离散数学（2）：第一次习题课讲解

岳章乔

2022 年 4 月 8 日

第二章 11.

原题：

设 $G(V,E)$ 是有 n 个节点的简单图，$\delta(G) \geq \frac{n+q}{2}$。证明 G 中存在，包含任意 q 条互不相邻边的，H 回路。

读题：

1. G 是无自环、无重边的无向图；
2. $\forall v : v \in V(G), d(v) \geq \frac{n+q}{2}$，可以用 Ore 定理（推论 2.4.1）；
3. 在 G 上任选 q 条边 $(q \leq \frac{1}{2}|E|)$；
4. 要求不能存在一个节点，有两条关联边都被选中；
5. 找一条经过那 q 条边的，而且走遍所有节点的回路。

原题:
设 $G(V,E)$ 是有 n 个节点的简单图，$\delta(G) \geq \frac{n+q}{2}$。证明 G 中存在，包含任意 q 条互不相邻边的，H 回路。
思路:
先证明那个图有 H 回路，然后把那条回路的某部分“掰”到被选边。
数归 + 反证 + 构造
证明:
对 q 归纳。
设 $G(V,E)$ 是简单图，$\delta(G) \geq \frac{n+q}{2}$。
令 $S(k) : \delta(G) \geq \frac{n+k}{2} \Rightarrow$ 对任意的在 G 上的互不相邻的 k 条边，$\exists H \subseteq G$, s.t. H 是 G 的 H 回路，而且 $\forall e : e$ 是那 k 条边之一，都有 $e \in E(H)$。

S(0):
$\delta(G) \geq \frac{n}{2}$，由 Ore 定理知 G 存在 H 回路。
假设 S(k) 成立，对 S(k+1):
由归纳假设，不妨设已经找到了一条包含 k 条被选边的 H 回路。
令 $e = (u, v)$ 是那条新的被选的边。
如果 $e \in H$，" 证明完毕"，否则 e 在图上应有以下拓扑关系。

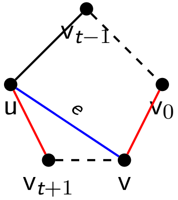


图: 蓝边为新加的边，红边是准备删掉的边

原有的回路 $H' = (v_0, v_1, \cdots, v_{t-1}, u, v_{t+1}, \cdots, v, v_0)$
为了把 e 加上去，可以把红边（关联节点的其他边）删掉。
如果 $(v_{t+1}, v_0) \in E(G)$，则 $H = H' \oplus \{(u, v_{t+1}), (v, v_0), (u, v), (v_{t+1}, v_0)\}$ 就是所求回路。
直观来讲，就是如果剩下的 H 道路头尾能连上就连起来，于是构造完成。

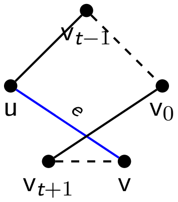


图: $(v_{t+1}, v_0) \in E(G)$ 的情况

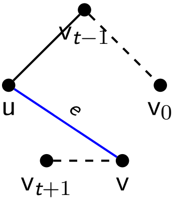
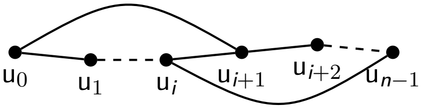


图: 头尾不相连，就在那条 H 道路构造回路

以下讨论 $(v_{t+1}, v_0) \notin E(G)$。
同样把 e 加上，把 (u, v_{t+1}) 和 (v_0, v) 从 H' 删去，记为 P''。
$P'' = (v_0, v_1, \cdots, v_{t-1}, u, v, \cdots, v_{t+2}, v_{t+1})$。
对 P'' 的节点重编号，
$P = (u_0, u_1, \cdots, u_{n-1})$。

以下证明极长道路 P 上，必定存在以下情况：



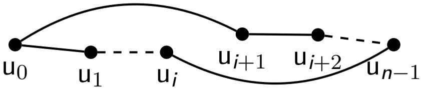
其中 (u_i, u_{i+1}) 是那 $k+1$ 条选定的边以外的边。
设 $\Gamma'(u_{n-1})$ 为 $\Gamma'(u_{n-1}) = \{u_i : (u_{i-1}, u_{n-1}) \in E(G)\}$。
P 是极长道路，且 $(u_0, u_{n-1}) \notin E(G)$，则

$$|\Gamma'(u_{n-1}) \cup \Gamma(u_0)| \le n-2$$

$$|\Gamma'(u_{n-1}) \cap \Gamma(u_0)| = |\Gamma'(u_{n-1})| + |\Gamma(u_0)| - |\Gamma'(u_{n-1}) \cup \Gamma(u_0)|$$
$$\ge \delta(G) + \delta(G) - (n-2) = n+k+1-(n-2) = k+3$$

这就说明，必定存在 $i \in \Gamma'(u_{n-1}) \cap \Gamma(u_0)$，$(u_i, u_{i+1})$ 不是那 $k+1$ 条边，且 $(u_0, u_{i+1}), (u_i, u_{n-1}) \in E(G)$。

$P \oplus \{(u_0, u_{i+1}), (u_i, u_{n-1}), (u_i, u_{i+1})\}$ 即为所求 H 回路:



于是 $S(k) \Rightarrow S(k+1)$。 ■

结束

谢谢大家！