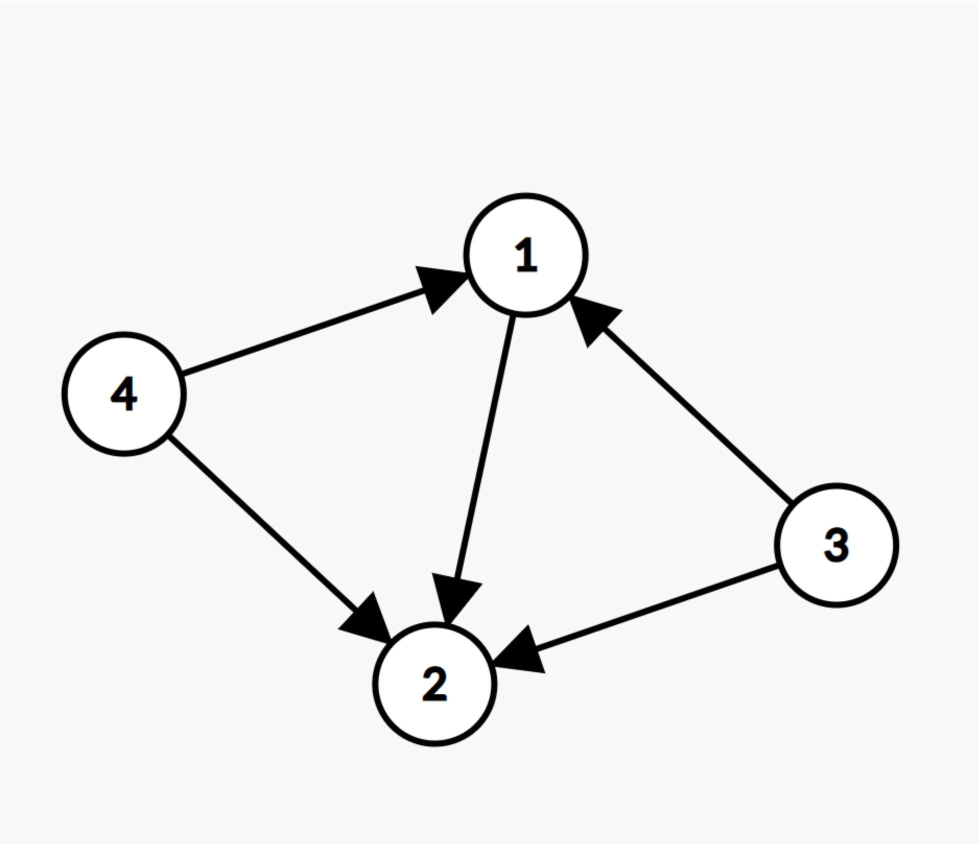
- $i = j$ 时，当且仅当存在一条边$e_k \in E$另一端是v_i时，$M_{ik}M_{jk} = 1$ 结果就是他的度
- $i \neq j$ 时，当且仅当存在一条边$e_k \in E$把$v_i v_j$连起来时 $M_{ik}M_{jk} = -1$ 其余情况为零

$$\boxed{MM^T = L}$$

举例

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} \boxed{3} & \boxed{-1} & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



矩阵树定理

- 设图G=（V，E）拉普拉斯矩阵为L，则G的生成树的个数为det（L_0），其中L_0为L去掉第i行第i列得到的子矩阵（i 为1到n的任意一个数），即

$$\det \boldsymbol{L}_0 = \kappa(G).$$

- 证明：由引理一 $MM^T = L$ ，借助分块矩阵的思想可得，$L_0 = M_0 M_0^T$,由此前课上所证定理可知$\det(M_0 M_0^T)$为该图生成树的个数。

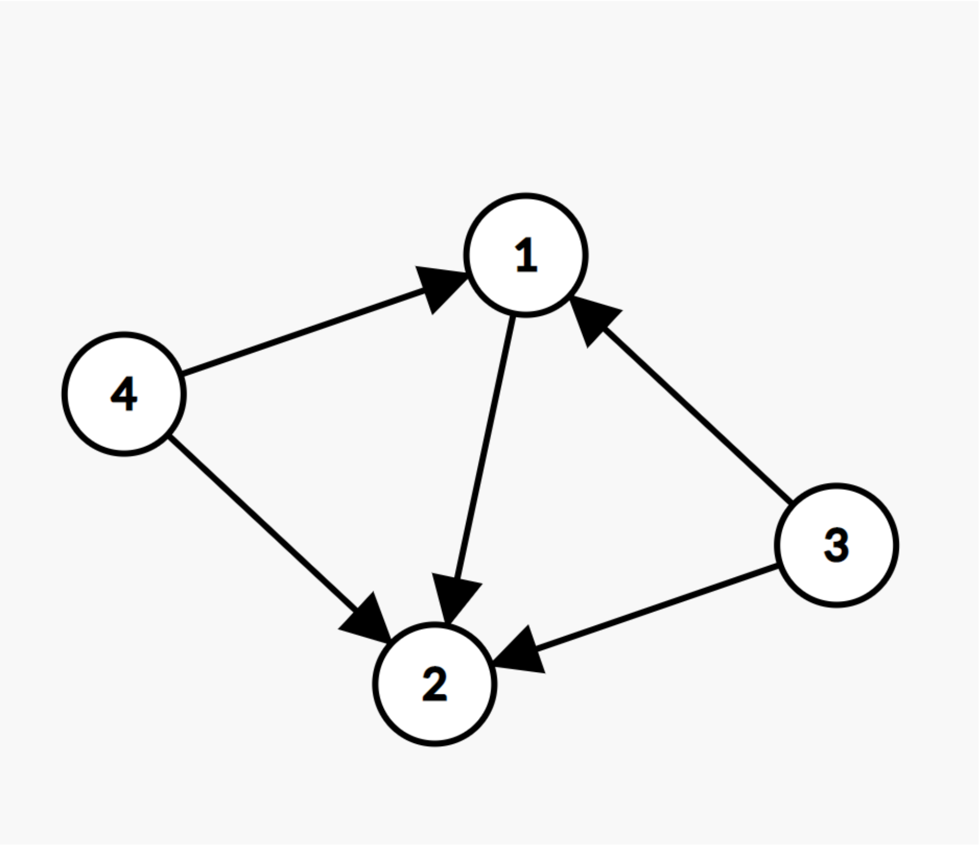
$$\begin{bmatrix} M_0 & \vec{x} \\ \vec{x}^T & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0^T & \vec{x} \\ \vec{x}^T & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_0 M_0^T & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

“基本拉普拉斯矩阵” L_0的行列式值等于其生成树的个数！

举例

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow 8$$



性质及推论

性质

- **拉普拉斯矩阵**

- 半正定阵

  $MM^T = L$ 且M不是行满秩

- 特征值中0出现的次数就是图连通区域的个数

  0出现的个数=M零空间的维数=L零空间的维数

推论：拉普拉斯矩阵特征值和支撑树个数的关系

9.10 Corollary. *(a) Let G be a connected (loopless) graph with p vertices. Suppose that the eigenvalues of $\boldsymbol{L}(G)$ are $\mu_1, \ldots, \mu_{p-1}, \mu_p$, with $\mu_p = 0$. Then*

$$\kappa(G) = \frac{1}{p}\mu_1\mu_2\cdots\mu_{p-1}.$$

证明：

- 由拉普拉斯矩阵的性质可知L至少有一个特征值为0，根据特征多项式，我们可以得到

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{L}-xI) &= (\mu_1-x)\cdots(\mu_{p-1}-x)(\mu_p-x)\\ &= -(\mu_1-x)(\mu_2-x)\cdots(\mu_{p-1}-x)x.\end{aligned}$$

- 下面研究特征多项式中x的系数

- $$\begin{bmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1\,p-1} & a_{1\,p} \\ a_{21} & a_{22}-x & \cdots & a_{2\,p-1} & a_{2\,p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ a_{p-1\,1} & a_{p-1\,2} & \cdots & a_{p-1\,p-1}-x & a_{p-1\,p} \\ a_{p\,1} & a_{p\,2} & \cdots & a_{p\,p-1} & a_{p\,p}-x \end{bmatrix}$$

得到x的系数为$-p\det(L_0)$

- 由此可以得到 $\kappa(G)=\frac{1}{p}\mu_1\mu_2\cdots\mu_{p-1}.$

生成树个数 = （拉普拉斯矩阵前p-1个特征值乘积）/ p

应用举例

应用举例：求无向完全图的支撑树个数

- 完全图每个结点的度数为n-1，每两结点之间有且仅有一条边相连
- 则其拉普拉斯矩阵为

$$L(G)=\begin{bmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & & -1 & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 & -1 \\ -1 & -1 & & -1 & n-1 \end{bmatrix}$$

- 容易求得其特征值为n-1个n 和 1个0
- 由推论，其支撑树个数为$\kappa(G)={n^{n-1}}/{n}=n^{n-2}$

参考资料

- 《TOPICS IN ALGEBRAIC COMBINATORICS》 Richard P. Stanley Chapter9
- 矩阵树定理 - OI Wiki (oi-wiki.org)
- 矩阵树定理（Matrix-tree Theorem）笔记 - 知乎 (zhihu.com)
- #2122. 「HEOI2015」小 Z 的房间 - 题目 - LibreOJ (loj.ac)
- [专题总结]矩阵树定理Matrix_Tree及题目&题解 - DeepinC - 博客园 (cnblogs.com)

END