定理 5.2.2 证明

离散数学 (2)

黄宇翔

清华大学软件学院

05/06/2022

最大匹配的边数问题

- 定理 5.2.2：在二分图 $G=(X,Y,E)$ 中，X 到 Y 的最大匹配边数是 $|X|-\delta(G)$，其中

$$\delta(G)=\max_{A\subseteq X}\delta(A), \delta(A)=|A|-|\Gamma(A)|, \delta(A)\geq 0$$

对 $\delta(G) = \max_{A\subseteq X} \delta(A)$ 的理解

- 观察 $\delta(G) = \max_{A\subseteq X} \delta(A), \delta(A) = |A| - |\Gamma(A)|, \delta(A) \geq 0$
- $$\delta(G) = \max_{A\subseteq X} \delta(A) \Rightarrow \exists A_0 \subseteq X, s.t. \forall A \subseteq X, \delta(A) \leq \delta(A_0)$$
- 三种可能性
  - 不存在这样的 $A : \delta(A) \geq 0$，有完全匹配，$|M| = |X|$
  - $\delta(G) = 0$，这说明 $\forall A \subseteq X, |\Gamma(A)| \geq |A|$，有完全匹配，$|M| = |X| - 0$
  - $\delta(G) > 0$，也就是 $\delta(A_0) > 0$，需要重点考虑

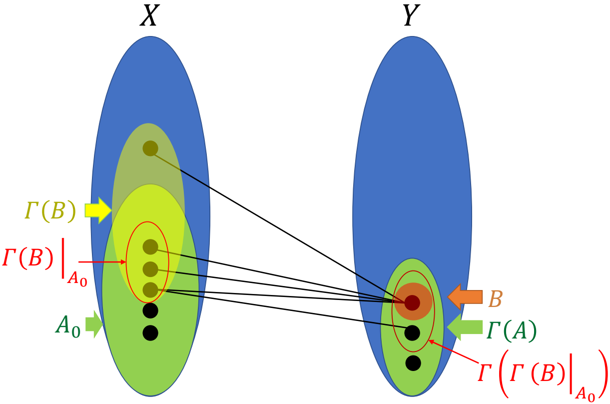
$|A_0| > |\Gamma(A_0)|$，关于 $A_0, \Gamma(A_0)$ 的性质

- 性质 1：$\forall B \subseteq \Gamma(A_0), |\Gamma(B)| \geq |B|$
- 证明：
  - 断言：存在 $\Gamma(B)$ 的一部分在 A_0 中，记作 $\Gamma(B)|_{A_0}$ （原因：若 $\Gamma(B)$ 完全不在 A_0 中，则 B 不应该出现在 $\Gamma(A_0)$ 中）
  - 考察 $\Gamma(B)|_{A_0}$. 若 $|\Gamma(B)|_{A_0}| < |B|$，那么 A_0 不符合要求，$B \subseteq \Gamma(\Gamma(B)|_{A_0})$，

$$|\Gamma(B)|_{A_0}| - |\Gamma(\Gamma(B)|_{A_0})| \leq |\Gamma(B)|_{A_0}| - |B| < 0$$

    从 A_0 中去掉 $\Gamma(B)|_{A_0}$, $|A| - |\Gamma(A)|$ 更大
- 推论 1：从 $\Gamma(A_0)$ 到 A_0 有完全匹配，大小为 $|M_0| = |\Gamma(A_0)|$

$|A_0| > |\Gamma(A_0)|$，关于 $A_0, \Gamma(A_0)$ 的性质



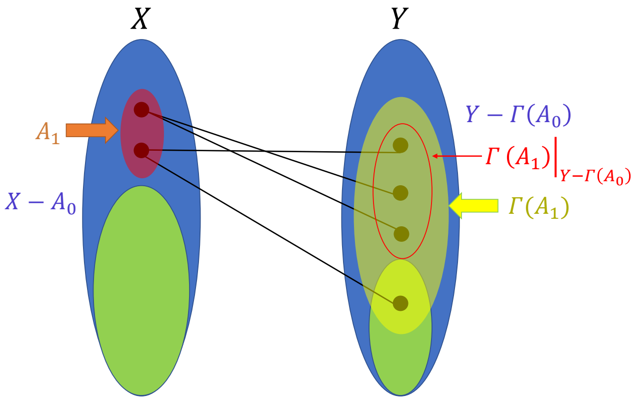
- 若 $|\Gamma(B)|_{A_0}| < |B|$，就有

$$|\Gamma(B)|_{A_0}| - |\Gamma(\Gamma(B)|_{A_0})| \leq |\Gamma(B)|_{A_0}| - |B| < 0$$

关于 $X - A_0$ 的性质

- 性质 2：$\forall A_1 \subseteq X - A_0, |A_1| \leq |\Gamma(A_1)|_{Y-\Gamma(A_0)}|$
- 证明：
  - 使用反证法，假设 $|A_1| > |\Gamma(A_1)|_{Y-\Gamma(A_0)}|$
  - A_0 不符合要求，因为 A_0 加入 A_1，$|A_0| - |\Gamma(A_0)|$ 会更大
- 推论 2：对于 $G' = (X - A_0, Y - \Gamma(A_0), E')$，存在完全匹配，$|M'| = |X - A_0|$

关于 $X - A_0$ 的性质



- 若 $|A_1| > |\Gamma(A_1)|_{Y-\Gamma(A_0)}|$，能找到更大的 A_0

1. 问题回顾
2. 对问题的考虑和定理的理解
3. 定理 5.2.2 的证明

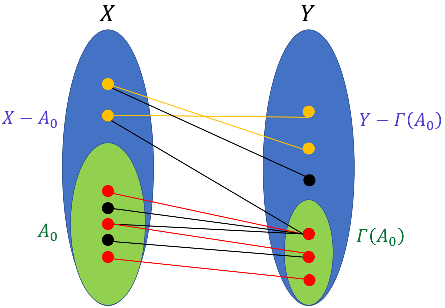
定理 5.2.2 的证明

- 定理 5.2.2 回忆：在二分图 $G=(X,Y,E)$ 中，X 到 Y 的最大匹配边数是 $|X|-\delta(G)$，其中

$$\delta(G)=\max_{A\subseteq X}\delta(A),\delta(A)=|A|-|\Gamma(A)|,\delta(A)\geq 0$$

- 对于 $G=(X,Y,E)$ 作分割 $G=G_0+G'+E_e$，$G_0=(A_0,\Gamma(A_0),E_0)$，$G'=(X-A_0,Y-\Gamma(A_0),E')$
- 其中，A_0 满足 $\forall A\subseteq X,\delta(A)\leq\delta(A_0)$
- 容易观察到，G_0,G' 两部分没有重合的点，两部分的匹配之并是 G 的匹配
- 那么 G 有匹配 $M=M_0+M'$，依据推论 1、2，M_0 是 $X-A_0$ 到 $Y-\Gamma(A_0)$ 的完全匹配，M' 是 $\Gamma(A_0)$ 到 A_0 的完全匹配
- $$|M|=|M_0|+|M'|=|X|-|A_0|+|\Gamma(A_0)|$$

定理 5.2.2 的证明



- M 是最大匹配：$\Gamma(A_0)$ 与 $X-A_0$ 中的结点均为饱和结点，且 A_0 与 $Y-\Gamma(A_0)$ 之间无边

定理 5.2.2 的证明

- M 是最大匹配，因为 M 无可增广道路
- 若 M 中有可增广道路 P，考虑可增广道路的第一条边（不在 M 中）$e=(v_i,v_j)$
  - $v_j\in A_0$，$v_i\in\Gamma(A_0)$，则 $e\in M$，矛盾
  - $v_j\in Y-\Gamma(A_0)$，同理，矛盾
  - $v_j\in\Gamma(A_0)$，考虑 P 是否经过了 $X-A_0$. 若 P 没有经过 $X-A_0$，那么可增广道路不存在（M_0 是完全分配）；若 P 经过了 $X-A_0$，那么一定存在一条边 e_t 连接了 $X-A_0,\Gamma(A_0)$，且该条边是 M 中的第偶数条边。第偶数条边要求了边在 M 内，而 M 中无连接了 $X-A_0,\Gamma(A_0)$ 的边，矛盾
  - $v_j\in X-A_0$，同理，矛盾
- G 的最大匹配是 M，$|M|=|X|-|A_0|+|\Gamma(A_0)|$，即

$$|M|=|X|-\delta(G),\delta(G)=\max_{A\subseteq X}\delta(A),\delta(A)=|A|-|\Gamma(A)|,\delta(A)\geq 0$$