3. 充分性

若 $(ab)^2=a^2b^2$ 则 $(ab)^2=(ab)(ab)$

$=a^2b^2=(aa)(bb)=\quad a(ba)b=(ba)(ab)$

由消去律，$ab=ba$ ∴ S是交换半群.

必要性

若(S, ·)是交换半群，则 $\forall a, b\in S$

$(ab)^2=(ab)(ab)=(ab)(ba)$

$=ab^2a=aab^2=a^2b^2$

6. σ是 幺半群 (S, ·) 到 (T, *) 的 同构.

$\forall a, b\in S, \quad \sigma(a\circ b)=\sigma(a)*\sigma(b)$

证：∵ (S, ·) 是幺半群，e 是对 ∘ 的单位元

∴ $\forall\ \sigma(x)\in T$，$\sigma(x)*\sigma(e)=\sigma(x\circ e)=\sigma(x)$

$\sigma(e)*\sigma(x)=\sigma(e\circ x)=\sigma(x)$

因此 * 具有单位元 $\sigma(e)$

7. $\forall a, b\in G \quad ab=(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}=ba$

∴ G是交换群

10、 若 $xaxba=xbc$ 求x

则 ∵G是 群，由结合律，

$xaxba = xxaba = xxaab$, $xbc = xcb$

再∵ G是群，G中每个元素都有可逆元，

$x^{-1}xxaab b^{-1} = x^{-1}xc b b^{-1}$

$xaa = c$

$xaaa^{-1}a^{-1} = ca^{-1}a^{-1}$

$x = c(a^{-1})^2$，是唯一的解

$e=(1,1)$，$(ac,bd)$，$a,c \neq 0$

11. ① 结合律 $\forall (a,b), (c,d), (x,y) \in G$，

$((a,b)(c,d))(x,y) = (ac,bd)(x,y) = (acx, bdy)$

$(a,b)((c,d)(x,y)) = (a,b)(cx,dy)$

$= (acx, bdy) = (acx, bdy)$，G是半群

② 单位元 $e(1,1)$

③ 可逆元 ∵ G已经有可逆元，只需证明

$\forall (a,b) \in G$，存在左逆元 $(a,b)^{-1} \in G$ 就可以

令 $(a,b)^{-1} = (\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$

则 $(a,b)^{-1}(a,b) = (1,1) = e$

12. 充分性: 若 $aba=a$, $ab^2a=e$, 由结合律

则 $ab=ab(ab^2a)=(aba)b^2a = ab^2a=e$

$ba=(ab^2a)ba = ab^2aba = ab^2a=e$ ∴ $b$是$a$的逆元

必要性: 若 $a$ 有逆元 $b$, 则 $ab=ba=e$

∴ $aba = ea = a$,

$ab^2a = ab\,ba = e\cdot e = e$