미적분학 1^+

문 제 풀 이 집

2021년 8월 15일 에 마지막으로 수정됨

업데이트 및 정오표:

http://goo.gl/kkX9m9

미적분학 1+ 풀이집

하승우(수리과학부)

1장 급수

2장 거듭제곱급수

3장 테일러 전개

4장 좌표공간과 좌표계

5장 벡터

6장 행렬과 선형사상

7장 정사각행렬과 행렬식

8장 삼차원 공간과 벡터곱

9장 곡선

[머리말]

지금은 그만두었지만, 대학원에 다닐 때 3여 년간 미적분학 조교를 하며 열심히 제자들에게 미적분학 문제 풀이법을 가르쳐 보았습니다. 학생 때도 느꼈던 것이지만, 결국 공부는 스스로 하게 되는 것인데, 열심히 문제를 풀고도 맞춰 볼 답이 없는 것은 그리 좋지 못한 일인 것 같습니다. 친구들과 답을 맞춰 봐도, 둘 다 맞게 풀었다는 보장도 없고... 미적분학 교재를 독학하며 물어볼 사람 하나 없이 공부하는 학생의 경우에는 더욱 힘겨운 일이고... 물론, 교재 뒤에 일부 문제에 한하여 풀이와 해답이 실려 있기는 하지만(그리고 그 풀이가 제가 만든 풀이 따위보다 백배 멋지긴 하지만), 그렇지 않은 문제들에 대해서도 해답과 풀이는 필요하다고 생각되어, 풀이집을 만들어 보았습니다. 솔루션을 공개하는 것이 옳은 일인지 풀이를 쓰면서도 계속 고민해 보았으나, 실보다는 득이 클 것이라 생각하여 이렇게 공개하게 되었습니다.

기본적으로, (거의) 모든 문제는 미적분학+의 의도에 맞게 풀려고 노력하였습니다. 고등학교 수준의 풀이가 있다 하더라도 미적분학+식 풀이를 구사하였다는 뜻입니다. 가능한 한 저의 문제풀이 철학(?)/방법을 담으려고 노력하였습니다. 간혹, 저에게도 상당히 어려운 문제의 경우에는 조금 무리한 풀이를 시도하기도 하였습니다... 그러한 문제의 경우, 더 좋은 풀이가 있으면 제보해 주십시오. 교재에는 물론 좋은 문제들만 실려 있지만, 중간고사나 기말고사를 준비하는 용도로는 너무 어렵거나 하는 이유로 필요가 없는 문제들도 있습니다. 여러분이 이런 문제들까지 다 풀 필요는 없습니다. 이상하고 어렵지만 재미있는 문제는 시험을 치고 난 후에 심심할 때 읽어 보아도 좋습니다. 시험을 준비할 때는 기출 문제를 중심으로 공부하면 됩니다.

풀이집을 공개하며, 다음을 꼭 부탁드립니다.

- **과제를 베끼는 소스로 사용하지 말아 주세요.** 다른 건 몰라도 이것만은 정말 엎드려 빌며 부탁드립니다. 과제 치팅을 하라고 만든 자료가 아니라, 공부에 활용하라고 오랜 시간 공들여 만든 자료입니다. 물론, 스스로 문제를 풀고 나서 확인해 보는 용도로는 괜찮습니다.
- **여전히, 틀린 점이 있을 수 있습니다.** 이 풀이집은 여전히 수시로 업데이트되고 있는 자료입니다. 틀린 점, 더 좋은 풀이 등이 있다면, 이메일 sha@outlook.kr 또는 구글 시트 http://goo.gl/ypbsrG 를 통하여 제보해 주세요. 큰 도움이 될 것입니다.
- **이 풀이집은 인터넷을 통한 무료 배포가 이루어지고 있습니다.** http://goo.gl/kkX9m9 에서 언제든지 최신 버전의 풀이집을 받아보실 수 있습니다. 단, 학생회관 CP Gate 에서도 복사요금 수준의 가격에 판매 중인 것으로 보입니다. 이곳에서 구입해도 좋습니다만, 구버전일 수 있으니 직접 신버전 pdf파일을 전송해서 복사 및 제본을 의뢰하는 것도 좋습니다.
- 악필은 죄송합니다...
- 이 풀이집으로 인해 생기는 책임은 수리과학부 하승우에게 있습니다.

서울대학교 수리과학부 학사08 대학원13 하승우

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

1. 급수

제 1절. 수열과 급수

1. 수학적 귀납법을 이용한다. 먼저 $n=1$ 이면

$$f_2 f_0 - f_1^2 = 1\cdot 0 - 1^2 = -1 = (-1)^1$$

이므로 주어진 등식이 성립한다. 이제 주어진 등식이 $n=k$일 때 성립한다고 가정하자:

$$f_{k+1} f_{k-1} - f_k^2 = (-1)^k.$$

그러면, 우선 $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ 이므로 $f_{k-1} = f_{k+1} - f_k$ 이고, 또 $f_{k+2} = f_{k+1} + f_k$ 이므로

$$\begin{aligned} f_{k+2} f_k - f_{k+1}^2 &= (f_{k+1} + f_k) f_k - f_{k+1}^2 \\ &= f_{k+1} f_k + f_k^2 - f_{k+1}^2 \\ &= f_{k+1}(f_k - f_{k+1}) + f_k^2 \\ &= -f_{k+1} f_{k-1} + f_k^2 \\ &= -(-1)^k \qquad \text{(귀납법의 가정)} \\ &= (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

이므로, 주어진 등식은 $n=k+1$ 일 때도 성립한다.

따라서 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대해 성립한다.

2. (1) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{50n^2+1} = \frac{1}{50} \neq 0$ 이므로, 일반항 판정법에 의해 주어진 급수 $\sum \frac{n^2}{50n^2+1}$ 은 수렴하지 않는다.

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 2^{-n}}{2^n + 2^{-n}} = 1 \neq 0$ 이므로, 일반항 판정법에 의해 주어진 급수 $\sum \frac{2^n-2^{-n}}{2^n+2^{-n}}$ 은 수렴하지 않는다.

$\boxed{\text{하승우}}$(수리과학부)

(3) $\lim_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{t\to 0+} \dfrac{\sin t}{t} = 1 \neq 0$ 이므로, 일반항 판정법에 의해 주어진 급수 $\sum n \sin\frac{1}{n}$ 은 수렴하지 않는다.

* 일반항 판정법은, 정리 1.62 의 대우명제인

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n \text{ 발산}$$

의 형태로 자주 이용된다.

3. 확률변수 X를 이 놀이에서 받는 돈의 액수라 하자. 이때 동전을 연속하여 던져서 n 번째에 처음으로 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2^n}$ ($n-1$ 번째까지 모두 뒷면, 그리고 n 번째에 앞면이 나타나야 함) 이므로, X의 확률분포표를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

X	2	2^2	2^3	2^4	$\cdots$	2^n	$\cdots$
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^4}$	$\cdots$	$\frac{1}{2^n}$	$\cdots$

따라서 X의 기댓값은

$$\begin{aligned} E(X) &= 2\cdot\frac{1}{2} + 2^2\cdot\frac{1}{2^2} + 2^3\cdot\frac{1}{2^3} + \cdots + 2^n\cdot\frac{1}{2^n} + \cdots \\ &= 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots \\ &= \infty \end{aligned}$$

이다.

4. (풀이 1) 주어진 급수는

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{32} + \cdots$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cdots$$

보다 빨리 증가하고, 따라서 발산한다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

(풀이 2) 주어진 급수는 $\sum \frac{1}{2n}$ 과 같이 쓸 수 있다. 이 급수가 수렴한다면, 수렴하는 급수의 기본 성질에 의하여 급수 $\sum \frac{1}{n} \left(= \sum 2 \cdot \frac{1}{2n}\right)$ 이 수렴한다. 그런데 이 급수는 발산함을 알고 있으므로 모순이다. 따라서 주어진 급수는 발산한다.

5. (1)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+3}}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k+3}}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{4}}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{5}}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}-\frac{1}{\sqrt{n+3}}\right)\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}}-\frac{1}{\sqrt{n+3}}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(2)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$= \frac{3}{4}.$$

6. (1)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\log(n+1)-\log n\right) = \lim_{n\to\infty}\log\frac{n+1}{n} = \log 1 = 0.$$

(2)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\log(n+1)-\log n\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\log(k+1)-\log k\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left((\cancel{\log 2}-\log 1)+(\cancel{\log 3}-\cancel{\log 2})+\cdots+(\log(n+1)-\cancel{\log n})\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\log(n+1)$$
$$= \infty.$$

하승우 (수리과학부)

(3) $\sum_{n=2}\left(\log\log(n+1)-\log\log n\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\log\log(k+1)-\log\log k\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\Big((\log\cancel{\log 3}-\log\log 2)+(\log\cancel{\log 4}-\log\cancel{\log 3})$$
$$+\cdots+(\log\log(n+1)-\log\cancel{\log n})\Big)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\log\log(n+1)-\log\log 2\right)$$
$$=\infty.$$

7. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 은 수열

$$a_1,\quad a_1+a_2,\quad a_1+a_2+a_3,\ \cdots$$

을 뜻하고, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$ 은 수열

$$a_2,\quad a_2+a_3,\quad a_2+a_3+a_4,\ \cdots$$

을 뜻한다. 즉, 수열 $(s_n),(t_n)$ 을 각각 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$ 이라 하면

$$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,\qquad t_n=a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}$$

이다. 이때 주어진 조건에서 $\lim_{n\to\infty}s_n$ 이 수렴하며, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ 이다 (일반항판정법). 그런데 $t_n=s_n+a_{n+1}-a_1$ 이므로, 수열 t_n, 즉 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$ 은 수렴하며 그 극한은

$$\lim_{n\to\infty}t_n=\lim_{n\to\infty}(s_n+a_{n+1}-a_1)=\lim_{n\to\infty}s_n-a_1$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-a_1$$

으로, 서로 다르다.

8. $a-1=\varepsilon$ 라 하자. (이때 $\varepsilon>0$) 이항정리에 의해

$$a^n=(1+\varepsilon)^n=1+n\varepsilon+\frac{1}{2}n(n-1)\varepsilon^2+\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\varepsilon^3+\cdots+n\varepsilon^{n-1}+\varepsilon^n$$

이다. 그러므로

$$\frac{a^n}{n^2}>\frac{1+n\varepsilon+\frac{1}{2}n(n-1)\varepsilon^2+\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\varepsilon^3}{n^2}=\frac{1}{n^2}+\frac{\varepsilon}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{n}\varepsilon^2+\frac{1}{6}\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{n}\varepsilon^3$$

$$> \frac{1}{6} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{n} \varepsilon^3$$

이고, $\lim \frac{1}{6} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{n} \varepsilon^3 = \infty$ 이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^2} = \infty$ 이다.

하승우(수리과학부)

제 2절 등비급수.

1. 항등식

$$\frac{1}{1-r} - (1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}) = \frac{r^n}{1-r}$$

에 $r=-\varepsilon$, $n=3$ 을 대입하면 $\frac{1}{1+\varepsilon} - (1-\varepsilon+\varepsilon^2) = -\frac{\varepsilon^3}{1+\varepsilon}$ 이므로

$$\left| \frac{1}{1+\varepsilon} - (1-\varepsilon+\varepsilon^2) \right| = \left| -\frac{\varepsilon^3}{1+\varepsilon} \right| = \frac{\varepsilon^3}{1+\varepsilon} < \varepsilon^3.$$

2. $1^{\text{rad}} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = \left(\frac{180}{3+\varepsilon}\right)^\circ = \left(60 \cdot \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{3}}\right)^\circ$

$$\approx \left(60 \cdot \left(1-\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon^2}{9}\right)\right)^\circ \qquad \left(\text{문제 1에서 } \frac{1}{1+\varepsilon} \simeq 1-\varepsilon+\varepsilon^2 \pm \varepsilon^3.\right)$$

$$= \left(60 \cdot \left(1-\frac{0.14}{3}+\frac{0.14^2}{9}\right)\right)^\circ$$

$$\fallingdotseq 57.3^\circ.$$

3. $0.\dot{2}\dot{5} = \frac{25}{100} + \frac{25}{100^2} + \frac{25}{100^3} + \cdots = \frac{\frac{25}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{25}{99}.$

4. $0.\dot{1}0\dot{1}_2 = 0.101101101\cdots_2 = \frac{101_2}{1000_2} + \frac{101_2}{1000_2^{\,2}} + \frac{101_2}{1000_2^{\,3}} + \cdots$

$$= \frac{\frac{101_2}{1000_2}}{1_2 - \frac{1_2}{1000_2}} = \frac{101_2}{1000_2 - 1_2} = \frac{101_2}{111_2} = \frac{5}{7}.$$

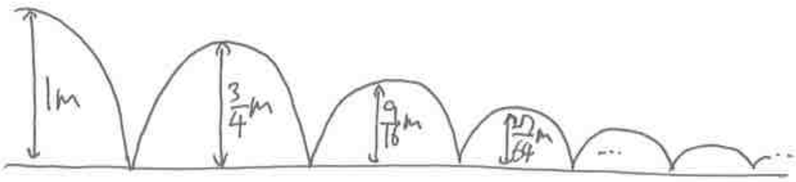
5. $0.1\dot{2}\dot{0}_3 = 0.1202020\cdots_3 = \frac{1_3}{10_3} + \frac{20_3}{10_3 \cdot 100_3} + \frac{20_3}{10_3 \cdot 100_3^{\,2}} + \cdots = \frac{1_3}{10_3} + \frac{1_3}{10_3}\left(\frac{\frac{20_3}{100_3}}{1_3 - \frac{1_3}{100_3}}\right)$

$$= \frac{1_3}{10_3} + \frac{1_3}{10_3} \cdot \frac{20_3}{100_3 - 1_3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \left(= \frac{120_3 - 1_3}{1000_3 - 10_3} \right)$$

★ 3, 4, 5번 문제를 보면, 중학교 때 배운 순환소수를 분수로 바꾸는 법이 임의의 N진법에서도 통함을 알 수 있다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

6.



$$\sqrt{\frac{1}{4.9}} + 2\sqrt{\frac{\frac{3}{4}}{4.9}} + 2\sqrt{\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{4.9}} + 2\sqrt{\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3}{4.9}} + \cdots$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4.9}} + \frac{2\sqrt{\frac{3/4}{4.9}}}{1-\sqrt{3/4}} \quad (\text{초})$$

7. $142857 \times 2 = 285714$, $142857 \times 3 = 428571$, $142857 \times 4 = 571428$, $142857 \times 5 = 714285$, $142857 \times 6 = 857142$ 이므로, $\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$ 임을 보이면 된다.

$$0.\dot{1}4285\dot{7} = \frac{142857}{10^6} + \frac{142857}{10^{12}} + \frac{142857}{10^{18}} + \cdots$$

$$= \frac{142857/10^6}{1-\frac{1}{10^6}} = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}.$$

8. 과일 하나의 잔류 농약의 양을 x (mg) 라 하자. 이때 과일 하나를 매일 섭취하는 사람의 체내 농약 잔류량은

$$x + \frac{x}{2^{1/3}} + \frac{x}{2^{2/3}} + \frac{x}{2} + \cdots = \frac{x}{1-\frac{1}{2^{1/3}}} \ (\text{mg})$$

이다. 따라서 $\frac{x}{1-\frac{1}{2^{1/3}}} \le 10$, 즉

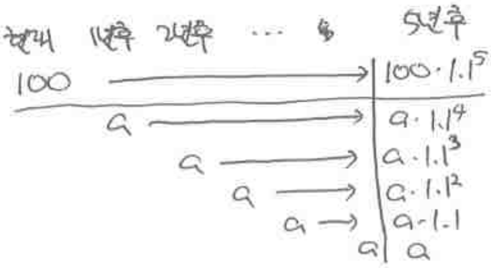
$$x \le 10\left(1-\frac{1}{2^{1/3}}\right) = 5\left(2-2^{2/3}\right) \approx 5\cdot(2-1.6) = 2 \ (\text{mg})$$

이다.

9. $$\underset{\text{갑됨}}{\frac{1}{6}} + \underset{\text{갑됨x}}{\frac{5}{6}}\cdot\underset{\text{을됨x}}{\frac{5}{6}}\cdot\underset{\text{갑됨}}{\frac{1}{6}} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \cdots = \frac{1/6}{1-\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}} = \frac{6}{11}.$$

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

10. ① 5년간에 갚을 때



매년 납입금이 a(만원)일 때

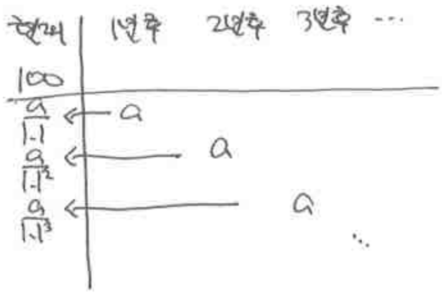
$$100\cdot 1.1^5 = a\cdot 1.1^4 + a\cdot 1.1^3 + a\cdot 1.1^2 + a\cdot 1.1^1 + a$$
$$= a\left(\frac{1.1^5-1}{1.1-1}\right) = 10a(1.1^5-1)$$

(②와 같이 현재를 기준으로 생각해도 된다.)

에서 $a = \dfrac{100\cdot 1.1^5}{10(1.1^5-1)} \fallingdotseq 26.3797\ldots$ (만원).

② 대대손손 갚을 때

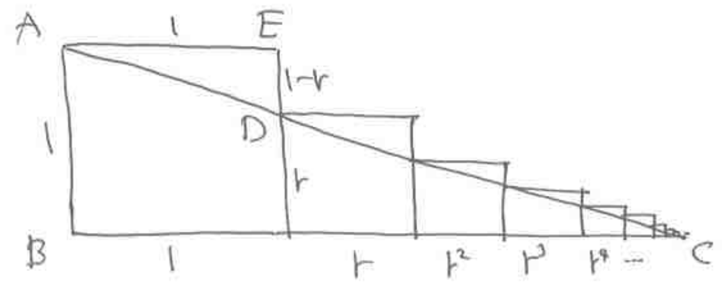
매년 납입금이 a(만원)일 때,



$$100 = \frac{a}{1.1} + \frac{a}{1.1^2} + \frac{a}{1.1^3} + \cdots$$
$$= \frac{a/1.1}{1-\frac{1}{1.1}} = \frac{a}{0.1} = 10a$$

에서 $a = 10$(만원).

11.



$\angle ACB = \angle EAD$ 이고, $\angle ABC = \angle AED = 90^\circ$ 이므로, $\triangle ABC$ 와 $\triangle ADE$는 닮은 도형이다. 따라서 $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{DE}}$ 이고, 이로부터 $\dfrac{1+r+r^2+\cdots}{1} = \dfrac{1}{1-r}$ 임을 얻는다.

12. 항등식

$$\frac{1}{1-r} - (1+r+\cdots+r^{n-1}) = \frac{r^n}{1-r}$$

에 $r=\varepsilon$, $n=2$ 를 대입하면

$$\frac{1}{1-\varepsilon} - (1+\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon}$$

이므로

하승우 (수리과학부)

$$\left|\frac{1}{1-\varepsilon}-(1+\varepsilon)\right| = \left|\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon}\right| = \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon} < 2\varepsilon^2 \quad \left(1-\varepsilon > \frac{1}{2} \text{ 이므로, } \frac{1}{1-\varepsilon} < 2\right)$$

이제 $\varepsilon = \frac{1}{100}$ 을 대입하면

$$\left|\frac{1}{1-\frac{1}{100}} - \left(1+\frac{1}{100}\right)\right| < 2\cdot\frac{1}{100^2}$$

에서 $\frac{100}{99} \approx 1.01 \pm 2\times10^{-4}$ 이고, 따라서 $\frac{1}{99} \approx 0.01 \pm 2\times10^{-4}$ 임을 얻는다.

(양변에서 1을 뺌)

13. 주어진 그림과 같이 왼쪽에서부터와 오른쪽에서부터 각각 $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \cdots$ 씩 칠해 나가면, 각각 $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots$ 씩 덮게 된다. 이때 가운데의 남은 부분의 길이는 $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \cdots$ 으로 0 으로 수렴한다. 따라서

$$2\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\right) = 1-0$$

이고, 이로부터 $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots = \frac{1}{2}$ 임을 얻는다.

14. (풀이 1) 파리와 마주보는 기차의 상대 속력은 300km/h 이다. 두 기차를 각각 A, B라 하고 파리가 A에서 B로 날기 시작했다고 하자. 이때 B에 닿기까지 걸리는 시간은 $\frac{100}{300}$ (시간)이므로, 그 동안 파리의 비행 거리는 $\frac{200}{3}$ (km) 이다. 또, 그 동안 기차는 각각 $\frac{100}{3}$ km 만큼 달려왔으므로, 파리가 B에서 출발할 때의 A, B 사이 거리는 $\frac{100}{3}$ km 이다. 속력은 동일한데 A, B 사이 거리가 1/3 이 되었으므로, 파리는 A→B 비행의 $\frac{1}{3}$ 만큼의 시간으로 B→A 비행을 할 수 있다. 이때 파리의 비행 시간은 $\frac{1}{9}$ 시간, 비행 거리는 $\frac{200}{9}$ km 이다. 이와 같이 파리가 기차에 닿을 때마다 다음 기차에 닿는 시간은 $\frac{1}{3}$ 배가 되고, 따라서 파리의 총 비행 거리는

$$\frac{200}{3}+\frac{200}{3^2}+\frac{200}{3^3}+\cdots = \frac{200}{2} = 100 \text{ km}.$$

(풀이 2) 두 기차의 상대 속력은 200km/h 이므로, 기차는 $\frac{1}{2}$시간 후에 서로 충돌한다. 그 동안 파리의 비행 거리는 $200\times\frac{1}{2} = 100$ (km).

$\boxed{\text{하승무}}$ (수리과학부)

제 3절 비교판정법.

1. $[a]+1 = b$ 라 하자. (단, $[a]$는 a보다 크지 않은 최대의 자연수). 그러면 $a<b$ 이므로

$$\frac{1}{n+a} > \frac{1}{n+b}$$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+b} = \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ 이므로, 비교판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+a} = \infty$.

2. $d<0$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a+nd} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{-a-nd}$ 에서 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{-a-nd}$ 의 수렴성을 판단하면 되므로, $d \geq 0$ 이라고 가정할 수 있다.

① $d=0$ 인 경우

이때는 $a \neq 0$ 이고, 주어진 급수는 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a}$ 으로서 발산.

② $d>0$ 이고, $a>0$ 인 경우

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a+nd} = \frac{1}{d}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{a}{d}}$$

에서 문제 1 에 의해 발산 ($\frac{a}{d}>0$).

③ $d>0$ 이고, $a<0$ 인 경우

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a+nd} = \frac{1}{d}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{a}{d}}$$

에서, $n+\frac{a}{d}<0$ 인 n은 기껏해야 유한 개이고, $n+\frac{a}{d}>0$ 인 n에 대해서는

$$\frac{1}{n+\frac{a}{d}} > \frac{1}{n}.$$

이므로, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{a}{d}}$ 의 일반항은 어떤 자연수 N에 대하여

$$0, 0, 0, \cdots, 0, \frac{1}{N}, \frac{1}{N+1}, \frac{1}{N+2}, \cdots$$

보다 크다. 따라서 발산. 즉, $\sum \frac{1}{a+nd}$ 은 발산한다.

$\boxed{\text{하승모}}$ (수리과학부)

3. (1) $\frac{1}{\log(n+1)} > \frac{1}{n+1}$ 이고, $\sum \frac{1}{n+1} = \infty$ 이므로, 비교판정법에 의하여

주어진 급수는 발산.

(2) $\sin^2 \frac{\pi}{n} < \left(\frac{\pi}{n}\right)^2$ 이고, $\sum \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 = \pi^2 \sum \frac{1}{n^2} < \infty$ 이므로, 비교판정법에 의하여

주어진 급수는 수렴.

(3) $\frac{3n^2+4n+5}{n^3+1} > \frac{3n^2}{2n^3} = \frac{3}{2n}$ 이고, $\sum \frac{3}{2n} = \infty$ 이므로, 비교판정법에

의하여 주어진 급수는 발산.

* $\sum \frac{(b\text{차 식})}{(a\text{차 식})}$ 에서 $b+1 < a$ 이면 수렴, 그렇지 않으면 발산.

이는 비교판정법을 통하여 확인할 수 있다.

(4) $\frac{1}{2^{n^2}} < \frac{1}{2^n}$ 이고 $\sum \frac{1}{2^n} < \infty$ 이므로, 비교판정법에 의하여 주어진 급수는 수렴.

(5) "충분히 큰 자연수 n에 대해" $n > (\log n)^{100}$, 즉 $\frac{1}{(\log n)^{100}} > \frac{1}{n}$ ...(*)

이고, $\sum \frac{1}{n} = \infty$ 이므로, 비교판정법에 의해 주어진 급수는 발산.

* 유한개의 항은 급수의 수렴, 발산에 영향을 미치지 못하므로, 비교판정법을 통한 급수의 수렴판정 시, 모든 n에 대해 성립하는 부등식이 아닌, 충분히 큰 n에 대해 성립하는 부등식을 찾아도 된다.

* (*)의 설명. 보이고자 하는 것은 $n > (\log n)^{100}$ (충분히 큰 n에 대해) 이다.

이는 $n^{\frac{1}{100}} > 100 \log n^{\frac{1}{100}}$ 과 동치이고, $n^{\frac{1}{100}} = x$ 라 하면

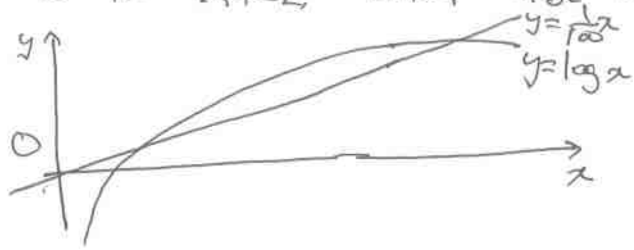
충분히 큰 x에 대해 $\frac{1}{100}x > \log x$

$\boxed{\text{학습용}}$ (수리과학부)

를 설명하는 문제가 된다. ... ↓(방법 3)이 제일 쉬움!

(방법 1) 좌표평면 위의 두 함수의 그래프 $y = \log x$, $y = \frac{1}{100}x$ 를 생각하라. 이때 곡선 $y = \log x$의 접선 중 원점을 지나는 것은 $y = \frac{1}{e}x$ 가 유일하다. (미분을 통하여 확인)

또, 곡선 $y = \log x$ 는 위로 볼록하므로, 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



따라서 충분히 큰 x에 대해 $\frac{1}{100}x > \log x$ 이고, 원하는 결론을 얻는다.

(방법 2) 또는, 다음과 같이 설명할 수도 있다. 두 함수 $f(x) = \frac{1}{100}x$, $g(x) = \log x$ 에 대하여

$$f'(x) = \frac{1}{100}, \qquad g'(x) = \frac{1}{x}$$

이므로, $x > 100$ 이면 $f'(x) > g'(x)$ 이다. 그런데, ($2^{10} = 1024 > 10^3$ 이므로)

$$e^{30} > 2^{30} > 10^9 > 100$$

이고, $f(e^{30}) = \frac{1}{100} \cdot e^{30} > 10^7$, $g(e^{30}) = 30$ 이므로 $f(e^{30}) > g(e^{30})$ 이다.

즉 $x \geq e^{30}$ 일 때 $f'(x) > g'(x)$, $f(e^{30}) > g(e^{30})$ 이므로, $x \geq e^{30}$ 일 때

$f(x) > g(x)$ 가 된다. ($f(x) = f(e^{30}) + \int_{e^{30}}^{x} f'(x)\,dx > g(e^{30}) + \int_{e^{30}}^{x} g'(x)\,dx = g(x)$).

(방법 3) 혹은, $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x/100} = \lim_{x\to\infty} 100\frac{\log x}{x} = 0 \Rightarrow$ x가 충분히 크면 $\frac{\log x}{x/100} < 1$, 즉 $\log x < \frac{x}{100}$ 으로도 알 수 있다!

4. 원하는 명제: Σa_n 수렴 $\Leftrightarrow$ Σb_n 수렴.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ 이므로, 충분히 큰 자연수 n에 대하여 $\frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < 2$ 이다.

즉, $\frac{1}{2}b_n < a_n < 2b_n$.

이제 Σa_n 이 수렴하면, $\Sigma 2a_n$ 도 수렴하고, 충분히 큰 자연수 n에 대하여 $b_n < 2a_n$ 이므로, 비교판정법에 의해 Σb_n 수렴.

학술부 (수리과학부)

또, $\sum b_n$이 수렴하면 $\sum 2b_n$도 수렴하고, 충분히 큰 자연수 n에 대하여 $a_n < 2b_n$ 이므로, 비교판정법에 의해 $\sum a_n$ 수렴. 따라서 원하는 결론을 얻는다.

만약 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 2$ 이면, 충분히 큰 자연수 n에 대해 $1 < \frac{a_n}{b_n} < 3$ 이라 할 수 있다. 즉, 충분히 큰 자연수 n에 대하여 $b_n < a_n$, $a_n < 3b_n$ 이므로, 위 풀이와 같은 방법으로 하면 같은 결론을 얻을 수 있다.

5. (1)
$$\begin{aligned} a^{2^{n/2}} < 3^{-n} &\iff \log a^{2^{n/2}} < \log 3^{-n} \\ &\iff 2^{n/2} \log a < -n \log 3 \\ &\iff 2^{n/2} > n\left(-\frac{\log 3}{\log a}\right) \end{aligned}$$

에서, 임의의 양수 c에 대하여 $\underbrace{\quad}_{n\text{이 충분히 클 때}}$ $2^{n/2} > cn$ 임을 설명하면 됨을 안다.

$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n/2}}{cn} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{c} \cdot \frac{2^{n/2}}{n/2} \cdot \frac{1}{2} = \infty$ 에서, 위 사실을 설명할 수 있다.

따라서, n이 충분히 크면 $a^{2^{n/2}} < 3^{-n}$ 이다.

(2) 주어진 급수는 양항급수이고, (1)에서 n이 충분히 크면 $a^{2^{n/2}} < 3^{-n}$ 이므로,
$2^n \cdot a^{2^{n/2}} < 2^n \cdot 3^{-n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ 이고 $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n < \infty$ 이어서 비교판정법에 의해 $\sum 2^n a^{2^{n/2}} < \infty$ 임을 안다.

(3)
$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 1} a^{\sqrt{n}} &= a^{\sqrt{1}} + a^{\sqrt{2}} + a^{\sqrt{3}} + a^{\sqrt{4}} + a^{\sqrt{5}} + a^{\sqrt{6}} + a^{\sqrt{7}} + a^{\sqrt{8}} + \cdots + a^{\sqrt{15}} + a^{\sqrt{16}} + \cdots \\ &\leq a^{2^0} + a^{2^{1/2}} + a^{2^{1/2}} + a^{2^{2/2}} + a^{2^{2/2}} + a^{2^{2/2}} + a^{2^{2/2}} + a^{2^{3/2}} + \cdots + a^{2^{3/2}} + a^{2^{4/2}} + \cdots \\ &= 2^0 a^{2^0} + 2^1 \cdot a^{2^{1/2}} + 2^2 \cdot a^{2^{2/2}} + 2^3 \cdot a^{2^{3/2}} + \cdots \\ &= \sum_{n\geq 0} 2^n a^{2^{n/2}} \underset{(2)}{<} \infty \end{aligned}$$

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

(별해) 이 문제는 1.6에서 배운 적분판정법을 이용하면 좀 더 쉽게 (?) 해결할 수 있다. $f(x) = a^{\sqrt{x}}$ 라 하면 이는 감소함수이고 $f(x) > 0$ 이다. 이제

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty a^{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b a^{\sqrt{x}}\,dx \qquad \sqrt{x} = t \text{ 치환} \to dx = 2t\,dt$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_1^{\sqrt{b}} a^t \cdot 2t\,dt = \lim_{c\to\infty} 2\int_1^c t a^t\,dt$$

$$= \lim_{c\to\infty} 2\left(\left[\frac{ta^t}{\log a}\right]_1^c - \int_1^c \frac{a^t}{\log a}\,dt\right)$$

$$= \lim_{c\to\infty} 2\left(\frac{ca^c}{\log a} - \frac{a}{\log a} - \frac{1}{(\log a)^2}\left[a^t\right]_1^c\right)$$

$$= \lim_{c\to\infty} 2\left(\frac{ca^c}{\log a} - \frac{a}{\log a} - \frac{1}{(\log a)^2}(a^c - 1)\right)$$

$$= -\frac{2a}{\log a} + \frac{2}{(\log a)^2} < \infty.$$

이므로, 적분판정법에 의해 $\sum f(n) = \sum a^{\sqrt{n}}$ 은 수렴한다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

제 4절. 거듭제곱근 판정법.

1. (1) 주어진 급수는 양항급수 이므로 거듭제곱근 판정법을 이용할 수 있다.

거듭제곱근 극한이

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0 < 1$$

이므로, 주어진 급수는 수렴한다.

(3) 주어진 급수는 양항급수이므로 거듭제곱근 판정법을 이용할 수 있다.

거듭제곱근 극한이

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^{3/n}} = 2 > 1$$

이므로, 주어진 급수는 발산한다.

2. (1) 주어진 급수의 거듭제곱근 극한은 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$ 이므로, 거듭제곱근 판정법을 이용할 수 없다. 그런데 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \neq 0$ 이므로, 일반항 판정법에 의해 주어진 급수는 발산한다.

(2) 주어진 급수의 거듭제곱근극한은 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$ 이므로, 거듭제곱근 판정법을 이용할 수 없다. 그런데 $\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} < \underset{\cdots(*)}{\frac{1}{e}}$ 에서 $\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n < \frac{1}{e^{\sqrt{n}}}$ 이고 $\sum \frac{1}{e^{\sqrt{n}}} < \infty$ (연습문제 1.3.5.) 이므로 비교판정법에 의해 $\sum\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n < \infty$ 이다.

(*) $f(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)^x$ 라 하면, $\log f(x) = x \log\left(1-\frac{1}{x}\right)$ 에서

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \log\left(1-\frac{1}{x}\right) + x\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} > 0 \quad (x>1)$$

이므로 $x>1$ 일 때 $f'(x)>0$ 이고, $f(x)$는 증가함수이다. 또, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$ 이므로, $f(x) < \frac{1}{e}$ 이다.

따라서 $f(\sqrt{n}) = \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} < \frac{1}{e}$ 이다.

* 거듭제곱근극한이 1 이면, 급수는 수렴할 수도 있고 발산할 수도 있다. 즉, 거듭제곱근극한이 1 이면, 거듭제곱근 판정법을 이용할 수 없다.

하승우 (수리과학부)

3. 양항급수 $\sum a_n$ 에서 극한값 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} =: r$ 가 존재한다고 하자.

(i) $r<1$ 이면, n이 클 때 $\sqrt[n]{a_n} < \frac{r+1}{2} =: c$ $(0<c<1)$ 이다. 즉 충분히 큰 n에 대하여 $a_n < c^n$ 이고, $\sum c^n < \infty$ 이므로, 비교판정법에 의하여 $\sum a_n$ 수렴.

(ii) $r>1$ 이면, n이 클 때 $\sqrt[n]{a_n} > \frac{r+1}{2} =: d$ $(d>1)$ 이다. 즉 충분히 큰 n에 대하여 $a_n > d^n$ 이고, $\sum d^n = \infty$ 이므로, 비교판정법에 의하여 $\sum a_n$ 발산.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

제 5절. 비율판정법

1. (1) 주어진 급수는 양항급수이다. 비율극한을 구하면

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{x^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0 < 1$$

이므로, 주어진 급수는 x의 값에 관계없이 수렴한다. 즉 구하는 범위는 $-\infty < x < \infty$.

(2) $\sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x \sum \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ 이고, $\sum \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ 은 양항급수이다. 이때

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{x^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} = 0 < 1$$

이므로, 주어진 급수는 x의 값에 관계없이 수렴한다. 즉, 구하는 범위는 $-\infty < x < \infty$.

2. $\frac{p_{n+1}}{p_n} = q_n$ 이라 하자. 주어진 $p_{n+2} = 2p_{n+1} + p_n$ 에서 $\frac{p_{n+2}}{p_{n+1}} = 2 + \frac{p_n}{p_{n+1}}$, 즉 $q_{n+1} = 2 + \frac{1}{q_n}$ 을 얻는다. 만약 q_n 이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} q_n = \rho$ 이면, $\rho = 2 + \frac{1}{\rho}$, 즉 $\rho = 1+\sqrt{2}$ 이다. 실제로,

$$|q_{n+1} - \rho| = \left|2 + \frac{1}{q_n} - \rho\right| = \left|2 + \frac{1}{q_n} - \left(2 + \frac{1}{\rho}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{q_n} - \frac{1}{\rho}\right| = \left|\frac{\rho - q_n}{q_n \rho}\right| \le \frac{1}{\rho}|q_n - \rho| \qquad (q_n \ge 1)$$

이므로

$$|q_n - \rho| \le \frac{1}{\rho^{n-1}}|q_1 - \rho|$$

에서 $\lim_{n\to\infty} |q_n - \rho| = 0$ 임을 알고, 따라서 $\lim_{n\to\infty} q_n$ 은 수렴한다. 즉, $\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = 1+\sqrt{2}$.

따라서 급수 $\sum \frac{1}{p_n}$ 은, 그 비율극한이 $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p_{n+1}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} < 1$ 이므로, 수렴한다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

3. (1) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1-1} = \frac{2}{e} < 1.$

이므로 수렴.

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{e} < 1$ 이므로 수렴.

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{2^n} = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 2 > 1$ 이므로 발산.

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{2^n} = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 = 2 > 1$ 이므로 발산.

4. 비율판정법을 구하면 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \cdot n^2 = 1$ 이므로, 비율판정법은 이용할 수 없다.

(이 급수가 수렴함은 알고 있다.)

5. 유한 개의 항은 급수의 수렴 여부에 영향을 미치지 않으므로, 참이다.

6. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r > 0$ 이면, $0<s<r<t$ 인 임의의 실수 s, t에 대하여 n이 충분히 클 때 $s < \frac{a_{n+1}}{a_n} < t$ 이다.

이는 곧 어떤 자연수 M이 존재하여

$$n \geq M \Rightarrow s < \frac{a_{n+1}}{a_n} < t$$

임을 뜻한다. 그러면 $n > M$ 일 때

$$s^{n-M} a_M < a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{M+1}}{a_M} a_M < t^{n-M} a_M$$

이고, 이로부터

$$s^{1-\frac{M}{n}} a_M^{1/n} < \sqrt[n]{a_n} < t^{1-\frac{M}{n}} a_M^{1/n}.$$

즉 $s \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq t$.

임을 얻는다. 이제 $\lim_{n\to\infty} t^{1-\frac{M}{n}} a_M^{1/n} = t$, $\lim_{n\to\infty} s^{1-\frac{M}{n}} a_M^{1/n} = s$ 이고, s 와 t는 임의로 선택된 수이므로, $s, t \to r$ 이도록 하면 결국 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ 임을 얻는다.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ 인 경우도 비슷하게 $t>0$ 인 t에 대하여

$$0 < \sqrt[n]{a_n} < t^{1-\frac{M}{n}} a_M^{1/n}$$

을 얻고, 이로부터 $\lim \sqrt[n]{a_n} = 0$ 임을 알 수 있다.

하승우 (수리과학부)

제 6절 적분판정법.

1\. $s \le 0$ 이면 $\frac{1}{(2n+3)^s} \ge 1$ 이므로 주어진 급수는 발산한다. 이제 $s>0$ 이라 하고 $f(x) = \frac{1}{(2x+3)^s}$ 이라 하면, $f(x)$ 는 $x \ge 1$ 에서 감소하는 양함수이다. 이때

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{dx}{(2x+3)^s} = \begin{cases} \frac{1}{2(-s+1)}\left[\frac{1}{(2x+3)^{s-1}}\right]_1^\infty & (s\neq 1) \\ \frac{1}{2}\left[\log(2x+3)\right]_1^\infty & (s=1)\end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{2(-s+1)5^{s-1}} & (s>1) \\ \infty & (s\le 1)\end{cases}$$

이므로, 적분판정법에 의하면 주어진 급수가 수렴하는 s의 범위는 $s>1$ 이다.

2\. (1) $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^{1+\varepsilon}}$ 이라 하면 이는 감소하는 양함수이다. 이제

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^{1+\varepsilon}} = \int_{\log 2}^\infty \frac{dt}{t^{1+\varepsilon}} \qquad \log x = t,\ \frac{dx}{x} = dt$$

$$= \left[\frac{1}{-\varepsilon t^{\varepsilon}}\right]_{\log 2}^\infty = \frac{1}{\varepsilon(\log 2)^{\varepsilon}} < \infty$$

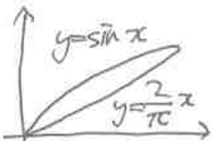
이므로 적분판정법에 의하여 $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\log n)^{1+\varepsilon}} < \infty$ 이다.

(2) $f(x) = \frac{1}{x \log x \log\log x}$ 이라 하면 이는 감소하는 양함수이다. 이제

$$\int_3^\infty \frac{dx}{x \log x \log\log x} = \int_{\log\log 3}^\infty \frac{dt}{t} \qquad \log\log x = t,\ \frac{dx}{x\log x} = dt$$

$$= \infty$$

이므로 적분판정법에 의하여 $\sum_{n=3}^\infty \frac{1}{n \log n \log\log n} = \infty$ 이다.



3\. (1) 함수 $\sin\frac{1}{\sqrt{x}}$ 는 ($x\ge1$ 에서) 감소하는 양함수이다. 이때 급수 $\sum \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ 은 $\sin\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{2}{\pi\sqrt{n}}$ 이고 $\sum \frac{2}{\pi\sqrt{n}} = \infty$ 이므로 비교판정법에 의해 발산한다. 따라서 적분판정법에 의해 $\int_1^\infty \sin\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \infty$ 이다.

(2) 함수 $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 은 ($x\geq1$ 에서) 감소하는 양함수이다. 이때 $\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n} < \frac{1}{n^2}$ 이고 $\sum\frac{1}{n^2}<\infty$ 이므로 비교판정법에 의해 $\sum\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}<\infty$ 이다. 따라서 적분판정법에 의해 $\int_1^\infty \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,dx<\infty$ 이다.

4. (1) 주어진 급수는 $-2\sum\frac{1}{n\sqrt{n}}$ 과 같다. 이때 함수 $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ 은 감소하는 양함수이고,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx = \left[-2\frac{1}{\sqrt{x}}\right]_1^\infty = 2<\infty$$

이므로 적분판정법에 의해 $\sum\frac{1}{n\sqrt{n}}$ 은 수렴한다. 따라서 주어진 급수도 수렴한다.

(2) 함수 $f(x)=\frac{\log x}{x}$ 는 $f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$ 에서 $x>e$ 일 때 $f'(x)<0$ 이므로 $x>e$ 에서 양의 감소함수가 된다. 이때

$$\int_1^\infty \frac{\log x}{x}\,dx = \int_0^\infty t\,dt \qquad \log x=t,\ \frac{1}{x}dx=dt$$
$$=\infty$$

이므로, 적분판정법에 의해 주어진 급수는 발산한다.

* 적분판정법에서, 급수의 수렴 여부는 유한개의 항의 영향을 받지 않으므로, 반드시 $x\geq1$ 에서가 아니라 어떤 상수 c 에 대하여 $x\geq c$ 에서 주어진 조건을 만족시킬 때 이용할 수도 있다.

(3) $\frac{\log n}{\sqrt{n}}\geq\frac{\log n}{n}$ 이고, $\sum\frac{\log n}{n}=\infty$ 이므로, 비교판정법에 의해 발산.

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n+1}=\infty$ 이므로, 일반항판정법에 의해 발산.

(5) $\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)} > \frac{1}{\sqrt{n}\,3\sqrt{n}} = \frac{1}{3n}$ 이고, $\sum\frac{1}{3n}=\infty$ 이므로, 비교판정법에 의해 발산.

(6) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\log(n+1)} > \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\log n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{4\log\sqrt{n}} = \infty$ 이므로, 일반항판정법에 의해 발산.

(7) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\neq0$ 이므로, 일반항판정법에 의해 발산.

(8) 주어진 급수는 공비가 $\dfrac{1}{\log 2} > 1$ 인 등비급수이므로 발산.

(9) 주어진 급수는 공비가 $\dfrac{1}{\log 3} < 1$ 인 등비급수이므로 수렴.

(10) $\lim\limits_{n\to\infty} n \tan\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{\sin t}{t}\cdot\dfrac{1}{\cos t} = 1 \neq 0$ 이므로, 일반항판정법에 의해 발산.

5. $p \le 0$ 이면 $\dfrac{\log n}{n^p} \ge 1$ $(n \ge 2)$ 이므로 발산. 따라서 $p > 0$ 인 경우를 생각한다.

$f(x) = \dfrac{\log x}{x^p}$ 라 하면 $f'(x) = \dfrac{x^{p-1} - p x^{p-1}\log x}{x^{2p}} = \dfrac{1 - p\log x}{x^{p+1}} < 0$ $(x > e^{\frac{1}{p}})$.

이므로 충분히 큰 x에 대하여 $f'(x) < 0$, 즉 $f(x)$는 감소한다. 이때 $p > 1$ 이면

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{\log x}{x^p}\,dx &= \int_0^\infty \frac{t}{e^{(p-1)t}}\,dt \\
&= \left[-\frac{t}{(p-1)}e^{-(p-1)t}\right]_0^\infty + \frac{1}{p-1}\int_0^\infty e^{-(p-1)t}\,dt \\
&= \left[-\frac{t}{(p-1)}e^{-(p-1)t}\right]_0^\infty - \frac{1}{(p-1)^2}\left[e^{-(p-1)t}\right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{(p-1)^2} \qquad (p>1)
\end{aligned}$$

이고 $p \le 1$ 이면 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t}{e^{(p-1)t}}\,dt = \infty$ 이므로, 적분판정법에 의해 수렴하는 p의 범위는 $p > 1$.

6. $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^5}$ 라 하면 $f'(x) = \dfrac{2x(1+x^5) - x^2\cdot 5x^4}{(1+x^5)^2} = \dfrac{2x - 3x^6}{(1+x^5)^2}$ 이므로,

x가 충분히 크면 $\left(x > \left(\frac{2}{3}\right)^{1/5}\right)$ $f'(x) < 0$ 이다. 따라서 x가 클 때 $f(x)$는 감소하는 함수이다. 이제 급수 $\sum \dfrac{n^2}{1+n^5}$ 는

$$\frac{n^2}{1+n^5} \le \frac{n^2}{n^5} = \frac{1}{n^3} \le \frac{1}{n^2}$$

이고 $\sum \dfrac{1}{n^2} < \infty$ 이므로 비교판정법에 의해 수렴한다. 따라서 적분판정법에 의해 특이적분 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2}{1+x^5}\,dx$ 는 수렴한다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

7. 함수 $\dfrac{1}{\sqrt{x}(\log x)^{100}}$ 은 양의 감소함수이다. 이때

$$\int_{100}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(\log x)^{100}} = \int_{100}^{\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{x(\log x)^{100}} \qquad \log x = t,\ \frac{dx}{x} = dt,\ \sqrt{x} = e^{t/2}$$

$$= \int_{\log 100}^{\infty} \frac{e^{t/2}}{t^{100}}\,dt$$

이때 $\lim_{t\to\infty} \dfrac{e^{t/2}}{t^{100}} = \infty$ 이므로, $\displaystyle\int_{\log 100}^{\infty} \frac{e^{t/2}}{t^{100}}\,dt = \infty$. 따라서 적분판정법에 의하여 주어진 급수는 발산한다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

제 7절. 교대급수와 절대수렴급수

1. (1) $f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{x+1}$ 이라 할 때, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - (\sqrt{x}+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\sqrt{x} - 1}{(x+1)^2}$

이므로, x가 크면 $f'(x)<0$, 즉 감소함수이다. 따라서 충분히 큰 n에 대하여

$\frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$ 은 감소수열이다. 또, $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n+1} = 0$ 이므로, 주어진 교대급수는 수렴한다.

한편, $\frac{\sqrt{n}+1}{n+1} \geq \frac{1}{2n}$ 이고, $\sum \frac{1}{2n} = \infty$ 이므로, 비교판정법에 의하여 $\sum \frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$ 발산.

즉 주어진 급수는 절대 수렴하지 않는다.

(2) $\cos n\pi = (-1)^n$ 이므로, 주어진 급수는 $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ 이다. $\frac{1}{n}$은 감소하며 0으로 수렴하므로, 주어진 급수는 수렴한다 (교대급수판정법). 그러나 $\sum \frac{1}{n} = \infty$ 이므로, 주어진 급수는 절대수렴하지 않는다.

(3) $f(x) = xe^{-x}$ 라 하면 $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ 이므로 $x>1$ 일 때 $f'(x)<0$.

따라서 수열 (ne^{-n}) 은 감소한다. 또 $\lim_{n\to\infty} ne^{-n} = 0$ 임은 명백하다. 따라서 교대급수판정법에 의하여 주어진 급수는 수렴한다.

또, $\int_1^\infty xe^{-x}dx = \left[-xe^{-x}\right]_1^\infty + \int_1^\infty e^{-x}dx = \frac{2}{e} < \infty$ 이므로 적분판정법에 의해 급수 $\sum ne^{-n}$ 은 수렴한다. 즉, 주어진 급수는 절대수렴한다.

└ 비율판정법이나 거듭제곱근 판정법을 이용해도 편리하다.

* 물론, 절대수렴함을 먼저 보인 후 정리 7.2.1 을 이용해도 좋다.

(4) 수열 $(\sin \frac{1}{n})$ 은 감소하며 0으로 수렴한다. 따라서 주어진 급수는 수렴한다 (교대급수판정법).

그러나 $\sin \frac{1}{n} \geq \frac{2}{\pi n}$ 이고 $\sum \frac{2}{\pi n} = \infty$ 이므로 비교판정법에 의하여 $\sum \sin \frac{1}{n} = \infty$ 이다. 즉, 주어진 급수는 절대수렴하지 않는다.

(5) 급수 $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ 이 수렴하므로 (6절 연습문제 4(1)), 주어진 급수는 절대수렴한다.
따라서 주어진 급수는 수렴한다.

(6) $n \geq 10$ 이면 $\frac{n}{10} \geq 1$ 이고, 따라서 $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{10}\right)^n = \infty$ 이다. 즉, $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{10}\right)^n \neq 0$ 이므로, 일반항 판정법에 의해 주어진 급수는 발산한다. 또, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{10}\right)^n \neq 0$ 이므로, 급수 $\sum \left(\frac{n}{10}\right)^n$ 도 발산하고, 따라서 주어진 급수는 절대수렴하지 않는다.

* "교대급수 판정법의 조건을 만족하지 않으므로 발산"과 같은 논리를 펼쳐서는 안 된다. 교대급수 판정법의 조건을 충족시키지 않으면서도 수렴하는 교대급수도 있다. 교대급수가 발산함을 보일 때에는 일반항 판정법을 이용해 보라.

* 정리 7.2.1의 대우 :
발산하는 급수는 절대수렴하지 않는다.

(7) $\lim_{n\to\infty} \frac{10^n}{n^{10}} = \infty \neq 0$ 이므로, $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} \frac{10^n}{n^{10}} \neq 0$ 이고, 주어진 급수는 발산한다 (일반항 판정법). 따라서 주어진 급수는 절대수렴하지 않는다 (정리 7.2.1의 대우, 또는 일반항 판정법)

(8) $f(x) = \frac{\log x}{x}$ 라 하면 $f'(x) = \frac{1-\log x}{x^2}$ 이므로, x가 충분히 클 때 ($x > e$ 일 때) $f'(x) < 0$ 이다. 즉, n이 충분히 크면 수열 $\left(\frac{\log n}{n}\right)$ 은 감소한다. 또, $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$ 이므로, 교대급수판정법에 의해 주어진 급수는 수렴한다.
또, $\sum \frac{\log n}{n} = \infty$ (6절 연습문제 4(2)) 이므로, 주어진 급수는 절대수렴하지 않는다.

(9) 수열 $\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ 은 감소수열이고, $\lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$ 이므로, 교대급수판정법에 의해 주어진 급수는 수렴한다.

이제 절대수렴성을 확인한다. 함수 $y = \log(1+x)$ 는 위로 볼록한 함수이므로, 부등식

$$\log(1+x) \geq (\log 2)x$$

가 $0 \leq x \leq 1$ 에서 성립한다. 따라서

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq \frac{\log 2}{n}$$

이고, $\sum \frac{\log 2}{n} = \infty$ 이므로, 비교판정법에 의하여 $\sum \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \infty$ 이다. 즉, 주어진 급수는 절대수렴하지 않는다.

(10) 수열 $\left(\frac{1}{\log n}\right)$ 은 감소수열이고, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0$ 이므로, 교대급수판정법에 의하여 주어진 급수는 수렴한다. 그런데 $\frac{1}{\log n} \geq \frac{1}{n}$ 이고 $\sum \frac{1}{n} = \infty$ 이므로 비교판정법에 의해 $\sum \frac{1}{\log n} = \infty$ 이다. 즉, 주어진 급수는 절대수렴하지 않는다.

2. $2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right) \neq 2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\right) - 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\right)$

이다. 좌변은 수렴하는 교대급수이지만 우변은 발산하는 조화급수 두 개의 연산이다. $\infty - \infty$ 의 연산은 정의할 수 없다.

* 이처럼, 절대수렴하지 않는 급수의 순서를 재배열하거나, 쪼개면 문제가 생길 수 있다. 단, 일반적으로 절대수렴하는 급수의 경우에는 재배열, 쪼개기 등이 가능하다.

3. 급수 $\sum a_n$ 의 부분합 수열을 (s_n) 이라 하자. 즉, $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 이다.

(i) $a_{n+1} \geq 0$ 인 경우.

$$\left|\sum a_n - s_n\right| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots|$$

a_{n+1}, $|a_{n+3}| \geq |a_{n+4}|$

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \cdots = (\underbrace{\overset{+}{a_{n+1}} + \overset{-}{a_{n+2}}}_{\geq 0}) + (\underbrace{\overset{+}{a_{n+3}} + \overset{-}{a_{n+4}}}_{\geq 0}) + \cdots \geq 0.$$

이므로 $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots| = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$ 인데

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

$$|a_{n+2}| \ge |a_{n+3}|.$$

$$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+a_{n+4}+\cdots = a_{n+1} + \underbrace{(a_{n+2}+a_{n+3})}_{\le 0} + \underbrace{(a_{n+4}+a_{n+5})}_{\le 0} + \cdots$$

$$\le a_{n+1}$$

이므로 $|\sum a_n - s_n| \le a_{n+1} = |a_{n+1}|$ 이다.

(ii) $a_{n+1} \le 0$ 이면,

$$|\sum a_n - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots|$$

에서 $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots = \underbrace{(a_{n+1}+a_{n+2})}_{\le 0} + \underbrace{(a_{n+3}+a_{n+4})}_{\le 0} + \cdots \le 0$

이므로

$$|\sum a_n - s_n| = -a_{n+1} - a_{n+2} - \cdots$$

이고,

$$-a_{n+1} - a_{n+2} - \cdots = -a_{n+1} - \underbrace{(a_{n+2}+a_{n+3})}_{\ge 0} - \underbrace{(a_{n+4}+a_{n+5})}_{\ge 0} - \cdots$$

$$\le -a_{n+1}$$

이므로 $|\sum a_n - s_n| \le -a_{n+1} = |a_{n+1}|$ 이다.

4. 우선 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{\sin x}{x}\,dx$ 이다.

$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$ 가 수렴함을 보이자. $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$ 라 하면,

함수 $\frac{\sin x}{x}$ 는 $n\pi \le x \le (n+1)\pi$ (n 짝수) 에서는 양(또는 0), $n\pi \le x \le (n+1)\pi$ (n 홀수) 에서는 음(또는 0) 의 함숫값을 가지므로, a_n은 n이 짝수일 때 양수, 홀수일 때 음수이다.

즉, 급수 $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 은 교대급수이다. 이때

$$|a_n| = \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx \right| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \qquad x = y - \pi \text{ 치환}$$

$$= \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{|\sin(y-\pi)|}{y-\pi}\,dy = \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{|\sin y|}{y-\pi}\,dy$$

$$\ge \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{|\sin y|}{y}\,dy = \left| \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{\sin y}{y}\,dy \right| = |a_{n+1}|$$

$\boxed{\text{한승우}}$ (수리과학부)

이고, 또

$$|a_n| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \le \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{n\pi}\,dx = \frac{1}{n}$$

에서 $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$ 임을 얻으므로, 교대급수판정법에 의하여 급수 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 은 수렴한다.

따라서 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$ 는 수렴한다.

* 더 엄밀하게 말하자면, $\int_0^b \frac{\sin x}{x}\,dx$ 에서 b 가 $n\pi$ (n: 자연수) 꼴이 아닐 때에 대해서도 고려해야 한다. 그런데 어떤 자연수 (또는 0) n 에 대하여 $n\pi < b < (n+1)\pi$ 이면, $\int_0^b \frac{\sin x}{x}\,dx$ 는 $\int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$ 와 $\int_0^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$ 의 사이에 있으므로,

수렴에 문제가 되지 않는다.

* $a_0 = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$ 또한 특이적분으로서, 실제로는 $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{c\to0+}\int_c^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$ 를 계산해야 한다. 매우 걱정 없으므로 넘어가도 좋지만, 이 특이적분이 수렴함을 다음과 같이 알 수도 있다.

$$\lim_{c\to0+}\int_c^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{c\to0+}\int_{1/c}^{1/\pi} \sin\frac{1}{y}\cdot y\cdot\left(-\frac{1}{y^2}dy\right) \qquad x=\frac{1}{y},\ dx = -\frac{1}{y^2}dy$$

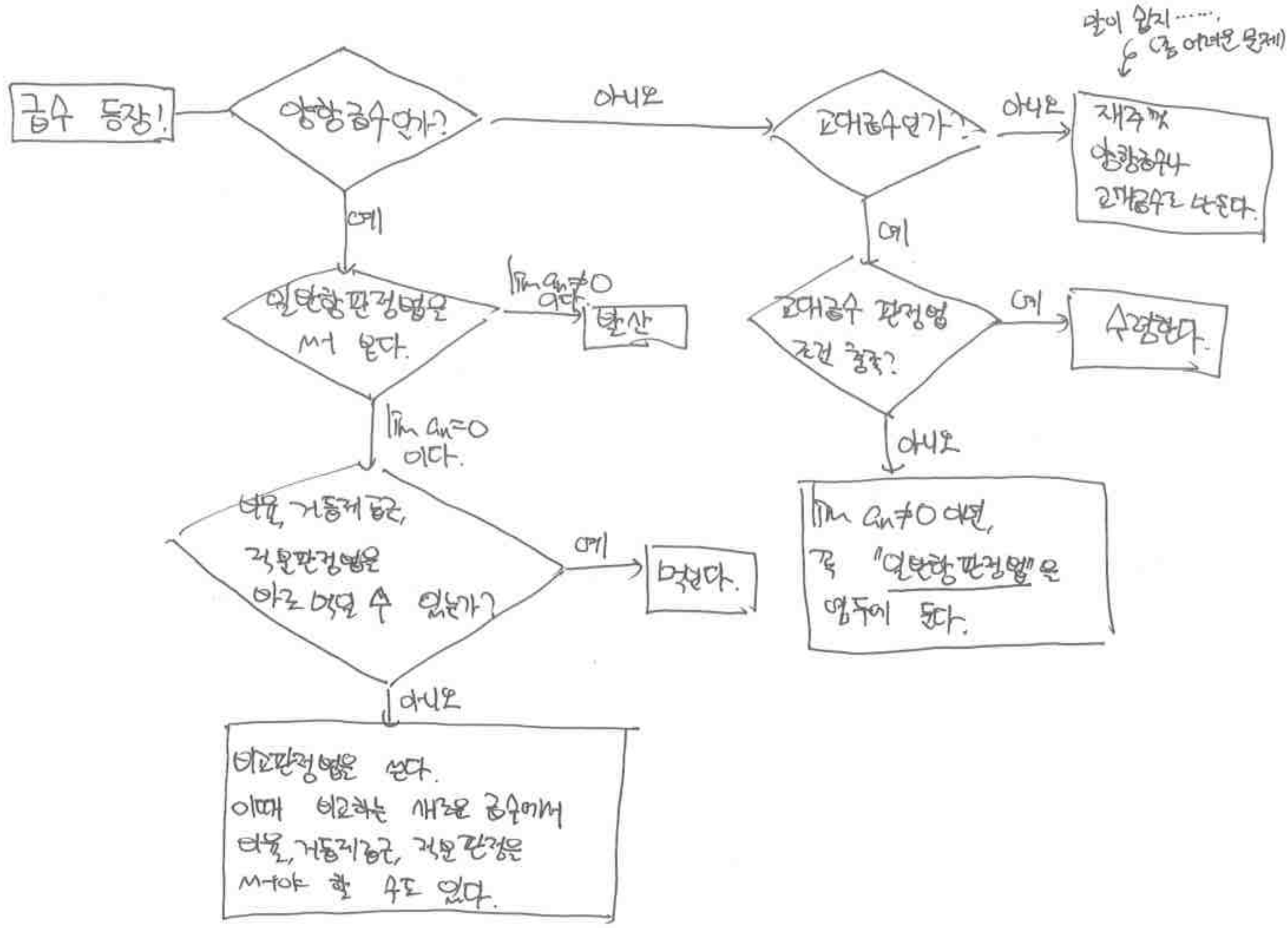
$$= \lim_{c\to0+}\int_{1/\pi}^{1/c} \frac{1}{y}\sin\frac{1}{y}\,dy$$

$$= \lim_{d\to\infty}\int_{1/\pi}^{d} \frac{1}{y}\sin\frac{1}{y}\,dy = \int_{1/\pi}^{\infty} \frac{1}{y}\sin\frac{1}{y}\,dy.$$

그런데 함수 $\frac{1}{y}\sin\frac{1}{y}$ 은 양의 감소함수이고, 급수 $\sum\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$ 은 수렴하므로
($\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n} \le \frac{1}{n^2}$ 이고, $\sum\frac{1}{n^2} < \infty$ 이므로, 비교판정법에 의해 수렴)
특이적분 $\int_{1/\pi}^{\infty}\frac{1}{y}\sin\frac{1}{y}\,dy$ 가 수렴. 따라서 특이적분 $\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx$ 는 수렴한다.

하승우 (수리과학부)

[급수의 수렴 판정 문제 작은 조언들]



* 비교판정법은 가장 기본적이면서도 중요한 판정법이다. 급수 문제 난이도는 비교판정법 문제에 달려 있다고 봐도 과언이 아니다.

비교판정법을 써서 수렴판정을 하려면, 정답을 미리 눈치챌 수 있어야 한다. 양항급수 $\sum a_n$ 에서, 이 급수가 수렴함을 보이려면 $a_n \le b_n$ 인 수열을 가져와야 하고, 발산함을 보이려면 $a_n \ge c_n$ 인 수열을 가져와야 한다. $\sum a_n$ 은 수렴하는데 $a_n \ge c_n$ 인 수열을 가져와서는 안 되는 것이다. 따라서 답을 눈치챌 수 있는 직관을 길러야 한다. 이때 다음을 염두에 두면 편리하다.

$\Box$ 가 0 근처에 있는 수일 때,

$$\sin \Box \approx \tan \Box \approx \Box,\quad \log(1+\Box) \approx \Box,\quad e^{\Box} - 1 \approx \Box,\ \cdots$$

$$\sinh \Box \approx \tanh \Box \approx \Box,\quad \arctan \Box \approx \Box$$

2장에서 배우는 거듭제곱급수를 이용하는 법도 있으므로, 필요하면 적극 이용하자.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

물론 위의 근사식이 통하지 않는 문제도 있다. 예를 들어 $\sin x \approx x$ 가 아닌, $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ 을 이용해야 하는 경우도 있다. 2장에서 거듭제곱급수를 배우면 조금 유연하게 대처할 수도 있다.

* 당연한 말이지만, $\sum \frac{f(n)}{g(n)}$ (f, g 다항식) 는 (g의 차수) $>$ (f의 차수)$+1$ 이면 수렴하고, 그렇지 않으면 발산한다. 따라서, 근사식을 이용해서 급수가 $\sum \frac{f(n)}{g(n)}$ 형태와 비슷함을 알면, 수렴·발산을 알기 쉽다. 비교판정법을 이용하여 수렴·발산을 보일 때는, $\sum \frac{1}{n^p}$ 꼴로 만들어 주되, 수렴·발산에 따라 적절히 부등식을 쓴다. 최고차항은 유지한 채, 낮은 차수의 항을 어떻게든 지우면 된다. 조금 까다로운 예를 든다.

$$\sum \frac{n^2+2018n-10억}{n^3+n^2-n}$$: $\frac{2차}{3차}$ 이므로 $\frac{1}{n}$ 과 비슷하게 발산할 것이다.

따라서 급수의 일반항보다 작은 것을 비교한다; 이때 분자는 작게, 분모는 크게 한다.

$$\underset{\uparrow}{0<}\ \frac{n^2+2018n-10억}{n^3+n^2-n} > \frac{n^2+0-n^2/2}{n^3+n^3\cancel{-n^3/2}} \quad \begin{matrix}\leftarrow 작게\\ \leftarrow 크게\end{matrix} \quad (충분히\ 큰\ n에\ 대해)$$

(충분히 큰 n에 대해)

$$= \frac{n^2/2}{2n^3/2} = \frac{1}{2n}$$

이고 $\sum 1/2n = \infty$ 이므로, $\sum \frac{n^2+2018n-10억}{n^3+n^2-n}$ 발산.

$$\sum \frac{n^4+2018n^2-20n}{n^6+n^5-n^4+n^3-n^2}$$: $\frac{4차}{6차}$ 이므로 $\frac{1}{n^2}$ 과 비슷하게 수렴할 것이다.

따라서 급수의 일반항보다 큰 것을 비교한다: 분자는 크게, 분모는 작게.

$$0< \frac{n^4+2018n^2-20n}{n^6+n^5-n^4+n^3-n^2} < \frac{n^4+2018n^4+0}{n^6+0-n^6/3+0-n^6/3} \quad \begin{matrix}\leftarrow 크게\\ \leftarrow 작게\end{matrix} \quad (충분히\ 큰\ n에\ 대해)$$

$$= \frac{2019n^4}{n^6/3} = 6057/n^2$$

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

이고 $\sum \cos n / n^2$ 수렴하므로, $\sum \frac{n^4+2\cos n\, n^2-20n}{n^6+n^5-n^4+n^3-n^2}$ 수렴.

2, 3장에서 배우는 내용까지 동원하여 급수 수렴·발산 문제의 급수를 최대한 단순하게 만들면, 수렴·발산은 쉽게 판정할 수 있다. 이러한 문제에서는 답을 미리 알고 답에 맞는 풀이를 만들어야 된다. 수렴·발산 여부를 알아내면, 적절한 부등식을 사용하도록 하자.

하승우 (수리과학부)

2. 거듭제곱급수

제 2절. 거듭제곱급수의 수렴반경

1. $|x|<1$ 에서 등식 $\frac{1}{1-x^2} = 1+x^2+x^4+x^6+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ 이 성립함을 안다.

이 등식의 양변을 적분하면

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt = \int_0^x \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad (|x|<1)$$

$x=\frac{1}{2}$ 을 대입하면

$$\frac{1}{2}\log\frac{3/2}{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\,\frac{1}{2^{2n+1}}$$

$$\Rightarrow \log 3 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)4^n}.$$

2. (1) 비율판정법을 쓰면 $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4^{n+1}}\cdot\frac{4^n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n} = \frac{1}{4}<1$ 이므로 급수 수렴.

(별해) $|x|<1$ 에서 성립하는 등식 $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 의 양변을 미분하면

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = +\frac{1}{(1-x)^2} \qquad (|x|<1)$$

따라서 $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ 이다. 이 등식은 $x=\frac{1}{4}$ 에서도 수렴하므로 $\sum\frac{n}{4^n}$ 은 수렴한다.

또, 위 등식에 $x=\frac{1}{4}$ 을 대입하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4^n} = \frac{1/4}{(3/4)^2} = \frac{4}{9}.$$

* 위와 같이 1강에서 배운 수렴판정법을 이용하여 수렴 확인을 해도 되지만, 거듭제곱급수의 수렴 범위를 이용해도 된다. 결국 급수의 합을 구하려면 거듭제곱급수를 이용해야 하므로, 한꺼번에 해결하자.

$\boxed{\text{하상우}}$ (수리과학부)

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad |x|<1 \overset{\text{미분}}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad |x|<1$

$$\overset{\text{미분}}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3} \quad |x|<1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} \quad |x|<1$$

이 급수는 $x=\frac{1}{5}$ 일 때 수렴하고, 그 값은

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{5^n} = \frac{2 \times \frac{1}{25}}{\left(\frac{4}{5}\right)^3} = \frac{5}{32}$$

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt$$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \overset{\text{적분}}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\log(1-x) \quad |x|<1$

$x = -\frac{1}{3}$ 로 대입해도 성립(수렴)

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n} = -\log \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n} = \log \frac{4}{3}.$$

(4) (2) 에서 $\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3} \quad |x|<1$

$$\overset{\text{미분}}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2) x^{n-3} = \frac{6}{(1-x)^4} \quad |x|<1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2) x^n = \frac{6x^3}{(1-x)^4} \quad |x|<1$$

$x = \frac{1}{2}$ 로 대입해도 수렴.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)(n-2)/2^n = \frac{6 \cdot \frac{1}{2^3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = 12.$$

(5) (4) 의 식에서 $x = \frac{1}{3}$ 로 대입해도 수렴.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)}{3^n} = \frac{6 \cdot \frac{1}{3^3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{9}{8}$$

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

(6) (3)에서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\log(1-x)$ $\quad |x|<1$

$$\overset{\text{적분}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1} = x - (x-1)\log(1-x) \qquad |x|<1$$

$x = \frac{1}{2}$ 을 대입해도 수렴.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n} = 1 + \log 2.$$

(7) (2)에서 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ $\quad |x|<1 \quad \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ $\quad |x|<1$

$$\overset{\text{미분}}{\Longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{x+1}{(1-x)^3} \qquad |x|<1$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3} \qquad |x|<1$$

$x = \frac{1}{2}$ 대입해도 수렴.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 6.$$

(8) (7)에서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$ $\quad |x|<1.$

$x = -\frac{1}{2}$ 대입해도 수렴.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2^n} = \frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^3} = -\frac{2}{27}$$

3. * 도움이 되는 정리.

거듭제곱급수 $\sum a_n x^n$ 에서 극한값

$$\ell := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad \in [0, \infty]$$

이 존재한다면, $\sum a_n x^n$ 의 수렴반경은 $\frac{1}{\ell} \in [0, \infty]$ 이다.

* "이상한" 거듭제곱급수에 대해서는, 1장에서 배운 수렴판정법을 이용해야 할 수도 있다.

$\boxed{\text{허 승우}}$ (수리과학부)

위 정리의 결과를 알아보자. (정리 2.1.5의 증명과 비교해 보자.)

(증명) x의 절댓값이 $1/\ell$ 보다 작으면 급수 $\sum a_n x^n$ 이 수렴하고, x의 절댓값이 $1/\ell$ 보다 크면 급수 $\sum a_n x^n$ 이 발산한다는 것을 보이면 된다. 그런데 급수의 제 n번째 항의 절댓값의 n거듭제곱근이 $\sqrt[n]{|a_n|}\,|x|$ 이다. 그러므로 $|x| < \frac{1}{\ell}$ 이면,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,|x| = \ell |x| < 1$$

이고, 따라서 거듭제곱근판정법에 의하여 $\sum |a_n x^n| < \infty$ 이다. 그러므로 $\sum a_n x^n$ 이 수렴한다.

이제 $|x| > 1/\ell$ 인 경우를 생각한다. $\frac{1}{\ell} < y < |x|$ 인 y에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\, y = \ell y > 1$$

이므로 $\sum |a_n y^n| = \infty$ 임을 얻는다. 만약 $\sum a_n x^n$ 이 수렴한다면, 정리 2.1.4 에 의해 $\sum |a_n y^n| < \infty$ 라는 모순이 생기므로 $\sum a_n x^n$ 은 발산한다. ◎

* 필요한 경우 위 정리를 써도 된다. 간결하므로, 실제 시험에서도 강조하고 싶은 듯.

(1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ 이므로, 수렴반경은 ∞ 이다.

또는, $a_n = \frac{1}{n^n}$ 에서, $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\downarrow\, 0} \cdot \Big(\underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}_{\downarrow\, 1/e}\Big)^n = 0 \cdot \frac{1}{e} = 0$

임을 계산해도 된다. 수렴하는 x의 범위는 $-\infty < x < \infty$.

(2) $a_n = \frac{1}{\log(n+2)}$ 에서, $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+2)}{\log(n+3)} = 1$. 이므로, 수렴반경은 1 이다. $x=1$ 이면, $\sum \frac{1}{\log(n+2)} = \infty$ (비교판정법. $\frac{1}{\log(n+2)} > \frac{1}{n+2}$, $\sum \frac{1}{n+2} = \infty$)

$x=-1$ 이면, $\sum \frac{(-1)^n}{\log(n+2)}$ 수렴 (교대급수 판정법) (연습문제 1장 7절 1.(10))

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

따라서 수렴하는 x의 범위는 $-1 \leq x < 1$ 이다.

$*$ $\lim \frac{\log(n+2)}{\log(n+3)}$ 등의 극한은 제 3장에서 로피탈 정리를 배우면 간단하다.

(3) $a_n = \frac{n}{6^n}$ 에서,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{6^{n+1}} \cdot \frac{6^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{6n} = \frac{1}{6}.$$

이므로 수렴반경은 6.

$x=6$ 이면, $\sum n \frac{6^n}{6^n} = \sum n = \infty.$

$x=-6$ 이면, $\sum n \frac{(-6)^n}{6^n} = \sum (-1)^n n$ 발산. (일반항 판정법)

따라서 수렴하는 x의 범위는 $-6<x<6.$

(4) $a_n = \frac{n^2}{1+n^2}$ 에서,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{1+(n+1)^2} \cdot \frac{1+n^2}{n^2} = 1$$

이므로 수렴반경은 1.

$x=1$ 이면, $\sum \frac{n^2}{1+n^2} = \infty$ ($\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+n^2} = 1$ 에서 일반항 판정법).

$x=-1$ 이면, $\sum \frac{(-1)^n n^2}{1+n^2}$ 발산 ($\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n^2}{1+n^2} \neq 0$ 에서 일반항 판정법).

따라서 수렴하는 x의 범위는 $-1<x<1.$

(5) $a_n = \frac{7^n}{n!}$ 에서,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{7^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{7^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{7}{n+1} = 0.$$

이므로 수렴반경은 $\infty.$

따라서 수렴하는 x의 범위는 $-\infty<x<\infty.$

(6) $x-2=y$ 라 하면, 주어진 급수는 $\sum \frac{(-1)^n y^n}{n^n}$

$a_n = \frac{(-1)^n}{n^n}$ 에서,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

이므로 수렴반경은 ∞. 즉, 수렴하는 y의 범위는 $-\infty < y < \infty$. 이다.
다시 말해, 급수는 $-\infty < x-2 < \infty$ 일 때 수렴하므로, 수렴하는 x의 범위는 $-\infty < x < \infty$ 이다.

(7) $a_n = \log n$ 에서,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{\log(n)} = 1$$ (로피탈 정리. 제 3장 참고)

이므로 수렴반경은 1.

$x=1$ 이면 $\sum \log n = \infty$ (일반항 판정법)

$x=-1$ 이면 $\sum (-1)^n \log n$ 발산 (일반항 판정법)

따라서 수렴하는 x의 범위는 $-1 < x < 1$.

(8) $x-1=y$ 라 하면, 주어진 급수는 $\sum \frac{y^n}{(\log(n+1))^n}$.

$a_n = \frac{1}{(\log(n+1))^n}$ 에서,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n+1)} = 0$$

이므로 수렴반경은 ∞. 즉, 수렴하는 y의 범위는 $-\infty < y < \infty$ 이다.
다시 말해, 급수는 $-\infty < x-1 < \infty$ 일 때 수렴하므로, 수렴하는 x의 범위는 $-\infty < x < \infty$ 이다.

* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 방법을 쓰면,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(\log(n+1))^n}{(\log(n+2))^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log(n+2)}\cdot\left(\frac{\log(n+1)}{\log(n+2)}\right)^n$$

에서, $0 \le \left(\dfrac{\log(n+1)}{\log(n+2)}\right)^n < 1$ 과 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log(n+2)} = 0$ 으므로

위 극한이 0 임을 얻는다. (어렵진 않지만 귀찮다.)

(9) $a_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3^n}$ 에서

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{3n} = \frac{1}{3}.$$

따라서 수렴반경은 3.

$x=3$ 일 때 $\displaystyle\sum\frac{n(n+1)(n+2)}{3^n}\cdot 3^n = \sum n(n+1)(n+2) = \infty$ (일반항 판정법)

$x=-3$ 일 때 $\displaystyle\sum\frac{n(n+1)(n+2)}{3^n}(-3)^n = \sum(-1)^n n(n+1)(n+2)$ 발산 (일반항 판정법)

수렴하는 x의 범위는 $-3<x<3$.

(10) $a_n = \dfrac{1}{2^{n+(-1)^n}}$ 에서,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{1+\frac{(-1)^n}{n}}} = \frac{1}{2}$$

이므로 수렴반경은 2.

$x=2$ 이면 $\displaystyle\sum\frac{2^n}{2^{n+(-1)^n}} = \sum\frac{1}{2^{(-1)^n}} = 2+\frac{1}{2}+2+\frac{1}{2}+\cdots = \infty.$

$x=-2$ 이면 $\displaystyle\sum\frac{(-2)^n}{2^{n+(-1)^n}} = \sum\frac{(-1)^n}{2^{(-1)^n}} = -2+\frac{1}{2}-2+\frac{1}{2}-\cdots = -\infty$

따라서 수렴하는 x의 범위는 $-2<x<2$.

$\boxed{\text{화승덕}}$(수리과학부)

(1.1) $\sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & n = \text{짝수} \\ 1 & n = 4k+1 \\ -1 & n = 4k+3 \end{cases}$ 이므로, 주어진 급수는

$\sum \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}} x^{2k+1}$ 이다. 이때 $y = x^2$ 라 하면, 주어진 급수는

$x \sum \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}} \cdot y^k$ 이므로, $\sum \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}} \cdot y^k$ 의 수렴 반경을 구한다.

$a_k = \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}}$ 에서

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{2k+1}}{2^{2k+3}} = \frac{1}{4}$$

이므로 수렴반경은 4 이다. 그러면, $y = x^2$의 수렴반경이 4 이므로

x의 수렴반경은 2이다.

$x=2$ 이면 $\sum \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}} \cdot 2^{2k+1} = \sum (-1)^k$ 발산. (일반항 판정법)

$x=-2$ 이면 $\sum \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}} \cdot (-2)^{2k+1} = \sum -(-1)^k$ 발산 (일반항 판정법)

따라서 수렴하는 x의 범위는 $-2 < x < 2$.

(1.2) $\cos n\pi = (-1)^n$ 이므로, 주어진 급수는 $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$.

$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ 에서

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

이므로 수렴반경은 1.

$x=1$ 이면 $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ 수렴 (교대급수 판정법)

$x=-1$ 이면 $\sum \frac{1}{n} = \infty$.

따라서 수렴하는 x의 범위는 $-1 < x \leq 1$.

$\boxed{\text{하승현}}$ (수리과학부)

(13) $a_n = n\sin\frac{1}{n}$ 에서,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\sin\frac{1}{n+1}}{n\sin\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}} \Big/ \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1\cdot 1 = 1$$

이므로 수렴반경 1.

$x=1$ 이면 $\sum n\sin\frac{1}{n} = \infty$ (일반항 판정법. $\lim n\sin\frac{1}{n}=1$)

$x=-1$ 이면 $\sum(-1)^n n\sin\frac{1}{n}$ 발산. (일반항 판정법.)

따라서 수렴하는 x의 범위는 $-1<x<1$.

(14) $a_n = n\tan\frac{1}{n}$ 에서,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\tan\frac{1}{n+1}}{n\tan\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}} \Big/ \frac{\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1\cdot 1 = 1.$$

이므로 수렴반경 1.

$x=1$ 이면 $\sum n\tan\frac{1}{n} = \infty$ (일반항 판정법. $\lim n\tan\frac{1}{n}=1$)

$x=-1$ 이면 $\sum(-1)^n n\tan\frac{1}{n}$ 발산. (일반항 판정법.)

따라서 수렴하는 x의 범위는 $-1<x<1$.

(15) $a_n = \sin\frac{1}{n}$ 에서

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n+1}\Big/\sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}}\cdot\frac{n}{n+1}$$

$$= 1\cdot 1\cdot 1 = 1.$$

이므로 수렴반경 1.

$x=1$ 이면 $\sum\sin\frac{1}{n} = \infty$ (비교판정법. $\sin\frac{1}{n} > \frac{2}{\pi n}$ 이고 $\sum\frac{2}{\pi n}=\infty$)

$x=-1$ 이면 $\sum(-1)^n\cdot\sin\frac{1}{n}$ 수렴 (교대급수 판정법) (1장 7절 1.(4))

따라서 수렴하는 x의 범위는 $-1\le x<1$.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

(16) $a_n = \tan\frac{1}{n}$ 에서

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{1}{n+1}}{\tan\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}\ \frac{\frac{1}{n}}{\tan\frac{1}{n}}\cdot\frac{n}{n+1}$$

$$= 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

이므로 수렴반경 1.

$x=1$ 이면 $\sum \tan\frac{1}{n} = \infty$ (비교판정법. $\tan\frac{1}{n} > \frac{1}{n}$ 이고 $\sum\frac{1}{n}=\infty$)

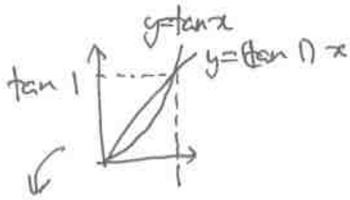
$x=-1$ 이면 $\sum(-1)^n\tan\frac{1}{n}$ 수렴 (교대급수 판정법).

따라서 수렴하는 x의 범위는 $-1\le x<1$.

(17) $a_n = \frac{1}{n}\tan\frac{1}{n}$ 에서

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}\tan\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}\tan\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\tan\frac{1}{n}}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$$

$$= 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$



이므로 수렴반경 1.

$x=1$ 이면 $\sum\frac{1}{n}\tan\frac{1}{n}$: $\frac{1}{n}\tan\frac{1}{n} \le \frac{1}{n}\cdot(\tan 1)\frac{1}{n} = (\tan 1)\cdot\frac{1}{n^2}$

이고 $\sum(\tan 1)\cdot\frac{1}{n^2} < \infty$ 이므로 $\sum\frac{1}{n}\tan\frac{1}{n} < \infty$. 수렴

$x=-1$ 이면 $\sum\frac{(-1)^n}{n}\tan\frac{1}{n}$: 교대급수 정리에 의해 수렴, 또는

이 급수는 절대수렴하므로 수렴.

따라서 수렴하는 x의 범위는 $-1\le x\le 1$.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

(18) $a_n = \frac{1}{\log(n+1)}$ 에서

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{\log(n+2)} = 1$$ (로피탈 정리. 3장 참고)

이므로 수렴반경 1.

$x=1$ 이면 $\sum \frac{1}{\log(n+1)} = \infty$ (비교판정법. $\frac{1}{\log(n+1)} > \frac{1}{n+1}$, $\sum \frac{1}{n+1} = \infty$)

$x=-1$ 이면 $\sum \frac{(-1)^n}{\log(n+1)}$ 수렴 (교대급수 판정법)

따라서 수렴하는 x의 범위는 $-1 \le x < 1$.

(2)랑 똑같은 문제 같은데...

(19) $a_n = \frac{1}{n2^n}$ 에서

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$$

이므로 수렴반경 2.

$x=2$ 이면 $\sum \frac{2^n}{n2^n} = \sum \frac{1}{n} = \infty$.

$x=-2$ 이면 $\sum \frac{(-2)^n}{n2^n} = \sum \frac{(-1)^n}{n}$ 수렴 (교대급수 판정법)

따라서 수렴하는 x의 범위는 $-2 \le x < 2$.

4. $|x| < 1$ 일 때 $\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2}$ 임을 안다. 따라서,
거듭제곱급수 기본정리에 의해,

$$\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1}$$

이다. 이때

하승우 (수리과학부)

$$(\text{좌변}) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt = \int_0^x \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log \frac{1+t}{1-t}\right]_0^x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$

이므로, $\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 을 얻고, 이로부터

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

임을 얻다.

$|x|<1$ 일 때, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 에서

$$-\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

임을 얻는다(p.66). 이때 x 대신 $\frac{1}{x}$ 을 대입하면, $\left|\frac{1}{x}\right|<1$ 즉 $|x|>1$ 일 때

$$-\log\left(1-\frac{1}{x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nx^n}$$

인데,

$$(\text{좌변}) = -\log\left(\frac{x-1}{x}\right) = \log\frac{x}{x-1}$$

이므로 $\log\frac{x}{x-1} = \sum\frac{1}{nx^n}$ 이 된다. x 대신 $-x$를 대입하면, $|x|>1$일때

$$\log\frac{-x}{-x-1} = \log\frac{x}{x+1} = \sum\frac{1}{n(-x)^n} = \sum\frac{(-1)^n}{nx^n}$$

으로 마지막 식을 얻는다.

5. $(\text{갑의 기댓값}) = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 100}_{\text{한번에 승}} + \underbrace{\frac{1}{2^2}\cdot 0}_{\text{패}\cdot\text{승}} + \underbrace{\frac{1}{2^3}\cdot(-100)}_{\text{패}\cdot\text{패}\cdot\text{승}} + \underbrace{\frac{1}{2^4}\cdot(-200)}_{\text{패}\cdot\text{패}\cdot\text{패}\cdot\text{승}} + \cdots$

$$= 50 - \frac{100}{2^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}$$

(p.66)

$$= 0$$

승패확률을 1/2로 한 것은
'1게임'을 갑과 을 중 하나가
이길 때까지로 생각한 것.
'1게임'에서 갑이 이길 확률
= P(승)+P(무·승)+P(무·무·승)+...
= $1/3 + (1/3)^2 + (1/3)^3 + \ldots = 1/2$

비기는 것까지 한번에 생각하고 싶다면, ...
(조합론 지식이 필요함)
(지면 관계상 간략하게 쓰니 관심있으면 직접 해석 ㄱㄱ)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\times 100\times\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1-k)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{100}{3^n}\times 2^{n-2}(3-n) = 0$$

하승유 (수리과학부)

6. $\sum_n a_n x^n$ 의 수렴반경이 r 이라 하자. ↙ $r=\infty$ 이면, $|x|<\infty$ 즉 $x\in\mathbb{R}$일 때

$|x|<r$ 일 때 ($r\neq 0$ 이라 가정. $r=0$ 이면 필요없음)

$$\sum_{n\geq N} a_n x^n = \sum_n a_n x^n - \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n \text{ 수렴.}$$

(더 정확히 말하면, $\sum_{n\geq N} a_n x^n$ 이 발산한다고 가정했을 때,

$\sum_n a_n x^n = \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n + \sum_{n\geq N} a_n x^n$ 도 발산해야 하는데,

이는 모순이므로 $\sum_{n\geq N} a_n x^n$ 수렴.)

$$x^N \sum_n a_n x^n = \sum_n a_n x^{n+N} \text{ 수렴.}$$

$|x|>r$ 일 때, ($r\neq\infty$ 이라 가정. $r=\infty$ 이면 필요없음)

$\sum_{n\geq N} a_n x^n$ 이 수렴한다면, $\sum_n a_n x^n = \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n + \sum_{n\geq N}^{\infty} a_n x^n$ 도 수렴해야 하는데, 이는 모순이므로 $\sum_{n\geq N} a_n x^n$ 발산

$\sum_n a_n x^{n+N}$ 이 수렴한다면, $\sum_n a_n x^n = \frac{1}{x^N}\cdot\sum_n a_n x^{n+N}$ 도 수렴해야 하는데 이는 모순이므로 $\sum_n a_n x^{n+N}$ 발산

따라서 $\sum_{n\geq N} a_n x^n$, $\sum_n a_n x^{n+N}$ 의 수렴반경도 r 이다.

7. 수학적 귀납법을 사용한다.

- $k=1$ 일 때 : $\dfrac{x}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{1!}\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$.

  $|x|<1$ 일 때 $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 이므로, 미분하여 $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$

  임을 안다. 양변에 x를 곱하여 $\dfrac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ 을 얻는다.

- $k=l$ 일 때 성립한다고 가정하자:

$$\frac{x^l}{(1-x)^{l+1}} = \frac{1}{l!}\sum_{n=l}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-l+1)x^n.$$

양변을 x^l로 나누면

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

$$\frac{1}{(1-x)^{l+1}} = \frac{1}{l!}\sum_{n=l}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-l+1)\, x^{n-l}$$

'양변을 미분'하여

$$\frac{l+1}{(1-x)^{l+2}} = \frac{1}{l!}\sum_{n=l}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-l)\, x^{n-(l+1)}$$

양변을 $l+1$ 로 나눈 후 x^{l+1} 을 곱하면

$$\frac{x^{l+1}}{(1-x)^{l+2}} = \frac{1}{(l+1)!}\sum_{n=l+1}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-l)\, x^{n}$$

즉 주어진 식은 $k=l+1$ 일 때도 성립한다.

따라서 주어진 식은 모든 자연수 k에 대해 성립한다.

8. $\sum a_n x^n$ 의 수렴반경을 r 이라 하자.

i) $r \neq 0, \infty$ 일 때

$\sum a_n x^{2n}$ 에서 $x^{2n}=y$ 라 하면, $\sum a_n x^{2n} = \sum a_n y^n$. 이 급수의 수렴반경은 r 이므로 $|y|<r$ 일 때 수렴, $|y|>r$ 일 때 발산

이때 $y=x^2$ 이므로, 급수 $\sum a_n x^{2n}$ 은 $|y|=|x^2|<r$ 일 때 수렴, $|y|=|x^2|>r$ 일 때 발산. 즉, $|x|<\sqrt{r}$ 일 때 수렴, $|x|>\sqrt{r}$ 일 때 발산하므로, 수렴반경은 $\sqrt{r}$.

ii) $r=0$ 일 때

$\sum a_n x^n$ 은 $x\neq 0$ 이면 발산하므로, $\sum a_n x^{2n} = \sum a_n (x^2)^n$ 도 $x^2 \neq 0$, 즉 $x\neq 0$ 일 때 발산.

iii) $r=\infty$ 일 때

$\sum a_n x^n$ 은 $x\in\mathbb{R}$ 이면 수렴하므로, $\sum a_n x^{2n} = \sum a_n (x^2)^n$ 도 $x^2\in\mathbb{R}$, 즉 $x\in\mathbb{R}$ 일 때 수렴.

즉 $\sum a_n x^n$ 수렴반경 $r \Rightarrow \sum a_n x^{2n}$ 수렴반경 $\sqrt{r}$.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

9. $|x|<1$ 에서 $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 임을 안다. 따라서 $|x|<1$ 일 때

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\log(1-x).$$

즉 $|x|<1$ 일 때

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{n-1} = \begin{cases} -\frac{\log(1-x)}{x} & (x\neq 0) \\ 1 & (x=0) \end{cases}$$

이므로,

$$\mathrm{li}_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n = -\int_0^x \frac{\log(1-t)}{t}\,dt \qquad (x\neq 0)$$

임을 안다. 이때 $x=0$ 이면 $\mathrm{li}_2(x) = 0$, $-\int_0^0 \frac{\log(1-t)}{t}\,dt = 0$ 이므로

$|x|<1$ 일 때 $\mathrm{li}_2(x) = -\int_0^x \frac{\log(1-t)}{t}\,dt.$

10. $f(x) = \sum a_n (x-c)^n$ 에서 $x-c=y$ 라 하면

$$g(y) := f(x) = \sum a_n (x-c)^n = \sum a_n y^n.$$

이때 $g(y) = \sum \frac{g^{(n)}(0)}{n!} y^n$ 임을 안다. 즉

$$f(x) = g(y) = \sum \frac{g^{(n)}(0)}{n!} (x-c)^n$$

이다. 그런데 $g(y) = f(y+c)$ 에서 $g^{(n)}(y) = f^{(n)}(y+c)$ 이므로,

$$g^{(n)}(0) = f^{(n)}(c)$$

따라서 $f(x) = \sum \frac{g^{(n)}(0)}{n!}(x-c)^n = \sum \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$ 이다.

$\boxed{\text{하승위}}$ (수리과학부)

11. $f(x) = \sum f_n x^n$ 의 수렴반경을 구하면,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} \right| = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \qquad (\text{pp. } 30-31)$$

에서 수렴반경이 $\frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 이다.

$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 이므로 $\frac{1}{2}$은 수렴반경 내에 있다. 그러면

$$\begin{aligned} f(\tfrac{1}{2}) &= f_0 + f_1 \cdot \tfrac{1}{2} + f_2 \cdot \tfrac{1}{4} + f_3 \cdot \tfrac{1}{8} + \cdots \\ +)\ \tfrac{1}{2} f(\tfrac{1}{2}) &= \qquad f_0 \cdot \tfrac{1}{2} + f_1 \cdot \tfrac{1}{4} + f_2 \cdot \tfrac{1}{8} + \cdots \\ \hline \tfrac{3}{2} f(\tfrac{1}{2}) &= f_0 + f_2 \cdot \tfrac{1}{2} + f_3 \cdot \tfrac{1}{4} + f_4 \cdot \tfrac{1}{8} + \cdots \\ &= 2f(\tfrac{1}{2}) - f_0 - f_1 \\ &= 2f(\tfrac{1}{2}) - 0 - 1 \end{aligned}$$

($f_0 = 0$. p.9의 정의에 따름)

이므로 $f(\frac{1}{2}) = 2$ 이다. 또

$$\begin{aligned} f(x) &= f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots \\ +)\ x f(x) &= \qquad f_0 x + f_1 x^2 + \cdots \\ \hline (1+x) f(x) &= f_0 + f_2 x + f_3 x^2 + \cdots \end{aligned}$$

에서

$$\begin{aligned} (x+x^2) f(x) &= f_0 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \cdots \\ &= f_0 x + (f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \cdots) - f_0 - f_1 x \\ &= \qquad f(x) \quad - x \end{aligned}$$

이므로, 이를 정리하면 $f(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$ 이다.

이제 이를 ~~무한급수~~로 나타낸다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{k}{1-\alpha x} + \frac{l}{1-\beta x} = \frac{(k+l)-(\alpha l+\beta k)x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}$$

그러면 $1-x-x^2 = (1-\alpha x)(1-\beta x)$ 이므로, ($\alpha > \beta$ 라 하면)

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\phi}$$

이고

$$(k+l) - (\alpha l + \beta k)x = (k+l) - \left(\phi l - \frac{1}{\phi}\cdot k\right) = x$$

에서 $k+l=0$, $\phi l - \frac{1}{\phi}k = -1$ 이므로 $l = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $k = +\frac{1}{\sqrt{5}}$.

따라서

$$f(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\phi x} - \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1+\frac{1}{\phi}x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(1+\phi x+\phi^2x^2+\phi^3x^3+\cdots\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(1-\frac{1}{\phi}x+\frac{1}{\phi^2}x^2-\frac{1}{\phi^3}x^3+\cdots\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\phi+\frac{1}{\phi}\right)x + \left(\phi^2-\frac{1}{\phi^2}\right)x^2 + \left(\phi^3+\frac{1}{\phi^3}\right)x^3+\cdots\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^n - \frac{(-1)^n}{\phi^n}\right)x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

이므로, $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^n - \frac{(-1)^n}{\phi^n}\right)$ 이다.

* 이 문제 풀이에서 사용된 급수 간의 덧셈은 왜 가능했던 것일까? 스스로 생각해 보라.

* 일반적으로, 점화식 $a x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0$ 을 따르는 수열 (x_n)의 일반항은, 방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 해를 α, β라 할 때, $x_n = k\alpha^n + l\beta^n$ 꼴이다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

12. $$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

에서

$$-\frac{\log(1-x)}{1-x} = \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots\right)\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right)$$

$$\begin{aligned}
&= x && \leftarrow x\cdot 1 \\
&\quad + \left(1+\frac{1}{2}\right)x^2 && \leftarrow x\cdot x + \frac{x^2}{2}\cdot 1 \\
&\quad + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3 && \leftarrow x\cdot x^2 + \frac{x^2}{2}\cdot x + \frac{x^3}{3}\cdot 1 \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n && \leftarrow x\cdot x^{n-1} + \frac{x^2}{2}\cdot x^{n-2} + \frac{x^3}{3}\cdot x^{n-3} + \cdots + \frac{x^n}{n}\cdot 1 \\
&\quad + \cdots \\
&= H_1 x + H_2 x^2 + H_3 x^3 + \cdots + H_n x^n + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n.
\end{aligned}$$

* 이게 정말 의미있는 계산 (진짜 이게 되나…?) 이냐는 의문이 들 수 있다. 어떻게 설명하려고 하면 못할 건 없다. 그러나 굳이 그렇게까지 해야 할 것 같지는 않다. '수렴반경 내에서라면 이런 계산도 가능하구나' 하고 생각하자. 정말 궁금하면 '코시곱(Cauchy Product)'을 참고하면 일반적 설명을 볼 수 있다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

제 3절. 지수함수와 거듭제곱급수

1. $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 에서 $\exp(x)-1-x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$

이므로 $\exp(x) = 1+x+\frac{x^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)!/2}$ 에서,

$$u(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)!/2}$$

이라 하면 $\exp(x) = 1+x+\frac{x^2}{2}u(x)$ 이다.

2. 1. 에서 $e^x-1-x = u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$.

따라서

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}x+\frac{1}{24}x^2+\cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2}.$$

3. (1) $e^x-1 = x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots$ 에서

$$B(x) = \frac{x}{e^x-1} = \frac{x}{x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\cdots}$$

$$= \frac{1}{1-\underbrace{\left(-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\cdots\right)\right)}_{=:A}} = 1+A+A^2+\cdots$$

단 $\left|\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\cdots\right| = \left|\frac{e^x-1}{x}\right|<1$ 일 때.

$$= 1-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\cdots\right)^2-\cdots$$

$$= 1-\frac{1}{2}x+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)x^2+\cdots = 1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2+\cdots.$$

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

(2) $C(x) = B(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right)$ 라 하자. 그러면

$$C(x) = \frac{x}{e^x - 1} - 1 + \frac{1}{2}x = \frac{x - (e^x - 1) + \frac{1}{2}x(e^x - 1)}{e^x - 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{2}x - e^x + 1}{e^x - 1},$$

$$C(-x) = \frac{-x}{e^{-x} - 1} - 1 - \frac{1}{2}x = \frac{-xe^x}{1 - e^x} - 1 - \frac{1}{2}x$$

$$= \frac{xe^x - (e^x - 1) - \frac{1}{2}x(e^x - 1)}{e^x - 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{2}x - e^x + 1}{e^x - 1} = C(+x)$$

으로, $C(x)$는 짝함수이다. 또,

$$C(x) := \sum c_n x^n = \sum (-1)^n c_n x^n = C(-x)$$

에서, $a_n = (-1)^n a_n$ 이어야 하므로, n이 홀수일 때 $a_n = 0$ 이다.

즉, $C(x)$의 거듭제곱급수 전개는 짝수 차수항으로만 이루어진다.

(3) (1)에서

$$B(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{120}x^4 + \cdots\right) + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{120}x^4 + \cdots\right)^2$$

$$- \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{120}x^4 + \cdots\right)^3 + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{120}x^4 + \cdots\right)^4 - \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + \cdots = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1/6}{2!}x^2 - \frac{1/30}{4!}x^4 + \cdots$$

$$-\frac{1}{6} + \frac{1}{2^2} \qquad \underbrace{-\frac{1}{120}}_{1\text{제곱}} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{24}\times 2 + \frac{1}{6^2}}_{2\text{제곱}} - \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\times 3}_{3\text{제곱}} + \underbrace{\frac{1}{2^4}}_{4\text{제곱}}$$

따라서 $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

4. 보여야 할 것

① $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2} x^2 + \cdots$ 수렴반경 1

② $(1+x) f'(x) = r f(x) \quad |x|<1$

③ $(1+x)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n \quad |x|<1$

④ $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \cdots$, $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + \cdots$,
$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^n$.

① $a_n = \binom{r}{n}$ 에서

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\binom{r}{n+1} \Big/ \binom{r}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{r(r-1)\cdots}(r-n)}{(n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{r(r-1)\cdots(r-n+1)}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{r-n}{n+1} \right| = 1.$$

이므로, 수렴반경 1.

② 우선 $f'(x)$는

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \binom{r}{n} x^{n-1}$$

이므로

$$(1+x) f'(x) = f'(x) + x f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \binom{r}{n} x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} n \binom{r}{n} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \binom{r}{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n \binom{r}{n} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1)\binom{r}{n+1} + n\binom{r}{n} \right) x^n.$$

이다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

그러면 $(n+1)\binom{r}{n+1} + n\binom{r}{n} = r\binom{r}{n}$ 임을 보이면 된다. 이는

$$(\text{좌변}) = (n+1)\cdot\frac{r(r-1)\cdots(r-n)}{(n+1)!} + n\cdot\frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}$$

$$= \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}\left(\frac{r-n}{n+1}\cdot n+1 + n\right)$$

$$= r\cdot\frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!} = r\binom{r}{n}$$

으로 증명된다. 따라서

$$(1+x)f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left((n+1)\binom{r}{n+1} + n\binom{r}{n}\right)x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} r\binom{r}{n}x^n = r f(x)$$

이다.

③ $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{(1+x)^r} = \frac{f'(x)}{(1+x)^r} - r\frac{f(x)}{(1+x)^{r+1}} = \frac{(1+x)f'(x) - rf(x)}{(1+x)^{r+1}} = 0$ (by ②)

이므로, $\frac{f(x)}{(1+x)^r}$ 은 상수함수이다. 그런데

$$f(0) = \binom{r}{0} = 1,$$

이므로 $x=0$ 일 때의 값이 1 이다. 따라서 $\frac{f(x)}{(1+x)^r} = 1$ 이다, 즉

$$(1+x)^r = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{r}{n}x^n$$

이다.

④ $r = \frac{1}{2}$ 일 때, $\binom{1/2}{0} = 1$, $\binom{1/2}{1} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$, $\binom{1/2}{2} = \frac{1/2\cdot(-1/2)}{2!} = -\frac{1}{8}$,

$$\binom{1/2}{3} = \frac{1/2\cdot(-1/2)\cdot(-3/2)}{3!} = \frac{1}{16}$$

이므로, $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = \binom{1/2}{0} + \binom{1/2}{1}x + \binom{1/2}{2}x^2 + \binom{1/2}{3}x^3 + \cdots$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \cdots$$ 이다.

$\boxed{\text{하승유}}$(수리과학부)

$r=\frac{1}{3}$ 이면, $\binom{1/3}{0}=1$, $\binom{1/3}{1}=\frac{1/3}{1}=\frac{1}{3}$, $\binom{1/3}{2}=\frac{1/3\cdot(-2/3)}{2!}=-\frac{1}{9}$,

$$\binom{1/3}{3}=\frac{1/3\cdot(-2/3)\cdot(-5/3)}{3!}=\frac{5}{81}$$

이므로, $\sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{1/3}=\binom{1/3}{0}+\binom{1/3}{1}x+\binom{1/3}{2}x^2+\binom{1/3}{3}x^3+\cdots$

$$=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3+\cdots$$

이다.

③의 식에 x 대신 $-x$ 를 대입하면,

$$(1-x)^r=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{r}{n}x^n$$

이다. 그러면

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=(1-x)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-1/2}{n}x^n$$

이다. 그런데

$$(-1)^n\binom{-1/2}{n}=(-1)^n\cdot\frac{(-1/2)(-1/2-1)\cdots(-1/2-n+1)}{n!}$$

$$=(-1)^n\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2n-1}{2})}{n!}$$

$$=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot2\cdot2\cdot\cdots\cdot2}\cdot\frac{1}{n!}$$

$$=\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}$$

이므로, $\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^n$ 이다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

제 4절. 삼각함수와 거듭제곱 함수

1. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$ 에서,

$$\cos 0.1 = 1 - \frac{0.1^2}{2!} + \frac{0.1^4}{4!} - \frac{0.1^6}{6!} + \cdots$$

이다. 따라서

$$\left|\cos 0.1 - \left(1 - \frac{0.1^2}{2!}\right)\right| = \left|\frac{0.1^4}{4!} - \frac{0.1^6}{6!} + \frac{0.1^8}{8!} - \cdots\right|$$

$$= \underbrace{\left(\frac{0.1^4}{4!} - \frac{0.1^6}{6!}\right)}_{\geq 0} + \underbrace{\left(\frac{0.1^8}{8!} - \frac{0.1^{10}}{10!}\right)}_{\geq 0} + \cdots \qquad (\geq 0)$$

$$= \frac{0.1^4}{4!} - \underbrace{\left(\frac{0.1^6}{6!} - \frac{0.1^8}{8!}\right)}_{\geq 0} - \underbrace{\left(\frac{0.1^{10}}{10!} - \frac{0.1^{12}}{12!}\right)}_{\geq 0} - \cdots$$

$$< \frac{0.1^4}{4!} = \frac{1}{240000} < \frac{1}{10^3}.$$

이므로, 오차가 10^{-3} 이하인 근삿값을

$$\cos 0.1 \approx 1 - \frac{0.1^2}{2!} = 0.995$$

와 같이 구할 수 있다.

2. $$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots}{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots}$$

$$= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots\right)\left(1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \cdots\right) + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \cdots\right)^2 + \cdots\right)$$

$$= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \underbrace{\frac{5}{24}}_{-\frac{1}{24}+\frac{1}{2^2}}x^4 + \cdots\right)$$

$$= x + \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{-\frac{1}{6}x^3\cdot 1 + x\cdot\frac{1}{2}x^2} + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \quad \frac{1}{120}x^5\cdot 1 - \frac{1}{6}x^3\cdot\frac{1}{2}x^2 + x\cdot\frac{5}{24}x^4$$

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

3. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

$$= x - \frac{x^3}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6 \cdot (-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n-2} = x - \frac{x^3}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6 \cdot (-1)^{n-1}}{(2n+3)!} x^{2n}$$

에서, $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6 \cdot (-1)^{n-1}}{(2n+3)!} x^{2n}$ 으로 잡으면 된다.

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{24 (-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n-4}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{24(-1)^n}{(2n+4)!} x^{2n}$$

에서, $v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{24(-1)^n}{(2n+4)!} x^{2n}$ 으로 잡으면 된다.

두 함수가 $\mathbb{R}$ 전체에서 정의됨은, $\sin x$, $\cos x$의 멱급수 전개가 $\mathbb{R}$ 전체에서 정의됨에서 명백하다.

4. (1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots\right) - x}{x^3}$

$$= \lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{120}x^2 - \cdots\right) = -\frac{1}{6}.$$

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x + x^3/6}{x^5} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \cdots\right) - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{5040}x^2 + \cdots\right) = \frac{1}{120}.$$

(3) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots\right) - 1}{x^2}$

$$= \lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{24}x^2 - \cdots\right) = -\frac{1}{2}.$$

하승위 (수리과학부)

(4) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \cdots\right) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$

$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{720}x^2 + \cdots\right) = \frac{1}{24}.$

5. $\sin x + \sin \frac{3}{2}x + \sin 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{3}{2}x\right)^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2x)^{2n+1}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{2n+1} + 2^{2n+1}\right) x^{2n+1}.$

2.4.6. $\cos 1$이 유리수라고 가정하자. 그러면 어떤 자연수 n, m에 대하여

$$\cos 1 = \frac{m}{n}$$

으로 쓸 수 있다. 그러면 $n\cos 1$은 정수여야 한다. 특히 $(4n)!\cos 1$은 정수이다. 그런데

$$\begin{aligned}(4n)!\cos 1 &= (4n)!\left(1 - \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^{2n}}{(4n)!} + \frac{(-1)^{2n+1}}{(4n+2)!} + \cdots\right) \\ &= N - \left(\frac{(4n)!}{(4n+2)!} - \frac{(4n)!}{(4n+4)!} + \cdots\right) \\ &= N - \left(\frac{1}{(4n+1)(4n+2)} - \frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)} + \cdots\right)\end{aligned}$$

여기까지의 곱은 정수가 됨

정수

에서

$$\underbrace{\left(\frac{1}{(4n+1)(4n+2)} - \frac{1}{(4n+1)\ldots(4n+4)}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{1}{(4n+1)\cdots(4n+6)} - \frac{1}{(4n+1)\cdots(4n+8)}\right)}_{>0} + \cdots > 0,$$

$$\frac{1}{(4n+1)(4n+2)} - \underbrace{\left(\frac{1}{(4n+1)\cdots(4n+4)} - \frac{1}{(4n+1)\cdots(4n+6)}\right)}_{>0} - \cdots < 1$$

이므로, $N - 1 < (4n)!\cos 1 < N$이고, $(4n)!\cos 1$은 정수일 수 없다. 이는 모순이고, 따라서 $\cos 1$은 무리수이다.

하승원(수리과학부)

다음으로 $\sin 1$이 유리수라고 가정하자. 그러면 어떤 자연수 n, m에 대하여

$$\sin 1 = \frac{m}{n}$$

으로 쓸 수 있다. 그러면 $n\sin 1$은 정수이고, 특히 $(4n+1)!\cos 1$은 정수이다. 그런데

$$(4n+1)!\sin 1 = (4n+1)!\left(1 - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{2n}}{(4n+1)!} + \frac{(-1)^{2n+1}}{(4n+3)!} + \cdots\right)$$

여기까지의 곱은 정수가 됨

$$= N - \left(\frac{(4n)!}{(4n+3)!} - \frac{(4n)!}{(4n+5)!} + \cdots\right)$$

정수

$$= N - \left(\frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)} - \frac{1}{(4n+1)\cdots(4n+5)} + \cdots\right)$$

에서

$$\left(\frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)} - \frac{1}{(4n+1)\ldots(4n+5)}\right)_{>0} + \left(\frac{1}{(4n+1)\cdots(4n+7)} - \frac{1}{(4n+1)\cdots(4n+9)}\right)_{>0} + \cdots > 0,$$

$$\frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)} - \left(\frac{1}{(4n+1)\cdots(4n+5)} - \frac{1}{(4n+1)\cdots(4n+7)}\right)_{>0} - \cdots < 1$$

이므로, $N-1 < (4n+1)!\sin 1 < N$이고, $(4n+1)!\sin 1$은 정수일 수 없다. 이는 모순이고, 따라서 $\sin 1$은 무리수이다.

7. $\sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x = -\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sum (-1)^n \frac{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!}$

$= -\sin(x+\pi) = -\sum (-1)^n \frac{(x+\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$= \cos\left(x+\frac{3}{2}\pi\right) = \sum (-1)^n \frac{\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)^{2n}}{(2n)!}$

$= \sin(x+2\pi) = \sum (-1)^n \frac{(x+2\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\boxed{\text{하승우}}$(수리과학부)

8. (1) $g'(x) = 2(f(x) - a\cos x - b\sin x)(f'(x) + a\sin x - b\cos x)$
$+ 2(f'(x) + a\sin x - b\cos x)(f''(x) + a\cos x + b\sin x)$

$= 2(f(x) - a\cos x - b\sin x)(f'(x) + a\sin x - b\cos x)$
$+ 2(f'(x) + a\sin x - b\cos x)(-f(x) + a\cos x + b\sin x)$

$= 0.$

$g(0) = (f(0) - a)^2 + (f'(0) - b)^2$
$= (a-a)^2 + (b-b)^2 = 0.$

(2) (1)에 의해, $g(x) = 0$ 이다. 그런데
$0 = g(x) = \underbrace{(f(x) - a\cos x - b\sin x)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(f'(x) + a\sin x - b\cos x)^2}_{\geq 0}$

에서
$f(x) - a\cos x - b\sin x = 0$, 즉 $f(x) = a\cos x + b\sin x$
를 얻는다.

(3) y를 상수로 본다. $h(x) = \cos(x+y)$ 라 하면
$h''(x) = -\cos(x+y) = h(x)$, $h(0) = \cos y$, $h'(0) = -\sin y$

이므로, (2)에 의해
$h(x) = \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

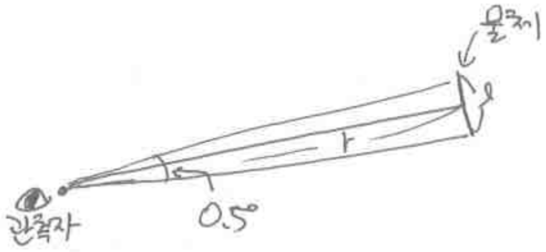
이다. 또, $\lambda(x) = \sin(x+y)$ 라 하면
$\lambda''(x) = -\sin(x+y) = -\lambda(x)$, $\lambda(0) = \sin y$, $\lambda'(0) = \cos y$

이므로, (2)에 의해
$\lambda(x) = \sin(x+y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$

이다.

하승우 (수리과학부)

9. 물체의 실제 크기를 l, 물체까지의 거리를 r, $\theta = 0.5° = \frac{\pi}{360}$ 이라 하자. 그러면 다음 그림과 같은 상황이 된다.



이때 r, l, θ 사이의 식을 세우면

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{l/2}{r}$$

이다. 그런데 $\tan\frac{\theta}{2} = \theta/2 + \frac{(\theta/2)^3}{3} + \frac{2}{15}(\theta/2)^5 + \cdots$ 이고 $\theta = \frac{\pi}{360} \ll 1$ 이므로,

$$\tan\frac{\theta}{2} \approx \theta/2$$

이다. 따라서 $\frac{\theta}{2} \approx \frac{l/2}{r}$ 이고,

$$\frac{r}{l} \approx \frac{1}{\theta} = \frac{360}{\pi} \approx 115$$

이므로 원하는 결론을 얻는다.

최승우 (수리과학부)

제 5절. 쌍곡함수

1. $f(x) = \cosh x$ 이면, $f'(x) = \sinh x$ 에서 $f''(x) = \cosh x = f(x)$.
   $f(x) = \sinh x$ 이면, $f'(x) = \cosh x$ 에서 $f''(x) = \sinh x = f(x)$.

2. 보일 것

   ① $\tanh' x = 1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$

   ② $\tanh x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + \cdots$.

① $$\tanh' x = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x}$$

$$= 1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \underline{1 - \tanh^2 x}$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} \qquad (\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1)$$

$$=: \operatorname{sech}^2 x \qquad \left(\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \text{로 정의됨}\right)$$

② $$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots}{1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots} = \frac{x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots}{1 - \left(-\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} - \cdots\right)}$$

$$= \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)\left(1 + \left(-\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + \left(-\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} - \cdots\right)^2 + \cdots\right)$$

$$= x + \frac{x^3}{3!} + \underline{\frac{2}{15}x^5} + \cdots$$

$$= \frac{x^5}{5!} + \frac{x^3}{3!} \cdot \left(-\frac{x^2}{2!}\right) + x \cdot \left(-\frac{x^4}{4!} + \frac{x^4}{(2!)^2}\right)$$

(물론, 적절한 x의 범위가 정해져야 한다.)

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

3. ① $\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$= \frac{2e^{x+y} - 2e^{-x-y}}{4}$$

$$= \sinh(x+y).$$

② $\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$= \frac{2e^{x+y} + 2e^{-x-y}}{4}$$

$$= \cosh(x+y).$$

③ $\tanh(x+y) = \dfrac{\sinh(x+y)}{\cosh(x+y)} = \dfrac{\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y}{\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y}$

분모·분자를 $\cosh x \cosh y$ 로 나눔

$$= \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$$

④ $\cosh^2 x = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} = \dfrac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$

⑤ $\sinh^2 x = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = \dfrac{1}{2}(\cosh 2x - 1)$

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

4. $f(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

$\uparrow$ 짝함수. $\uparrow$ 홀함수.

$g_+(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, $g_-(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ 라 하면

$g_+(-x) = \dfrac{f(-x)+f(x)}{2} = g_+(x)$,

$g_-(-x) = \dfrac{f(-x)-f(+x)}{2} = -\dfrac{f(x)-f(-x)}{2} = -g_-(x)$.

이므로, g_+는 짝함수, g_-는 홀함수이다.

또, $f(x) = h_+(x) + h_-(x)$ (h_+: 짝함수, h_-: 홀함수) 라 하자.

그러면 $f(x) = h_+(x) + h_-(x) = g_+(x) + g_-(x)$ 에서

$$h_+(x) - g_+(x) = g_-(x) - h_-(x)$$

임을 얻는다. 이때 두 짝함수의 차는 짝함수(①), 두 홀함수의 차는 홀함수(②) 이므로, 위 등식은 (짝함수) = (홀함수) 인데, 짝함수이면서 홀함수인 것은 0함수 뿐이므로(③), 결국

$$h_+ - g_+ = g_- - h_- = 0$$

이고, 다시 말해

$$g_+ = h_+, \quad g_- = h_-$$

이다. 즉, 함수를 짝함수와 홀함수의 합으로 나타내는 방법은 유일하다.

① e_1, e_2가 짝함수라고 하자. $E(x) = e_1(x) - e_2(x)$ 일 때

$$E(-x) = e_1(-x) - e_2(-x) = e_1(x) - e_2(x) = E(x)$$

이므로, E는 짝함수이고, 이는 두 짝함수의 차는 짝함수임을 말한다.

② o_1, o_2가 홀함수라고 하자. $O(x) = o_1(x) - o_2(x)$ 일 때

$$O(-x) = o_1(-x) - o_2(-x) = -o_1(x) + o_2(x) = -O(x)$$

이므로, O는 홀함수이고, 이는 두 홀함수의 차는 홀함수임을 말한다.

$\boxed{\text{하승우}}$(수리과학부)

③ $z(x)$가 홀함수이면서 짝함수라 하자. 그러면 임의의 x에 대해

$$z(x) \underset{\uparrow\ z\ \text{짝함수}}{=} z(-x) \underset{\uparrow\ z\ \text{홀함수}}{=} -z(x)$$

이므로, $z(x)=0$ 이다. 따라서 z는 임의의 x에 대해 $z(x)=0$인 상수함수이다.

* 거듭제곱함수로 접근하고 싶겠지만, '임의의 함수' 조건은 거듭제곱급수 전개의 존재 유무를 보장하지 못한다.

5. $f(x)$가 홀함수라 하자. 그러면 임의의 x에 대해 $f(x)=-f(-x)$ 이다.
이 등식의 양변을 x로 미분하면 $f'(x)=f'(-x)$ 이 된다.
이 등식이 임의의 x에 대해 성립하므로, f의 도함수 f'는 짝함수이다.

$f(x)$가 짝함수라 하자. 그러면 임의의 x에 대해 $f(x)=f(-x)$ 이다.
이 등식의 양변을 x로 미분하면 $f'(x)=-f'(-x)$ 이 된다.
이 등식이 임의의 x에 대해 성립하므로, f의 도함수 f'는 홀함수이다.

6. (i) $f(x)=\sum f_n x^n = \sum f_n (-1)^n x^n = f(-x)$ 에서

$$f_n = (-1)^n f_n$$

인데, n이 홀수이면 $f_n=-f_n$ 이므로 $f_n=0$ 이다.
즉, $\forall n\ \ f_{2n+1}=0$.

(ii) $f(x)=\sum f_n x^n = \sum -f_n(-1)^n x^n = -f(-x)$ 에서

$$f_n = (-1)^{n+1} f_n$$

인데, n이 짝수이면 $f_n=-f_n$ 이므로 $f_n=0$ 이다.
즉, $\forall n\ \ f_{2n}=0$.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

7. $A(x) = \dfrac{x}{\sinh x} = \dfrac{x}{x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots} = \dfrac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \cdots}$

$$= 1 - \left(\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \cdots\right) + \left(\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \cdots\right)^2 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{6} + \underbrace{\frac{7}{360}}_{= -\frac{1}{120}x^4 + \frac{x^4}{36}} x^4 + \cdots$$

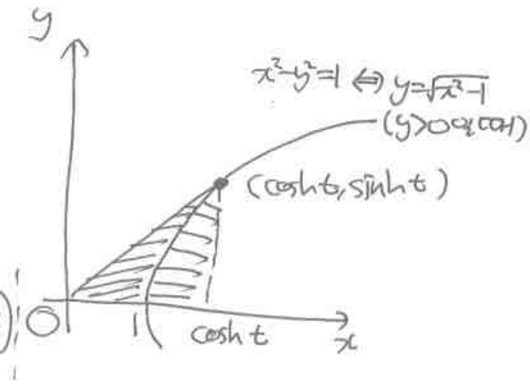
$L(x) = \dfrac{x}{\tanh x} = \dfrac{x}{x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \cdots} = \dfrac{1}{1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2}{15}x^4 + \cdots}$

$$= 1 + \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{15}x^4 + \cdots\right) + \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{15}x^4 + \cdots\right)^2 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{x^2}{3} - \underbrace{\frac{1}{45}}_{= -\frac{2}{15}x^4 + \frac{1}{9}x^4} x^4 + \cdots$$

(적당한 x의 범위가 필요할 것이다 ….)

8. (구하는 넓이) $= \dfrac{1}{2}\cosh t \sinh t - \displaystyle\int_1^{\cosh t} \sqrt{x^2-1}\, dx$



$$= \frac{1}{2}\cosh t \sinh t - \int_0^t \sinh^2 s\, ds$$

($x = \cosh s$ 로 치환 : $dx = \sinh s$)

($\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\cosh^2 s - 1} = \sinh s$)

$$= \frac{1}{2}\cosh t \sinh t - \int_0^t \frac{1}{2}(\cosh 2s - 1)\, ds$$

$$= \frac{1}{2}\cosh t \sinh t - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sinh 2s - s\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{4}\sinh 2t - \frac{1}{4}\sinh 2t + \frac{t}{2} = \frac{t}{2}.$$

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

제 6절. 역함수 정리, 역삼각함수와 거듭제곱함수

1. $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ 라 하면

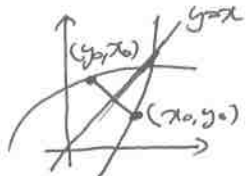
$$cxy + dy = ax + b$$

이고, 이를 x에 대하여 풀면

$$x = \frac{dy-b}{-cy+a}$$

이다. 따라서, $f^{-1}(x) = \dfrac{dx-b}{-cx+a}$ 이다.

2. $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이라는 것은,



(x_0, y_0) 이 $y=f(x)$의 그래프 위의 점

$\Leftrightarrow$

(y_0, x_0) 이 $y=g(x)$의 그래프 위의 점

이라는 것이다. $f(x)$와 그 역함수 $f^{-1}(x)$에 대하여

(x_0, y_0)가 $y=f(x)$의 그래프 위의 점

$\Leftrightarrow\ y_0 = f(x_0)$

$\Leftrightarrow\ x_0 = f^{-1}(y_0)$ (역함수의 정의)

$\Leftrightarrow\ (y_0, x_0)$ 이 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프 위의 점.

이므로 원하는 결론을 얻는다.

3. $y=f(x)$의 그래프가 점 (x_0, y_0)를 지나므로, $y_0 = f(x_0)$

$y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 (x_0, y_0)를 지나므로, $y_0 = f^{-1}(x_0)$. 그런데 이는

$x_0 = f(y_0)$ 임을 뜻한다.

즉, $f(f(x_0)) = f(y_0) = x_0$.

$\boxed{\text{하승우}}$(수리과학부)

4. $x = \arccos y$ 라 하면, $y = \cos x$ $(x \in [0, \pi])$ 이고

$\frac{dy}{dx} = -\sin x$ 이다. 따라서 역함수 정리에 의해

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$x \in [0,\pi]$ 이므로, $\sin x \geq 0$ 이고, $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$ 이다.

$-1 \leq y \leq 1$ 일 때 $0 \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin y \leq \pi$ 이다. 그러면

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin y\right) = \sin(\arcsin y) = y$$

에서, $\frac{\pi}{2} - \arcsin y = \arccos y$ 임을 얻는다.

5. $\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (p.87) 에서

($-1<x<1$ 일 때,)

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n}$$

이므로, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)} x^{2n+1} = \int_0^x \frac{d}{dt}\arcsin t \, dt$

$= \arcsin x - \arcsin 0 = \arcsin x.$

실제로는 $x=\pm 1$ 일 때도 증명을 따로 해주어야 한다. (정리 2.2.1은 수렴반경이 1인 것만 보장해 줌)
그러나 이게 쉽지 않다. pp.66-67의 log 2나 p.91의 arctan ±1에서 사용한 방법을 쓸 수도 없고, p.131의 수렴조건을 사용하기도 힘들다.
결국 '아벨 극한정리'를 사용해야 하는데, 이는 미적분학의 범위를 넘어서는 것이다(p.67 주석 17 참고)

아벨 극한정리에 관심이 있다면 다음 두 웹페이지를 참고할 것.
https://ko.wikipedia.org/wiki/아벨_극한_정리
https://proofwiki.org/wiki/Power_Series_Expansion_for_Real_Arcsine_Function

6. 보이는 명제: $f = g^{-1},\ g = f^{-1} \Leftrightarrow g\circ f = id_A,\ f\circ g = id_B$

$(\Rightarrow)$ f, g가 서로가 서로의 역함수이므로, $a \in A$일 때 $f(a) = b$이면

$g(b) = a$ 이다. 따라서 $g\circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = a$. 즉, $g\circ f = id_A$.

$f\circ g = id_B$ 도 비슷하게 확인 가능하다.

$(\Leftarrow)$ f, g가 전단사 함수임을 보인다.

f가 전사가 아니면, 모든 $a \in A$에 대하여 $b \neq f(a)$ 인 $b \in B$가 존재한다.

그런데 $f(g(b)) = id_B(b) = b$ 이므로 모순이다. 따라서 f는 전사.

(g가 전사임도 같은 방법으로 보인다.)

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

f가 단사가 아니면, $a_1 \neq a_2$ 이면서 $f(a_1) = f(a_2)$ 인 $a_1, a_2 \in A$가 존재한다. 그런데 그러면

$$a_1 = g \circ f(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = g \circ f(a_2) = a_2$$

이므로 모순이다. 따라서 f는 단사. (g가 단사임도 같은 방법으로 보인다.)

즉, f, g는 전단사 함수이다. 그런데 $(a \in A,\ b \in B)$

$b = f(a)$ 이면, $g(b) = g(f(a)) = a$,

$a = g(b)$ 이면, $f(a) = f(g(b)) = b$

이므로, f와 g는 서로의 역함수가 된다.

7. $\arctan x$는 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수 $\tan x$의 역함수 이므로,

$$y = \arctan x$$

이면 $\tan y = x$ 이고, 즉 $\tan(\arctan x) = x$ 이다.

또, $x \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 이면서 x가 $\tan x$ 의 정의역에 포함된다고 하자.

그러면 0이 아닌 어떤 정수 n에 대해 $x = n\pi + a$ $\left(a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ 이다.

여기

$$\begin{aligned} \arctan(\tan x) &= \arctan(\tan(n\pi + a)) \\ &= \arctan(\tan a) \\ &= a \neq n\pi + a = x \end{aligned}$$

이므로, 등식 $\arctan(\tan x) = x$가 성립하는 최대 구간은

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

이다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

8. arcsin x, arccos x 는, 각각 '특정 구간에서 정의된 함수 $\sin x$, $\cos x$' 의 역함수 이므로,

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad \cos(\arccos x) = x$$

이다.

등식 $\arcsin(\sin x) = x$ 는 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 구간에서는 분명히 성립한다.
그런데 arcsin 함수의 치역이 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 이므로, 위 등식의 우변인 x 는 arcsin 함수의 치역 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$를 벗어날 수 없다. 따라서 등식이 성립하는 최대 구간은 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 이다.

등식 $\arccos(\cos x) = x$ 는 $[0, \pi]$ 구간에서는 분명히 성립한다.
그런데, arccos 함수의 치역이 $[0, \pi]$ 이므로, 위 등식의 우변인 x는 arccos 함수의 치역 $[0, \pi]$ 를 벗어날 수 없다. 따라서 등식이 성립하는 최대 구간은 $[0, \pi]$ 이다.

9. $y = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ 는 $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$ 과 같이 쓸 수 있다.
이 식을 e^x에 대한 이차방정식으로 보고, 해를 구하면

$$e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2+1}$$

인데, $e^x > 0$ 이므로 $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$ 이다. 즉, $y = \sinh x$ 의 역함수는

$$x = \sinh^{-1} y = \log(y + \sqrt{y^2+1})$$

이다. 또, $\dfrac{dy}{dx} = \cosh x$ 이므로,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cosh x} \underset{\uparrow \atop \cosh^2 - \sinh^2 = 1}{=} \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} = \frac{d \sinh^{-1} y}{dy}$$

이다.

하승우 (수리과학부)

10. $y = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ 는 $e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$ 과 같이 쓸 수 있다.

이 식을 e^x에 대한 이차방정식으로 보고 해를 구하면

$$e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2-4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2-1}$$

이다. 이때 $x \to \infty$ 이면 $y \to \infty$ 이어야 하는데, $x \to \infty$ 일 때

$e^x \to \infty$ 이고 $y + \sqrt{y^2-1} \to \infty$ 이지만 $y - \sqrt{y^2-1} = \dfrac{1}{y+\sqrt{y^2-1}} \to 0$ 이므로

$$e^x = y + \sqrt{y^2-1}.$$

또, 이 식은 $y^2-1 \geq 0$, 즉 $|y| \geq 1$ 일 때 정의되는데, $y \leq -1$ 이면

$$e^x = y + \sqrt{y^2-1} < 0$$

이고 이는 불가능하다. 따라서 식은 $y \geq 1$ 일 때 정의된다. 따라서

$$x = \cosh^{-1} y = \log\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) \qquad (y \geq 1)$$

또, $\dfrac{dy}{dx} = \sinh x$ 이므로,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} = \frac{d\cosh^{-1} y}{dy}$$

이다.

11. $x > 1$ 일 때

$$\cosh(\cosh^{-1} x) = x$$

이므로,

$$\sinh(\cosh^{-1} x) = \sqrt{\cosh^2(\cosh^{-1} x) - 1} = \sqrt{x^2-1}$$

또,

$$\sinh(\sinh^{-1} y) = y$$

이므로,

$$\cosh(\sinh^{-1} y) = \sqrt{1 + \sinh^2(\sinh^{-1} y)} = \sqrt{1+y^2}$$

하승우

12. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \arctan x}{x^2 \log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\cdots\right)-\left(x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots\right)}{x^2\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots\right)}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 - \frac{23}{120}x^5 + \cdots}{x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^5 - \cdots}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6} - \frac{23}{120}x^2 + \cdots}{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \cdots} = \frac{1}{6}.$$

13. (1) $x \neq 0$ 일 때 $f(x) = \dfrac{x}{e^x-1}$ 이고, $f(x)$는 연속함수이므로

$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x-1} = 1.$

(2) 3절 연습문제 3에 따르면,

$f(x) = \dfrac{x}{e^x-1} = B(x) = 1 - \dfrac{x}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{B_n}{(2n)!} x^{2n}$

이다. 즉, $f(x)$는 거듭제곱급수 함수이고,

$f(x) = \sum \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

에서 1차항을 비교하면 $f'(0) = -\frac{1}{2}$ 임을 얻는다.

(3) $f'(x) = \dfrac{(1-x)e^x-1}{(e^x-1)^2}$ 이다.

$x>0$ 이면, $(\underbrace{(1-x)e^x-1}_{\text{분자}})' = -xe^x < 0$ 이고 $(1-0)e^0-1 = 0$ 이므로

$(1-x)e^x-1 < 0$ 임을 안다. 또, $(e^x-1)^2 > 0$ 이므로, $f'(x) < 0$ 이다.

$x<0$ 이면, $y=-x$ 이라 할 때 $y>0$ 이고

$(1-x)e^x-1 = \dfrac{1+y}{e^y} - 1 < 0 \quad \left(e^y = 1+y+\frac{y^2}{2}+\cdots > 1+y \quad (y>0)\right)$

이므로 $f'(x) < 0$ 이다.

즉, $f'(x) < 0$ 이고, $f(x)$는 감소함수이므로 일대일함수 이다.

(4) $f(0)=1$ 이므로

$$g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = -2.$$

14. $f'(x) = 3 - \sin x > 0$ 이므로 $f(x)$는 증가함수, 즉 일대일함수이다.
또, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ 이므로 $f(x)$의 치역은 모든 실수의 집합이다. 따라서 f의 역함수 g가 존재하며, 그 정의역은 모든 실수의 집합이다. 즉, 모든 실수 y에 대하여 역함수 $g(y)$가 정의된다.
이때

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

임은 이미 알고 있다. 그런데 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 미분가능하므로, $g'(y)$ 또한 미분 가능하고

$$g''(y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{f'(x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)\cdot\frac{dx}{dy}$$

$$= -\frac{f''(x)}{f'(x)^2}\cdot\frac{1}{f'(x)} = -\frac{f''(x)}{f'(x)^3}.$$

한편, $f(0)=1$ 이므로

$$g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}, \quad g''(1) = -\frac{-1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

$$(\, f''(x) = -\cos x \,)$$

* $f(x)$의 역함수 $g(y)$의 이계도함수, 삼계도함수 등을 구하는 방법을 알아두자.
(연습문제 15 참고)

하승우 (수리과학부)

15. ① 우선 역함수 $x=g(y)$ 의 존재성부터 알아보자.

f가 2번 (이상) 미분가능하면, f'는 연속이다. 그런데 $f'(x)\neq 0$ 이면, '모든 실수 x에 대해 $f'(x)>0$' 이거나, '모든 실수 x에 대해 $f'(x)<0$' 이다. 어느 경우든 f는 일대일 함수 (증가함수이거나 감소함수가 됨) 이고, 역함수 $g=f^{-1}$ 이 존재한다.

② 역함수 정리에 의해 $x=g(y)$는 미분가능하다. 또,

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

에서 $f'(x)\neq 0$ 또한 미분가능하므로, $g'(y)$는 미분가능하다.
(f'는 x에 대해 미분가능, x는 y에 대해 미분가능)

이때

$$g''(y)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)\cdot\frac{dx}{dy}=-\frac{f''(x)}{f'(x)^2}\cdot\frac{1}{f'(x)}=-\frac{f''(x)}{f'(x)^3}.$$

③ $f(x)$가 n번 미분가능하면, $f''(x)$도 미분가능하므로,

$$g''(y)=-\frac{f''(x)}{f'(x)^3}$$

도 미분가능하다. 따라서

$$g'''(y)=\frac{d}{dx}\left(-\frac{f''(x)}{f'(x)^3}\right)\cdot\frac{dx}{dy}$$

$$=-\frac{f'''(x)\cdot f'(x)^3-3f'(x)^2\cdot f''(x)\cdot f''(x)}{f'(x)^6}\cdot\frac{1}{f'(x)}$$

$$=\frac{3f''(x)^2-f'''(x)f'(x)}{f'(x)^5}.$$

④ 귀납법의 가정으로, f가 $n-1$번 미분가능할 때 g도 $n-1$번 미분가능하며

$$g^{(n-1)}(y)=\frac{F_{n-1}(f(x),f'(x),\cdots,f^{(n-1)}(x))}{f'(x)^{a(n-1)}}\quad(a(n)\text{: 정수값 가지는 }n\text{의 함수})$$

이라 하자. ($F_{n-1}(f,f',\cdots,f^{(n-1)})$: $f,f',\cdots,f^{(n-1)}$의 다항식)

하승우

f가 n번 미분가능하면, 다항식 $F_{n-1}(f, f', \cdots, f^{(n-1)})$과 $(f')^{a(n-1)}$도 미분가능하고, 따라서 $g^{(n-1)}$도 미분가능하다. 그리고

$$g^{(n)}(y) = \frac{d}{dx}\frac{F_{n-1}(f, f', \cdots, f^{(n-1)})}{(f')^{a(n-1)}} \cdot \frac{dx}{dy}$$

$$= \frac{(f')^{a(n-1)} \cdot \frac{d}{dx}F_{n-1}(f, f', \cdots, f^{(n-1)}) - a(n-1)(f')^{a(n-1)-1} \cdot f'' \cdot F_{n-1}(f, f', \cdots, f^{(n-1)})}{(f')^{2a(n-1)} \times f'}$$

에서 분자는 $f, f', \cdots, f^{(n)}$의 다항식이고 분모는 $(f')^{2a(n-1)+1}$이므로, 이를

$$g^{(n)}(y) = \frac{F_n(f, f', \cdots, f^{(n)})}{(f')^{a(n)}}$$

으로 쓸 수 있다. 따라서 귀납적으로 모든 n에 대해 이 사실이 성립한다.

16. $f'(x) = e^x + \frac{1}{x} > 0$ ($x>0$일 때) 이므로, f는 역함수 g를 가진다.
또, f는 무한 번 미분 가능하므로, g 또한 무한 번 미분 가능하다.

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{x}, \quad f''(x) = e^x - \frac{1}{x^2}$$

이므로,

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \qquad g''(y) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)\cdot\frac{dx}{dy} = -\frac{f''(x)}{f'(x)^3}$$

에서 $f(1) = e$ 이므로

$$g'(e) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{e+1}, \quad g''(e) = -\frac{e-1}{(e+1)^3}.$$

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

17. 우선, 금년 생산량 $\overset{y=}{40}$ 과 $y=2x^3+3x^2+4x+4$ 에서 $x=2$ 이다.

이때 내년에 추가 사용해야 하는 비료의 양은

생산량 변화량

$$\Delta x = \left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=40} \cdot \Delta y$$

$y=40$일 때 생산량 변화량 대 비료 사용량의 비 (변화량)

이다. 이때 $\Delta y = 40 \times 1\% = 0.4$,

$$\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=40} = \frac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2}} = \frac{1}{\left.6x^2+6x+4\right|_{x=2}} = \frac{1}{40}$$

이므로, 비료 사용량의 변화량은

$$\Delta x = \left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=40} \cdot \Delta y = 0.01$$

이다. 따라서 비료를 $\frac{0.01}{2} = 0.5\%$ 더 사용해야 한다.

18. $x \neq 0$ 일 때 $f(x) = \frac{\arcsin 2x}{x}$ 이므로,

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x - \arcsin 0}{2x} \cdot 2$$

$$= \left.\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\right|_{x=0} = 2. \qquad \left(\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

19. 옳은 것

① $\tanh^{-1} y = \frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y} = y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \cdots$

② $\frac{d}{dy}\tanh^{-1} y = \frac{1}{1-y^2}$

③ $\frac{d}{dx}\tanh x = 1-\tanh^2 x$ 이용하여 ②.

하승우 (수리과학부)

①-1 $y=\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 이면 $ye^x+ye^{-x}=e^x-e^{-x}$ 에서

$ye^{2x}+y=e^{2x}-1$ 이고, 이로부터 $e^{2x}=\frac{1+y}{1-y}$ 를 얻는다.

$y=\tanh x$ 이면 $|y|<1$ 이므로, $\frac{1+y}{1-y}>0$ 이고,

$$x=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)=:\tanh^{-1}y$$

이 된다.

② 이때

$$\frac{d}{dy}(\tanh^{-1}y)=\frac{d}{dy}\,\frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1-y}\right)=\frac{1}{1-y^2}$$

이다.

①-2 그러면

$$\frac{d}{dy}(\tanh^{-1}y)=\frac{1}{1-y^2}=\sum y^{2n}$$

에서

$$\tanh^{-1}y-0=\sum\frac{1}{(2n+1)}y^{2n+1}=y+\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}+\cdots$$

이다.

③ $y=\tanh x$ 이면 $\frac{dy}{dx}=1-\tanh^2 x$ 이다. 따라서

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{1-\tanh^2 x}=\frac{1}{1-y^2}.$$

20. $g(c)$는 식 $g(c)^3-g(c)=c$ 를 만족시킨다. 이는 곧 함수 $g(c)$가 함수 $c=x^3-x$ 의 역함수임을 말한다. $x=2$ 일 때 $c=6$이고

$$c'=3x^2-1,\qquad c''=6x$$

이므로,

$$g'(6)=\frac{1}{c'|_{x=2}}=\frac{1}{11},\qquad g''(6)=-\frac{c''|_{x=2}}{(c'|_{x=2})^3}=-\frac{12}{1331}$$

(교재 해답에 $g''(6)=-\frac{12}{121}$라 되어 있다면, 틀린 것이다.)

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

21. 지구의 반지름을 r 이라 하면, 대략 다음 식이 성립한다.

$$(h+r)^2 = r^2 + d^2$$

이 식을 r에 대해 풀면

$$r = -\frac{h}{2} + \frac{d^2}{2h}$$

인데, h는 r에 비해 매우 작으므로 무시할 수 있고, 따라서

$$r \approx \frac{d^2}{2h}$$

이다.

$\boxed{\text{하승영}}$ (수리과학부)

3. 테일러 전개

제 2절. 로피탈의 정리

1. (1) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\tan x}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\sec^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\tan x \sec^2 x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} -2\sec^3 x = -2.$

(4) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}}{\cos x} = 2.$

(5) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\frac{1}{1+x}} = 1$

(6) $\log(e^x+x)^{1/x} = \frac{\log(e^x+x)}{x}$ 이고

$\lim_{x\to 0} \log(e^x+x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(e^x+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{e^x+x}\cdot(e^x+1)}{1} = 2$

에서, $\lim_{x\to 0} (e^x+x)^{1/x} = e^2.$

(7) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} = 0.$

(8) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\tan x\sec^2 x+\sin x}{6x}$

$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{3x}\cdot\sec^2 x + \frac{\sin x}{6x}\right) = \frac{1}{3}+\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

허승우

$\frac{+\infty}{+\infty}$ (사실은 하나이다. 열보로 안함)

(9) $\displaystyle\lim_{x\searrow 0} \sin x \log x = -\lim_{x\searrow 0} \frac{-\log x}{\frac{1}{\sin x}} = -\lim_{x\searrow 0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\searrow 0} \frac{\sin^2 x}{x\cos x}$

$$= -\lim_{x\searrow 0} \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x} = -1\cdot 0 = 0.$$

(10) $\displaystyle\lim_{x\searrow 0} \sqrt{x}\log x = \lim_{x\searrow 0} \frac{\log x}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x\searrow 0} \frac{+\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2x\sqrt{x}}} = -\lim_{x\searrow 0} 2\sqrt{x} = 0.$

(11) $\displaystyle\lim_{x\searrow 0} x^a \log x = \lim_{x\searrow 0} \frac{\log x}{x^{-a}} = \lim_{x\searrow 0} \frac{1/x}{-ax^{-a-1}} = \lim_{x\searrow 0} -\frac{1}{a}\cdot x^a = 0.$

(12) $\displaystyle\lim_{x\searrow 0} \log x^{x^x} = \lim_{x\searrow 0} x^x \log x = 1\cdot(-\infty) = -\infty$ (p. 115)

이므로

$\displaystyle\lim_{x\searrow 0} x^{x^x} (= e^{-\infty}) = 0.$

(13) $\displaystyle\lim_{x\searrow 0} \log x^{\sin x} = \lim_{x\searrow 0} \sin x \log x = 0$ ((9)) 이므로

$\displaystyle\lim_{x\searrow 0} x^{\sin x} = e^0 = 1.$

(14) $\sqrt{x} = y$ 로 치환하면, $x\searrow 0$ 일 때 $y\searrow 0$ 이다.

$\displaystyle(\text{준식}) = \lim_{y\searrow 0} \frac{y}{y+\sin y} = \lim_{y\searrow 0} \frac{1}{1+\cos y} = \frac{1}{2}.$

2. $\displaystyle 2\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-f'(x)h}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} = f''(x)$

h로 미분 f''의 정의.

* $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} \underset{\text{로피탈}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f''(x+h)}{1} \overset{?}{=} f''(x)$ 와 같이 계산해서는 안 된다.

f''가 연속인지 알 수 없기 때문이다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

3. 문제 2에 의하여,

$$f''(a) = 2\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - 0\cdot h}{h^2}$$

이다. 그러면, $h\to 0$ 일 때 $h^2>0$ 이고, $|h|<1$ 일 때 (h가 작을 때)

$f''(a)>0$ 이면 $f(a+h)-f(a)>0$, 즉 $f(a+h)>f(a)$ 에서

a는 극소점

$f''(a)<0$ 이면 $f(a+h)-f(a)<0$, 즉 $f(a+h)<f(a)$ 에서

a는 극대점

4. $y=\frac{1}{x}$ 로 치환하면, $x\to\infty$ 일 때 $y\searrow 0$ 이다. 그러면

$$l := \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{y\searrow 0} \frac{f'(\frac{1}{y})}{g'(\frac{1}{y})}$$

이다. 이때 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ 또는 ∞ 이면, 각각 $\lim_{y\searrow 0} f(1/y) = \lim_{y\searrow 0} g(1/y) = 0$ 또는 ∞이고,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\searrow 0} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{로피탈 사용} \\ \text{가능}}}{=} \lim_{y\searrow 0} \frac{f'(1/y)\cdot(-\frac{1}{y^2})}{g'(1/y)\cdot(-\frac{1}{y^2})} = \lim_{y\searrow 0} \frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = l$$

이므로, 원하는 결론을 얻는다.

5. $\lim_{n\to\infty} \log(1+n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/1+n}{1} = 0$ 이므로,

$\lim_{n\to\infty} (1+n)^{1/n} = e^0 = 1.$

6. $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$, $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$

다항식 $p(x)$가 n차식이면, n차항의 계수를 A라 할 때,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{p'(x)}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!\,A}{e^x} = 0.$$

$\boxed{\text{하승유}}$(수리과학부)

7. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\frac{1}{2}x^{-1/2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{\sqrt[n]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\frac{1}{n}x^{1/n-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{x}} = 0.$$

8. (1) $a=0$ 이면,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{b}{2^n} = 0.$ ($a=b=0$ 이면 당연히 0)

마찬가지로, $b=0$ 일 때도 극한값이 0이다. $a, b>0$ 이면

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} n\log\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\log\left(\frac{a^t+b^t}{2}\right)}{t} \quad (\tfrac{1}{n}=t \text{ 치환})$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2}(a^t\log a + b^t \log b)}{\frac{a^t+b^t}{2}} \Big/ 1 = \frac{1}{2}\log ab$$

이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n = e^{\frac{1}{2}\log ab} = \sqrt{ab}.$ 즉, 언제나 $\sqrt{ab}$.

(2) $a=b=c=0$ 이면 당연히 0이고, a, b, c 중 둘이 0이면 (1)에서 본 것과 같이 0이다. a, b, c 중 하나가 0이면 그냥 $a=0$ 이라 가정하여

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b^{1/n}+c^{1/n}}{3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b^{1/n}+c^{1/n}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = \sqrt{bc}\cdot 0 = 0.$$

이제, $a, b, c > 0$ 이면,

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}+c^{1/n}}{3}\right)^n = \lim_{n\to\infty} n\log\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}+c^{1/n}}{3}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\log\left(\frac{a^t+b^t+c^t}{3}\right)}{t} \quad (\tfrac{1}{n}=t \text{ 치환})$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1}{3}(a^t \log a + b^t \log b + c^t \log c)}{\frac{a^t + b^t + c^t}{3}} \Big/ 1$$

$$= \frac{1}{3} \log abc$$

이므로, $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n} + c^{1/n}}{3} \right)^n = e^{\frac{1}{3} \log abc} = \sqrt[3]{abc}.$

즉, 언제나 극한값은 $\sqrt[3]{abc}.$

9. $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k}{h^n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{로피탈} \\ h\text{로 미분}}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} h^{k-1}}{n h^{n-1}}$$

$$= \cdots$$

$$\underset{(\text{로피탈 } n-1\text{번})}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - \frac{f^{(n-1)}(x)}{0!} h^0}{n!\, h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{n!\, h} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)$$

* $f^{(n)}(x)$의 연속성은 보장할 수 없기 때문에, 로피탈을 n번 써서

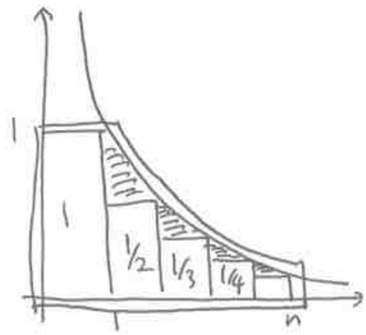
$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{(n)}(x+h)}{n!} = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$$

와 같이 계산해서는 안 된다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

10. 우선, $0 < 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} < 1+\log n$ 임을 확인하자.

$$0 < 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} < 1+\int_1^n \frac{1}{x}\,dx = 1+\log n.$$



(1) $0 < \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) < \frac{1+\log 2n}{\sqrt{n}}$ 이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\log 2n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2/2n}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}} = 0$$

이므로, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) = 0.$

(2) $0 < \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{3n}\right)^2 < \frac{(1+\log 3n)^2}{n}$ 이고,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{(1+\log 3n)^2}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\log 3n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3/3n}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}} = 0$$

이므로, $\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\log 3n)^2}{n} = 0^2 = 0$ 이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{3n}\right)^2 = 0.$$

(3) $0 < \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{4n}\right)^5 < \frac{(1+\log 4n)^5}{n}$ 이고,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[5]{\frac{(1+\log 4n)^5}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\log 4n}{n^{1/5}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4/4n}{\frac{1}{5}\cdot n^{-\frac{4}{5}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{5}{\sqrt[5]{n}} = 0$$

이므로, $\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\log 4n)^5}{n} = 0^5 = 0$ 이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{4n}\right)^5 = 0.$$

하승우 (수리과학부)

11. $f'(x) = 1 - \dfrac{e^{1/x}}{x^2(e^{1/x}-1)^2} > 0$ 이므로 $f(x)$는 정의역 $x \neq 0$ 의 ← 다음 페이지에서 설명

모든 점에서 증가함수이다. 또,

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0}\left(x - \frac{1}{e^{1/x}-1}\right) = 0,$$

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0}\left(x - \frac{1}{e^{1/x}-1}\right) = -\frac{1}{-1} = 1$$

이다. 그러면 $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ 를 구해 보자.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(x - \frac{1}{e^{1/x}-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x(e^{1/x}-1)-1}{e^{1/x}-1}$$

에서, $x \to \pm\infty$ 이면 $e^{1/x}-1 \to 0$ 이고,

$$x(e^{1/x}-1)-1 = x\left(\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+\cdots\right)-1\right)-1$$

$$= x\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+\cdots\right)-1$$

$$= \frac{1}{2x}+\frac{1}{6x^2}+\cdots \to 0$$

이므로, 로피탈 정리를 사용할 수 있다. 그러면

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x(e^{1/x}-1)-1}{e^{1/x}-1} = \lim_{t\searrow 0}\frac{\frac{1}{t}(e^t-1)-1}{e^t-1} \qquad \left(\frac{1}{x}=t,\ 치환\right)$$

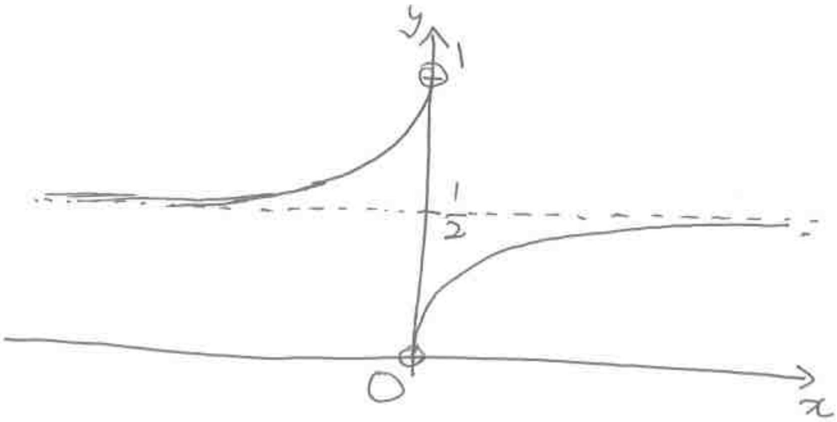
$$\underset{\text{로피탈}}{=} \lim_{t\searrow 0}\frac{-\frac{1}{t^2}(e^t-1)+\frac{1}{t}e^t}{e^t} = \lim_{t\searrow 0}\frac{-e^t+1+te^t}{t^2e^t}$$

$$\underset{\text{로피탈}}{=} \lim_{t\searrow 0}\frac{-e^t+e^t+te^t}{2te^t+t^2e^t} = \lim_{t\searrow 0}\frac{te^t}{(t^2+2t)e^t} = \lim_{t\searrow 0}\frac{1}{t+2} = \frac{1}{2}.$$

또, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\dfrac{x(e^{1/x}-1)-1}{e^{1/x}-1} = \lim_{t\nearrow 0}\dfrac{\frac{1}{t}(e^t-1)-1}{e^t-1} = \dfrac{1}{2}$ (위와 계산 방법이 같음)

(함수의 그래프는 다음 페이지에 있다.)

하승우(수리과학부)



$f'(x) > 0$임을 설명하기가 다소 번거로운 것 같은데 어쩔 수 없다. (더 편리한 방법이 있으면 그 방법을 사용하시오.) 우선

$$f'(x) = 1 - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)^2}$$

임을 계산할 수 있다. (사족으로, 왜 $f'(x) > 0$ 이어야 하는가? 에 대한 답은 그랬으면 좋겠다고 생각하기 때문이다. 만약 부호가 일정하지 않으면 극점이 있다는 것이고, 그러면 문제가 골치 아파질 것이다. 그래서 우선 부호가 일정하다는 것에 걸어 본다. 만약 베팅이 실패하면 그땐 어쩔 수 없다.) 이때 $x = \frac{1}{t}$로 치환하면,

$$f'(x) = 1 - \frac{t^2e^t}{(e^t - 1)^2}$$

가 된다. 그러면 $x > 0$, 곧 $t > 0$일 때

$$\begin{aligned} & f'(x) = 1 - \frac{t^2e^t}{(e^t - 1)^2} > 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{t^2e^t}{(e^t - 1)^2} < 1 \\ \Leftrightarrow\ & t^2e^t < (e^t - 1)^2 \\ \Leftrightarrow\ & \left|te^{\frac{t}{2}}\right| < |e^t - 1| \\ \Leftrightarrow\ & te^{\frac{t}{2}} < e^t - 1. \end{aligned}$$

이때 마지막 식의 양변의 테일러 전개

$$te^{\frac{t}{2}} = t\left(1 + \frac{t}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{t}{2}\right)^3 + \cdots\right) =: t\sum a_k t^k,$$

$$e^t - 1 = t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots = t\left(1 + \frac{1}{2!}t + \frac{1}{3!}t^2 + \cdots\right) =: t\sum b_k t^k$$

는 $t > 0$에서 양항급수이다. t^{k+1}의 계수 a_k, b_k를 비교하면,

$$a_k = \frac{1}{2^k k!}, \qquad b_k = \frac{1}{(k+1)!}$$

에서 $a_k \le b_k$ 이고 등호는 $k = 0, 1$일 때만 성립하므로($\because a_k \le b_k \Leftrightarrow \frac{1}{2^k k!} \le \frac{1}{(k+1)!} \Leftrightarrow k + 1 \le 2^k$), $t > 0$일 때 $te^{\frac{t}{2}} < e^t - 1$ 이다. 한편 $x < 0$, 곧 $t < 0$일 때에는,

$$f'(x) > 0 \ \Leftrightarrow\ \left|te^{\frac{t}{2}}\right| < |e^t - 1| \ \Leftrightarrow\ -te^{\frac{t}{2}} < 1 - e^t.$$

$t = -s$라 하면 $s > 0$ 이고,

$$\begin{aligned} & -te^{\frac{t}{2}} < 1 - e^t \\ \Leftrightarrow\ & se^{-\frac{s}{2}} < 1 - e^{-s} \\ \Leftrightarrow\ & se^{\frac{s}{2}} < e^s - 1 \end{aligned}$$

이므로 위에서 보인 바와 같이 이는 참이다. 따라서 $f'(x) > 0$이다.

$\boxed{\text{하습우}}$(수리과학부)

제 3절. 무한소와 근사다항식

1. $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 $o(x^k)$ 인 것은, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^n} = 0$ 인 것이다.

그러면 $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+g(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} + \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^n} = 0$ 이므로

$f(x)+g(x) = o(x^k)$. 또, $\lim_{x\to 0} \frac{cf(x)}{x^k} = c\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^k} = 0$ 이므로

$cf(x) = o(x^k)$.

2. $l_1(x)$, $l_2(x)$ 가 일차 다항함수이므로, $l_1(x) - l_2(x) = ax+b$ 와 같이 쓸 수 있다. 이때 $l_1(x) - l_2(x) = o(x)$ 이므로,

$$l_1(0) - l_2(0) = a\cdot 0 + b = 0, \qquad (\text{정리 } 3.2.2)$$
$$l_1'(0) - l_2'(0) = a = 0$$

이고, $a=b=0$ 임을 얻는다. 즉, $l_1(x) - l_2(x) = 0$ 이고, $l_1(x) = l_2(x)$ 이다.

3. $p_1(x)$, $p_2(x)$ 가 n차 다항함수이므로, $p_1(x) - p_2(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ 와 같이 쓸 수 있다. 이때 $p_1(x) - p_2(x) = o(x^n)$ 이므로,

$$p_1(0) - p_2(0) = a_0 = 0,$$
$$p_1'(0) - p_2'(0) = 1\cdot a_1 = 0,$$
$$p_1''(0) - p_2''(0) = 2\cdot a_2 = 0,$$
$$\vdots$$
$$p_1^{(n)}(0) - p_2^{(n)}(0) = n!\, a_n = 0$$

이고, $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$ 이 된다. 즉, $p_1(x) - p_2(x) = 0$ 이고 $p_1(x) = p_2(x)$ 이다.

$\boxed{\text{하승무}}$(수리과학부)

4. ※ 근사다항식을 구하는 방법에는 두 가지가 있다.
하나는 $f(0), f'(0), \cdots, f^{(n)}(0)$ 을 직접 계산하는 방법 ((4), (6) 등),
하나는 이미 알고 있는 식을 이용하는 방법 (나머지) 이다.
두 방법 모두 근사다항식의 유일성을 이용해야 하므로, 답안지에서 빼먹으면 안 된다.

(1) $f(x) = e^x \sin x$

$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \quad \cdots ①$$

$$= x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

에서, 근사다항식의 유일성에 의하여
$T_3 f(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3$ 이다.

※ 엄밀하게는,

$$① = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^5 - \frac{1}{36}x^6 + \left(1 + 2x + \frac{x^2}{2}\right)o(x^3)$$

에서, $-\frac{1}{12}x^5 - \frac{1}{36}x^6 + \left(1 + 2x + \frac{x^2}{2}\right)o(x^3) = o(x^3)$ 임을 보여야 한다.
이는 물론

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{12}x^5 - \frac{1}{36}x^6 + \left(1 + 2x + \frac{x^2}{2}\right)o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{-\frac{x^2}{12}}_{0} \underbrace{-\frac{x^3}{36}}_{0} + \underbrace{\left(1 + 2x + \frac{x^2}{2}\right)}_{1}\underbrace{\frac{o(x^3)}{x^3}}_{0}\right)$$

$$= 0$$

이므로 참이다. 그러나 굳이 이것을 다 쓸 필요 없이, 위 답안만큼만 써도 된다. $o(x^3)$ 이란 4차 이상의 항을 표시하는 것으로 이해할 수 있는데, 3차 이하의 항 $x + x^2 + \frac{1}{3}x^3$ 을 제외하면 모두 4차 이상이기 때문이다.

하승우 (수리과학부)

(2) $f(x) = x\log(1+x) = x\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)$

$= x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$

에서, 근사다항식의 유일성에 의해

$T_3 f(x) = x^2 - \frac{x^3}{2}.$

(3) $f(x) = e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \cdots$

$= 1 - x^2 + o(x^3).$

에서, 근사다항식의 유일성에 의해

$T_3 f(x) = 1 - x^2.$

(4) $f(x) = \sin e^x.$

$f'(x) = e^x \cos e^x$

$f''(x) = e^x \cos e^x - e^{2x} \sin e^x$

$f'''(x) = e^x \cos e^x - 3e^{2x}\sin e^x - e^{3x}\cos e^x$

$f(0) = \sin 1$

$f'(0) = \cos 1$

$f''(0) = \cos 1 - \sin 1$

$f'''(0) = -3\sin 1$

에서,

$T_3 f(x) = \sin 1 + (\cos 1)x + \frac{(\cos 1 - \sin 1)}{2}x^2 - \frac{(\sin 1)}{2}x^3.$

(5) $f(x) = x - \cos x$

$= x - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

에서, 근사다항식의 유일성에 의해

$T_3 f(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2}.$

하승우 (수리과학부)

(6) $f(x) = 2^x$ $\quad f(0) = 1$

$f'(x) = (\log 2)\, 2^x$ $\quad f'(0) = \log 2$

$f''(x) = (\log 2)^2\, 2^x$ $\quad f''(0) = (\log 2)^2$

$f'''(x) = (\log 2)^3\, 2^x$ $\quad f'''(0) = (\log 2)^3$

에서,

$$T_3 f(x) = 1 + (\log 2)x + \frac{(\log 2)^2}{2}x^2 + \frac{(\log 2)^3}{6}x^3.$$

(7) $f(x) = \sqrt{1+x} = \binom{1/2}{0} + \binom{1/2}{1}x + \binom{1/2}{2}x^2 + \binom{1/2}{3}x^3 + o(x^3)$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

에서 근사다항식의 유일성에 의하여

$$T_3 f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3.$$

* 이항전개가 잘 기억나지 않으면,

$f(x) = (1+x)^{1/2}$ $\quad f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$ $\quad f'(0) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}$ $\quad f''(0) = -\frac{1}{4}$

$f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}$ $\quad f'''(0) = \frac{3}{8}$

에서 $T_3 f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1/4}{2}x^2 + \frac{3/8}{6}x^3 = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{16}x^3$

과 같이 계산해도 물론 괜찮다.

(8) $f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$

에서, 근사다항식의 유일성에 의하여

$$T_3 f(x) = 1 - x + x^2 - x^3.$$

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

5. (1) $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = 1 + o(x)$,

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = 1 + o(x)$

이므로,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1+o(x)) - (1+o(x))}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{o(x)}{x} = 0$$

이다. 즉, $\cosh x - \cos x = o(x)$ 이고, $\cosh x = \cos x + o(x)$ 이다.

* 절대로 $(1+o(x)) - (1+o(x)) = 0$ 이 아니다.

(2) $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = x + o(x^2)$,

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = x + o(x^2)$

이므로,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sinh x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(x+o(x^2)) - (x+o(x^2))}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0$$

이다. 즉, $\sinh x - \sin x = o(x^2)$ 이고, $\sinh x = \sin x + o(x^2)$ 이다.

(3) $\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \cdots = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$

$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$

이므로,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tanh x - \arctan x}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)}{x^4}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{o(x^4)}{x^4} = 0$$

이다. 즉, $\tanh x - \arctan x = o(x^4)$ 이고, $\tanh x = \arctan x + o(x^4)$ 이다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

6. 우선 $\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$ 임을 안다 ($f(x) = o(x^n)$ 이므로). 그러면

미적분학의 기본정리 및 로피탈 정리에 의해,

$$\lim_{x\to0} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^{n+1}} = \lim_{x\to0} \frac{f(x)}{(n+1)x^n} = 0$$

이므로, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = o(x^{n+1})$ 이다.

7. n번 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $o(x^n)$ 이면,

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$$

이다. 이는 곧

$$f'(0) = (f')'(0) = (f')''(0) = \cdots = (f')^{(n-1)}(0) = 0$$

임을 뜻한다. 따라서 $f'(x) = o(x^{n-1})$ 이다.

8. 한 모서리의 길이가 x인 정육면체의 부피는 $V(x) = x^3$. 이다. 이제 모서리의 길이가 1% 증가하면

$$V(1.01x) = (1.01x)^3 = x^3(1+0.01)^3$$
$$= x^3(1 + 3\cdot0.01 + 3\cdot0.01^2 + 0.01^3)$$

에서, $3\cdot0.01^2 + 0.01^3$은 작으므로

$$V(1.01x) \approx x^3(1 + 3\cdot0.01) = 1.03x^3 = 1.03\,V(x) \text{ 이다.}$$

즉, 부피는 3% 정도 증가한다.

9. 반지름이 r인 수박의 부피는 $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ 이다. 지름이 1% 작으면,

$$V(0.99r) = \frac{4}{3}\pi r^3 (1-0.01)^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3 (1 - 3\cdot 0.01 + 3\cdot 0.01^2 - 0.01^3)$$

에서 $3\cdot 0.01^2 - 0.01^3$ 은 작으므로,

$$V(0.99r) \approx \frac{4}{3}\pi r^3 (1 - 3\cdot 0.01) = 0.97 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = 0.97\, V(r)$$

이다. 즉, 부피는 3% 정도 작다.

10. 닮음비가 $1 : 1+\varepsilon$ 이면 부피의 비는 $1 : (1+\varepsilon)^3$ 이다. 그런데 ε는 작으므로,

$$(1+\varepsilon)^3 = 1 + 3\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3 \approx 1 + 3\varepsilon$$

에서, 부피의 비는 약 $1 : 1+3\varepsilon$ 정도가 된다.

11. 몸무게가 허리둘레의 제곱에 비례하므로, 허리둘레가 1% 줄어들면 몸무게는

$$(0.99)^2 = (1 - 0.01)^2$$

$$= 1 - 2\cdot 0.01 + 0.01^2$$

$$\approx 1 - 2\cdot 0.01$$

$$= 0.98$$

에서, 2% 정도 줄어든다.

12. (i) $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3 \sin\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} h^2 \sin\frac{1}{h}$.

이때 $\left| h^2 \sin\frac{1}{h} \right| \le h^2$ 이고, $h\to 0$ 일 때 $h^2 \to 0$ 이므로,

$\lim_{h\to 0} h^2 \sin\frac{1}{h} = 0$ 이다. 즉, $f'(0) = 0$.

(ii) $f'(x)$ 를 구하면,

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

이다. 이때

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}\right)$$

인데,

$$-|3x^2+x|\leq 3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}\leq |3x^2+x|$$

이고 $x\to 0$ 일 때 $|3x^2+x|\to 0$ 이므로,

$$\lim_{x\to 0}\left(3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}\right)=0$$

이다. 즉, $\lim_{x\to 0} f'(x)=0=f'(0)$ 이고, f'는 연속함수이다.

(iii) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin\frac{1}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$

에서, $-|x|\leq x\sin\frac{1}{x}\leq |x|$ 이고 $\lim_{x\to 0}|x|=0$ 이므로

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$$

이다. 즉, $f(x)$는 $o(x^2)$ 이다.

(iv) $f''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2\sin\frac{1}{h}-h\cos\frac{1}{h}}{h}=\lim_{h\to 0}\left(3h\sin\frac{1}{h}-\cos\frac{1}{h}\right)$

$=-\lim_{h\to 0}\cos\frac{1}{h}$: 발산. 즉, $f''(0)$는 존재하지 않는다.

정리 32.2의 조건인 '$n=2$번 미분가능'이 충족되지 않으므로, $f(x)=o(x^2)$ 이지만 $f(0)=0$, $f'(0)=0$, $f''(0)=0$ 은 아닐 수 있다.

$\boxed{\text{하승우}}$(수리과학부)

제 4절. 테일러 정리

1. $\sqrt{3.8} = \sqrt{4-0.2} = 2\sqrt{1-0.05}$ 이므로, $\sqrt{1-0.05}$ 의 근삿값을 오차가 $\frac{1}{2}\times 10^{-3}$ 이내가 되도록 구하면 된다.

$f(x) = \sqrt{1+x}$ 이라 하고, 이차 근사 다항식으로 근삿값을 구하자.

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}$$

에서 $f(0)=1,\ f'(0)=\frac{1}{2},\ f''(0) = -\frac{1}{4}$

이므로, $T_2 f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$. 즉, $\sqrt{1-0.05}$ 의 근삿값은

$$T_2 f(-0.05) = 1 - \frac{0.05}{2} - \frac{0.05^2}{8}.$$

즉,

$$\sqrt{3.8} = 2\sqrt{1-0.05} \approx 2\left(1 - \frac{0.05}{2} - \frac{0.05^2}{8}\right).$$

이때 오차의 한계를 구해 보자. $\sqrt{1-0.05}$ 의 오차의 한계는,

$$f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2} \le \frac{3}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-5/2} = \frac{3}{8}\cdot 4\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \quad \left(x \in [\tfrac{1}{2}, 1]\right)$$

에서

$$M_3 \frac{|x|^3}{3!} \le \frac{3}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{(1/20)^3}{3!} = \frac{\sqrt{2}}{32000} < \frac{1}{2000}$$

이므로, $\sqrt{3.8} = 2\sqrt{1-0.05}$ 의 오차는 $2\cdot\frac{1}{2000} = 10^{-3}$ 이하이다.

2. $f(v) = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \binom{1/2}{0} + \binom{1/2}{1}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right) + \binom{1/2}{2}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \binom{1/2}{3}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)^3 + o\left(\frac{v^6}{c^6}\right)$

$$= 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{8}\frac{v^4}{c^4} + o(v^5)$$

여기서, $\lim_{v\to 0}\frac{o\left(\frac{v^6}{c^6}\right)}{v^5} = \lim_{v\to 0}\left(\underbrace{\frac{o\left(\frac{v^6}{c^6}\right)}{\frac{v^6}{c^6}}}_{0}\cdot\frac{v}{c^6}\right) = 0,\quad \frac{v^6}{c^6} = o(v^5)$

↳ 즉 $o\left(\frac{v^6}{c^6}\right) = o(v^5)$

이므로 v^4 항 이후는 모두 $o(v^5)$ 이다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

3. $f(x) = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = \binom{-1/2}{0} + \binom{-1/2}{1}x + \binom{-1/2}{2}x^2 + o(x^2)$

$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2).$ $\quad \rightarrow f'(0) = -\frac{1}{2},\ f''(0) = \frac{3}{4}$

또는, $f'(x) = -\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$, $f''(x) = \frac{3}{4}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$ 에서

$T_2 f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2$

이고, $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$. 그러면

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0\left(1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{3}{8}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \cdots\right)$$

$$= m_0\left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3v^4}{8c^4} + \cdots\right)$$

$$= m_0 + \left(\frac{1}{2}m_0 v^2\right)/c^2 + \frac{3}{8}m_0 v^4/c^4 + \cdots$$

4. $\arcsin x = \arcsin 0 + \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ (p.87)

$= \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{8}t^4 + o(t^4)\right)dt$ (연습문제 3)

$= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \int_0^x o(t^4)\,dt$

$= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$ (제1 3절 연습문제 6)

5. $|R_n(x)| \le M_{n+1}(x)\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 에서, $f(x) := e^x$ 이면 $f^{(n+1)}(x) = e^x$ 이고

이는 증가함수이므로, 구간 $[0, x]$에서 $f^{(n+1)}(x)$의 최댓값은 1과 e^x 중

큰 값, 즉 $\max\{e^x, 1\}$ 이다. 곧,

$$|R_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\max\{e^x, 1\}.$$

하승우

이때 $x=1$ 이면 $\max\{e^x, 1\} = e < 3$ 이므로, $n=6$일 때

$$|R_6(1)| \le \frac{1^7}{7!}\cdot e = \frac{e}{5040} < \frac{3}{5040} < 10^{-3}$$

이다. 즉, e^1의 6차 근삿값을 구하면 된다. 이는

$$e \approx 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720} = \frac{1957}{720}$$

이다.

6. 테일러 2차 전개식으로부터 근삿값을 구하면

$$e^{0.1} \approx 1+0.1+\frac{0.1^2}{2}$$

이다. 이때 오차의 한계는

$$|R_2(0.1)| \le M_3\,\frac{0.1^3}{3!} = e^{0.1}\,\frac{0.1^3}{3!} < 3\cdot\frac{0.1^3}{3!} < 10^{-3}$$

이다. 여기서 M_3는, $f^{(3)}(x) = e^x$ $(f(x) := e^x)$ 의 구간 $[0, 0.1]$에서의 최댓값으로, $e^{0.1}$ 이다.

7. (1) $$\int_0^t e^{-x^2}dx = \int_0^t \left(1-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{6}+\cdots\right)dx = t-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{10}t^5-\frac{1}{42}t^7+\cdots$$

계수 일반항 $\frac{1}{n!(2n+1)}$ 감소.

에서,

$$\left|\int_0^t e^{-x^2}dx - \left(t-\frac{1}{3}t^3\right)\right| < \frac{1}{10}t^5$$

임을 얻는다. (1장 7절 연습문제 3) 따라서

$$\left|\int_0^{0.3} e^{-x^2}dx - \left(0.3-\frac{1}{3}0.3^3\right)\right| < \frac{1}{10}\cdot 0.3^5 = \frac{243}{10^6} < 10^{-3}.$$

즉, 근삿값은 $0.3-\frac{1}{3}\cdot 0.3^3$.

*교대급수가 좋을 때는 교대급수를 쓰자.

하승우 (수리과학부)

(2) $\frac{\sinh x}{x} = \frac{x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots}{x} = 1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots$ 에서

$\int_0^t \frac{\sinh x}{x}\,dx = t + \frac{t^3}{3\cdot 3!} + \frac{t^5}{5\cdot 5!} + \cdots =: F(t)$ 이다. 그러면

$$F^{(6)}(t) = \frac{d^6}{dt^6}\left(\frac{\sinh t}{t}\right) = \frac{t}{7} + \frac{t^3}{9\times 3!} + \frac{t^5}{11\times 5!} + \cdots$$

이다. 그러면 $[0,1]$ 에서

$$F^{(6)}(t) \le \frac{t}{7} + \frac{t^3}{7\times 3!} + \frac{t^5}{7\times 5!} + \cdots = \frac{\sinh t}{7} \le \frac{\sinh 1}{7} < \frac{2}{7}$$

이므로, $F(t)$의 5차 근사다항식의 나머지항은

$$|R_5F(1)| = M_6\frac{1^6}{6!} < \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{720} < 10^{-3}$$

이다. 따라서 구하는 근삿값은, $F(t)$의 5차 근사다항식에서 구한

$$T_5F(1) = 1 + \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} = 1 + \frac{1}{18} + \frac{1}{600}$$

이다.

(3) $\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots$ 에서

$\int_0^t \frac{\sin x}{x}\,dx = t - \frac{t^3}{3\cdot 3!} + \frac{t^5}{5\cdot 5!} - \frac{t^7}{7\cdot 7!} + \cdots$

이다. 즉, $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} + \cdots$ 인데, 그러면

$$\left|\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx - \left(1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!}\right)\right| \le \frac{1}{7\cdot 7!} = \frac{1}{7\times 5040} < 10^{-3}$$

이므로, 구하는 근삿값은 $1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600}$ 이다.

8. $\lim_{x\to 0}\frac{R_{n-1}(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - T_{n-1}f(x)}{x^n} \underset{\text{로피탈}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{f'(x) - T_{n-1}f'(x)}{nx^{n-1}}$

$T_{n-1}f = \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots + f(0)$

$\Rightarrow T_{n-1}^{(n-1)}f = f^{(n-1)}(0)$

$\underset{\text{로피탈 n-1번}}{= \cdots =} \lim_{x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x) - T_{n-1}^{(n-1)}f(x)}{n!\,x} = \lim_{x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{n!\,x}$

$= \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ (미분의 정의).

$\boxed{\text{하승위}}$ (수리과학부)

9. 일반성을 잃지 않고 $x_0 = 0$ 이라 할 수 있다. ($g(x) = f(x+x_0)$ 생각하면 됨)
또, $f(0) = 0$ 이라 가정해도 된다. ($h(x) = f(x) - f(0)$ 생각).
그러면 임계점 0 에서 $f(0) = 0$ 이고, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$ 이므로

$$T_2 f(x) = 0$$

이다. 따라서 $R_2(x) = f(x) - T_2 f(x) = f(x)$ 이다. 이제, $f'''(0) =: b \neq 0$
이고, 문제 8에 의해 $\lim_{x \to 0} \frac{R_2(x)}{x^3} = \frac{f^{(3)}(0)}{3!} =: A \neq 0$ 이 된다.
$A > 0$ 이면, x가 0 근방에 있고 $x < 0$ 일 때 $R_2(x) = f(x) < 0$ 이고
($\lim_{x \to 0} \frac{R_2(x)}{x^3} = A > 0$ 이고, $x < 0$ 이므로, $R_2(x) < 0$)
x가 0 근방에 있고 $x > 0$ 일 때 $R_2(x) = f(x) > 0$ 이므로
($\lim_{x \to 0} \frac{R_2(x)}{x^3} = A > 0$ 이고 $x > 0$ 이므로, $R_2(x) > 0$)
0 은 $f(x)$의 극대점도 극소점도 아니다. $A < 0$ 일 때도 같은 방법으로 하면
역시 0은 $f(x)$의 극대점도 극소점도 아님을 안다.

10. $$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_n f(x)$$
$$= f(0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + R_{n-1} f(x)$$

에서, $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_n f(x) = R_{n-1} f(x)$ 이고, 따라서

$$R_n f(x) = R_{n-1} f(x) - \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \frac{f^{(n)}(x_*)}{n!} x^n - \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$
$$= \frac{f^{(n)}(x_*) - f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

을 만족시키는 x_*가 0과 x 사이에 있다. 또,

$$|R_n f(x)| = \frac{|f^{(n)}(x_*) - f^{(n)}(0)|}{n!} |x|^n \leq B_n(x) \frac{|x|^n}{n!}$$

임은 $B_n(x)$의 정의에 따라 자명하다.

하승우 (수리과학부)

11. $\sqrt[3]{28} = \sqrt[3]{27+1} = 3\sqrt[3]{1+1/27}$ 에서, $\sqrt[3]{1+1/27}$ 의 근삿값을 오차 $\frac{10^{-3}}{3}$ 이내가 되도록 구하면 된다.

$f(x) = (1+x)^{1/3}$ 이라 하자. $f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}(1+x)^{-5/3}$,

$f'''(x) = \frac{10}{27}(1+x)^{-8/3}$ 에서, $\frac{10}{27}\cdot\frac{1}{(1+x)^{8/3}}$

$$M_3(1/27) = \max\{|f'''(t)| : t \in [0, 1/27]\} < 1$$

이므로,

$$|R_2 f(1/27)| \le M_3(1/27)\cdot\frac{|1/27|^3}{3!} < 1\cdot\frac{(1/20)^3}{6} = \frac{1}{48000} < \frac{10^{-3}}{3}$$

이다. 따라서 $T_2 f(1/27)$ 이 원하는 범위 내의 $\sqrt[3]{1+\frac{1}{27}}$ 의 근삿값이다.

$f(0) = 1$, $f'(0) = \frac{1}{3}$, $f''(0) = -\frac{2}{9}$ 에서

$$T_2 f(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$$

따라서 $\sqrt[3]{1+\frac{1}{27}} \approx T_2 f(1/27) = 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{27} - \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{27^2}$ 이고,

$$\sqrt[3]{28} = 3\cdot\left(1 + \frac{1}{3}\frac{1}{27} - \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{27^2}\right)$$

이다.

12. $f(x) := R_n \log(1+x) = \log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{n}\right)$

임을 안다. (거듭제곱급수 전개가 (수렴반경에 관계없이) 존재하는 함수의 경우, n차 테일러 다항식은 거듭제곱급수 전개의 n차항까지와 같다. ← p.131) 그러면

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - (1 - x + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1}) = \frac{1}{1+x} - \frac{1-(-1)^n x^n}{1+x}$$

$$= \frac{(-1)^n x^n}{1+x}$$

이므로, $f(x) = R_n\log(1+x) = \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}dt = (-1)^n\int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt$ 이다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

13. 우선

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_{2n-1}\arctan(x)$$
$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_{2n}\arctan(x)$$

이므로, $R_{2n-1}\arctan(x) = R_{2n}\arctan(x)$ 이다. 또,

$$f(x) := R_{2n-1}\arctan(x) = \arctan x - \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)$$

에서

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \left(1 - x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{2n-2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}$$
$$= \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}$$

이므로 $f(x) = R_{2n-1}\arctan(x) = \int_0^x \frac{(-1)^n \cdot t^{2n}}{1+t^2}\,dt = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt$

이다. 따라서 원하는 결론을 얻는다.

14. 거듭제곱급수 함수는 테일러 급수가 자기 자신과 같다.

(1) $f(x) = \cosh x$, $Tf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

(2) $f(x) = \sinh x$, $Tf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(3) $f(x) = \sin x^2$, $Tf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2}$

(4) $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$, $Tf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n}$.

15. $Tf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$ 이고, 수렴반경은 1이다.

$x=1$ 이면 $Tf(1) = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ 로, 수렴하지 않는다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

16. $g(x) = \dfrac{x}{1+3x^2} = x(1-3x^2+9x^4-\cdots) = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^n x^{2n}$

$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^n x^{2n+1}$ ($|3x^2|<1$ 일 때)

이므로 $Tg(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^n x^{2n+1} = x - 3x^3 + 9x^5 - 27x^7 + \cdots$ 이다.

이는 $|3x^2|<1$, 즉 $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ 일 때 수렴하므로, 수렴반경은 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

17. $x \neq 0$ 일 때,

$$f(x) = \frac{e^x-1}{x} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} - 1}{x} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}$$

$$= 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots$$

인데, 이 급수에 $x=0$을 대입하면 $1 = f(0)$ 이므로, 임의의 x에 대해

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$$

이다. 따라서 $Tf(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$ 이다. 이 급수의 수렴반경을 구하면,

$a_n = \frac{1}{(n+1)!}$

에서 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+2)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2} = 0$ 이므로, 수렴반경은 ∞ 이다.

또, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$ 에서, $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n+1)!}$ 이고, 이 급수 또한

수렴반경이 ∞ 이다. 이때 $f'(1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$ 이다. 그런데

$$f'(1) = \left[\frac{xe^x - (e^x-1)}{x^2}\right]_{x=1} = 1$$

이므로, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!} = 1$ 이다.

하승우 (수리과학부)

제 5절. 임의의 점을 기준으로 한 테일러 전개.

1. (1)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2+x+1 & f(1) &= 3 \\ f'(x) &= 2x+1 & f'(1) &= 3 \\ f''(x) &= 2 & f''(1) &= 2 \\ f'''(x) &= 0 & f'''(1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_3^1 f(x) &= 3 + 3(x-1) + \frac{2}{2}(x-1)^2 + \frac{0}{6}(x-1)^3 \\ &= 3 + 3(x-1) + (x-1)^2. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(\pi x) & f(1) &= 0 \\ f'(x) &= \pi\cos\pi x & f'(1) &= -\pi \\ f''(x) &= -\pi^2\sin\pi x & f''(1) &= 0 \\ f'''(x) &= -\pi^3\cos\pi x & f'''(1) &= \pi^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_3^1 f(x) &= 0 - \pi(x-1) + \frac{0}{2}(x-1)^2 + \frac{\pi^3}{6}(x-1)^3 \\ &= -\pi(x-1) + \frac{\pi^3}{6}(x-1)^3 \end{aligned}$$

$*$ $f(x) = \sin\pi x = \sin(\pi(x-1)+\pi) = -\sin(\pi(x-1))$

$$= -\left(\pi(x-1) - \frac{1}{6}(\pi(x-1))^3 + \cdots\right)$$

에서 $T_3^1 f(x) = -\pi(x-1) + \frac{1}{6}\pi^3(x-1)^3$ 로 구해도 된다.

2. (1) $f(x) = \sin x = \sin\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4 + \cdots$$

에서 $T_4^{\pi/2} f(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4$.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

(2) $f(x) = \cos x = \cos\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$$= -\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3 + \cdots$$

에서 $T_4^{\pi/2} f(x) = -\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3.$

(3) $f(x) = \cos x \qquad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f'(x) = -\sin x \qquad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$f''(x) = -\cos x \qquad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$f'''(x) = \sin x \qquad f'''(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f^{(4)}(x) = \cos x \qquad f^{(4)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$T_4^{\pi/4} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{24\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4.$$

(4) $f(x) = \sqrt{1+x} = \sqrt{2+(x-1)} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\frac{x-1}{2}}$

$$= \sqrt{2}\left(\binom{1/2}{0} + \binom{1/2}{1}\frac{x-1}{2} + \binom{1/2}{2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \binom{1/2}{3}\left(\frac{x-1}{2}\right)^3 + \cdots\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{2} - \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{x-1}{2}\right)^3 + \cdots\right)$$

$$T_3^1 f(x) = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(x-1) - \frac{\sqrt{2}}{32}(x-1)^2 + \frac{\sqrt{2}}{128}(x-1)^3.$$

(5) $f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{3+(x-2)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-2}{3}}$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{x-2}{3} + \left(\frac{x-2}{3}\right)^2 - \left(\frac{x-2}{3}\right)^3 + \left(\frac{x-2}{3}\right)^4 - \cdots\right)$$

$$T_4^2 f(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x-2) + \frac{1}{27}(x-2)^2 - \frac{1}{81}(x-2)^3 + \frac{1}{243}(x-2)^4$$

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

(6) $f(x) = \log x = \log(1+(x-1))$

$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{1}{5}(x-1)^5 - \frac{1}{6}(x-1)^6 + \cdots$$

$$T_1^6 f(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{1}{5}(x-1)^5 - \frac{1}{6}(x-1)^6.$$

3. $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) + f(x-\Delta x) - 2f(x)}{(\Delta x)^2}$$

$$\underset{\text{로피탈}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x-\Delta x)}{2\Delta x} \underset{\text{미분의 정의}}{=} f''(x).$$

*로피탈을 한 번 더 쓰면 $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f''(x+\Delta x) + f''(x-\Delta x)}{2}$ 인데, $f''(x)$가 연속이라는 조건이 있으면 이 극한이 $f''(x)$ 임을 알 수 있으나, 그러한 조건은 없으므로 주의해야 한다.

4. (1) $f(x) = x^4 = ((x-3)+3)^4$

$$= 3^4 + 4\cdot 3^3(x-3) + 6\cdot 3^2(x-3)^2 + 4\cdot 3(x-3)^3 + (x-3)^4$$

$$= 81 + 108(x-3) + 54(x-3)^2 + 12(x-3)^3 + (x-3)^4.$$

$$Tf(x) = 81 + 108(x-3) + 54(x-3)^2 + 12(x-3)^3 + (x-3)^4.$$

(2) $f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{3+(x-3)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-3}{3}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{3^n}\cdot(x-3)^n$

$$Tf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-3)^n.$$

하승부 (우리과학부)

4. 좌표공간과 좌표계

제 1절. 좌표공간

1. n-공간의 점 $A=(a_1, \cdots, a_n)$ 의 절댓값이 0이면
$$|A| = |(a_1, \cdots, a_n)| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = 0$$
에서
$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 0$$
이고, 따라서 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ 이어야 한다. 이러한 점 A는
$$A = (0, \cdots, 0)$$
으로 원점이고, 실제로 원점의 절댓값은 0 이다. 따라서 절댓값이 0인 점은 원점뿐이다.

2. $A=(a_1, \cdots, a_n)$ 이라 하면
$$\begin{aligned}|tA| &= |t(a_1, \cdots, a_n)| = |(ta_1, \cdots, ta_n)| \\ &= \sqrt{t^2a_1^2 + \cdots + t^2a_n^2} \\ &= |t|\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} = |t|\,|A|\end{aligned}$$
이다.

3. S의 양 끝점의 좌표를 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) 라 하면,
$$yz\text{-평면 정사영}: (y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2 = 5^2,$$
$$zx\text{-평면 정사영}: (z_1-z_2)^2+(x_1-x_2)^2 = 6^2,$$
$$xy\text{-평면 정사영}: (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 = 7^2$$
에서 $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2 = \dfrac{5^2+6^2+7^2}{2} = 55.$ 따라서 S의 길이는 $\sqrt{55}$ 이다.

하승우 (수리과학부)

4. 주어진 선분의 양 끝점을 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) 라 하면,

yz- 평면 정사영: $(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2 = l_1^2$

zx- 평면 정사영: $(z_1-z_2)^2+(x_1-x_2)^2 = l_2^2$

xy- 평면 정사영: $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 = l_3^2$

이므로,

$$l^2 = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2 = \frac{l_1^2+l_2^2+l_3^2}{2}$$

이고, $l_1^2+l_2^2+l_3^2 = 2l^2$ 이 된다. 또,

$$l_1^2+l_2^2 = (y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2+(z_1-z_2)^2+(x_1-x_2)^2$$
$$= l_3^2+2(z_1-z_2)^2 \geq l_3^2$$

이고,

$$|l_1^2-l_2^2| = |((y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2)-((z_1-z_2)^2+(x_1-x_2)^2)|$$
$$= |(y_1-y_2)^2-(x_1-x_2)^2|$$
$$\leq (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 = l_3^2$$

이므로, $|l_1^2-l_2^2| \leq l_3^2 \leq l_1^2+l_2^2$ 이다.

5. (a) NaH_b 를 (a,b) 로 대응시키면, $2NH_2+H_2=2NH_3$ 은

$$2(1,2)+(0,2)=2(1,3)$$

과 같다.

(b) $(1,0,1)+(0,2,1) = (0,2,0)+(1,0,2)$

6. $A=\{f:\{1,2,\cdots,n\}\to\mathbb{R}\}$, $=$ ($\{1,2,\cdots,n\}$ 에서 정의된 함수 전체의 집합) 이라 하면

함수 $\varphi: A\to\mathbb{R}^n$ 을

$$\varphi: A \to \mathbb{R}^n$$
$$f \mapsto (f(1), f(2), \cdots, f(n))$$

와 같이 정의하자.

하승범 (수리과학부)

(단사) $f, g \in A$ 이고 $f \neq g$ 이면, $f(i) \neq g(i)$ 인 i가 $1, 2, \cdots, n$ 중 존재한다. 따라서 $(f(1), f(2), \cdots, f(n)) \neq (g(1), g(2), \cdots, g(n))$ 이고, 이는 곧 $\varphi(f) \neq \varphi(g)$ 라는 뜻이다.

(전사) $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여 함수 $f_0 : \{1, \cdots, n\} \to \mathbb{R}$ 을

$$f_0(1) = a_1, \cdots, f_0(n) = a_n$$

이 되도록 정의하면, $\varphi(f_0) = (a_1, \cdots, a_n)$ 이다.

따라서 φ는 원하는 일대일 대응이다.

7. $X := \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ 이라 할 때,

$$\varphi : X \to \mathbb{R}^4$$

를 $\varphi(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ 이라 정의하자.

(단사) $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \neq b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$ 이면, $a_i \neq b_i$ 인 i가 $0, 1, 2, 3$ 중 최소한 하나 있다. 그러면 $(a_0, a_1, a_2, a_3) \neq (b_0, b_1, b_2, b_3)$ 이고 이는 곧 $\varphi(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) \neq \varphi(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3)$ 라는 뜻이다.

(전사) $(c_0, c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^4$ 에 대하여,

$$\varphi(c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3) = (c_0, c_1, c_2, c_3)$$

이다.

따라서 φ는 일대일대응이다. 또,

$$\varphi((a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3))$$
$$= \varphi((a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + (a_3+b_3)x^3)$$
$$= (a_0+b_0, a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$$
$$= (a_0, a_1, a_2, a_3) + (b_0, b_1, b_2+b_3)$$

으로, 다항식의 합은 공간 상의 점의 합과 대응된다.

8. 실수열 $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$ 가 a_n 이후로 모두 0, 즉 $a_n \neq 0$, $a_{n+1} = 0$, $a_{n+2} = 0$, $a_{n+3} = 0$, $\cdots$ 이면, 이를 $(a_1, a_2, a_3, \cdots)_n$ 으로 쓰자.

이때 $\varphi : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}[x]$ 를

$$\varphi((a_1, a_2, \cdots)_n) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}$$

로 정의하자.

(단사) 두 다항식 $a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}$, $b_1 + b_2 x + \cdots + b_m x^{m-1}$ 이

$$a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1} = b_1 + b_2 x + \cdots + b_m x^{m-1}$$

이면, $n = m$ 이고 $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $\cdots$, $a_n = b_n$ 이다.

수열 $(a_1, a_2, \cdots)$ 에 대하여, $k > n$ 일 때 $a_k \neq 0$ 이면,

$$\varphi((a_1, a_2, \cdots)) \neq a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}$$

이다. 따라서 $\varphi((a_1, a_2, \cdots)) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}$ 이려면 $k > n$ 이면 $a_k = 0$ 이어야 한다. 마찬가지로 $\varphi((b_1, b_2, \cdots)) = b_1 + b_2 x + \cdots + b_n x^{n-1}$ 이려면 $k > n$ 일 때 $b_k = 0$ 이어야 한다. 따라서 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^\infty$ 가

$$\varphi(\alpha) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1},$$
$$\varphi(\beta) = b_1 + b_2 x + \cdots + b_n x^{n-1}$$

이려면 $\alpha = (a_1, \cdots)_n$, $\beta = (b_1, \cdots)_n$ 이어야 하고, 즉 $\alpha = \beta$ 이다.

(전사) $a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1} \in \mathbb{R}[x]$ 가 주어지면,

$$\varphi((a_1, a_2, \cdots)_n) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}$$

이 된다.

9. 서울이다. 구글 지도 기준으로는, 서울시 서초구의 사평대로 28길 인근을 가리킨다.

하승우 (수리과학부)

10. $$\mathrm{dist}(A, \bar{A}) = \sqrt{(a_1-\bar{a})^2 + (a_2-\bar{a})^2 + \cdots + (a_n-\bar{a})^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k-\bar{a})^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 - 2a_k\bar{a} + \bar{a}^2)}$$

$$= \sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2 - 2\bar{a}\sum_{k=1}^{n}a_k + n\bar{a}^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2 - 2\bar{a}\cdot n\bar{a} + n\bar{a}^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2 - n\bar{a}^2}.$$

11. 100×100 개의 각 점에 $[0,1]$ 범위의 실수가 대응되는 것으로 이해할 수 있다.

$100\times100 = 10000$차원.

12. $(0,0,0)$: 검은색 (아무 색 없음)

$(1,1,1)$: 흰색 $(R+G+B)$

$(1,1,0)$: 노란색. $(R+G)$

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

제 2절. 극좌표계.

1. 극좌표계로 (r_1, θ_1), (r_2, θ_2)로 주어진 점을 직교좌표계로 나타내면

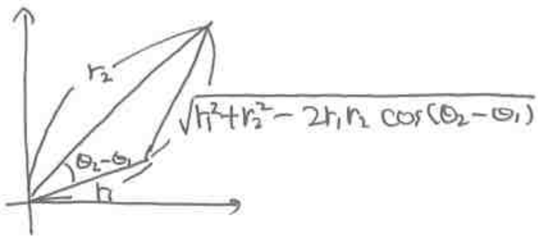
$(r_1\cos\theta_1,\ r_1\sin\theta_1)$, $(r_2\cos\theta_2,\ r_2\sin\theta_2)$

이다. 이 두 점 사이의 거리는

$$\sqrt{(r_1\cos\theta_1 - r_2\cos\theta_2)^2 + (r_1\sin\theta_1 - r_2\sin\theta_2)^2}$$

$$= \sqrt{r_1^2\cos^2\theta_1 - 2r_1r_2\cos\theta_1\cos\theta_2 + r_2^2\cos^2\theta_2 + r_1^2\sin^2\theta_1 - 2r_1r_2\sin\theta_1\sin\theta_2 + r_2^2\sin^2\theta_2}$$

$$= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$$



2. (1) $r = \sin\theta \Rightarrow r^2 = r\sin\theta \Rightarrow x^2+y^2 = y \Rightarrow x^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^2}$.

(2) $r = 2\cos\theta \Rightarrow r^2 = 2r\cos\theta \Rightarrow x^2+y^2 = 2x \Rightarrow (x-1)^2+y^2 = 1$

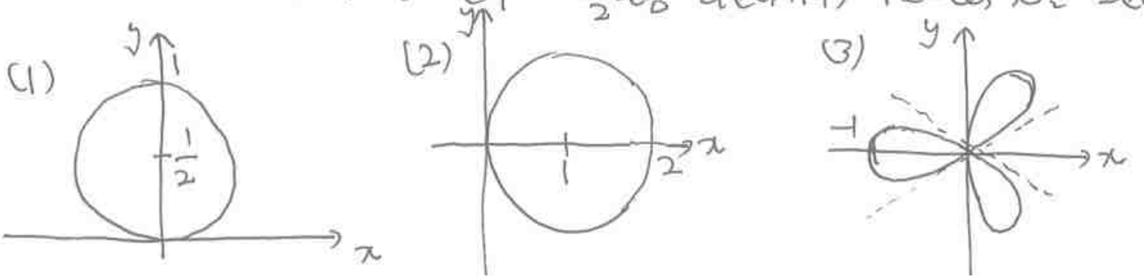
(3) $r = \sin 3\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(3\theta+\frac{3}{2}\pi\right) = -\cos 3\theta = -4\cos^3\theta + 3\cos\theta$

$\Rightarrow r^2 = -4r\cos^3\theta + 3r\cos\theta$ $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 에서

$\Rightarrow x^2+y^2 = -4x\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2} + 3x$

$\Rightarrow x^4 + x^3 + 2x^2y^2 - 3xy^2 + y^4 = 0$.

그림을 그릴 때는 $r = \sin 3\theta$ 를 그린 후 $-\frac{\pi}{2}$만큼 회전하거나, $r = -\cos 3\theta$ 를 그린다.



위 문제들의 극좌표 방정식에서 양변에 r를 곱해 변형했으므로, $r=0$일 때, 즉 원점에 대해서는 한 번 더 생각해 주는 것이 필요하다. 다시 말해,

$$r \times (\text{어떤 식}) = r \times (\text{어떤 식})$$

하승우 (수리과학부)

과 같이 $r = 0$이 당연히 방정식을 성립시키게 만든 후 변형하였으므로, 원점이 주어진 곡선의 방정식의 개형에 포함되는지 여부를 확신할 수 없다는 말이다. 그러나, (1)은 $\theta = 0$, (2)는 $\theta = \pi/2$, (3)은 $\theta = -\frac{\pi}{2}$일 때 $r = 0$이 되므로, 실제로 원점은 곡선의 개형에 포함된다.

3. 식 $r^2 = a^2\cos 2\theta$ 는 $\cos 2\theta \geq 0$ 일 때만 의미가 있다. 그러한 θ의 범위는

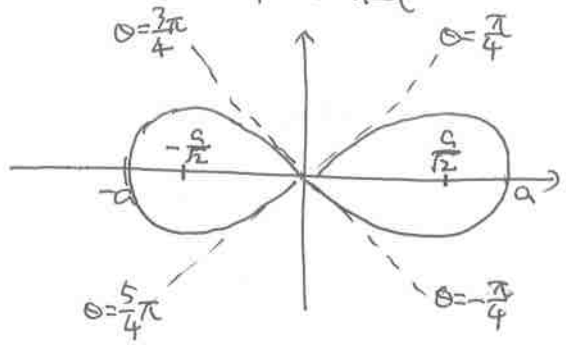
$$-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3}{4}\pi \le \theta \le \frac{5}{4}\pi$$

이때 $r = \pm a\sqrt{\cos 2\theta}$ 이다. 먼저 $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$ 를 살펴보자.

$\theta = 0 \to r = a$, $\quad \theta = \pi \to r = a$

$\theta = -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi \to r = 0$

이므로, $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$ 의 그래프는



이다. 이를 바탕으로 $r = -a\sqrt{\cos\theta}$ 의 그래프를 그려도 위와 같다.
따라서 위 그래프가 $r^2 = a^2\cos 2\theta$ 의 곡선이다.

* $r = f(\theta)$ 가 $\theta = \theta_0$ 일 때 $r = f(\theta_0) = 0$ 이면, $r = f(\theta)$ 의 곡선의 개형은, 많은 경우 직선 $\theta = \theta_0$ 에 접한다.
위 문제에서는 $\theta = -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi$ 에서 $r = 0$ 이었으므로, 그 네 개의 직선에 접한 채로 원점을 지난다.

다음으로, $r^2 = a^2\cos 2\theta$ 를 직교좌표계의 식으로 바꾸어 보자. $r^4 = a^2r^2\underbrace{\cos 2\theta}_{=\cos^2\theta - \sin^2\theta}$ 에서
$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$, 즉 $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - a^2x^2 + a^2y^2 = 0$.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

또, 두 점 $\left(\frac{a}{\sqrt{2}},0\right), \left(-\frac{a}{\sqrt{2}},0\right)$ 으로부터의 거리의 곱이 $\frac{a^2}{4}$ 인 점의 자취의 방정식을 생각하면

$$\left(\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+y^2\right)\left(\left(x+\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+y^2\right)=\frac{a^4}{4}$$

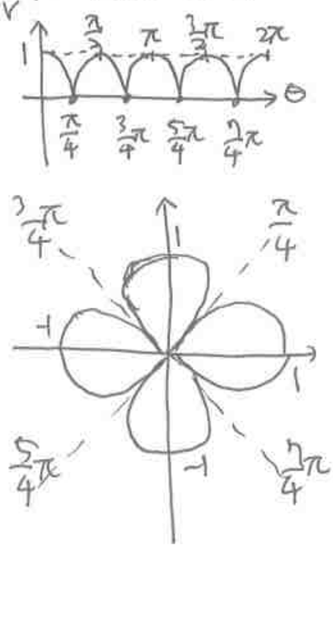
이를 정리하면

$$x^4+2x^2y^2+y^4-a^2x^2+a^2y^2=0$$

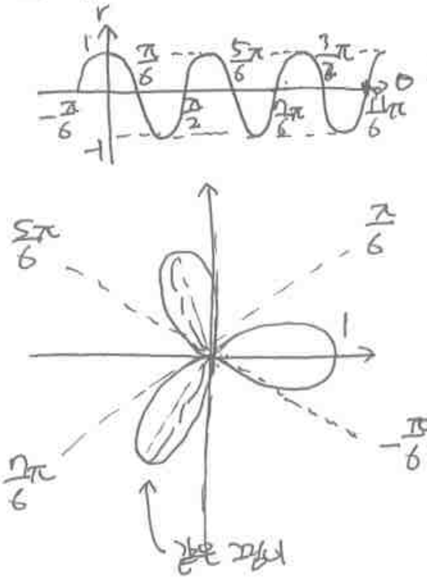
으로, 곧 극좌표계로 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 와 같다. 따라서 곡선 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 는 두 정점 $\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}},0\right)$ 까지의 곱이 일정한 점들로 이루어져 있다.

4. 극좌표계로 주어진 곡선의 개형을 그릴 때는, 먼저 θ-r 그래프를 (직교좌표계처럼) 그려 보면 편리하다. 이때 $r=0$ 이 되는 θ의 값 ($\theta=\theta_0$ 일 때 $r=0$ 이면, 곡선은 대개 원점에서 $\theta=\theta_0$ 에 접한다), r 의 극대·극소값 등을 알아본다.

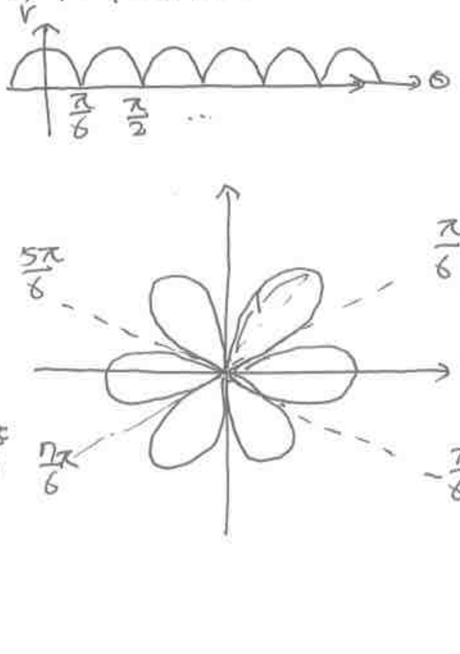
(1) $r=|\cos 2\theta|$



(2) $r=\cos 3\theta$

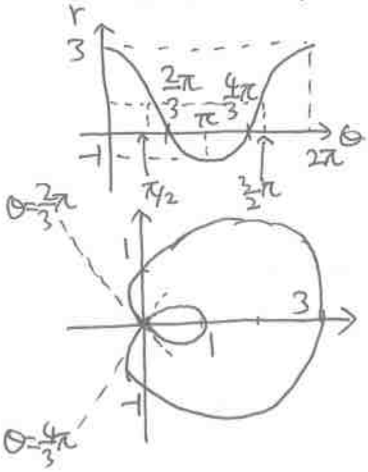


(3) $r=|\cos 3\theta|$

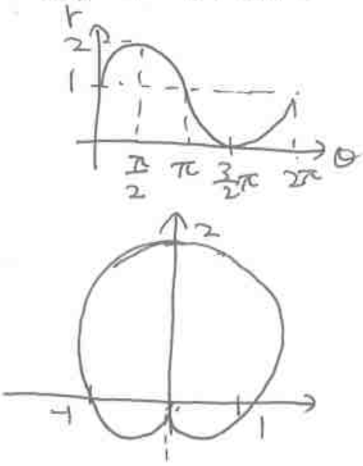


하승우(수리과학부)

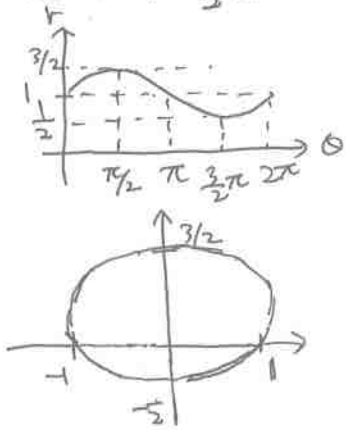
(4) $r=1+2\cos\theta$



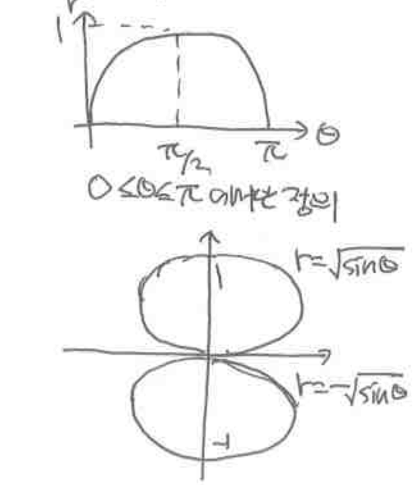
(5) $r=1+\sin\theta$



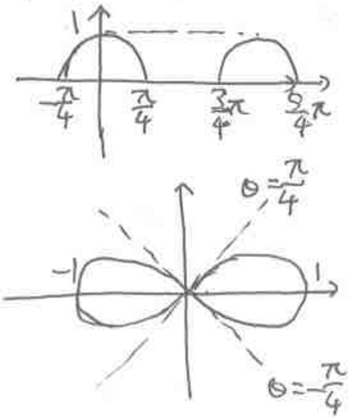
(6) $r=1+\frac{1}{2}\sin\theta$



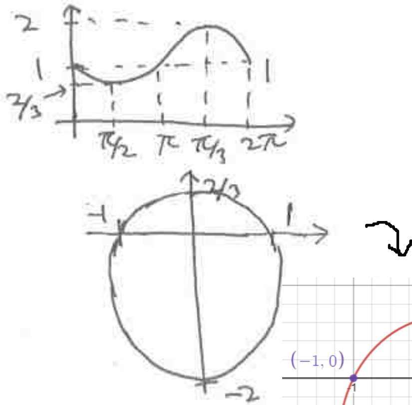
(7) $r^2=\sin\theta$

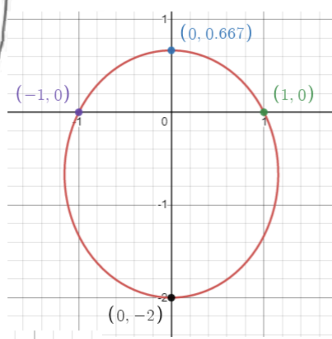


(8) $r^2=\cos 2\theta$

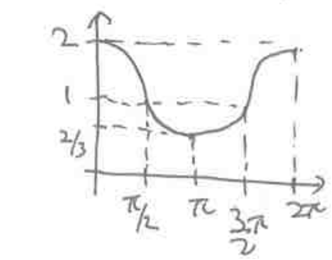


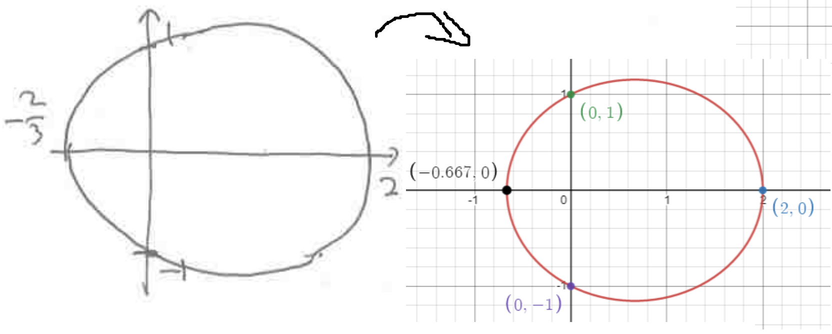
(9) $r=\dfrac{2}{2+\sin\theta}$





(10) $r=\dfrac{2}{2-\cos\theta}$





(9) $r=\dfrac{2}{2+\sin\theta} \Rightarrow 2r+r\sin\theta=2 \Rightarrow 2\sqrt{x^2+y^2}+y=2 \Rightarrow 2\sqrt{x^2+y^2}=2-y$
$\Rightarrow 4(x^2+y^2)=4-4y+y^2 \Rightarrow 4x^2+3y^2+4y-4=0$

따라서 (일단은) 곡선의 개형은 (원점을 내부에 포함하는) 타원 $4x^2+3y^2+4y-4=0$의 일부(라고 말할 수 있)다. 그런데, 주어진 극좌표 방정식의 r는 모든 $0\le\theta\le 2\pi$에 대하여 그 값이 (양의 값을 가지는 주기함수로) 정의되므로, 주어진 곡선의 개형은 타원의 전체와 같다. (이 의미없어 보이는 논의는 직교좌표계의 식으로 변환 후 양변을 제곱하는 과정에서 무연근이 생길 가능성을 염두에 둔 것이다.)

(10)도 마찬가지 단계를 거쳐 개형이 타원 $3x^2-4x+4y^2=4$의 개형과 같음을 알 수 있다.

하승우 (수리과학부)

(앞 페이지에 이어서) 좀더 쉽게(?) 설명하자면, (i) 극좌표 방정식의 개형을 그려 보고 닫힌 곡선임을 확정하고(타원이라고 확정은 못함), (ii) 직교좌표계 방정식으로 바꿔 보고 타원의 '일부'임을 확정하여(전체, 즉 닫힌 곡선이라고 확정은 못함), (iii) (i)+(ii)를 종합하여 '완전한 타원'임을 결론짓는단 얘기. 너무 아리송하고 어려우면 신경쓰지 말자. (문제 4.2.7도 참고)

5. $r\cos(\theta-\theta_0)=r_0$ 에서

$$r\cos\theta\cos\theta_0 + r\sin\theta\sin\theta_0 = r_0$$

이므로 $x\cos\theta_0 + y\sin\theta_0 = r_0$ 이다. 즉, 두 식은 같은 곡선(직선)을 나타낸다.

6. 중심이 $(R\cos\theta_0, R\sin\theta_0)$, 반지름의 길이가 r_0 인 원의 직교좌표계 방정식은

$$(x-R\cos\theta_0)^2+(y-R\sin\theta_0)^2=r_0^2$$

이를 풀면

$$x^2+y^2-2xR\cos\theta_0-2yR\sin\theta_0+R^2-r_0^2=0$$

이므로,

$$r^2-2rR\cos\theta_0\cos\theta-2rR\sin\theta_0\sin\theta+R^2-r_0^2=0$$

이고

$$r^2-2rR\cos(\theta-\theta_0)+R^2-r_0^2=0$$

이 된다.

7. $r=\dfrac{1}{1+\varepsilon\cos\theta} \iff r=1-\varepsilon r\cos\theta \iff \sqrt{x^2+y^2}=1-\varepsilon x$

$\iff x^2+y^2=(1-\varepsilon x)^2 \iff (1-\varepsilon^2)x^2+2\varepsilon x+y^2=1$

이때 식 $(1-\varepsilon^2)x^2+2\varepsilon x+y^2=1$ 이 타원을 나타내려면, $1-\varepsilon^2>0$ 즉 $0\le\varepsilon<1$ 이어야 한다. 반대로, $0\le\varepsilon<1$ 이면 위 식은 타원을 나타낸다.

이는 원도 타원에 속한다고 말할 때의 이야기이다($\epsilon = 0$일 때 $r = 1$).

4. (9), (10) 에 달았던 코멘트와 같은 것을 해보면, $0 \le \epsilon < 1$일 때, 일단 주어진 식의 개형은 타원 $(1-\epsilon^2)x^2 + 2\epsilon x + y^2 = 1$ 의 '일부'이다. 그런데 $0 \le \epsilon < 1$이면

$$r = \frac{1}{1+\epsilon\cos\theta}$$

에서 모든 $0 \le \theta \le 2\pi$에 대하여 r의 값이 (양의 값을 가지는 주기함수로) 정의되므로, 주어진 식의 개형은 어떤 닫힌 곡선이고, 따라서 타원의 전체임을 알 수 있다.

('타원을 나타낸다'는 말의 뜻이 '타원의 일부를 나타낸다'는 말일 수도 있는데, 그러면 위 논의는 필요없다.)

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

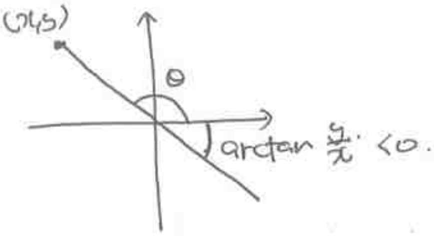
8. (a) $x>0$ 에서는 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ 이므로, $\theta(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$ 이면

$$x=r\cos\theta(x,y),\quad y=r\sin\theta(x,y).$$

$*$ $\arctan:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

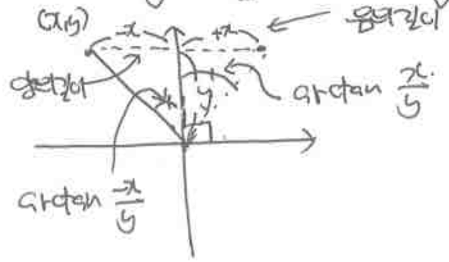
(b) $x<0$ 에서는, $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi$ 이므로 (x,y)의 편각은

$\theta(x,y)=\arctan\frac{y}{x}+\pi$ 이다.



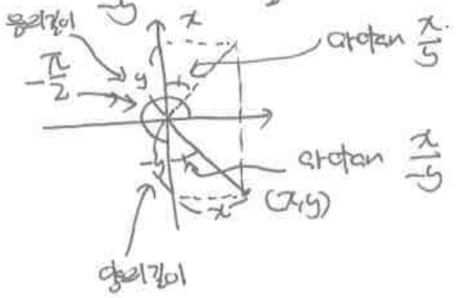
(c) $y>0$ 에서는, $0<\theta<\pi$ 이므로, (x,y)의 편각은

$\theta(x,y)=\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{-x}{y}=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{x}{y}$ 이다.



(d) $y<0$ 에서는, $\pi<\theta<2\pi$ 이므로, (x,y)의 편각은

$\theta(x,y)=-\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{-y}=-\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{x}{y}$



(e) $r\cos\tilde{\theta}(x,y)=r\cos\left(\theta(x,y)+2n\pi\right)=r\cos\theta(x,y)=x$

$r\sin\tilde{\theta}(x,y)=r\sin\left(\theta(x,y)+2n\pi\right)=r\sin\theta(x,y)=y.$

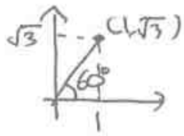
하승우 (수리과학부)

제 3절. 원기둥좌표계와 구면좌표계

1. (1) $(1, \sqrt{3}, 0)$

(원기둥) $r = \sqrt{1 + \sqrt{3}^2} = 2$

$\theta = \frac{\pi}{3}$



$z = 0$

$(2, \frac{\pi}{3}, 0)$

(구면) $\rho = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2 + 0^2} = 2$

z좌표에서 $\rho \cos\varphi = 0$ 이므로 $\varphi = \frac{\pi}{2}$

x, y좌표에서

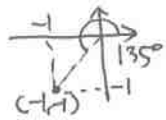
$$\left.\begin{aligned} 1 &= \rho \sin\varphi \cos\theta = 2\cos\theta \\ \sqrt{3} &= \rho \sin\varphi \sin\theta = 2\sin\theta \end{aligned}\right\} \theta = \frac{\pi}{3}.$$

$(2, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3})$

(2) $(-1, -1, -1)$

(원기둥) $r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\theta = \frac{5}{4}\pi$



$z = -1$

$(\sqrt{2}, \frac{5}{4}\pi, -1)$

(구면) $\rho = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$

z좌표에서 $\rho \cos\varphi = -1$ 이므로 $\varphi = \arccos(-\frac{1}{\sqrt{3}})$

이때 $\sin\varphi = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

$$\left.\begin{aligned} -1 &= \rho \sin\varphi \cos\theta = \sqrt{2}\cos\theta \\ -1 &= \rho \sin\varphi \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta \end{aligned}\right\} \theta = \frac{5}{4}\pi$$

$(\sqrt{3}, \arccos(-\frac{1}{\sqrt{3}}), \frac{5}{4}\pi)$

2. 직교좌표계 식을 원기둥좌표계로 바꿀 때에는

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z,$$

구면 좌표계로 바꿀 때에는

$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta,\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta,\ z = \rho\cos\varphi$$

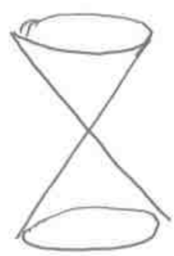
를 대입한다.

(1) $x^2 + y^2 = z^2$

(원기둥) $r^2 = z^2$ 혹은 $z = \pm r$

(구면) $\rho^2 \sin^2\varphi = \rho^2 \cos^2\varphi$ 에서 $\sin^2\varphi = \cos^2\varphi$, 즉

$\varphi = \frac{\pi}{4}$ 또는 $\varphi = \frac{3}{4}\pi$.



(2) $1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$

(원기둥) $1 \le r^2+z^2 \le 4$ (구면) $1 \le \rho^2 \le 4$, 즉 $1 \le \rho \le 2$.

3. $x^2+y^2 \le z^2$, $x^2+y^2+z^2 \le z$ 공통부분.

(원기둥) 우선 $z \ge x^2+y^2+z^2 \ge 0$ 임을 안다. 따라서 $x^2+y^2 \le z^2$ 에서 $r^2 \le z^2$ 인데 $z \ge 0$ 이므로 $r \le z$ 가 된다. 또, $x^2+y^2+z^2 \le z$ 는 $r^2+z^2 \le z$ 가 된다. 즉,

$$r \le z, \quad r^2+z^2 \le z$$

(구면) 우선 $z \ge x^2+y^2+z^2 \ge 0$ 에서 $z \ge 0$, 즉 $\rho\cos\varphi \ge 0$ 이다. 이때 $\rho \ge 0$ 이므로 $\cos\varphi \ge 0$, 즉 $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ 가 된다. 또, $x^2+y^2 \le z^2$ 에서 $\rho^2\sin^2\varphi \le \rho^2\cos^2\varphi$ 인데, $\rho \ge 0$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin\varphi \le \cos\varphi$ 인데, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ 에서 이러한 범위는 $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ 이다. 또, $x^2+y^2+z^2 \le z$ 는

$$\rho^2 \le \rho\cos\varphi$$

가 되어 $\rho \le \cos\varphi$ 와 같이 쓸 수 있다. 즉,

$$\rho \le \cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}.$$

4. (1) $(1, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$ 와 $(1, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$ 를 직교좌표계로 나타내면

$$\left(1\cdot\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{4},\ 1\cdot\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{4},\ 1\cdot\cos\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\left(1\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4},\ 1\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4},\ 1\cdot\cos\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$$

이다. 따라서 두 점 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ 이다.

하승우 (수리과학부)

(2) 두 점을 직교좌표계로 나타내면

$$\left(10\cdot\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{4},\ 10\cdot\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{4},\ 10\cdot\cos\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{5}{\sqrt{2}},\ \frac{5}{\sqrt{2}},\ 5\sqrt{3}\right)$$

$$\left(10\cdot\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{5},\ 10\cdot\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{5},\ 10\cdot\cos\frac{\pi}{6}\right) = \left(5\cos\frac{\pi}{5},\ 5\sin\frac{\pi}{5},\ 5\sqrt{3}\right)$$

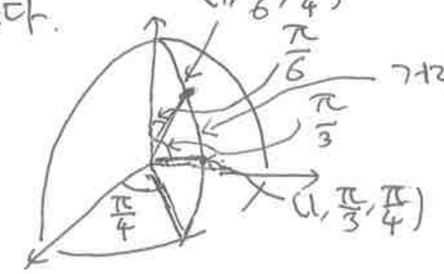
이므로, 두 점 사이의 거리는

$$\sqrt{\left(\frac{5}{\sqrt{2}}-5\cos\frac{\pi}{5}\right)^2+\left(\frac{5}{\sqrt{2}}-5\sin\frac{\pi}{5}\right)^2+0^2} = \sqrt{50-\frac{50}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}\right)}$$

이다.

*답지에는 (1) $\frac{\pi}{6}$, (2) $\frac{\pi}{4}$ 로 되어 있는데, 이는 두 점의 구면 위에서의 거리이다.
일반적으로 거리는 직선 거리를 의미하므로, 실제로는 위의 답이 맞다.
구면 위에서의 거리를 계산하는 것은 이 경우에는 간단하다.

(1) 두 점의 ρ, θ 값이 같고, φ 값만 다르다. 다음 그림을 보면 구면 위에서의 거리는 $\frac{\pi}{6}$ 이다.

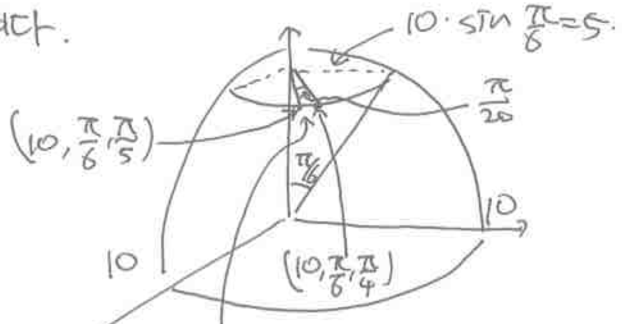


거리는 $1\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$

$\uparrow$

$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}$

(2) 두 점의 ρ, φ 값이 같고, θ 값만 다르다. 다음 그림을 보면 구면 위에서의 거리는 $\frac{\pi}{4}$ 이다.



거리는 $10\cdot\sin\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{20}=\frac{\pi}{4}$

$\uparrow$

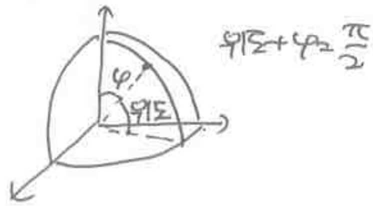
$\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{5}$

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

5. 구면 위의 거리를 구한다. 서울과 런던의 위치를 구면좌표계로 쓰면,

서울: $(6373,\ 90° - 37.5°,\ 127°)$

런던: $(6373,\ 90° - 51.5°,\ 0°)$



이다. 그러면 서울과 런던의 위치를 직교좌표계로 쓰면

서울: $6373(\sin 52.5° \cdot \cos 127°,\ \sin 52.5° \cdot \sin 127°,\ \cos 52.5°)$
$= 6373(-0.477,\ 0.634,\ 0.609)$,

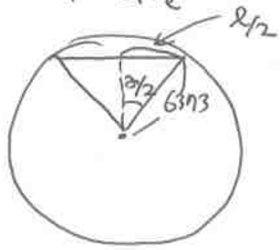
런던: $6373(\sin 38.5° \cos 0°,\ \sin 38.5° \cdot \sin 0°,\ \cos 38.5°)$
$= 6373(0.623,\ 0,\ 0.783)$

이고, 두 도시의 직선거리는

$$|6373(-0.477, 0.634, 0.609) - 6373(0.623, 0, 0.783)|$$
$$= 1.281 \times 6373 =: l$$

이 된다. 이때 서울과 런던 사이의 중심각을 α라 하면

$$6373 \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{l}{2} = \frac{1.281}{2} \times 6373$$



이다. 따라서

$$\alpha = 2 \arcsin \frac{1.281}{2} = 1.392$$

이고, 두 도시 사이의 구면 위의 거리는

$$6373 \times 1.392 = 8872 \ (\mathrm{km})$$

가 된다.

* 벡터의 내적을 이용해도 중심각 계산은 가능할 것이다.

6. A, B의 직교좌표는

$$A = \left(1 \cdot \sin\frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{3},\ 1 \cdot \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{3},\ 1 \cdot \cos\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right),$$

$$B = \left(2 \cdot \sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{3},\ 2 \cdot \sin\frac{\pi}{6} \cdot \sin\frac{\pi}{3},\ 2 \cdot \cos\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)$$

이므로, 선분 AB의 길이는 $\left|\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) - \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)\right| = \sqrt{3}$ 이다.

다송무 (우리다하무)

하승우 (수리과학부)

5. 벡터

제 1절. 평행이동

1. (1) 평행이동 $T(X)=X+w$ $(X, w \in \mathbb{R}^n)$ 를 생각하자.

(단사) $T(X_1)=T(X_2)$ 이면, $X_1+w=X_2+w$ 이므로, $X_1=X_2$ 이다.

(전사) 임의의 $Y\in\mathbb{R}^n$에 대해 $T(Y-w)=Y$.

따라서 옳다.

(2) $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 이 평행이동이면, 어떤 $w\in\mathbb{R}^n$에 대하여 $T=T_w$ 이다

(평행이동의 정의). 점 A가 T에 의하여 B로 옮겨진다고 하면, $T(A)=B$

인데, 이는 곧 $T(A)=A+w=B$ 이므로, $w=B-A$ 이다.

따라서 임의의 점 X는 T에 의하여 $T(X)=X+w=X+B-A$로 옮겨진다.

따라서 옳다.

(3) A를 B로 옮기는 평행이동이 존재함은, $w=B-A$라 할 때

$$T_w(A)=A+w=A+(B-A)=B$$

임에서 명백하다. 또, $w\in\mathbb{R}^n$에 대하여

$$T_w(A)=B$$

이면, $A+w=B$ 에서 $w=B-A=w$ 이므로, $T_w=T_w$ 이다. 즉, A를 B로

옮기는 평행이동은 T_w로 유일하다. 따라서 옳다.

(4) $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 이 평행이동이면, 어떤 $w\in\mathbb{R}^n$에 대하여 $T=T_w$ 이다.

그러면 $X\in\mathbb{R}^n$ 일 때

$$\mathrm{dist}(X, T(X))=|X-T_w(X)|=|X-(X+w)|=|w|=\text{상수}$$

이다. 따라서 옳다.

하승남 (수리과학부)

(5) (더 좋은 방법이 있으면 제보 부탁드립니다.)

추가 풀이 1: p.219 추가 풀이 2: p.124
추가 풀이 2가 간결하지만 6장 3절 부록 내용이 사용됨

임의로 주어진 $X\in\mathbb{R}^n$에 대하여, $T(X)$를 잡자. X와 $T(X)$를 잇는 직선 위의 한 점을 Y라 하자. 이때 $T(Y)$는 다음 두 조건

$$|T(X)-T(Y)|=|X-Y|,\quad |X-T(X)|=|Y-T(Y)|$$

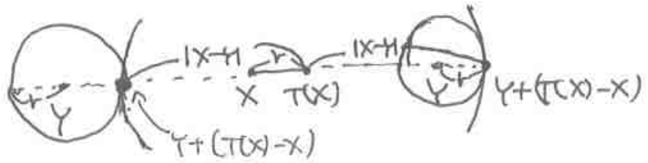
를 만족시켜야 한다. 이러한 점은 $Y+(T(X)-X)$ 뿐이다. ⋯(*)

(*)의 증명. $r=|X-T(X)|$라 하면, $T(Y)$는 중심이 Y이고 반지름이 r인 (단, $Y\neq T(X)$라 하자.)
n-구면 위에 있어야 한다. 이때 $Y+(T(X)-X)$는 이 n-구면 위의 점이다.
또, $T(Y)$는 중심이 $T(X)$이고 반지름이 $|X-Y|$인 n-구면 위에 있어야 한다.

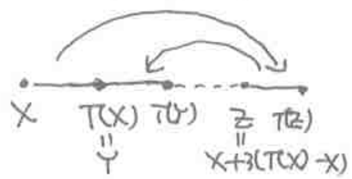
그런데, $T(X)$, Y, $Y+(T(X)-X)$는 한 직선 위에 있고,

$$\big|T(X)-(Y+(T(X)-X))\big| = |X-Y|$$

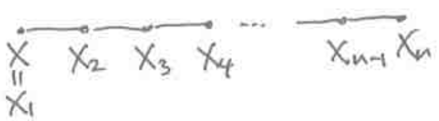
이므로, 위에서 말한 두 구면은 $Y+(T(X)-X)$에서 접한다. 따라서 $T(Y)$로서 가능한 점은 $Y+(T(X)-X)$ 뿐이다.



따라서 $T(Y)=Y+(T(X)-X)$이다. (이 논리는 $Y=T(X)$인 경우에는 두 n-구가 일치하므로 사용 불가하다.) $Y=T(X)$이면, 위 논리를 2번 사용해서 $T(Y)=X+(T(X)-X)$임을 알 수 있다. 즉, $Z=X+3(T(X)-X)$라 하면 $T(Z)=Z+(T(X)-X)$이고, 그 점을 기준으로 다시 위 결과를 적용하면 $T(Y)=Y+(T(X)-X)$가 된다.」



이제, $X_1=X$라 하고, $X_{i+1}=T(X_i)=X_i+(T(X)-X)$라 하면, $X_i=X+(i-1)(T(X)-X)$가 된다. 이와 같이 $X_1, X_2, \cdots, X_n$을 정의하자.



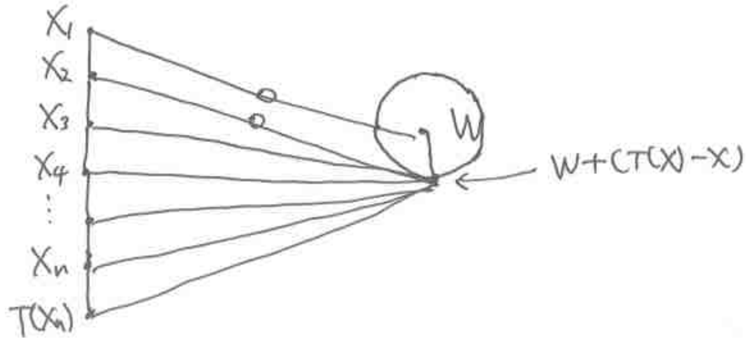
또, 직선 $X_1, T(X_1)$ 위에 있지 않은 점 W를 생각하라. 이때 $T(W)$는

$$|T(X_1)-T(W)| = |X_1-W|,\ \cdots,\ |T(X_n)-T(W)| = |X_n-W|,$$
$$(r=)\ |X_1-T(X_1)| = |X_2-T(X_2)| = \cdots = |X_n-T(X_n)| = |W-T(W)|$$

이 성립하는 위치에 있어야 한다. 즉, $T(W)$는 중심이 W이고 반지름이 r인 n-구면 위에 있고, $i=1,\cdots,n$에 대하여 중심이 $T(X_i)$이고 반지름이 $|X_i-W|$인 구면 위에 있다. 점 $W+(T(X)-X)$는 위 조건을 모두 만족하므로

$$(\quad |T(X_i)-T(W)| = |X_i - W - T(X_1) + X_1| = |X_i - W| \quad)$$

구면들의 교집합에 포함된 점이다. 그런데 중심이 각각 다른 n-구면 $(n+1)$개의 교집합은 0-구면 (점) 이거나, 공집합이다. 따라서 교집합에는 유일한 점으로 $W+(T(X)-X)$가 있으며 이것이 $T(W)$이다.



따라서 임의의 점 A에 대하여 $T(A)=A+(T(X)-X)$ 이고, T는 평행이동이다.
따라서 옳다.

옳은 것: 모두.

2. $S_{P_2}\circ S_{P_1}(X) = S_{P_2}(S_{P_1}(X)) = S_{P_2}(2P_1 - X) = 2P_2 - (2P_1 - X)$

$$= X - 2P_1 + 2P_2.$$

$-2P_1+2P_2$ 만큼의 평행이동이다.

하승우 (수리과학부)

3. 닮음 변환 $S_{P,c}$를 실행한 다음 $(1-c)(Q-P)$ 만큼 평행이동하는 사상은

$$T_{(1-c)(Q-P)} \circ S_{P,c}(X) = P + c(X-P) + (1-c)(Q-P)$$
$$= Q + c(X-Q)$$
$$= S_{Q,c}(X)$$

이므로 원하는 결론을 얻는다.

5.1.1(5) (추가 풀이). 주어진 변환 T는 등장변환이므로, **6**장 **3**절의 따름정리 **3.1.4**에 의하여 T는 직교변환(즉, 선형변환)과 평행이동의 합성이다. 즉, $n \times n$ 행렬 A와 $n-$벡터 $\mathbf{v}$에 대하여 $T(X) = AX + \mathbf{v}$이다. 이때 상수 c에 대하여 $\mathrm{dist}(X, T(X)) = c$라 하면, ($c \geq 0$이고,)

$$c = |T(X) - X| = |AX + \mathbf{v} - X| = |(A-I)X + \mathbf{v}|$$

이므로, $A - I = B$라 하면 $|BX + \mathbf{v}| = c$ 이다.

그런데, $B \neq O$이면, $BX \neq \mathbf{0}$이 되도록 하는 X가 존재한다. 이때 이 X에 적당한 스칼라 배를 하여 $|BX|$의 값을 임의의 양수가 되도록 정할 수 있다. 구체적으로 $|BX| = 100c + |\mathbf{v}|$ 가 되도록 하는 X를 생각하자. 그러면

$$c = |BX + \mathbf{v}| \geq \big||BX| - |\mathbf{v}|\big| = \big|100c + |\mathbf{v}| - |\mathbf{v}|\big| = 100c$$

가 되어 모순이다. 따라서 $B = A - I = O$이어야 한다. 즉, $A = I$이고, $T(X) = X + \mathbf{v}$가 되어, T는 평행이동이 된다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

제 2절. 유향선분과 벡터.

1\. (1) $1 = |t\mathbf{a}| = |(-t, -2t, -3t)| = \sqrt{t^2+4t^2+9t^2}$ 에서 $14t^2=1$ 이고, $t = \pm\frac{1}{\sqrt{14}}$ 이다. 즉 구하는 벡터는 $\pm\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$.

(2) $1 = |t\mathbf{b}| = |(4t, -5t, 6t)| = \sqrt{77t^2}$ 에서 $t = \pm\frac{1}{\sqrt{77}}$ 이다. 즉 구하는 벡터는 $\pm\frac{1}{\sqrt{77}}(4,-5,6)$ 이다.

(3) $\mathbf{c}=(2016, 2016, 2016)$ 은 $(1,1,1)$ 과 나란하므로, $\mathbf{c}'=(1,1,1)$ 로 문제를 풀면 된다.

$1 = |t\mathbf{c}'| = |(t,t,t)| = \sqrt{3t^2}$ 에서 $t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다. 즉 구하는 벡터는 $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

(4) $1 = |t\mathbf{d}| = |(3t, 4t, 0)| = \sqrt{25t^2}$ 에서 $t = \pm\frac{1}{5}$ 이다. 즉 구하는 벡터는 $\pm\frac{1}{5}(3,4,0)$.

2\. 임의의 벡터 $\mathbf{v}$ 를 단위벡터의 상수배로 나타내라.

$\mathbf{v} = \mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0)$

이면, $\mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{e}_1 = 0 \cdot (1, 0, 0, \cdots, 0)$ 으로 나타내면 된다. $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ 이면,

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\left(\frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}\right)$$

와 같이 나타내면 된다.

3\. 두 실수 x, y 에 대하여 $x \equiv y \mod c$ 라는 것은

$$x - y = nc \quad (n \in \mathbb{Z})$$
정수집합

이라는 것이다.

(반사율) $x \equiv x \mod c$

$$x - x = 0 = 0 \cdot c$$

이므로, 반사율이 성립한다.

(대칭률) $x \equiv y \mod c \Rightarrow y \equiv x \mod c$

$x \equiv y \mod c$ 이면, $x - y = nc$ 인 정수 n이 존재한다. 그러면

$y - x = (-n)c$ 이므로, $y \equiv x \mod c$ 가 된다.

(추이율) $x \equiv y \mod c$, $y \equiv z \mod c \Rightarrow x \equiv z \mod c$

$x \equiv y \mod c$ 이면, $x - y = nc \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad \cdots ①$

$y \equiv z \mod c$ 이면, $y - z = mc \quad (m \in \mathbb{Z}) \quad \cdots ②$

①+② 를 하면, $x - z = (n+m)c$ 이므로, $x \equiv z \mod c$.

4. "친구" (반사율) 한 사람은 자기 자신의 친구라고 할 수는 없다. (X)

(대칭률) A와 B가 친구이면, B와 A는 친구이다. (아닐 수도…?!) (O?)

(추이율) A와 B가 친구이고, B와 C가 친구라고 해서, A와 C가 친구라고 할 수는 없다. (X)

"친구"는 동등관계가 아니다.

"친척, 동창" (반사율) 한 사람은 자기 자신의 친척 / 동창 이다. (O)

(대칭률) A와 B가 친척 / 동창이면, B와 A는 친척 / 동창 이다. (O)

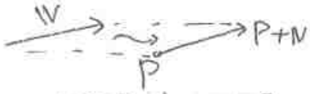
(추이율) A와 B가 친척 / 동창이고, B와 C가 친척 / 동창이면, A와 C도 친척 / 동창이다. (O)

"친척", "동창"은 동등관계이다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

5. $a^\circ \cap b^\circ \neq \phi$ 이라고 가정하자. 그러면 $x \in a^\circ \cap b^\circ$ 를 생각할 수 있다.
이때
$$x \equiv a \mod 360, \quad x \equiv b \mod 360$$
이고, $\equiv$는 동등관계 (문제 3) 이므로, $a \equiv b \mod 360$ 이다. $\cdots$①
이제, $y \in a^\circ$ 이면 $y \equiv a \mod 360$ 이므로, ①과 동등관계의 정의에 의해
$y \equiv b \mod 360$ 이므로 $y \in b^\circ$ 이다. 즉, $a^\circ \subset b^\circ$ 이다. 또,
$z \in b^\circ$ 이면, $z \equiv b \mod 360$ 이므로, 마찬가지 방법으로 $z \equiv a \mod 360$
이다. 따라서 $b^\circ \subset a^\circ$ 이다. 즉, $a^\circ = b^\circ$ 이다.
따라서, $a^\circ = b^\circ$ 또는 $a^\circ \cap b^\circ = \phi$ 이다.

6. $A = \{n$-벡터 전체의 집합$\}$, $B = \{P$를 시점으로 하는 유향선분 전체의 집합$\}$ 이라 하자. $f: A \to B$ 를 정의하는데, $v \in A$ 에 대하여 $f(v) = \overrightarrow{PP_v}$ (단, $P_v = P + v$) 라 정의하자.



(단사) $f(v) = f(w)$ 이면, $\overrightarrow{PP_v} = \overrightarrow{PP_w}$ 이다. 이는 곧
$$P_v = P_w, \text{ 즉 } P + v = P + w$$
를 뜻하는데, 이로부터 $v = w$ 를 얻는다.
(전사) $\overrightarrow{PQ} \in B$ 에 대하여, 유향선분 $\overrightarrow{PQ}$에 대응되는 벡터를 v라 하면, $f(v) = \overrightarrow{PQ}$.

따라서 f는 일대일대응이다.

7. $0a = (0+0)a = 0a + 0a$ 에서 $0a = \mathbf{0}$.
$t\mathbf{0} = t(\mathbf{0}+\mathbf{0}) = t\mathbf{0} + t\mathbf{0}$ 에서 $t\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
$a = (a_1, \dots, a_n)$ 이라 할 때, $ta = t(a_1, \dots, a_n) = (ta_1, \dots, ta_n) = \mathbf{0}$ 이면
$ta_1 = \cdots = ta_n = 0$ 이다. 그러면, $t = 0$ 이거나 $a_1 = \cdots = a_n = 0$ 이므로,
$t = 0$ 또는 $a = \mathbf{0}$ 이 된다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

제 3절. 벡터의 내적

1. 두 벡터가 이루는 각의 코사인값은, 두 벡터가 v, w 일 때

$v \cdot w = |v||w|\cos\theta$ 에서 $\cos\theta = \dfrac{v\cdot w}{|v||w|}$.

(1) $\cos\theta = \dfrac{(2,-1)\cdot(-1,1)}{|(2,-1)||(-1,1)|} = \dfrac{-3}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}$.

(2) $\cos\theta = \dfrac{(1,1)\cdot(1,\sqrt{3})}{|(1,1)||(1,\sqrt{3})|} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot 2}$.

(3) $\cos\theta = \dfrac{(1,2,3)\cdot(3,2,1)}{|(1,2,3)||(3,2,1)|} = \dfrac{10}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = \dfrac{5}{7}$

(4) $\cos\theta = \dfrac{(-1,-2,3)\cdot(4,5,6)}{|(-1,-2,3)||(4,5,6)|} = \dfrac{4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{77}}$

(5) $\cos\theta = \dfrac{(1,1,1,1)\cdot(1,2,3,4)}{|(1,1,1,1)||(1,2,3,4)|} = \dfrac{10}{2\cdot\sqrt{30}} = \dfrac{5}{\sqrt{30}}$.

(6) $\cos\theta = \dfrac{(0,1,2,3,4)\cdot(0,0,0,0,1)}{|(0,1,2,3,4)||(0,0,0,0,1)|} = \dfrac{4}{\sqrt{30}\cdot 1} = \dfrac{4}{\sqrt{30}}$.

2. (1) $a = (2,-1,1)$, $b = (1,-3,-5)$, $c = (3,-4,-4)$

$\cos\theta_1 = \dfrac{(b-a)\cdot(c-a)}{|(b-a)||(c-a)|} = \dfrac{(-1,-2,-6)\cdot(1,-3,-5)}{|(-1,-2,-6)||(1,-3,-5)|} = \sqrt{\dfrac{35}{41}}$.

$\cos\theta_2 = \dfrac{(c-b)\cdot(a-b)}{|(c-b)||(a-b)|} = \dfrac{(2,-1,1)\cdot(1,2,6)}{|(2,-1,1)||(1,2,6)|} = \sqrt{\dfrac{6}{41}}$.

$\cos\theta_3 = \dfrac{(a-c)\cdot(b-c)}{|(a-c)||(b-c)|} = \dfrac{(-1,3,5)\cdot(-2,1,-1)}{|(-1,3,5)||(-2,1,-1)|} = 0$.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

(2) $\mathbf{a} = (3,1,1)$ $\quad \mathbf{b} = (-1,2,1)$ $\quad \mathbf{c} = (2,-2,5)$

$$\cos\theta_1 = \frac{(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})}{|(\mathbf{b}-\mathbf{a})||(\mathbf{c}-\mathbf{a})|} = \frac{(-4,1,0)\cdot(-1,-3,4)}{|(-4,1,0)||(-1,-3,4)|} = \frac{1}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{26}}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{(\mathbf{c}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})}{|(\mathbf{c}-\mathbf{b})||(\mathbf{a}-\mathbf{b})|} = \frac{(3,-4,4)\cdot(4,-1,0)}{|(3,-4,4)||(4,-1,0)|} = \frac{16}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{17}}$$

$$\cos\theta_3 = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{c})}{|(\mathbf{a}-\mathbf{c})||(\mathbf{b}-\mathbf{c})|} = \frac{(1,3,-4)\cdot(-3,4,-4)}{|(1,3,-4)||(-3,4,-4)|} = \frac{25}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{41}}$$

3. $p_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}$.

(1) $p_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \dfrac{(1,-1,1)\cdot(2,1,5)}{(1,-1,1)\cdot(1,-1,1)}(1,-1,1) = 2(1,-1,1) = (2,-2,2)$.

(2) $p_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \dfrac{(1,-1,1)\cdot(2,3,1)}{(1,-1,1)\cdot(1,-1,1)}(1,-1,1) = 0(1,-1,1) = (0,0,0)$

(3) $p_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \dfrac{(-5,2,7)\cdot(3,-1,2)}{(-5,2,7)\cdot(-5,2,7)}(-5,2,7) = -\dfrac{1}{26}(-5,2,7) = \left(\dfrac{5}{26}, -\dfrac{1}{13}, -\dfrac{7}{26}\right)$

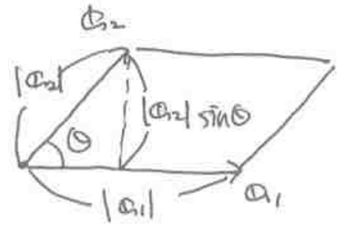
(4) $p_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \dfrac{(3,4)\cdot(-4,3)}{(3,4)\cdot(3,4)}(3,4) = 0(3,4) = (0,0)$

4. $\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$ 이므로,

$$\begin{aligned}|a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k|^2 &= (a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k)\cdot(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k) \\ &= \sum_{i,j=1}^{k}(a_i\mathbf{v}_i)\cdot(a_j\mathbf{v}_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{k} a_i a_j\, \mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \\ &= a_1^2 + \cdots + a_k^2.\end{aligned}$$

하승무(수리과학부)

5. 두 벡터가 이루는 나란히꼴의 넓이가 $|a||b|\sin\theta$ 임은 당연하다.



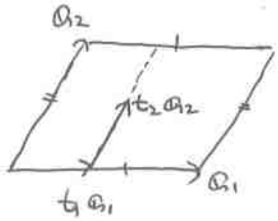
그러면, 나란히 꼴의 넓이는

$$|a||b|\sin\theta = |a||b|\sqrt{1-\cos^2\theta} = |a||b|\sqrt{1-\left(\frac{a\cdot b}{|a||b|}\right)^2}$$

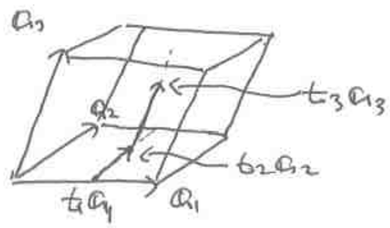
$$= \sqrt{|a|^2|b|^2-(a\cdot b)^2}$$

이다.

* 나란히꼴의 은밀



$0 \le t_1, t_2 \le 1$ 에서 움직이면 평행사변형이 된다.



$0 \le t_1, t_2, t_3 \le 1$ 에서 움직이면 평행육면체가 된다.

6. (8장 1절 연습문제 13번 참고. 외적을 배운 후 다시 풀어보자.)
$A=(x_1,x_2,x_3)$, $B=(y_1,y_2,y_3)$ 이라 하자. 우선 A, B의 나란히꼴의 넓이는

$$a=\sqrt{|A|^2|B|^2-(A\cdot B)^2} = \sqrt{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)-(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2}$$

$$= \sqrt{(x_2y_3-x_3y_2)^2+(x_3y_1-x_1y_3)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2}$$

이고, P를 yz-평면에 정사영한 것의 넓이 a_1는 $(0,x_2,x_3)$, $(0,y_2,y_3)$ 으로부터 만들어지는 나란히꼴의 넓이와 같으므로

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

$$a_1 = \sqrt{(x_2^2+x_3^2)(y_2^2+y_3^2) - (x_2y_2+x_3y_3)^2} = |x_2y_3 - x_3y_2|$$

이며, 마찬가지로 a_2, a_3을 구하면

$$a_2 = |x_3y_1 - x_1y_3|, \quad a_3 = |x_1y_2 - x_2y_1|$$

이다. 따라서

$$a^2 = (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

가 된다. 또, P와 yz-평면 사이의 각 θ_1 의 코사인값을 구하기 위해, A, B 의 나란히꼴에 수직인 벡터, 즉 A, B에 동시에 수직인 벡터 $\mathbf{m}$ 을 구하자.
$\mathbf{m} = (\alpha, \beta, \gamma)$ 라 하면, $A \cdot \mathbf{m} = B \cdot \mathbf{m} = 0$ 에서

$$x_1\alpha + x_2\beta + x_3\gamma = y_1\alpha + y_2\beta + y_3\gamma = 0$$

이 된다. 이를 만족시키는 α, β, γ 를 하나 구해서 $\mathbf{m}$을 구하면

$$\mathbf{m} = (x_2y_3 - x_3y_2,\ x_3y_1 - x_1y_3,\ x_1y_2 - x_2y_1)$$

이다. 각 θ_1 는 $\mathbf{m}$과 $\mathbf{e}_1$ (yz-평면에 수직) 사이의 각과 같으므로

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_1|}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{e}_1|} = \frac{|x_2y_3 - x_3y_2|}{\sqrt{(x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2}}$$

$$= \frac{a_1}{a}$$

이다. (여기서, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 인 것이 자연스러우므로, 분자에 절댓값을 씌움)
따라서 $a_1 = a\cos\theta_1$ 이다. 마찬가지 방법으로 하면,
$a_2 = a\cos\theta_2$, $a_3 = a\cos\theta_3$ 도 얻는다. 따라서

$$|(\cos\theta_1, \cos\theta_2, \cos\theta_3)| = \left|\left(\frac{a_1}{a}, \frac{a_2}{a}, \frac{a_3}{a}\right)\right|$$

$$= \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{a} = 1$$

이고, $(\cos\theta_1, \cos\theta_2, \cos\theta_3)$ 은 단위벡터이다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

7. 문제 6에 의하여, $\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$.

8. n-벡터 $\mathbf{v}=(v_1, v_2, \dots, v_n)$ 이 모든 n-벡터와 수직이라고 하자. 그러면 $i=1,2,\dots,n$ 에 대하여

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_i=(v_1,\dots,v_n)\cdot(0,0,\dots,0,\overset{i\text{번째}}{1},0,\dots,0)=v_i=0$$

이므로, $v_1=v_2=\dots=v_n=0$ 이고, $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ 이 된다.

9. $\mathbf{v}_1=(v_1,\dots,v_n)$, $\mathbf{v}_2=(w_1, w_2, \dots, w_n)$ 이라 하자.

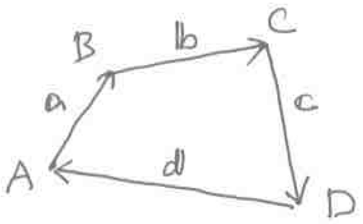
각 $i=1,2,\dots,n$ 에 대하여,

$$\mathbf{v}_1^*(\mathbf{e}_i)=\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{e}_i=v_i,\quad \mathbf{v}_2^*(\mathbf{e}_i)=\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{e}_i=w_i$$

이고 $\mathbf{v}_1^*=\mathbf{v}_2^*$ 이므로, $v_i=w_i$ 이다. 즉, $v_1=w_1, \dots, v_n=w_n$ 이므로, $\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_2$ 가 된다.

10. $$\begin{aligned}|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}| &\iff |\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2\\ &\iff (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})\\ &\iff \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\\ &\iff \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0.\end{aligned}$$

11. $A=O$ 라 하고, $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{CD}=\mathbf{c}$, $\overrightarrow{DA}=\mathbf{d}$ 라 하자.
그러면 $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}=\mathbf{0}$ 이다. 또, $A=\mathbf{0}$, $B=\mathbf{a}$, $C=\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $D=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ 가 된다. 그러면 $\frac{1}{2}(A+C)=\frac{1}{2}(B+D)$는 $0+(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{a}+(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$, 즉 $\mathbf{a}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$ 과 같은 식이 된다.



또, $\overrightarrow{AC}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\overrightarrow{BD}=\mathbf{b}+\mathbf{c}$ 이다.

따라서

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$$

는, 곧

$$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 + |\mathbf{d}|^2 = |\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2$$

와 같다. 그런데 $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}=\mathbf{0}$ 이므로

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} + |\mathbf{c}|^2 \quad \cdots ①$$

$$= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 + |\mathbf{d}|^2$$

$$= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 + |-(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})|^2$$

$$= 2|\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{b}|^2 + 2|\mathbf{c}|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} + 2\mathbf{c}\cdot\mathbf{a} \quad \cdots ②$$

가 되어, ① = ② 에서

$$|\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{c}\cdot\mathbf{a} + |\mathbf{c}|^2 = 0,$$

즉 $|\mathbf{a}+\mathbf{c}|^2 = 0$ 임을 얻는다. 곧, $\mathbf{a}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$ 이고, 이로부터 원하는 결론을 얻는다.

12 (1) 각 $i = 1, 2, \cdots, n$ 에 대하여 $\cos\theta_i = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_i}{|\mathbf{a}||\mathbf{e}_i|} = \dfrac{a_i}{|\mathbf{a}|}$. 즉,

$$\cos\theta_1 = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \ \cdots, \ \cos\theta_n = \frac{a_n}{|\mathbf{a}|}.$$

(2) $\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cdots + \cos^2\theta_n = \dfrac{a_1^2}{|\mathbf{a}|^2} + \cdots + \dfrac{a_n^2}{|\mathbf{a}|^2} = \dfrac{|\mathbf{a}|^2}{|\mathbf{a}|^2} = 1.$

(3) 벡터 $(\cos\theta_1, \cdots, \cos\theta_n)$ 이 단위벡터임은 (2)에서 살펴보았다.

또, 이 벡터는

$$(\cos\theta_1, \cdots, \cos\theta_n) = \left(\frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \cdots, \frac{a_n}{|\mathbf{a}|}\right) = \frac{1}{|\mathbf{a}|}(a_1, \cdots, a_n)$$

$$= \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

이므로, $\mathbf{a}$와 같은 방향이다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

13. $\mathbb{V}$가 z축과 이루는 각을 θ_z라 하자. 그러면 문제 12에 의하여 $\mathbb{V} = (\cos\theta_x, \cos\theta_y, \cos\theta_z)$ 이다. 이때 $\mathbb{V}$의 xy-평면 정사영은

$$V_{xy} = (\cos\theta_x, \cos\theta_y, 0)$$

이므로, $\mathbb{V}$가 xy 평면과 이루는 각이 α일 때

$$\cos\alpha = \frac{\mathbb{V}\cdot V_{xy}}{|\mathbb{V}|\cdot|V_{xy}|} = \frac{\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y}{\sqrt{\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y}}$$

$$= \sqrt{\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y}$$

에서 $\alpha = \arccos\sqrt{\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y}$ 이다. $\theta_x = \theta_y = 60^\circ$ 이면,

$$\alpha = \arccos\sqrt{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

이다.

14. $\overrightarrow{PA} = (1-t, 1-t^2)$, $\overrightarrow{PA'} = (-1-t, 1-t^2)$ 이므로,

$$\cos\theta(t) = \frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PA'}}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PA'}|} = \frac{(-1+t^2) + (1-t^2)^2}{\sqrt{(1-t)^2+(1-t^2)^2}\sqrt{(-1-t)^2+(1-t^2)^2}}$$

이다. 따라서

$$\lim_{t\searrow 1}\cos\theta(t) = \lim_{t\searrow 1}\frac{(t^2-1) + (t^2-1)^2}{\sqrt{(t-1)^2+(t^2-1)^2}\sqrt{(t+1)^2+(t^2-1)^2}}$$

양변 $|t-1| = t-1$로 나눔. $t\searrow 1$ 이므로 $t>1$

$$= \lim_{t\searrow 1}\frac{t+1 + (t-1)(t+1)^2}{\sqrt{1+(t+1)^2}\sqrt{(t+1)^2+(t^2-1)^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}\cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\lim_{t\nearrow 1}\cos\theta(t) = \lim_{t\nearrow 1}\frac{(t^2-1) + (1-t^2)^2}{\sqrt{(1-t)^2+(1-t^2)^2}\sqrt{(1+t)^2+(1-t^2)^2}}$$

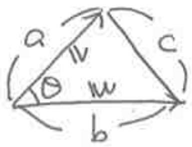
양변 $|t-1| = 1-t$로 나눔. $t\nearrow 1$ 이므로 $t<1$

$$= \lim_{t\nearrow 1}\frac{-(t+1) + (1-t)(t+1)^2}{\sqrt{1+(1+t)^2}\sqrt{(1+t)^2+(1-t^2)^2}}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{5}\cdot 2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

하승우 (수리과학부)

15. 다음 그림과 같이 벡터 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 를 두면, $\mathbf{v}, \mathbf{w}$의 사잇각이 θ 이다.



이때, $|\mathbf{v}-\mathbf{w}| = c$ 임은 명백하다. 그러면,

$$c^2 = |\mathbf{v}-\mathbf{w}|^2 = |\mathbf{v}|^2+|\mathbf{w}|^2-2\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = |\mathbf{v}|^2+|\mathbf{w}|^2-2|\mathbf{v}||\mathbf{w}|\cos\theta$$
$$= a^2+b^2-2ab\cos\theta$$

이다.

16. CBS 부등식을 사용한다.

$$(x+y+z)^2 \le \left(x^2+(\sqrt{2}y)^2+(\sqrt{3}z)^2\right)\left(1^2+\frac{1}{\sqrt{2}^2}+\frac{1}{\sqrt{3}^2}\right)$$
$$= (x^2+2y^2+3z^2)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{6}.$$

이때 등호가 성립하는 경우는

$$x : \sqrt{2}y : \sqrt{3}z = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{1}{\sqrt{3}}$$

일 때, 즉 $x : y : z = 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ 일 때이다. 이 때의 x, y, z의 값은, $x^2+2y^2+3z^2=1$ 에서 $x=\pm\sqrt{\frac{6}{11}}$, $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{11}}$, $z=\pm\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{11}}$ (복부호 동순) 이고, 이때 $x+y+z=\pm\sqrt{\frac{11}{6}}$ 이다. 따라서 $x+y+z$의 최댓값은 $\sqrt{\frac{11}{6}}$, 최솟값은 $-\sqrt{\frac{11}{6}}$ 이다.

17. 당구공의 질량을 m이라고 하면, 운동량 보존 법칙에 의하여

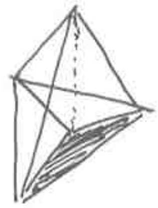
$$m\mathbf{v}_0 = m\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2, \quad \text{즉} \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

이다. 또, $\mathbf{v}_1$과 $\mathbf{v}_2$는 수직이다. 따라서 $\mathbf{v}_1$과 $\mathbf{v}_2$는 $\mathbf{v}_0$를 수직 방향과 수평 방향 성분으로 분리한 것과 같다. P_0를 치는 방향은 P_1의 수직 아래 방향이며 P_2의 수평 왼쪽 방향인 P_*를 향해야 하며, $|\mathbf{v}_2| = v_2$ 이므로 벡터 $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_2$의 사잇각을 θ라 했을 때 P_0의 속력은 $\frac{v_2}{\cos\theta}$ 여야 한다.

하승우 (수리과학부)

18. 정사면체의 경우. 밑면을 하나 정하고, 밑면이 아닌 세 면을 밑면으로 정사영해 보자. 이때 각 정사영된 면은 밑면 내부로 들어온다. 따라서 $0 \le \theta_4 \le \pi/2$ 임을 안다. 또, 정사영된 각 면의 넓이는 같고, 세 면이 겹침 없이 정사영되어 밑면을 채운다. 따라서 한 면의 넓이를 S라 하면, 옆면의 밑면으로의 정사영의 넓이는 $S/3$ 이다. 이때

$$S|\cos\theta_4| = S\cos\theta_4 = \frac{S}{3}$$

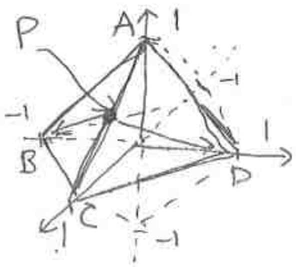


이므로, $\cos\theta_4 = \frac{1}{3}$ 이다.

정팔면체의 경우, 좌표공간에서 6개의 꼭지점을 $(\pm1,0,0)$, $(0,\pm1,0)$, $(0,0,\pm1)$ 이라 하자. 특히, $A=(0,0,1)$, $B=(0,-1,0)$, $C=(1,0,0)$, $D=(0,1,0)$ 이라 하고 $\triangle ABC$와 $\triangle ACD$ 사이의 각을 재면 된다. 이때 $\triangle ABC$와 $\triangle ACD$는 정삼각형이므로, $\overline{AC}$의 중점을 P라 할 때 $\overrightarrow{PB}$와 $\overrightarrow{PD}$의 사잇각을 재도 된다.

$P=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$ 이므로,

$\overrightarrow{PB}=\left(-\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{PD}=\left(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}\right)$



에서

$$\cos\theta_8 = \frac{\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}}{|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PD}|} = \frac{-1/2}{\sqrt{3/2}\cdot\sqrt{3/2}} = -\frac{1}{3}.$$

* 계산 방법은 여러 가지가 있다. 정팔면체의 경우, $\triangle ABC$와 $\triangle ACD$의 '법벡터'를 구해서 두 법벡터 사이의 각을 구해도 된다. 사실 이게 더 쉽다. (직관적이다). 5장 4절과 8장 1절을 공부한 뒤 시도해 보라. 구글링하면 정다면체의 두 면 사이의 거리를 모두 구할 수 있는 공식도 찾을 수 있다.

이때 $\cos(\theta_4+\theta_8) = \cos\theta_4\cos\theta_8 - \sin\theta_4\sin\theta_8 = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = 0$
이므로 $\theta_4+\theta_8 = \pi$ 이다. 그 덕분에 다음과 같이 하면 정사면체와 정팔면체로 평행육면체를 만들 수 있고, 이것으로 공간을 채울 수 있다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

19. 두 개의 벡터에 대한 크기, 사잇각, 합 등에 관한 문제로, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 두 벡터로 인해 '생기는' 평면 내에서만 보면 된다. 따라서, 2차원 좌표평면에서만 생각해도 충분하다.

평면 직교좌표계로 $\mathbf{a} = (r, 0)$ $(r>0)$, $\mathbf{b} = (x, y)$ 이도록 잡자.
이때

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{rx}{r\sqrt{x^2+y^2}}$$

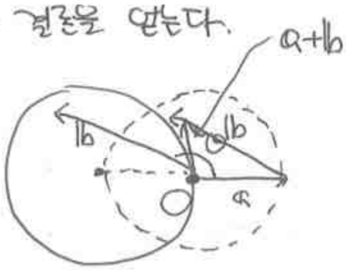
이므로

$$|\mathbf{b}| < -2|\mathbf{a}|\cos\theta \iff \sqrt{x^2+y^2} < -2r\frac{rx}{r\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\iff x^2+y^2 < -2rx$$
$$\iff (x+r)^2+y^2 < r^2$$

이 된다. 그런데 $\mathbf{a}+\mathbf{b} = (x+r, y)$ 이므로

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = (x+r)^2+y^2 < r^2 = |\mathbf{a}|^2$$

가 되어 원하는 결론을 얻는다.



$\mathbf{a}+\mathbf{b}$는 원점 중심 반지름 $|\mathbf{a}|$ 인 원 내부에 있다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

제 4절. 평면과 직선의 방정식, 무게중심

1. 직선 $x+\frac{b}{m}=\frac{y}{m}$, $x+\frac{b'}{m'}=\frac{y}{m'}$ 의 방향 벡터는 각각 $(1,m)$, $(1,m')$ 이다. 이것이 수직일 필요충분조건은 $(1,m)\cdot(1,m')=0$, 즉 $mm'=-1$ 이다.

2. 직선 $ax+by=c$ 는 $\frac{x}{b}=\frac{y-c/b}{a}$ 로 쓸 수 있고, 방향벡터는 $(b,-a)$ 이다.

   (a) 두 직선의 방향벡터가 $(-5,-3)$, $(3,-2)$ 이고, $(-5,-3)\cdot(3,-2)=-9\neq 0$ 이므로, 수직이 아니다.

   (b) 두 직선의 방향벡터가 $(-5,-3)$, $(1,-2)$ 이고, $(-5,-3)\cdot(1,-2)=1\neq 0$ 이므로, 수직이 아니다.

   (c) 두 직선의 방향벡터가 $(7,-2)$, $(-1,-1)$ 이고, $(7,-2)\cdot(-1,-1)=-5\neq 0$ 이므로, 수직이 아니다.

   (d) 두 직선의 방향벡터가 $(1,-1)$, $(-1,-1)$ 이고, $(1,-1)\cdot(-1,-1)=0$ 이므로, 수직이다.

3. 원점과 P를 지나는 직선과 주어진 평면의 교점을 구하면 된다. 이때 직선의 방향벡터가 $\overrightarrow{OP}=(p,q,r)$ 이므로, 직선의 매개변수 방정식은

$$(0,0,0)+t(p,q,r)=(pt,qt,rt)$$

이고, 점 (pt,qt,rt) 가 주어진 평면에 있어야 하므로,

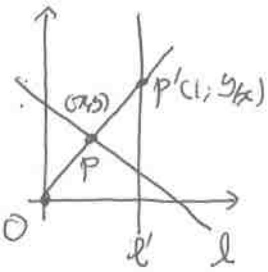
$$\underbrace{a\cdot pt+b\cdot qt+c\cdot rt=d}_{(*)},\quad \text{즉}\quad t=\frac{d}{ap+bq+cr}$$

이다. 이때 상의 위치는 $\left(\frac{pd}{ap+bq+cr}, \frac{qd}{ap+bq+cr}, \frac{rd}{ap+bq+cr}\right)$ 이다.

($ap+bq+cr=0$ 이면, (*)의 해가 없으므로, 상이 생기지 않는다.)

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

4. 일반성을 잃지 않고, $O=(0,0)$, $l: ax+by=1$, $l': x=1$ 로 둘 수 있다.
이때 $P=(x,y)$ $(x\neq 0)$ 가 주어지면, $P'=(1, y/x)$ 가 된다.
$i=1,2,3,4$에 대하여 $P_i=(x_i, y_i)$ 라 하면
$P_i'=\left(1, \frac{y_i}{x_i}\right)$ 라 할 수 있다. 이때 보여야 하는 식은



$$\frac{\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}\sqrt{(x_4-x_2)^2+(y_4-y_2)^2}}{\sqrt{(x_4-x_1)^2+(y_4-y_1)^2}\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}}$$

$$= \frac{\left|y_3/x_3 - y_1/x_1\right|\left|y_4/x_4 - y_2/x_2\right|}{\left|y_4/x_4 - y_1/x_1\right|\left|y_3/x_3 - y_2/x_2\right|}$$

이다. 그런데 $ax_i+by_i=1$, $ax_j+by_j=1$ 에서 $a(x_i-x_j)+b(y_i-y_j)=0$
이므로, $b\neq 0$ 일 때 $y_i-y_j = \frac{a}{b}(x_i-x_j)$ 이다. 그러면

$$(\text{좌변}) = \frac{\sqrt{\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)(x_3-x_1)^2}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)(x_4-x_2)^2}}{\sqrt{\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)(x_4-x_1)^2}\sqrt{\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)(x_3-x_2)^2}} = \frac{|x_3-x_1||x_4-x_2|}{|x_4-x_1||x_3-x_2|}$$

이고, $\frac{y}{x} = \frac{1}{b}\frac{1}{x} - \frac{a}{b}$ 에서

$$(\text{우변}) = \frac{\left|\frac{1}{b}\left(\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_1}\right)\right|\left|\frac{1}{b}\left(\frac{1}{x_4}-\frac{1}{x_2}\right)\right|}{\left|\frac{1}{b}\left(\frac{1}{x_4}-\frac{1}{x_1}\right)\right|\left|\frac{1}{b}\left(\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_2}\right)\right|} = \frac{\left|\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_1}\right|\left|\frac{1}{x_4}-\frac{1}{x_2}\right|}{\left|\frac{1}{x_4}-\frac{1}{x_1}\right|\left|\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_2}\right|}$$

$$= \frac{|x_3-x_1||x_4-x_2|}{|x_4-x_1||x_3-x_2|}$$

분자·분모에 $|x_1x_2x_3x_4|$ 곱함

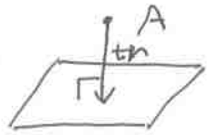
이므로 등식이 성립한다. $b=0$ 이면 $l: ax=1$ 이므로 x_i 값이 모두 같고

$$(\text{좌변}) = \frac{|y_3-y_1||y_4-y_2|}{|y_4-y_1||y_3-y_2|} = \frac{\left|y_3/x_3 - y_1/x_1\right|\left|y_4/x_4 - y_2/x_2\right|}{\left|y_4/x_4 - y_1/x_1\right|\left|y_3/x_3 - y_2/x_2\right|} = (\text{우변})$$

이므로 등식이 성립한다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

5. (a) 점 A를 지나고 평면의 법벡터 n 방향인 직선과 평면의 교점이 구하는 수선의 발이다. 즉, $A+tn$이 평면 위에 있도록 하는 t의 값을 구한다. $X = A+tn$이 평면 위의 점이므로,



$$0 = n\cdot(A+tn-P) = t|n|^2 + n\cdot(A-P)$$

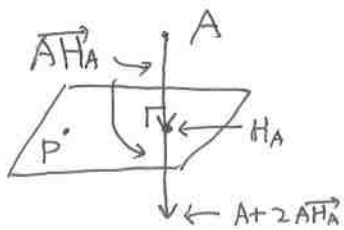
에서 $t = -\dfrac{n\cdot(A-P)}{|n|^2}$ 이고, 구하는 수선의 발은

$$A+tn = A - \frac{n\cdot\overrightarrow{PA}}{|n|^2}n$$

이다.

(b) A''를 구하면 A'도 구할 수 있다. 점 A의 평면 $n\cdot(X-P)=0$ 에 대한 수선의 발을 H_A라 하면,

$$\overrightarrow{AH_A} = -\frac{n\cdot\overrightarrow{PA}}{n\cdot n}n$$



이고, 구하는 대칭점 A''는 $A'' = A + 2\overrightarrow{AH_A}$ 이므로

$$A'' = A - 2\frac{n\cdot\overrightarrow{PA}}{n\cdot n}n$$

이다. A'는 $P=0$ 일 때, 즉 $A' = A - 2\dfrac{n\cdot A}{n\cdot n}n$ 이다.

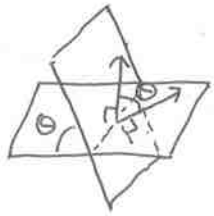
6. 먼저 점 P의 평면에 대한 수선의 발 H_P를 찾는다. 평면의 법벡터는 $(1,1,2)$이고, $(1,1,1)+t(1,1,2) = (t+1, t+1, 2t+1)$ 이 평면 위에 있도록 하는 t의 값을 구하면 $(t+1)+(t+1)+2(2t+1) = 1$ 에서 $t = -\frac{1}{2}$ 이다. 따라서 $H_P = (1,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ 이다. 그러면 구하는 대칭점은

$$P + 2\overrightarrow{PH_P} = (1,1,1) + 2\left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -1\right) = (0,0,-1)$$

이다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

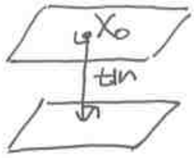
7. 두 평면이 이루는 각은, 각 평면의 법벡터가 이루는 각과 같다. 따라서 주어진 두 평면이 이루는 각은 각각의 법벡터 $(2,4,1)$, $(1,-3,2)$ 가 이루는 각과 같고, 그 코사인값은



$$\frac{(2,4,1)\cdot(1,-3,2)}{|(2,4,1)|\,|(1,-3,2)|} = \frac{-8}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{14}} = -\frac{8}{7\sqrt{6}}$$

이다.

8. 두 평면은 평행하므로, 평면 $\mathbf{n}\cdot X = c_1$ 위의 한 점 X_0 에 대하여, $X_0 + t\mathbf{n}$ 이 평면 $\mathbf{n}\cdot X = c_2$ 위에 있을 때 $|t\mathbf{n}|$ 이 두 평면 사이의 거리와 같다. X_0는 $\mathbf{n}\cdot X = c_1$ 위에 있으므로, $\mathbf{n}\cdot X_0 = c_1$ 이고, $X_0 + t\mathbf{n}$ 이 $\mathbf{n}\cdot X = c_2$ 에 있으려면



$$\mathbf{n}\cdot(X_0 + t\mathbf{n}) = \mathbf{n}\cdot X_0 + t|\mathbf{n}|^2 = c_1 + t|\mathbf{n}|^2 = c_2$$

에서 $t = \dfrac{c_2 - c_1}{|\mathbf{n}|^2}$ 이다. 따라서 두 평면 사이의 거리는

$$|t\mathbf{n}| = \left|\frac{c_2 - c_1}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}\right| = \frac{|c_1 - c_2|}{|\mathbf{n}|}$$

이다.

9. 점 $(0,0,1)$과 점 $(x,y,0)$ 을 지나는 직선의 매개변수 식은

$$(0,0,1) + t\big((x,y,0) - (0,0,1)\big) = (tx,\ ty,\ 1-t)$$

직선 위의 점이 구면 위에 있으려면

$$1 = (tx)^2 + (ty)^2 + (1-t)^2 \Rightarrow (1+x^2+y^2)t^2 - 2t = 0$$

이므로, $t = 0$ 또는 $t = \dfrac{2}{1+x^2+y^2}$. $t=0$ 이면 $(0,0,1)$ 이므로, 구하는 점은 $t = \dfrac{2}{1+x^2+y^2}$ 일 때 $\left(\dfrac{2x}{1+x^2+y^2},\ \dfrac{2y}{1+x^2+y^2},\ \dfrac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right)$.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

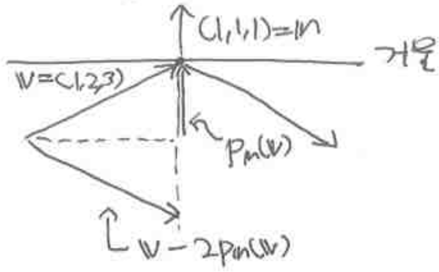
10. 반사된 빛이 지나는 경로를 알아야 한다.

(발사된 빛이 거울면에 닿는 점)

$(0,0,0)+t(1,2,3)$ 이 평면 $x+y+z=1$ 위에 있는 경우로, 이때
$= (t,2t,3t)$

$t+2t+3t=1$ 에서 $t=\frac{1}{6}$ 이고, 거울면에 닿는 점은 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ 이다.

(반사된 빛의 방향)



발사된 빛의 방향을 $v=(1,2,3)$, 거울면의 법벡터를 $n=(1,1,1)$ 이라 하면, 오른쪽 그림에서 반사된 빛의 방향 v^*는

$$v^* = v - 2p_n(v) = v - 2\frac{n\cdot v}{n\cdot n}n$$

이다. 이를 계산하면

$$v^* = (1,2,3) - 2\frac{(1,1,1)\cdot(1,2,3)}{(1,1,1)\cdot(1,1,1)}(1,1,1) = (-3,-2,-1)$$

이다.

따라서 반사된 빛은 점 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ 에서 출발하며 $(-3,-2,-1)$ 방향으로 향한다. 이 반사된 빛이 xy-평면 $z=0$ 에 닿으려면 반사된 빛의 매개변수 식

$$\left(\frac{1}{6}-3t,\ \frac{1}{3}-2t,\ \frac{1}{2}-t\right)$$

의 z좌표가 0 이어야 하므로, $t=\frac{1}{2}$ 이다. 따라서 구하는 점은

$$\left(\frac{1}{6}-\frac{3}{2},\ \frac{1}{3}-1,\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{4}{3},\ -\frac{2}{3},\ 0\right)$$

이다.

* 위 그림과 같이, v 방향의 빛이 n 이 수직인 평면에 반사되면

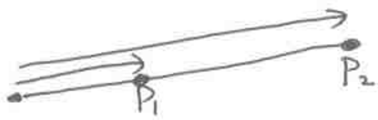
$$v^* = v - 2\frac{n\cdot v}{n\cdot n}n$$

방향을 향한다. 기억하면 좋지만, 위와 같이 그림을 그려 유도해서 사용해도 좋다. 이 식은 고학기에도 등장한다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

11. 세 점 P_0, P_1, P_2가 한 직선 위에 있으면,

$$k\overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{P_0P_2}$$



인 실수 k가 존재한다. 그러면

$$k\overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{P_0P_2} \Rightarrow k(P_1-P_0) = P_2-P_0$$

$$\Rightarrow (k-1)P_0 - kP_1 + P_2 = 0$$

에서 $(k-1)-k+1=0$, $(k-1,-k,1)\neq(0,0,0)$ 이므로

$t_0=k-1$, $t_1=-k$, $t_2=1$ 이라 하면 주어진 조건을 만족한다.

역으로, $t_0+t_1+t_2=0$, $(t_0,t_1,t_2)\neq(0,0,0)$, $t_0P_0+t_1P_1+t_2P_2=0$

이라 하자. 그러면,

$$\begin{aligned} t_0P_0+t_1P_1+t_2P_2 &= t_1P_1 - t_1P_0 + (t_0+t_1)P_0 + t_2P_2 \\ &= t_1P_1 - t_1P_0 - t_2P_0 + t_2P_2 \\ &= t_1\overrightarrow{P_0P_1} + t_2\overrightarrow{P_2P_0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

에서 $t_1\overrightarrow{P_0P_1} = -t_2\overrightarrow{P_2P_0}$ 가 되어, P_0, P_1, P_2가 한 직선 위에 있게 된다.

12. $P, Q\in K$ 이면, $t_0, t_1, \dots, t_k$, $s_0, s_1, \dots, s_k \geq 0$, $t_0+\dots+t_k=1$, $s_0+\dots+s_k=1$

인 $t_0, t_1, \dots, t_k$, $s_0, s_1, \dots, s_k$ 가 존재하여

$$P = t_0P_0+\dots+t_kP_k, \qquad Q = s_0P_0+\dots+s_kP_k$$

이다. 이때 $0\leq t\leq 1$ 이면

$$(1-t)P+tQ = ((1-t)t_0+ts_0)P_0 + ((1-t)t_1+ts_1)P_1+\dots+((1-t)t_k+ts_k)P_k$$

인데, $i=1,2,\dots,k$에 대하여 $(1-t)t_i+ts_i\geq 0$ 이고,

$$\begin{aligned} ((1-t)t_0+ts_0)+\dots+((1-t)t_k+ts_k) &= (1-t)(t_0+\dots+t_k)+t(s_0+\dots s_k) \\ &= (1-t)+t = 1 \end{aligned}$$

이므로, $(1-t)P+tQ\in K$ 이 되어 K는 볼록집합입니다.

$\boxed{\text{연습 9}}$ (수리과학부)

K의 최소성은 다음을 말한다.

볼록집합 L이 $P_0, \dots, P_k \in L$ 이면, 항상 $K \subseteq L$ 이다.

임의의 볼록집합 L이 주어졌을 때 (단, $P_0, \dots, P_k \in L$)
$i=0, 1, \dots, k$ 에 대해, 명제

$S(i)$: $t_0, \dots, t_i \geq 0$, $t_0 + \dots + t_i = 1$ 이면, $t_0P_0 + \dots + t_iP_i \in L$

를 보이자.

$S(0)$: $t_0 = 1$ 이면 $t_0P_0 = P_0 \in L$: 당연.

$S(i)$ $(i=0, 1, \dots, k-1)$ 이 성립하면, $t_0, \dots, t_{i+1} \geq 0$, $t_0 + \dots + t_{i+1} = 1$ 일 때, ($t_{i+1} \neq 1$ 이면)

$$t_0P_0 + \dots + t_{i+1}P_{i+1} = (1-t_{i+1})\left(\frac{t_0}{1-t_{i+1}}P_0 + \dots + \frac{t_i}{1-t_{i+1}}P_i\right) + t_{i+1}P_{i+1}$$

인데, $\dfrac{t_0}{1-t_{i+1}}, \dots, \dfrac{t_i}{1-t_{i+1}} \geq 0$,

$$\frac{t_0}{1-t_{i+1}} + \dots + \frac{t_i}{1-t_{i+1}} = \frac{t_0 + \dots + t_i}{1-t_{i+1}} = \frac{1-t_{i+1}}{1-t_{i+1}} = 1$$

이므로 $S(i)$ 에 의해 $\dfrac{t_0}{1-t_{i+1}}P_0 + \dots + \dfrac{t_i}{1-t_{i+1}}P_i \in L$ 이고, 따라서

$$(1-t_{i+1})\left(\frac{t_0}{1-t_{i+1}}P_0 + \dots + \frac{t_i}{1-t_{i+1}}P_i\right) + t_{i+1}P_{i+1} \in L$$

이다 (볼록집합의 정의). $t_{i+1} = 1$ 이면, $t_0P_0 + \dots + t_{i+1}P_{i+1} = P_{i+1} \in L$ 이다.
따라서 $S(i+1)$도 참이다.

그러면, 귀납법에 의해 $S(k)$ 가 참인데, 이는 곧 $K \subseteq L$ 임을 뜻한다.
따라서 K는 $P_0, \dots, P_k$ 를 포함하는 최소의 볼록집합이다.

하승우 (수리과학부)

13. 두 집합 A, B가 볼록하다고 하자. $P, Q \in A \cap B$라 하자.

먼저, $P, Q \in A$ 이므로, $0 \le t \le 1$ 일 때 $tP + (1-t)Q \in A$ 이다.

또, $P, Q \in B$ 이므로, $0 \le t \le 1$ 일 때 $tP + (1-t)Q \in B$ 이다.

그러므로, $0 \le t \le 1$ 일 때 $tP + (1-t)Q \in A \cap B$ 이고, $A \cap B$는 볼록집합이다.

①

14. $X, Y \in \mathbb{B}^n(C, r)$ 이면, $|X - C| < r$, $|Y - C| < r$ 이다. 이때 $0 \le t \le 1$ 이면

$$
\begin{aligned}
|tX + (1-t)Y - C| &= |t(X-C) + (1-t)(Y-C)| \\
&\le t|X-C| + (1-t)|Y-C| \\
&< tr + (1-t)r = r
\end{aligned}
$$

이므로, $tX + (1-t)Y \in \mathbb{B}^n(C, r)$ 이고, $\mathbb{B}^n(C, r)$은 볼록집합이다.

$X, Y \in \overline{\mathbb{B}}^n(C, r)$ 이면, $|X - C| \le r$, $|Y - C| \le r$ 이다. 이때 $0 \le t \le 1$ 이면

$$
\begin{aligned}
|tX + (1-t)Y - C| &\le t|X-C| + (1-t)|Y-C| \\
&\le tr + (1-t)r = r
\end{aligned}
$$

이므로, $tX + (1-t)Y \in \overline{\mathbb{B}}^n(C, r)$ 이고, $\overline{\mathbb{B}}^n(C, r)$은 볼록집합이다.

15. $\sum_{i=1}^{k} (\mathbf{n} \cdot P_i + c)^2$ 는 c에 대한 이차함수이다. $\overline{P} = \frac{P_1 + \cdots + P_k}{k}$ 라 하면

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} (\mathbf{n} \cdot P_i + c)^2 &= \sum_{i=1}^{k} \left(c^2 + 2c\, \mathbf{n} \cdot P_i + (\mathbf{n} \cdot P_i)^2\right) \\
&= kc^2 + 2c \sum_{i=1}^{k} \mathbf{n} \cdot P_i + \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{n} \cdot P_i)^2 \\
&= kc^2 + 2kc\, \mathbf{n} \cdot \overline{P} + \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{n} \cdot P_i)^2
\end{aligned}
$$

인데, 이를 최소로 하는 c는 $c = -\frac{2k\, \mathbf{n} \cdot \overline{P}}{2k} = -\mathbf{n} \cdot \overline{P}$ 이다. 즉, $\mathbf{n} \cdot \overline{P} + c = 0$ 이고, 이는 위 식의 값이 최소인 c에 대하여 $\overline{P}$가 평면 $\mathbf{n} \cdot X + c = 0$을 지남을 뜻한다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

16. 우물은 $\dfrac{A_1+\cdots+A_n}{n}$, 즉 각 마을들 위치의 중심에 놓여 있다.

이를 귀납법으로 증명하자.

$n=2$ 이면, 우물의 위치는 $A_1+\frac{1}{2}(A_2-A_1)=\dfrac{A_1+A_2}{2}$ 이므로 성립.

$n=k$ 일 때 성립하면, $n=k+1$ 일 때

$$\frac{1}{k}(A_1+\cdots+A_k)+\frac{1}{k+1}\left(A_{k+1}-\frac{1}{k}(A_1+\cdots+A_k)\right)$$

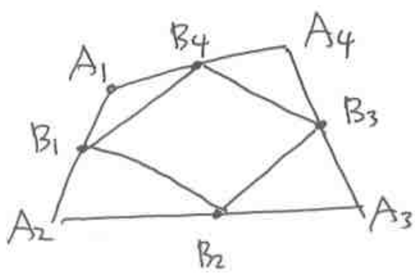
$$=\frac{1}{k+1}(A_1+\cdots+A_{k+1})$$

이므로 성립.

따라서 임의의 n에 대해 성립한다. 즉, 우물은 $\dfrac{A_1+\cdots+A_n}{n}$에 있다.

17. 사각형의 네 꼭지점을 A_1, A_2, A_3, A_4 라 하고, 네 변의 중점을

$$B_1=\frac{A_1+A_2}{2},\quad B_2=\frac{A_2+A_3}{2},$$
$$B_3=\frac{A_3+A_4}{2},\quad B_4=\frac{A_4+A_1}{2}$$



라 하자. 그러면

$$\overrightarrow{B_1B_4}=B_4-B_1=\frac{A_4-A_2}{2}=B_3-B_2=\overrightarrow{B_2B_3},$$
$$\overrightarrow{B_1B_2}=B_2-B_1=\frac{A_3-A_1}{2}=B_3-B_4=\overrightarrow{B_4B_3}$$

이므로 사각형 $B_1B_2B_3B_4$ 는 평행사변형이다.

18. (a) 중심 $=\frac{1}{3}(A+B+C)=\left(\frac{16}{3},\frac{11}{3}\right)$

(b) 중심 $=\frac{1}{3}(A+B+C)=\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{7}{3}\right)$

(c) 중심 $=\frac{1}{4}(A+B+C+D)=\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

19. 총 질량을 1 이라 하고 A, B, C의 질량은 각각 $m_A, m_B, \frac{1}{6}$ 이라 하자. 이때

$$\frac{m_A(1,2,3)+m_B(4,5,6)+\frac{1}{6}(7,8,9)}{1} = (3,4,5)$$

에서 $m_A + 4B_B + \frac{7}{6} = 3,\ 2m_A + 5m_B + \frac{4}{3} = 4,\ 3m_A + 6m_B + \frac{3}{2} = 5$

이다. 이를 연립하여 풀면 $m_A = \frac{1}{2},\ m_B = \frac{1}{3}$ 이다. 따라서 질량의 비는

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{6} = 3:2:1$$

이다.

20. $i=1,\cdots,k$ 에 대하여 $P_i = (p_{i,1},\cdots,p_{i,n})$, $Q=(q_1,\cdots,q_n)$ 이라 하면

$$\begin{aligned}
&|P_1-Q|^2+\cdots+|P_k-Q|^2 \\
&= (p_{1,1}-q_1)^2+(p_{1,2}-q_2)^2+\cdots+(p_{1,n}-q_n)^2 \\
&\quad +(p_{2,1}-q_1)^2+(p_{2,2}-q_2)^2+\cdots+(p_{2,n}-q_n)^2 \\
&\quad +\cdots \\
&\quad +(p_{k,1}-q_1)^2+(p_{k,2}-q_2)^2+\cdots+(p_{k,n}-q_n)^2 \\
&= kq_1^2-2(p_{1,1}+\cdots+p_{k,1})q_1+(p_{1,1}^2+\cdots+p_{k,1}^2) \\
&\quad +kq_2^2-2(p_{1,2}+\cdots+p_{k,2})q_2+(p_{1,2}^2+\cdots+p_{k,2}^2) \\
&\quad +\cdots \\
&\quad +kq_n^2-2(p_{1,n}+\cdots+p_{k,n})q_n+(p_{1,n}^2+\cdots+p_{k,n}^2) \\
&= k\left(q_1-\frac{p_{1,1}+\cdots+p_{k,1}}{k}\right)^2+\cdots+k\left(q_n-\frac{p_{1,n}+\cdots+p_{k,n}}{k}\right)^2+(\text{상수})
\end{aligned}$$

이므로, 이 식은 각 $j=1,2,\cdots,n$에 대하여 $q_j = \dfrac{p_{1,j}+p_{2,j}+\cdots+p_{k,j}}{k}$

일 때 최소이다. 즉, 식을 최소화하는 Q는

$$Q=\left(\frac{p_{1,1}+p_{2,1}+\cdots+p_{k,1}}{k},\ \cdots,\ \frac{p_{1,n}+\cdots+p_{k,n}}{k}\right)=\frac{1}{k}(P_1+\cdots+P_k)$$

로, $P_1,\cdots,P_k$의 중심이다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

21. 교선이 지나는 점 하나와 교선의 방향을 구한다. $z=1$ 이라 하면 $x+y=0$, $x-y=6$ 이므로 $x=3$, $y=-3$. 즉 교선은 $(3,-3,1)$을 지난다. 또, 교선은 두 평면의 법벡터 $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$에 모두 수직이어야 하므로, 교선의 방향벡터를 (a,b,c)라 하면

$(a,b,c)\cdot(1,1,1)=0$ 에서 $a+b+c=0$,

$(a,b,c)\cdot(1,-1,-1)=0$ 에서 $a-b-c=0$.

이를 만족시키는 a,b,c는 $(0,1,-1)$을 찾을 수 있다. 따라서 교선은 $(3,-3,1)+t(0,1,-1)=(3,t-3,-t+1)$. 혹은

$x=3$, $y+3=-(z-1)$

로 쓸 수도 있다.

* 물론 식을 그냥 연립해서 풀어도 된다. 8장에서 벡터곱을 배우면

$(a,b,c)=(1,1,1)\times(1,-1,-1)$

와 같이 구할 수 있다.

22. $A=\{(P_1,m_1),\cdots,(P_n,m_n)\}$, $B=\{(P_{n+1},m_{n+1}),\cdots,(P_{n+k},m_{n+k})\}$라 하자.

그러면 $m_A=m_1+\cdots+m_n$, $m_B=m_{n+1}+\cdots+m_{n+k}$라 할 때

$$\begin{aligned}
C(\{C(A),C(B)\}) &= C\left(\left\{\left(\frac{m_1}{m_A}P_1+\cdots+\frac{m_n}{m_A}P_n,\ m_A\right),\left(\frac{m_{n+1}}{m_B}P_{n+1}+\cdots+\frac{m_{n+k}}{m_B}P_{n+k},\ m_B\right)\right\}\right)\\
&= \left(\frac{m_A}{m_A+m_B}\left(\frac{m_1}{m_A}P_1+\cdots+\frac{m_n}{m_A}P_n\right)+\frac{m_B}{m_A+m_B}\left(\frac{m_{n+1}}{m_B}P_{n+1}+\cdots+\frac{m_{n+k}}{m_B}P_{n+k}\right),\ m_A+m_B\right)\\
&= \left(\frac{m_1}{m_A+m_B}P_1+\cdots+\frac{m_{n+k}}{m_A+m_B}P_{n+k},\ m_A+m_B\right)\\
&= C(A\cup B)
\end{aligned}$$

이다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

23. $\overrightarrow{AB} = \mathbb{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbb{b}$ 라 하면, $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\mathbb{a}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{\mathbb{a}+\mathbb{b}}{2}$ 이다.

이때 $\overrightarrow{AF}$는 어떤 $0 \le k, l \le 1$ 에 대하여

$$\overrightarrow{AF} = l\,\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + k\underbrace{\overrightarrow{CD}}_{= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}}$$

이다. 즉,

$$l\,\frac{\mathbb{a}+\mathbb{b}}{2} = \mathbb{b} + k\left(\frac{2}{3}\mathbb{a} - \mathbb{b}\right)$$

이고, 이로부터 k와 l의 관계식 $\frac{l}{2} = \frac{2}{3}k$, $\frac{l}{2} = 1-k$ 를 얻는다. 이를 연립하여 풀면 $k = \frac{3}{5}$, $l = \frac{4}{5}$ 이다. 그러면, 다음 결론을 얻는다.

$\overrightarrow{AF} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AE}$ $\Rightarrow$ F는 선분 AE를 4:1 로 내분

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$ $\Rightarrow$ F는 선분 CD를 3:2 으로 내분

* 교재의 해답에 무게중심을 이용한 좋은 답이 있다.

24. $i=1, \cdots, k$ 에 대하여 질량 $m_i\,(>0)$ 인 점 P_i 가 있다고 하자. 점 $P_1, \cdots, P_k$의 질량중심을 $\bar{P}$ 라 하자:

$$\bar{P} = \frac{1}{m}(m_1P_1 + \cdots + m_kP_k) \qquad (m = m_1 + \cdots + m_k)$$

이제, 이 점들을 $\mathbb{v}$ 씩 평행이동한 점의 질량중심을 구하면

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}\left(m_1(P_1+\mathbb{v}) + \cdots + m_k(P_k+\mathbb{v})\right) &= \frac{1}{m}\left(m_1P_1 + \cdots + m_kP_k + (m_1+\cdots+m_k)\mathbb{v}\right)\\ &= \frac{1}{m}(m_1P_1 + \cdots + m_kP_k) + \mathbb{v}\\ &= \bar{P} + \mathbb{v}\end{aligned}$$

이므로 원하는 결론을 얻는다.

하승우 (수리과학부)

25. (a) 두 점 (a,b,c), (a',b',c')를 잇는 직선은 점 (a,b,c)를 지나고, 방향벡터가 $(a'-a,\ b'-b,\ c'-c)$이다. 따라서 이 직선의 매개변수 방정식은

$$(a,b,c)+t(a'-a,\ b'-b,\ c'-c)$$
$$=((a'-a)t+a,\ (b'-b)t+b,\ (c'-c)t+c)$$

이 직선이 yz-평면과 만나는 점은 x좌표가 0인 점이므로, 그때의 t는

$$(a'-a)t+a=0 \Rightarrow t=-\frac{a}{a'-a}$$

따라서 구하는 점은

$$\left(0,\ (b'-b)\left(-\frac{a}{a'-a}\right)+b,\ (c'-c)\left(-\frac{a}{a'-a}\right)+c\right)$$
$$=\left(0,\ \frac{ab'-a'b}{a-a'},\ \frac{ac'-a'c}{a-a'}\right).$$

(b) 두 점 $(3,0,0)$, $(\cos t, \sin t, t)$를 잇는 직선이 yz-평면과 만나는 점을 구하면 된다. (a)의 결과를 이용하면, 구하는 상의 자취의 방정식은

$$\left(0,\ \frac{3\sin t}{3-\cos t},\ \frac{3t}{3-\cos t}\right) \qquad (0\le t\le 2\pi)$$

이다.

하승우 (수리과학부)

제 5절. 일차독립과 일차종속

1. 일차독립이 아니다.

$$(1,1,1)=\frac{1}{2}(0,1,1)+\frac{1}{2}(1,0,1)+\frac{1}{2}(1,1,0).$$

2. (1) 일차종속. $\mathbb{b}=\frac{1}{2}\mathbb{a}+\frac{1}{2}\mathbb{c}$

(2) $\mathbb{O}=x\mathbb{a}+y\mathbb{b}+z\mathbb{c}=(x+2y+7z,\ 2x+3y+5z,\ 3x+4y+6z)$
에서 얻은 연립방정식을 풀면, $x=y=z=0$ 뿐이다. 일차독립

(3) $\mathbb{O}=x\mathbb{a}+y\mathbb{b}+z\mathbb{c}=(x+2y+3z,\ 2x+3y+z,\ 3x+y+2z)$
에서 얻은 연립방정식을 풀면, $x=y=z=0$ 뿐이다. 일차독립

(4) 일차종속. $\mathbb{a}=0\mathbb{b}+0\mathbb{c}$

(5) 일차종속. $\mathbb{d}=\frac{1}{2}\mathbb{a}+\frac{1}{2}\mathbb{b}+\frac{1}{2}\mathbb{c}$. (문제 1과 같다.)

(6) $\mathbb{O}=x\mathbb{a}+y\mathbb{b}+z\mathbb{c}+w\mathbb{d}=(y+z+w,\ x+z+w,\ x+y+w,\ x+y+z)$
에서 얻은 연립방정식을 풀면, $x=y=z=w=0$ 뿐이다. 일차독립

* $\mathbb{O}$ 이 포함되어 있으면, 무조건 일차종속. $\longrightarrow$ 문제 4
* 차원 < 벡터 수 이면, 일차종속.

3. $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}$가 일차독립 $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}\mathbb{O}=x\mathbb{a}+y\mathbb{b}+z\mathbb{c}=&(xa_1+yb_1+zc_1)\mathbb{u}\\&+(xa_2+yb_2+zc_2)\mathbb{v}\\&+(xa_3+yb_3+zc_3)\mathbb{w}\end{aligned}$$ 이 자명한 해만을 해로 가짐.

$\Leftrightarrow$ $x(a_1,a_2,a_3)+y(b_1,b_2,b_3)+z(c_1,c_2,c_3)=(0,0,0)$ 이 자명한 해만을 해로 가짐

$\Leftrightarrow$ $(a_1,a_2,a_3),\ (b_1,b_2,b_3),\ (c_1,c_2,c_3)$ 이 일차독립

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

4. $\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ 인 i가 있다고 할 때, 일반성을 잃지 않고 $i=1$ 이라 할 수 있다. ($\mathbf{a}_1$과 $\mathbf{a}_i$를 서로 바꾸면 됨) 그러면,

$$\mathbf{0} = \mathbf{a}_1 = 0\mathbf{a}_2 + 0\mathbf{a}_3 + \cdots + 0\mathbf{a}_k$$

이므로, 일차종속이다.

5. $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$가 일차종속이면 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_\ell$도 일차종속임을 보이면 된다.

$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$가 일차종속이면, 방정식 $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ 가 자명하지 않은 해를 가진다. 이를 $(x_1, \cdots, x_k) = (\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_k)$ 라 하자.

그러면 방정식 $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_\ell\mathbf{a}_\ell = \mathbf{0}$ 도 자명하지 않은 해

$$(x_1, \cdots, x_\ell) = (\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_k, 0, \cdots, 0)$$

를 가진다. 따라서 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_\ell$ 은 일차종속이다.

6. $\mathbf{a}$가 $\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_k$의 일차결합이므로

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{b}_1 + \cdots + x_k\mathbf{b}_k.$$

$\mathbf{b}_i\ (i=1, 2, \cdots, k)$가 $\mathbf{c}_1, \cdots, \mathbf{c}_\ell$의 일차결합이므로

$$\mathbf{b}_i = y_{i,1}\mathbf{c}_1 + \cdots + y_{i,\ell}\mathbf{c}_\ell$$

그러면

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= x_1\mathbf{b}_1 + \cdots + x_k\mathbf{b}_k \\ &= x_1(y_{1,1}\mathbf{c}_1 + \cdots + y_{1,\ell}\mathbf{c}_\ell) + \cdots + x_k(y_{k,1}\mathbf{c}_1 + \cdots + y_{k,\ell}\mathbf{c}_\ell) \\ &= (x_1y_{1,1} + x_2y_{2,1} + \cdots + x_ky_{k,1})\mathbf{c}_1 + \cdots + (x_1y_{1,\ell} + \cdots + x_ky_{k,\ell})\mathbf{c}_\ell\end{aligned}$$

이므로 $\mathbf{a}$는 $\mathbf{c}_1, \cdots, \mathbf{c}_\ell$의 일차결합이다.

하승우 (수리과학부)

6. 행렬과 선형사상

제1절. 행렬

1. $$AB = \begin{pmatrix} 30 & 50 & 20 \\ 35 & 50 & 25 \\ 40 & 50 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 & 50 & 40 \\ 10 & 20 & 20 \\ 50 & 50 & 100 \end{pmatrix}$$

각 사람에서 각 업종이 쓰게 되는 총 금액

2. $p = 0, 1, \cdots, k$ 에 대하여 $A_p = (a_{i,j}^{(p)})$ 라 하면

$$O = A_0 + A_1 x + \cdots + A_k x^k = (a_{i,j}^{(0)}) + (a_{i,j}^{(1)})x + \cdots + (a_{i,j}^{(k)})x^k$$

$$= (a_{i,j}^{(0)} + a_{i,j}^{(1)} x + \cdots + a_{i,j}^{(k)} x^k)$$

이므로, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ 일 때 임의의 실수 x에 대하여

$$a_{i,j}^{(0)} + a_{i,j}^{(1)} x + \cdots + a_{i,j}^{(k)} x^k = 0$$

따라서 $a_{i,j}^{(0)} = \cdots = a_{i,j}^{(k)} = 0$. 이고, 결론적으로 $A_0 = A_1 = \cdots = A_k = O$.

3. $$P^2 = \begin{pmatrix} p_{11}^2 + p_{12}p_{21} & p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22} \\ p_{11}p_{21} + p_{21}p_{22} & p_{12}p_{21} + p_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{도시} \to \text{도시} & \text{도시} \to \text{농촌} \\ \text{농촌} \to \text{도시} & \text{농촌} \to \text{농촌} \end{pmatrix}$$

(현재 → 2년후)

예를 들어, P^2의 (1,1)항은 도시인이 2년 후에 도시인일 확률이다. 다른 항도 비슷하게 이해할 수 있다. P^3의 경우에도 마찬가지이다. P^3의 (1,1)항은 도시인이 3년 후에 도시인일 확률이다.

4. $m \times n$ 행렬 전체의 집합을 $M_{m \times n}$ 이라 하자.

$\phi : M_{m \times n} \to \mathbb{R}^{mn}$ 을 $\phi\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{11}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, \cdots, a_{2n}, \cdots, a_{m1}, \cdots, a_{mn})$

으로 정의하면, ϕ는 '당연히' 일대일 대응이다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

5. $[[A,B],C]+[[B,C],A]+[[C,A],B]$

$= [AB-BA, C]+[BC-CB, A]+[CA-AC, B]$

$= (AB-BA)C - C(AB-BA) + (BC-CB)A - A(BC-CB) + (CA-AC)B - B(CA-AC)$

$= 0.$

6. $\sigma_0\sigma_+ = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \sigma_+,$

$\sigma_+\sigma_0 = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix} = -\sigma_+,$

$\sigma_+\sigma_- = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},$

$\sigma_-\sigma_+ = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$

$\sigma_0\sigma_- = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\-1&0\end{pmatrix} = -\sigma_-,$

$\sigma_-\sigma_0 = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = \sigma_-$

이므로,

$[\sigma_+,\sigma_-] = \sigma_+\sigma_- - \sigma_-\sigma_+ = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \sigma_0$

$[\sigma_0,\sigma_+] = \sigma_0\sigma_+ - \sigma_+\sigma_0 = \sigma_+ - (-\sigma_+) = 2\sigma_+,$

$[\sigma_0,\sigma_-] = \sigma_0\sigma_- - \sigma_-\sigma_0 = -\sigma_- - \sigma_- = -2\sigma_-$

7. $j=k$ 이면,

$a=j=k$ 일 때 $1\times1=1$, 나머지 0

$(E_{ij}E_{kl})_{(i,l)} = \sum_{a=1}^{n} (E_{ij})_{(i,a)}(E_{kl})_{(a,l)} = 1,$

$(E_{ij}E_{kl})_{(p,q)} = \sum_{a=1}^{n} (E_{ij})_{(p,a)}(E_{kl})_{(a,q)} = 0 \qquad (i\neq l)$

이므로 $E_{ij}E_{kl} = E_{il} = \delta_{jk}E_{il}.$

1×1 이려면 $(p,a)=(i,j)$, $(a,q)=(k,l)$ 이어야 하는데, $a\neq j$ 이면 모두 0, $a=j$ 이라 해도 $p\neq i$ 이거나 $q\neq l$ 이라서 0.

$j \neq k$ 이면,

$$(E_{ij}E_{kl})_{(p,q)} = \sum_{a=1}^{n} (E_{ij})_{(p,a)} (E_{kl})_{(a,q)} = 0$$

1 이려면 $(p,a)=(i,j)$, $(a,q)=(k,l)$ 이어야 하는데, $j\neq k$ 이므로 $a=j$, $a=k$ 를 동시에 만족시킬 수 없다.

이므로 $E_{ij}E_{kl} = 0 = \delta_{jk}E_{il}$.

따라서, $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.

8. $A = \begin{pmatrix} d_1 & & O \\ & d_2 & \\ O & \ddots & d_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e_1 & & O \\ & e_2 & \\ O & \ddots & e_n \end{pmatrix}$ 이라 하자. 이때

$$(AB)_{(i,i)} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{(i,k)} (B)_{(k,i)} = (A)_{(i,i)} (B)_{(i,i)} = d_i e_i,$$

$i\neq j$일때 $(AB)_{(i,j)} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{(i,k)} (B)_{(k,j)} = 0$

$i\neq j$ 이면서 $k=j$ 일수 없음.

이므로, $AB = \begin{pmatrix} d_1e_1 & & O \\ & d_2e_2 & \\ O & \ddots & d_ne_n \end{pmatrix}$. 그러면 $BA = \begin{pmatrix} e_1d_1 & & O \\ & e_2d_2 & \\ O & \ddots & e_nd_n \end{pmatrix} = AB$.

9. $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$. 이고,

$$(aI+bJ)(cI+dJ) = acI^2 + adIJ + bcJI + bdJ^2$$
$$= (ac-bd)I + (ad+bc)J.$$

10. $AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{12} & a_{11} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{mn} & \cdots & a_{m2} & a_{m1} \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} O & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & O \end{pmatrix}$

$CA = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} O & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & O \end{pmatrix}$.

(각 성분을 비교해 보면 쉽다.)

$\boxed{\text{하 승 우}}$ (수리과학부)

제 2절. 선형사상.

1. xy-평면 정사영: $(x,y,z) \mapsto (x,y,0)$: $\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$

yz-평면 정사영: $(x,y,z) \mapsto (0,y,z)$: $\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$

zx-평면 정사영: $(x,y,z) \mapsto (x,0,z)$: $\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$.

2. $L_{A+B}(\mathbf{x}) = (A+B)\mathbf{x} = A\mathbf{x} + B\mathbf{x} = L_A(\mathbf{x}) + L_B(\mathbf{x})$,

$L_{cA}(\mathbf{x}) = (cA)\mathbf{x} = c(A\mathbf{x}) = cL_A(\mathbf{x})$

이므로 $L_{A+B} = L_A + L_B$, $L_{cA} = cL_A$ 이다.

3. $L_A \circ L_B(\mathbf{x}) = L_A(L_B(\mathbf{x})) = L_A(B\mathbf{x}) = A(B\mathbf{x}) = (AB)\mathbf{x} = L_{AB}(\mathbf{x})$

이므로 $L_A \circ L_B = L_{AB}$ 이다.

4. L 일대일 함수 $\Longleftrightarrow$ $L(X)=0$ 해 자명한 것뿐.

($\Rightarrow$) $X \neq 0$ 이면서 $L(X_0)=0$ 인 $X_0 \in \mathbb{R}^n$ 이 존재한다면,

$L(X_0)=0$, $L(0)=0$, $X_0 \neq 0$

이므로 일대일함수 조건에 모순. 따라서 그러한 X_0는 없고, $L(X)=0$의 해는 자명한 것뿐이다.

($\Leftarrow$) $L(X)=L(Y)$ 이면, $0=L(X)-L(Y)=L(X-Y)$ 에서 $X-Y=0$ 이고, $X=Y$ 이 되어 L은 일대일함수.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

5. 우선, $\bar{p} = \dfrac{m_1 p_1 + \cdots + m_k p_k}{m_1 + \cdots + m_k}$ 이다. 그러면 $L(p_1), \cdots, L(p_k)$의 질량중심은

$$\frac{m_1 L(p_1) + \cdots + m_k L(p_k)}{m_1 + \cdots + m_k} = L\left(\frac{m_1 p_1 + \cdots + m_k p_k}{m_1 + \cdots + m_k}\right) = L(\bar{p})$$

이다.

6. 표준단위벡터 $e_0, e_1, \cdots, e_n$을

$$e_0 = (1, 0, \cdots, 0) = 1,$$
$$e_1 = (0, 1, 0, \cdots, 0) = x, \cdots,$$
$$e_n = (0, 0, \cdots, 0, 1) = x^n$$

으로 두자.

$$D(e_0) = D(1) = 0 = \mathbf{0}, \quad D(e_1) = D(x) = 1 = e_0, \cdots,$$
$$D(e_k) = D(x^k) = kx^{k-1} = k\, e_{k-1}, \quad \cdots, \quad D(e_n) = D(x^n) = nx^{n-1} = n\, e_{n-1}$$

에서, D에 대응되는 행렬은

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow (n+1) \times (n+1)$$

또,

$$S(e_0) = S(1) = x = e_1, \quad S(e_1) = S(x) = x^2 = e_2, \cdots,$$
$$S(e_k) = S(x^k) = x^{k+1} = e_{k+1}, \cdots, \quad S(e_n) = S(x^n) = x^{n+1} = e_{n+1}.$$

에서, S에 대응되는 행렬은

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \leftarrow (n+2) \times (n+1)$$

$\boxed{\text{하승우}}$(수리과학부)

7. (i,j) 항은 1 이고 나머지는 다 0 인 행렬을 E_{ij} 라 하자. $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ 라 할 때, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ 에 대해

$$(AE_{j1})_{(i,1)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (E_{j1})_{(k1)} = a_{ij},$$

$\uparrow_{k=j \text{ 일때에만}}$

마찬가지로 $(BE_{j1})_{(i,1)} = b_{ij}$ 이다. 이때 $AE_{j1} = BE_{j1}$ 이므로, $a_{ij} = b_{ij}$ 가 되어 결국 $A=B$ 이다.

8. 주어진 정사영을 P 라 하면, $\mathbf{x} = (x,y,z)$ 라 할 때,

$$P(\mathbf{x}) = P(x,y,z) = \frac{(1,2,3)\cdot(x,y,z)}{(1,2,3)\cdot(1,2,3)}(1,2,3)$$

$$= \frac{x+2y+3z}{14}(1,2,3)$$

에서,

$$P(\mathbf{e}_1) = P(1,0,0) = \frac{1}{14}(1,2,3), \quad P(\mathbf{e}_2) = P(0,1,0) = \frac{2}{14}(1,2,3),$$

$$P(\mathbf{e}_3) = P(0,0,1) = \frac{3}{14}(1,2,3)$$

이므로, 대응되는 행렬은 $\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ 이다.

9. 주어진 선형변환을 L이라 하면,

$$L(x,y,z) = (x+y+z,\ x+y+z,\ x+y+z)$$

이 선형변환은 점을 직선 $x=y=z$ 로 보낸다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

10. $R_1 : (x, y, z) \longmapsto (x, -y, -z)$,

$R_2 : (x, y, z) \longmapsto (-x, y, -z)$,

$R_3 : (x, y, z) \longmapsto (-x, -y, z)$

에서, R_1, R_2, R_3 에 대응되는 행렬은 각각

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

이다. 편의상 이 행렬들도 각각 R_1, R_2, R_3 이라 하면, R_1 변환 후 R_2 변환하는 것은 행렬 R_2R_1 에, R_2 변환 후 R_1 변환하는 것은 행렬 R_1R_2 에 대응된다.

이때

$$R_2R_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} = R_1R_2$$

이다. (사실, 대각행렬의 곱이므로 당연하다.) 또,

$$R_1R_2 = R_2R_1 = R_3, \quad R_1R_3 = R_3R_1 = R_2, \quad R_2R_3 = R_3R_2 = R_1$$

인 것도 쉽게 알 수 있다. 답: 둘 다 OK.

11. n-공간의 임의의 벡터 $\mathbb{x}$ 에 대하여 $\mathbb{x} = a_1\mathbb{v}_1 + \cdots + a_n\mathbb{v}_n$ 이라 하자. $\cdots(*)$

이때 각 $i = 1, 2, \cdots, n$ 에 대하여 $\mathbb{x} \cdot \mathbb{v}_i = (a_1\mathbb{v}_1 + \cdots + a_n\mathbb{v}_n) \cdot \mathbb{v}_i = a_i$ 이므로,

$$\mathbb{x} = (\mathbb{x} \cdot \mathbb{v}_1)\mathbb{v}_1 + \cdots + (\mathbb{x} \cdot \mathbb{v}_n)\mathbb{v}_n$$

이다. 그러면

$$(\mathbb{v}_1\mathbb{v}_1^t + \cdots + \mathbb{v}_n\mathbb{v}_n^t)(\mathbb{x}) = (\mathbb{v}_1\mathbb{v}_1^t + \cdots + \mathbb{v}_n\mathbb{v}_n^t)\left((\mathbb{x} \cdot \mathbb{v}_1)\mathbb{v}_1 + \cdots + (\mathbb{x} \cdot \mathbb{v}_n)\mathbb{v}_n\right)$$

$$= \mathbb{v}_1\mathbb{v}_1^t\left((\mathbb{x} \cdot \mathbb{v}_1)\mathbb{v}_1 + \cdots + (\mathbb{x} \cdot \mathbb{v}_n)\mathbb{v}_n\right) + \cdots$$

$$+ \mathbb{v}_n\mathbb{v}_n^t\left((\mathbb{x} \cdot \mathbb{v}_1)\mathbb{v}_1 + \cdots + (\mathbb{x} \cdot \mathbb{v}_n)\mathbb{v}_n\right)$$

$\mathbb{v}_i^t\mathbb{v}_j = \mathbb{v}_i \cdot \mathbb{v}_j$ 임을 이용한다.

$$= (\mathbb{x} \cdot \mathbb{v}_1)\mathbb{v}_1 + \cdots + (\mathbb{x} \cdot \mathbb{v}_n)\mathbb{v}_n = \mathbb{x}$$

이므로, $\mathbb{v}_1\mathbb{v}_1^t + \cdots + \mathbb{v}_n\mathbb{v}_n^t$ 는 항등행렬이다.

$(*)$는 p.215의 정리 6.4.1 덕분에 가능한 것이다. 서로 수직인 벡터는 일차독립이고 (p.211 기본연습문제), n-공간의 n개의 일차독립 벡터 $\mathbb{v}_1, \cdots, \mathbb{v}_n$ 이므로, 이는 n-공간을 생성한다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

(다른 방법) n-공간의 축을 돌리면, $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2$, $v_3 = e_3$, $v_4 = e_4$, $\cdots$, $v_n = \pm e_n$ 이도록 축을 잡을 수 있다.
$v_n = e_{n-1}$

(먼저 $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2$ 이도록 제 1축, 제 2축을 잡자. 마찬가지로 제 3축을 v_3방향, 제4축을 v_4방향, $\cdots$, 제 $n-1$축을 v_{n-1} 방향으로 잡으면

$$v_1 = e_1, \cdots, v_{n-1} = e_{n-1}$$

이다. 이와 같이 제 $1, 2, \cdots, n-1$ 축을 잡으면, 제 n축은 자동으로 결정된다.
이때 $v_n = e_n$ 이거나 $v_n = -e_n$ 이다.

이때 $i = 1, 2, \cdots, n$ 에 대하여

$$v_i v_i^t = \begin{array}{c} \\ i\text{번째} \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{array}{c}(0 \quad 1 \quad 0) \\ \uparrow \\ i\text{번째}\end{array} = \begin{pmatrix}0 & & 0\\ & 1 & \\ 0 & \uparrow & 0\end{pmatrix} = E_{i,i}$$

i,i 성분

$$v_n \cdot v_n^t = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}(0 \quad -1) = E_{nn}$$

이므로, $v_1v_1^t + \cdots + v_nv_n^t = I$ 이다. 축을 새로 정의했을 때
$v_1v_1^t + \cdots + v_nv_n^t$ 가 항등행렬이 되었으므로, 이를 선형사상으로 보면 어떤 $X \in \mathbb{R}^n$ 을 X 로 보낸다. 항등사상은 축에 관계없이 대응되는 행렬이 항등행렬이므로, 원래의 축에 대해서도

$$v_1v_1^t + \cdots + v_nv_n^t = I$$

이다.

* 이 풀이는 축의 재정의, n-공간의 생김새 등의 추상적 사고가 포함되어 있어, 미적분학 수준에서는 상당히 비범하다.

$\boxed{\text{학술부}}$ (수리과학부)

7. 정사각행렬과 행렬식

제 1절 역행렬

1. $n\times n$ 행렬 A, B를 $A = E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, $B = E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

이라 하자. 그러면

$$AB = O \quad , \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = E_{21} \neq O$$

이다.

2. $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \ (=I_2)$ 이지만 $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I$.

* 별로 쓸데없는 소리지만... $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ 이다.

$L_A \circ L_B$ 는 2차원 항등행렬 I_2로 나타나지만, $L_B \circ L_A$ 는 $\left(\begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ 로,

제 3축 정보를 제거하는 사상 $(x,y,z) \mapsto (x,y,0)$ 이 된다.

$L_A \circ L_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L_B \circ L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

(다시 2차원은 가득 채울 수)

에서, $L_A \circ L_B$ 는 2차원에서 3차원(의 일부)으로 가도 2차원으로 돌아올 수 있지만, $L_B \circ L_A$ 는 3차원에서 2차원으로 가면서 '한 차원 손실'되어 다시 3차원을 가득 채울 수 없는 것이다.

3. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ 를 'A^{-1}의 관점에서' 보면 $(A^{-1})^{-1} = A$.

$A^k (A^{-1})^k = \underbrace{A A \cdots A}_{k\text{개}} \underbrace{A^{-1} \cdots A^{-1}}_{k\text{개}} = I$, $(A^{-1})^k A^k = I$ 이므로 $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$ 의 세 변 각각의 전치행렬로 취하면

$(AA^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I^t$ 에서 $(A^{-1})^t A^t = A^t (A^{-1})^t = I$ 이므로 $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

$(B^{-1}A^{-1})(AB) = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$ 이므로 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

$\boxed{\text{한승우}}$ (수리과학부)

4. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3$

이므로, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \neq 0$ 이면

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \lambda_2 & \\ O & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & O \\ & 1/\lambda_2 & \\ O & & \ddots & \\ & & & 1/\lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & O \\ & 1/\lambda_2 & \\ O & & \ddots & \\ & & & 1/\lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \lambda_2 & \\ O & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = I_n$$

이므로,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \lambda_2 & \\ O & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & O \\ & 1/\lambda_2 & \\ O & & \ddots & \\ & & & 1/\lambda_n \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = 0$ 이라 하자. 즉, 어떤 $1 \le i \le n$ 에 대하여 $\lambda_i = 0$ 이라 하자.
이때 임의의 행렬 (a_{ij}) 에 대하여

$$i\text{번째} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & * & \\ 0 & 0 \cdots & 0 \\ & * & \end{pmatrix} \leftarrow i\text{번째}$$

$$\neq I_n$$

이므로, 주어진 행렬은 역행렬을 가지지 않는다.

6. $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = 0$ 일 때 역행렬을 가지지 않는 이유는 문제 5와 같다.
(이 때도 $\lambda_i = 0$ 이면 i행 전체가 0이 된다.)
$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \neq 0$ 이면,

$$\begin{pmatrix} O & & \lambda_1 \\ & \lambda_2 & \\ & \iddots & \\ \lambda_n & & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & & 1/\lambda_n \\ & \iddots & \\ & 1/\lambda_2 & \\ 1/\lambda_1 & & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & & 1/\lambda_n \\ & \iddots & \\ & 1/\lambda_2 & \\ 1/\lambda_1 & & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & & \lambda_1 \\ & \lambda_2 & \\ & \iddots & \\ \lambda_n & & O \end{pmatrix} = I_n$$

이므로, $\begin{pmatrix} O & & \lambda_1 \\ & \lambda_2 & \\ & \iddots & \\ \lambda_n & & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & & 1/\lambda_n \\ & \iddots & \\ & 1/\lambda_2 & \\ 1/\lambda_1 & & O \end{pmatrix}$ 이다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

제 3절. 행렬식

* 17장 4절의 행렬식의 성질, 즉 정리 4.2.2, 정리 4.2.4, 정리 4.2.5는 알아 두면 편리하다. 기말고사 답안지에서 이용해도 좋으니 한 번은 읽어 보라.

정리 4.2.2 n-벡터 $a_1, \cdots, a_n$ 일차독립 $\Longleftrightarrow$ $\det(a_1, \cdots, a_n) = 0$

정리 4.2.4 A 가역 $\Longleftrightarrow$ $\det A \neq 0$. 이때 $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

정리 4.2.5 $\det A = \det A^t$.

특히 정리 4.2.4는 행렬식을 배우는 이유 그 자체라고 부를 수 있을 만큼 중요하다. 또, 정리 4.2.5에 의하면 3절의 정리 3.2.2와 따름정리 3.2.3에서 '열'을 '행'으로 바꾸어 써도 여전히 성립한다.

1.(1) 그냥 계산하면 0이다. 혹은

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 0$$

$+\left(-\frac{1}{2}\text{배}\right)+\left(-\frac{1}{2}\text{배}\right)$

과 같이 계산해도 된다 (가운데 열이 제 1,3열의 평균값이어서 분명하다). 물론 행에 대해서 비슷하게 해도 된다.

(2) 6.

0일 필요 없음

$$* \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}, \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3) 그냥 계산하면 2. 혹은

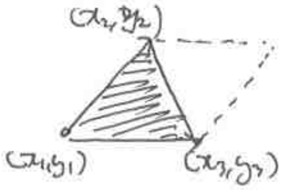
$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \overset{-1\text{배}}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}_{-2\text{배}} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2.$$

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

2. $\mathbf{x}=(x_1, x_2)$, $\mathbf{y}=(y_1, y_2)$ 라 하면, 나란히꼴의 넓이는, p195의 5장 3절 연습문제 5에 의해

$$\begin{aligned}\sqrt{|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2} &= \sqrt{(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)-(x_1y_1+x_2y_2)^2} \\ &= \sqrt{x_1^2y_2^2-2x_1x_2y_1y_2+x_2^2y_1^2} \\ &= \sqrt{(x_1y_2-x_2y_1)^2} = |x_1y_2-x_2y_1| \\ &= |\det(\mathbf{x}, \mathbf{y})|\end{aligned}$$

3. 주어진 삼각형의 넓이는 벡터 (x_2-x_1, y_2-y_1), (x_3-x_1, y_3-y_1) 로 만들어지는 나란히꼴의 넓이의 절반이다.



따라서 넓이는

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1\end{pmatrix}\right| &= \frac{1}{2}|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)| \\ &= \frac{1}{2}|x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_1y_3-x_3y_2-x_2y_1| \\ &= \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1\end{pmatrix}\right|\end{aligned}$$

이다.

4. 주어진 네 점 (0,0), (2,0), (3,2), (2,3) 을 꼭짓점으로 가지는 사각형의 넓이는, 그림과 같이 사각형을 분리하면 둘 다 >0

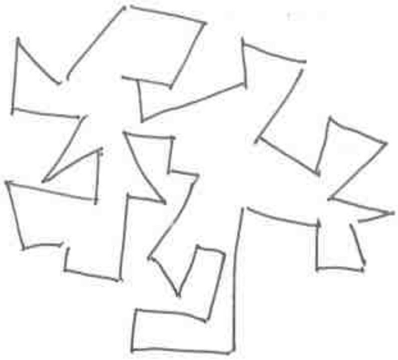
$$\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}2&3\\0&2\end{pmatrix}\right| + \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\det\left|\det\begin{pmatrix}2&3\\0&2\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}(4+5) = \frac{9}{2}$$

이다.

$\boxed{\text{한승우}}$ (수리과학부)

일반적인 경우에는…… 사각형의 경우와 같이 도형을 쪼개서 삼각형의 넓이의 합으로 다각형의 넓이를 구한다. 이때 다각형이 볼록다각형이면 문제 해결이 간단하지만 (직접 해보라), 다음과 같이 이상하게 (?) 생긴 다각형의 경우 골치가 아파진다.



이 경우에도 방법이 없는 것은 아니지만, 부호가 있는 넓이를 생각하고 겹치는 부분은 상쇄해주거나 쪼개는 삼각형의 꼭짓점에 순서가 있는 등 문제가 있어, 불필요한 노동을 거쳐야 한다.

15장에서 배우는 선적분과 그린 정리를 이용하면, 아주 쉽게 넓이를 구할 수 있다. 2학기에 15장을 공부한 뒤 다시 이 문제를 보자.

n각형 C를 $C=\sigma_1\cup\sigma_2\cup\cdots\cup\sigma_{n-1}\cup\sigma_n$,

$\sigma_k : A_k\to A_{k+1}$ ($k=n$일 경우 $A_n\to A_1$) 선분

$: t\mapsto ((1-t)x_k+tx_{k+1},\ (1-t)y_k+ty_{k+1})$ $(0\le t\le 1)$

$((1-t)x_n+tx_1,\ (1-t)y_n+ty_1)$ ($k=n$일 때)

(단, $A_k=(x_k,y_k)$) 와 같이 매개화하면, 그린 정리에 의해

$$(\text{다각형의 넓이})=\left|\frac{1}{2}\int_C (x\,dy-y\,dx)\right|=\left|\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{\sigma_k}(x\,dy-y\,dx)\right|$$

$x_{n+1}=x_1,\ y_{n+1}=y_1$ 이라 하자…

$$=\left|\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1\Big(((1-t)x_k+tx_{k+1})(-y_k+y_{k+1})\,dt+((1-t)y_k+ty_{k+1})(-x_k+x_{k+1})\,dt\Big)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2}(x_k+x_{k+1})(-y_k+y_{k+1})+\frac{1}{2}(y_k+y_{k+1})(-x_k+x_{k+1})\right]\right|$$

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

$$= \left| \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k \right) \right| = \left| \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \det (A_k, A_{k+1}) \right|$$

$$= \frac{1}{2} \left| \det (A_1, A_2) + \det (A_2, A_3) + \cdots + \det (A_{n-1}, A_n) + \det (A_n, A_1) \right|$$

가 된다.

5. $$\text{area} (L_A(\mathbf{x}), L_A(\mathbf{y})) = |\det (L_A(\mathbf{x}), L_A(\mathbf{y}))|$$

$$= |\det (A\mathbf{x}, A\mathbf{y})| = |\det (\overset{\text{행렬곱}}{A \cdot} (\mathbf{x}, \mathbf{y}))|$$

$$= |\det A \det (\mathbf{x}, \mathbf{y})|$$

$$= |\det A| \text{ area} (\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

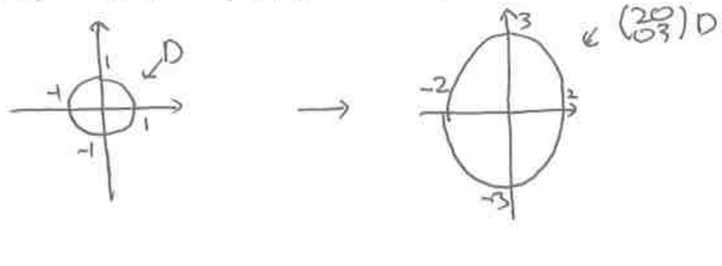
* 이 식은 임의의 도형에 대해서도 성립한다. (→ 14장 치환적분)

6. 주어진 원판 $x^2+y^2 \le 1$ 를 D라 하면, D가 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$에 의해 변환된 상의 넓이는

$$\left| \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right| \text{area } D = 6\pi.$$

마찬가지로, 넓이가 A인 영역은 이 선형변환에 의하여 넓이가 6A인 영역이 된다.

* $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$은 $(x, y) \mapsto (2x, 3y)$ 로, 주어진 도형을 가로(x축 방향)로 2배, 세로 (y축 방향)로 3배 확대하는 변환이다.



7. 타원판 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$ 은, 원판 $x^2+y^2 \le 1$ 의 선형변환 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ 에 의한 상이다.
($(x, y) \mapsto (ax, by) = (x', y')$ 에서 $x = \frac{x'}{a}$, $y = \frac{y'}{b}$ 이고, $1 \ge x^2+y^2 = \frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2}$)
따라서 그 넓이는 $\left| \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right| \pi = \pi |ab|$.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

8. $A = (a_1, \cdots, a_n)$ 이라 할 때

$$\det cA = \det(ca_1, \cdots, ca_n)$$

$$= c\det(a_1, ca_2, ca_3, \cdots, ca_n) \quad \text{(1열에 대해 선형)}$$

$$= c^2\det(a_1, a_2, ca_3, \cdots, ca_n) \quad \text{(2열에 대한 선형)}$$

$$= \cdots$$

$$= c^n\det(a_1, \cdots, a_n) \quad \text{(n열에 대한 선형)}$$

$$= c^n\det A.$$

답: c^n배.

* 절대 c배가 아니다!

9. ① $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix} = yz^2 + zx^2 + xy^2 - zy^2 - xz^2 - yx^2$

$$= (z-y)x^2 + (y^2 - z^2)x + yz^2 - zy^2$$

$$= (z-y)(x^2 - (y+z)x + yz)$$

$$= (z-y)(x-y)(x-z) = (x-y)(y-z)(z-x)$$

* 행렬식은 x, y, z에 대한 3차 다항식인데, 주어진 행렬은 $x=y$ 또는 $y=z$ 또는 $z=x$ 일 때 행렬식이 0 임을 쉽게 알 수 있다. 따라서 행렬식은 인수로 $(x-y)(y-z)(z-x)$를 가지고, 이는 3차식이므로,

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix} = c(x-y)(y-z)(z-x)$$

이다. 이때 (이를테면) yz^2의 계수를 비교하면 $1 = c$ 임을 얻는다. 또는 $x=0$, $y=1$, $z=2$ 등을 대입해서 c를 정해도 좋다.

② $\det\begin{pmatrix} t & x & y \\ x & t & y \\ x & y & t \end{pmatrix} = t^3 + x^2y + xy^2 - y^2t - x^2t - xyt$

$$= t^3 - (x^2 + y^2 + xy)t + xy(x+y)$$

$$= (t-x)(t-y)(t+x+y)$$

$\uparrow$ $t = \pm x, \pm y, \pm(x+y)$ 넣어보자.

하승우 (수리과학부)

③ $\det\begin{pmatrix} t & x & y \\ -x & t & z \\ -y & -z & t \end{pmatrix} = t^3 - xyz + xyz + z^2t + x^2t + y^2t$

$$= t^3 + (x^2+y^2+z^2)t$$

$$= t(t^2+x^2+y^2+z^2).$$

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

8. 삼차원 공간과 벡터곱

제 1절. 벡터곱

1. (a) $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (-4, -3, 1)$ (b) $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1, 1, -1)$

* $(a_1, a_2, a_3)\times(b_1, b_2, b_3) = \det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3$

와 같이 기억하면 좋다.

2. $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |(1,-2,1)| = \sqrt{6}$

3. 구하는 직선은 $(1,2,3)\times(-3,-2,4) = (14,-13,4)$ 방향이고, $(2,1,-5)$를 지나므로,

$$\frac{x-2}{14} = \frac{y-1}{-13} = \frac{z+5}{4}$$

4. $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{c} = \mathbf{e}_3$ 이라 하면

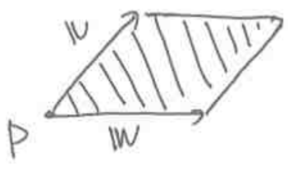
$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = (\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_1)\times\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}\times\mathbf{e}_3 = \mathbf{0},$$
$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{e}_1\times(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1\times(-\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_3$$

으로, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} \neq \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ 이다.

5. 구하는 넓이는

$$|(-2,1,-3)\times(2,-2,1)| = |(-5,-4,2)| = 3\sqrt{5}.$$

6. $|\mathbf{v}\times\mathbf{w}| = |(1,2,3)\times(3,2,1)| = |(-4,8,-4)| = 4\sqrt{6}$



하승우 (수리과학부)

7. (a) (주어진 식) $= (1,-1,1)\times(0,1,-1) = (0,1,1)$.

(b) (주어진 식) $= (1,1,0)\times(1,1,1) = (1,-1,0)$

(c) (주어진 식) $= (\mathbf{0}-\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_2)\times\mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1+\mathbf{0})\times\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2$

$= (0,-1,0)$.

8. $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 일차독립 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$

($\Rightarrow$) $\mathbf{a},\mathbf{b}$가 일차독립이면, $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$ 이고, $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$의 각을 θ라 할 때, $\theta\neq 0°, 180°$ 이다. 따라서

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\sin\theta| \neq 0$$

이고, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$.

($\Leftarrow$) $\mathbf{a},\mathbf{b}$가 일차종속이면, $\mathbf{a}=t\mathbf{b}$ 이거나 $\mathbf{b}=t\mathbf{a}$ 인데, 이때 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$.
즉, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$ 이면 $\mathbf{a},\mathbf{b}$는 일차독립.

9. $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\mathbf{c}=(c_1,c_2,c_3)$

(a)
$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &= (a_1,a_2,a_3)\times[(b_1,b_2,b_3)\times(c_1,c_2,c_3)] \\
&= (a_1,a_2,a_3)\times\big((b_2c_3-b_3c_2,\ b_3c_1-b_1c_3,\ b_1c_2-b_2c_1)\big) \\
&= \big(a_2(b_1c_2-b_2c_1)-a_3(b_3c_1-b_1c_3), \\
&\qquad a_3(b_2c_3-b_3c_2)-a_1(b_1c_2-b_2c_1), \\
&\qquad a_1(b_3c_1-b_1c_3)-a_2(b_2c_3-b_3c_2)\big) \\
&= \big((a_2c_2+a_3c_3)b_1-(a_2b_2+a_3b_3)c_1, \\
&\qquad (a_1c_1+a_3c_3)b_2-(a_1b_1+a_3b_3)c_2, \\
&\qquad (a_1c_1+a_2c_2)b_3-(a_1b_1+a_2b_2)c_3\big) \\
&= (a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)(b_1,b_2,b_3)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)(c_1,c_2,c_3) \\
&= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

(b) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = -\,\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$

$$= -\Big((\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{a} - (\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{b}\Big) \qquad (a)$$

$$= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{a}.$$

(c) $\underbrace{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}\cdot(\underset{\sim}{\mathbf{c}}\times\underset{\sim}{\mathbf{d}}) = ((\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{d}$

$$= \big((\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{a}\big)\cdot\mathbf{d}$$

$$= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}).$$

(d) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + \mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$

$$= \Big((\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}\Big) + \Big((\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{c} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{a}\Big) + \Big((\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{a} - (\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{b}\Big)$$

$$= \mathbf{0}.$$

*기말고사 때는 이 식들을 기억하면 좋을 때가 있다.

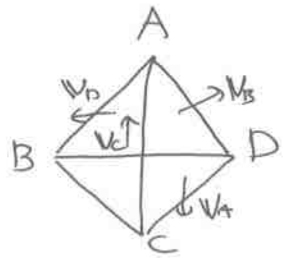
10. $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$이 정규직교기저이므로 $\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2 = \pm\mathbf{v}_3$ 이고, 이 기저가 양으로 향해 있으므로, $\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2 = +\mathbf{v}_3$ 이다. ($\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_3$ 이면, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, -\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2)$는 양으로 향할 수 없다.) 마찬가지로, 행렬식의 성질에 의해 $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1)$과 $(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$도 양으로 향해 있고 정규직교기저이므로, $\mathbf{v}_2\times\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_3\times\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ 이다. 그러면,

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3)\times(b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + b_3\mathbf{v}_3)$$

$$\begin{aligned} &= 0\cdot a_1b_1\mathbf{v}_1 + 1\cdot a_1b_2\mathbf{v}_3 - 1\cdot a_1b_3\mathbf{v}_2 \\ &\quad -1\cdot a_2b_1\mathbf{v}_3 + 0\cdot a_2b_2\mathbf{v}_2 + 1\cdot a_2b_3\mathbf{v}_1 \\ &\quad +1\cdot a_3b_1\mathbf{v}_2 - 1\cdot a_3b_2\mathbf{v}_1 + 0\cdot a_3b_3\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, a_i b_j \mathbf{v}_k.$$

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)



11. $\mathbb{V}_A$는 $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}$에 수직이므로,

$$\mathbb{V}_A = c_A\, \overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC} \qquad (c_A\text{는 상수})$$

이다. 이때 방향을 고려하면 $c_A > 0$ 이고,

$$|\mathbb{V}_A| = \triangle BCD = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}|$$

이므로, $c_A = \frac{1}{2}$ 이다. 즉, $\mathbb{V}_A = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}$ 이다. 마찬가지로

$$\mathbb{V}_B = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD},\quad \mathbb{V}_C = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB},\quad \mathbb{V}_D = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$$

가 되어

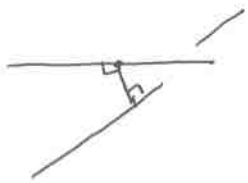
$$\mathbb{V}_A+\mathbb{V}_B+\mathbb{V}_C+\mathbb{V}_D = \frac{1}{2}((\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})\times(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$$

$$+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$$

$$= \mathbb{O}.$$

이다.

12. 두 직선 위의 점 $A_1+t_1\mathbb{V}_1$, $A_2+t_2\mathbb{V}_2$ 에서 직선 사이의 최단



거리를 갖는다고 하자. 이때

$$(A_1+t_1\mathbb{V}_1)-(A_2+t_2\mathbb{V}_2) = (A_1-A_2)+t_1\mathbb{V}_1-t_2\mathbb{V}_2$$

는 $\mathbb{V}_1$, $\mathbb{V}_2$ 에 동시에 수직이다. 따라서

$$(A_1-A_2)+t_1\mathbb{V}_1-t_2\mathbb{V}_2 = c\,\mathbb{V}_1\times\mathbb{V}_2 \qquad (c\text{는 상수})$$

가 되는데, 구하는 거리는 여기서 $|c\mathbb{V}_1\times\mathbb{V}_2|$ 를 구하면 된다. 그런데

$$c|\mathbb{V}_1\times\mathbb{V}_2|^2 = \left((A_1-A_2)+\cancel{t_1\mathbb{V}_1}-\cancel{t_2\mathbb{V}_2}\right)\cdot(\mathbb{V}_1\times\mathbb{V}_2)$$

$$= (A_1-A_2)\cdot(\mathbb{V}_1\times\mathbb{V}_2)$$

이므로, $c|\mathbb{V}_1\times\mathbb{V}_2| = (A_1-A_2)\cdot\frac{\mathbb{V}_1\times\mathbb{V}_2}{|\mathbb{V}_1\times\mathbb{V}_2|}$ 가 된다. 따라서, 두 직선

사이의 거리는

$$|c\,\mathbb{V}_1\times\mathbb{V}_2| = \left|(A_1-A_2)\cdot\frac{\mathbb{V}_1\times\mathbb{V}_2}{|\mathbb{V}_1\times\mathbb{V}_2|}\right|$$

가 된다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

13. 정사영하는 평면은 단위 법벡터가 $\mathbf{n}$ 이고 원점을 지나는 평면 $\mathbf{n}\cdot X=0$ 에 대해서만 생각하면 충분하다. ($\mathbf{n}\cdot X=c$ 는 $\mathbf{n}\cdot X=0$ 의 평행이동이다.)
두 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 가 이루는 평행사변형을 평면 $\mathbf{n}\cdot X=0$ 위로 정사영한 도형은, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 의 평면에 대한 정사영 (평면에 내린 수선의 발)이 이루는 평행사변형과 같다. 우선 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$의 평면에 대한 정사영을 구하자.
$\mathbf{a}+t\mathbf{n}$ 이 평면 $\mathbf{n}\cdot X=0$ 위에 있으려면, $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{a}+t\mathbf{n}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}+t=0$ 에서 $t=-\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$ 이고, $\mathbf{a}$의 평면에 대한 정사영은 $\mathbf{a}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$ 이다. 마찬가지로, $\mathbf{b}$의 평면에 대한 정사영은 $\mathbf{b}-\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}$ 이다. 따라서 정사영된 도형의 넓이는

$$|(\mathbf{a}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n})\times(\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n})| =: |\mathbf{v}|$$

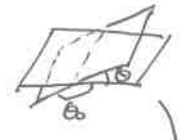
이다. (여기서 $\mathbf{v}=(\mathbf{a}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n})\times(\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n})$ 이라 두었다.)

그런데

$$\begin{aligned}\mathbf{v}\times\mathbf{n} &= \big((\mathbf{a}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n})\times(\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n})\big)\times\mathbf{n}\\ &= \underbrace{\big((\mathbf{a}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n})\cdot\mathbf{n}\big)}_{=\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}) =0}(\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}) \quad \leftarrow (9(b))\\ &\quad - \underbrace{\big((\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n})\cdot\mathbf{n}\big)}_{=0}(\mathbf{a}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n})\\ &= 0\end{aligned}$$

이므로 $\mathbf{v}$ 는 $\mathbf{n}$에 나란하고, $\mathbf{v}=k\mathbf{n}$ 이다. (사실, $\mathbf{a}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$, $\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ 이 모두 $\mathbf{n}$에 수직이므로 당연하기도 하다.) 또,

$$\begin{aligned}k=\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} &= (\mathbf{a}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n})\times(\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n})\cdot\mathbf{n}\\ &= (\mathbf{a}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{n}) \quad \leftarrow \mathbf{x}\times\mathbf{y}\cdot\mathbf{z}=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\times\mathbf{z}\\ &= (\mathbf{a}\times\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{n}\times\mathbf{b}))\cdot\mathbf{n} \quad \leftarrow \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\times\mathbf{z}=\mathbf{x}\times\mathbf{y}\cdot\mathbf{z}\\ &= \mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}\end{aligned}$$



이므로, $\mathbf{v}=(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ 이다. 따라서 정사영된 도형의 넓이는 $|\mathbf{v}|=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}|$ 이다. $\mathbf{a}, \mathbf{b}$로 이루어지는 평행사변형의 넓이는 $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ 이고, 정사영된 도형의 넓이는 원래 도형 넓이의 $\dfrac{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}$ 배인데, 이때 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$로 이루어지는 평행사변형의 법벡터 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 와 $\mathbf{n}$ 의 각이 θ_0이면 $\cos\theta_0=\dfrac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}$ 이다. $0\le\theta_0\le\frac{\pi}{2}$ 이면 $\theta=\theta_0$, $\frac{\pi}{2}\le\theta_0\le\pi$ 이면 $\theta=\pi-\theta_0$ 이고, 이때 $\cos\theta=\dfrac{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}$ 이다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

14. $\mathbb{b} - p_{\mathbb{a}}(\mathbb{b}) = \mathbb{b} - \frac{\mathbb{b}\cdot\mathbb{a}}{\mathbb{a}\cdot\mathbb{a}}\mathbb{a} = \frac{(\mathbb{a}\cdot\mathbb{a})\mathbb{b} - (\mathbb{b}\cdot\mathbb{a})\mathbb{a}}{\mathbb{a}\cdot\mathbb{a}} = \frac{(\mathbb{a}\times\mathbb{b})\times\mathbb{a}}{\mathbb{a}\cdot\mathbb{a}}$

15. 3차원 공간에서 $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}$가 일차독립이면, $(\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c})$는 기저가 되고, 임의의 벡터 $\mathbb{v}$에 대하여 $\mathbb{v} = p\mathbb{a} + q\mathbb{b} + r\mathbb{c}$ 와 같이 $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}$의 일차결합으로 쓸 수 있다. 이때

$$(\text{우변}) = \frac{\det(p\mathbb{a}+q\mathbb{b}+r\mathbb{c}, \mathbb{b}, \mathbb{c})}{\det(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c})}\mathbb{a} + \frac{\det(\mathbb{a}, p\mathbb{a}+q\mathbb{b}+r\mathbb{c}, \mathbb{c})}{\det(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c})}\mathbb{b}$$

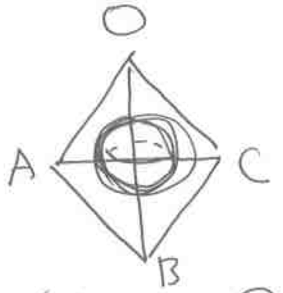
$$+ \frac{\det(\mathbb{a}, \mathbb{b}, p\mathbb{a}+q\mathbb{b}+r\mathbb{c})}{\det(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c})}\mathbb{c}$$

$$= p\frac{\det(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c})}{\det(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c})}\mathbb{a} + q\frac{\det(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c})}{\det(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c})}\mathbb{b} + r\frac{\det(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c})}{\det(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c})}\mathbb{c}$$

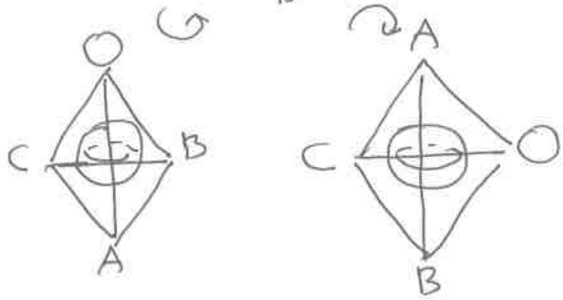
$$= p\mathbb{a} + q\mathbb{b} + r\mathbb{c} = \mathbb{v}$$

이다

16. $\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}$ 라 하자. 이때 정사면체 OABC는 O를 고정하고 어떻게 회전해도 동일한 모습이므로, 대칭성에 의해,



$$\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}$$
$$= a\overrightarrow{OC} + b\overrightarrow{OA} + c\overrightarrow{OB}$$



이다. 따라서 $a=b=c$ 이다. 따라서

$$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC}$$

와 같이 쓸 수 있다. 또, 이번에는 B를 고정하고 회전 하면, 대칭성에 의해,

$$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AO}$$

이다. 이는 곧 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + (k(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) + k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) - k\overrightarrow{OA})$

$= (1-3k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC}$ 가 되어,

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

$1-3k=k$ 에서 $k=\frac{1}{4}$ 임을 얻는다. 따라서

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$$

이다.

17. $\mathbb{n}=(\mathbb{a}\times\mathbb{b})+(\mathbb{b}\times\mathbb{c})+(\mathbb{c}\times\mathbb{a})$

$$\begin{aligned}
&=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}\\
&=\overrightarrow{OB}\times(-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}\\
&=\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}\\
&=\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{AC}+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC})\times\overrightarrow{OA}\\
&=\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}.
\end{aligned}$$

$\mathbb{n}$은 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$에 각각 수직이므로, $\mathbb{n}$은 $\triangle ABC$에 수직이다.
$\mathbb{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ 는 원점과 무관하고 A, B, C 의 상대적 위치로 결정되는 벡터이므로,
O가 변해도 $\mathbb{n}$은 불변이다.
삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ 이고, $|\mathbb{n}|=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ 이므로,
$|\mathbb{n}|$ 은 삼각형 넓이의 2배이다.

18. $\mathbb{n}=(\mathbb{a}\times\mathbb{b}+\mathbb{b}\times\mathbb{c}+\mathbb{c}\times\mathbb{a})$ 라 하면, 주어진 방정식은

$$\mathbb{n}\cdot\mathbb{x}=k\ (=\det(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c}))$$

꼴이 되어, 평면의 방정식이 된다. 이때

$$\begin{aligned}
\mathbb{x}=\mathbb{a} &\Rightarrow \mathbb{a}\cdot(\mathbb{a}\times\mathbb{b}+\mathbb{b}\times\mathbb{c}+\mathbb{c}\times\mathbb{a})=\mathbb{a}\cdot\mathbb{b}\times\mathbb{c}=\det(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c}),\\
\mathbb{x}=\mathbb{b} &\Rightarrow \mathbb{b}\cdot(\mathbb{a}\times\mathbb{b}+\mathbb{b}\times\mathbb{c}+\mathbb{c}\times\mathbb{a})=\mathbb{b}\cdot\mathbb{c}\times\mathbb{a}=\det(\mathbb{b},\mathbb{c},\mathbb{a})=\det(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c}),\\
\mathbb{x}=\mathbb{c} &\Rightarrow \mathbb{c}\cdot(\mathbb{a}\times\mathbb{b}+\mathbb{b}\times\mathbb{c}+\mathbb{c}\times\mathbb{a})=\mathbb{c}\cdot\mathbb{a}\times\mathbb{b}=\det(\mathbb{c},\mathbb{a},\mathbb{b})=\det(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c})
\end{aligned}$$

이므로, 이 평면은 점 A, B, C를 지난다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

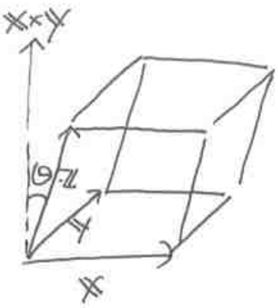
9.(c)

19. $(\underline{\mathbf{a}}\times\underline{\mathbf{b}})\cdot\underline{(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}\times\underline{(\mathbf{c}\times\mathbf{a})} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\times\mathbf{a}) - (\mathbf{a}\cdot\underbrace{\cancel{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}}_{0})(\mathbf{b}\cdot\underbrace{\cancel{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}}_{0})$

$$= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c})(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})$$

$$= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c})^2.$$

20. $\sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}.$ (5장 3절 연습문제 6)



21. 밑면을 벡터 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ 로 만들어지는 평행사변형이라 하자. 그러면 밑면의 넓이는 $|\mathbf{x}\times\mathbf{y}|$ 이다.
또, $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ 와 $\mathbf{z}$ 사이의 각을 θ라 하면
높이는

$$|\mathbf{z}|\,|\cos\theta| = |\mathbf{z}|\left|\frac{\mathbf{x}\times\mathbf{y}\cdot\mathbf{z}}{|\mathbf{x}\times\mathbf{y}|\,|\mathbf{z}|}\right| = \frac{|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\cdot\mathbf{z}|}{|\mathbf{x}\times\mathbf{y}|}$$

이다. 따라서 평행육면체의 부피는 $|\mathbf{x}\times\mathbf{y}|\cdot\dfrac{|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\cdot\mathbf{z}|}{|\mathbf{x}\times\mathbf{y}|} = |\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\cdot\mathbf{z}| = |\det(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})|$

이다.

22. 네 점을 $A=(0,1,2)$, $B=(1,2,3)$, $C=(1,3,5)$, $D=(1,4,11)$ 이라 하면
$\overrightarrow{AB}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{AC}=(1,2,3)$, $\overrightarrow{AD}=(1,3,9)$

에서, 사면체의 부피는

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}) \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{밑넓이} \\ \text{절반}}}{\frac{1}{2}} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{뿔이므로} \\ \text{부피}/3}}{\frac{1}{3}} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

23. $$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(L_A(x), L_A(y), L_A(z)) &= |\det(L_A(x), L_A(y), L_A(z))| \\ &= |\det(Ax, Ay, Az)| \\ &= |\det(A\cdot(x, y, z))| \\ &= |\det A|\,|\det(x, y, z)| \\ &= |\det A|\,\mathrm{Vol}(x, y, z)\end{aligned}$$

24. 타원체 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ 은, 공 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 의 선형변환 $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ 에 의한 상이다.

$\left((x,y,z) \longmapsto (ax, by, cz) = (x', y', z') \right.$ 에서 $x=\frac{x'}{a}$, $y=\frac{y'}{b}$, $z=\frac{z'}{c}$ 이고,

$\left. 1 \ge \frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}+\frac{(z')^2}{c^2} \right)$

따라서 타원체의 부피는

$$\left|\det\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\right| \mathrm{Vol}(x^2+y^2+z^2\le 1) = \frac{4}{3}\pi|abc|.$$

25. $$\begin{aligned}(u\times v)\times(u\times w) &= (u\times v\cdot w)u - (u\times v\cdot u)w \\ &= \det(u,v,w)u - \det(u,\cancel{v},u)w \\ &= \det(u,v,w)u.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{하승우}}$(수리과학부)

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

9. 곡선

제 1절. 매개화된 곡선

1. 곡선 위의 점 $(2t^2, 1-t, 3+t^2)$ 의 좌표를 평면의 방정식에 대입하여 t의 값을 찾는다.

$$3(2t^2)-14(1-t)+(3+t^2)=10 \quad \Rightarrow t=1, -3.$$

$t=1,-3$ 인 곡선 위의 점은 각각 $(2,0,4)$, $(18,4,12)$.

2. 직교좌표계 방정식으로 나타내 보거나, 극좌표계를 떠올려 보자.

(1) $x^3=y^2$ 이므로, $y=\pm x^{3/2}$ $(x\geq 0)$ 의 그래프가 된다.

점 $X(t_0)$ 에서의 접선의 방정식은, $X'(t)=(2t, 3t^2)$ 에서,

$$l(s)=X(t_0)+sX'(t_0)=(t_0^2, t_0^3)+s(2t_0, 3t_0^2)=(2t_0s+t_0^2, 3t_0^2s+t_0^3)$$

이다.

(2) $\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2=1$ 의 그래프이다. 점 $X(t_0)$ 에서의 접선의 방정식은, $X'(t)=(-2\sin t, \cos t)$ 에서

$$l(s)=X(t_0)+sX'(t_0)=(2\cos t_0, \sin t_0)+s(-2\sin t_0, \cos t_0)$$
$$=(-2\sin t_0\, s+2\cos t_0, \cos t_0\, s+\sin t_0).$$

(3) $r=e^{-\theta}$ 의 그래프이다. 점 $X(t_0)$ 에서의 접선의 방정식은,

$X'(t)=-e^{-t}(\cos t, \sin t)+e^{-t}(-\sin t, \cos t)$ 에서

$$l(s)=X(t_0)+sX'(t_0)=e^{-t_0}(\cos t_0, \sin t_0)+s\left(-e^{-t_0}(\cos t_0, \sin t_0)+e^{-t_0}(-\sin t_0, \cos t_0)\right)$$

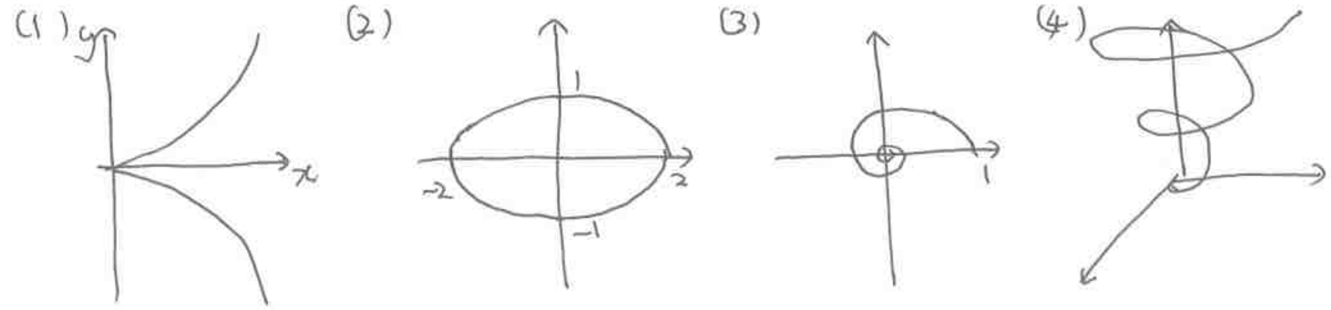
(4) 원기둥좌표계로 $r=\theta$, $z=r$ 이다. 점 $X(t_0)$ 에서의 접선의 방정식은,

$X'(t)=(\cos t-t\sin t, \sin t+t\cos t, 1)$ 에서

$$l(s)=X(t_0)+sX'(t_0)=(t_0\cos t_0, t_0\sin t_0, t_0)+s(\cos t_0-t_0\sin t_0, \sin t_0+t_0\cos t_0, 1)$$

이다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)



3. $X(t)=(e^{t}, e^{2t}, 1-e^{-t})$, $Y(t)=(1-t, \cos t, \sin t)$ 라 하면

$$X(0)=(1,1,0)=Y(0)$$

이므로 두 곡선은 $(1,1,0)$ 에서 만난다. 이때 접선의 교각은 접선의 방향벡터, 즉 속도벡터의 사잇각과 같다. $X'(t)=(e^{t}, 2e^{2t}, e^{-t})$, $Y'(t)=(-1,-\sin t, \cos t)$ 에서 $X'(0)=(1,2,1)$, $Y'(0)=(-1,0,1)$ 이고 구하는 각을 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{X'(0)\cdot Y'(0)}{|X'(0)|\,|Y'(0)|}=0$$

에서 $\theta=90^\circ$ 이다.

4. (방법 1) $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 이라 할 때

$$\frac{d}{dt}|X|=\frac{d}{dt}\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}=\frac{2x_1x_1'+\cdots+2x_nx_n'}{2\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}}=\frac{X\cdot X'}{|X'|}.$$

(방법 2) $\frac{d}{dt}|X(t)|^2=2|X(t)|\frac{d}{dt}|X(t)|$ 이고, 동시에 $\frac{d}{dt}|X(t)|^2=\frac{d}{dt}(X(t)\cdot X(t))=2X(t)\cdot X'(t)$

따라서 $2|X(t)|\frac{d}{dt}|X(t)|=2X(t)\cdot X'(t)$ 이고 이로부터

$$\frac{d}{dt}|X(t)|=\frac{X(t)\cdot X'(t)}{|X(t)|}.$$

그러면, $t=t_0$ 일 때 $|X(t)|$ 가 최소이면, $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0}|X(t)|=\frac{X(t_0)\cdot X'(t_0)}{|X(t_0)|}=0$

즉, $X(t_0)$ 와 $X'(t_0)$ 가 수직이고, 이는 $\overleftrightarrow{OX(t_0)}$ 가 $X(t)$ 와 $t=t_0$에서 수직으로 만남을 뜻한다.

$\boxed{\text{하승현}}$(수리과학부)

5. $X(\theta) = r(\theta)(\cos\theta, \sin\theta)$ 이면

$$X'(\theta) = r'(\theta)(\cos\theta, \sin\theta) + r(\theta)(-\sin\theta, \cos\theta)$$

가 되어, $(\cos\theta, \sin\theta) \perp (-\sin\theta, \cos\theta)$ 이므로

$$|X'(\theta)| = \sqrt{(r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2}$$

가 된다. 이때 $\overleftrightarrow{OX(\theta_0)}$ 와 $X'(\theta_0)$ 사이의 각을 α라 하면

$$\cos\alpha = \frac{X\cdot X'}{|X||X'|} = \frac{r(\theta_0)\, r'(\theta_0)}{r(\theta_0)\cdot\sqrt{r'(\theta_0)^2 + r(\theta_0)^2}} = \frac{r'(\theta_0)}{\sqrt{r'(\theta_0)^2 + r(\theta_0)^2}}$$

이다.

나머지 문제의 답은, $r = e^\theta$ 일 때 위에서 구한 $\cos\alpha$가 $\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 임을 보이면 된다. $r' = e^\theta$ 이므로,

$$\cos\alpha = \frac{e^\theta}{\sqrt{e^{2\theta}+e^{2\theta}}} = \frac{e^\theta}{\sqrt{2}\,e^\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

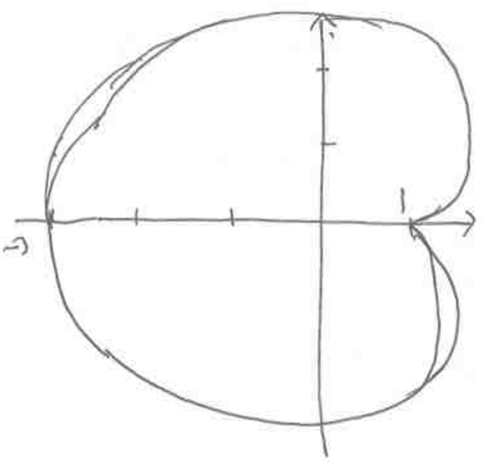
이 되어 원하는 결론을 얻는다.

6. $X(t) = Q - P = 2(\cos t, \sin t) - (\cos 2t, \sin 2t)$

$$= (2\cos t - 2\cos^2 t + 1,\ 2\sin t - 2\sin t\cos t)$$

$$= (1,0) + 2(1-\cos t)(\cos t, \sin t)$$

$X(t)$의 그래프는, $r = 2(1-\cos\theta)$ 의 그래프를 $(1,0)$만큼 평행이동한 것이다.



(그림 못 그려서 죄송)

하승우 (수리과학부)

7. 원판의 중심은 원점, 파리가 처음에 향하던 방향을 x축으로 하며, 파리의 위치를 $X(t)$ 로 나타내면 $X(t) = 2t(\cos 3t, \sin 3t)$ 이다. 그러면

$$X'(t) = 2(\cos 3t, \sin 3t) + 2t(-3\sin 3t, 3\cos 3t)$$

에서

$$|X'(t)| = \sqrt{36t^2+4} = 2\sqrt{9t^2+1}$$

이고, $|X'(4)| = 2\sqrt{145}$ (cm/s) 이다.

8. $P(0) = P_0$, $P(1) = P_1$ 이므로 $P(t)$는 점 P_0, P_1을 지난다.

$$P'(t) = -2(1-t)P_0 + (2(1-t) - 2t)P_* + 2tP_1$$ 에서

$$P'(0) = -2P_0 + 2P_*, \quad P'(1) = -2P_* + 2P_1$$

이고, $P(t)$의 P_0, P_1 에서의 접선이 각각

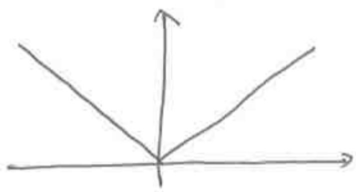
$$\ell_0(s) = P(0) + sP'(0) = P_0 + s(-2P_0 + 2P_*),$$
$$\ell_1(s) = P(1) + s(P'(1)) = P_1 + s(-2P_* + 2P_1)$$

인데, $\ell_0(\frac{1}{2}) = P_*$, $\ell_1(-\frac{1}{2}) = P_*$ 이다. 또,

$$P(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{4}(P_0+P_1) + \frac{1}{2}P_* = \frac{1}{2}\left(P_* + \frac{1}{2}(P_0+P_1)\right)$$

이다.

9. $\lim_{t\to 0} f(t) = 0$, $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = \pm\infty$ 이므로, $X(t) = (f(t), |f(t)|)$ 의 상은 $\tilde{X}(t) := (t, |t|)$ $(-\infty < t < \infty)$ 의 상과 같다.



이 곡선은 $t\neq 0$ 에서는 물론 무한급이다. $t=0$ 이면,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{he^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_0 |f(t)| = \lim_{h\to 0}\frac{|f(h)|-|f(0)|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|he^{-\frac{1}{h^2}}|}{h} = 0$$

하승우 (수리과학부)

이제 $f(t)$가 무한 번 미분 가능하며 $f^{(n)}(0)=0$ 임을 보이자. 그러면

$$|f(t)| = \begin{cases} f(t) & t \ge 0 \\ -f(t) & t<0 \end{cases}$$ 이므로 $\left.\frac{d^n}{dt^n}\right|_0 |f(t)| = 0$ 이 된다.

먼저, $f'(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} + \frac{2}{t^2} e^{-1/t^2} & t \neq 0 \\ 0 & t=0 \end{cases}$ 이다. n에 대한 명제

$$f^{(n)}(t) = \begin{cases} p_n\left(\frac{1}{t}\right) e^{-1/t^2} & t \neq 0 \\ 0 & t=0 \end{cases}$$, $p_n(x)$는 x에 대한 다항식,

를 보이자. $n=1$이면, $p_1(1/t) = \left(1+\frac{2}{t^2}\right)$ 으로 이미 성립함을 보았다. 이 명제가 n에 대해 성립하면, $t \neq 0$ 일 때

$$f^{(n+1)}(t) = -\frac{1}{t^2} p_n\left(\frac{1}{t}\right) e^{-1/t^2} + \frac{2}{t^3} p_n(1/t) e^{-1/t^2} = \left(-\frac{1}{t^2} p_n\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{2}{t^3} p_n\left(\frac{1}{t}\right)\right) e^{-1/t^2},$$

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{p_n\left(\frac{1}{h}\right) e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}$$ $\frac{1}{h} = t$ 치환

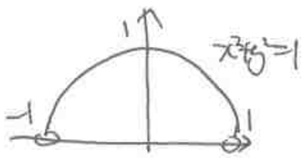
$$= \lim_{t \to \pm\infty} \frac{t\, p_n(t)}{e^{t^2}} = 0$$ (로피탈을 여러 사용)

에서 $p_{n+1}\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t^2} p_n\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{2}{t^3} p_n\left(\frac{1}{t}\right)$, $f^{(n+1)}(t) = \begin{cases} p_{n+1}\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t^2}} & t \neq 0 \\ 0 & t=0 \end{cases}$

이다. 따라서 f는 무한급 함수이고, $|f|$ 또한 마찬가지이다. (참고: 3장 탐구문제 15) 즉, $X(t)$는 무한급 곡선이다. 그런데 $X'(0) = (0,0)$ 이므로, X는 정규곡선은 아니다.

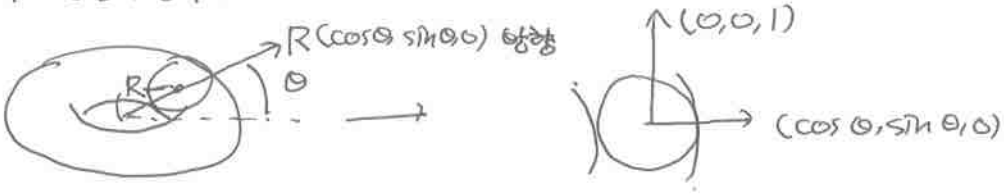
10. $\tanh^2 t + \operatorname{sech}^2 t = \frac{\sinh^2 t}{\cosh^2 t} + \frac{1}{\cosh^2 t} = \frac{\cosh^2 t}{\cosh^2 t} = 1$ 이고

$\cosh t \ge 1$ 이므로, $0 < \operatorname{sech} t \le 1$ 이다. 따라서 $x^2+y^2=1$, $0<y\le 1$, $-1<x<1$ 에서 곡선의 개형은 다음과 같다.



하승무 (수리과학부)

11. 원환면의 각 점은, '큰 원' $(y-R)^2+z^2=r^2$ 위의 각 점에서 반지름 r인 '작은 원'을 적절한 방향으로 그려 만든다. 큰 원 위의 각 점 $R(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ 에서 작은 원은 $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$, $(0,0,1)$이 포함된 평면 위에서 만들어진다.



따라서 원환면 위의 각 점은

$$S(\theta,\varphi)=\underbrace{R(\cos\theta, \sin\theta, 0)}_{\text{큰원}}+\underbrace{r\left(\cos\varphi\,(\cos\theta, \sin\theta, 0)+\sin\varphi\,(0,0,1)\right)}_{\text{작은원}}$$
$$=R(\cos\theta, \sin\theta, 0)+r\cos\varphi\,(\cos\theta, \sin\theta, 0)+r\sin\varphi\,(0,0,1)$$

이다.

$$X(t)=S(2t, 3t)=R(\cos 2t, \sin 2t, 0)+r\cos 3t\,(\cos 2t, \sin 2t, 0)+r\sin 3t\,(0,0,1)$$

는, 큰 원을 도는 각속도가 2, 작은 원을 도는 각속도가 3 인 원환면 위의 곡선이다. 즉 '큰 원을 그리는' 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$, '작은 원을 그리는' 주기는 $\frac{2\pi}{3}$ 인데, 곡선의 주기를 한 번 돌기 위해서는 큰 원 및 작은 원을 둘 다 정수 번 돌아야 한다. 이러한 의미에서 곡선의 주기는 π와 $\frac{2}{3}\pi$의 최소공배수인 2π 이다.

또는, $X(t)=(R\cos 2t+r\cos 3t\cos 2t,\ R\sin 2t,\ r\cos 3t\sin 2t,\ r\sin 3t)$ 의 z좌표에서, X의 주기가 $\frac{2}{3}\pi$의 배수인 것을 안다. 이때

$$X(0)=(R+r, R+r, 0),\quad X\left(\tfrac{2}{3}\pi\right)=\left(-\tfrac{1}{2}R-\tfrac{r}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}R-\tfrac{\sqrt{3}}{2}r, 0\right),$$
$$X\left(\tfrac{4}{3}\pi\right)=\left(-\tfrac{R}{2}-\tfrac{r}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}R+\tfrac{\sqrt{3}}{2}r, 0\right),\quad X(2\pi)=(R+r, R+r, 0)$$

이므로, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$는 X의 주기가 될 수 없다. 또, 2π는 명백히 주기의 배수이므로, X의 주기는 2π가 된다.

하승우 (수리과학부)

제 2절. 가속도

1. 각 곡선을 $X(t)$라 하자. 속도벡터와 가속도벡터는 각각 $X'(t)$, $X''(t)$이다.

(1) $X'(t) = (e^t, -\sin t, \cos t)$ $\quad X''(t) = (e^t, -\cos t, -\sin t)$

(2) $X'(t) = (2\cos 2t, \frac{1}{1+t}, 1)$ $\quad X''(t) = (-4\sin 2t, -\frac{1}{(1+t)^2}, 0)$

(3) $X'(t) = (-3\sin 3t, 3\cos 3t)$, $\quad X''(t) = (-9\cos 3t, -9\sin 3t)$

(4) $X'(t) = (1, 2t, 3t^2)$, $\quad X''(t) = (0, 2, 6t)$

2. $\pm a(t) = v'(t) \iff X(t)$ 직선운동.

($\Rightarrow$) $v(t)^2 = |X'(t)|^2 = X'(t)\cdot X'(t)$ 에서 양변을 미분하면

$2v(t)a(t) = 2X'(t)\cdot X''(t)$ 즉 $|X'||X''| = \pm X'\cdot X''$

이는 곧 $X''=0$ 이거나 X''가 X'와 나란함을 뜻한다. $X''=0$ 이면 X'가 상수벡터가 되므로, X는 직선 운동이다. 이제 $X' /\!/ X''$라 하고 $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$라 하자. 그러면 어떤 함수 $f(t)$에 대하여

$$(x', y', z') = f(t)(x'', y'', z'')$$

인데, X가 정규곡선이므로 $f(t) \neq 0$ 이다.

우선, 어떤 t_0와 t_1에 대하여 $x'(t_0)=0$, $x'(t_1)\neq 0$ 이라 하자. 이때

$t_0 < t < t_1$ 이면 $x'(t) \neq 0$ 이라고 해도 된다. (아닐 경우, t_0을 $t < t_1$ 이면서 $x(t)=0$ 인 마지막 t로 잡는다. 연속함수이므로 이것이 가능하다.) 그러면

$$\frac{x''}{x'} = \frac{1}{f(t)} \quad \text{에서} \quad \underset{\text{유한값}}{F_0(t)} := \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{f(s)} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{x''(s)}{x'(s)}\,ds = \lim_{k\to t_0} \int_k^{t_1} \frac{x''(s)}{x'(s)}\,ds = \lim_{k\to t_0} \Big[\underset{\text{발산}}{\log} \frac{x'(t_1)}{x'(k)}\Big]$$

이므로 모순이다. 따라서 $x'(t)=0$ 인 t가 있으면, $x'(t)=0$ for all t 이다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

다음으로, $x'(t) \neq 0$ (모든 t에 대해) 이라 하자. 그러면 앞에서와 같이

$$F(t) := \int_0^t \frac{ds}{f(s)} = \log \frac{x'(t)}{x'(0)}$$

에서 $x'(t) = x'(0)\, e^{F(t)}$ 이다. 즉, 어떤 경우에도 ($x'(t)=0$ 인 경우

$x'(t) = 0 = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{x'(0)}} \cdot e^{F(t)}$ 이다), y, z에 대해서도 비슷하게 하면

$$X'(t) = (x', y', z') = (x'(0)e^F,\ y'(0)\,e^F,\ z'(0)e^F)$$
$$= e^F (x'(0), y'(0), z'(0))$$

에서, $X'(t)$는 항상 한 상수벡터와 같은 방향이다. 따라서 $X(t)$는 직선 운동한다.

($\Leftarrow$) $X(t)$가 직선 운동을 하면, 어떤 벡터 P, A에 대해

$$X(t) = P + f(t)A$$

와 같이 쓸 수 있다. 이때 X는 정규곡선이므로 f는 미분가능하고 $|f'(t)| \neq 0$ 이다.

$X'(t) = f'(t)A$ 에서 $v(t) = |X'(t)| = |f'(t)|\,|A|$.

$X''(t) = f''(t)A$ 에서 $a(t) = |X''(t)| = |f''(t)|\,|A|$.

이때 $v(t) = \pm a(t)$ 가 된다.

* 필요충분조건이 $v'(t) = \pm a(t)$ 여야 한다. + 와 − 중 하나만 만족해야 하는 것은 아니다. $X = (0, -e^{-t})$ 이면, $X' = (0, e^{-t})$, $X'' = (0, -e^{-t})$ 에서 $v(t) = e^{-t}$, $a(t) = e^{-t}$ 이며 $v(t) = -a(t)$ 이지만 X는 직선 운동이다.

$X'(t) \cdot X'(t) = v(t)^2$ 에서 양변을 미분하면

$$2X' \cdot X'' = 2v \cdot v'$$
$$= |X'||X''| \cos\theta = v \cdot a \cos\theta$$

에서 $v'(t) = a(t) \cos\theta(t)$ 이다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

3. $X(t) = r(\cos\theta, \sin\theta)$ 에서

$$X' = r'(\cos\theta, \sin\theta) + r(-\theta'\sin\theta, \theta'\cos\theta)$$
$$= r'(\cos\theta, \sin\theta) + r\theta'(-\sin\theta, \cos\theta)$$
$$X'' = r''(\cos\theta, \sin\theta) + r'(-\theta'\sin\theta, \theta'\cos\theta)$$
$$+ r'\theta'(-\sin\theta, \cos\theta) + r\theta''(-\sin\theta, \cos\theta) + r\theta'(-\theta'\cos\theta, -\theta'\sin\theta)$$
$$= (r'' - r\theta'^2)(\cos\theta, \sin\theta) + \frac{1}{r}(r^2\theta')'(-\sin\theta, \cos\theta)$$

4. $$f'(t) = \underbrace{X'(t)\cdot X'(t)\times X''(t)}_{\text{수직}} + X(t)\cdot \underbrace{X''(t)\times X''(t)}_{=0} + X(t)\cdot X'(t)\times X'''(t)$$

$$= X(t)\cdot X'(t)\times X'''(t).$$

5. $X'(t) = (\cos t, -\sin t, 1)$, $X''(t) = (-\sin t, -\cos t, 0)$ 에서

$X(\frac{\pi}{2}) = (1, 0, \frac{\pi}{2})$, $X'(\frac{\pi}{2}) = (0, -1, 1)$, $X''(\frac{\pi}{2}) = (-1, 0, 0)$

이고, 접촉평면은 $X(\frac{\pi}{2}) = (1, 0, \frac{\pi}{2})$ 를 지나고 $X'(\frac{\pi}{2}) \times X''(\frac{\pi}{2}) = (0,-1,1)\times(-1,0,0)$ 에 수직이다. $(0,-1,1)\times(-1,0,0) = (0,-1,-1)$ 이므로, 구하는 접촉평면의 방정식은 $0(x-1) - (y-0) - (z-\frac{\pi}{2}) = 0$, 즉 $y+z=\frac{\pi}{2}$ 가 된다.

6. 정규곡선 조건이 없으면 문제의 명제는 거짓이다. (정규곡선인 경우 문제 2 참고)

$$X(t) = \begin{cases} (t^4, 0, 0) & t<0 \\ (0, t^4, 0) & t\ge 0 \end{cases}$$

이라 하자. 이때 $X' = \begin{cases} (4t^3, 0, 0) & t<0 \\ (0, 4t^3, 0) & t\ge 0 \end{cases}$, $X'' = \begin{cases} (12t^2, 0, 0) & t<0 \\ (0, 12t^2, 0) & t\ge 0 \end{cases}$

임을 쉽게 알 수 있다. ($t=0$ 일 때 따로 구해야 함에 유의.) 그러면 항등적으로 $X'\times X'' = 0$ 이지만, X 는 직선이나 그 일부가 아니다.

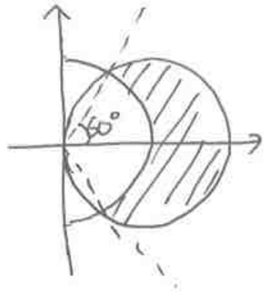
하승우 (수리과학부)

제 3절. 평면곡선과 극좌표계

1. 극좌표계의 부등식으로 주어진 문제에서는, θ가 정의되는 범위를 구하는 것이 중요하다.

(1) 우선, θ의 범위는, $1 \le 2\cos\theta$ 에서 $\cos\theta \ge \frac{1}{2}$, 즉 $-\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ 이다.

따라서 영역의 넓이는



$$\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (2\cos\theta)^2 d\theta - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 1^2 d\theta$$

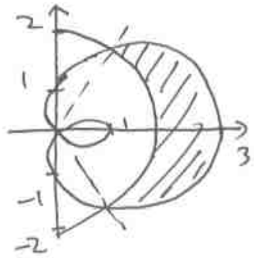
($r \le 2\cos\theta$ 넓이) − ($r \le 1$ 넓이)

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}.$$

(2) $2 \le 1 + 2\cos\theta$ 에서 $\cos\theta \ge \frac{1}{2}$, 즉 $-\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ 이다. 영역의 넓이는

$$\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1+2\cos\theta)^2 d\theta - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 2^2 d\theta$$

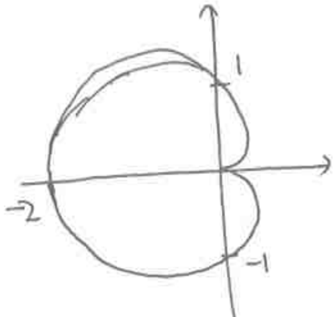
$$= \frac{1}{2}(5\sqrt{3} + 2\pi) - \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}\pi\right) = \frac{5}{2}\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$



2. 개형을 그릴 때, $\theta = 0$ 일 때 $r = 0$ 이므로 원점에서의 '접선'이 $\theta = 0$ 임에 유의한다.

유효한 θ의 범위는 $0 \le \theta \le 2\pi$ 이고, 영역의 넓이는

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\cdot 3\pi.$$



삐뚤어서 미안

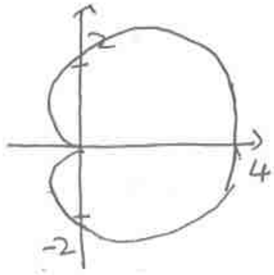
하승욱 (수리과학부)

3. (1) $\theta=\pi$에서 $r=0$ 이므로, 개형을 그릴 때 원점에서의 '접선'이 $\theta=\pi$.

유효한 θ의 범위는 $2(1+\cos\theta)\geq 0$ 에서 $0\leq\theta\leq 2\pi$

넓이는

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(2(1+\cos\theta)\right)^2 d\theta = \frac{1}{2}\cdot 12\pi = 6\pi.$$

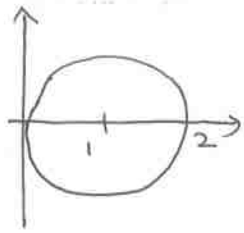


(2) $r^2=2r\cos\theta$ 에서 $x^2+y^2=2x$, 즉 원 $(x-1)^2+y^2=1$ 이다.

θ의 범위는 $2\cos\theta\geq 0$ 에서 $-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$

넓이는

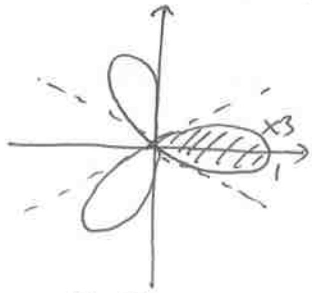
$$\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2\cos\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi.$$



(3) θ의 범위가 $-\frac{\pi}{6}\leq\theta\leq\frac{\pi}{6}$ $(\cos 3\theta\geq 0)$ 인 도형의 넓이의 3배를 구하면 된다.

넓이는

$$3\cdot\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta\, d\theta = \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}.$$

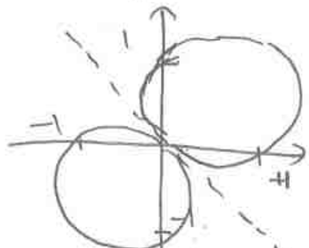


(4) $\theta=\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$ 에서 $r=0$ 이므로, 원점에서의 접선이 $\theta=-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$ 이다.

유효한 θ의 범위는 $0\leq 1+\sin 2\theta$에서 $0\leq\theta\leq 2\pi$

넓이는

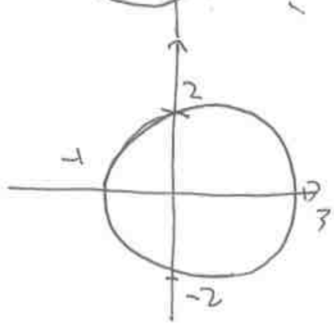
$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\sin 2\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\cdot 3\pi = \frac{3}{2}\pi$$



(5) θ의 범위는 $2+\cos\theta\geq 0$ 에서 $0\leq\theta\leq 2\pi$

넓이는

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2+\cos\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\cdot 9\pi = \frac{9}{2}\pi$$



$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

(6) θ의 범위는 $2+\sin 2\theta \geq 0$ 에서 $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

넓이는

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (2+\sin 2\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\cdot 9\pi = \frac{9}{2}\pi$$

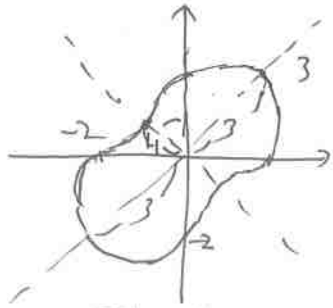
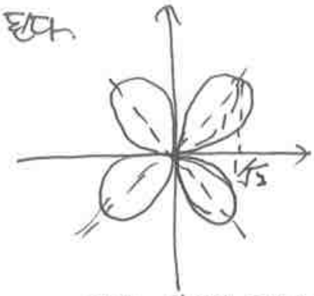


그림 미안
Wolfram alpha 가라. 미안

(7) $r=|\sin 2\theta|$ 에서, '한 잎' $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 부분 넓이의 4배를 하면 된다.

넓이는

$$4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta \, d\theta = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

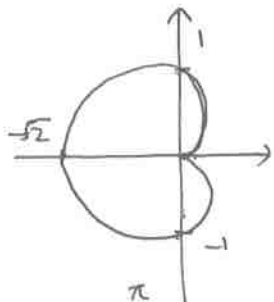


진짜 더이쁘게 못그리겠다
20살 땐 잘 그렸는데

(8) θ의 범위는 $\sqrt{1-\cos\theta} \geq 0$ 에서 $0 \leq \theta \leq 2\pi$. $\theta=0$ 일 때 $r=0$ 이므로 원점에서의 접선은 $\theta=0$.

넓이는

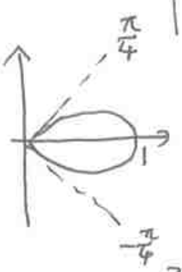
$$\frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{1-\cos\theta}\right)^2 d\theta = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi.$$



(9) θ의 범위는 $\sqrt{\cos 2\theta} \geq 0$ 에서 $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.

넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{\cos 2\theta}\right)^2 d\theta = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

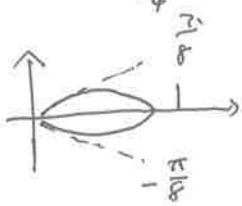


(10) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{8}$ 부분 넓이의 2배를 구한다.

$\frac{\pi}{4}-2\theta = t$
$-2d\theta = dt$

$$2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}} \tan^2\left(\frac{\pi}{4}-2\theta\right)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(\sec^2\left(\frac{\pi}{4}-2\theta\right)-1\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 t-1)\,dt = \frac{1}{2}\left[\tan t - t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}.$$



$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

4. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ 를 대입하라.

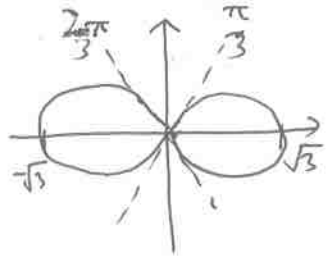
cosθ=0 이면 r=0 이나 양변 /cosθ 가능

(1) $r^2\sin^2\theta(1+r^2\cos^2\theta) = r^2\cos^2\theta(3-r^2\cos^2\theta)$ 에서 $r^2 = 3-\tan^2\theta$

이때 유효한 θ의 범위는 $-\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi\le\theta\le\frac{4}{3}\pi$ $(3-\tan^2\theta\ge 0)$

넓이는 $-\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{3}$ 부분의 2배를 구하면 되며,

$$2\cdot\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(3-\tan^2\theta)d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(4-\sec^2\theta)d\theta = \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}.$$

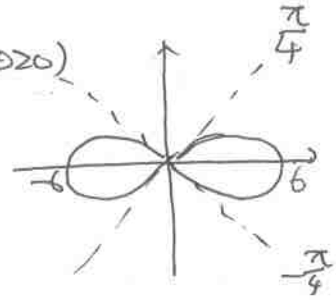


(2) $r^2 = 6\sqrt{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}$ 에서 $r = 6\sqrt{\cos 2\theta}$

유효한 θ의 범위는 $-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi\le\theta\le\frac{5}{4}\pi$. $(\cos 2\theta\ge 0)$

넓이는, $-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3}{4}\pi$ 부분의 2배를 구하면 되며,

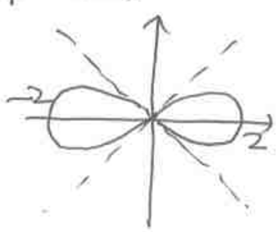
$$2\cdot\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(6\sqrt{\cos 2\theta})^2 d\theta = 36.$$



5. 유효한 θ의 범위는 $2\cos 2\theta\ge 0$ 에서 $-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi\le\theta\le\frac{5}{4}\pi$ 인데,

한 잎의 넓이는 $-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ 부분의 넓이를 구하면 된다.

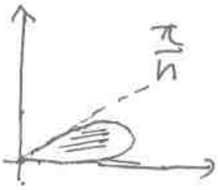
$$\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2\theta\, d\theta = 1.$$



6. $\theta=0$ 일 때 $r=0$ 이고, 다음으로 $r=0$ 이 되는 θ의 값은 $\theta=\frac{\pi}{n}$ 이다.

한 잎의 넓이는 $0\le\theta\le\frac{\pi}{n}$ 부분의 넓이이다.

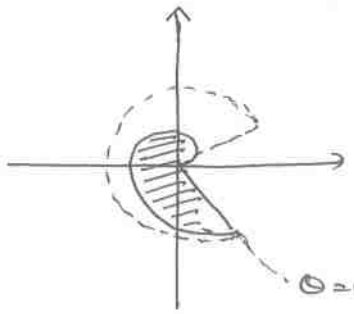
$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sin^2 n\theta\, d\theta = \frac{\pi}{4n}.$$



$\boxed{\text{학습부}}$ (수리과학부)

7. 아르키메데스 영역의 넓이는

$$\frac{1}{2}\int_0^{\theta_0} \theta^2 d\theta = \frac{1}{6}\theta_0^3.$$



무채꼴 $r=\theta_0$, $0\le\theta\le\theta_0$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\int_0^{\theta_0} \theta_0^2 d\theta = \frac{1}{2}\theta_0^3.$$

따라서 아르키메데스 영역의 넓이 = 무채꼴 넓이 $\times\frac{1}{3}$ 이다.

8. 유효한 θ의 범위는, $2R(1-a\cos\theta)\ge 0$ 에서 $0\le\theta\le 2\pi$.
넓이는

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (2R(1-a\cos\theta))^2 d\theta = \frac{1}{2}\cdot 4\pi R^2(2+a^2) = 2\pi R^2(2+a^2).$$

$\boxed{\text{하승보}}$ (수리과학부)

제 4절. 재매개화

1. 매개화 방법은 여러 가지가 있을 수 있다.

(1) $X(t)=\left(\frac{\cos t}{2}, \frac{\sin t}{3}\right)$, $0\le t\le 2\pi$ (2) $X_+(t)=\left(\frac{\cosh t}{2}, \frac{\sinh t}{3}\right)$, $t\in\mathbb{R}$

$X_-(t)=\left(-\frac{\cosh t}{2}, \frac{\sinh t}{3}\right)$, $t\in\mathbb{R}$.

(3) $y=tx$ 라 하면, $t^2x^2=x^3-x^2$ 에서 $x=t^2+1$ 이므로, $y=tx=t^3+t$.
즉, 매개화는 $X(t)=(t^2+1, t^3+t)$ $(t\in\mathbb{R})$

(4) $y=t\sqrt{x}$ 라 하면, $t^2x=x^3-x$ 에서 $x^2=t^2+1$ 이므로,
$x=\sqrt{t^2+1}$, $y=t\sqrt{x}=t(t^2+1)^{1/4}$ 이고, 매개화는
$X(t)=\left((t^2+1)^{1/2}, t(t^2+1)^{1/4}\right)$, $t\in\mathbb{R}$.

2. $a=0, b=0$ 이면 $y^2=x^3$. 이는 $X(t)=(t^2, t^3)$ $t\in\mathbb{R}$ 로 매개화 가능하다.

3. (1) $(4k^2+1)^2=(4k)^2+(4k^2-1)^2$, $(2k(k+1)+1)^2=(2k+1)^2+(2k(k+1))^2$. 이고,
유클리드 호제법에 의하면, $4k^2+1=4k\cdot k+1$ 이므로 $4k^2+1$ 과 $4k$는 서로 소, $2k(k+1)$ 과 $2k(k+1)+1$ 은 1 차이 이므로 서로 소 이므로, 각각의 쌍은 모두 서로 소인 피타고라스 3쌍이 된다.

(2) ① 피타고라스 3쌍을 찾는 것과 단위원 위의 유리점을 찾는 것은 같은 문제.
먼저, 단위원 위의 유리점 $\left(\frac{q}{p}, \frac{s}{r}\right)$ 이 있으면, $\frac{q^2}{p^2}+\frac{s^2}{r^2}=1$ 에서
$(qr)^2+(ps)^2=(pr)^2$ 이 되어, 피타고라스 3쌍 $\{qr, ps, pr\}$ 을 얻는다.
반대로, $\{a,b,c\}$ 가 피타고라스 3쌍이면, $a^2+b^2=c^2$ 에서

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$$

이므로, 유리점 $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ 를 얻는다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (유리과학부)

② $y=t(x+1)$ 이 단위원과 다시 만나는 점은 $P(t)=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$

점 $(x, t(x+1))$ 을 단위원의 식에 대입하면

$$x^2+t^2(x+1)^2=1$$

에서 $(1+t^2)x^2+2t^2x+t^2-1=0$, 즉 $(x+1)\left((1+t^2)x+(t^2-1)\right)=0$
이 되어, $x=-1$ 또는 $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ 가 된다. 이때 $x\neq-1$ 이므로
$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ 이고, $y=t(x+1)=\frac{2t}{1+t^2}$. 즉 $P(t)=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$.

③ $P(t)$ 유리점 $\Leftrightarrow$ t 유리수
t가 유리수이면 $P(t)$가 유리점임은 당연하다. $P(t)$가 유리점이면, $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y=\frac{2t}{1+t^2}$
에서 $1-x=\frac{2t^2}{1+t^2}$, $y=\frac{2t}{1+t^2}$ 가 둘 다 유리수이므로, $\frac{1-x}{y}=t$ 도 유리수이다.

④ 피타고라스 3쌍은 단위원 위의 유리점과 일대일 대응되고, 유리점은 유리수 t에 대하여
$P(t)$ 꼴로 볼 수 있다. 서로 소이고 홀짝이 다르며 $m>n$ 인 자연수 m, n에 대하여
$t=\frac{n}{m}$ 이라 하면, $P(t)=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ 에서 $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2=1$, 즉
$(1-t^2)^2+(2t)^2=(1+t^2)^2 \Leftrightarrow (m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2$
가 된다. 따라서 피타고라스 3쌍 $\{m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2\}$ 를 얻는다. 이때
$2mn$은 m, n의 배수이고 짝수이지만, $m^2\pm n^2$은 홀수이고 (m, n 홀짝성 다름) m, n
중 어느 것의 배수도 아니므로 서로 소인 3쌍이다.

만약 m, n의 홀짝성이 같으면 위 과정을 통해 얻은 $\{m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2\}$ 의
세 수가 모두 짝수이므로 서로 소인 3쌍이 아니다. $\frac{n}{m}<0$ 이면 $2mn<0$ 이다.
m, n이 서로 소가 아니어도 위에서 구한 3쌍이 서로 소가 아니다.
따라서 서로 소인 피타고라스 3쌍은 $\{m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2\}$ (m, n 홀짝성 다른 서로 소인 $m>n$ 인 자연수) 이다.

$\boxed{\text{하승보}}$ (수리과학부)

3) 서로 곱하면 $\frac{1}{2}$ 이 되는 두 유리수는 $\frac{b}{a}, \frac{a}{2b}$ 로 둘 수 있다. 그러면 $\frac{b}{a}+1, \frac{a}{2b}+1$ 을 통분하면 $\frac{2abk+2b^2k}{2abk}, \frac{a^2k+2abk}{2abk}$ 이고, 두 분자의 제곱의 합은

$$(2abk+2b^2k)^2+(a^2k+2abk)^2=(a^2k+2abk+2b^2k)^2$$

로 제곱수이다.

4. $X'(t)=(1,2t)$ 에서 $|X'(t)|=\sqrt{1+4t^2}$ 이고

$$E(X)=\frac{1}{2}\int_0^1 (1+4t^2)\,dt=\frac{7}{6}$$

5. 위 문제 4의 곡선을 $t=3s,\ 0\le s\le\frac{1}{3}$ 로 재매개화하면

$$\tilde{X}(s)=(3s, 9s^2) \qquad 0\le s\le\frac{1}{3}$$

이때 $\tilde{X}'(s)=(3,18s)$ 에서 $|\tilde{X}'(s)|=3\sqrt{1+36s^2}$ 이고

$$E(\tilde{X})=\frac{1}{2}\int_0^{1/3} 9\cdot(1+36s^2)\,ds=\frac{7}{2}\ne\frac{7}{6}$$

이므로, 재매개화에 의해 변화할 수 있다.

6. 먼저, $X(t)=\tilde{X}(s)=X(g(s))$ 라 하자. 이때

$$\tilde{X}'(s)=X'(g(s))\,g'(s),$$

$$\tilde{X}''(s)=X''(g(s))(g'(s))^2+X'(g(s))\,g''(s),$$

$$\tilde{X}'''(s)=X'''(g(s))(g'(s))^3+2X''(g(s))\,g'(s)\,g''(s)+X''(g(s))\,g'(s)g''(s)+X'(g(s))\,g'''(s)$$

에서

$$\tilde{X}'\times\tilde{X}''\cdot\tilde{X}'''=(g'(s))^6\ X'\times X''\cdot X'''$$

이고 $(g'(s))^6\ge 0$ 이므로, 휘어 있음 개념은 매개화와 무관하다.

또, $Y(t)-W=M(X(t))$ 는 X 에 대한 선형사상이므로,

$$Y'(t)=M(X'(t)),\quad Y''(t)=M(X''(t)),\quad Y'''(t)=M(X'''(t))$$

이다. 그러면

$$Y'\times Y''\cdot Y'''=MX'\times MX''\cdot MX'''=\det(MX', MX'', MX''')$$
$$=\det M\,\det(X', X'', X''')=(\det M)\ X'\times X''\cdot X'''$$

이므로, Y가 오른쪽으로 휘어 있을 필요충분조건은 X가 오른쪽으로 휘어 있는 것이다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

7. $R' = (-a\sin t,\ a\cos t,\ b)$

$R'' = (-a\cos t,\ -a\sin t,\ 0)$

$R''' = (a\sin t,\ -a\cos t,\ 0)$

$\Rightarrow\ R' \times R'' \cdot R''' = a^2 b\cos^2 t + a^2 b\sin^2 t = a^2 b > 0$

이므로 R은 오른쪽으로 꼬여 있다.

$L' = (-a\sin t,\ -a\cos t,\ b)$

$L'' = (-a\cos t,\ a\sin t,\ 0)$

$L''' = (a\sin t,\ a\cos t,\ 0)$

$\Rightarrow\ L' \times L'' \cdot L''' = -a^2 b\cos^2 t - a^2 b\sin^2 t = -a^2 b < 0$

이므로 L은 왼쪽으로 꼬여 있다.

8. (a) 중심 O를 원점으로 하고, 장반경(a) 방향을 x축으로 하여 타원 E를

$$X(t) = (a\cos t,\ b\sin t)$$

로 매개화하자. 이때 $X'(t) = (-a\sin t,\ b\cos t)$ 이다. 점 P를

$$P = X(p) = (a\cos p,\ b\sin p)$$

라 하자. 그러면 P의 켤레점은 O에서 $\pm X'(p) = \pm(-a\sin p,\ b\cos p)$ 방향을 점 중 타원 E 위에 있는 점이다. 이러한 점 Q는

$$Q = (-a\sin p,\ b\cos p) = X(p+\pi/2). \quad \text{또는}$$

$$Q = -(-a\sin p,\ b\cos p) = X(p-\pi/2)$$

이다. 즉, 점 $X(t)$의 켤레점은 일반적으로 $X(t\pm\pi/2)$가 된다. 그러면, P의 두 켤레점을 $Q_1 = X(p+\pi/2)$, $Q_2 = X(p-\pi/2)$ 라 할 때,

$$X(p+\pi/2-\pi/2) = P \ \text{이므로 P는 } Q_1\text{의 켤레점,}$$

$$X(p-\pi/2+\pi/2) = P \ \text{이므로 P는 } Q_2\text{의 켤레점}$$

이 된다.

(b) 위 (a)와 같은 상황에서, $P = X(t_0)$, $Q = X(t_0\pm\pi/2)$ 라 할 때

$$O + (\cos t)\overrightarrow{OP} + (\sin t)\overrightarrow{OQ} = (\cos t)P + (\sin t)Q$$

가 타원 E의 매개화 임을 보이면 된다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

제 5절. 곡선의 길이.

1. $|X'(t)| = |(\cos t - t\sin t,\ \sin t + t\cos t,\ 1)| = \sqrt{t^2+2}$ 에서, 길이 l은

$$l = \int_0^{\sqrt{2}\sinh a} \sqrt{t^2+2}\,dt \qquad t = \sqrt{2}\sinh u,\quad dt = \sqrt{2}\cosh u\,du,\quad \sqrt{t^2+2} = \sqrt{2}\cosh u$$

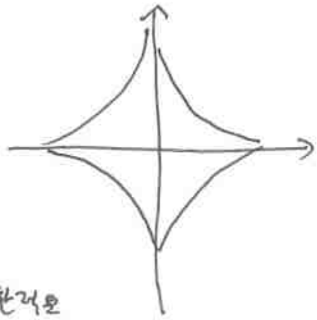
$$= \int_0^a \sqrt{2}\cosh u \cdot \sqrt{2}\cosh u\,du = 2\int_0^a \cosh^2 u\,du$$

$$= 2\int_0^a \frac{1}{2}(\cosh 2u + 1)\,du = \left[\frac{1}{2}\sinh 2u + u\right]_0^a$$

$$= a + \frac{1}{2}\sinh 2a.$$

2. 대칭성에 의해, $x, y \geq 0$ 부분의 길이의 4배를 구하면 된다.

$x, y \geq 0$ 부분을 매개화하면



$$X(t) = (t^2, (1-t)^2) \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

이때 $|X'(t)| = |(2t, -2(1-t))| = \sqrt{4t^2 + 4(1-t)^2}$

$= \sqrt{8t^2 - 8t + 4}$ 에서 길이 l은

치환적분

$$l = 4\int_0^1 \sqrt{2}\,\sqrt{1+(2t-1)^2}\,dt = 4\sqrt{2}\int_{\sinh^{-1}-1}^{\sinh^{-1}1} \cosh u \cdot \frac{\cosh u}{2}\,du$$

$2t-1 = \sinh u$

$2dt = \cosh u\,du$

$\sqrt{1+(2t-1)^2} = \cosh u$

$$= 2\sqrt{2}\int_{\sinh^{-1}-1}^{\sinh^{-1}1} \cosh^2 u\,du = 2\sqrt{2}\int_{\sinh^{-1}-1}^{\sinh^{-1}1} \frac{1}{2}(\cosh 2u + 1)\,du$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{1}{2}\sinh 2u + u\right]_{\sinh^{-1}-1}^{\sinh^{-1}1} \longleftarrow \quad \sinh 2u = 2\sinh u\cosh u = 2\sinh u\sqrt{1+\sinh^2 u}$$

$$= 4 + 2\sqrt{2}\sinh^{-1}1 = 4 + 2\sqrt{2}\log(1+\sqrt{2}).$$

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

$Q = X(t_0 \pm \frac{\pi}{2})$ 일 때

$$(\cos t)P + (\sin t)Q = \cos t\, X(t_0) + \sin t\, X(t_0 \pm \pi/2)$$

$$= \cos t\,(a\cos t_0, b\sin t_0) + \sin t\,(\mp a\sin t_0, \pm b\cos t_0)$$

$$= \left(a(\cos t\cos t_0 \mp \sin t\sin t_0),\ b(\cos t\sin t_0 \pm \sin t\cos t_0)\right)$$

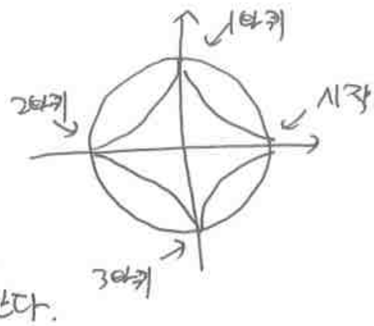
$$= (a\cos(t \pm t_0),\ b\sin(t \pm t_0))$$

(복부호 동순) 이고, 이는 타원 E의 매개화가 된다.

(왜 여기 안 풀었지?)
(종이 아깝다.)

3. 아스트로이드는 $X(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 로 매개화할 수 있다. 대칭성에 의해 $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ 부분 길이의 4배를 구하면 된다. 이 영역에서 $|X'(t)| = |(-3\cos^2 t \sin t,\ 3\sin^2 t \cos t)| = 3 \sin t \cos t$ 이고, 구하는 전체 길이 l은

$$l = 4\int_0^{\pi/2} 3 \cos t \sin t \, dt = 6.$$



작은 원이 큰 원 내에서 굴러 한 점의 자취가 아스트로이드 모양이 되려면, 큰 원을 한 바퀴 구를 때 작은 원은 정확히 4바퀴 굴러야 한다. 정확히는, 단위원 내에 반지름 1/4 인 원이 구를 때, 한 점의 자취는

$$\frac{3}{4}(\cos t, \sin t) + \frac{1}{4}(\cos(-3t), \sin(-3t))$$

작은 원이 도는 상대각속도

$$= \left(\frac{3}{4}\cos t + \frac{1}{4}\cos 3t,\ \frac{3}{4}\sin t - \frac{3}{4}\sin 3t\right)$$

$$= (\cos^3 t, \sin^3 t) \qquad \left(\begin{array}{l} \cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t \\ \sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t \end{array}\right)$$

가 되어 아스트로이드가 된다. 따라서 구하는 지름의 비는 $4:1$ 이다.

4. 원기둥을 $x^2+y^2=r^2$ 이라 하고 평면은 $ax+by+cz=0$ 이라 하자. (좌표축 돌리기 및 평행이동으로 이와 같이 볼 수 있다) 원기둥 위의 점은 일반적으로 (원기둥 좌표계로) $(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ 이고, 이때

$$a r\cos\theta + b r\sin\theta + cz = 0$$

이므로, $z = -\dfrac{ar\cos\theta + br\sin\theta}{c}$. 그러면, 종이를 펴면 나오는 곡선은 θ에 대한 z의 곡선이다. 이때 $z = -\frac{r}{c}(a\cos\theta + b\sin\theta) = -\frac{r}{c}\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\theta+\alpha)$ (α는 어떤 실수) 이므로 사인곡선이 된다.

하승우 (수리과학부)

5. 로그 나선 $r = r_0 e^{k\theta}$ 는 다음과 같이 매개화할 수 있다.

$$X(\theta) = r_0 e^{k\theta}(\cos\theta, \sin\theta)$$

로그 나선 위의 한 점 $T = X(t) = r_0 e^{kt}(\cos t, \sin t)$ 에 대하여,
l_T의 방향 벡터는, $(\cos t, \sin t)$ 에 수직인, $(\sin t, -\cos t)$ 방향이다.
즉, l_T의 식은 $(\sin t, -\cos t)u$ 라 할 수 있다. 또,

$$X'(\theta) = kr_0 e^{k\theta}(\cos\theta, \sin\theta) + r_0 e^{k\theta}(-\sin\theta, \cos\theta)$$

에서, T에서의 로그 나선의 접선은

$$X(t) + uX'(t) = r_0 e^{kt}(\cos t, \sin t) + u\left(kr_0 e^{kt}(\cos t, \sin t) + r_0 e^{kt}(-\sin t, \cos t)\right)$$

가 된다. l_T와 접선의 교점을 구하면 (↳ 이 식에서, $(\cos t, \sin t)$ 부분이 0이 되도록 하면 $(-\sin t, \cos t)$ 방향 벡터만 남는다. $u = -\frac{1}{k}$ 라 하면 된다.)

$$S = \frac{1}{k} r_0 e^{kt}(\sin t, -\cos t)$$

가 된다. 그러면,

수직

$$|\overrightarrow{OT}| = r_0 e^{kt},$$

$$|\overrightarrow{TS}| = \left|\frac{1}{k} r_0 e^{kt}(\sin t, -\cos t) - r_0 e^{kt}(\cos t, \sin t)\right| = r_0 e^{kt}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$$

이제, 점 T에서 로그 나선을 따라 원점에 이르는 거리를 l이라 하면

$$l = \int_{-\infty}^{t} |X'(\theta)|\,d\theta = \int_{-\infty}^{t} \left|kr_0 e^{k\theta}(\cos\theta, \sin\theta) + r_0 e^{k\theta}(-\sin\theta, \cos\theta)\right| d\theta$$

$$= \int_{-\infty}^{t} r_0 e^{k\theta}\sqrt{k^2+1}\,d\theta = r_0 e^{kt}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$$

이 된다. 즉, $l = |\overrightarrow{TS}| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\,|\overrightarrow{OT}|$ 가 되어 원하는 결론을 얻는다.

하승우 (수리과학부)

6. $r' = k$ 이므로, 곡선의 길이는

$$l = \int_0^{\theta_1} \sqrt{k^2\theta^2 + k^2}\, d\theta = |k| \int_0^{\theta_1} \sqrt{\theta^2+1}\, d\theta \qquad \begin{aligned} \theta &= \sinh u \\ d\theta &= \cosh u\, du \\ \theta^2+1 &= \cosh^2 u \end{aligned}$$

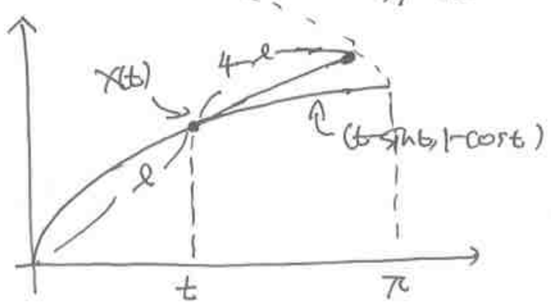
$$= |k| \int_0^{\sinh^{-1}\theta_1} \cosh u \cdot \cosh u\, du$$

$$= |k| \int_0^{\sinh^{-1}\theta_1} \frac{1}{2}(\cosh 2u + 1)\, du = \frac{|k|}{2}\Big[\underbrace{\frac{1}{2}\sinh 2u}_{\substack{\sinh u \cosh u \\ \| \\ \sinh u\sqrt{1+\sinh^2 u}}} + u\Big]_0^{\sinh^{-1}\theta_1}$$

$$= \frac{|k|}{2}\left(\theta_1\sqrt{1+\theta_1^2} + \log\left(\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2+1}\right)\right)$$

7. 한쪽 벽면에 대해서만 생각하면 충분하다. 다음 그림과 같이 사이클로이드 $X(t) = (t-\sin t, 1-\cos t)$로 주어진 벽면과 추가 달린 실을 생각하자. 이때 실의 길이는 사이클로이드 반 주기의 길이로 4이다. 이때 추의 자취는,

$(t-\sin t, 1-\cos t)$ + ($(t-\sin t, 1-\cos t)$의 접선 방향으로, (4 − ((0,0)부터 $(t-\sin t, 1-\cos t)$까지의 사이클로이드 길이)) 만큼 나아간 점) 이다.



$|X'(t)| = |(1-\cos t, \sin t)| = 2\sin\frac{t}{2}$ 에서, $X(t)$ 까지의 사이클로이드의 길이는

$$l = \int_0^t |X'(u)|\, du = \int_0^t 2\sin\frac{u}{2}\, du = 4 - 4\cos\frac{t}{2} \qquad \left(\Rightarrow 4 - l = 4\cos\frac{t}{2}\right)$$

이고, $X(t)$에서 접선 방향은 $X'(t) = (1-\cos t, \sin t)$ 방향 이므로, 추의 자취는

$$(t-\sin t, 1-\cos t) + (4-l)\cdot\frac{X'(t)}{|X'(t)|} = (t-\sin t, 1-\cos t) + \frac{4\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}(1-\cos t, \sin t)$$

$$= (t-\sin t, 1-\cos t) + 2\cot\frac{t}{2}(1-\cos t, \sin t)$$ 이다.

하승우 (수리과학부)

이때

$$x = t - \sin t + 2\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\overbrace{(1-\cos t)}^{2\sin^2\frac{t}{2}} = t - \sin t + 4\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} = t - \sin t + 2\sin t$$

$$= t + \sin t,$$

$$y = 1 - \cos t + 2\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\overbrace{\sin t}^{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} = 1 - \cos t + 4\overbrace{\cos^2\frac{t}{2}}^{\frac{1+\cos t}{2}} = 1 - \cos t + 2 + 2\cos t$$

$$= 3 + \cos t$$

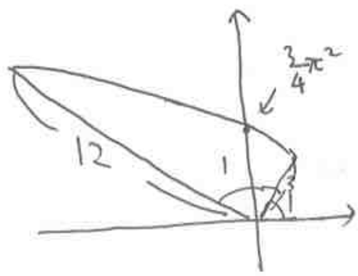
여기, t 대신에 $\pi - t$를 대입하면 $(x,y) = (\pi - t + \sin t,\ 3 - \cos t)$ 인데. 이때

$$(\pi - x,\ y-2) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t)$$

가 되어 축의 자취도 사이클로이드가 된다.

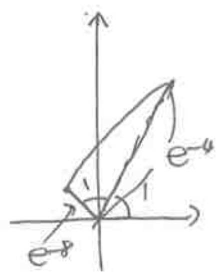
8. (1) $\int_1^2 \sqrt{9\theta^4 + 36\theta^2}\, d\theta$ $\qquad r = 3\theta^2,\ r' = 6\theta$

$$= \int_1^2 3\theta\sqrt{\theta^2+4}\, d\theta = 16\sqrt{2} - 5\sqrt{5}.$$



(2) $r = e^{-4\theta},\ r' = -4e^{-4\theta}$

$$\int_1^2 \sqrt{e^{-8\theta} + 16e^{-8\theta}}\, d\theta = \sqrt{17}\int_1^2 e^{-4\theta}\, d\theta = \frac{\sqrt{17}}{4}(e^{-4} - e^{-8}).$$



(3) $r = \frac{2}{\theta},\ r' = -\frac{2}{\theta^2}$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{4}{\theta^2} + \frac{4}{\theta^4}}\, d\theta = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{\theta^2}\sqrt{1+\theta^2}\, d\theta$$

$\theta = \tan u$, $d\theta = \sec^2 u\, du$ $\qquad 1+\theta^2 = \sec^2 u$

$$= 2\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec^3 u}{\tan^2 u}\, du = 2\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{du}{\sin^2 u \cos u} = 2\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos u\, du}{\sin^2 u \cos^2 u}$$

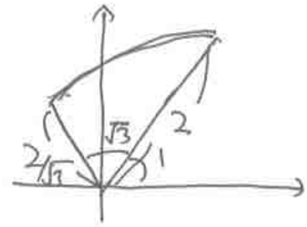
$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

$$\sin u = t,\quad \cos u\,du = dt$$

$$= 2\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos u\,du}{\sin^2 u\,(1-\sin^2 u)} = 2\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{3}/2} \frac{dt}{t^2(1-t^2)}$$

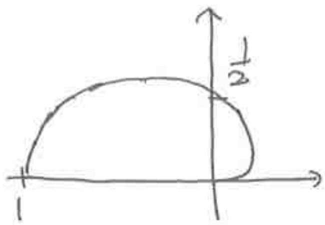
$$= 2\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{3}/2} \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)\right) dt = 2\left[-\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\log\frac{1+t}{1-t}\right]_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{3}/2}$$

$$= 2\left(\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{3}/2}{1-\sqrt{3}/2} - \frac{1}{2}\log\frac{1+1/\sqrt{2}}{1-1/\sqrt{2}}\right).$$



(4) $r = \sin^2\frac{\theta}{2}$, $r' = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^4\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta = \int_0^{\pi} \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta = 2.$$



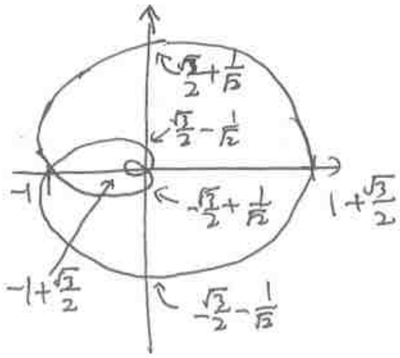
(5) 주기가 4π 이다. $r = \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\frac{\theta}{2}$, $r' = -\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}$

$$\int_0^{4\pi} \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{4\pi} \sqrt{\frac{3}{4} + \sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta$$

$$= \int_0^{4\pi} \sqrt{1 + \sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{3}{4}\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta = \int_0^{4\pi} \left|1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta$$

$$= \left[\theta + \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{4\pi} = 4\pi.$$



9. $f(x) = \log x$ 이고, $f'(x) = \frac{1}{x}$ 이다. 곡선의 길이는

$$\int_a^b \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx \qquad \tan t = x,\quad \sec^2 t\, dt = dx$$

$$= \int_{\tan^{-1} a}^{\tan^{-1} b} \frac{\sec^3 t}{\tan t}\, dt = \int_{\tan^{-1} a}^{\tan^{-1} b} \frac{dt}{\sin t\cos^2 t} = \int_{\tan^{-1} a}^{\tan^{-1} b} \frac{\sin t}{\underbrace{\sin^2 t}_{1-\cos^2 t}\cos^2 t}\, dt \qquad \cos t = u,\ -\sin t\, dt = du$$

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

$$= + \int_{\cos\tan^{-1} b}^{\cos\tan^{-1} a} \frac{du}{(1-u^2)u^2} = \int_{\cos\tan^{-1} b}^{\cos\tan^{-1} a} \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right)\right) du$$

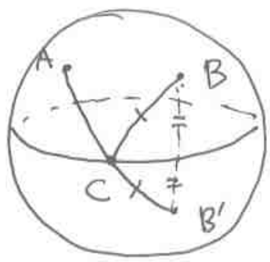
$$= \left[-\frac{1}{u} + \frac{1}{2}\log\frac{1+u}{1-u} \right]_{\cos\tan^{-1} b}^{\cos\tan^{-1} a}$$

$$= \frac{1}{\cos\tan^{-1} b} - \frac{1}{\cos\tan^{-1} a} + \frac{1}{2}\log\frac{1+\cos\tan^{-1} a}{1-\cos\tan^{-1} a} - \frac{1}{2}\log\frac{1+\cos\tan^{-1} b}{1-\cos\tan^{-1} b}$$

그런데 $\cos\tan^{-1}\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}$ $(\theta > 0)$ 이므로

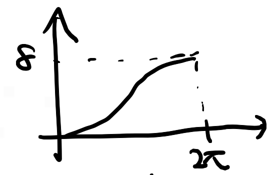
$$= \sqrt{1+b^2} - \sqrt{1+a^2} + \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{1+a^2}+1}{\sqrt{1+a^2}-1} - \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{1+b^2}+1}{\sqrt{1+b^2}-1}.$$

10. 점 B를 적도에 대하여 대칭이동시킨 점을 점 B'라 하자. 그리고 점 A와 점 B'를 지나는 대원호 AB'와 적도의 교점을 C라 하자. 이제 구하는 경로는 대원호 AC와 대원호 CB를 더한 것이다.



하승우 (수리과학부)

제 6절. 호의 길이와 재매개화



1. $|X'(t)| = |(1-\cos t, \sin t)| = 2\sin\frac{t}{2}$ 에서

$$s(t) = \int_0^t |X'(u)|\,du = \int_0^t 2\sin\frac{u}{2}\,du = 4 - 4\cos\frac{t}{2}.$$

→ $0 \le t \le 2\pi$일 때 $0 \le s \le 8$

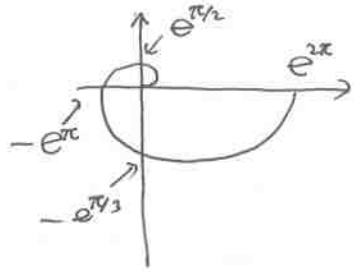
그러면 $t = 2\arccos\left(\frac{s-4}{-4}\right)$ 에서, 호의길이로 재매개화 한 곡선은

$$\tilde{X}(s) = \left(2\arccos\frac{s-4}{-4} - \sin\left(2\arccos\left(\frac{s-4}{-4}\right)\right),\ 1-\cos\left(2\arccos\frac{s-4}{-4}\right)\right)$$

$$= \left(2\arccos\frac{s-4}{-4} - 2\cdot\sqrt{1-\frac{(s-4)^2}{16}}\cdot\left(-\frac{s-4}{4}\right),\ 2 - 2\cdot\frac{(s-4)^2}{16}\right) \quad (0 \le s \le 8)$$

이다.

2. (1) 극좌표로 $r = e^{\theta}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ 로 나타내어지는 곡선이다.



$$|X'(t)| = |e^t(\cos t, \sin t) + e^t(-\sin t, \cos t)|$$
$$= \sqrt{2}e^t$$

에서, 길이는 $\int_0^{2\pi} \sqrt{2}e^t\,dt = \sqrt{2}(e^{2\pi}-1)$ 이다.

(2) $s = \int_0^t |X'(u)|\,du = \int_0^t \sqrt{2}e^u\,du = \sqrt{2}(e^t - 1)$ 에서, $t = \log\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)$

이므로, 호의 길이로 재매개화하면

$$\tilde{X}(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\left(\cos\log\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right),\ \sin\log\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\right)$$

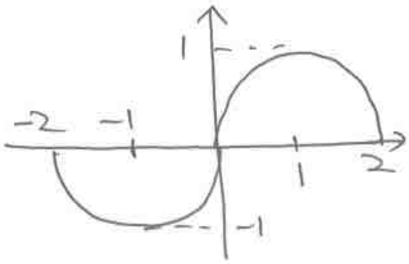
3. $|X'| = |(X\circ f)'| = 1$ 이다. 그러면

$$1 = |(X(f(s)))'| = |X'(f(s))\,f'(s)| = |f'(s)|$$

에서 $f'(s) = \pm 1$ 이고, $f(s) = \pm s + c$ 이다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

4. 그림과 같은 곡선을 생각하라.



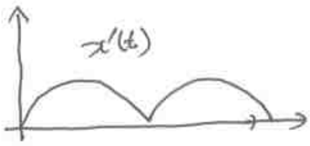
$$x(t) = \begin{cases} -1-\cos t & 0\le t\le \pi \\ 1+\cos t & \pi\le t\le 2\pi \end{cases}, \quad y(t) = -\sin t$$

라 하면, 곡선은 $X(t) = (x(t), y(t))$ 로 매개화 되고,

$$|X'(t)| = |(\pm\sin t, -\cos t)| = 1$$

이므로 호의 길이로 매개화되어 있다. 이때

$$x'(t) = \begin{cases} \sin t & 0\le t\le \pi \\ -\sin t & \pi\le t\le 2\pi \end{cases}, \quad y'(t) = -\cos t$$



에서 X 가 일급곡선임을 안다. 그런데 $x'(t)$가 $x=\pi$에서 미분가능하지 않으므로, X는 이급이 아니다

5. 주어진 곡선을 $X(t) = (t^3, t^2)$ 로 매개화하자. 이때

$$s(t) = \int_0^t |X'(u)|\,du = \int_0^t |(3u^2, 2u)|\,du = \int_0^t \sqrt{9u^4+4u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{27}(9t^2+4)^{3/2} - \frac{8}{27}$$

이고, $t = \sqrt{\left(s+\frac{8}{27}\right)^{2/3} - \frac{4}{9}}$ 이므로, 호의 길이로 매개화하면

$$\tilde{X}(s) = \left(\left(\left(s+\frac{8}{27}\right)^{2/3} - \frac{4}{9} \right)^{3/2}, \left(s+\frac{8}{27}\right)^{2/3} - \frac{4}{9} \right) \qquad (s\in\mathbb{R})$$

이다.

$\boxed{\text{하승우}}$(수리과학부)

제 17절. 선적분

1. 곡선 $X(t)$의 중심을 구하려면, 길이 $\int_X ds$, 각 좌표의 선적분 $\int_X x\,ds$, $\int_X y\,ds$, $\int_X z\,ds$ 를 모두 구해야 한다.

(1) $X(t) = (\cos 2t, \sin 2t, 3t)$ $\quad (\pi \le t \le 3\pi)$ 에서

$|X'(t)| = |(-2\sin 2t, 2\cos 2t, 3)| = \sqrt{13}$,

길이 l은 $l = \int_X ds = \int_\pi^{3\pi} |X'(t)|\,dt = \int_\pi^{3\pi} \sqrt{13}\,dt = 2\sqrt{13}\pi$.

그러면

$$\bar{x} = \frac{1}{l}\int_X x\,ds = \frac{1}{2\sqrt{13}\pi}\int_\pi^{3\pi} \cos 2t \cdot \sqrt{13}\,dt = 0, \qquad (ds = |X'(t)|dt)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{l}\int_X y\,ds = \frac{1}{2\sqrt{13}\pi}\int_\pi^{3\pi} \sin 2t\,\sqrt{13}\,dt = 0,$$

$$\bar{z} = \frac{1}{l}\int_X z\,ds = \frac{1}{2\sqrt{13}\pi}\int_\pi^{3\pi} 3t \cdot \sqrt{13}\,dt = 6\pi$$

이므로 중심은 $(0, 0, 6\pi)$.

* $\bar{x} = \bar{y} = 0$, $\bar{z} = 6\pi$ 임은 대칭성을 고려하면 당연하다. 그러나 대칭성을 이용할 때에는 주의해야 한다.

(2) $X(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ $\quad (0 \le t \le 2\pi)$ 에서

$|X'(t)| = |(1 - \cos t, \sin t)| = 2\sin\frac{t}{2}$

길이 l은 $l = \int_X ds = \int_0^{2\pi} |X'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}\,dt = 8$.

$$\bar{x} = \frac{1}{l}\int_X x\,ds = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} (t - \sin t) \cdot 2\sin\frac{t}{2}\,dt = \pi. \qquad (ds = |X'(t)|dt)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{l}\int_X y\,ds = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \cdot 2\sin\frac{t}{2}\,dt = \frac{4}{3}.$$

이므로 중심은 $(\pi, \frac{4}{3})$.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

2. 곡선을 매개화하면 $X(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

$$|X'(t)| = |(-3\cos^2 t \sin t,\ 3\sin^2 t \cos t)| = 3 \sin t \cos t.$$

길이 $\ell = \int_0^{\pi/2} |X'(t)|\, dt = \int_0^{\pi/2} 3 \sin t \cos t \, dt = \frac{3}{2}.$

$$\bar{x} = \frac{1}{\ell}\int_X x\, ds = \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^3 t \cdot 3 \sin t \cos t \, dt = \frac{2}{5},$$

$$\bar{y} = \bar{x} = \frac{2}{5} \quad (\text{대칭성})$$

이므로 중심은 $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$ 이다.

3. 직선이 점 P를 지나고, 단위벡터 $\mathbf{n}$이 수직이라고 하자. 그러면 직선 ℓ과 점 X 사이의 거리는 $(X-P)\cdot\mathbf{n}$ 이다. 따라서 평균 거리는 (ℓ: X의 길이)

$$\frac{1}{\ell}\int_X (X-P)\cdot\mathbf{n}\, ds = \frac{1}{\ell}\int_X \left((X-\bar{X}) + (\bar{X}-P)\right)\cdot\mathbf{n}\, ds$$

$$= \frac{1}{\ell}\int_X (X-\bar{X})\cdot\mathbf{n}\, ds + \frac{1}{\ell}\int_X \underbrace{(\bar{X}-P)\cdot\mathbf{n}}_{\text{상수}}\, ds$$

$$= 0 + \frac{1}{\ell}\left(\ell\,(\bar{X}-P)\cdot\mathbf{n}\right) = (\bar{X}-P)\cdot\mathbf{n}$$

이다. 여기서, $\mathbf{n} = (a, b)$라 할 때,

$$\int_X (X-\bar{X})\cdot\mathbf{n}\, ds = \int_X \left(a\underbrace{(x-\bar{x})}_{0} + b\underbrace{(y-\bar{y})}_{0} + c\underbrace{(z-\bar{z})}_{0}\right) ds = 0$$

이다. 따라서 원하는 결론을 얻는다.

공간에 대해서도 똑같은 방법으로 한다. (직선 말고 평면으로 바꾸어 쓰면 된다)

하승우 (수리과학부)

4. 우선 $|X'(t)| = |(-\sin t, \cos t, 1)| = \sqrt{2}$ 이다.

질량 $m = \int_X f\,ds = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cdot \sqrt{2}\,dt = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi^3$.

중심

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_X xf\,ds = \frac{1}{m}\int_{-\pi}^{\pi} \cos t \cdot t^2 \cdot \sqrt{2}\,dt = -\frac{6}{\pi^2}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\int_X yf\,ds = \frac{1}{m}\int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cdot t^2\sqrt{2}\,dt = 0$$

$$\bar{z} = \frac{1}{m}\int_X zf\,ds = \frac{1}{m}\int_{-\pi}^{\pi} t \cdot t^2\sqrt{2}\,dt = 0$$

질량중심 $\left(-\frac{6}{\pi^2}, 0, 0\right)$ 이다.

5. $X(t) = (1-t)A + tB$, $0 \le t \le 1$ 밀도 $\mu(t) = (1-t)a + tb$.

$|X'(t)| = |-A+B|$.

질량 $m = \int_X \mu\,ds = \int_0^1 ((1-t)a+tb)\cdot|B-A|\,dt = \frac{a+b}{2}|B-A|$. 이럴 때엔 성분별 적분한다고 보면 된다.

질량중심 $\bar{X} = \frac{1}{m}\int_X X\mu\,ds = \frac{1}{m}\int_0^1 ((1-t)A+tB)\cdot((1-t)a+tb)\,|B-A|\,dt$

$$= \frac{2}{a+b}\int_0^1 \left((1-t)^2 aA + t(1-t)(aB+bA) + t^2 bB\right)dt$$

$$= \frac{2}{a+b}\left(\frac{1}{3}aA + \frac{1}{6}(aB+bA) + \frac{1}{3}bB\right)$$

$$= \frac{2a+b}{3(a+b)}A + \frac{a+2b}{3(a+b)}B$$

6. $X(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t)$ $(0 \le t \le 1)$, 밀도 $f(t) = t$

$|X'(t)| = |(-2\pi\sin 2\pi t, 2\pi\cos 2\pi t, 1)| = \sqrt{1+4\pi^2}$

전체 밀도 $\int_X f\,ds = \int_0^1 t\cdot\sqrt{1+4\pi^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{1+4\pi^2}. = L$

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

밀도 중심

$$\bar{x} = \frac{1}{L}\int_X xf\,ds = \frac{1}{L}\int_0^1 \cos(2\pi t)\cdot t\cdot\sqrt{1+4\pi^2}\,dt = 0$$

$$\bar{y} = \frac{1}{L}\int_X yf\,ds = \frac{1}{L}\int_0^1 \sin(2\pi t)\cdot t\cdot\sqrt{1+4\pi^2}\,dt = -\frac{1}{\pi}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{L}\int_X zf\,ds = \frac{1}{L}\int_0^1 t\cdot t\cdot\sqrt{1+4\pi^2}\,dt = \frac{2}{3}.$$

밀도 중심은 $\left(0, -\frac{1}{\pi}, \frac{2}{3}\right)$.

7. X의 길이를 $l = \int_X ds = \int_{t_0}^{t_1} |X'(t)|\,dt$ 라 하자. t 의 평균은

선적분 정의

$$\frac{1}{l}\int_X t(t)\,ds = \frac{1}{l}\int_X \frac{X'(t)}{|X'(t)|}|X'(t)|\,dt$$

$$= \frac{1}{l}\int_X X'(t)\,dt = \frac{1}{l}\left(X(t_1) - X(t_0)\right).$$

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

제 8절. 곡선과 곡률

1. 먼저, $\frac{d}{dt}|X'(t)|^2 = 2|X'(t)|\frac{d}{dt}|X'(t)| = \frac{d}{dt}(X'(t)\cdot X'(t)) = 2X'(t)\cdot X''(t)$

에서 $\frac{d}{dt}|X'(t)| = \frac{X'(t)\cdot X''(t)}{|X'(t)|}$ 임을 얻는다. 그러면

$$k = \left|\left(\frac{X'}{|X'|}\right)'\right|\frac{1}{|X'|} = \frac{1}{|X'|}\cdot\frac{|X'|X'' - X'\frac{d}{dt}|X'|}{|X'|^2} = \frac{|X'|X'' - X'\cdot\frac{X'\cdot X''}{|X'|}}{|X'|^3}$$

$$= \frac{|X'|^2X'' - (X'\cdot X'')X'}{|X'|^4} = \frac{(X'\cdot X')X'' - (X'\cdot X'')X'}{|X'|^4} = \frac{|X'\times(X'\times X'')|}{|X'|^4}$$

수직

$$= \frac{|X'||X'\times X''|}{|X'|^4} = \frac{|X'\times X''|}{|X'|^3} = \frac{\sqrt{|X'|^2|X''|^2 - (X'\cdot X'')^2}}{|X'|^3}$$

이다. 또, X'와 X''가 이루는 각이 α이면, $|X'\times X''| = |X'||X''||\sin\alpha|$ 이므로,

$$k = \frac{|X''||\sin\alpha|}{|X'|^2}$$

이다.

* $k = \frac{|X'\times X''|}{|X'|^3}$ 외워라. 기말고사 치는 순간이라도 외워라.

2. 주어진 평면곡선을 삼차원 곡선 $X(t) = (x(t), y(t), 0)$ 으로 보자. 이때

$$\begin{aligned} X'(t) &= (x'(t), y'(t), 0) \\ X''(t) &= (x''(t), y''(t), 0) \end{aligned} \Rightarrow X'\times X'' = (0, 0, x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t))$$

이므로,

$$k = \frac{|X'\times X''|}{|X'|^3} = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}$$

이다. $y = f(x)$ 의 곡률은, $(x, f(x))$ 으로 보고, $(x'=1,\ x''=0$

$$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

임을 얻는다.

* 다 기억해도 좋지만 $k = \frac{|X'\times X''|}{|X'|^3}$ 만 알면 쉽게 유도 가능하다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

3. 삼차원 곡선 $X(t) = (a\cos t,\ b\sin t,\ 0)$ 으로 보면,

$$X'(t) = (-a\sin t, b\cos t, 0)$$
$$X''(t) = (-a\cos t, -b\sin t, 0) \quad \Rightarrow \quad X' \times X'' = (0, 0, ab)$$

이므로, 곡률은

$$k = \frac{|X' \times X''|}{|X'|^3} = \frac{|ab|}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

이다.

4. 삼차원 곡선 $X(x) = (x,\ x^2,\ 0)$ 으로 보면,

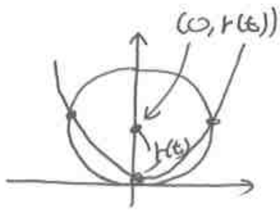
$$X'(x) = (1, 2x, 0).$$
$$X''(x) = (0, 2, 0) \quad \Rightarrow \quad X' \times X'' = (0, 0, 2)$$

이므로, 곡률은

$$k = \frac{|X' \times X''|}{|X'|^3} = \frac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}$$

이다.

5. 원의 중심은 y축 위에 있다 (대칭성). 이것이 $(0, r(t))$ 가 되고 ($a>0$ 일때)



$$t^2 + (at^2 - r(t))^2 = r(t)^2$$

에서, $r(t) = \dfrac{1+a^2t^2}{2a}$ 이다. 따라서

$a<0$ 이면 $r(t) = \dfrac{1+a^2t^2}{-2a}$.

즉 $r(t) = \dfrac{1+a^2t^2}{|2a|}$

$$\lim_{t\to 0} r(t) = \frac{1}{2a}$$

이다.

(다른 방법) $\lim_{t\to 0} r(t)$ 는 (곡률 반지름) $y=ax^2$ 의 $(0,0)$ 에서의 곡률의 역수와 같다.

$y=ax^2$ 를 삼차원 곡선 $(x, ax^2, 0)$ 으로 보면

$$X'(x) = (1, 2ax, 0)$$
$$X''(x) = (0, 2a, 0) \quad \Rightarrow \quad X' \times X'' = (0, 0, 2a)$$

이므로, 곡률은

$$k(x) = \frac{|X' \times X''|}{|X'(x)|^3} = \frac{|2a|}{\sqrt{1+4a^2x^2}^3}$$

이고, $k(0) = |2a|$ 이므로, $\lim_{t\to 0} r(t) = \dfrac{1}{|2a|}$ 이다.

$\boxed{\text{이승우}}$ (수리과학부)

6. $\kappa_Y(t) = \left|\left(\frac{Y'}{|Y'|}\right)'\right| \frac{1}{|Y'|} = \left|\left(\frac{cX'}{c|X'|}\right)'\right| \frac{1}{c|X'|} = \left|\left(\frac{X'}{|X'|}\right)'\right| \frac{1}{|X'|}\cdot\frac{1}{c} = \frac{1}{c}\kappa_X(t).$

7. $X'(t) = (1, 2t, 3t^2)$, $X''(t) = (0, 2, 6t)$ 이다.

$t=1$ 일 때, $X'(1) = (1,2,3)$, $X''(1) = (0,2,6)$ $\Rightarrow$ $X'(1)\times X''(1) = (6, -6, 2)$

$t=-1$ 일 때, $X'(-1) = (1,-2,3)$, $X''(-1) = (0,2,-6)$ $\Rightarrow$ $X'(-1)\times X''(-1) = (6,6,2)$

따라서 $\kappa(1) = \frac{|X'(1)\times X''(1)|}{|X'(1)|^3} = \frac{2\sqrt{19}}{14\sqrt{14}}$, $\kappa(-1) = \frac{|X'(-1)\times X''(-1)|}{|X'(-1)|^3} = \frac{2\sqrt{19}}{14\sqrt{14}}$ 이다.

8. 삼차원 곡선 $X(t) = (t, \log t, 0)$ 으로 보면,

$X'(t) = (1, \frac{1}{t}, 0)$, $X''(t) = (0, -\frac{1}{t^2}, 0)$ $\Rightarrow$ $X'\times X'' = (0, 0, -\frac{1}{t^2})$

따라서 곡률은 $\kappa(t) = \frac{|X'\times X''|}{|X'|^3} = \frac{\frac{1}{t^2}}{(1+\frac{1}{t^2})^{3/2}} = \frac{t}{(t^2+1)^{3/2}}$ 이다. 즉

곡률반경은 $r(t) = \frac{(t^2+1)^{3/2}}{t}$ 이고

$$r'(t) = \frac{t\cdot\frac{3}{2}(t^2+1)^{1/2}\cdot 2t - (t^2+1)^{3/2}\cdot 1}{t^2} = \frac{(1+t^2)^{1/2}}{t^2}(2t^2-1)$$

에서, 곡률반경이 최소가 되는 점은 $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때 이다. 그 때의 점은 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\log 2}{2}\right)$.

9. 삼차원 곡선 $X(t) = (t-\sin t, 1-\cos t, 0)$ 에 대해 보면

$X'(t) = (1-\cos t, \sin t, 0)$, $X''(t) = (\sin t, \cos t, 0)$ $\Rightarrow$ $X'\times X'' = (0, 0, \cos t - 1)$

이고, $|X'(t)| = 2\sin\frac{t}{2}$ 이므로,

$$\kappa(t) = \frac{|X'\times X''|}{|X'|^3} = \frac{1-\cos t}{8\sin^3\frac{t}{2}} = \frac{1}{4\sin\frac{t}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}$$

이다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

10. 삼차원 곡선 $X(t) = \left(\int_0^t \cos \frac{\pi u^2}{2} du, \int_0^t \sin \frac{\pi u^2}{2} du, 0 \right)$ 으로 놓으면,

$$X'(t) = \left(\cos \frac{\pi t^2}{2}, \sin \frac{\pi t^2}{2}, 0 \right)$$

$$X''(t) = \left(-\pi t \sin \frac{\pi t^2}{2}, \pi t \cos \frac{\pi t^2}{2}, 0 \right)$$

얻는데, $|X'(t)| = 1$ 이므로,

$$\kappa(t) = |X''(t)| = \pi t$$

이다.

11. $X(t) = \left(\cos t, \frac{1}{2} \sin t, 0 \right)$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$ 이라 하자. 이때

$$X'(t) = \left(-\sin t, \frac{1}{2} \cos t, 0 \right)$$

$$X''(t) = \left(-\cos t, -\frac{1}{2} \sin t, 0 \right) \quad \Rightarrow \quad X' \times X'' = \left(0, 0, \frac{1}{2} \right)$$

이므로, $\kappa(t) = \dfrac{|X' \times X''|}{|X'|^3} = \dfrac{1}{2\left(\sin^2 t + \frac{1}{4}\cos^2 t\right)^{3/2}}$ 이다. 또,

$|X'| = \left(\sin^2 t + \frac{1}{4}\cos^2 t\right)^{1/2}$ 이므로, 전곡률은

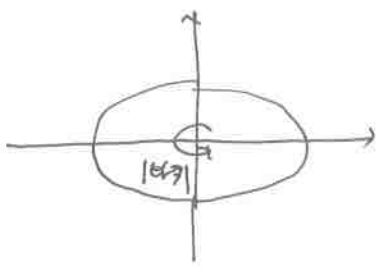
$$\int_X \kappa ds = \int_0^{2\pi} \frac{\left(\sin^2 t + \frac{1}{4}\cos^2 t\right)^{1/2}}{2\left(\sin^2 t + \frac{1}{4}\cos^2 t\right)^{3/2}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sin^2 t + \frac{1}{4}\cos^2 t}$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sin^2 t + \frac{1}{4}\cos^2 t} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 t \, dt}{\frac{1}{4} + \tan^2 t} \qquad \begin{array}{l} \tan t = u, \\ \sec^2 t \, dt = du \end{array}$$

$$= 2 \int_0^{\infty} \frac{du}{\frac{1}{4} + u^2} \qquad u = \frac{1}{2} \tan v, \quad du = \frac{1}{2} \sec^2 v \, dv$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2} \sec^2 v}{\frac{1}{4} \sec^2 v} dv = 2\pi$$

* 12번을 먼저 풀면, 11번은 당연히 2π 이다.



$\boxed{\text{하승혁}}$ (수리과학부)

12. $\dfrac{X'}{|X'|} = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ 로 두면,

$$\int_X k\,ds = \int_a^b \left|\left(\frac{X'}{|X'|}\right)'\right| \frac{1}{|X'|}\cdot|X'|\,dt = \int_a^b \underbrace{|(-\theta'(t)\sin\theta(t),\ \theta'(t)\cos\theta(t))|}_{\left|\left(\frac{X'}{|X'|}\right)'\right|}\,dt$$

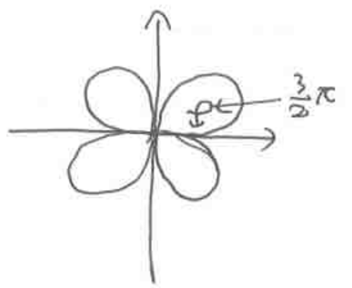
$$= \int_a^b |\theta'(t)|\,dt$$

이다. $\theta(t)$가 증가함수이면, $\theta'(t) \geq 0$ 이고,

$$\int_X k\,ds = \int_a^b |\theta'(t)|\,dt = \int_a^b \theta'(t)\,dt = \theta(b) - \theta(a)$$

이다.

* 예를 들어, $r = \sin 2\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 의 전곡률은 $\frac{3}{2}\pi \times 4 = 6\pi$ 이다.



13. 반지름 100인 도로에서는 차가 $X(t) = \left(100\cos\frac{v}{100}t,\ 100\sin\frac{v}{100}t\right)$ 를 따라 움직인다고 할 수 있다. 그러면

$$X'(t) = \left(-v\sin\frac{v}{100}t,\ v\cos\frac{v}{100}t\right)$$

$$X''(t) = \left(-\frac{v^2}{100}\cos\frac{v}{100}t,\ -\frac{v^2}{100}\sin\frac{v}{100}t\right)$$

에서 $|X'(t)| = v$ 이고, 가속력은 $|X''(t)| = \dfrac{v^2}{100}$ 이다.

반지름 10인 도로에서는 $Y(t) = \left(10\cos\frac{v'}{10}t,\ 10\sin\frac{v'}{10}t\right)$ 를 따라 움직인다고 하자. 이때 속력과 가속력을 구해 보면 v', $\dfrac{v'^2}{10}$ 이다. 같은 정도의 편안함을 느끼려면 가속력이 같아야 한다. 즉, $\dfrac{v^2}{100} = \dfrac{v'^2}{10}$ 에서 $v' = \dfrac{v}{\sqrt{10}}$ 가 된다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

14. 우선, 곡선 $X(t)$와, $s = s(t) = \int_0^t |X'(u)|\,du$ 의 역함수 $t = g(s)$ 에 대하여
$\tilde{X}(s) = X(g(s))$ 와 같이 호의 길이로 매개화된 곡선 $\tilde{X}(s)$ 에 대하여,
$X(t)$의 곡률함수와 $\tilde{X}(s)$의 곡률함수를 $\kappa(t)$, $\tilde{\kappa}(s)$ 라 할 때, $\tilde{\kappa}(s) = \kappa(g(s))$ 임을 보이자.

$$\tilde{X}'(s) = X'(g(s))\,g'(s), \quad \tilde{X}''(s) = X''(g(s))(g'(s))^2 + X'(g(s))\,g''(s)$$

에서 $\tilde{X}' \times \tilde{X}'' = \left(X'(g(s)) \times X''(g(s))\right)\cdot(g'(s))^3$ 이고 따라서

$$\tilde{\kappa}(s) = \frac{|\tilde{X}'(s) \times \tilde{X}''(s)|}{|\tilde{X}'(s)|^3} = \frac{|X'(g(s)) \times X''(g(s))|\cdot|g'(s)|^3}{|X'(g(s))|^3\cdot|g'(s)|^3}$$

$$= \frac{|X'(g(s)) \times X''(g(s))|}{|X'(g(s))|^3} = \kappa(g(s))$$

이다. (일반적으로, 위 식은 $g(s)$에 관계없이 성립하고, 곡률은 재매개화와 무관합니다.)

이제 주어진 타원을 보자. 타원을 $X(t) = (a\cos t,\ b\sin t)$라 하면, 문제 3에서

$$\kappa(t) = \frac{|ab|}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

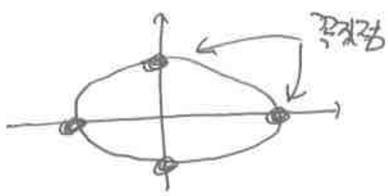
임을 구하였다. 또, $|X'(t)| = \frac{ds}{dt} = (a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{1/2}$ 이다. 이때

$$\tilde{\kappa}'(s) = (\kappa(g(s)))' = \kappa'(g(s))\,g'(s) = \kappa'(t)\cdot\frac{1}{\frac{ds}{dt}} \text{ 에서}$$

$$\tilde{\kappa}'(s) = \frac{|ab|\left(-\frac{3}{2}\right)(2a^2\sin t\cos t - 2b^2\sin t\cos t)}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{7/2}}$$

이다. $\tilde{\kappa}'(s) = 0$ 이려면 $\sin t\cos t = 0$ 에서, $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ 이다.
이 점은 $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$ 이다.

* 기하학적으로, 꼭짓점은 곡률(굽은 정도)이 국소적으로 가장 크거나 가장 작은 점, 이른바 '꼭짓점처럼 생긴 점' 이다.



$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

15. $X'(t) = (-\sin t,\ \underset{= \sin 2t}{2\sin t\cos t},\ \cos 2t) \Rightarrow X'(\pi) = (0, 0, 1)$

$\Rightarrow X'(\pi) \times X''(\pi) = (-2, 1, 0)$

$X''(t) = (-\cos t,\ 2\cos 2t,\ -2\sin 2t) \Rightarrow X''(\pi) = (+1, 2, 0)$

이때 $|X'(\pi)| = 1$, $|X'(\pi) \times X''(\pi)| = |(-2, 1, 0)| = \sqrt{5}$ 에서

곡률은

$$\frac{|X'(\pi) \times X''(\pi)|}{|X'(\pi)|^3} = \frac{\sqrt{5}}{1^3} = \sqrt{5}.$$

접촉평면은, $X(\pi) = (-1, 0, 0)$을 지나고 $X'(\pi) \times X''(\pi) = (-2, 1, 0)$에 수직이다.

$$-2(x+1) + 1(y-0) + 0(z-0) = 0, \text{ 즉 } -2x+y = 2.$$

16. 주어진 곡선은 정규곡선이므로, 호의 길이 매개화 $X(s)$를 생각할 수 있다. 이때

$$\kappa(s) = |X''(s)| = 0$$

이므로, 가속도 벡터 $X''(s) = 0$ 이다. 따라서 $X'(s) = (\text{상수}) = V$ 이고, (단 $|V| = 1$)

$X(s) = sV + W$ 꼴이 되어, 직선 운동을 하는 곡선이 된다.

17. $X(t) = e^t(\cos t, \sin t, 0)$ 상하인 곡선으로 보면,

$X'(t) = e^t(\cos t, \sin t, 0) + e^t(-\sin t, \cos t, 0)$

$X''(t) = e^t(\cos t, \sin t, 0) + 2e^t(-\sin t, \cos t, 0) - e^t(\cos t, \sin t, 0)$

$= 2e^t(-\sin t, \cos t, 0)$

에서 $|X' \times X''| = |(0, 0, 2e^{2t})| = 2e^{2t}$, $|X'| = \sqrt{2}e^t$ 이므로, 곡률은

$$\kappa(t) = \frac{|X' \times X''|}{|X'|^3} = \frac{2e^{2t}}{(\sqrt{2}e^t)^3} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}$$

이다.

$\boxed{\text{하승우}}$ (수리과학부)

18. 로그 와선은 $X(t) = r_0 e^{kt}(\cos t, \sin t, 0)$ 과 같이 쓸 수 있다. 이때

$$X'(t) = k r_0 e^{kt}(\cos t, \sin t, 0) + r_0 e^{kt}(-\sin t, \cos t, 0)$$
$$X''(t) = (k^2-1) r_0 e^{kt}(\cos t, \sin t, 0) + 2k r_0 e^{kt}(-\sin t, \cos t, 0)$$

에서,

$$|X'(t)| = \sqrt{k^2+1}\, r_0 e^{kt}, \quad |X' \times X''| = |(0, 0, (2k^2-(k^2-1)) r_0^2 e^{2kt})|$$
$$= (k^2+1) r_0^2 e^{2kt}$$

이다. 그러므로, 곡률은

$$\kappa(t) = \frac{|X' \times X''|}{|X'|^3} = \frac{(k^2+1) \cdot r_0^2 e^{2kt}}{(k^2+1)^{3/2} r_0^3 e^{3kt}} = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}\, r_0 e^{kt}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$$

이다. 즉, 로그 와선의 곡률 κ는 원점까지의 곡선거리 $r_0 e^{k\theta}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}} = \frac{r\sqrt{1+k^2}}{k} =: \ell$ (5절 문제 5) 에 반비례한다: $\kappa(\theta) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\ell}$.

19. (1) $n(s)$ 에 대하여 $|n(s)|^2 = n(s) \cdot n(s) = 1$ 이므로, 양변을 미분하면 $n(s) \cdot n'(s) = 0$ 이다. 즉, $n(s)$와 $n'(s)$는 수직이다. 또, $t(s)$ 또한 $n(s)$에 수직이므로 $n'(s) = f(s)\, t(s)$ 이다. 또, $n(s) \cdot t(s) = 0$ 에서, 양변을 미분하면 $n'(s) \cdot t(s) + n(s) \cdot t'(s) = 0$ 을 얻고, 이로부터

$$f(s) = n'(s) \cdot t(s) = -n(s) \cdot t'(s) = -\kappa(s)$$

가 되어, $n'(s) = -\kappa(s)\, t(s)$ 가 된다.

(2) $C_u'(s) = C'(s) + u\, n'(s) = t(s) + u \cdot (-\kappa(s)\, t(s)) = (1 - u\kappa(s))\, t(s)$ 에서

$$L(u) = \int_{s_0}^{s_1} |\underbrace{(1-u\kappa(s))}_{|u| \ll 1 \text{일 때 } 1-u\kappa(s)>0}\, t(s)|\, ds = \int_{s_0}^{s_1} |\underbrace{t(s)}_{=C'(s)}|\, ds - u \int_{s_0}^{s_1} |\kappa(s)\, t(s)|\, ds \leftarrow |u| \ll 1 \text{ 이면 나눠서 가능함.}$$
$$= L(0) - u \int_{s_0}^{s_1} \kappa(s)\, ds = L(0) - uK.$$

이 s는 기울어지지 않은 s로, 변수 s가 아닌 선적분 s를 나타냄. $ds = t(s)\, ds$.

(3) (보통의) 경기장은 전곡률이 $K = 2\pi$ 이므로, 너비가 $u = 1m$ 이면, 두 트랙의 길이 차이는 $uK = 2\pi\, m$ 이다.

5.1.1.(5) 먼저, $\operatorname{dist}\big(X, T(X)\big)$가 상수이고 그 값이 0이면, 모든 X에 대하여 $T(X) = X$으로 T는 항등함수가 되고, 따라서 T는 평행이동이다. 그러므로 $\operatorname{dist}\big(X, T(X)\big)$가 0이 아닌 상수인 경우를 생각하자.

임의로 주어진 $X \in \mathbb{R}^n$에 대하여, $T(X)$를 찾자. 이때 $\mathbf{v} = T(X) - X$라 하자.

X와 $T(X)$를 잇는 직선 위의 한 점을 Y라 하자. 이때 문제의 조건, 즉

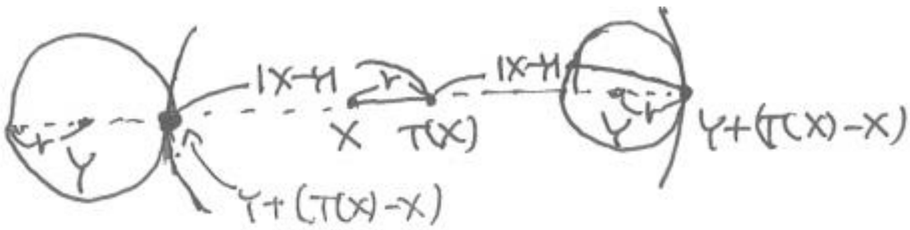
$$①|T(X) - T(Y)| = |X - Y|, \qquad ②|X - T(X)| = |Y - T(Y)|$$

를 만족시키는 $T(Y)$는 $T(Y) = Y + \mathbf{v}$ 뿐이다. ......(★)

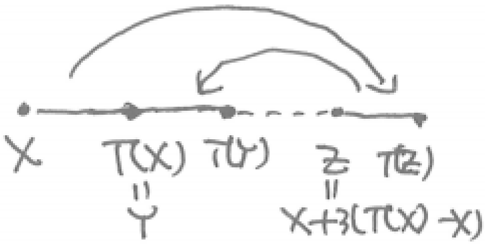
『<u>(★)의 증명.</u> 우선 $Y \neq T(X)$라 하자. $r = |\mathbf{v}| = |X - T(X)|$라 하면, ②에 의하여 $T(Y)$는 중심이 Y이고 반지름의 길이가 r인 n-구면 위에 있어야 한다. 또, ①에 의하여 $T(Y)$는 중심이 $T(X)$이고 반지름의 길이가 $|X - Y|$인 n-구면 위에 있어야 한다. 그런데, $T(X)$, Y, $Y + \mathbf{v}$는 한 직선 위에 있고,

$$|T(X) - (Y + \mathbf{v})| = \big|T(X) - \big(Y + (T(X) - X)\big)\big| = |X - Y|$$

이므로, 위에서 말한 두 구면은 $Y + \mathbf{v}$에서 접한다. 따라서 $T(Y)$로서 가능한 점은 $T(Y) + \mathbf{v}$ 뿐이다. 즉, $T(Y) = Y + \mathbf{v}$이다.



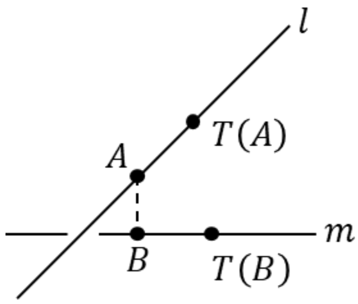
이 논리는 $Y = T(X)$인 경우에는 두 n-구가 일치해서 사용할 수 없다. $Y = T(X)$이면, 위 논리를 2번 사용해서 $T(Y) = Y + \mathbf{v}$임을 알 수 있다. 즉, X와 $T(X)$를 잇는 직선 위의 $T(X)$가 아닌 한 점 Z(예를 들어 $Z = X + 3\mathbf{v}$)를 생각하면, 위의 방법과 같이 $T(Z) = Z + \mathbf{v}$이고, 점 Z를 기준으로 다시 위의 방법을 사용하여 $T(Y) = Y + \mathbf{v}$임을 얻는다.



따라서, $T(Y) = Y + \mathbf{v}$이다.』

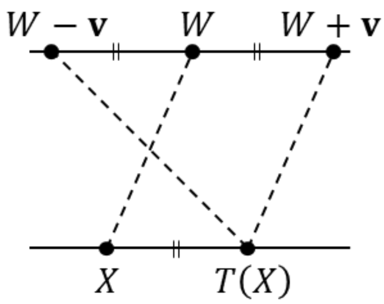
이제 점 X와 점 $T(X)$를 잇는 직선 위에 있지 않은 점 W를 생각하자. 이때 (점 X와 점 $T(X)$를 잇는 직선 l)과 (점 W와 점 $T(W)$를 잇는 직선 m)은 평행하다. ......(♠)

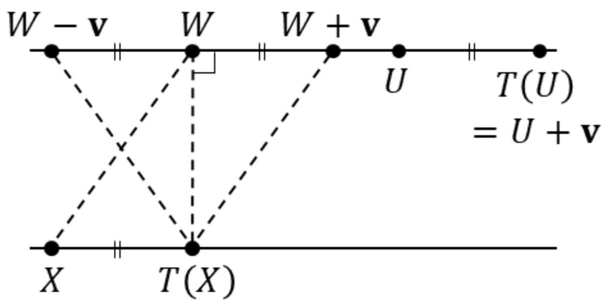
『<u>(♠)의 증명.</u> 두 직선 l, m이 평행하지 않다고 가정하자. 이때 두 직선 사이의 최소 거리를 주는 l, m 각각의 위의 점 A, B가 유일하게 존재한다(즉, $|A-B|$가 두 직선 사이의 거리가 된다는 뜻. 두 직선이 만날 경우, A, B는 두 직선의 교점으로 서로 같다). 이때 위의 (★)에서의 방법에 의하면, $T(A)$와 $T(B)$는 각각 직선 l, m 위의 A, B가 아닌 점이다. 따라서 $|T(A)-T(B)|>|A-B|$가 되고, 이는 T가 거리를 보존한다는 조건과 모순이다. 그러므로 두 직선 l, m은 평행하다.』



따라서 $T(W)=W+\mathbf{v}$ 이거나, $T(W)=W-\mathbf{v}$이다.

이때 점 X, $T(X)$를 잇는 직선과 점 $T(X)$, W를 잇는 직선이 서로 수직이 아니라고 하자. 그러면 조건 ①을 만족시키는 $T(W)$는 $T(W)=W+\mathbf{v}$ 뿐이다(아래 왼쪽).





점 X, $T(X)$를 잇는 직선과 점 $T(X)$, W를 잇는 직선이 서로 수직이면, 세 점 $T(X)$, $W-\mathbf{v}$, $W+\mathbf{v}$가 이루는 삼각형이 점 $T(X)$를 꼭짓점으로 하는 이등변삼각형이 되어, 두 점 $W+\mathbf{v}$, $W-\mathbf{v}$ 모두 조건 ①을 만족시켜서 $T(W)$를 결정할 수 없다. 이 경우에는, 직선 m 위의 W가 아닌 다른 점 U(예를 들어 $U=W+2\mathbf{v}$)를 생각하여 $T(U)=U+\mathbf{v}$임을 얻으면, 위의 (★)에 의하여 $T(W)=W+\mathbf{v}$임을 알 수 있다(위 오른쪽).