1. 设简单平面图的域数目 $d<12$，每点度 $d(v_i)\geq 3$，证明至少有一个域的边界数小于5。

证：

$\because \sum d(v_i) = 2m \quad \therefore 2m \geq 3n$. $\quad m \geq \frac{3}{2}n$

假设每一个域的边界数大于等于5，则

$5d \leq 2m$, $\quad d \leq \frac{2}{5}m$.

$\therefore$ 由欧拉公式，$d = m-n+2 \leq \frac{2}{5}m$, $\quad 3m \leq 5n-10$

$\because \frac{3}{2}n \leq m$, get $\frac{9}{2}n \leq 5n-10$, $\quad 20 \leq n \Rightarrow 30 \leq m$

$\Rightarrow m-n \geq 10$, $d = m-n+2 \geq 12$ 与 $d<12$ 矛盾

$\therefore$ 假设不成立 至少有一个域的边界小于5

3. 设 G 是结点数大于 10 的简单图，证明 G 和 $\bar{G}$ 至少有一个是非平面图。

证： $n>10$

假设 G 和 $\bar{G}$ 都是平面图，令它们边数分别为 m_1, m_2 则

$m_1 \leq 3n-6$, $\quad m_2 \leq 3n-6$, $\quad n^2-13n+24\leq 0$

$m_1+m_2 = \frac{1}{2}n(n-1) \leq 6n-12$,

得 $\frac{13-\sqrt{73}}{2} \leq n \leq \frac{13+\sqrt{73}}{2} \approx$

$\therefore \frac{13-\sqrt{73}}{2} \leq n \leq 10$ 这与 $n>10$ 矛盾.

$\therefore$ 假设不成立，G 和 $\bar{G}$ 中至少有一个是非平面图。

7. 试证：不存在这样的平面图，它有5个域，且任意两个域之间都有一条公共边

$d = m - n + 2 = 5$　　$m = n + 3$

证：假设存在这样的平面图G，则G的对偶图G^*，

$m^* = m$，$n^* = d = 5$，且每个结点与其他所有结点都相邻

$\Rightarrow$ G^*包含$K^{(5)}$，$\Rightarrow$ G^*不是平面图

这与G^*是对偶图矛盾，∴假设不成立。命题得证

8. 设简单平面图G的结点数$n \geq 4$，证明G中至少有4个结点的度不大于5.

$n \geq 4$

证：对于$n = 5$和$n = 6$，显然成立。

且已知简单平面图G中存在度小于6的结点

∴ 当$n \geq 11$时，命题成立。证明如下：

设v_1为G中度小于6的点，则在图$G' = G - \{v_1\} - \{v_{1j} \mid e_{1j} \in E(G)\}$中

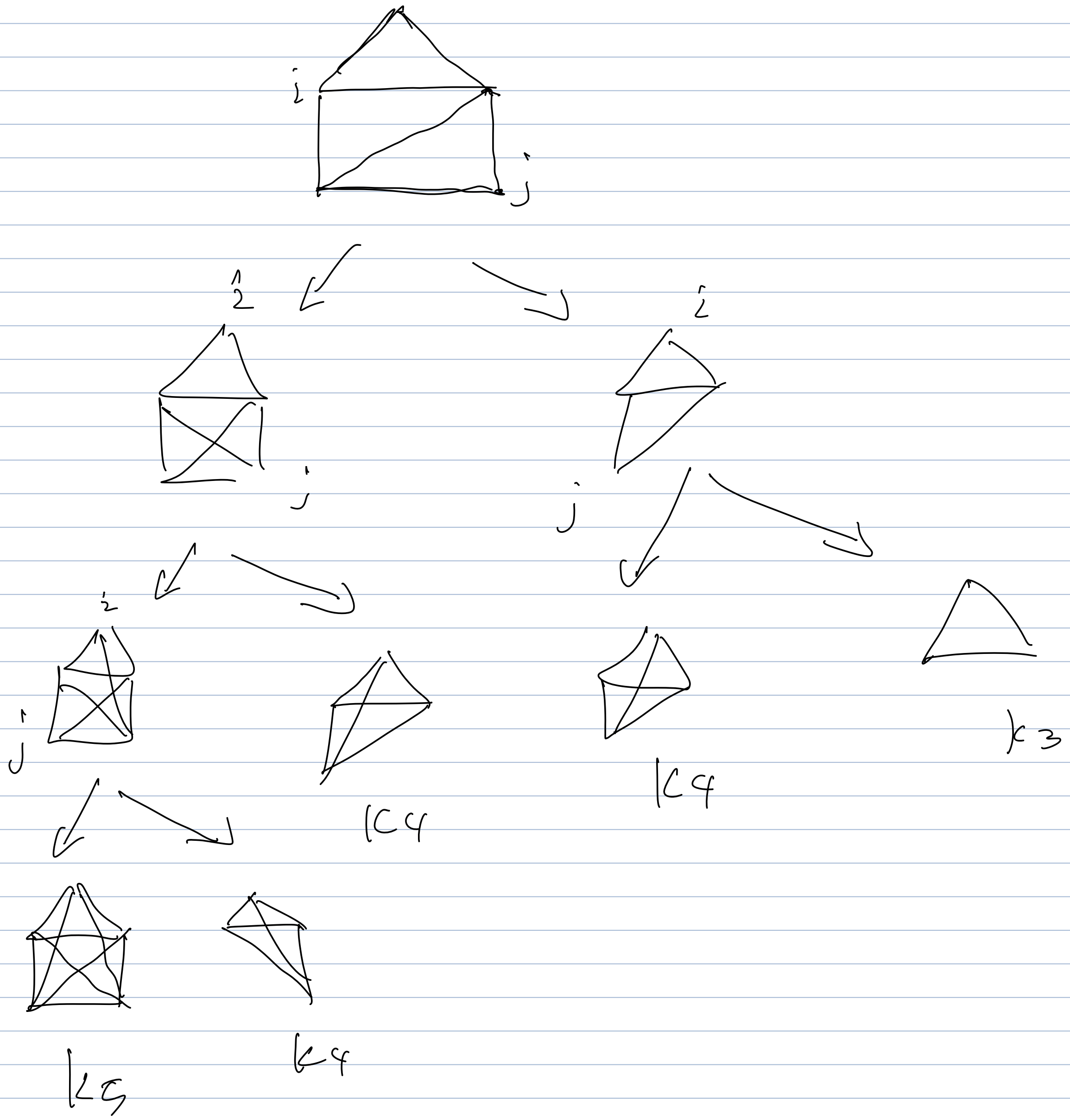
依然存在v_2 st 度小于6 再从图$G'' = G' - \{v_2\} - \{v_{2j} \mid e_{2j} \in E(G)\}$中

可找到v_3 st 度小于6，再通过上述过程找到v_4

此时$d(v_1)$最大能取5. ∴ 当$n \geq 11$时，总能找到4个度小于等于5的点

对于$7 \leq n \leq 10$，可通过检验发现至少有4个度不大于5的点.

13. 试求图 4.13 的色数与色数多项式



$\therefore \chi(G)=3$

色数多项式为 $f(G,t) = f(K_5,t) + 3f(K_4,t) + f(K_3,t)$

$= t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4) + 3t(t-1)(t-2)(t-3) + t(t-1)(t-2)$

$= t(t-1)(t-2)(t^2-4t+4)$

$= t(t-1)(t-2)^3$