图论题目选讲

朱煜章 计15

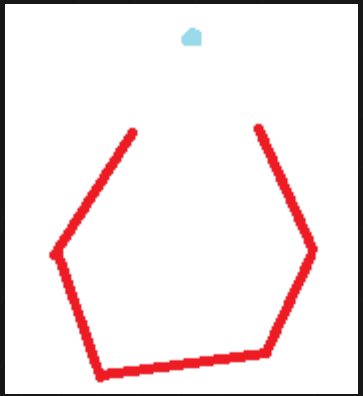
第二章 10

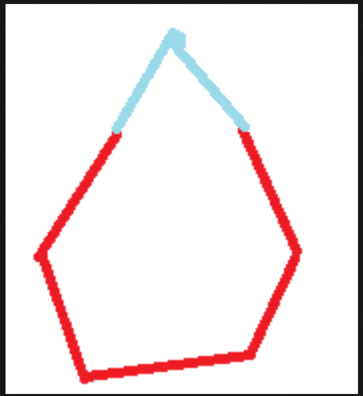
- 有n>=4个人，其中任两个人合起来，认识其余n-2个人，求证所有人可以围成一圈，相邻每两个人互相认识
- 联想例题：有n>=3个人，其中任两个人合起来，认识其余n-2个人，求证所有人可以排成一列，相邻每两个人互相认识
- （存在Hamilton道路）（证明见课本，略）

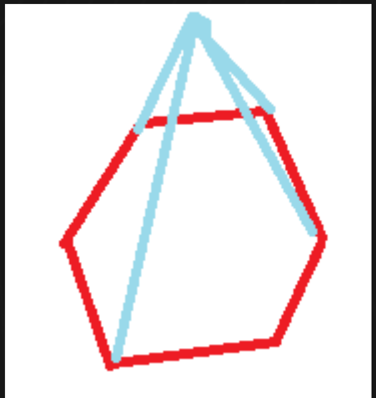
- 可以围成一圈，相邻每两个人互相认识，即存在Hamilton圈
- 任两个人合起来认识其余n-2个人
- 考虑三个人a、b、c，若其中仅有a和b认识，产生矛盾
- 所以任三个点至少有两条边相连
- 同时，对两个相邻点应用条件，知其中一个的度不小于$\frac{n-2}{2}+1=\frac{n}{2}$

第二章 10

- 运用例题，知n-1个点时存在Hamilton道路（$u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$）
- 现在新加入一个点u_n（先任选，后期可能改为某“更好的”点）
- 在u_1, u_{n-1}, u_n三点间，由分析知至少有两条边
- 若u_1, u_{n-1}不相邻已成立。否则（$u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$）是n-1点图的Hamilton圈
- 我们令u_n为度最大的点，其度不小于$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$，必与圈上两相邻点同时相邻，证毕

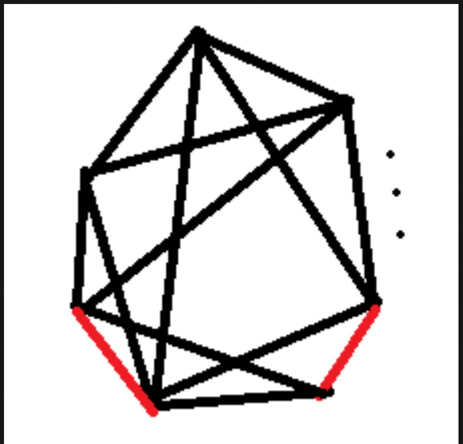




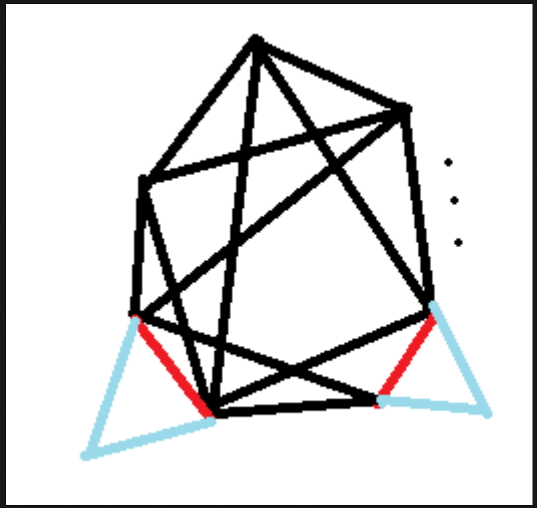


第二章 11

- 在n个点的图中，每个点度至少为$\frac{n+q}{2}$，求证存在过任意q条不相邻边的Hamilton圈。
- 回忆定理：每个点度至少$\frac{n}{2}$，存在Hamilton圈
- 思考：是否可以添加q个虚拟点，转化为n+q点的图？



- 如何添加虚拟点，使其与q条边产生联系？
- 朴素的想法：一个点对应一条边
- 对每条特定边的两个端点$\{u_i, u_j\}$，添加一个虚拟点恰与这两个点相邻
- 好处：新图的Hamilton圈对应原图过给定边的Hamilton圈



第二章 11

- 若u_i, u_j不相邻，由$d(u_i)+d(u_j)>=(n+q)$，加入边(u_i, u_j)不改变Hamilton圈存在性（引理，证明见课本）
- 由此可以将图加为完全图Kn和另外q个度为2的顶点，每个度为2的点没有公共邻点
- 只需在这个图存在Hamilton圈，注意到n个顶点组成完全图，只需先将所有有度为2的点作为邻点的点率先访问，由于每个度为2的点没有公共邻点，总可以进行此过程，得证