제 1 장 삼각형과 사각형의 성질

제 1절 삼각형의 기본성질

– 이 절의 주요 내용

- 삼각형의 기본성질
- 삼각형의 합동조건 : SSS합동, SAS합동, ASA합동
- 이등변삼각형의 기본성질
- 직각삼각형의 합동조건 : RHA합동, RHS합동

정리 1.1 (삼각형의 기본성질) 삼각형은 다음 세 조건을 만족한다.

(1) 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 $180°$이다.

(2) 삼각형의 한 외각의 크기는 이웃하지 않는 두 내각의 합과 같다.

(3) 삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 다른 한 변의 길이보다 길다.

정리 1.2 (삼각형의 합동조건) 다음 세 가지 조건 중 하나를 만족하면 두 삼각형은 합동이다. (그림 1.1 참고)

(1) (SSS합동) 대응하는 세 변의 길이가 모두 같을 때,

(2) (SAS합동) 대응하는 두 변의 길이가 같고 그 끼인 각이 같을 때,

(3) (ASA합동) 한 변의 길이가 같고 대응하는 양끝각의 크기가 같을 때,

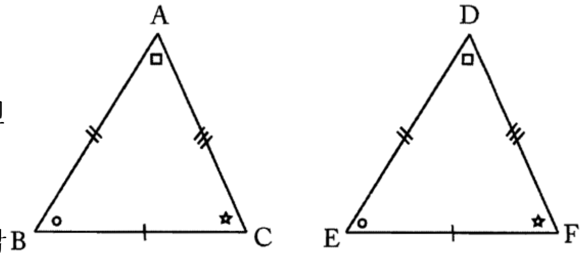


그림 1.1: 삼각형의 합동조건

정의 1.3 (이등변삼각형의 정의) 두 변의 길이가 같은 삼각형을 이등변삼각형이라고 한다.

정리 1.4 (이등변삼각형의 기본성질) 이등변 삼각형에서 다음이 성립한다. (그림 1.2 참고)

(1) 이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 서로 같다.

(2) 두 내각의 크기가 같은 삼각형은 이등변삼각형이다.

(3) 이등변삼각형의 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분한다.

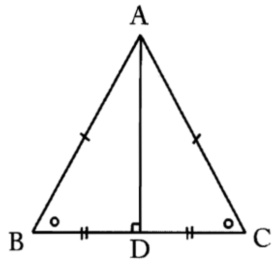


그림 1.2: 이등변삼각형의 기본성질

증명 :

(1) AB = AC인 이등변삼각형 ABC에서, $\angle A$의 이등분선이 밑변 BC와 만나는 점을 D라고 하자. 그러면, $\triangle ABD$와 $\triangle ACD$에서 $AB = AC$, AD는 공통, $\angle BAD = \angle CAD$이므로 $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$(SAS합동)이다. 따라서, $\angle B = \angle C$이다.

(2) $\angle B = \angle C$인 삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선과 변 BC와의 교점을 D라고 하자. $\triangle ABD$와 $\triangle ACD$에서 $\angle BAD = \angle CAD$, AD는 공통, $\angle ADB = \angle ADC$이므로 $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$(ASA합동)이다. 따라서, $AB = AC$이다.

(3) 삼각형 ABC가 $AB = AC$, $\angle BAD = \angle CAD$를 만족한다고 하자. $\triangle ABD$와 $\triangle ACD$에서 $AB = AC$, AD는 공통, $\angle BAD = \angle CAD$이므로 $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$(SAS합동)이다. 따라서, $BD = CD$, $\angle ADB = \angle ADC$이다. 그런데, $\angle ADB + \angle ADC = 180°$이므로 $\angle ADB = \angle ADC = 90°$이다. 즉, $AD \perp BC$이다.

정리 1.5 삼각형 ABC에서 $AB > AC$이면 $\angle C > \angle B$이다. 또 역도 성립한다.

증명 : $AC = AD$를 만족하는 점 D를 변 AB 위에 잡으면, 삼각형 ADC는 이등변삼각형이다. 즉, $\angle ADC = \angle ACD$이다. 또, $\angle B + \angle DCB = \angle ADC$이다. 따라서,

$$\angle C = \angle ACD + \angle DCB = \angle ADC + \angle DCB = \angle B + 2\angle DCB > \angle B$$

이다.

(역의 증명) $\angle B = \angle DCB$를 만족하는 점 D를 변 AB 위에 잡으면, 삼각형 DBC는 이등변삼각형이므로 $BD = CD$이다. 따라서

$$AB = AD + DB = AD + DC > AC$$

이다.

정리 1.6 (직각삼각형의 합동조건) 두 직각삼각형이 다음 두 조건 중 하나를 만족하면, 서로 합동이다. (그림 1.3 참고)

(1) (RHA합동) 빗변의 길이와 한 예각의 크기가 같을 때,

(2) (RHS합동) 빗변의 길이와 다른 변의 길이가 각각 같을 때,

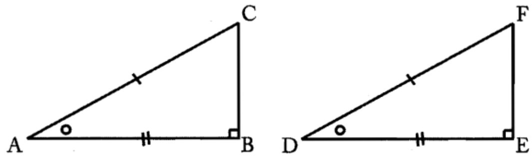


그림 1.3: 직각삼각형의 합동조건

예제 1.7 [1]삼각형 ABC에서 BC의 중점을 D라 하자. D에서 변 AB, AC에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 할 때, $DE = DF$이면 삼각형 ABC는 이등변삼각형임을 증명하여라.

정리 1.8 (삼각형의 닮음조건) 두 삼각형은 다음 세 조건 중 어느 하나를 만족하면 닮음이다. (그림 1.4 참고)

(1) (SSS닮음) 세 쌍의 대응변의 길이의 비가 같을 때,

(2) (SAS닮음) 두 쌍의 대응변의 길이의 비가 같고, 그 끼인각의 크기가 같을 때,

(3) (AA닮음) 두 쌍의 대응각의 크기가 같을 때,

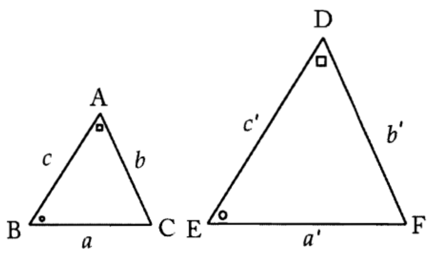


그림 1.4: 삼각형의 닮음조건

정리 1.9 (삼각형과 선분의 길이의 비) $\triangle ABC$에서 BC에 평행한 직선이 AB, AC 또는 그 연장선과 만나는 점을 각각 D, E라고 하면, 다음이 성립한다. (그림 1.5 참고)

(1) $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$이다.

(2) $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$이다.

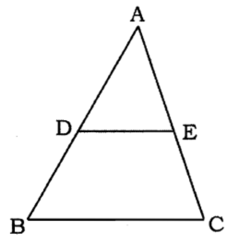


그림 1.5: 삼각형과 선분의 길이의 비

증명 :

(1) $\triangle ABC$와 $\triangle ADE$에서 $\angle A$는 공통(또는 맞꼭지각), $\angle ADE=\angle ABC$(동위각 또는 엇각)이므로 $\triangle ABC$와 $\triangle ADE$는 닮음이다. 따라서, $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$이다.

(2) 점 C를 지나서 AB에 평행한 직선이 DE 또는 그 연장선과 만나는 점을 F라고 하면, $\triangle ADE$와 $\triangle CFE$에서 $AD /\!/ CF$이므로 $\angle EAD=\angle ECF$, $\angle EDA=\angle EFC$이다. 따라서, $\triangle ADE$와 $\triangle CFE$는 닮음이다. 따라서, $\frac{AD}{CF}=\frac{AE}{EC}$이다. 그런데, $\square DBCF$는 평행사변형이므로 $CF=DB$이다. 따라서, $\frac{AD}{CF}=\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$이다.

따름정리 1.10 $\triangle ABC$에서 D, E가 각각 AB, AC 또는 그 연장선 위의 점일 때,

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC} \text{ 또는 } \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

을 만족하면 $DE /\!/ BC$이다.

증명 : $\triangle ADE$와 $\triangle ABC$에서 $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$, $\angle A$는 공통이므로 $\triangle ADE$와 $\triangle ABC$는 닮음이다. 따라서, $\angle ADE=\angle ABC$이다. 즉, $DE /\!/ BC$이다.

정리 1.11 (내각의 이등분선의 정리) 삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선과 변 BC의 교점을 D라 하면,

$$AB : AC = BD : BC$$

가 성립한다. (그림 1.6 참고)

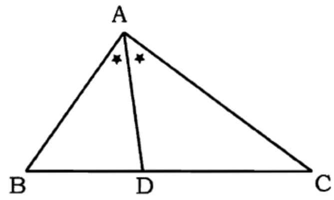


그림 1.6: 내각의 이등분선의 정리

증명 : 점 C를 지나 AD에 평행한 직선이 변 AB의 연장선과 만나는 점을 E라 하자. 그러면, $\angle BAD = \angle AEC$(동위각), $\angle CAD = \angle ACE$(엇각)이다. 그런데, $\angle BAD = \angle CAD$이므로 삼각형 ACE는 이등변삼각형이다. 따라서,

$$AB : AC = AB : AE = BD : DC$$

이다.

정리 1.12 (외각의 이등분선의 정리) 삼각형 ABC에서 $\angle A$의 외각의 이등분선과 변 BC의 연장선과의 교점을 D라 하면,

$$AB : AC = BD : DC$$

가 성립한다. (그림 1.7 참고)

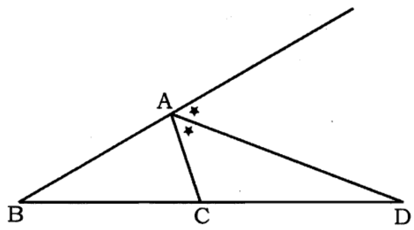


그림 1.7: 외각의 이등분선의 정리

증명 : AB의 연장선 위에 한 점 F를 잡자. 또, 점 C를 지나 AD에 평행한 직선이 AB와 만나는 점을 E라고 하자. 그러면, $AD /\!/ EC$이므로

$$BA : AE = BD : DC \qquad (1)$$

이다. 또한,

$$\angle FAD = \angle AEC(\text{동위각}) \qquad (2)$$

$$\angle DAC = \angle ACE(\text{엇각}) \qquad (3)$$

이다. 그런데, $\angle FAD = \angle DAC$이므로, 식 (2)와 (3)으로부터 $\triangle AEC$에서

$$AC = AE \qquad (4)$$

이다. 식(1)과 (4)로부터

$$BA : AC = BD : DC$$

이다. □

정리 1.13 (삼각형의 중점연결정리) 삼각형 ABC에서 변 AB, AC의 중점을 각각 D, E라 하면,

(1) $DE /\!/ BC$,

(2) $DE = \frac{1}{2}BC$

가 성립한다.

증명 : $AD : AB = 1 : 2 = AE : AC$이고, $\angle A$는 공통각이므로 삼각형 ADE와 ABC는 닮음이다. 따라서, $\angle ADE = \angle ABC$이다. 동위각이 서로 같으므로 두 선분 DE와 BC는 평행하다. 또,

$$DE : BC = AD : AB = 1 : 2$$

이므로 $DE = \frac{1}{2}BC$이다. □

예제 1.14 [2)]삼각형 ABC에서 변 BC위에 $PC = 3BP$인 점 P, 변 CA위에 $AQ = QC$인 점 Q를 잡자. 또, 점 Q를 지나서 BC에 평행한 선과 AP와의 교점을 R, AP와 BQ의 교점을 S라 할 때, $AR : RS$를 구하여라.

정리 1.15 (직각삼각형의 닮음) 삼각형 ABC에서 $\angle A=90°$이고, 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 다음이 성립한다. (그림 1.8 참고)

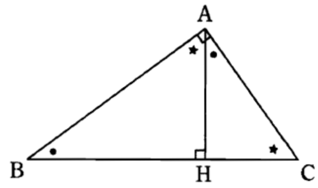


그림 1.8: 직각삼각형의 닮음

(1) (피타고라스의 정리) $AB^2+AC^2=BC^2$.

(2) $AB^2=BH\cdot BC$.

(3) $AC^2=CH\cdot BC$.

(4) $AH^2=BH\cdot CH$.

(5) $AB\cdot AC=AH\cdot BC$.

증명:

(1) 증명은 독자에게 맡긴다.

(2) $\triangle ABC$와 $\triangle HBA$에서 $\angle BAC=\angle BHA=90°$, $\angle B$는 공통이므로 $\triangle ABC$와 $\triangle HBA$는 닮음(AA 닮음)이다. 따라서, $AB:HB=BC:BA$이다. 즉, $AB^2=BH\cdot BC$이다.

(3) $\triangle ABC$와 $\triangle HAC$에서 $\angle BAC=\angle AHC=90°$, $\angle C$는 공통이므로 $\triangle ABC$와 $\triangle HAC$는 닮음(AA 닮음)이다. 따라서, $BC:AC=AC:HC$이다. 즉, $AC^2=CH\cdot BC$이다.

(4) $\triangle HBA$와 $\triangle HAC$에서 $\angle BHA=\angle AHC=90°$, $\angle ABH=\angle CAH$이므로, $\triangle HBA$와 $\triangle HAC$는 닮음(AA 닮음)이다. 따라서, $HB:HA=AH:CH$이다 즉, $AH^2=BH\cdot CH$이다.

(5) $\triangle ABC=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}BC\cdot AH$이므로 $AB\cdot AC=BC\cdot AH$이다. □

예제 1.16 [3] $\angle C=90°$인 직각삼각형 ABC에서 $AC=3$, $BC=4$이고, 점 C에서 빗변 AB에 내린 수선의 발을 D라고 할 때, CD의 길이를 구하여라.

제 2절 삼각형의 오심

– 이 절의 주요 내용

- 삼각형의 오심 : 내심, 외심, 무게중심, 수심, 방심

정의 1.17 (내심) 삼각형의 내심(incenter)은 세 내각의 이등분선의 교점으로 내접원의 중심이다. (그림 1.9 참고)

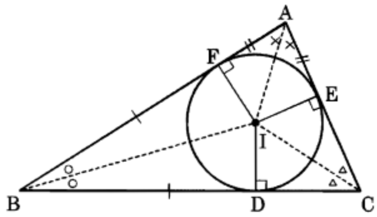


그림 1.9: 내심

정리 1.18 (내심의 기본성질(1)) 내심에서 세 변에 이르는 거리는 같다.

증명 : (그림 1.9 참고) $\triangle ABC$의 내심 I에서 세 변 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하면, $\angle FAI = \angle EAI$, $\angle AFI = AEI = 90°$, AI는 공통이므로 $\triangle AIF \equiv \triangle AIE$(RHA 합동)이다. 따라서, $IF = IE$이다. 마찬가지로, $\triangle BIF \equiv \triangle BID$(RHA 합동)이므로 $IF = ID$이다. 따라서, $IE = IF = ID$이므로 내심 I에서 세 변에 이르는 거리는 같다. □

정리 1.19 (내심의 기본성질(2)) 삼각형 ABC에서 변 BC, CA, AB의 길이를 각각 a, b, c라 하고, 반지름이 r인 내접원과 변 BC, CA, AB와의 교점을 각각 D, E, F라고 하면,

$$AE=AF,\ BF=BD,\ CD=CE$$

이다. $a+b+c=2s$라고 할 때, 다음이 성립한다.

(1) $AE=AF=s-a$, $BF=BD=s-b$, $CD=CE=s-c$이다.

(2) 삼각형 ABC의 넓이 S는 $S=\frac{1}{2}(a+b+c)r=sr$이다.

증명:

(1) 내심의 기본성질 (1)로부터 성립함을 알 수 있다. 자세한 증명은 독자에게 맡긴다.

(2) $\triangle ABC=\triangle ABI+\triangle BCI+\triangle CAI$이므로, $\triangle ABC=\frac{1}{2}cr+\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br=\frac{1}{2}(a+b+c)r=sr$이다. □

정의 1.20 (외심) 삼각형의 외심(circumcenter)은 세 변의 수직이등분선의 교점으로 외접원의 중심이다. (그림 1.10 참고)

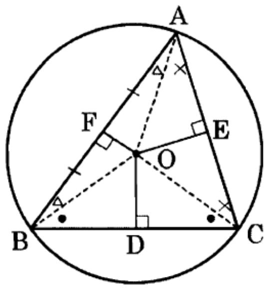


그림 1.10: 외심

정리 1.21 (외심의 기본성질) 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.

증명: (그림 1.10참고) 삼각형 ABC의 외심 O에서 세 변 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하면, $AF=FB$, $\angle OFA=\angle OFB=90°$, FO는 공통이므로 $\triangle AFO\equiv\triangle BFO$(SAS합동)이다. 따라서, $OA=OB$이다. 마찬가지로, $\triangle BDO\equiv\triangle CDO$(SAS합동)이므로 $OB=OC$이다. 따라서, $OA=OB=OC$이므로 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다. □

예제 1.22 [4]세 점 A, B, C를 중심으로 하는 세 원이 서로 각각에 외접한다고 할 때, 이들 원의 반지름은 각각 $s-a$, $s-b$, $s-c$이다. 단, $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$, $2s=a+b+c$이다.

예제 1.23 [5]삼각형 ABC에서 내심과 의심을 각각 I, O라고 할 때,

$$\angle OAI=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$$

임을 증명하여라. 단, $\angle B>\angle C$이다.

예제 1.24 (KMO, '1987) [6]반지름의 길이가 $2r$인 반원 O에 반지름의 길이가 r인 원 O'이 내접하고 있다. 원 O'에 외접하고 반원 O에 내접하는 원 O''의 반지름의 길이를 구하여라.

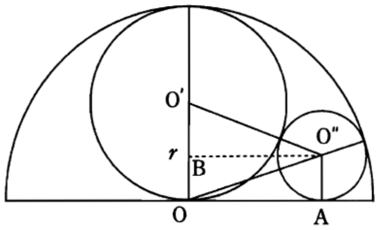


그림 1.11: 예제 1.24 관련그림

정의 1.25 (무게중심) 삼각형의 무게중심(centroid) 은 세 중선의 교점이다. (그림 1.12 참고)

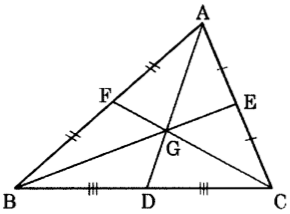


그림 1.12: 무게중심

정리 1.26 (무게중심의 기본성질) 삼각형 ABC에서 세 변 BC, CA, AB의 중점을 각각 D, E, F라 하자. 세 중선의 교점을 G라 하자. 그러면 다음이 성립한다.

(1) $AG:GD=2:1$, $BG:GE=2:1$, $CG:GF=2:1$이다.

(2) $\triangle AGF=\triangle GFB=\triangle BGD=\triangle GDC=\triangle CGE=\triangle GEA$이다.

증명 :

(1) 삼각형 ABD에 메네라우스의 정리(정리 2.11 참고)를 적용하면,

$$\frac{FB}{AF}\cdot\frac{DC}{BC}\cdot\frac{AG}{GD}=1$$

이므로, $\dfrac{AG}{GD}=2$이다. 따라서, $AG:GD=2:1$이다. 같은 방법으로 삼각형 BCE와 삼각형 CAF에 메네라우스의 정리를 적용하면 $BG:GE=2:1$, $CG:GF=2:1$이다.

(2) $\triangle ABG=\triangle ACG$이므로

$$\triangle ABG=2\triangle AFG=2\triangle BFG=2\triangle AEG=2\triangle CGE=\triangle ACG$$

이다. 즉, $\triangle AFG=\triangle BFG=\triangle AEG=\triangle CEG$이다. 또한, $\triangle ABG=\triangle BCG$이므로

$$\triangle ABG=2\triangle AFG=2\triangle BFG=2\triangle BDG=2\triangle CDG=\triangle BCG$$이다. 즉, $\triangle AFG=\triangle BFG=\triangle BDG=\triangle CDG$이다. 따라서,

$$\triangle AGF=\triangle GFB=\triangle BGD=\triangle GDC=\triangle CGE=\triangle GEA$$

이다. □

예제 1.27 [7]삼각형의 세 중선의 길이를 세 변으로 갖는 삼각형의 넓이와 처음 삼각형의 넓이의 비를 구하여라.

정의 1.28 (수심) 삼각형의 수심(orthocenter)은 세 꼭짓점에서 대변에 내린 수선의 교점이다. (그림 1.14 참고)

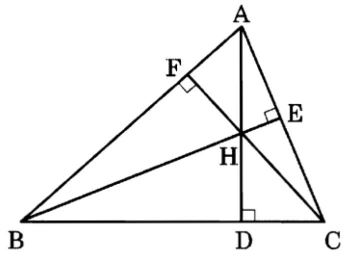


그림 1.14: 수심

정의 1.29 (방심) 삼각형의 방심(excenter)은 한 내각의 이등분선과 다른 두 외각의 이등분선의 교점으로 방접원의 중심이다. (그림 1.15 참고)

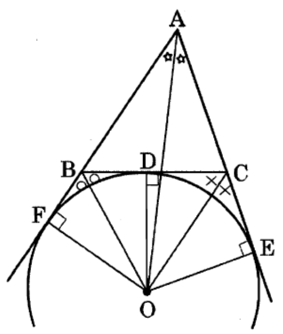


그림 1.15: 방심

예제 1.30 [8]삼각형 ABC에서 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$이고, 변 BC, CA, AB와 접하는 방접원의 반지름을 각각 r_a, r_b, r_c라고 할 때,

$$\triangle ABC=(s-a)r_a=(s-b)r_b=(s-c)r_c$$

가 성립함을 보여라. 단, $s=\dfrac{a+b+c}{2}$이다.

예제 1. 31 [9]삼각형 ABC에서 내접원의 반지름을 r이라고 하고, 변 BC, CA, AB와 접하는 방접원의 반지름을 각각 r_a, r_b, r_c라고 할 때,

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$$

가 성립함을 보여라.

제 3절 사각형의 성질

– 이 절의 주요 내용

- 주요 사각형의 정의와 기본 성질

정의 1.32 주요 사각형의 정의는 다음과 같다.

(1) 사다리꼴 : 한 쌍의 대변이 평행한 사각형

(2) 평행사변형 : 두 쌍의 대변이 각각 평행한 사각형

(3) 직사각형 : 네 내각의 크기가 모두 같은 사각형

(4) 마름모 : 네 변의 길이가 모두 같은 사각형

(5) 정사각형 : 네 변의 길이가 모두 같고, 네 내각의 크기가 모두 같은 사각형

다음 평행사변형, 직사각형, 마름모, 정사각형의 성질들은 풀이에서 자주 사용되므로 숙지하고 있어야 한다. 자세한 증명은 독자에게 맡긴다.

정리 1.33 (평행사변형의 성질) 임의의 평행사변형은 다음 조건을 모두 만족한다. 역으로, 다음 조건 중 어느 하나만이라도 성립하면 그 사각형은 평행사변형이다.

(1) 두 쌍의 대변의 길이가 서로 같다.

(2) 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다.

(3) 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다.

(4) 한 쌍의 대변의 길이가 같고, 그 대변이 평행하다.

정리 1.34 (직사각형의 성질) 직사각형은 두 대각선의 길이가 같고 서로 다른 것을 이등분한다. 그 역도 성립한다.

정리 1.35 (마름모의 성질) 마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분한다. 역으로, 두 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분하는 사각형은 마름모이다.

정리 1.36 (정사각형의 성질) 정사각형의 두 대각선의 길이가 같고, 서로 다른 것을 수직이등분한다. 역으로, 두 대각선의 길이가 같고, 서로 다른 것을 수직이등분하는 사각형은 정사각형이다.

정리 1.37 볼록 사각형 $ABCD$에서 두 대각선 AC와 BD의 교점을 O라고 하자. 그러면, 사각형 $ABCD$는 네 개의 삼각형 ABO, BCO, CDO, DAO로 나누어지고,

$$\triangle ABO \cdot \triangle CDO = \triangle BCO \cdot DAO$$

가 성립한다. (그림 1.16 참고)

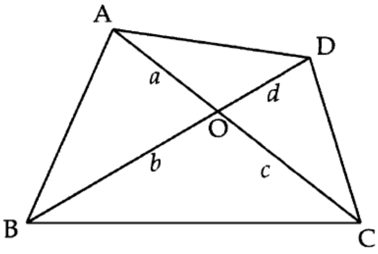


그림 1.16: 정리 1.37 관련그림

증명 : $AO = a$, $BO = b$, $CO = c$, $DO = d$라 하자. 그러면,

$$\triangle ABO = \frac{1}{2}ab\sin\angle AOB$$

$$\triangle CDO = \frac{1}{2}cd\sin\angle COD = \frac{1}{2}cd\sin\angle AOB$$

$$\triangle BCO = \frac{1}{2}bc\sin\angle BOC = \frac{1}{2}bc\sin(180° - \angle AOB) = \frac{1}{2}bc\sin\angle AOB$$

$$\triangle DAO = \frac{1}{2}da\sin\angle DOA = \frac{1}{2}da\sin(180° - \angle AOB) = \frac{1}{2}da\sin\angle AOB$$

이다. 따라서,

$$\triangle ABO \cdot CDO = \frac{1}{4}abcd\sin^2\angle AOB = \triangle BCO \cdot \triangle DAO$$

이다. □

예제 1.38 [10] $AD /\!/ BC$인 사다리꼴 $ABCD$에서 대각선의 교점을 O라 하자. $\triangle AOD=20$, $\triangle OBC=80$일 때, $\triangle OCD$의 넓이를 구하여라.

정리 1.39 (내각의 크기, 외각의 크기, 대각선의 총수) 볼록 n각형에 대하여 다음이 성립한다.

(1) 볼록 n각형의 내각의 총합은 $(n-2)\times 180°$이다.

(2) 정 n각형의 한 내각의 크기는 $\dfrac{(n-2)\times 180°}{n}$이다.

(3) n각형의 외각의 합은 $360°$이다.

(4) n각형의 대각선의 총수는 $\dfrac{1}{2}n(n-3)$이다.

(5) n각형의 서로 다른 대각선의 수는 $\left[\dfrac{n-2}{2}\right]$이다. 단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다.

제 4절 스튜워드의 정리, 파프스의 중선정리

– 이 절의 주요 내용

- 스튜워드 정리
- 파프스의 중선정리

정리 1.40 (스튜워드의 정리(Stewart's Theorem)) 삼각형 ABC에서 BC, CA, CD의 길이를 각각 a, b, c라 하자. 또 점 D가 변 BC위의 한 점이고, AD, BD, CD의 길이를 각각 p, m, n이라 하자. 그러면

$$b^2m+c^2n=a(p^2+mn)$$

이 성립한다. (그림 1.17 참고)

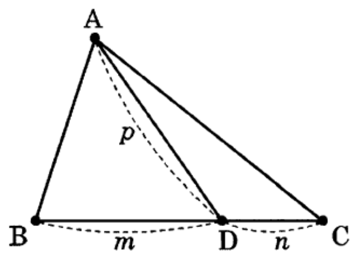


그림 1.17: 스튜워드의 정리

증명1 : A에서 BC에 내린 수선의 발을 P라 하고, $DP=x$, $AP=y$라 하자. $\triangle ABP$에서

$$c^2=(m-x)^2+y^2=m^2-2xm+p^2 \qquad (1)$$

이다. $\triangle ACP$에서

$$b^2=(n+x)^2+y^2=n^2+2xn+p^2 \qquad (2)$$

이다. 식 $(1)\times n+(2)\times m$를 하면,

$$\begin{aligned} b^2m+c^2n &= m^2n+np^2+n^2m+mp^2 \\ &= (m+n)(mn+p^2) \\ &= a(mn+p^2) \end{aligned}$$

이다. □

증명2 : $\triangle ADB$와 $\triangle ADC$에서 $\cos\angle ADB+\cos\angle ADC=0$이므로 제 2코사인법칙을 이용하면

$$\frac{p^2+\left(\frac{m}{m+n}\right)^2a^2-c^2}{p\cdot\frac{m}{m+n}a}+\frac{p^2+\left(\frac{n}{m+n}\right)^2a^2-b^2}{p\cdot\frac{n}{m+n}a}=0$$

$$\frac{p^2+\left(\frac{m}{m+n}\right)^2a^2-c^2}{m}+\frac{p^2+\left(\frac{n}{m+n}\right)^2a^2-b^2}{n}=0$$

이다. 양변에 mn을 곱하여 정리하면

$$(m+n)p^2+\frac{a^2mn}{m+n}=mb^2+nc^2$$

이다. $m+n=a$이므로

$$a(p^2+mn)=mb^2+nc^2$$

이다. □

예제 1.41 [11])세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형 ABC에서 중선 AD의 길이를 a, b, c로 나타내어라. 단, D는 변 BC의 중심이다.

정리 1.42 (파프스의 중선정리(Pappus's median Theorem)) 삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 하면,

$$AB^2+AC^2=2(BM^2+AM^2)$$

이 성립한다. (그림 1.18 참고) 일반적으로 변 BC를 $m:n$으로 내분하는 점을 D라 하면,

$$nAB^2+mAC^2=nBD^2+mCD^2+(m+n)AD^2$$

이 성립한다.

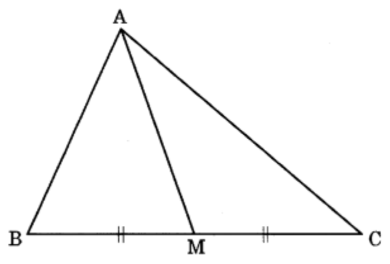


그림 1.18: 파프스의 중선정리

증명 : 꼭지점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. 그러면 피타고라스의 정리에 의하여,

$$AB^2=BH^2+AH^2,\ AC^2=CH^2+AH^2$$

이 성립한다. $BH^2+CH^2=(BM-HM)^2+(HM+MC)^2=2BM^2+2MH^2$이므로 위 두 식으로부터

$$\begin{aligned} AB^2+AC^2 &= BH^2+CH^2+2AH^2 \\ &= 2BM^2+2(MH^2+AH^2) \\ &= 2(AM^2+MB^2) \end{aligned}$$

이다. 일반적인 경우에 대해서 증명하자. 정리 1.40(스튜워드의 정리)에 의하여

$$\begin{aligned} nAB^2+mAC^2 &= BC\left\{AD^2+\left(\frac{BC}{m+n}\right)^2 mn\right\}\left(\frac{m+n}{BC}\right) \\ &= (m+n)AD^2+\frac{BC^2}{m+n}mn \\ &= (m+n)AD^2+\frac{m}{m+n}BC\cdot nBC \\ &= (m+n)AD^2+BD\cdot n(BD+DC) \\ &= (m+n)AD^2+nBD^2+nBD\cdot DC \\ &= (m+n)AD^2+nBD^2+m\cdot\frac{n}{m+n}BC\cdot DC \\ &= (m+n)AD^2+nBD^2+mDC^2 \end{aligned}$$

이다. □

예제 1.43 (KMO, '2005) [12]삼각형 ABC에서 세 변 BC, CA, AB의 중점을 각각 K, L, M이라 하자. $AB^2+BC^2+CA^2=200$일 때, $AK^2+BL^2+CM^2$의 값은?

(1) 120 (2) 135 (3) 150 (4) 175 (5) 180

예제 1.44 (Euler의 도형문제) [13]사각형 $ABCD$의 네 변 AB, BC, CD, DA의 길이를 각각 a, b, c, d라고 하고, 대각선 BD, AC의 중점을 각각 E, F라고 하자.
이 때,

$$a^2+b^2+c^2+d^2=BD^2+AC^2+4EF^2$$

이 성립함을 증명하여라. (그림 1.20 참고)

제 5절 연습문제

연습문제 1.1 (KMO, '1987) ★★★

14) $\angle C=90°$인 직각삼각형 ABC의 빗변 AB의 중심을 M, 꼭지점 C에서 빗변 AB에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, 선분 CH, CM은 $\angle C$를 삼등분한다. 이 때, $\triangle CHM : \triangle ABC$를 구하여라.

연습문제 1.2 ★★

15)삼각형 ABC에서 변 AC의 중점을 M, 변 BC의 사등분점을 점 B에 가까운 점부터 P, Q, R이라 하자. 이 때, BM은 AP, AQ, AR에 의하여 네 부분으로 나누어진다. 이 네 부분의 길이를 각각 a, b, c, d라고 할 때, $a:b:c:d$를 구하여라. 단, $a>b>c>d$이다.

연습문제 1.3 ★★

16) $\triangle PQR$의 세변 QR, RQ, PR의 연장선 위에 $\dfrac{PA}{QP}=\dfrac{QB}{RQ}=\dfrac{RC}{PR}=a$가 되게 각각 점 A, B, C를 잡아 삼각형 $\triangle ABC$를 만들 때, $\triangle ABC$의 넓이가 $\triangle PQR$의 61배가 되도록 할 때, a의 값을 구하여라.

연습문제 1.4 ★★
17)사다리꼴 $ABCD$에서 $AB /\!/ CD$이다. $\angle C$의 이등분선은 AD에 수직이고, E에서 만나며, $DE=2AE$라 한다. CE로 나누어지는 사다리꼴의 두 부분의 넓이를 비를 구하여라.

연습문제 1.5 ★★
18)정삼각형 ABC에서 $AE=BD$가 되도록 BC의 연장선 위에 점 D, BA의 연장선 위에 점 E를 잡는다. 이 때, $CE=DE$임을 증명하여라.

연습문제 1.6 ★★
19)선분 AB와 선분 BC는 수직이다. 선분 AB와 선분 BC의 중점을 각각 D, E라 하고, AE와 CD의 교점을 F라 하자. $AB=x$, $BC=y$일 때, $\triangle FEC$의 넓이를 x, y써서 나타내어라.

연습문제 1.7 ★★★★

20)한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC의 변 AB의 중점을 의 중점을 M, AC의 중점을 N이라 하고, MN 위의 임의의 점 D에 대하여 BD의 연장선과 AC와의 교점을 E, CD의 연장선과 AB와의 교점을 F라 하자. $\frac{1}{CE}+\frac{1}{BF}=1$임을 증명하여라.

연습문제 1.8 ★

21)높이가 4이고, 두 대각선이 수직인 사다리꼴에서 한 대각선의 길이가 5일 때, 이 사다리꼴의 넓이를 구하여라.

연습문제 1.9 ★★★

22)삼각형 ABC의 내심을 I, 세 변 BC, CA, AB의 길이를 각각 a, b, c라고 할 때, $\frac{\triangle IBC}{\triangle ABC}$를 a, b, c로 나타내어라.

연습문제 1.10 ★★★

23)내심과 무게중심이 일치하는 삼각형은 정삼각형임을 보여라.

연습문제 1.11 ★★★

24)내심과 외심이 일치하는 삼각형은 정삼각형임을 보여라.

연습문제 1.12 ★★★

25)외심과 수심이 일치하는 삼각형은 정삼각형임을 보여라.

연습문제 1.13 ★★

26) 한 변의 길이가 9인 정삼각형 ABC에서 변 BC의 삼등분점을 D, E라 할 때, AD^2의 길이를 구하여라. 단, 점 B에 가까운 점이 D이다.

연습문제 1.14 ★★

27) 정삼각형 ABC에서 $AE=CD$가 되도록 점 D와 E를 각각 변 BC, CA위에 잡고, AD와 BE의 교점을 P, 점 B에서 AD에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, $\angle PBQ$의 크기를 구하여라.

연습문제 1.15 ★★★

28) $\angle C=90°$인 직각삼각형 ABC에서 빗변 AB위의 임의의 한 점 D를 잡아 변 BC에 내린 수선의 발을 E라 하자. $BE=AC$, $BD=\frac{1}{2}$, $BC+DE=1$일 때, $\angle ABC$의 크기를 구하여라.

연습문제 1.16★★

29) 삼각형 ABC에서 변 CA의 중점을 M, $BD=\frac{1}{2}DC$가 되는 변 BC위에 점을 D, AD와 BM의 교점을 E라 하자. 이 때, $BE=EM$임을 증명하라.

연습문제 1.17★★★★

30) 정사각형 $ABCD$의 내주에 $PA=1$, $PB=2$, $PC=3$이 되도록 점 P를 잡을 때, $\angle APB$의 크기와 정사각형 $ABCD$의 한 변의 길이를 구하여라.

연습문제 1.18★★★

31) 직사각형 $ABCD$에서 AB : $DA=3$: 4이고, 각 A와 각 D의 이등분선이 밑변 BC와 만나는 점을 각각 F, E라 하자. 또, 두 이등분선 AF와 DE의 교점을 G라 하자. 이 때, $\frac{\triangle EFG}{\square ABCD}$를 구하여라.

연습문제 1.19★★

32) 평행사변형 $ABCD$에서 BC의 중점을 E, CD의 중점을 F라 할 때, $\dfrac{\triangle AEF}{\square ABCD}$를 구하여라.

연습문제 1.20★★★

33)삼각형 ABC에서 각 A의 이등분선이 BC와 만나는 점을 D라 하고, 점 D에서 AB에 평행인 직선을 그어 AC와 만나는 점을 E라 하자. 또, 점 E에서 BC에 평행인 직선을 그어서 AB와 만나는 점을 F라 하자. $AF=64$, $FB=52$, $BD=80$일 때, AE의 길이를 구하여라.

연습문제 1.21★★★

34) 삼각형 ABC에서 $\angle A=50^\circ$이고, 점 I와 O를 직각삼각형 ABC의 내심과 외심이라고 하자. $\angle OBL=10^\circ$일 때, $\angle ICB$의 크기를 구하여라.

연습문제 1.22★

[35] 사각형 $ABCD$에서 $\angle B = 90^\circ$이고, 대각선 AC는 변 CD에 수직이고, $AB = 18$, $BC = 21$이고, $CD = 14$이다. 이 때, 사각형 $ABCD$의 둘레의 길이를 구하여라.

연습문제 1.23★★

[36] 삼각형 ABC에서 변 BC, CA, AB의 중점을 각각 D, E, F라 하자. 중선 AD, BE, CF길이가 각각 9, 12, 15일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라.

연습문제 1.24★★

[37]$BC = 5$인 예각삼각형 ABC에서, 점 E는 $BE \perp AC$를 만족하는 변 AC 위의 점이다. 또, 점 F는 $AF = BF$를 만족하는 변 AB 위의 점이다. $BE = CF = 4$일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라.

연습문제 1.25★★

38) 지름 AB와 현 CD가 점 H에서 수직으로 만난다. 지름 AB의 길이는 두 자리수라고 하자. 또 현 CD의 길이는 AB의 길이의 십의 자리 숫자와 일의 자리 숫자가 바뀐 두 자리수라 하자. OH의 길이가 유리수라고 할 때, AB의 길이를 구하여라.

연습문제 1.26★★★★★

39) 정삼각형 ABC의 외접원 위의 임의의 점 P에 대하여 $PA^2+PB^2+PC^2$의 값이 일정함을 증명하여라.

연습문제 1.27★★★★

40) 점 P는 삼각형 ABC의 내부의 한 점이다. 점 P에서 변 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 할 때,

$$\frac{AB^2+BC^2+CA^2}{4} \leq AF^2+BD^2+CE^2$$

이 성립함을 증명하여라.

연습문제 1.28★★★

41) 삼각형 ABC에서 $\angle B = 50^\circ$, $\angle C = 70^\circ$이다. $BP = QC$가 되도록 변 AB와 변 CA 위에 각각 점 P, Q를 잡자. 이 때, $\angle APQ$을 구하여라.

연습문제 1.29★★

42) 삼각형 ABC에서 BC의 중점을 M, $AB = 6$, $CA = 10$, $AM = 2\sqrt{13}$일 때, $\triangle ABC$의 넓이를 구하여라.

연습문제 1.30★★

43) 삼각형 ABC의 변 BC, CA, AB의 중점을 각각 D, E, F라 할 때,

$$4(AD^2 + BE^2 + CF^2) = 3(BC^2 + CA^2 + AB^2)$$

이 성립함을 보여라.

제 2 장
체바의 정리와 메네라우스의 정리, 변환등 각 결레점, 비조화비

제 1절 넓이 비에 대한 간단한 정리

– 이 절의 주요 내용

- 삼각형 넓이 비에 대한 정리, 반 아우벨의 정리, 제르곤노의 정리

정리 2.1 삼각형 ABC에서, 변 BC위에 임의의 한 점 D를 잡자. 그러면 $\dfrac{\triangle ABD}{\triangle ACD}=\dfrac{BD}{DC}$가 성립한다. 즉 높이가 일정한 삼각형의 넓이는 밑면의 길이에 비례한다. (그림 2.1 참고)

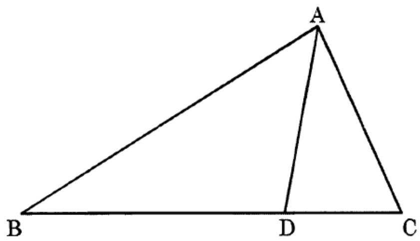


그림 2.1: 도움정리 2.1 관련그림

정리 2.2 (삼각형 넓이의 비에 대한 정리) 평행하지 않은 두 선분 AB와 PQ의 교점 또는 그 연장선의 교점을 M이라고 하면 $\dfrac{\triangle ABP}{\triangle ABQ}=\dfrac{PM}{QM}$이 성립한다. (그림 2.2 참고)

증명 : 도움정리 2.1로 부터

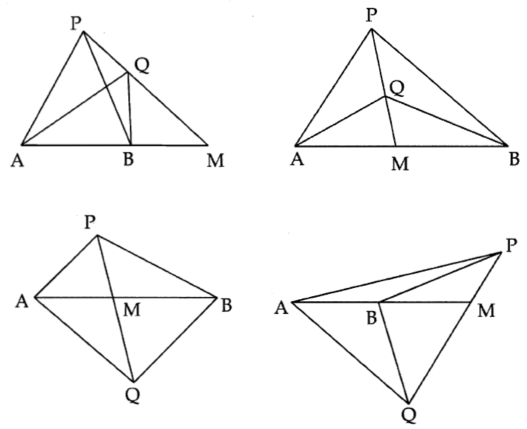


그림 2.2: 정리 2.2 관련그림

$\dfrac{\triangle ABP}{\triangle ABQ}=\dfrac{\triangle ABP}{\triangle AMP}\cdot\dfrac{\triangle AMP}{\triangle AMQ}\cdot\dfrac{\triangle AMQ}{\triangle ABQ}=\dfrac{AB}{AM}\cdot\dfrac{PM}{QM}\cdot\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{PM}{QM}$이다.

예제 2.3[44] 점 P가 삼각형 ABC의 한 내부의 한 점이다. 직선 AP, BP, CP가 각각 변 BC, CA, AB와 만나는 점을 D, E, F라 하면 $\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}=1$이다. (그림 2.3 참고)

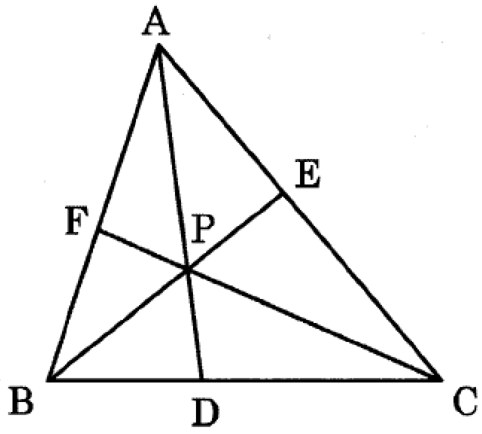


그림 2.3: 예제 2.3 관련 그림

예제 2. 4[45] 그림 2.4와 같이 볼록 사각형 $ABCD$가 있다. 변 DA와 CB, 변 AB와 DC, 변 AC와 KL, 변 DB와 KL의 연장선 교점들을 각각 K, L, G, F라 두면, $\frac{KF}{FL}=\frac{KG}{GL}$이 성립함을 증명하라.

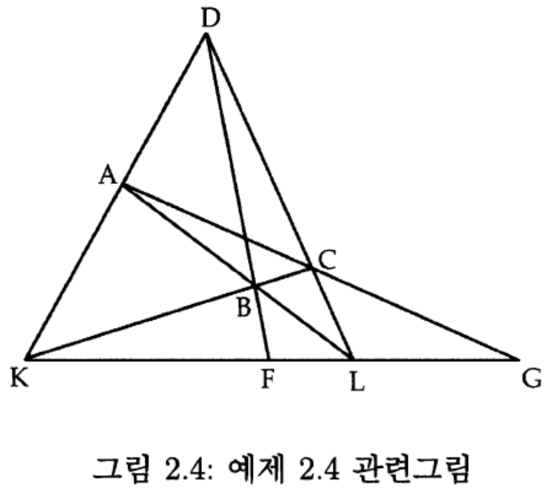
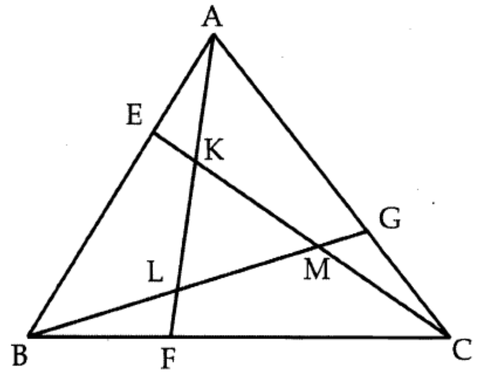


그림 2.4: 예제 2.4 관련그림

예제 2.5[46] (HKPSC, '1998) $\triangle ABC$와 세 변 AB, BC, CA 위에 각 점 E, F, G가 $AE : EB = BF : FC = CG : GA = 1 : 3$을 만족한다고 하자. 세 점 K, L, M을 각각 선분 AF와 CE, 선분 BG와 AF, 선분 CE와 BG의 교점이라고 하자. $\triangle ABC$의 넓이를 1이라고 할 때, $\triangle KLM$의 넓이를 구하여라.



정리 2.6 (반 아우벨의 정리) (Van Aubel'sS Theorem)
삼각형 ABC내의 한 점 O에서 만나는 세 직선 AO, BO, CO가 대변과 각각 D, E, F에서 교차하면

$$\frac{AO}{DO} = \frac{AF}{BF} + \frac{AE}{CE}$$

가 성립한다. (그림 2.6 참고)

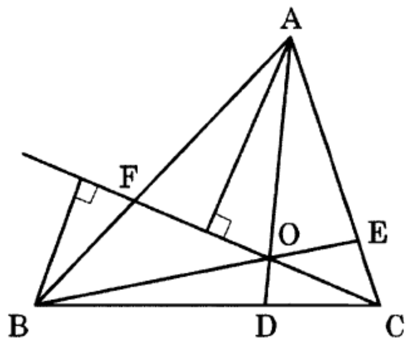


그림 2.6: 반 아우벨의 정리

증명 : 삼각형의 넓이의 비에 대한 정리 (정리 2.2)로부터

$$\frac{AF}{FB} = \frac{\triangle AOC}{\triangle BOC}, \quad \frac{AE}{EC} = \frac{\triangle ABO}{\triangle BOC}$$

이다. 위 두 식을 변변 더하면

$$\frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC} = \frac{\triangle AOC + \triangle ABO}{\triangle BOC} = \frac{\square ABOC}{\triangle BOC} = \frac{AO}{OD}$$

이다.

정리 2.7(게르곤느의 정리 (Gergonnn's Theorem)
$\triangle ABC$에서 내부의 한 점 O를 잡고, O와 꼭지점 A, B, C를 이은 직선이 대변과 만나는 점을 각각 P, Q, R이라 하면

$$\frac{OP}{AP}+\frac{OQ}{BQ}+\frac{OR}{CR}=1$$

이다. (그림 2.7 참고)

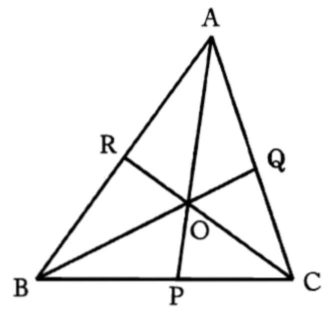


그림 2.7: 게르곤노의 정리

증명 : 삼각형의 넓이의 비에 대한 정리 (정리 2.2)로부터

$$\begin{aligned}\frac{OP}{AP}+\frac{OQ}{BQ}+\frac{OR}{CR}&=\frac{\triangle OBC}{\triangle ABC}+\frac{\triangle OCA}{\triangle ABC}+\frac{\triangle OAB}{\triangle ABC}\\&=\frac{\triangle OBC+\triangle OAB+\triangle OCA}{\triangle ABC}\\&=\frac{\triangle ABC}{\triangle ABC}=1\end{aligned}$$

이다.

- 이 2절의 주요 내용

- 체바의 정리. 메네라우스의 정리
- 데자르그의 정리, 파스칼의 정리, 파프스의 정리

정리 2.8(체바의 정리(Ceva's Theorem) 삼각형 ABC의 세 변 AB, CA, AB 위에 각각 주어진 점 D, E, F에 대하여, 세 선분 AD, BE, CF가 한 점에서 만날 필요충분조건은

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

이다. (그림 2.8 참고)

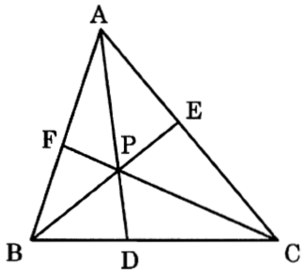


그림 2.8: 체바의 정리

증명 : 그림 2.8에서

$$\frac{BD}{DC}=\frac{\triangle ABD}{\triangle ADC}=\frac{\triangle PBD}{\triangle PDC}=\frac{\triangle ABD-\triangle PBD}{\triangle ADC-\triangle PDC}=\frac{\triangle ABP}{\triangle CAP}$$

이다. 마찬가지로,

$$\frac{CE}{EA}=\frac{\triangle BCP}{\triangle ABP},\ \frac{AF}{FB}=\frac{\triangle CAP}{\triangle BCP}$$

이다, 따라서, 위 세 식을 변변 곱하면,

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{\triangle CAP}{\triangle BCP}\cdot\frac{\triangle ABP}{\triangle CAP}\cdot\frac{\triangle BCP}{\triangle ABP}=1$$

이다.

역으로, AD와 BE의 교점을 P라 하고, 직선 CP가 변 AB와 만나는 점을 F'이라 하면 앞의 결과에 의해서

$$\frac{AF'}{F'B}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

이고, 주어진 조건

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

으로부터

$$\frac{AF'}{F'B}=\frac{AF}{FB}$$

이다. 따라서, $F=F'$이다. 즉, AD, BE, CF는 한 점에서 만난다.

정리 2.9 (체바의 정리(삼각함수)) 삼각형 ABC에서 세 변 BC, CA, AB 위에 각각 주어진 점 D, E, F에 대하여, 세 선분 AD, BE, CF가 한 점에서 만날 필요충분조건은

$$\frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle DAB}\cdot\frac{\sin\angle BCE}{\sin\angle EBC}\cdot\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle FCA}=1$$

이다. (그림 2.8 참고)

증명 : 삼각형 ABP에서 사인법칙 (정리 4.13)을 적용하면

$$\frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle DAB}=\frac{\sin\angle ABP}{\sin\angle PAB}=\frac{AP}{BP}$$

이다, 같은 방법으로 $\triangle BCP$와 $\triangle CAP$에 사인법칙을 적용하면,

$$\frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle EBC}=\frac{BP}{CP},\ \frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle FCA}=\frac{CO}{AP}$$

이다, 따라서,

$$\frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle DAB}\cdot\frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle EBC}\cdot\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle FCA}=\frac{AP}{BP}\cdot\frac{BP}{CP}\cdot\frac{CP}{AP}=1$$

이다.

(역의 증명) $\triangle ABO$와 $\triangle ACD$에 사인 법칙을 적용하면

$$\frac{AB}{BD}=\frac{\sin\angle ADB}{\sin\angle DAB},\ \frac{DC}{CA}=\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle ADC}$$

이다. $\angle ADC+\angle ADB=180^\circ$ 이므로, $\sin\angle ADB=\sin\angle ADC$이다. 따라서,

$$\frac{DC}{BD}\cdot\frac{AB}{CA}=\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle DAB}$$

이다. 같은 방법으로

$$\frac{AE}{EC}\cdot\frac{BC}{AB}=\frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle EBC},\ \frac{BF}{FA}\cdot\frac{CA}{BC}=\frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle FCA}$$

이다. 따라서,

$$\frac{BF}{FA}\cdot\frac{DC}{BD}\cdot\frac{EA}{CE}=\frac{DC}{BD}\cdot\frac{AB}{CA}\cdot\frac{AE}{BC}\cdot\frac{BC}{AB}\cdot\frac{BF}{FA}\cdot\frac{CA}{BC}$$

$$=\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle DAB}\cdot\frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle EBC}\cdot\frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle FCA}=1$$

이다. 즉,

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC},\frac{CE}{EA}=1$$

이다. 따라서, 체바의 정리 (2.8)로부터 AD, BE, CF는 한 점에서 만난다.

예제 2-10[47] 서로 합동인 아닌 두 삼각형 ABC, $A'B'C'$의 대응변이 서로 평행할 때, 세 선분 AA', BB', CC'은 한 점에서 만남을 증명하여라.

정리 2.11(메네라우스의 정리(Menelau's Theorem) 직선 l이 삼각형 ABC에서 세 변의 BC, CA, AB 또는 그 연장선과 각각 점 D, E, F에서 만나면

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

이 성립한다. 역으로 위의 식이 성립하면, 점 D, E, F는 한 직선 위에 있다.(그림 2.9 참고)

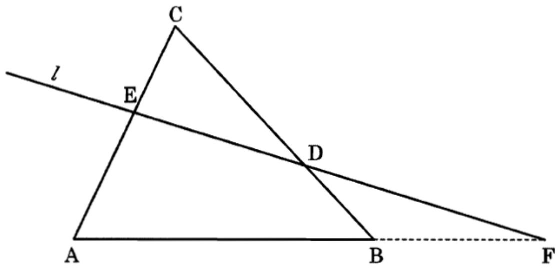


그림 2.9: 메네라우스의 정리

증명 : 점 X, Y를 직선 l 위의 임의의 점이라고 하자. 그러면

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{\triangle AXY}{\triangle BXY}\cdot\frac{\triangle BXY}{\triangle CXY}\cdot\frac{\triangle CXY}{\triangle AXY}=1$$

이다.

역으로, DE의 연장선이 선분 AB 또는 그 연장선과 만나는 점을 F'라 하면

$$\frac{AF'}{F'B}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

이다. 이를

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

과 비교하면

$$\frac{AF}{FB}=\frac{AF'}{F'B}$$

이다. 따라서, 두 점 F와 F'는 선분 AB를 같은 비로 내분하거나 외분한다. 즉, F과 F'일치한다. 따라서, 세 점 D, E, F는 한 직선 위에 있다.

그림 2.9에서. $\triangle AFE$, $\triangle BFD$, $\triangle CDE$에서 사인 법칙을 적용하면,

$$\frac{AF}{EA}=\frac{\sin\angle AEF}{\sin\angle EFA},\quad \frac{BD}{FB}=\frac{\sin\angle DFB}{\sin\angle BDF},\quad \frac{CE}{DC}=\frac{\sin\angle CDE}{\sin\angle DEC}$$

이다. 또한 $\sin\angle AEF=\sin\angle EFB$, $\sin\angle DFB=\sin\angle EFC$, $\sin\angle CDE=\sin\angle BDF$

이다. 따라서,

$$\begin{aligned}\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}&=\frac{AF}{EA}\cdot\frac{BD}{FB}\cdot\frac{CE}{DC}\\&=\frac{\sin\angle AEF}{\sin\angle EFA}\cdot\frac{\sin\angle DFB}{\sin\angle BDF}\cdot\frac{\sin\angle CDE}{\sin\angle DEC}=1\end{aligned}$$

이다. 다음 삼각함수에서 메네우스의 정리를 얻을 수 있다.

정리 2. 12 (메네라우스의 정리(삼각함수) 직선 l이 삼각형 ABC에서 세 변 BC, CA, AB 또는 그 연장선과 각각 점 D, E, F에서 만나면

$$\frac{\sin\angle AEF}{\sin\angle EFA}\cdot\frac{\sin\angle DFB}{\sin\angle BDF}\cdot\frac{\sin\angle CDE}{\sin\angle DEC}=1$$

이 성립한다. 역으로 위의 식이 성립하면, 점 D, E, F는 한 직선 위에 있다. (그림 2.9 참고)

예제 2.13[48] 삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 D, 변 AB의 3등분점 중에서 A에 가까운 점을 E라 하고, AD와 EC의 교점을 F라 할 때, AF와 FD의 비를 구하여라.

이제 체바의 정리와 메네라우스의 정리를 바탕으로 증명되는 삼각형의 성질들에 대하여 알아보자.

예제 2.14[49] 삼각형 세 중선은 한 점에서 만난다.

예제 2.15 [50]삼각형의 세 수선은 한 점에서 만난다.

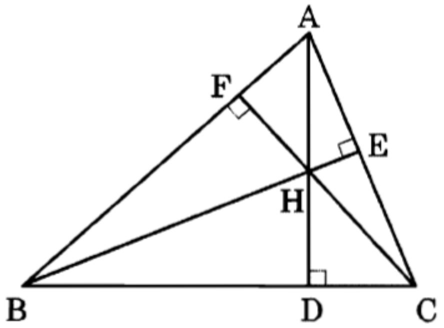


그림 2.11: 예제 2.15 관련그림

예제2. 16[51] 삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점에서 만난다.

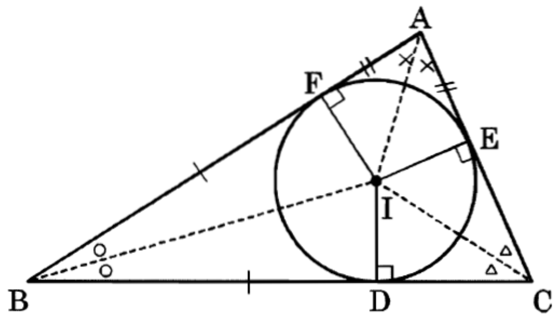


그림 2.12: 예제 2.16 관련그림

예제2. 17[52] 삼각형의 한 내각의 이등분과 다른 두 외각의 이등분선은 한 점에서 만난다.

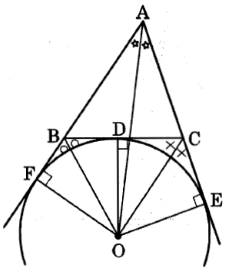


그림 2.13: 예제 2.17 관련그림

예제 2.18[53] (예제 2.4의 풀이 : 체바와 메네라우스의 정리를 이용) 그림 2.14과 같이 볼록 사각형 $ABCD$가 있다. 변 DA와 CB, 변 AB와 DC, 변 AC와 KL, 변 DB와 KL의 연장선의 교점들을 각각 K, L, G, F라 두면, $\dfrac{KF}{AK}\cdot\dfrac{KG}{GL}$이 성립함을 증명하여라.

정리 2.19 (데자르그의 정리 (Desargue's Theorem)) $\triangle ABC$와 $\triangle A'B'C'$에서 세 직선 AA', BB'< CC'가 한 점 O에서 만나고, 직선 BC와 $B'C'$의 교점을 L, 직선 AC와 $A'C'$의 교점을 M, 직선 AB와 $A'B'$의 교점을 N이라 하면, 점 N, L, M은 한 직선 위에 있다. (그림 2.15 참고)

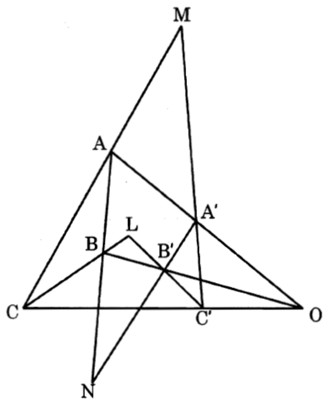


그림 2.15: 데자르그의 정리

증명 : 직선 LBC와 $\triangle OB'C'$에 메네라우스의 정리를 적용하면

$$\frac{B'L}{LC'}\cdot\frac{CC'}{CO}\cdot\frac{OB}{BB'}=1 \qquad (1)$$

이다. 직선 MAC와 $\triangle OC'A'$에 메네라우스의 정리를 적용하면

$$\frac{C'M}{MA'}\cdot\frac{A'A}{AO}\cdot\frac{OC}{CC'}=1 \qquad (2)$$

이다. 직선 NBA와 $\triangle OA'B$에 메네라우스의 정리를 적용하면

$$\frac{A'N}{NB'}\cdot\frac{B'B}{BO}\cdot\frac{OA}{AA'}=1 \qquad (3)$$

이다. 식 (1), (2), (3)을 변변 곱하면

$$\frac{B'L}{LC'}\cdot\frac{C'M}{MA'}\cdot\frac{A'N}{NB'}=1$$

이다. 따라서, 메네라우스의 정리의 역으로부터 점 L, M, N은 한 직선 위에 있다.

정리 2.20 (파스칼의 정리) 점 A, B, C, D, E, F를 원주 상에 있는 임의의 점이라 하자.
현 AB와 현 DE의 교점을 J, 현 BC와 현 EF의 교점을 L, 현 CD와 현 AF의 교점을 K라 하면, 점 J, K, L은 한 직선 위에 있다. (그림 2,16 참고)

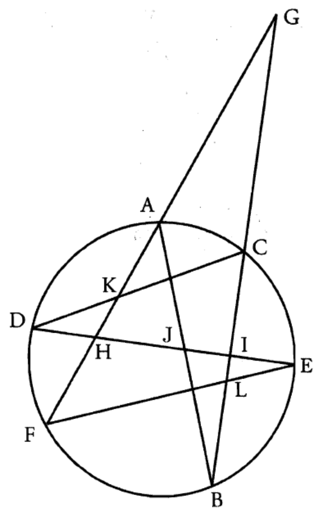


그림 2.16: 파스칼의 정리

증명 : 현 BC와 DE의 교점을 I라 하면, 직선 CKD와 $\triangle GHI$에 메네라우스의 정리를 적용하면

$$\frac{GK}{KH}\cdot\frac{HD}{DI}\cdot\frac{IC}{CG}=1$$

(1)
이다. 직선 AJB와 $\triangle GHI$에 메네라우스의 정리를 적용하면

$$\frac{GA}{AH}\cdot\frac{HI}{JI}\cdot\frac{IB}{BG}=1$$

(2)
이다 직선 FLE와 $\triangle GHI$에 메네라우스의 정리를 적용하면

$$\frac{GF}{FH}\cdot\frac{HE}{EI}\cdot\frac{IL}{LG}=1 \qquad (3)$$

이다. 방벽의 원리로부터

$$IB\cdot IC=DI\cdot EI,\ HD\cdot HE=FH\cdot AH,\ GA\cdot GF=CG\cdot BG \qquad (4)$$

이다. 식 (1), (2), (3을 변변 곱하고, 식 (4)을 이용하면

$$\frac{GK}{KH}\cdot\frac{HJ}{JI}\cdot\frac{IL}{LG}=1$$

이다. 따라서 메네라우스의 정리의 역에 의하여, 점 J, K, L은 한 직선 위에 있다.

정리 2. 21 (파프스의 정리) 평면에 A, E, C가 한 직선 위의 서로 다른 세 점이고, D, F, B가 다른 직선 위의 서로 다른 세 점이면, 선분 AB와 DE의 교점 P, 선분 BC와 FE의 교점 Q, 선분 CD와 AF의 교점 R은 한 직선 위에 있다. (그림 2.17 참고)

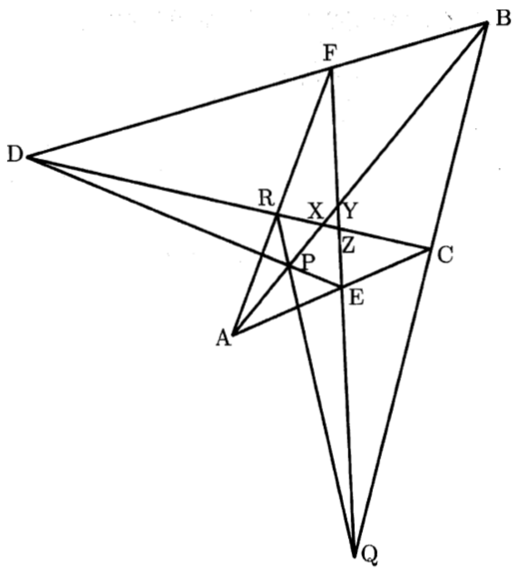


그림 2.17: 파프스의 정리

증명 : 직선 AB와 CD의 교점을 X, 직선 AB와 EF의 교점을 Y, 직선 CD와 EF의 교점을 Z라 하자. 그러면 직선 BCQ와 $\triangle XYZ$에 메네라우스의 정리를 적용하면

$$\frac{BX}{BY}\cdot\frac{QY}{QZ}\cdot\frac{CZ}{ZX}=1 \tag{1}$$

이다. 직선 EPD와 $\triangle XYZ$에 메네라우스의 정리를 적용하면

$$\frac{PX}{PY}\cdot\frac{EY}{EZ}\cdot\frac{DZ}{DZ}=1 \tag{2}$$

이다. 직선 ARF와 $\triangle XYZ$에 메네라우스의 정리를 적용하면

$$\frac{AX}{AY}\cdot\frac{FY}{FZ}\cdot\frac{RZ}{RX}=1 \tag{3}$$

이다. 직선 BFD와 $\triangle XYZ$에 메네라우스의 정리를 적용하면

$$\frac{BX}{BY}\cdot\frac{FY}{FZ}\cdot\frac{DZ}{DX}=1 \tag{4}$$

이다. 직선 AEC와 $\triangle XYZ$에 메네라우스의 정리를 적용하면

$$\frac{AX}{AY}\cdot\frac{EY}{EZ}\cdot\frac{CZ}{CX}=1 \tag{5}$$

이다. 식 (1), (2), (3), (4), (5)에서 $(1)\times(2)\times(3)\div\{(4)\times(5)\}$를 하면

$$\frac{PX}{PY}\cdot\frac{QY}{QZ}\cdot\frac{RZ}{RX}=1$$

이다. 따라서, 메네라수의 정리의 역에 의하여 점 P, QR은 한 직선 위에 있다.

제 3절 합동변환(평행이동, 대칭이동, 회전이동)

– 이 절의 주요 내용

- 합동변환 : 평행이동, 선대칭이동, 회전이동
- 피그나노 문제, 페르마의 점 문제, 에르도스 – 모델의 정리

평행이동, 대칭변환(대칭이동), 회전변환(회전이동)은 기하의 가장 기본적인 세 가지 변환이다. 이 세 가지 변환에 대하여 대응하는 두 도형의 모양과 크기는 변하지 않는다. 즉, 합동이다. 변환이론은 평면기하 문제를 푸는데 있어서 문제의 기하적인 본질을 파악하게 한다. 도형의 위치만 변환시키는 변환을 합동변환이라고 한다.

정의 2.22 평행이동이란 도형 F_1의 각 점을 동일한 방향을 따라 동일한 거리만큼 평행이동하여 도형 F_2를 얻는 것이다.

정리 2.23 (평행이동의 성질) 평행이동 전후의 도형은 다음과 같은 성질을 가진다.
(1) 대응하는 선분이 서로 평행이면, 그 길이는 같다.
(2) 대응하는 두 변이 각각 평행이며, 그 길이는 같다.

정리 2.24 (평행선의 판정법) 평면 상에 두 직선 l과 m은 점 C에 교차하고, A와 D는 직선 l위의 C가 아닌 두 점이고, B와 E는 직선 m 위의 C가 아닌 두 점이다. 이 때, 선분 AB와 DE가 평행하기 위한 필요충분조건은 $\frac{DA}{DC}=\frac{EB}{EC}$이다. (그림 2.18 참고)

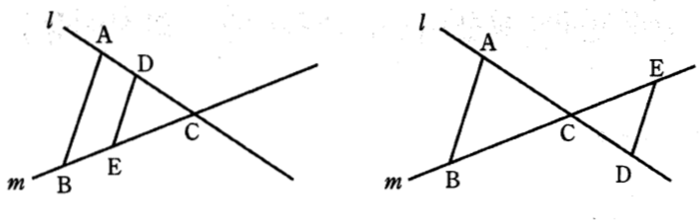


그림 2.18: 평행선의 판정법

예제 2.25[54] 삼각형 ABC에서 AB의 중점을 D AC의 중점을 E라 하자. $BE=CD$이면 삼각형 ABC는 이등변삼각형임을 보여라.

예제 2.26 [55] $\angle C$와 $\angle D$가 둔각인 볼록 사각형 $ABCD$에서, $BC=DA$이고, AB와 CD의 중점을 각각 M, N이라 하자. AD의 연장선과 MN의 연장선과 교점을 E, BC의 연장선과 MN의 연장선과 교점을 F라 할 때, $\angle AEM=\angle BFM$임을 증명하여라.

정의 2.27 대칭변환 (대칭이동)은 일정한 점 또는 도형을 대칭인 점 또는 도형으로 대응시키는 변환을 말한다. 선대칭 도형은 한 도형이 직선 l에 의하여 두 부분으로 나누어지고, 두 부분이 직선 l에 대하여 대칭일 때를 말한다. (그림 2.19 참고)

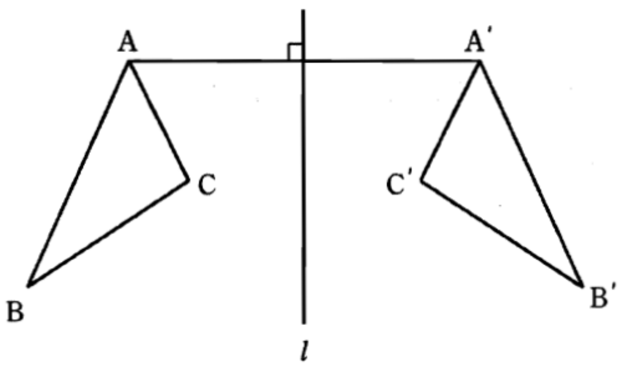


그림 2.19: 선대칭도형

정리 2.28 (대칭변환의 성질) 대칭변환은 다음과 같은 성질을 가진다.
(1) 두 대응점을 이은 선분은 대칭축에 의하여 수직 이등분한다.

(2) 대응하는 두 선분의 연장이 만나는 점은 대칭축 위에 있다.

(3) 점대칭이동을 짝수 번 합성하면 평행이동이다.

(4) 점대칭이동을 홀수 번 합성하면 다시 점대칭이동이다.

정리 2.29 (대칭점의 판정법) 다음 두 가지 성질을 만족하면, 두 도형은 대칭이다.
(1) 두 대응점을 이은 선분은 대칭축에 의하여 수직 이등분된다.

(2) 대응하는 두 선분의 연장이 만나는 점은 대칭축 위에 있다.

정리2.30[56] (파그나노의 문제 (Fagnano 문제) $\triangle ABC$의 각 변 위에 꼭지점이 있는 $\triangle PQR$의 둘레의 길이가 최소가 되는 경우는 언제인가?

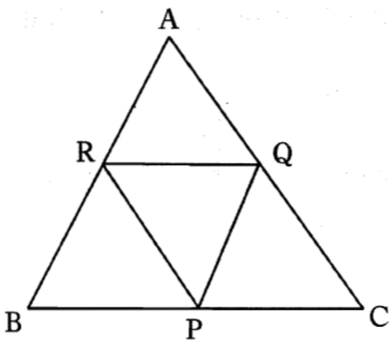


그림 2.20: 파그나노의 문제

예제 2.31[57] $AB > AC$인 $\triangle ABC$에서 $\angle A$의 이등분서이 변 BC와 만나는 점을 D라 하자. 선분 AD 위의 임의의 점 P에 대하여 $AB - AC > PB - PC$임을 보여라.

정의 2.32 회전변환이란 도형 F_1을 정점(회전중심)을 중심으로 하여 일정한 방향으로 일정한 각도(회전각)만큼 회전시켜 도형 F_2를 얻는 것이다.

정리 2.33 (회전변환의 성질) 회전변환 전후의 도형은 다음과 같은 성질을 갖는다.
(1) 대응하는 선분들의 길이가 같고, 대응하는 각들의 크기가 같다.
(2) 대응하는 점들의 위치배열 순서가 같다.
(3) 대응하는 임의의 두 선분 사이에 끼인각 회전각이다.

예제 2.34[58] 내각이 모두 120° 보다 작은 $\triangle ABC$의 세 변 AB, BC, CA를 밑변으로 하여 $\triangle ABC$밖에 $\angle ADB = \angle BEC = \angle CFA = 120^\circ$ 인 이등변삼각형 ABD, $BCECAF$ㄹ 그렸을 때, $\triangle DEF$ 정삼각형임을 보여라.

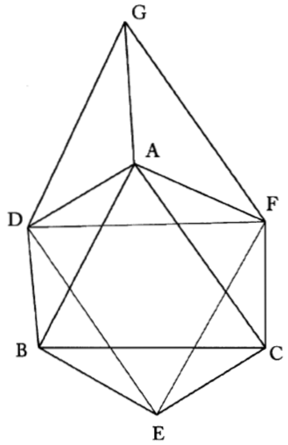


그림 2.23: 예제 2.34 관련그림

예제 2.35[59] 정사각형 $ABCD$의 내부에 점 E가 있다. E로부터 세 점 A, B, C까지의 거리의 합의 최솟값이 $\sqrt{2}+\sqrt{6}$이다. 이 때, 정사각형 $ABCD$의 한 변의 길이를 구하여라.

정리2.36 (페르마 점 문제) 삼각형 ABC에서 세 내각이 모두 120°보다 작을 때, $AP+BP+CP$가 최소가 되게 하는 점 P이 삼각형 ABC 내부에 유일하게 존재한다. 이 점을 페르마 점 (Fermat Point)라 한다. 또한, $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$이 된다.

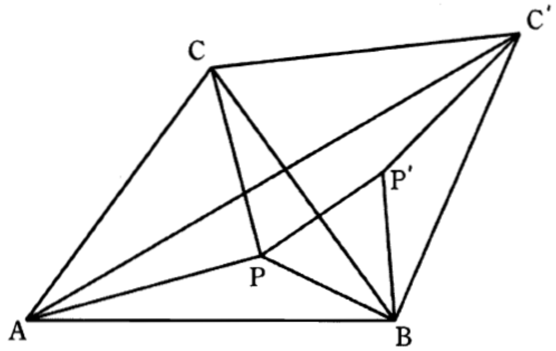


그림 2.25: 정리 2.36 관련그림

증명 : (그림 2.25 참고) P를 삼각형 ABC의 내부의 임의의 점이라고 하자. $\triangle CPB$를 점 B를 중심으로 시계방향으로60° 회전시킨 도형을 $\triangle C'P'B$라고 하자. 그러면, $CP = C'P'$이다. $\triangle PP'B$와 $\triangle CC'B$는 정삼각형이다. 그러므로 $BP = PP'$이다. 따라서,

$$AP+BP+CP = AP+PP'+P'C' \geq AC'$$

이다. 따라서, $AP+BP+CP$의 최솟값은 AC'이다. 즉, P와 P'이 모두 AC' 위의 점이다.

따라서, $\angle CPB = \angle C'P'B = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$이고, APC'이 직선일 때, $AP+BP+CP$가 최솟값을 갖는다.

정리 2. 37 (에르도스 -모델의 정리 (Erdös-Mordell Theroem) 삼각형 ABC의 변 또는 내부의 점 P에 대하여, P에서 변 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자.
그러면

$$PA+PB+PC \geqq 2(PD+PE+PF)$$

가 성립하고, 등호는 $\triangle ABC$가 정삼각형이고, P가 정삼각형 ABC의 중심인 경우에 한하여 성립한다. 여기서, 중심은 무게중심, 내심을 의미한다. 정삼각형에서 무게중심과 내심은 일치한다.

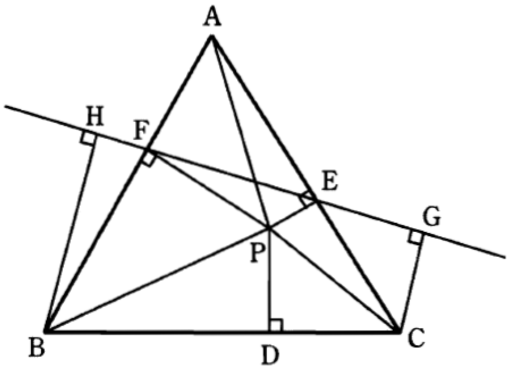


그림 2.26: 에르도스-모델의 정리 관련그림

풀이 : (그림 2.26 참고) 점 B, C에 직선 EF에 내린 수선의 발을 각각 H, G라 하자.
그러면

$$BC \geqq HG = HF + FE + EG \tag{1}$$

이다. $\angle AFP = \angle AEP = 90^\circ$ 이므로 제 점 A, F, P, E는 한 원에 위에 있다. 그러므로, 호 AE에 대한 원주각 $\angle AFE = \angle APE$이다. 또, $\angle BFH = \angle AFE$ 이므로, $\angle BFH = \angle AFE = \angle APE$이다. 따라서, $\triangle BFH$와 $\triangle APE$는 닮음(AA닮음)이다. 그러므로 $\dfrac{HF}{BF} = \dfrac{PE}{PA}$이다.
즉,

$$HF = \frac{PE}{PA} \cdot BF \tag{2}$$

이다. 같은 방법으로 $\triangle CEG$와 $\triangle APF$는 닮음(AA닮음)이다, 그러므로, $\dfrac{EG}{CE} = \dfrac{PF}{PA}$이다.
즉,

$$EG = \frac{PF}{PA} \cdot CE \tag{3}$$

이다. $\square AFPE$에 톨레미의 정리(정리 3.26 참고)를 적용하면

$$PA \cdot EF = AF \cdot PE + AE \cdot PF$$

이다. 즉,

$$EF = \frac{AF \cdot PE + AE \cdot PF}{PA} \tag{4}$$

이다. 식 (1)에 (2), (3), (4)를 대입하면

$$BC \geq \frac{PE}{PA} \cdot BF + \frac{AF \cdot PE + AE \cdot PF}{PA} + \frac{PF}{PA} \cdot CE$$

이다. 양변에 $\frac{PA}{BC}$를 곱하고, 정리하면,

$$PA \geq \frac{AB}{BC} \cdot PE + \frac{AC}{BC} \cdot PF \qquad (5)$$

이다. 같은 방법으로

$$PB \geq \frac{BC}{CA} \cdot PF + \frac{BA}{CA} \cdot PD, \quad PC \geq \frac{CA}{AB} \cdot PD + \frac{CB}{AB} \cdot PE \qquad (6)$$

이다. 따라서, 식 (5), (6)의 세 부등식을 변변 더하면

$$PA + PB + PC \geq \left(\frac{BA}{CA} + \frac{CA}{AB}\right) \cdot PD + \left(\frac{AB}{BC} + \frac{CB}{AB}\right) \cdot PE + \left(\frac{AC}{BC} + \frac{BC}{CA}\right) \cdot PF$$

이다. 산술 −기하평균 부등식에 의하여

$$PA + PC + PC \geq 2PD + 2PE + 2PF = 2(PD + PE + PF)$$

이다. 등호는 $AB = BC = CA$, P가 정삼각형 ABC의 중심일 때, 성립한다.

예제 2.38[60] (MathREF J34, '2006) $\triangle ABC$에서 내심을 I라 하자, 그러면 IA, IB, IC 중 적어도 하는 $\triangle ABC$의 내접원의 지름보다 크거나 같음을 보여라.

제 4절 닮음 변환 (Homothety), 소용돌이 변환

– 이 절의 주요 내용

- 닮음 변환 : 확대, 축소
- 소용돌이 변환

정의 2.39 닮음 변환(Homothety 또는 Dilation)은 평행인 평면 π, π'와 점 O가 주어져 있을 때, π 위의 점 P에 직선 OP와 π'와의 교점을 P'를 대응시키면, 이에 의하여 π 위의 도형이 π' 위의 도형으로 옮기는 것을 말한다.

보기 2.40 π 위의 $\triangle ABC$는 π' 위의 $\triangle A'B'C'$로 옮겨지는 데. 이것은 $\triangle ABC$를 확대 (또는 축소)한 것이므로 서로 닮은 삼각형이다. 따라서, 닮은 변환은 확대 또는 축소와 이동을 겸한 변환으로 생각할 수 있다.

정리 2.41 평면 위에서 점 $(x,\ y)$를 점 $(x',\ y')$로 옮기는 변환 $x'=k(x\cos\theta-y\sin\theta)+p$, $y'=k(x\sin\theta+y\cos\theta)+q$는 점 $(x,\ y)$를 원점의 둘레로 θ만큼 회전시키고, 또 평면 π 위의 원점에서의 본래의 거리를 k배한 확대 또는 축소 이동시키고, 다시 x축에 평행하게, p, y축에 평행하게 q만큼 평행이동시킨 점으로 옮기는 변환을 보인다. 즉,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

이다. 이 변환을 평면 위의 닮음변환이라고 한다. 또, O를 닮음의 중심, k를 닮음비이라고 한다. 특히, 중심 O에 대하여 도형의 위치가 서로 반대방향일 때, k앞에 음의 부호 $(-)$를 써서 나타낸다.

정리 2. 42 (닮음변환의 성질) 닮음의 중심 O이고, 닮음비가 k인 닮음 변환에서 점 A는 점 A'으로, 점 B는 점 B'으로 대응될 때, 다음이 성립한다. (그림 2.27 참고)

(1) $\dfrac{A'B'}{AB}=k$이다.

(2) $AB \parallel A'B'$이다.

(3) $|k|>1$이면, 확대, $|k|<1$이면 축소이다.

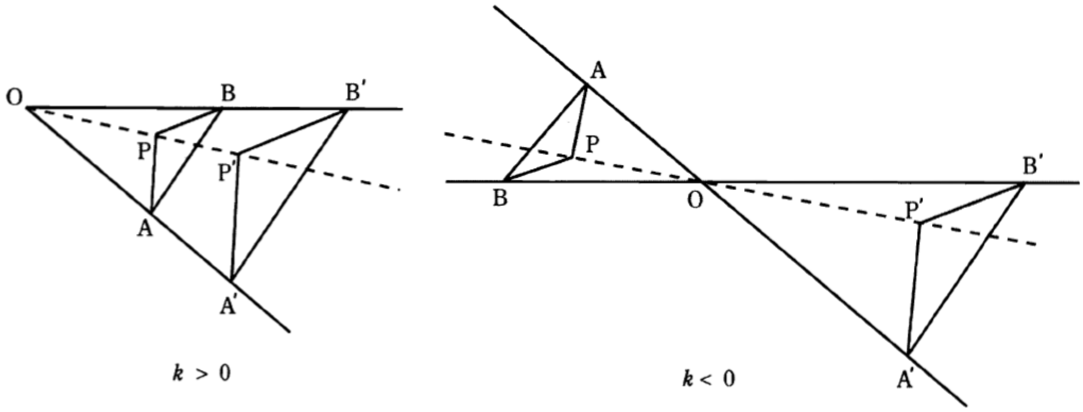


그림 2.27: 닮음변환의 성질

예제 2.43[61] $\triangle ABC$에서 세 변 BC, CA, AB의 중점을 각각 A', B', C'라 하자. 그러면, $\triangle ABC$와 $\triangle A'B'C'$의 무게중심 G가 닮음의 중심이고, 닮음비는 $-\dfrac{1}{2}$이다.

정의 2.44 한 직선 위에 있지 않은 세 점 O, A, A'에 대하여, 소용돌이변환(나선변환) (Spiral transformation)은 점 A를 A'로 회전변환과 닮음변환 (확대 또는 축소)을 합성하여 옮기는 것이다. 즉, 점 A를 점 O에 중심으로 회전 변환하여 확대 또는 축소를 통하여 A'로 옮긴다. 이 때, O를 소용돌이 변환의 중심 (또는 닮음의 중심), $\angle A'OA$를 소용돌이변환의 각, $\dfrac{OA'}{OA}$를 소용돌이변환의 닮음비라고 한다.(그림 2.28 참고)

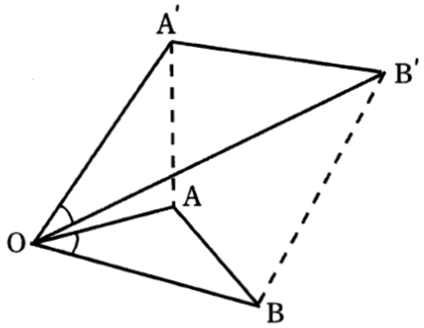


그림 2.28: 소용돌이변환

정리 2.45 (소용돌이변환의 성질) 소용돌이의 변환의 중심 O이고, 닮음비가 k인 소용돌이변환에서 점 A는 점A'으로, 점 B는 점 B'으로 대응될 때, 다음이 성립한다. (그림 2.28 참고)

(1) $AB : A'B' = OA : OA'$이다.

(2) OB와 OB'의 사이각은 $\angle A'OA$와 같다.

예제 2.46[62] 볼록 사각형 $ABCD$에서

$$AB\cdot CD + BC\cdot DA \geq AC\cdot BD$$

가 성립함을 증명하여라.

제 5절 등각켤레점(Isogonal Conjugate Point)

– 이 절의 주요 내용

- 등각, 등각켤레점
- 수선발원 정리(Pedal Circle Theorem)

정의2.47 $\angle UPV$와 점 P를 지나는 직선 l이 있다. l'이 $\angle UPV$의 내각의 이등분선에 대하여 l과 대칭일 때, l' 을 $\angle UPV$에 대한 l의 등각(isogonal)이라고 한다. (그림 2.29참고)

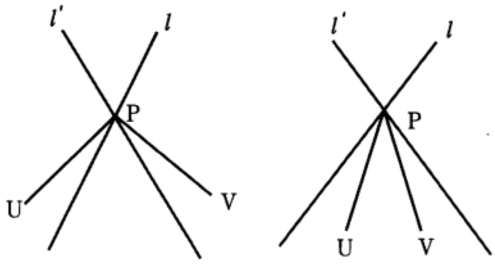


그림 2.29: 등각

정리2.48 직선 l위의 점 T에서 두 직선 UP, VP에 내린 수선의 발을 각각 X, Y라 할 때, TP의 등각 l'은 XY에 수직이다. (그림2.30참고)

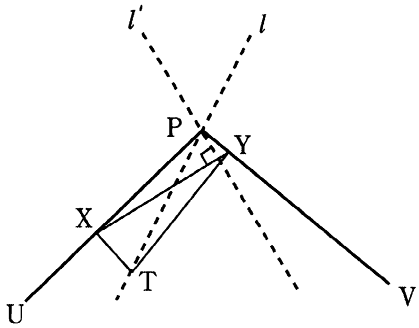


그림 2.30: 정리 2.48 관련그림

정리2.49(등각켤레 정리(Isogonal Conjugate Theorem))삼각형ABC에서 점P는 꼭지점A, B, C로부터 서로 다른 거리에 있는 점일 때, ∠CAB, ∠ABC, ∠BCA에 대한 AP, BP, CP의 등각의 한 점 P′에서 만난다. 이 점 P′을 △ABC에 대한 점 P의 등각켤레점(Isogonal Conjugate Point)라고 한다.
(그림 2.31 참고)

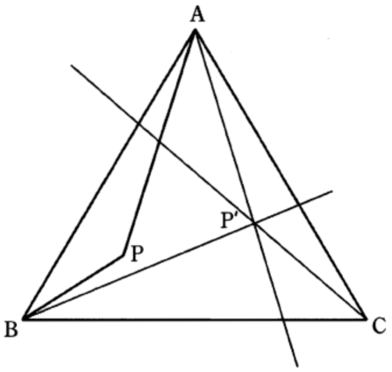


그림 2.31: 등각켤레점

정리2.50 △ABC에서 한 점 P에 대하여 BC, CA, AB에 대한 대칭점을 각각 X, Y, Z라 하면, 점 P의 등각켤레점 P′은 △XYZ의 외심이다.

정리2.51(수선발원 정리(Pedal Circle Theorem)) 삼각형 ABC에서 점P와 점P의 등각켤레점 P′에 대하여, PP′의 중점을 M이라 하자. 점P에서 세 변 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각X, Y, Z라 하고, 점P′에서 세 변 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 U, V, W라 할 때, 여섯 점X, Y, Z, U, V, W는 M을 중심으로 하는 한 원에 있다. 더욱이,

$$PX \cdot P'U = PY \cdot P'V = PZ \cdot P'W$$

이다. (그림 2.32 참고)

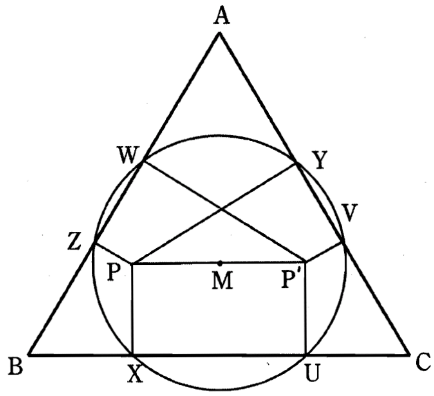


그림 2.32: 수선발원 정리

증명 : 네 점 A, Z, P, Y는 한 원 위에 있고, 또, 네 점 A, W, P′, V오 한 원위에 있다. 그러므로 $\angle AYZ = \angle APZ = \angle AP'V = \angle AWV$이므로, $= \angle ZWV = \angle ZYV$이다. 따라서 네 점 Y, Z, V, W는 한 원 위에 있다. 같은 방법으로 네 점 X, Z, W, U는 한 원 위에 있고, 또 네 점X, Y, U, V도 한 원 위에 있다. 주어진 조건으로부터 M은 선분 XU,YV,ZW의 수직이등분선의 교점이다. 따라서, M은 □YZWV의 두 변의 수직이등분선의 교점이므로□YZWV의 외접원의 중심이다. 따라서, $MY = MZ = MW = MV$이다.
마찬가지로 M은□XUYV의 두 변의 수직이등분선의 교점이므로□XUYV의 외접원의 중심이다. 따라서 $MX = MU = MY = MV$이다. 그러므로

$$MX = MY = MZ = MU = MV = MW$$

이다. 즉 여섯 점 X, Y, Z, U, V, W는 한 원 위의 점이다. 그 중심은 O이다. $PX \cdot P'U = PY \cdot P'V = PZ \cdot P'W$의 증명은 독자에게 맡긴다.

정리2.52 △ABC에 대한 P의 등각켤레점을 P′라 하자. 두 점 P, P′이 △ABC의 내부에 있으면,

$$\frac{AP \cdot AP'}{AB \cdot AC} + \frac{BP \cdot BP'}{BC \cdot BA} + \frac{CP \cdot CP'}{CA \cdot CB} = 1$$

이다.

예제[63]2.53 원O에 외접하는 사각형 ABCD에서, △ABC와 △ADC의 내심을 각각 E, F라 하자. 또, △AEF의 외심을 K라 하자. 그러면 A, K, O가 한 직선 위에 있음을 증명하여라.

제 6절 비조화비

– 이 절의 주요 내용

- 비조화비, 조화점열, 사영적 대응, 배경적 대응

정의2.54한 직선 위의 네 점 A, B, C, D에 대하여

$$(AC, BD) = \frac{AB \cdot CD}{BC \cdot DA}$$

을 A, B, C, D의 비조화비라고 한다. 단, 이들은 모두 1차원 벡터이다. 즉, $AB = -BA$이다.

정리2.55 (비조화비의 성질)한 직선 위의 네 점 A, B, C, D에 대하여 다음이 성립한다.

(1) 비조화비는 점들의 두 쌍의 위치가 변하여도 불변이다. 즉, $(AC, BC) = (BD, AC)$이다.

(2)만일 A와 C 또는 B와 D가 각자 바뀌면, 비조화비의 값은 원래의 비조화비의 역수이다.
즉 $(AC, BD) \cdot (CA, BD) = (AC, BD) \cdot (AC, DB) = 1$이다.

(3)$(CA, DB) = (AC, BD)$이다.

(4)$(AB, CD) = (DC, BA) = 1 - (AC, BD)$이다.

(5)$(AC, BD) = 1$일 필요충분조건은 A와 C가 일치하거나 B와 D가 일치한다.

정의2.56 한 직선 위의 네 점 A, B, C, D에 대하여 $(AC, BD)=-1$일 때, 네 점 A, B, C, D를 조화점열이라고 한다.

정리2.57 한 직선 위의 네 점 A, B, C, D가 조화점열이면 다음이 성립한다.

(1) $\frac{1}{AC}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}\right)$이다.

(2) $OC^2=OB\cdot OD$이다. 단, O는 AC의 중점이다.

참고로, 위 두 식은 A, B, C, D가 조화점열임을 증명할 때 이용되기도 한다.

증명:

(1) $(AC, BD)=\frac{AB\cdot CD}{BC\cdot DA}=-1$이므로 $AB\cdot(AD+CA)=(BA+AC)\cdot AD$이다.
정리하면 $2AB\cdot AD=AB\cdot AC+AC\cdot AD$이다. 양변을 $2AB\cdot AC\cdot AD$로 나누면

$$\frac{1}{AC}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}\right)$$이다.

(2) (1)에서 $AB=AO+OB=OC+OB$, $AD=AO+OD=OC+OD$, $AC=2OC$를 대입하면
$\frac{1}{OC}=\frac{1}{OB+OC}+\frac{1}{OD+OC}$이다. 이를 정리하면 $OC^2=OB\cdot OD$이다.

정의2.58 두 점열A, B, C, D과 A′, B′, C′, D′사이에 일대일 대응이 성립하고, 임의의 네 점의 비조화비 (AC, BD)가 대응되는 점들의 비조화비(A′C′, B′D′)가 같은 경우를 사영적 대응이라 하고, 기호로는 $(ABCD)\barwedge(A'B'C'D')$로 표시한다. 사영적 대응을 하는 두 점열에서 대응되는 점들끼리 연결하는 선들이 한 점 V에서 만난다면, 배경적 대응을 하고 있다고 말하고, 기호로는 $(ABCD)\doublebarwedge(A'B'C'D')$로 표시한다. 또, 점 V를 배경중심이라고 부른다.

예제[64]2.59 볼록사격형 ABCD에서 AD, CB의 교점을 F, AB와 CD의 교점을 E라 하자.
(E와 A는 직선 BC를 기준으로 같은 평면에 있고, F와 C는 직선 AB를 기준으로 같은 평면에 있다)
사각형ABCD의 두 대각선의 교점을 O라 하고, 직선 EO가 AD와 CB와 만나는 점을 각각 P, Q라 한다면, A, P, D, F와 B, Q, C, F는 각각 조화점열임을 보여라.

정리2.60 만일 (ABCD)$\fallingdotseq$(A′B′C′D′)이면, (ABCD)$\barwedge$(A′B′C′D′)이다.

증명: V를 배경중심으로 가정하자. 또, VA $= a$, VB$= b$, VC$= c$, VD$= d$라고 두면, 그러면,
VA′$= ak$, VB′$= bk$, VC′$= ck$, VD′$= dk$를 만족하는 상수 k가 존재한다. 따라서
(AC, BD) $=$ (ac, bd) $=$ (A′C′, B′D′)이다. 즉, (ABCD)$\barwedge$(A′B′C′D′)이다.

예제[65]2.61사다리꼴이 아닌 볼록사각형 ABCD가 원에 내접한다. AD와 BC의 교점을Q,
Q에서□ABCD의 외접원에 그은 접선의 두 접점을 E, F라 하자. AB와 CD의 교점을 P라
할 때, E, F, P는 한 직선 위에 있음을 보여라.

제 7절 연습문제

연습문제66) 2.1★★★

점A, C, E가 한 직선 위에 있고, B, D, F가 다른 직선 위에 잇다. 두 직선 AB, CD가 각각 DE, FA에 평행하다고 할 때, EF와 BC는 평행함을 보여라.

연습문제67) 2.2★★

$\angle B > 90^\circ$ 인 평행사변형 ABCD의 대각선의 교점을 점 O, O에서 변 BC에 수선을 긋고, 변 BC와의 교점을 E, 변 AB의 연장선과의 교점을 점 F라 할 때,

$$\mathrm{BE}(\mathrm{AB}+2\mathrm{BF})=\mathrm{BC}\cdot\mathrm{BF}$$

가 성립함을 증명하여라.

연습문제68) 2.3★★

△ABC의 내부의 점 O에서 O를 지나고 변 BC에 평행한 직선이 변 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E라 하고 O를 지나고 변 AC에 평행한 직선이 변 AB, BC와 만나는 점을 각각 F, G라 하고, 또 O를 지나고 변 AB에 평행한 직선이 변 BC, AC와 만나는 점을 각각 H, I라고 할 때, $\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AB}}+\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BC}}+\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CA}}$의 값을 구하여라.

연습문제[69] 2.4★

$\triangle ABC$에서 두 변 AB, AC위에 각각 $AQ : QB = 2:1$, $AR : RC = 1:2$인 점 Q, R를 잡자. QR의 연장선이 BC의 연장선과 만나는 점을 P라고 할 때, $PB : PC$를 구하여라.

연습문제[70] 2.5★

삼각형ABC에서, 변 BC, CA, AB위에 각각 점 P, Q, R를

$$AR : RB = 2:3, \quad AQ : QC = 4:3$$

을 만족하도록 잡으면, AP, BQ, CR이 한 점에서 만난다고 한다. 이 때, $BP : PC$를 구하여라.

연습문제[71] 2.6★

삼각형ABC에서, 변AB, CA 위에 각각 점 D와 E를

$$AD : DB = 7:5, \quad AE : EC = 3:4$$

를 만족하도록 잡자, 또, BE와 CD의 교점을 F라 할 때, $CF : FD$를 구하여라.

연습문제[72] 2.7★★
$\angle A=90^\circ$ 인 직각이등변삼각형 ABC에서, 점 D는 변 AB의 중점이고, 점 A에서 CD위에 내린 수선의 발을 F, AF의 연장선과 BC와의 교점을 E라고 할 때, DF : FC와 BE : EC를 구하여라.

연습문제[73] 2.8★★★
삼각형ABC에서 BC의 중점을 D, AC 위에 $\mathrm{CE}=2\mathrm{AE}$인 점 E를 잡고, AD와 BE의 교점을 F라고 하자. 이 때, $\frac{\mathrm{FD}}{\mathrm{AF}}+\frac{\mathrm{FE}}{\mathrm{BF}}$를 구하여라.

연습문제[74] 2.9★★★
삼각형ABC에서, 두 중선의 길이가 12, 18일 때, 이 삼각형 ABC의 넓이의 최대값을 구하여라.

연습문제[75] 2.10★★★
$\triangle$ABC의 변 AB, AC위에 각가 두 점 D, E를 잡고, 선분 BE와 선분CD의 교점을 P라 하자. $\triangle$ACE, $\triangle$BPD, $\triangle$CEP의 넓이가 각각 5, 8, 3일 때, $\triangle$ABC의 넓이를 구하여라.

연습문제[76] 2.11★★★
삼각형ABC에서, $\mathrm{AX}:\mathrm{XB}=3:4$, $\mathrm{BY}:\mathrm{YC}=20:21$, $\mathrm{CZ}:\mathrm{ZA}=3:4$를 만족하도록 점 X, Y, Z를 각각 변 AB, BC, CA위에 잡자. 삼각형 ABC의 넓이가 2009일 때, 삼각형 XYZ의 넓이를 구하여라.

연습문제[77] 2.12★★★
$\triangle$ABC에서 변BC, CA, AB의 중점을 각각 P, Q, R이라고 하자. 또, AP와 QR이 만나는 점을 M, CM의 연장선과 AB와의 교점을 N이라고 할 때, $\dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AB}}$를 구하여라.

연습문제[78] 2.13★★★★

정육각형ABCDEF의 내부의 점 M, N이 대각선 AC와 CE위에 있으며, $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{CN}}{\mathrm{CE}}=r$을 만족한다. 점B, M, N이 한 직선 위에 있을 때, r의 값을 구하여라.

연습문제[79] 2.14★★★

△ABC에 ∠A의 외각의 이등분선과 변 BC의 연장선과의 교점을 P, ∠B의 이등분선과 변 CA과의 교점을 Q, ∠C의 이등분선과 변AB와의 교점을 R이라 하자. 세 점 P, Q, R은 한 직선 위에 있음을 증명하여라.

연습문제[80] 2.15★★★

△ABC의 외접원에서, 점 A의 접선과 BC의 연장선과의 교점을 D, 점B의 접선과 CA의 연장선과의 교점을 E, 점 C의 접선과 AB의 연장선과의 교점을 F라 할 때, 세 점 D, E, F가 안 직선 위에 있음을 보여라.

연습문제[81] 2.16★★★★

$\angle C=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 점 C에서 AB에 내린 수선의 발을 K, $\triangle ACK$에서 $\angle ACK$의 이등분선과 AK의 교점을 E라고 하자. D가 CA의 중점, F가 DE와 CK의 교점일 때, , $BF \parallel CE$임을 보여라.

연습문제[82] 2.17★★★

$\triangle ABC$에서 AC위에 점 D를 $AD:DC=2:1$되게 잡고, 변 AB위에 점 E, 변BC 위에 점 F를
$BE:BF=2:1$되게 잡자. 선분 BD와 선분 EF의 RYWJAC을 G라 할 때, $EG:GF$를 삼각형의
세 변의 길이를 이용해 나타내어라.

연습문제[83] 2.18★★★★

$AB=AC$인 이등변삼각형 ABC에서 $\triangle ABC$의 외접원에 내접하는 한 원이 변 AB, AC에 각각 WJAS P,Q에 접한다고 할 때, PQ의 중점이 삼각형 ABC의 내심임을 보여라.

연습문제[84] 2.19★★
정삼각형 ABC의 내부에 PA＝PB를 만족하는 점P가 있다. ∠PBF＝∠PBC이고, BF＝AB인 점F를 잡을 때, ∠BFP를 구하여라.

연습문제[85] 2.20★★★
삼각형ABC에서 AB의 중점을 M, CM위에 CP＝PQ＝QM이 되도록 점 P, Q를 잡자. BP의 연장선과 AC와의 교점을 X, BQ의 연장선과 AC와의 교점을 Y라 하자. 점Y가 AC의 중점이라고 할 때, $\frac{CX+AY}{XY}$를 구하여라.

연습문제[86] 2.21★★★
△ABC에서 A에서 BC에 내린 수선의 발을 D라 하고, 선분 AD위의 P가 있다. BP의 연장선과 AC와의 교점을 E, CP의 연장선과 AB와의 교점을 F라 할 때, AD가 ∠EDF의 이등분선임을 증명하여라.

제 3 장 원의 성질

제 1절 원주각, 원과 직선

– 이 절의 주요 내용

- 원주각과 중심각 사이의 관계, 원과 직선 사이의 관계
- 오일러의 삼각형 정리, 페형 정리, 몰리의 정리

정리 3.1 (중심각과 호, 현의 비교) 한 원에서 중심각과 호, 현 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

(1) 한 원 또는 합동인 두 원에서 같은 크기의 중심각에 대한 호의 길이와 현의 길이는 각각 같다. 그 역도 성립한다.
(2) 부채꼴의 중심각의 크기와 호의 길이는 비례한다.
(3) 부채꼴의 중심각의 크기와 현의 길이는 비례하지 않는다.

증명 : 증명은 독자에게 맡긴다.□

정리 3.2 (현의 수직이등분선의 성질)원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 수직이등분 한다. 또, 현의 수직이등분선은 이 원의 중심을 지난다.(그림 3.1 참고)

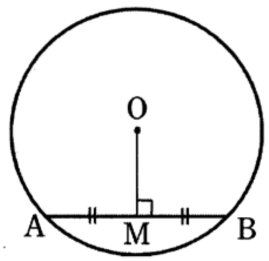


그림 3.1: 현의 수직이등분선의 성질

증명 : 원의 중심 O에서 현 AB에 내린 수선의 발을 M이라 하자. 그러면, $\triangle OAM$과 $\triangle OBM$에서 $OA=OB$(반지름), OM은 공통, $\angle OMA=\angle OMB=90^\circ$ 이므로 $\triangle OAM \equiv OBM$(RHS합동)이다. 따라서, $AM=BM$이다.
(역의 증명) 현 AB의 중점을 M이라 하자. 그러면 $\triangle OAM$과 $\triangle OBM$에서 $OA=OB$(반지름), OM은 공통, $AM=BM$이므로 $\triangle OAM \equiv \triangle OBM$이다. 따라서, $\angle AMO=\angle BMO=90^\circ$ 이다. 즉, $OM \perp AB$이다. 따라서, AB의 수직이등분선은 원 O의 중심을 지난다.□

정리 3.3 (현의 길이의 성질) 원의 중심에서 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같다. 또, 길이가 같은 두 현은 중심에서 같은 거리에 있다. (그림 3.2 참고)

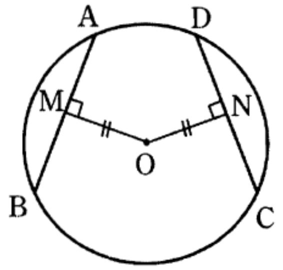


그림 3.2: 현의 길이의 성질

증명 : $\triangle OAM$과 $\triangle ODN$에서 $OA=OD$(반지름), $OM=ON$(가정), $\angle OMA=\angle OND=90^\circ$이므로 $\triangle OMA=\triangle OND$($RHS$합동)이다. 따라서, $AM=DN$이다. 그런데, $AM=BM, DN=CN$이므로 $AB=2AM=2DN=CD$이다. 즉, 중심에서 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같다.

(역의 증명) $\triangle OAM$과 $\triangle OCN$에서 $OA=OC$(반지름),

$\angle OMA=\angle ONC=90^\circ, AM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}CD=CN$이므로 $\triangle OAM\equiv\triangle OCN$($RHS$합동)이다.

$OM=ON$이다.□

정리 3.4 (원주각과 중심각 사이의 관계) 한 원에서 원주각과 중심각 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

(1) 한 원에서 주어진 호(또는 현) 위의 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이다.

(2) 한 원에서 같은 길이의 호에 대한 원주각의 크기는 일정하다. 또, 역은 성립한다.

증명 :

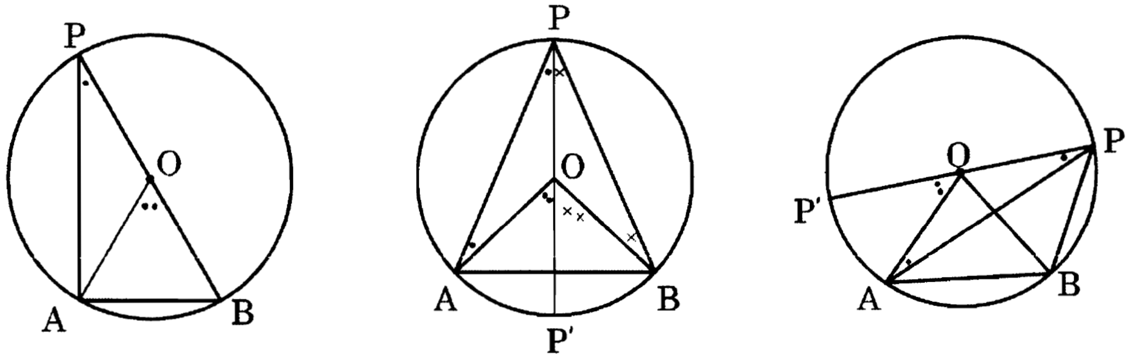


그림 3.3: 원주각과 중심각

(1) (그림 3.3 참고)중심 O가 사마각형 APB의 변 위에 있을 때, 내부에 있을 때, 외부에 있을 때로 나누어 생각하자.

(i) $\triangle APB$의 변 위에 중심 O가 있을 때, $\triangle BOP$는 이등변 삼각형이므로 $\angle APO = \angle PAO$이다. 또, $\angle AOB = \angle APB + \angle PAO = 2\angle APB$이다. 따라서, $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$이다.

(ii) $\triangle APB$의 내부에 중심O가 있을 때, PO의 연장선과 원 O와의 교점을 P'이라고 하면 (i)에 의하여

$$\angle APP' = \frac{1}{2}\angle AOP', \quad \angle BPP' = \frac{1}{2}\angle BOP'$$

이다. 따라서,

$$\angle APB = \angle APP' + \angle BPP' = \frac{1}{2}(\angle AOP' + \angle BOP') = \frac{1}{2}\angle AOB$$

이다.

(iii) $\triangle APB$의 외부에 중심O가 있을 때, PO의 연장선과 원 O와의 교점을 P'이라고 하면 (i)에 의하여

$$\angle P'PA = \frac{1}{2}\angle P'OA, \quad \angle P'PB = \frac{1}{2}\angle P'OB$$

이다. 따라서,

$$\angle APB = \angle P'PB - \angle P'PA = \frac{1}{2}(\angle P'OB - \angle P'OA) = \frac{1}{2}\angle AOB$$

이다.

따라서, 식 (i), (ii), (iii)에 의하여 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이다.

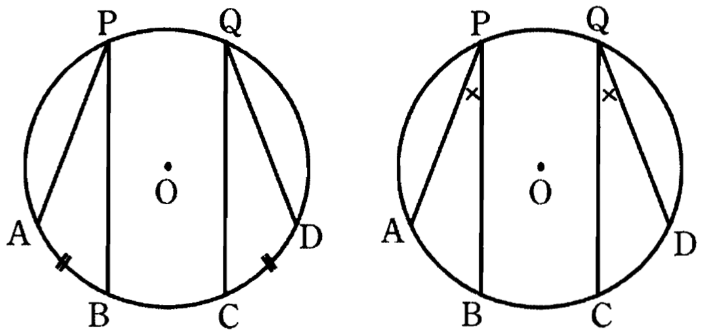


그림 3.4: 원주각과 호

(2) (그림 3.4 참고) $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$, $\angle CQD = \frac{1}{2}\angle COD$이고 호 AB와 호 CD가 같으므로, $\angle AOB = \angle COD$이다. 따라서, $\angle APB = \angle CQD$이다. 즉 같은 길이의 호에 대한 원주각의 크기는 같다.

(역의 증명) $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$, $\angle CQD = \frac{1}{2}\angle COD$이고, $\angle APB = \angle CQD$이므로 $\angle AOB = \angle COD$이다. 따라서, 호 AB와 호 CD는 같다. 즉, 같은 크기의 원주각에 대한 호의 길이는 같다.□

정리 3.5 (원의 접선의 성질) 원의 접선은 그 접점을 지나는 반지름에 수직이다. 또, 원 위의 한 점을 지나고 그 점을 지나는 반지름에 수직인 직선은 이 원의 접선이다.

증명 : l은 원 O위의 점 A를 지나는 접선이라고 하자. OA와 l이 수직이 아니라고 하자. 그러면, 중심 O에서 수선 OM을 그을 수 있다. $AM = BM$이 되게 AM의 연장선 위에 점 B를 잡으면 $\triangle OMA \equiv OMB$ (SAS합동)이다. 따라서, $OA = OB$이다. 그런데, OA가 반지름이므로 OB도 반지름이다. 따라서, 점 B은 원 O위의 점이 된다. 즉, l은 원 O와 두 점 A, B에서 만나게 되어 l이 접선이란 가정에 모순된다. 따라서, $OA \perp l$이다.

(역의 증명) 직선 l위에 A와 다른 한 점 B를 잡으면, $\triangle OAB$에서 $\angle OAB = 90^\circ$이므로 $OB > OA$이다. 따라서, 점 B는 원 O의 외부에 있으므로 l과 원 O의 교점이 될 수 없다. 즉, $OA \perp l$일 때, 직선 l과 원 O과의 교점은 A뿐이므로 l은 원 O의 접선이 된다.□

정리 3.6 (접선의 길이) 원의 외부에 있는 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같다.

증명 ; 원 O밖의 한 점 P에서 원 O에 그은 두 접선이 원과 만나는 점을 각각 A, B라고 하자. 그러면, $\triangle PAO$와 $\triangle PBO$에서 PO는 공통, $\angle PAO = \angle PBO = 90^\circ$, $OA = OB$(반지름)이므로 $\triangle PAO \equiv \triangle PBO$ (RHS합동)이다. 따라서, $PA = PB$이다.□

정리 3.7 (접선과 현이 이루는 각) 원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 이 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다.(그림 3.5 참고)

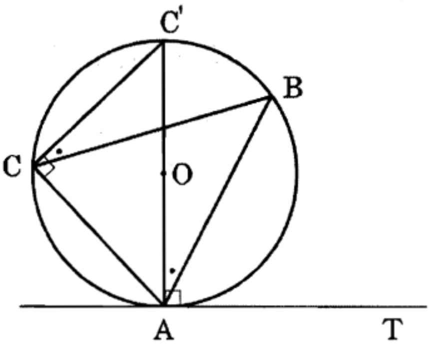


그림 3.5: 접선과 현이 이루는 각

증명 : $\angle BAT$가 예각일 경우, 점 A를 지나는 지름의 끝점을 C'이라 하고, C와 C'을 연결하면, $\angle C'CA = 90^\circ$ 이다. 따라서,

$$\angle BCA = 90^\circ - \angle C'CB \tag{1}$$

이다. 또한, $\angle C'AT = 90^\circ$ 이므로

$$\angle BAT = 90^\circ - \angle C'AB \tag{2}$$

이다. 그런데, $\angle C'CB = \angle C'AB$이므로 식(1), (2)로부터 $\angle BCA = \angle BAT$이다. $\angle BAT$가 직각일 경우와 둔각일 경우의 증명은 독자에게 맡긴다.□

정리 3.8 (방멱의 원리(1)) 한 원의 두 현 AB와 CD가 원의 내부에서 만나는 점을 P라고 하면, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$가 성립한다.(그림 3.6 참고)

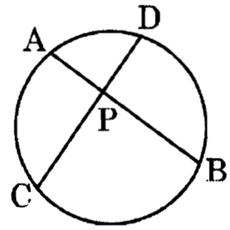


그림 3.6: 방멱의 원리 (1)

증명 : A와 D, C와 B를 연결하면, $\triangle PAD$와 $\triangle PCB$에서 $\angle PDA = \angle PBC$, $\angle APD = \angle CPB$이다. 따라서, $\triangle PAD$와 $\triangle PCB$는 닮음(AA닮음)이다. 따라서, $PA : PD = PC : PB$이다. 즉, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$이다.□

정리 3.9 (방멱의 원리(2)) 한 원의 두 현 AB와 CD의 연장선이 원의 외부에서 만나는 점을 P라고 하면, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$가 성립한다.(그림3.7 참고)

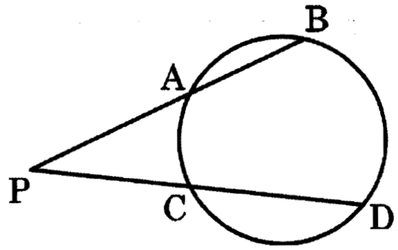


그림 3.7: 방멱의 원리 (2)

증명 : A와 D, C와 B를 연결하면, $\triangle PAD$와 $\triangle PCB$에서 $\angle PDA = \angle PBC$, $\angle APD = \angle CPB$이다. 따라서, $\triangle PAD$와 $\triangle PCB$는 닮음(AA닮음)이다. 따라서, $PA : PD = PC : PB$이다. 즉, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$이다.□

정리 3.10 (방멱의 원리(3)) 원의 외부의 한 점 P에서 그 원에 그은 접선과 할선이 원과 만나는 점을 각각 T, A, B라고 하면, $PT^2 = PA \cdot PB$가 성립한다.(그림3.8 참고)

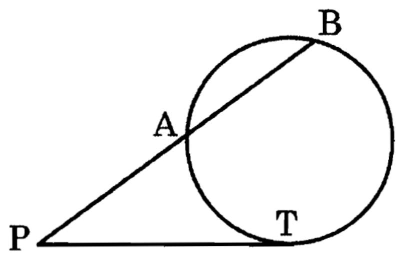


그림 3.8: 방멱의 원리 (3)

증명 : A와 T, B와 T를 연결하면 $\triangle PAT$와 $\triangle PTB$에서 $\angle PTA = \angle PBT$, $\angle P$는 공통이므로 $\triangle PAT$와 $\triangle PTB$는 닮음(AA닮음)이다. 따라서, $PA : PT = PT : PB$이다. 따라서, $PT^2 = PA \cdot PB$이다.□

정리 3.11 (네 점이 한 원 위에 있기 위한 조건(1)) 두 선분 AB, CD 또는 그 연장선이 점 P에서 만나고, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ 이면, 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다.

증명 : 세 점 A, B, C를 지나는 원과 선분 CD 또는 그 연장선이 만나는 점을 E라고 하면,

$$PA \cdot PB = PC \cdot PE \tag{1}$$

이다. 한편 가정에서

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD \tag{2}$$

이다. 식 (1), (2)에서 $PE = PD$이다. 즉, 두 점 D, E는 일치하므로 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다. □

정리 3.12 (네 점이 한 원 위에 있기 위한 조건(2)) $\angle DAB = \angle BCD = 90^\circ$ 이면 네 점 A, B, C, D는 BD를 지름으로 하는 원 위에 있다.

증명 : 중심각과 원주각의 성질에 의하여 쉽게 증면된다. 자세한 증명은 독자에게 맡긴다. □

정리 3.13 (네 점이 한 원 위에 있기 위한 조건(3)) 선분 AB에 대하여 같은 쪽에 있는 두 점을 각각 P, Q라고 할 때, $\angle APB = \angle AQB$이면 네 점 A, B, P, Q는 한 원 위에 있다.

증명 : 중심각과 원주각의 성질에 의하여 쉽게 증명된다. 자세한 증명은 독자에게 맡긴다. □

정리 3.14 (오일러의 삼각형 정리(Euler's Triangle Theorem)) 외접원과 내접원의 반지름이 각각 R, r인 삼각형의 외심을 O, 내심을 I라 하자. 이때, 선분 OI의 길이를 d라 하면,

$$d^2 = R^2 - 2rR$$

이 성립한다.(그림3.9 참고)

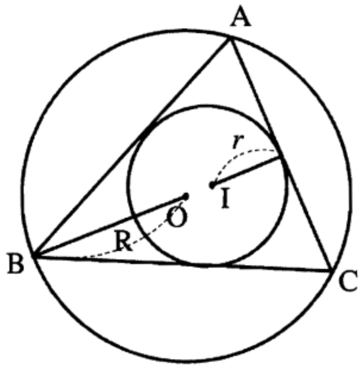


그림 3.9: 오일러의 삼각형 정리

증명 : 선분 AI의 연장선과 외접원과의 교점을 P, 선분 PO의 연장선과 외접원과의 교점을 Q라 하자. 또, 외심 O와 내심 I를 지나는 직선과 원과의 교점을 X, Y라 하자. X를 변 BC에 가까이 있는 점이라고 하자. 그러면, 방멱의 원리에 의하여

$$AI \cdot IP = IP \cdot IY = (R - OI)(R + OI) = R^2 - OI^2 \tag{1}$$

이다. 내심의 성질과 호에 대한 원주각의 성질에 의하여

$$\angle IBP = \angle IBC + \angle CBP = \angle IBA + \angle CAP = \angle IBA + \angle IAB = \angle PIB$$

이므로 $\triangle IBP$는 이등변삼각형이다. 즉, $IP = BP$이다. AB와 내접원의 접점E라 하면 $\angle EAI = \angle BQP$, $\angle IEA = \angle PBQ = 90^\circ$이므로 $\triangle IAE$와 $\triangle PQB$는 닮음도형이다. 따라서,

$$AI \cdot IP = AI \cdot BP - PQ \cdot IE = 2rR \tag{2}$$

이다. 식(1)과 (2)로부터 $OI^2 = R^2 - 2rR$이다.□

정리 3.15 (삼각형 면적에 대한 오일러의 정리) 점 O는 반지름이 R인 $\triangle ABC$의 외접원의 중심이고 점 M은 삼각형 ABC의 내부의 한 점이다. 점 M에서 변 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하면,

$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{|R^2 - OM^2|}{4R^2}$$

이다.

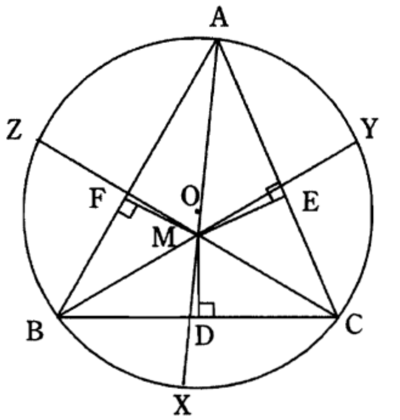


그림 3.10: 삼각형 면적에 대한 오일러의 정리

증명 : (그림 3.10 참고) $\angle BFM = \angle AEM = \angle MDB = 90^\circ$ 이므로 사각형 $AEMF, BFMD, CDME$는 외접원이 존재한다. 삼각형 AEF, BDF, CDE에 사인법칙을 적용하면

$$\frac{EF}{\sin A} = AM, \quad \frac{DF}{\sin B} = BM, \quad \frac{DE}{\sin C} = CM$$

이고, 삼각형 ABC에 사인법칙을 적용하면

$$\frac{EF}{AM} = \sin A = \frac{BC}{2R}, \quad \frac{DF}{BM} = \sin B = \frac{AC}{2R}, \quad \frac{DE}{CM} = \sin C = \frac{AB}{2R}$$

이다. AM, BM, CM의 연장선과 원이 만나는 점을 각각 X, Y, Z 라 하자. 그러면

$$\angle DEF = \angle DEM + \angle MEF = \angle DCM + \angle MAF = \angle ZYB + \angle BYX = \angle ZYX$$

이고, 같은 방법으로

$$\angle EFA = \angle YZX, \quad \angle EDF = \angle YXZ$$

이다. 따라서, $\triangle DEF$와 $\triangle XYZ$는 닮음도형이고, $\frac{DE}{XY} = \frac{R_{\triangle DEF}}{R}$이다. 단, $R_{\triangle DEF}$는 $\triangle DEF$의 외접원의 반지름의 길이다. $\triangle MAB$와 $\triangle MYX$는 닮음도형이므로 $\frac{XY}{AB} = \frac{MX}{MB}$이다. 그러므로

$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{4R \cdot DE \cdot EF \cdot FD}{4R_{\triangle DEF} \cdot AB \cdot BC \cdot CA} = \frac{MX}{MB} \cdot \frac{MA}{2R} \cdot \frac{MB}{2R} = \frac{MA \cdot MX}{4R^2} = \frac{|R^2 - OM^2|}{4R^2}$$

이다.□

예제 3.16 $\triangle ABC$에서 $BC=a, CA=b, AB=c$, 외접원의 반지름을 R, 내접원의 반지름의 길이를 r이라고 할 때, 관계식 $6(a+b+c)r^2=abc$ 를 만족한다고 하자. 또 삼각형 ABC의 내접원 위의 한 점 M에서 변 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F이라 하자. 이 때, $\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}$의 범위를 구하여라.

증명 : 삼각형의 넓이의 공식 $S=\dfrac{abc}{4R}$, $S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$및 주어진 조건에 의하여 $R=3r$이다. 삼각형 ABC의 내심와 외심을 각각 I, O라고 하면 오일러의 정리에 의하여 $IO^2=R(R-2r)$이고, $IO=\sqrt{3}r>r$이다. 그러므로 외심은 내접원의 외부에 있다. K, L을 직선 IO와 내접원의 두 교점이라고 하고, K가 I, O 사이에 있다면 하면 $OK \le OM \le OL < R$이다. 그러면 수선의 발로 이루어진 삼각형의 면적에 대한 오일러의 정리 $\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\dfrac{|R^2-OM^2|}{4R^2}$에 의하여

$$\frac{R^2-OL^2}{4R^2} \le \frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} \le \frac{R^2-OK^2}{4R^2}$$

이다. 그런데, $OL=\sqrt{3}r+r$, $OK=\sqrt{3}r-r$, $R=3r$이므로

$$\frac{5-2\sqrt{3}}{36} \le \frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} \le \frac{5+2\sqrt{3}}{36}$$

이다.□

정리 3.17 (폐형 정리) 한 삼각형의 외접원 O와 내접원 I가 있을 때, O를 외접원으로 하고 I를 내접원으로 하는 삼각형은 무수히 많다.

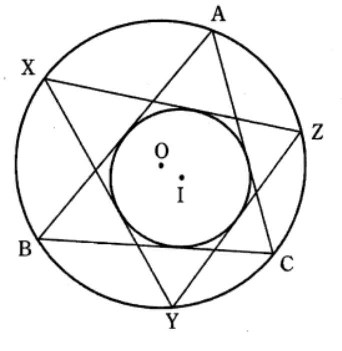


그림 3.11: 폐형 정리

증명 : (그림 3.11 참고) 주어진 삼각형을 $\triangle ABC$라 하고 그 내심을 I, 내접원의 반지름의 길이를 r, 외심과 내심의 거리를 d리 하자. 이제 X를 원 O위의 한 점이라 하고, I를 중심으로 하는 임의의 원에서 2개의 접선을 그려서 원 O와의 교점을 각각 Y, Z라 하자.
이 원을 늘리거나 줄이면 선분 YZ가 이 원에 접하게 된다. 이 때, 반지름의 길이를 r'이라 하자. $\triangle XYZ$에 오일러의 정리를 적용하면 $d^2=R^2-2r'R$이다. 그런데, $\triangle ABC$에 있어서는 $d^2=R^2-2rR$이므로 $r=r'$이다. 따라서, $\triangle XYZ$는 원 I에 외접하고 원 O에는 내접한다.□

도움정리 3.18 네 점 V, Z, Y, U가 $VZ = ZY = YU$, $\angle VZY = \angle ZYU = 180^\circ - 2\alpha > 60^\circ$를 만족시키면 이들 네 점은 같은 원주 위에 있다. 또한, 점 A가 직선 VU에 대하여 Y와 반대쪽에 있고, $\angle VAU = 3\alpha$이면 점 A도 같은 원주 위에 있다.

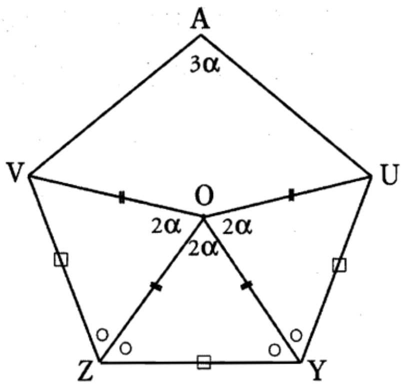


그림 3.12: 도움정리 3.18 관련그림

증명 : (그림 3.12 참고) $\angle VZY$와 $\angle ZYU$의 이등분선의 교점을 O라 하면, $\angle VZO = \angle YZO = 90^\circ - \alpha$이고, $VZ = ZY$이므로 $\triangle OVZ \equiv \triangle OYZ$이다. 마찬가지로, $\triangle OVZ, \triangle OZY, \triangle OYU$는 모두 합동이다. 즉, $OV = OZ = OY = OU$이므로 네 점 U, V, Y, Z는 O를 중심으로 하는 한 원 위에 있다. $\angle VOZ = \angle ZOY = \angle YOU = 2\alpha$이므로 $\angle VOU = 6\alpha$이다. 한편, $\angle VAU = 3\alpha$이므로 점 A도 같은 원 위에 있다.□

정리 3.19 (몰리의 정리(Morley's Theorem)) 삼각형 ABC의 세 각의 삼등분선이 서로 이웃한 점끼리 만나는 점을 각각 X, Y, Z라 하면 삼각형 XYZ는 언제나 정삼각형이다.(그림 3.13 참고)

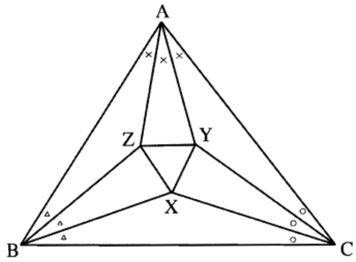


그림 3.13: 몰리의 정리

증명 : (그림 3.13 참고) 우선 $\angle B$와 $\angle C$에 대하여 각각의 삼등분선을 그어 변 BC쪽으로 이웃하는 등분선의 교점을 X를 구한다. 다음에 $\angle XBA$의 이등분선과 $\angle XCA$의 이등분의 교점 D를 구한다. 그 다음에는 $\angle DXZ = \angle DXY = 30^\circ$인 점 X, Y를 각각 BD, CD상에서 구한다. 이렇게 하면 점 X는 $\triangle BCD$의 내심이므로 XD는 $\angle D$를 이등분하므로, $\triangle XZD \equiv \triangle XYD$이다. 따라서, $\triangle XYZ$는 정삼각형이 된다.
(그림 3.14 참고) 한편 CY에 대한 X의 대칭점을 U, BZ에 대한 X의 대칭점을 V라 하면,

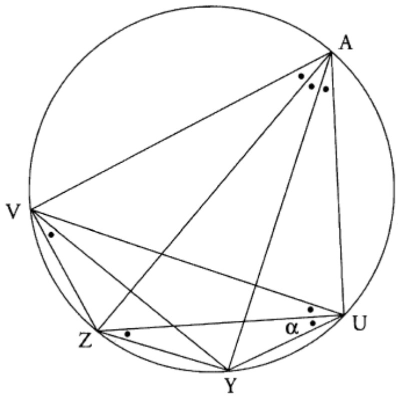


그림 3.14: 몰리의 정리의 증명 관련그림

$UY = XY = YZ = VZ$이다. 여기서, $\angle A = 3\alpha$, $\angle B = 3\beta$, $\angle C = 3\gamma$라 놓고 각을 계산하면,

$$\frac{1}{2}\angle D = \delta = 90^\circ - (\beta+\gamma) = 90^\circ - (60^\circ - \alpha) = \alpha + 30^\circ$$

$$\angle UYD = \angle XYD = 180^\circ - (\delta + 30^\circ) = 180^\circ - (\alpha + 60^\circ) = 120^\circ - \alpha$$

이므로,

$$\angle UYZ = 2\angle UYD - \angle XYZ = 2(120^\circ - \alpha) - 60^\circ = 180^\circ - 2\alpha$$

이다. 같은 방법으로

$$\angle VZY = 180^\circ - 2\alpha$$

이다. 그러므로, 도움정리 3.18에 의하여 오각형 $UYZVA$는 원에 내접한다. $VZ = ZY = YU$이므로 $\angle VAZ = \angle ZAY = \angle YAU$이다. 즉, AY, AZ는 $\angle A$를 삼등분한다. 그러므로 세 꼭지점에서 각각의 삼등분선을 그어서 그 이웃하는 등분선과의 교점을 X, Y, Z라 하면, $\triangle XYZ$는 정삼각형이다.□

예제 [87]3.20 그림 3.13에서 각 삼등분선 BZ의 연장선과 CY의 연장선의 교점을 U, AZ의 연장선과 CX의 연장선과의 교점을 V, BX의 연장선과 AY의 연장선과의 교점을 W라 하면, 세 직선 UX, VY, WZ는 한 점에서 만남을 증명하여라.

제 2 절 원과 사각형

– 이 절의 주요 내용

- 원에 내접하는 사각형의 성질, 듀란드의 문제
- 톨레미의 정리, 심슨의 정리, 브라마굽타의 문제

정의 3.21 사각형의 한 외각에 이웃한 내각에 대한 대각을 그 외각에 대한 **내대각**이라고 한다.

정리 3.22 (원에 내접하는 사각형) 사각형 $ABCD$가 한 원에 내접하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

(1) 원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°이다. (그림 3.15 참고)

(2) 원에 내접하는 사각형에서 한 외각의 크기는 그 내대각의 크기와 같다. (그림 3.16 참고)

(3) 임의의 한 변에서, 나머지 두 점을 바라보는 각이 같다. 변 AB에서 점 C을 바라보는 각이 $\angle ACB$, 점 D를 바라보는 각이 $\angle ADB$라고 할 때, $\angle ACB = \angle ADB$이다.

(4) 두 대각선의 교점을 P라고 하면 $PA \cdot PC = PB \cdot PD$이다.

(5) 두 대변 AD와 BC(또는 AB와 CD)의 연장선의 교점을 P라 할 때, $PA \cdot PD = PB \cdot PC$ 또는 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$이다.

(6) 네 꼭지점에 이르는 거리가 같은 점이 존재한다.

(7) 네 변에 수직이등분선이 한 점에서 만난다.

(8) (톨레미의 정리) $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$이다.

증명 : 증명은 (1)과 (2)만 하기로 하자. (3), (4), (5)의 증명은 중심각과 원주각의 성질, 방멱의 원리를 이용하면 된다. (6), (7)은 원에 내접하는 사각형의 정의를 이용하면 된다. (8)은 톨레미의 정리에서 증명하기로 하자.

(1) $\square ABCD$에서 $\angle B+\angle D=180^\circ$라 하고, 세 점 A, B, C를 지나는 원 O 위에 점 D'를 잡는다. $\square ABCD'$은 원 O에 내접하는 사각형이므로 $\angle B+\angle D'=180^\circ$이다. 따라서, $\angle D=\angle D'$이다. 호 ABC에 대한 원주각의 크기가 같으므로 D는 원 O 위에 있다. 따라서, $\square ABCD$는 원에 내접한다. 역의 증명은 원주각과 중심각의 성질에 의하여 쉽게 증명되므로 독자에게 맡긴다.

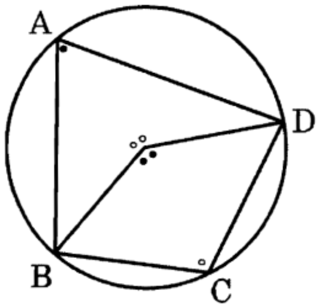


그림 3.15: 원에 내접하는 사각형 (1)

(2) $\square ABCD$에서 $\angle BCD+\angle DCE=180^\circ$, $\angle A=\angle DCE$(내대각)이므로 $\angle A+\angle BCD=180^\circ$이다 즉, 한 쌍의 대각의 크기의 합이 180°이다. 즉, 한 쌍의 대각의 크기의 합이 180°이므로 (1)에 의하여 $\square ABCD$는 원에 내접한다. 역의 증명은 쉬우므로 독자에게 맡긴다.□

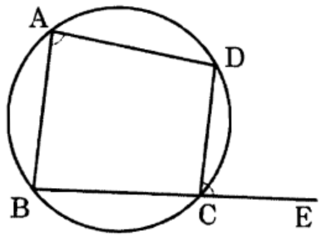


그림 3.16: 원에 내접하는 사각형 (2)

예제88) 3.23 원 O에 내접하는 사각형 $ABCD$의 두 대각선이 AC와 BD가 직교할 때, $\square ABCO = \square CDAO$, $\square ABOD = \square BCDO$임을 증명하여라.

예제 89)3.24(KMO. '2004) $\angle A = 72^\circ$인 삼각형 ABC의 내부의 점 M에 대하여 $\angle BMC = 148^\circ$이다. 점 M에서 세 변 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 할 때, $\angle FDE$의 크기는 얼마인가?
(1) 74° (2) 76° (3) 78° (4) 80° (5) 82°

예제 90)3.25 (KMO, '2005) 삼각형 ABC에서 $\angle A = 30^\circ$, $AB = AC$이다. 점 A에서 변 BC에 그은 수선과 점 B에서 변 AC에 그은 수선의 교점을 P, 삼각형 ABP의 외접원과 변 AC의 교점 중 A가 아닌 점을 Q라고 할 때, $\angle PQC$의 크기는?
(1) 56° (2) 58° (3) 60° (4) 62° (5) 64°

예제 91)3.26 (**톨레미의 정리**(Ptolemy's Theorem) 원에 내접하는 사각형 $ABCD$의 대변의 길이의 곱을 합한 것은 대각선의 길이의 곱과 같다. 즉,

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

가 성립한다.

따름정리 3.27 (톨레미 정리의 역) 볼록사각형에서 두 쌍의 대변의 곱의 합이 두 대각선의 곱과 같으면 그 사각형은 원에 내접한다. 즉, 볼록사각형 $ABCD$에서

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

이 성립하면, 사각형 $ABCD$는 원에 내접한다.

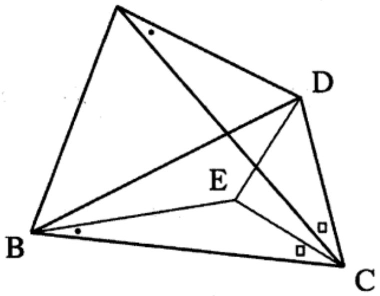


그림 3.19: 톨레미의 정리의 역의 증명

증명 : (그림 3.19 참고) $\angle BCE = \angle ACD$, $\angle EBC = \angle DAC$가 되게 점 E를 볼록사각형 $ABCD$ 내부에 잡는다. 그러면 $\triangle BCE$와 $\triangle ACB$는 닮음(AA닮음)이다. 그러므로

$$AD \cdot BC = AC \cdot BE \qquad (1)$$

이다. 또, $\frac{EC}{DC} = \frac{BC}{AC}$, $\angle ECD = \angle ACB$이므로, $\triangle DCE$와 $\triangle ABC$는 닮음(SAS닮음)이다.

그러므로,

$$AB \cdot DC = AC \cdot DE \qquad (2)$$

$$\angle CDE = \angle CAB \qquad (3)$$

이다. 식(1)과 (2)를 변변 더하면

$$AB \cdot DC + AD \cdot BC = AC(BE + DE)$$

이다. 위 식과 가정으로부터

$$BE + DE = BD$$

이다. 따라서, E는 BD 위의 한 점이다. 따라서, $\angle CDE = \angle CDB$이다. 식 (3)으로부터 $\angle CDB = \angle CAB$이다. 즉, 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다. 따라서, 사각형 $ABCD$는 원에 내접한다. □

예제 92)3.28 점 P가 정삼각형 ABC의 외접원의 호 BC위에 임의의 한 점일 때, $PA = PB + PC$임을 증명하여라.

예제[93] 3.29 (KMO, '2006) 점 B에서 중심이 O인 원에 그은 두 접선의 접점이 각각 N, K이다. 선분 NO의 연장선과 선분 BK의 연장선이 점 E에서 만나고, 점 E에서 이 원에 그은 또 다른 접선의 접점이 M이다. $BN=4$, $NE=3$일 때, $5KM$의 값을 구하여라.

예제[94] 3.30 **(로버트의 문제)** 등변사다리꼴 $ABCD$의 등변 AB위의 정점 P에서 밑변 BC에 평행한 선분을 그어 변 BD, AC, CD 등과의 교점을 각각 Q, R, S라고 하면, $PQ \cdot PR$는 일정함을 증명하여라.

예제 [95]3.31**(브라마굽타의 공식**(Brahmagupta's Formula) 원에 내접하는 사각형 $ABCD$의 대각선이 서로 직교할 때, 그 교점 O에서 한 변 BC에 그은 수선 OE의 연장선을 BC의 대변 AD를 이등분한다.(그림 3.20 참고)

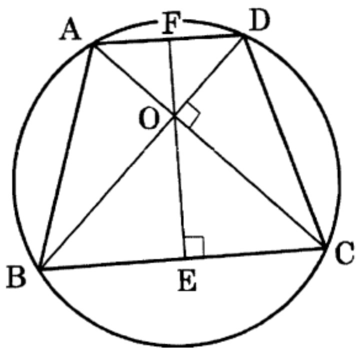


그림 3.20: 브라마굽타의 공식

예제 3.32 (원에 외접하는 사각형) 사각형 $ABCD$가 한 원에 외접하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.
(1) (듀란드의 문제) $AB+CD=BC+DA$이다.
(2) 네 변에 이르는 거리가 같은 점이 존재한다.
(3) 네 각의 이등분선이 한 점에서 만난다.
증명 : 듀란드의 문제의 증명은 예제로 통해서하고, 나머지의 증명은 독자에게 맡긴다.

예제 [96]3.33 (듀란드의 문제) 볼록사각형 $ABCD$에서 $AB+CD=BC+DA$이면 사각형 $ABCD$는 원에 외접한다.

예제 [97]3.34 (심슨의 정리(Simson's Theorem)) 삼각형 ABC의 외접원 위에 있는 임의의 한 점 P에서 삼각형의 세 변 BC, CA, AB 또는 그 연장선에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자. 그러면, F, D, E는 한 직선 위에 있다. 여기서, 직선 FDE를 점 P에 대한 심슨선이라고 한다.(그림 3.21 참고)

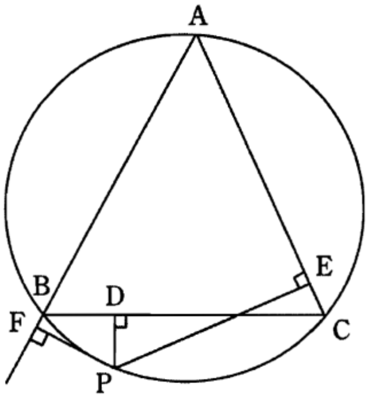


그림 3.21: 심슨의 정리

따름정리 3.35 (심슨의 정리의 역) 한 점을 지나 삼각형의 세 변에 그은 수선의 발이 한 작선 위에 있으면 그 점은 삼각형의 외접원 위에 있다.

증명 : 그림 3.21에서 세 점 F, D, E는 한 직선 위에 있고, P, D, B, F와 P, C, E, D가 각각 한 원 위에 있으므로

$$\angle BPC = \angle BPD + \angle DPC = \angle BFD + \angle AED = 180^\circ - \angle A$$

이다. 즉, $\angle A + \angle BPC = 180^\circ$ 이다. 그러므로 네 점 A, B, P, C는 한 원 위에 있다. 따라서, P는 삼각형 ABC의 외접원 위에 있다. □

예제 [98]3.36 원 위의 한 점 P에서 세 현 PA, PB, PC를 긋고 이 세 현 PA, PB, PC를 각각 지름으로 하는 원 O_A, O_B, O_C를 그리자. 원 O_B와 O_C의 교점 중 P가 아닌 점을 X, 원 O_C와 O_A의 교점 중 P가 아닌 점을 Y, 원 O_A와 O_B의 교점 중 P가 아닌 점을 Z라 하면, 세 점 X, Y, Z가 한 직선 위에 있음을 보여라.

제 3절 연습문제

연습문제 3.1★★★[99]
원에 내접하는 삼각형 $A_1A_2A_3$에서 $\angle A_1 = 30^\circ$, $\angle A_2 = 70^\circ$, $\angle A_3 = 80^\circ$ 이다. 변 A_2A_3의 수직이등분선과 원과의 교점 중에서 A_1에 가까운 것을 B_1, 변 A_3A_1의 수직이등분선과 원과의 교점 중에서 A_2에 가까운 것을 B_2, 변 A_1A_2의 수직이등분선과 원과의 교점 중에서 A_3에 가까운 것을 B_3라고 하자. 삼각형 $B_1B_2B_3$의 세 각 중에서 가장 큰 것은 몇 도인가?

연습문제 3.2★★★[100]
오각형 $ABCDE$가 원에 내접해 있다. 선분 AC와 선분 BE의 교점을 X, 선분 AD와 선분 EC의 교점을 Y라 하자. $\angle AXB = \angle AYC = 90^\circ$이고, $BD = 100$일 때, XY의 값을 구하여라.

연습문제 3.3★★★★[101]
반지름의 길이가 r_1, r_2인 두 원 O_1, O_2가 점 M에서 외접하고 있다. 두 원의 공통 외접선이 각 원과 만나는 점을 각각 A, B라고 하고, $\triangle ABM$의 외접원의 반지름의 길이를 r이라 할 때, $r^2 = r_1r_2$임을 증명하여라.

연습문제 3.4★★★[102)]
점 A, B, C는 반지름이 3인 원주 위의 점이고, $\angle ACB = 30^\circ$, $AC = 2$이다. BC의 길이를 구하여라.

연습문제 3.5★★[103)]
원에 내접하는 $\triangle PQR$은 $PQ = PR = 3$, $QR = 2$인 이등변삼각형이다. 원 위의 점 Q에서 접선과 PR의 연장선과의 교점을 X라 하자. 이 때, RX의 길이를 구하여라.

연습문제 3.6★★[104)]
$AB = BC = CD = DE = 1$, $EF = FG = GH = HA = 3$인 팔각형 $ABCDEFGH$가 반지름이 R인 원에 내접한다고 한다. 이 때, R^2을 구하여라.

연습문제 3.7★★★[105)]

정 18각형 A_1, A_2, $\cdots$, A_{18}의 두 대각선 A_1A_7과 A_3A_{13}이 이루는 각 중에서 작은 각의 크기를 구하여라.

연습문제 3.8★★★[106)]

원에 내접하는 사각형 $ABCD$에서 AC와 BD의 교점을 E라고 하자. 만약 $BC=CD=4$, $AE=6$이고, BE와 BD의 길이가 정수라고 할 때, BD의 길이를 구하여라.

연습문제 3.9★★★★[107)]

삼각형 ABC에서 점 B, C에서 각각 변 CA, AB 또는 그 연장선에 내린 수선의 발을 Y, Z라 하자. $\angle BYC$의 이등분선과 $\angle BZC$의 이등분선의 교점이 X라고 할 때, $\triangle BXC$가 이등변삼각형임을 증명하여라.

연습문제 3.10★★★★[108)]
정삼각형 ABC에서, 점 M은 $\triangle ABC$의 내부의 점이다. 점 M에서 세 변 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자. $\angle FDE = 90^\circ$일 때, 점 M은 어떤 도형 위를 움직이는가?

연습문제 3.11★★★★[109)]
원 O에 외접하는 사각형 $ABCD$에서, $\angle A = \angle B = 120^\circ$, $\angle D = 90^\circ$, $BC = 1$일 때, AD의 길이를 구하여라.

연습문제 3.12★★★[110)]
대변이 평행하지 않은 볼록사각형 $ABCD$에 내접하는 원 O에서, 대각선 AC와 BD의 중점을 각각 M, N이라 하자. 그러면 M, O, N은 한 직선 위에 있음을 증명하여라.

연습문제 3.13★★★[111)]
원에 내접하는 볼록사각형 $ABCD$에서 $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$, $\triangle DAB$의 내심을 각각 K, L, M, N이라 하자. 그러면 사각형 $KLMN$은 직사각형임을 증명하여라.

연습문제 3.14★★★[112)]
두 원 O_1, O_2가 점 A, B에서 만난다. 한 원 O_1 위의 점 P에서 직선 PA, PB를 긋고 다른 원 O_2와 만나는 점을 각각 C, D라고 한다. P에서 CD에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 그러면, PH는 반드시 중심 O_1을 지난다는 것을 증명하여라.

연습문제 3.15★★★[113)]
삼각형 ABC에서 변 BC의 수직이등분선이 AB와 D에서 만난다. 점 A와 C에서 각각 삼각형 ABC의 외접원에 접선을 긋고 그 교점을 E라고 할 때, $DE//BC$임을 증명하여라.

연습문제 3.16★★[114]
원 O에 내접하는 사각형 $ABCD$의 대각선이 점 P에서 만난다. P를 지나 $\triangle ABP$의 외접원에 접선을 그었을 때, 접선과 AD의 교점을 T라고 하면, $PT//CD$임을 증명하여라.

연습문제 3.17★★[115]
사각형 $ABCD$의 두 대각선이 M에서 수직으로 만난다. M에서 CD에 내린 수선의 발을 E라고 하자. ME의 연장선과 AB와의 교점을 F라 하자. F가 AB의 중점이면, 네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있음을 증명하여라.

연습문제 3.18★★[116]
$\triangle ABC$에서, 꼭지점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라고 하자. AD를 지름으로 하는 원이 변 AB와 만나는 점을 E, 변 AC와 만나는 점을 F라 할 때, $AE \cdot AB = AF \cdot AC$임을 증명하여라.

연습문제 3.19★★★[117)]
원의 외부에 있는 한 점 P에서 그 원에 접선과 원과의 교점을 T라 하자. 또, P에서 원에 그은 할선이 원과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\angle TPB$의 이등분선 PE는 AT, BT와 각각 E, F에서 만날 때, $ET \cdot FT = EA \cdot FB$임을 증명하여라.

연습문제 3.20★★★[118)]
AB를 지름으로 하는 반원 위에 두 점 C, E가 있다. 점 C에서 AB에 내린 수선의 발을 D라고 하자. CD와 BE의 교점을 F라 할 때, $BF \cdot BE = BD \cdot BA$임을 증명하여라. 단, 점 C가 점 B에 가까운 점이다.

연습문제 3.21★★★[119)]
원 O의 둘레 위에 점 A, B를 잡고, $\triangle OAB$가 정삼각형이 되도록 하였다. 원의 임의의 지름 XY를 잡고 두 직선 XA, YB의 교점을 P라 할 때, 지름 XY가 움직이면 점 P는 어떤 도형 위를 움직이는가?

제 4 장 삼각함수

제 1절 삼각함수와 삼각비

– 이 절의 주요 내용

정리 4.1(삼각함수의 정의) 중심이 $O(0,0)$에 대하여 θ를 OP가 x축의 양의 방향과 아루는 각이라고 할 때, θ의 사인법칙, 코사인 법칙, 탄젠트함수, 코시컨트함수, 시컨트함수, 고탄젠트함수를 다음과 같이 정의 한다. (그림 4.1 참고)

$$\sin\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \tan\theta = \frac{y}{x},$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y},\ \sec\theta = \frac{r}{x},\ \cot\theta = \frac{x}{y}$$

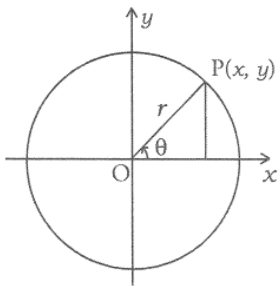


그림 4.1: 삼각함수의 정의

정리 4.2 $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼학형 ABC에서 $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ 라고 할 때, 삼각비를 같이 정의한다.

$$\sin A = \frac{a}{c},\ \cos A = \frac{b}{c},\ \tan A = \frac{a}{b},$$

$$\sin B = \frac{b}{c},\ \cos B = \frac{a}{c},\ \tan B = \frac{b}{a},$$

단, 각의 표시 $\angle$를 생략하고 표현한다. 즉, $\sin A = \sin\angle A$를 의미한다. (그림 4.2참고)

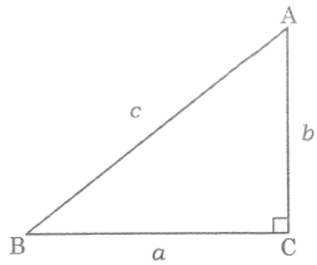


그림 4.2: 삼각비의 정의

정리 4.3 (삼각함수의 기본공식)임의의 실수 θ에 대하여 다음 관계가 성립한다.

(1) 역수 관계 : $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

(2) 상제 관계 : $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

(3) 제곱 관계 : $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$, $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

증명 : 삼각함수의 정의로 부터 쉽게 증명된다. 자세한 증명은 독자에게 맡긴다. □

정리 4.4 (삼각함수의 덧셈정리) 다음이 성립한다. 단, 복부호 동순이다.

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

증명: (그림 4.3참고) 직사각형 $ABCD$에서 $\angle ABE=\alpha$, $\angle EBF=\beta$, $\angle BEF=90^\circ$ 를 만족하도록 점 E와 F를 잡자, 그러면

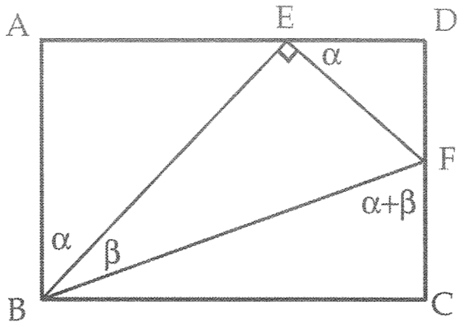


그림 4.3: 삼각함수의 덧셈정리

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{BC}{BF}=\frac{AD}{BF}$$ 이고,

$$\sin\alpha=\frac{AE}{BE}=\frac{DF}{EF},\ \sin\beta=\frac{EF}{BF},\ \cos\alpha=\frac{AB}{BE}=\frac{DE}{EF},\ \cos\beta=\frac{BE}{BF}$$ 이다.

위 사실로 부터

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\frac{BC}{BF}=\frac{AD}{BF}=\frac{AE+ED}{BF}\\&=\frac{AE}{BF}+\frac{ED}{BF}=\frac{AE}{BE}\cdot\frac{BE}{BF}+\frac{ED}{EF}\cdot\frac{EF}{BF}\\&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad (1)\end{aligned}$$

이다. $\cos(-\beta)=\cos\beta$, $\sin(-\beta)=-\sin\beta$과 식 (1)로 부터

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

이다. 같은 방법으로

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

이다. 또한

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)}$$

이므로 이를 풀어 정리하면

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$ 이다. □

예제 4.5 [120] $AB \parallel DC$ 인 사다리꼴에서 $AB=4$, $CD=10$ 라고 하자. AC 와 BD 가 점 P 에서 직교하고, BC 와 DA 의 연장선이 만나는 점을 Q, $\angle AQB=45^\circ$ 이라 할 때, 사다리꼴 $ABCD$ 의 넓이를 구하여라.

예제 4.6 [121] $x+y+z=1$ 을 만족하는 양의 실수 x, y, z 에 대하여

$$\frac{1}{x}=\frac{4}{y}=\frac{9}{z}$$

의 최소값을 구하여라.

예제 4.7 [122] (AMC12, '2001) 삼각형 ABC 에서 $\angle ABC=45^\circ$ 이고, 변 BC 위에 $2BD=CD$, $\angle DAB=15^\circ$ 을 만족하도록 점 D 를 잡을 때, $\angle ACB$ 를 구하여라.

정리 4.8(2배각 공식) 다음이 성립한다.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \ ,\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \ ,\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

증명: 삼각함수의 덧셈정리(정리 4.4)로부터 바로 나온다. 자세한 증명은 독자에게 맡긴다. □

예제 4.9 [123] $a+b+c=\pi$ 일 때, $\tan a+\tan b+\tan c=\tan a\tan b\tan c$ 임을 증명하여라.

정리 4.10(반각공식) 다음이 성립한다.

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}\ ,\ \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}\ ,\ \tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

증명 : 2 배각 공식으로 부터

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\\ &=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad (1)\\ &=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1 \qquad (2)\end{aligned}$$

이다. 식 (1), (2) 로 부터

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2},\ \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

이다. 위 식으로 부터

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$\sin A\cos B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

정리 4.11(곱을 합 또는 차로 고치는 공식)다음이 성립한다.

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

증명: 삼각함수의 덧셈정리(정리 4.4)로 부터 쉽게 증명된다. 자세한 증명은 독자에게 맡긴다. □

정리 4.12 (합 또는 차를 곱으로 고치는 공식) 다음이 성립한다.

(1) $\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}cos\frac{A-B}{2}$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}sin\frac{A-B}{2}$$

증명: 곱을 합 또는 차로 고치는 공식(정리 4.11)로 부터 쉽게 증명된다. 자세한 증명은 독자에게 맡긴다.
□

제2절 사인법칙과 코사인 법칙

– 이 절의 주요 내용
· 사인법칙과 코사인 법칙

삼각형 abc 에서 꼭지점 A, B, C 에 대응하는 변의 길이를 각각 a, b, c 라고 하자. 또, $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ 라고 하자. 그러면 s 는 삼각형 ABC 의 둘레의 길이의 반이다. R 과 r 을 각각 삼각형 ABC 의 외접원과 내접원의 반지름의 길이라고 하자. 또한, h_a, h_b, h_c 를 각각 꼭지점 A, B, C 와 그 대변과의 거리(즉, 높이)라고 하자. r_a, r_b, r_c 를 각각 변 BC, CA, AB 와 접하는 방접원의 반지름이라고 하자.

정리 4.13 (시인 법칙(Sine's Law) 삼각형 ABC 에서 다음이 성립한다. (그림 4.4 참고)

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

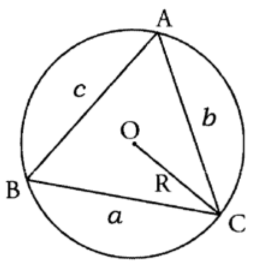


그림 4.4: 사인정리

증명 : 삼각형 ABC 의 외접원의 중심을 O 라 하고, BO 의 연장선이 외접원과 만나는 점을 A' 라고 하면 BA' 는 지름이므로 $BA'=2R$ 이다.

(i) $\angle A<90^\circ$ 일 때, 중심각과 원주각의 성질에 의하여 $\angle A=\angle A'$, $\angle A'CB=90^\circ$ 이므로

$$\sin A=\sin A'=\frac{BC}{CA'}=\frac{a}{2R}$$

이다. 따라서, $\frac{a}{\sin A}=2R$ 이다.

(ii) $\angle A>90^\circ$ 일 때, 중심각과 원주각의 성질에 의하여 $\angle A=180^\circ-\angle A'$, $\angle A'CB=90^\circ$ 이므로 $\sin A=\sin(180^\circ-A')=\sin A'=\frac{a}{2R}$ 이다. 따라서, $\frac{a}{\sin A}=2R\therefore\therefore$ 이다.

(iii) $\angle A=90^\circ$ 일 때, $\sin A=1$, $a=2R$ 이므로 $\frac{a}{\sin A}=2R$ 이다.

그러므로, (i), (ii), (iii)에 의하여, $\frac{a}{\sin A}=2R$ 이다. 같은 방법으로 $\frac{b}{\sin B}=2R$, $\frac{c}{\sin C}=2R$ 이다.

따라서, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ 이다.

예제 4.14 [124]삼각형 ABC에서 $\angle A=60^\circ$, $\angle B=45^\circ$, $a=3$ 일 때, b와 외접원의 반지름의 길이를 구하여라.

정리 4.15 (제1 코사인법칙(the 1st Cosine Low))
삼각형 ABC에서 다음이 성립한다.(그림 4.5 참고)

$$a=b\cos C+c\cos B$$

$$b=c\cos A+a\cos C$$

$$c=a\cos B+b\cos A$$

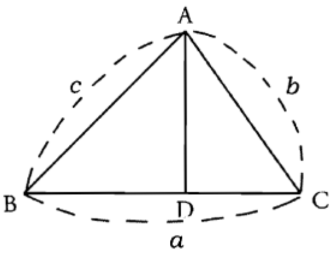


그림 4.5: 제 1 코사인법칙

증명 : 삼각형 ABC에서 꼭지점 A에서 대변 BC 또는 연장선에 내린 수선의 발을 D라 한다.
(i) $\angle B$, $\angle C$가 모두 예각인 경우, $a=BD+CD=c\cos B+b\cos C$이다.
(ii) $\angle C$가 둔각인 경우, $a=BD-CD=c\cos B-b\cos(180^\circ-C)=c\cos B+b\cos C$이다.
$\angle B$가 둔각인 경우도 마찬가지 이다.
(iii) $\angle C=90^\circ$인 경우, $a=c\cos B$이다. 그런데, $\cos C=0$이므로 이 때에도 $a=c\cos B+b\cos C$가 성립한다. $\angle B=90^\circ$이 직각인 경우에도 마찬가지이다.
그러므로, (i), (ii), (iii)에 의하여, $a=c\cos B+b\cos C$이다. 같은 방법으로 하면,

$$b=c\cos A+a\cos C,\ c=a\cos B+b\cos A$$

이다.

정리 4.16 (제2 코사인법칙(the 2nd Cosine Law)) 삼각형 ABC에서 다음이 성립한다.

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

증명 : 제` 코사인 법칙

$$a=b\cos C+C\cos B \qquad (1)$$
$$b=c\cos A+b\cos C \qquad (2)$$
$$c=a\cos B+b\cos A \qquad (3)$$

에서 (1)$\times a-$ (2)$\times b-$(3)$\times c$를 하면

$$a^2-b^2-c^2=-2bc\cos A$$

이다. 즉, $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 이다. 같은 방법으로

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

이다.

예제 4.17 125) $\triangle$ABC 에서 $\angle A = 60^\circ$ 이고, 가장 큰 변과 가장 작은 변의 길이가 각각 방정식 $3x^2 - 27x + 32 = 0$ 의 두 근이다. $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름을 구하여라.

정리 4.18 (탄젠트 법칙) 삼각형 ABC 에서 다음이 성립한다.

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)},\quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\frac{1}{2}(B+C)}{\tan\frac{1}{2}(B-C)},\quad \frac{c+a}{c-a} = \frac{\tan\frac{1}{2}(C+A)}{\tan\frac{1}{2}(C-A)}$$

증명 : 사인법칙으로부터 $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$ 이다. 그러므로

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2R\sin A + 2R\sin B}{2R\sin A - 2R\sin B} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B}$$
$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}{2\sin\frac{1}{2}(A-B)\cos\frac{1}{2}(A+B)} = \frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}$$

이다. 같은 방법으로

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\frac{1}{2}(B+C)}{\tan\frac{1}{2}(B-C)},\quad \frac{c+a}{c-a} = \frac{\tan\frac{1}{2}(C+A)}{\tan\frac{1}{2}(C-A)}$$

이다.

정리 4.19 (삼각형의 넓이) 삼각형 ABC 의 넓이 S 는 다음과 같다.

(1) $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$ 이다.

(2) $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$ 이다.

(3) (해론의 공식) $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

(4) $S = \frac{abc}{4R}$ 이다.

(5) $S = rs = (s-a)r_a = (s-b)r_b = (s-c)r_c$ 이다.

(6) $S = 2R^2\sin A\sin B\sin C$ 이다.

(7) $S = \sqrt{rr_ar_br_c}$ 이다.

(8) $S = \frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)} = \frac{b^2\sin C\sin A}{2\sin(C+A)} = \frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin(A+B)}$ 이다.

증명

(1) 자명하다.

(2) $h_a = c\sin B$, $h_b = a\sin C$, $h_c = b\sin A$ 이므로 이를 (1)에 대입하면 나온다.

(3) 제2 코사인법칙으로부터 $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ 이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\sin^2 C &= 1-\cos^2 C \\ &= (1+\cos C)(1-\cos C) \\ &= \left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) \\ &= \frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}\cdot\frac{c^2-(a-b)^2}{2ab} \\ &= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c+b-a)}{4a^2b^2} \\ &= \frac{1}{4a^2b^2}2s(2s-2c)(2s-2b)(2s-2a) \\ &= \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2b^2}\end{aligned}$$

이다. 그런데, $\sin C > 0$ 이므로 $\sin C = \dfrac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 이다. 이를

$S = \dfrac{1}{2}ab\sin C$ 에 대입하면, $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 이다.

(4) 사인법칙으로부터 $\sin C = \dfrac{c}{2R}$ 이다. 이를 $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C$ 에 대입하면 $S = \dfrac{abc}{4R}$ 이다.

(5) $S = \dfrac{1}{2}ar + \dfrac{1}{2}br + \dfrac{1}{2}cr = sr$ 이다. 삼각형 ABc 의 방접원 중 BC 에 접하는 원의 중심을 O_A 라 하자. O_A 에서 BC, CA 의 연장선, AB 의 연장선과의 교점을 각각 D, E, F 라 하자.
그러면, $\triangle BFO_A \equiv \triangle BDO_A$ (RHA 합동), $\triangle CDO_A \equiv CEO_A$ (RHA 합동)이다.
또, $BF + CE = BC$ 이다. 따라서,
$S = \triangle ABC = \triangle AFO_A + \triangle AEO_A - 2\triangle BCO_A = sr_a - ar_a = (s-a)r_a$
이다. 같은 방법으로 $S = (s-b)r_b = (s-c)r_c$ 이다.

(6) 사인법칙으로부터 $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$ 이다. 이를 $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C$ 에 대입하면

$S = 2R^2\sin A\sin B\sin C$ 이다.

(7) (5)에서 $S^4 = rs\cdot(s-a)r_a\cdot(s-b)r_b\cdot(s-c)r_c$ 이고, (3)에서 $S^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ 이므로 $S^2 = rr_ar_br_c$ 이다. 즉, $S = \sqrt{rr_ar_br_c}$ 이다.

(8) 사인법칙 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ 에서 $b = a\dfrac{\sin B}{\sin A}$, $c = a\dfrac{\sin C}{\sin A}$ 이므로

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$$

이다. 그런데 $\sin A = \sin(180^\circ - (B+C)) = \sin(B+C)$ 이다. 따라서, $S = \dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}$ 이다.

같은 방법으로 $S=\dfrac{b^2\sin C\sin A}{2\sin(C+A)}=\dfrac{c^2\sin A\sin B}{2\sin(A+B)}$ 이다

예제 4.20 [126] (AIME, '1999) 삼각형 ABC 에서 $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ 이 닮음이 되도록 점 P 를 잡자. $AB=13$, $BC=14$, $CA=15$ 일 때, $\tan\angle PAB$ 를 구하여라.

정리 4.21 A, B, C 는 삼각형의 세 각이고, a, b, c 는 각 A, B, C 에 각각 대응되는 변의 길이이고, $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ 라고 할 때, 다음이 성립한다.

$$\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\sin B=\frac{2}{ca}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\sin C=\frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

증명 : 헤론의 공식과 사인을 이용한 삼각형의 넓이를 구하는 공식으로부터 쉽게 알 수 있다.

정리 4.22 삼각형 ABC에서 다음이 성립한다.

$$1+\cos A=\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{2bc},\ 1-\cos A=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}$$
$$1+\cos B=\frac{(a+b+c)(a-b+c)}{2ca},\ 1-\cos B=\frac{(-a+b+c)(a+b-c)}{2ca}$$
$$1+\cos C=\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab},\ 1-\cos C=\frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{2ab}$$

증명 : 제2 코사인법칙 $2bc\cos A=b^2+c^2-a^2$ 에서 양변에 $2bc$ 를 더한 후 정리하면

$$2bc(1+\cos A)=(b+c)^2-a^2=(b+c+a)(b+c-a)$$

이다. 양변을 $2bc$ 로 나누면

$$1+\cos A=\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{2bc}$$

이다. 또, 제2 코사인법칙 $2bc\cos A=b^2+c^2-a^2$ 에서 양변에 -1 를 곱하고, $2bc$ 를 더한 후 정리하면

$$2bc(1-\cos A)=a^2-(b-c)^2=(a+b-c)(a-b+c)$$

이다. 양변을 $2bc$ 로 나누면

$$1-\cos A=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}$$

이다. 같은 방법으로 나머지들로 증명할 수 있다. 자세한 증명은 독자에게 맡긴다.

정리 4.23 삼각형 ABC 에서 다음이 성립한다.

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\ \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-ac)}{bc}},\ \tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\frac{r}{s-a}$$
$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}},\ \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}},\ \tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}=\frac{r}{s-b}$$
$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}},\ \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}},\ \tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}=\frac{r}{s-c}$$

증명 : $\sin A=2\sin\frac{A}{2}cos\frac{A}{2}=2\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\tan\frac{A}{2}}$ 이다. 따라서,

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{\sin A\tan\frac{A}{2}}{2} \qquad (1)$$

이다. 또한,

$$\sin A=\frac{2S}{bc},\ \tan\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a} \qquad (2)$$

이다. 식 (1), (2)으로부터

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{2S}{bc}\cdot\frac{r}{s-a}\cdot\frac{1}{2}$$

이다. 위 식에 $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$ 를 대입하면,

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(s-b)(s-c)}{bc}$$

이다. 즉, $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ 이다. 같은 방법으로 나머지 관계식을 증명할 수 있다.
나머지 관계식의 증명은 독자에게 맡긴다.

예제 4.24 [127] (CRUX, 3119) $\triangle ABC$ 에서 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ 내접원의 반지름의 길이를 r 이라고 할 때,

$$3\sqrt{3}\sqrt{\frac{r}{s}}\leqq\sqrt{\tan\frac{A}{2}}+\sqrt{\tan\frac{B}{2}}+\sqrt{\tan\frac{C}{2}}\leqq\sqrt{\frac{s}{r}}$$

임을 증명하여라.

정리 4.25 (삼각함수의 항등식) 임의의 x, y, z 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)=4\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y+z}{2}\sin\frac{z+x}{2}$$

$$\cos x+\cos y+\cos z+\cos(x+y+z)=4\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{y+z}{2}\cos\frac{z+x}{2}$$

증명 : 삼각함수의 합 또는 차를 곱으로 고치는 공식으로부터

$$\begin{aligned}
&\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)\\
&=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+2\cos\frac{x+y+2z}{2}\sin\frac{-x-y}{2}\\
&=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}-2\cos\frac{x+y+2z}{2}\sin\frac{x+y}{2}\\
&=2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{x+y+2z}{2}\right)\\
&=2\sin\frac{x+y}{2}\left(-2\sin\frac{2x+2z}{4}\sin\frac{-2y-2z}{4}\right)\\
&=4\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y+z}{2}\sin\frac{z+x}{2}
\end{aligned}$$

이다. 같은 방법으로

$$\cos x+\cos y+\cos z+\cos(x+y+z)=4\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{y+z}{2}\cos\frac{z+x}{2}$$

이다.

정리 4.26 삼각형 ABC에서 외접원의 반지름 R, 내접원의 반지름 r, 방접원의 반지름 r_a, r_b, r_c 사이에 다음이 성립한다.

(1) $4R+r=r_a+r_b+r_c$ 이다.

(2) $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{r_a}+\dfrac{1}{r_b}+\dfrac{1}{r_c}$ 이다.

(3) $1+\dfrac{r}{R}=\cos A+\cos B+\cos C$ 이다.

풀이 :

(1) $S=rs$ 이고, $S=(s-a)r_a=(s-b)r_b=(s-c)r_c$ 이므로

$$r_a+r_b+r_c-r=S\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}-\frac{1}{s}\right)$$

이다. 그런데,

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}=\frac{2s-a-b}{(s-a)(s-b)}=\frac{c}{(s-a)(s-b)}$$

$$\frac{1}{s-c}-\frac{1}{s}=\frac{s-s+c}{s(s-c)}=\frac{c}{s(s-c)}$$

이다. 위 두식을 변변 더하여 정리하면,

$$\frac{c}{(s-a)(s-b)}+\frac{c}{s(s-c)}=\frac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{abc}{S^2}$$

이다. 따라서,

$$r_a+r_b+r_c-r=S\cdot\frac{abc}{S^2}=\frac{abc}{S}=4R \text{ 이다.}$$

(2) $S=(s-a)r_a=(s-b)r_b=(s-c)r_c$ 이므로

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{s-a}{S}+\frac{s-b}{S}+\frac{s-c}{S}$$

$$=\frac{3s-a-b-c}{S}$$

$$=\frac{3s-2s}{S}=\frac{s}{S}=\frac{1}{r} \text{ 이다.}$$

(3) 정리 4.25와 관계식

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{sabc}=\frac{S^2}{s\cdot 4RS}=\frac{sr}{4sR}=\frac{r}{4R}$$

에 의하여,

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \qquad (3-\text{a})$$

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \qquad (3-\text{b})$$

이다. 식 (3−a)와 (3−b)로부터

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R} \text{ 이다.}$$

제3절 연습문제

연습문제 4.1★★★

128) $AB = BC = CD = DE = 3$, $EF = FG = GH = HA = 2$ 인 원에 내접하는 팔각형 $ABCDEFGH$ 의 넓이를 구하여라.

연습문제 4.2 ★★★

129) $\angle ABC = 80^\circ$, $\angle ACB = 70^\circ$, $BC = 2$ 인 삼각형 ABC 가 있다. 점 A, B 에서 각각 변 BC , CA 에 수선을 긋자. 이 두 수선이 점 H 에서 만난다고 하자. 이 때, AH 의 길이를 구하여라.

연습문제 4.3 ★★★

130) $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC 에서, $\angle B = 60^\circ$, $AB = 1$ 이다. $\triangle BCP$, $\triangle CAQ$, $\triangle ABR$ 이 삼각형 ABC 의 외부에 만들어진 정삼각형이다. QR 과 AB 가 점 T 에서 만난다고 하자. $\triangle PRT$ 의 넓이를 구하여라.

연습문제 4.4 ★★★

131) $\triangle ABC$ 에서 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ 라고 하자. $\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{b}{c+a}=1$ 일 때, $\angle A$ 를 구하여라.

연습문제 4.5 ★★★

132) 점 P 가 정사각형 $ABCD$ 의 내부의 한 점에서 $PA=5$, $PB=3$, $PC=7$ 일 때, 이 정사각형의 한 변의 길이를 x 라 할 때, x^2 을 구하여라.

연습문제 4.6 ★★

133) $\triangle ABC$ 에서 변 BC, CA, AB 를 $2:1$, $3:1$, $4:1$ 로 내분하는 점을 각각 D, E, F 라 한다. 이 때, $\triangle ABC : \triangle DEF$ 를 구하여라.

연습문제 4.7 ★★★★

134) $\triangle ABC$ 에서, $\angle PAB = 10^\circ$, $\angle PBA = 20^\circ$, $\angle PCA = 30^\circ$, $\angle PAC = 40^\circ$ 를 만족하는 내부의 점 P 를 잡을 수 있다면 $\triangle ABC$ 는 이등변삼각형임을 보여라.

연습문제 4.8 ★★★★★

135) $AB = AC = 5$, $BC = 6$ 인 이등변삼각형 ABC 에서, 점 D 는 AC 위의 점이다. $\angle APC = 90^\circ$ 를 만족하도록 점 P 를 선분 BD 위에 잡자. $\angle ABP = \angle BCP$ 일 때, $AD : DC$ 를 구하여라.

연습문제 4.9 ★★★

136) $AB = AC$ 인 삼각형 ABC 에서, $\angle ABP = \angle ACP$ 를 만족하게 하는 점 P 가 있다면, 점 P 는 BC 위의 점이거나 BC 의 수직이등분선 위의 점임을 증명하여라.

연습문제 4.10 ★★★★★

137) $\triangle ABC$ 에서, $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ 일 때,

$$\frac{\cos^3 A}{a}+\frac{\cos^3 B}{b}+\frac{\cos^3 C}{c}<\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

임을 증명하여라.

연습문제 4.11 ★★★★

138) $\tan\angle A : \tan\angle B : \tan\angle C = 1 : 2 : 3$ 인 삼각형 ABC 에서, $\dfrac{AC}{AB}$ 를 구하여라.

연습문제 4.12 ★★★★

139) $\cos\angle A\cos\angle B\cos\angle C=\dfrac{1}{8}$ 을 만족하는 삼각형 ABC 는 정삼각형임을 보여라.

연습문제 4.13 ★★★★★

140)삼각형 ABC 에서, 변 CA 위의 점 D 와 변 AB 위의 점 E 가 $\angle DBC = 2\angle ABD$, $\angle ECB = 2\angle ACE$
를 만족하게끔 잡자. BD 와 CE 의 교점을 O 라고 하자. $OD = OE$ 가 성립한다면, 삼각형 ABC 는 어떤 삼각형인가?

연습문제 4.14 ★★★

141)$0 < x < 45^\circ$ 인 x 에 대하여 삼각함수의 방정식 $\tan(4x) = \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$ 를 풀어라.

연습문제 4.15 ★★★

142)볼록사각형 $ABCD$ 에서 $\angle A = \angle C$, $AB = CD = 180^\circ$, $AD \neq DC$ 이다. 사각형 $ABCD$ 의 둘레의 길이가 640 일 때, $\cos A$ 를 구하여라.

연습문제 4.16 ★★★★

143)한 변의 길이가 1 인 정사각형 $ABCD$ 에서, AB 위의 한 점 P, AD 위의 한 점 Q 를 잡자. $\triangle APQ$ 의 둘레의 길이가 2 일 때, $\angle PCQ$ 를 구하여라.

연습문제 4.17 ★★★★★

144)$AB = CD = 24$ 인 직사각형 $ABCD$ 에서, 변 BC 위에 $DE = 25$ 이고, $\tan\angle BDE = 3$ 이 되도록 점 E 를 잡자. 점 A 에서 BD 에 내린 수선의 발을 F, AF 의 연장선과 DC 의 연장선과의 교점을 G, DE 의 연장선과 AG 와의 교점을 H, H 에서 DG 에 내린 수선의 발을 I 라 하자. 이 때, IG 의 길이를 구하여라.

연습문제 4.18 ★★★★

145)점 C 는 AB 를 지름으로 하는 반원 위에 있고, 점 D 는 호 BC 위에 있다. 선분 AC, CD, BD 의 중점을 각각 M, P, N 이라고 하자. $\triangle ACP$ 와 $\triangle BDP$ 의 외심을 각각 O, O' 이라고 할 때, $MN // OO'$ 임을 증명하여라.

연습문제 4.19 ★★★

146) $BC=3AB$ 인 직사각형 $ABCD$ 에서, 변 BC 위에 $BP=PQ=QC$ 를 만족하도록 점 P, Q 를 잡자. 그러면 $\angle DBC+\angle DPC=\angle DQC$ 임을 보여라.

연습문제 4.20 ★★★

147) $\triangle ABC$ 에서 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ 이고, $\angle C$ 의 이등분선과 AB 와의 교점을 D 라 할 때, $CD=\dfrac{2ab\cos\dfrac{C}{2}}{a+b}$ 임을 증명하여라.

연습문제 4.21 ★★★★

148) 삼각형 ABC 에서 $AB=AC=5$, $BC=6$ 이다. $BE=CF$, $\angle EBC\neq\angle FCB$, $\sin\angle EBC=\dfrac{5}{13}$ 가 되도록 점 E 와 F 를 각각 AC, AB 위에 잡자. BE 고아 CF 의 교점을 H, 점 H 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 K 라 할 때, HK 의 길이를 구하여라.

연습문제 4.22 ★★★

149)정삼각형 ABC의 변 BC의 3 등분점을 각각 D, E라 할 때, $\cos\angle DAE$의 값을 구하여라.

연습문제 4.23 ★★★★

150)네 변의 길이가 a, b, c, d로 정해져 있는 사각형 중에서 넓이가 최대인 것은 원에 내접하는 사각형임을 보여라.

연습문제 4.24 ★★★

151)예각삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선이 BC와 만나는 점을 D라 하자. 점 D를 지나고 BC에 수직인 직선이 선분 AD의 수직이등분선과 만나는 점을 E라 하고 직선 AE가 $\triangle ABC$의 외접원과 만나는 점을 F라 하자. $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $\sin\angle C=d$라 할 때, AF를 a, b, c, d로 나타내어라.

제 5 장 종합문제

종합문제 5.1 ★★★★

[152]마름모 $ABCD$에서 서로 마주보는 두 꼭지점 A, C를 각각 외부의 한 점 P와 이을 때, $PA=PC$이면 $PB\cdot PD=PA^2-AB^2$임을 증명하여라.

종합문제 5.2 ★★★

[153] $AB=AC$인 이등변삼각형 ABC에서 변 BC 위의 점을 P라 할 때,
$AB^2-AP^2=BP\cdot CP$임을 증명하여라.

종합문제 5.3 ★★★

[154] $\angle A=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서 변 CA의 중점을 M이라 하자. M에서 BC에 내린 수선의 발을 D라 할 때, $AB^2=BD^2-CD^2$임을 증명하여라.

종합문제 5.4 ★★★★
155)평행사변형 $ABCD$에서 $\angle BAC$의 이등분선과 변 BC의 교점을 E라고 할 때, $BE+BC=BD$를 만족한다. $\frac{BD}{BC}$를 구하여라.

종합문제 5.5 ★★
156)$\triangle ABC$에서 점 B에서 대변 CA에 내린 수선의 발을 D, 점 C에서 대변 AB에 내린 수선의 발을 E, 점 D에서 변 BC에 내린 수선의 발을 G라 하자. DG와 EC의 교점을 F, BA의 연장선과 GD의 연장선의 교점을 H라 하자. 그러면, $GD^2=GF\cdot GH$임을 보여라.

종합문제 5.6 ★★★★
157)$\triangle$ABC에서 내접원과 변 BC, CA, AB와 만나는 점을 각각 D, E, F, 내심을 I라고 하자. FE의 연장선과 BI의 연장선의 교점을 P, EF의 연장선과 CI의 연장선의 교점을 Q라 하자. $\triangle DPQ$가 이등변삼각형이면, $\triangle ABC$도 이등변삼각형임을 보여라.

종합문제 5.7 ★★
158) 점 P는 직사각형 $ABCD$ 내부에 있는 한 점으로 $PA=4$, $PD=8$, $PC=7$을 만족할 때, PB의 길이를 구하여라.

종합문제 5.8 ★★★
159) 예각삼각형 ABC에 대하여 변 BC의 중점을 M, 변 AB의 중점을 N이라고 하고, 변 AC를 3등분하는 두 점을 D, E라고 하자. 두 선분 BD와 BE가 각각 선분 AM과 두 점 P, Q에서 만날 때, $\frac{PQ}{AM}$의 값을 구하여라.

종합문제 5.9 ★★★
160) $\triangle ABC$에서 $AB=20$, $BC=29$, $CA=21$이다. 변 BC 위에 $BD=8$, $EC=9$가 되도록 점 D와 E를 잡자. 이 때, $\angle DAE$를 구하여라.

종합문제 5.10 ★★

161)그림 5.1에서 점 E는 BC의 연장선 위의 점이고, $\triangle ABC$와 $\triangle CDE$는 정삼각형이다. AC와 DE의 중점을 각각 F와 G라고 하자. $\triangle ABC=24$, $\triangle CDE=60$일 때, $\triangle BFG$의 넓이를 구하여라.

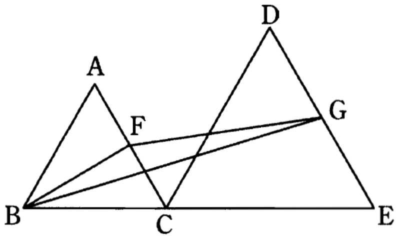


그림 5.1: 종합문제 5.10 관련그림

종합문제 5.11 ★★★

162)볼록오각형 $ABCDE$에서 $\angle BAE=60^\circ$, $BC=CD=DE$, $\angle BCD=\angle CDE=140^\circ$일 때, $\angle BAC$, $\angle CAD$, $\angle DAE$를 각각 구하여라.

종합문제 5.12 ★★★

163)삼각형 ABC의 외접원에서 AB의 연장선 위에 한 점 P를 잡고, 점 C와 연결하여 원과 만나는 점을 D라 할 때, 사각형 $ABCD$가 원에 내접한다. $BP=5$, $BD=3$, $CD=4$, $DP=6$일 때, AB와 CA의 길이를 구하여라.

종합문제 5.13 ★★★★

164) $\triangle ABC$에서 $\angle B$의 이등분선과의 CA와의 교점을 D, 점 A, C에서 BD 또는 그 연장선에 내린 수선의 발을 각각 E, F라고 하자. 점 D에서 BC에 내린 수선의 발을 M이라 할 때, $\angle DME = \angle DMF$임을 보여라.

종합문제 5.14 ★★★★★

165) $\triangle ABC$에서 $\angle C$의 이등분선과 변 AB와의 교점을 D, $\angle B$의 이등분선과 변 CA와의 교점을 E라 하자. 선분 DE 위의 임의의 점 P에서 변 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 X, Y, Z라 할 때, $PX = PY + PZ$임을 증명하여라.

종합문제 5.15 ★★★★

166) $AB = AC$인 이등변삼각형 ABC에 $BC = a$, $CA = AB = b$라 할 때, a, b는 정수이며. 서로소이다. 삼각형 ABC의 내심을 I, AI의 연장선과 BC와의 교점을 D라 하면, $\dfrac{AI}{ID} = \dfrac{25}{24}$이다. 이 때, $\triangle ABC$의 내접원의 반지름의 길이를 구하여라.

종합문제 5.16 ★★★★★

167)삼각형 ABC의 내부의 한 점 P에서, AC와 BP의 연장선과의 교점을 Q, AB와 CP의 연장선과의ㅏ 교점을 R이라 하자. $AR=RB=CP$, $CQ=PQ$일 때, $\angle BRC$를 구하여라.

종합문제 5.17 ★★★★★

168)삼각형 ABC에서 점 A에서 $\angle B$와 $\angle C$의 이등분선에 내린 발을 각각 A_1, A_2, 점 B에서 $\angle C$와 $\angle A$의 이등분선에 내린 발을 각각 B_1, B_2, 점 C에서 $\angle A$와 $\angle B$의 이등분선에 내린 발을 각각 C_1, C_2라 할 때,

$2(A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2)=AB+BC+CA$

가 성립함을 보여라.

종합문제 5.18 ★★★★

169)삼각형 ABC에서 변 BC 위의 한 점 D를 잡고, $\triangle ABD$와 $\triangle ACD$의 내접원을 각각 O_1, O_2라 하자. l을 두 원 O_1과 O_2의 BC가 아닌 공통외접선이라고 하자. l과 AD의 교점을 P라 하면 $2AP=AB+CA-BC$임을 증명하여라.

종합문제 5.19 ★★★

170) $AB = AC$인 이등변삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 D라 한다. $\angle ABC$의 삼등분선이 AD와 만나는 점을 A로부터 차례대로 M, N이라 하고, CN의 연장과 AB의 교점을 E라 하면 $EM \parallel BN$임을 증명하여라.

종합문제 5.20 ★★★★

171)삼각형 ABC의 각 B에 대한 방접원을 O, 원 O와 변 BA의 연장선과의 접점을 P, 점 P를 지나는 원 O의 지름의 다른 끝점을 Q라고 한다. 변 AB의 중점을 M, 점 M에 관한 점 P의 대칭점을 R(즉, $PM = MR$)이라 할 때, 세 점 Q, C, R은 같은 직선 위에 있음을 보여라.

종합문제 5.21 ★★★★

172)정삼각형 ABC읜 ㅐ부의 한 점 P에 대하여 $AP = 1$, $BP = \sqrt{3}$, $CP = 2$이라고 한다. 이 정삼각형의 한 변의 길이를 구하여라.

종합문제 5.22 ★★★

173) 선분 CD는 원 K의 지름이다. 선분 AB는 선분 CD에 평행인 현이고, 점 E는 원 K 위의 점으로서 선분 AE는 선분 CB와 평행이다. 점 F는 선분 AB와 선분 DE와의 교점이고, 점 G는 직선 CD 위의 점으로서 선분 FG는 선분 CB에 평행이다. 이 때, 직선 GA가 점 A에서 원 K에 접함을 증명하여라.

종합문제 5.23 ★★★★

174) 원 O에 내접하고 $\angle A < \angle B$인 예각삼각형 ABC를 생각하자. 원 외부의 어떤 점 P가
$\angle A = \angle PBA = 180^\circ - \angle PCB$
를 만족시킨다고 하자. 직선 PB가 원 O와 만나는 B가 아닌 점을 D라 하고, 점 A에서 원 O에 접하는 접선이 직선 CD와 점 Q에서 만난다고 하자. 이 때, $CQ : AB = AQ^2 : AD^2$임을 보여라.

종합문제 5.24 ★★★★

175) $\triangle ABC$가 반지름의 길이가 1인 원에 내접해 있다. $\triangle ABC$의 둘레의 길이가 2_S이고, 세 변의 길이는 각각 a, b, c이다. 이 때, $(2_S - a)(2_S - b)(2_S - c) \geqq 32\triangle ABC$임을 증명하여라.

종합문제 5.25 ★★★

176) $AB < AC$인 삼각형 ABC에서, 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하고, $BX = CX$가 되도록 변 CA 위에 점 X를 잡자. 또, AD의 연장선과 삼각형 ABC의 외접원 O와의 교점을 P, BX의 연장선과 원 O와의 교점을 Q라 하자. 그러면, PQ는 원 O의 지름임을 보여라.

종합문제 5.26 ★★★

177) $\triangle ABC$에서 $4AD = AB$가 되도록 변 AB 위에 점 D를 잡자. $\angle ADE = \angle ECB$가 되도록 변 CA 위에 점 E를 잡자. 삼각형 ABC의 외접원 O와 DE의 연장선과의 교점을 P라 할 때, $PB = 2PD$임을 보여라.

종합문제 5.27 ★★★★

178) 삼각형 ABC에서, 넓이를 S, 내접원의 반지름의 길이를 r이라 할 때, $\frac{S}{r^2} \geqq 3\sqrt{3}$ 임을 증명하여라.

종합문제 5.28 ★★★

179)반지름의 길이가 R인 부채꼴 OAB(O가 중심)에 내접하는 반지름의 길이가 r인 원이 있다. 이 원의 중심을 I라 하자. 현 AB의 길이가 $2c$일 때, $\frac{1}{r}=\frac{1}{c}+\frac{1}{R}$임을 증명하여라.

종합문제 5.29 ★★★★

180) $AD \parallel BC$인 사다리꼴 $ABCD$에서 $DA=DB=DC$이고, CD의 수직이등분선이 AB의 연장선과 만나는 점을 E라 하자. $\angle BCE=2\angle CED$일 때, $\angle BCE$를 구하여라.

종합문제 5.30 ★★★★

181) $AB<AC$인 $\triangle ABC$에서 $\angle A$의 이등분선과 BC와의 교점을 D, BC의 중점을 M이라고 하자. 점 B에서 AD에 내린 수선의 발을 P, BP의 연장선과 AM과의 교점을 E라고 할 때, $ED \parallel AB$임을 증명하여라.

종합문제 5.31 ★★★

182) 원에 내접하는 사각형 $ABCD$에 대하여 변 AB 위에 중심 O를 갖는 다른 원이 사각형 $ABCD$의 다른 세 변 AD, DC, CB와 각각 E, F, G에서 접한다. $FC=\sqrt{2}$, $AO=3AE$일 때, AE의 길이를 a라고 하자. $4a^2$의 값을 구하여라.

종합문제 5.32 ★★★★

183) $\triangle ABC$의 내접원과 세 변 BC, CA, AB와의 접점을 D, E, F라고 하자. 세 직선 AD, BE, CF가 한 점 G에서 만날 때, 점 G를 삼각형 ABC의 게르곤느의 점이라고 한다. $\triangle ABC$에서 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $2_S=a+b+c$라고 할 때,

$$\frac{AG}{GD}=\frac{a(s-a)}{(s-b)(s-c)}$$

가 성립함을 보여라.

종합문제 5.33 ★★★

184) 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC에서 변 AB, CA의 중점을 각각 M, N이라고 할 때, AN 위의 점 E를 잡고, BE와 MN의 교점을 P라 하고, PC와 AB와의 교점을 F라 하자. $EC=x$일 때, FB의 길이를 x를 써서 나타내어라.

종합문제 5.34 ★★★

185) $\triangle ABC$에서 $AB=6$, $AC=8$이고, M은 BC의 중점, E, F는 각각 AC, AB 위의 점이라 하고, EF와 AM의 교점을 G라 하자. $AE=2AF$일 때, $\frac{EG}{GF}$를 구하여라.

종합문제 5.35 ★★★★

186) $AB=AC$인 이등변삼각형 ABC에서, BC의 중점을 D라 하고, 점 D에서 AC에 내린 수선의 발을 E, DE의 중점을 M이라 할 때, $AM\perp BE$임을 증명하여라.

종합문제 5.36 ★★★★

187) 호 AB의 중점을 M, 호 MB 위에 임의의 점 C를 잡자. M에서 AC에 내린 수선의 발을 D라 할 때, $2AD=AC+BC$임을 증명하여라.

종합문제 5.37 ★★★★

188) $\angle A=60^\circ$, $AB<AC$인 $\triangle ABC$에서, 외심, 수심, 내심을 각각 O, H, I, BC와 접하는 방접원의 중심을 I'라 하자. $AB=AB'$을 만족하는 점 B'을 AC 위에 잡고, $AC=AC'$을 만족하는 점 C'을 AB의 연장선 위에 잡으면 여덟 점 B, C, H, O, I, I', B', C'은 한 원 위에 있음을 보여라.

종합문제 5.38 ★★★★★

189)이등변삼각형이 아닌 $\triangle ABC$에서, 변 BC, CA, AB의 중점을 각각 D, E, F라 하자. $\triangle ABC$의 외접원과 AD, BE, CF의 연장선과의 교점을 각각 L, M, N이라 하자. $LM=LN$이면 $2BC^2=CA^2+AB^2$이 성립함을 보여라.

종합문제 5.39 39)★★★★

원 O의 현 UV의 중점을 M이라 하자. M을 지나는 임의의 두 현을 AC, BD라 할 때, AB, CD가 UV와 각각 X, Y에서 만난다고 하면, $MX=MY$임을 증명하여라.

종합문제 5.40 [40]★★★★
삼각형 ABC의 외심을 O, 수심을 H, 변 AC의 중점을 D라고 하자. 직선 BO가 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 또 다른 점을 E라 할 때, 세 점 H, D, E는 동일 직선 위에 있음을 보여라.

종합문제 5.41 [41]★★★
예각삼각형 ABC의 외심을 O라고 하자. 각 A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D, 점 D에서 변 BC에 수직인 직선이 직선 AO와 만나는 점을 E라고 할 때, 삼각형 ADE가 이등변삼각형임을 보여라. 단, 각 C는 서로 다르다.

종합문제 5.42 [42]★★★
정사각형 $ABCD$에 대하여, 변 CD의 중점을 M이라 하고, 변 AD위의 점 E가 $\angle BEM = \angle MED$를 만족시킨다고 하자. 두 선분 AM과 BE의 교점을 P라 할 때, $\dfrac{\overline{PE}}{\overline{BF}}$의 값을 구하여라.

종합문제 5.43 43)★★★★
$\triangle ABC$의 내부의 한 점 P에서 세 변 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 D, E, F라 하자. $\square AEPF$, $\square BFPD$, $\square CDPE$가 모두 원에 외접할 때, P는 $\triangle ABC$의 내심임을 증명하여라.

종합문제 5.44 44)★★★★
$\angle ABC = 2\angle ACB$, $\angle BAC > 90^\circ$인 $\triangle ABC$에서 점 C를 지나면서 변 AC에서 수직인 직선과 BA의 연장선과의 교점을 D라고 할 때, $\frac{1}{AB} - \frac{1}{BD} = \frac{2}{BC}$임을 증명하여라.

종합문제 5.45 45)★★★
$\triangle ABC$에서 $\angle B$의 이등분선과 CA와의 교점을 D, $\angle C$의 이등분선과 AB와의 교점을 E라 하자. BD와 CE의 교점을 I, 점 I에서 BC에 내린 수선의 발을 F라 하자. $\angle ADE = \angle BIF$이면 $\angle AED = \angle CIF$임을 증명하여라.

종합문제 5.46 [46]★★★
$\triangle ABC$에서 A에서 BC에 내린 수선의 발을 D, AD를 지름으로 하는 원이 AB, AC와 만나는 점을 각각 E, F라 할 때, $AE \cdot AB = AF \cdot AC$ 임을 증명하여라.

종합문제 5.47 [47]★★★★
$\angle A = 60^\circ$ 인 $\triangle ABC$에서 AB의 연장선 위에 $BC = BD$를 만족하도록 점 D를 잡자. 또, AC의 연장선 위에 $BC = CE$를 만족하도록 점 E를 잡자. 그러면, $\angle DBC = 2\angle CED$, $\angle BCE = 2\angle BDE$, $\angle CDE = 30^\circ$ 임을 보여라.

종합문제 5.48 [48]★★★★
$AB = CD$인 볼록사각형 $ABCD$에서, $\angle D = 2\angle B$일 때, $AB = CD$임을 보여라.

종합문제 5.49 [49]★★★
$AB=AD=CD$인 볼록사각형 $ABCD$에서 $\angle DBC=30^\circ$이면 $\angle A=2\angle C$임을 보여라.

종합문제 5.50 [50]★★★
$\triangle ABC$에서 $\triangle ABD$와 $\triangle ACE$가 정삼각형이 되도록 점 D와 E를 각각 변 AB와 AC바깥쪽에 잡는다. 네 점 D, B, C, E가 한 원 위에 있을 때, $AB=AC$임을 보여라.

종합문제 5.51 [51]★★★★
$\angle PAB=\angle QAC$, $\angle PCB=\angle QCA$가 되도록 점 P, Q를 $\triangle ABC$의 내부에 잡자. $AP:AQ=CP:CQ$일 때, $BP:BQ=AP:AQ$임을 보여라.

종합문제 5.52 [52]★★★★
원에 내접하는 정사각형 $ABCD$에서 점 M이 호 AB위의 점일 때, $MC \cdot MD > 3\sqrt{3} \cdot MA \cdot MB$임을 보여라.

종합문제 5.53 [53]★★★★★
$AB=BC$, $CD=DE$, $EF=FA$ 인 볼록육각형 $ABCDEF$ 에서 $\dfrac{BC}{BE}+\dfrac{DE}{DA}+\dfrac{FA}{FC} \geqq \dfrac{3}{2}$가 성립함을 보여라.

종합문제 5.54 [54]★★★★
$\triangle ABC$에서 내심을 I, AI의 연장선과 BC와의 교점을 D, BI의 연장선과 CA와의 교점을 E, CI의 연장선과 AB와의 교점을 F, $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$라고 할 때, $\dfrac{AD}{a}=\dfrac{BE}{b}=\dfrac{CF}{c}$이면 $\triangle ABC$가 정감각형임을 보여라.

종합문제 5.55 [55]★★★★

$\triangle ABC$에서 $\angle BAC$의 이등분선이 BC와의 교점을 D이라 하자. 점 A를 지나는 원 Γ가 BC와 점 D에서 접한다고 하자. 원 Γ와 AC와의 교점을 M, BM과 원 Γ와의 교점을 P, AP의 연장선과 BD와의 교점을 Q라 할 때, $BQ=DQ$임을 보여라.

종합문제 5.56 [56]★★★★

$\triangle ABC$에서 $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$, $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $\triangle ABC$의 내접원의 반지름의 길이를 r이라 할 때, $a\sin\alpha+bsin\beta+c\sin\gamma \geqq 9r$ 임을 보여라.

종합문제 5.57 [57]★★★

두 원 C_1과 C_2이 두 점 M, N에서 만나고, 원 C_1 위에 M, N이 아닌 다른 점 A가 있다. AM의 연장선과 원 C_2와의 교점을 B, AN의 연장선과 원 C_2와의 교점을 C라고 할 때, 점 A에서 원 C_1에 접하는 접선과 BC가 평행함을 보여라.

종합문제 5.58 [58]★★★★

한 변의 길이가 9인 정사각형 $ABCD$에서 $AP:PB=7:2$로 하는 점 P를 변 AB위에 잡자. 정사각형 $ABCD$에 내접하는 점 C를 중심으로 하고, CB를 반지름으로 하는 사분원 O를 그리자. 점 P를 지나는 접선과 원 O과의 교점 중 B가 아닌 점을 E라고 하고, PE의 연장선과 DA와의 교점을 Q, CE와 BD와의 교점을 K, AK와 PQ와의 교점을 M이라 할 때, AM을 구하여라.

종합문제 5.59 [59]★★★★

$\triangle ABC$ 에서 $AD > BC$ 가 되도록 BC위에 점 D를 잡자. $\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{BD}{AD-BC}$을 만족하도록 점 E를 AC위에 잡으면, $AD > BE$임을 보여라.

종합문제 5.60 [60]★★★★

$\angle ABC=\angle BCD=120^\circ$ 인 볼록사각형 $ABCD$에서 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2=\overline{AD}^2$이 성립하면, $\square ABCD$는 원에 외접함을 보여라.

종합문제 5.61 [61]★★★★
$\triangle ABC$의 내접원의 접선 중 BC에 평행한 직선과 변 AB, AC와의 교점을 각각 D, E라 할 때, $DE \le \frac{1}{8}(AB+BC+CA)$이 성립함을 보여라.

종합문제 5.62 [62]★★★★
정사각형 $ABCD$에서 변 BC, CD위에 각각 점 E, F를 잡자. 점 F에서 AE에 내린 수선의 발이 AE와 BD의 교점 G라고 하자. $AK=EF$를 만족하는 점 K를 FG위에 잡을 때, $\angle EKF$를 구하여라.

종합문제 5.63 [63]★★★★
$AC=2AB$인 $\triangle ABC$에서 외접원의 점 A와 C에서의 점 A와 C에서의 접선의 교점을 P라 할 때, BP가 호BAC를 이등분함을 보여라.

종합문제 5.64 [64)]★★★
평행사변형 $ABCD$에서 $\angle D$는 둔각이고, 점 D에서 변 AB, BC또는 그 연장선에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라고 하자. $DB=DC=50$, $DA=60$일 때, $DM+DN$을 구하여라.

종합문제 5.65 [65)]★★★
넓이가 1인 삼각형 ABC에서, $EF /\!/ BC$가 되도록 점 E, F를 각각 AB, AC위에 잡자. $\triangle AEF=\triangle EBC$일 때, $\triangle EFC$의 넓이를 구하여라.

종합문제 5.66 [66)]★★★
$BC=CA$인 이등변삼각형 ABC에서, 점 D는 AC위의 점이고, $\angle BAE=90^\circ$가 되도록 점 E를 BD의 연장선 위에 잡자. $BD=15$, $DE=2$, $BC=16$일 때, CD의 길이를 구하여라.

종합문제 5.67 [67]★★
두 원 C_1, C_2가 두 점 P, Q에서 만난다. 점 P를 지나는 직선과 C_1, C_2와의 교점을 각각 A, B, AB의 중점을 X이라 하자. 직선 QX와 원 C_1, C_2와의 교점을 각각 Y, Z라 할 때, X가 선분 YZ의 중점임을 보여라.

종합문제 5.68 [68]★★★
원에 내접하는 볼록사각형 $ABCD$가 내접원을 가지며, 두 대각선 AC와 BD의 교점을 P라 하자. $AB=1$, $CD=4$, $BP:DP=3:8$일 때, $\square ABCD$의 내접원의 넓이를 구하여라.

종합문제 5.69 [69]★★★★
$AB=8$, $BC=4$, $CD=1$, $DA=7$인 원에 내접하는 사각형 $ABCD$에서, 외접원의 중심을 O, 두 대각선 AC와 BD의 교점을 P라 하자. OP^2을 구하여라.

종합문제 5.70 [70]★★★
$AB=\sqrt{5}$, $BC=1$, $AC=2$인 삼각형 ABC에서 내심을 I라 하자. $\triangle IBC$의 외접원과 변 AB와의 교점을 P라 할 때, BP를 구하여라.

종합문제 5.71 [71]★★★★
$\triangle ABC$에서 변 BC, CA, AB위에 각각 점 D, E, F를 잡자. AD, BE, CF가 한 점 P에서 만난다고 하자. $\triangle AFP=126$, $\triangle FBP=63$, $\triangle CEF=24$일 때, $\triangle ABC$의 넓이를 구하여라.

종합문제 5.72 [72]★★★★
$\triangle ABC$에서 변 AC의 중점을 M, 점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자. 점A, C에서 $\angle B$의 이등분선 위에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 할 때, 네 점 H, P, M, Q가 한 원 위에 있음을 보여라.

종합문제 5.73 [73]★★★★★
$\triangle ABC$에서 내접원의 반지름의 길이가 5, 외접원의 반지름의 길이가 16이라고 하자. $2\cos B = \cos A + \cos C$를 만족할 때, $\triangle ABC$의 넓이를 구하여라.

종합문제 5.74 [74]★★★
반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 사각형 $ABCD$에서 대각선 AC는 원의 지름이고, $BD = AB$이다. AC와 BD의 교점을 P, $PC = \frac{2}{5}$일 때, CD의 길이를 구하여라.

종합문제 5.75 [75]★★★★
$\triangle ABC$에서 $AB = 15$, $BC = 12$, $CA = 13$이다. 변 BC의 중점을 M, $\angle B$의 이등분선과 변 CA와의 교점을 K, AM과 BK와의 교점을 O, 점 O에서 변 AB에 내린 수선의 발을 L이라 할 때, $\angle OLK = \angle OLM$임을 보여라.

풀이와 정답확인

1) 풀이 :
$\triangle DBE$와 $\triangle DCF$에서 $BD=CD$, $\angle BED=\angle CFD=90°$, $DE=DF$이므로 $\triangle BDE\equiv\triangle CDF$(RHS합동)이다. 따라서, $\angle B=\angle C$이다. 즉, 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다. □

2) 풀이 :
$AQ=QC$, $RQ /\!/ PC$이므로 삼각형 중점연결정리에 의하여 $RQ=\frac{1}{2}PC$이다. 한편 $BP=\frac{1}{3}PC$이므로

$$BP:RQ=\frac{1}{3}PC:\frac{1}{2}PC=2:3$$
$$PS:SR=BP:RQ=2:3$$

이다. 따라서, $RS=\frac{3}{5}PR=\frac{3}{5}AR$이다. 즉, $AR:RS=5:3$이다. □

3) 풀이 :
$\angle ACD=90°-\angle CAD=\angle ABC$이므로 $\triangle ACD$와 $\triangle ABC$는 닮음이다. 또한, 피타고라스 정리에 의하여 $AB=5$이다. $\frac{CD}{CA}=\frac{BC}{BA}$이므로 $CD=\frac{12}{5}$이다. □

4) 풀이 :
원의 반지름을 각각 x, y, z라고 하자. 그러면

$$y+z=a,\ z+x=b,\ x+y=c$$

이다. 따라서 이들을 더하면

$$x+y+z=s$$

이다. 정리 1.19 (내심의 기본성질(2))에 의하여 분해되는 선분의 길이는 x, y, z와 동일하다. □

5) 풀이 :
점 O는 삼각형 ABC의 외심이므로 $\angle OBC=\angle OCB$이다. 따라서,

$$\angle B-\angle C=\angle OBA-\angle OCA \qquad (1)$$

이다. 또한, $\angle OBA=\angle OAB$, $\angle OCA=\angle OAC$이므로 식 (1)에서

$$\angle B-\angle C=\angle OAB-\angle OAC \qquad (2)$$

이다. 한편 점 I는 삼각형 ABC의 내심이므로, $\angle IAB=\angle IAC$이다. 따라서,

$$\angle OAB-\angle OAC=(\angle IAB+\angle OAI)-(\angle IAC-\angle OAI)=2\angle OAI$$

이다. 식 (2)로 부터 $\angle B-\angle C=2\angle OAI$이다. 따라서, $\angle OAI=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$이다. □

6) 풀이 :
(그림 1.11 참고) 원 O''의 반지름의 길이를 x라 하면 $OO''=2r-x$, $O'O''=r+x$, $OB=x$, $O'B=r-x$이다. 직각삼각형 $OO''B$와 $O'O''B$에서 $O''B^2=OO''^2-OB^2=O'O''^2-O'B^2$이므로 $(2r-x)^2-x^2=(r+x)^2-(r-x)^2$이다. 이를 풀면 $x=\frac{r}{2}$이다. □

7) 풀이 :
(그림 1.13 참고) 삼각형 ABC에서 세 변 BC, CA, AB의 중점을 각각 D, E, F라 하자. 세 중선의 교점을 G라 하자. 점 D를 지나 BE에 평행한 선 위에 $BE=DE'$인 점 E'을 잡으면 사각형 $BDE'E$는 평행사변형이다. 그러면, 사각형

$DCE'E$는 평행사변형이다. EC의 중점을 G'라 하자. 삼각형 $E'AD$의 세 변은 중선과 같고, 모두 중선에 평행하다. 따라서,

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle E'AD} = \frac{\triangle CAD}{\triangle G'AD} = \frac{CA}{G'A} = \frac{4}{3}$$

이다. □

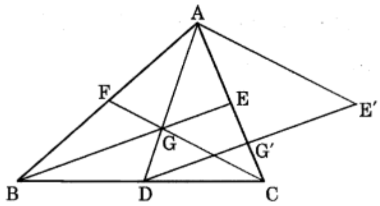


그림 1.13: 예제 1.27 관련그림

8) 풀이 :
변 BC에 접하는 방접원의 중심을 O_a라고 하자. 그러면,

$$\begin{aligned}\triangle ABC &= \triangle ABO_a + \triangle ACO_a - \triangle BCO_a \\ &= \frac{1}{2}cr_a + \frac{1}{2}br_a - \frac{1}{2}ar_a \\ &= \frac{1}{2}(b+c-a)r_a \\ &= (s-a)r_a\end{aligned}$$

이다. 마찬가지로

$$\triangle ABC = (s-b)r_b,\ \triangle ABC = (s-c)r_c$$

임을 알 수 있다. □

9) 풀이 :
예제 1.30로부터

$$\triangle ABC = (s-a)r_a = (s-b)r_b = (s-c)r_c = sr$$

이고, 이로부터

$$\frac{r}{r_a} = \frac{s-a}{s},\ \frac{r}{r_b} = \frac{s-b}{s},\ \frac{r}{r_c} = \frac{s-c}{s}$$

이다. 위 세 식을 변변 더하면

$$\frac{r}{r_a} = \frac{r}{r_b} = \frac{r}{r_c} = \frac{s-a}{s} + \frac{s-b}{s} + \frac{s-c}{s} = 1$$

이다. 따라서,

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

이다. □

10) 풀이 :
높이와 밑변의 길이가 같으므로, $\triangle ABD = \triangle ACD$이다. 그러므로 $\triangle OAB = \triangle OCD$이다. 따라서, $(\triangle OCD)^2 = \triangle AOD \cdot \triangle OBC = 20 \cdot 80 = 1600$이다. 즉, $\triangle OCD = 40$이다. □

11) 풀이 :
$AD = p$라고 하자. 정리 1.40(스튜워드의 정리)에 의하여, $m = n = \frac{1}{2}a$이므로

$$a\left(p^2 + \frac{1}{4}a^2\right) = \frac{1}{2}a(b^2 + c^2)$$

이다. 이를 정리하면

$$p = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

이다. □

12) 풀이 :

파프스의 중선 정리(정리 1.42)에 의하여 다음이 성립한다.

$$AB^2+AC^2=2\left(AK^2+\left(\frac{BC}{2}\right)^2\right)$$
$$AC^2+BC^2=2\left(CM^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2\right)$$
$$BC^2+AB^2=2\left(BL^2+\left(\frac{AC}{2}\right)^2\right)$$

(그림 1.19 참고) 위 세 식을 변변 더하면

$$AB^2+BC^2+CA^2=AK^2+CM^2+BL^2+\frac{AB^2+BC^2+CA^2}{4}$$

이다. 이를 정리하면, $\frac{3}{4}(AB^2+BC^2+CA^2)=AK^2+CM^2+BL^2$이다. 따라서, $AK^2+CM^2+BL^2=\frac{3}{4}\times 200=150$이다. □

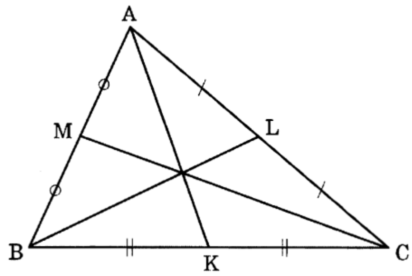


그림 1.19: 예제 1.43 관련그림

13) 풀이 :

$\triangle ABC$와 $\triangle ACD$에 중선의 정리를 이용하면

$$a^2+b^2=2(BF^2+AF^2),\ c^2+d^2=2(DF^2+AF^2)$$

이다. 위 두 식을 변변 더하면,

$$a^2+b^2+c^2+d^2=2(BF^2+DF^2)+4AF^2 \qquad (1)$$

이다. 또, $\triangle BFD$에서

$$BF^2+DF^2=2(EF^2+DE^2) \qquad (2)$$
$$4AF^2=AC^2 \qquad (3)$$
$$4DE^2=BD^2 \qquad (4)$$

이다. 따라서, 식 (1)~(4)로부터

$$a^2+b^2+c^2+d^2=4(EF^2+DE^2)+4AF^2=4EF^2+BD^2+AC^2$$

이다. □

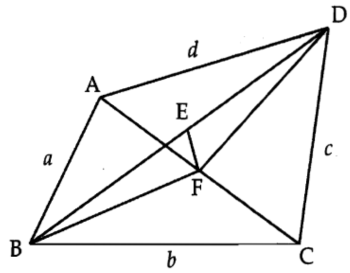


그림 1.20: 예제 1.44 관련그림

14) 풀이 :

일반성을 잃지 않고, $\angle A > \angle C$인 경우로 한다. 점 M이 $\triangle ABC$의 외심이므로 $AM=BM=CM$이다. $\triangle HCM$에서 $\angle HCM=30°$이므로 $\angle CMH=60°$이다. 그러므로 $\triangle ACM$은 정삼각형이다. 따라서, $AH:HM$이고, $AM=MB$이므로 $AB=2AM=4HM$이다. 따라서, $\triangle CHM:\triangle ABC=1:4$이다. □

15) 풀이 :

$BC /\!/ AB'$, $AB /\!/ CB'$인 점 B'를 잡으면 $\triangle ABC\equiv\triangle CB'A$이다. 또한 점 M에 대한 점 P, Q, R의 대칭인 점 P', Q', R'를 잡으면, 이 점은 AB'의 사등분점이다. $AP /\!/ CP'$이고, $BP:PC=1:3$이므로 삼각형의 닮음비에 의하여 $BP:PC=a:2(b+c+d)=1:3$이다.

$$3a=2(b+c+d) \qquad (1)$$

이다. 같은 방법으로 $AQ /\!/ CQ'$이므로

$$a+b=2(c+d) \qquad (2)$$

이다. 또한, $AR /\!/ CR'$이므로

$$a+b+c=6d \qquad (3)$$

이다. 식 (1), (2), (3)을 연립하여 풀면 $a:b:c:d=42:28:20:15$이다. □

16) 풀이 :

점 Q와 C를 연결하자. $\triangle PQR$의 면적을 S, $RQ=p$, $PR=q$, $QP=r$이라 하면 $\dfrac{PA}{QP}=\dfrac{QB}{RQ}=\dfrac{RC}{PR}=a$에서 $RC=aq$, $QB=ap$, $PA=ar$이다. 따라서, $\triangle CQR=aS$, $\triangle BCQ=a\triangle CQR=a^2S$이다. 따라서, $\triangle BCR=aS+a^2S=S(a^2+a)$이다. 같은 방법으로 $\triangle ABQ=\triangle ACP=aS+a^2S=S(a^2+a)$이다. 따라서, $\triangle ABC=3S(a^2+a)+S=61S$이다. 즉, $a^2+a-20=(a+5)(a-4)=0$이다. $a>0$이므로 $a=4$이다. □

17) 풀이 :

DA, CB의 연장선의 교점을 D'이라 하자. CE는 $\angle BCD$의 이등분선이고, DD'에 수직이므로 $\triangle CDE\equiv\triangle CD'E$이다. $ED=ED'$, $DE=2AE$이므로 $DD':AD'=4:1$이다. $AB /\!/ CD$이므로 $\triangle D'AB$와 $\triangle D'DC$는 닮음이다. 따라서, $\triangle D'DC:\triangle D'AB=16:1$이다. 따라서, $\triangle D'AB$의 넓이를 S라 하면 $\triangle D'DC=16S$이다. 또, $\triangle EDC=\dfrac{1}{2}\triangle D'DC=\dfrac{1}{2}\cdot 16S=8S$이다. 그러므로, $\square ABCE=16S-S-8S=7S$이다. 따라서, $\triangle EDC:\square ABCE=8S:7S=8:7$이다. □

18) 풀이:

BD의 연장선 위에 $DF=BC$가 되도록 점 F를 잡는다. 그러면 $BE=BA+AE=BC+BD=BF$이다. 또, $\angle B=60°$이므로 $\triangle BEF$는 정삼각형이다. 따라서, $\angle F=60°$이다. 따라서, $EF=BE$이다. 삼각형 BCE와 FDE에서 $\angle B=\angle F=60°$, $DF=BC$, $EF=BE$이므로 $\triangle BCE\equiv\triangle(FDE)$(SAS합동)이다. 따라서, $CE=DE$이다.

19) 풀이 :

점 A와 C를 연결하고, 점 F에서 밑변 BC에 내린 수선의 발을 G라 하자. 점 F는 $\triangle ABC$의 무게중심이므로 $CF:FD=2:1$이다. 즉, $CD:CF=3:2$이다. 또, $FG /\!/ DB$이므로 $\triangle CFG$와 $\triangle CDB$는 닮음이다. 따라서, $DB:FG=3:2$이다. 즉, $FG=\dfrac{x}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{x}{3}$이다. 따라서, $\triangle FEC=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{x}{3}\times\dfrac{y}{2}=\dfrac{xy}{12}$이다. □

20) 풀이 :

$CE=x$, $BF=y$라고 하자. 삼각형 중점연결정리에 의해 $MN /\!/ BC$이므로 $DN /\!/ BC$이다. 따라서, $\triangle EDN$와 $\triangle EBC$는 닮음이다. 그러므로 $\dfrac{DN}{BC}=\dfrac{EN}{CE}=\dfrac{CE-NC}{CE}$이다. 그런데, $CE=x$, $NC=\dfrac{3}{2}$이므로 $DN=3\times\dfrac{x-\frac{3}{2}}{x}=\dfrac{3(2x-3)}{2x}$이다. 마찬가지로, $\triangle FMD$과 $\triangle FBC$가 닮음이므로 $\dfrac{DM}{BC}=\dfrac{FM}{BF}=\dfrac{BF-MB}{BF}$이다. 그런데, $BF=y$, $MB=\dfrac{3}{2}$이므로 $DM=3\times\dfrac{y-\frac{3}{2}}{y}=\dfrac{3(2y-3)}{2y}$이다. 따라서, $MD+DN=MN=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{3}{2}$이다. 즉, $\dfrac{3(2x-3)}{2x}+\dfrac{3(2y-3)}{2y}=\dfrac{3}{2}$이다. 이를 정리하면 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$이다. 즉, $\dfrac{1}{CE}+\dfrac{1}{BF}=1$이다. □

21) 풀이 :

사다리꼴 $ABCD$에서 BD와 AC의 교점을 E라 하자. $ED=x$, $AE=y$, $CE=z$라 하면 $\triangle AED$와 $\triangle CEB$의 닮음의 의하여 $\dfrac{5-x}{x}=\dfrac{z}{y}$이다. 즉, $\dfrac{5}{x}=\dfrac{y+z}{y}$이다. 피타고라스의 정리와 삼각비에 의하여, $\dfrac{y}{x}=\dfrac{4}{3}$이다. 그러므로 사다리꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 5\times(y+z)=\frac{1}{2}\times 5\times\left(\frac{5y}{x}\right)=\frac{25}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{50}{3}$$

이다. □

22) 풀이 :

AI, BI, CI의 연장선과 BC, CA, AB와의 교점을 각각 D, E, F라고 하자. 그러면 각의 이등분선의 정리에 의하여 $DB:DC=c:b$이므로 $DB=\frac{ca}{b+c}$이다. 따라서,

$$AI:ID=AB:BD=c:\frac{ca}{b+c}=b+c:a$$

이다. 따라서, $\frac{\triangle IBC}{\triangle ABC}=\frac{ID}{AD}=\frac{a}{a+b+c}$이다. □

23) 풀이 :

삼각형 ABC에서 내심을 I라 하자 . 각 A의 이등분선 AI와 변 BC가 만나는 점을 D라고 하면, 내심과 무게중심이 일치하므로 $BD=CD$이다. 각의 이등분선의 정리에 의하여 $AB=AC$이다. 마찬가지로, $AB=BC=CA$이다. 따라서, 삼각형 ABC는 정삼각형이다. □

24) 풀이 :

삼각형 ABC에서 외심을 O라 하자. 내심과 외심의 일치하므로 외심에서 세 변 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자. 그러면, $\triangle AOF\equiv\triangle BOF$(RHS합동), $\triangle BOD\equiv\triangle COD$(RHS합동), $\triangle COE\equiv\triangle AOE$(RHS합동)이고, $\triangle AOE\equiv\triangle AOF$(RHS합동), $\triangle BOF\equiv\triangle BOD$(RHS합동), $\triangle COD\equiv\triangle COE$(RHS합동)이다. 따라서, $AB=BC=CA$이다. 즉 삼각형 ABC는 정삼각형이다. □

25) 풀이 :

수심을 O라고 하자. 삼각형 ABC에서 BC의 중점을 D라 하자. 수심의 정의에서 $AO\perp BC$이고, 외심의 정의에서 $OD\perp BC$이다. 그러므로 세 점 A, O, D는 한 직선의 위의 점이다. 그러면, $BD=DC$, $\angle ADB=\angle ADC$, AD가 공통이므로 $\triangle ADB\equiv\triangle ADC$이다. 따라서, $AB=AC$이다. 마찬가지로, $AB=BC=CA$이다. 즉, 삼각형 ABC는 정삼각형이다. □

26) 풀이 1 :

D는 BC의 내분점이므로 스튜워드 정리에 의하여,

$$AC^2+2AB^2=3(AD^2+BD\cdot CD)$$

이다. 그러면 $81+162=3(AD^2+18)$이다. 따라서, $AD^2=63$이다. □

풀이 2 :

제 2코사인 법칙을 이용하면, $AD^2=AC^2+DC^2-2\cdot AC\cdot DC\cdot\cos 60°$이다. 따라서, $AD^2=81+36-54=63$이다. □

27) 풀이 :

$\triangle ABC$가 정삼각형이므로 $AB=BC=CA$, $\angle ABC=\angle BCA=\angle CAB=60°$이다. $\triangle ADC$와 $\triangle BEA$에서 $AE=CD$, $\angle BAE=\angle ACD$, $AB=AC$이므로 $\triangle ABC\equiv\triangle BEA$이다. 따라서, $\angle DAC=\angle EBA$이다. 또, $BQ\perp AD$이고, $\angle QPB=\angle PAB+\angle PBA=\angle PAB+\angle DAC=60°$이므로 $\angle PBQ=30°$이다. □

28) 풀이 :
BC의 연장선 위에 $CF=DE$가 되게끔 점 F를 잡으면 $BE=AC$, $BE=CF$, $\angle BED=\angle ACF$이므로 $\angle BED\equiv\angle ACF$(SAS합동)이다. 따라서, $\angle BAC+\angle ABC=90°$, $\angle BAC+\angle FAC=90°$이므로 $\triangle ABF$는 직각삼각형이다. 따라서, 직각삼각형 ABF에서 $AF=BD=\frac{1}{2}$, $BF=BC+CF=BC+DE=1$이다. 따라서, 삼각비에 의하여 $\angle ABC=30°$이다. □

29) 풀이
점 M을 지나면서 BC에 평행한 선이 AD와 만나는 점을 N이라고 하자. 그러면 삼각형의 중점연결정리에 의하여, $MN=\frac{1}{2}DC=BD$이다. 따라서, $\triangle MNE=\triangle BDE$에서 $MN=DB$, $\angle NME=\angle EBD$, $\angle MNE=\angle BDE$이므로 $\triangle MNE\equiv\triangle BDE$($ASA$합동)이다. $BE=EM$이다.

30) 풀이
먼저 $\angle APB$의 크기를 구하자. $\triangle APB$를 점 B를 중심으로 하여 시계방향으로 90° 만큼 회전시켜서, $\triangle CQB$를 얻는다. 단, 점 Q는 점 P를 점 B를 중심으로 90° 회전시킨 점이다. 그러면 $\triangle APB\equiv\triangle CQB$이다. 점 P와 Q를 이으면 $\angle PBQ=90^\circ$, $PB=QB=2$이다. 그러면 $\triangle APB=\angle QPB=45^\circ$이다. 따라서, $PQ=2\sqrt{2}$이다. 또, $\triangle PQC$에서 $PC=3$, $CQ=1$, $PQ=2\sqrt{2}$ 이므로 $PC^2=QC^2+PQ^2$이다. 피타고라스 정리가 성립한다. 그러므로 $\angle PQC=90^\circ$이다. 따라서,
$\angle APB=\angle CQB=\angle PQC+\angle PQB=90^\circ+45^\circ=135^\circ$이다.
이제 정사각형 $ABCD$의 한 변의 길이를 구하자. $\angle APB+\angle BPQ=135^\circ+45^\circ=180^\circ$이므로 세 점 A, P Q는 한 직선 위에 있다. 따라서, $AQ=2\sqrt{2}+1$이다. 직각삼각형 AQC에서
$AC^2=1^2+(1+2\sqrt{2})^2=10+4\sqrt{2}$이다. 따라서, 정사각형 $ABCD$의 한 변의 길이는
$\frac{\sqrt{10+4\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=\sqrt{5+2\sqrt{2}}$이다.

31) 풀이
$AB=3k$, $DA=4k$라 하자. 단, $k>0$이다. 그러면 $\square ABCD=12k^2$이다. $\triangle ABF$와 $\triangle CDE$는 직각이등변삼각형이므로 $BF=CE=3k$이다. 따라서, $EF=2k$이다. 그런데 $\triangle ADG$와 $\triangle EFG$도 직각이등변삼각형이므로 그 높이는 각각 $2k$와 k이다. 따라서, $\triangle EFG=\frac{1}{2}\times 2k\times k=k^2$ 이므로, $\frac{\triangle EFG}{\square ABCD}=\frac{1}{12}$이다.

32) 풀이
점 E와 F가 각 변의 중점이므로 $\triangle ABE\equiv\triangle AFD=\frac{1}{4}\square ABCD$이고, $\triangle ECF=\frac{1}{8}\square ABCD$이다. 그러므로,

$$\begin{aligned}\triangle AEF&=\square ABCD-\triangle ABE-\triangle AFD-\triangle ECF\\&=\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)\square ABCD\\&=\frac{3}{8}\square ABCD\end{aligned}$$

이다. 따라서, $\frac{\triangle AEF}{\square ABCD}=\frac{3}{8}$이다.

33) 풀이
$AB\parallel DE$ 이므로 $\angle BAD=\angle ADE$(엇각)이고, AD가 $\angle A$의 이등분선이므로 $\angle BAD=\angle DAE$이다. 그러면

$\angle DAE = \angle ADE$ 이므로 $\triangle ADE$는 $AE = DE$인 이등변삼각형이다. 한 편 $FB \parallel DE$이고, $FE \parallel BD$ 이므로 $\square FBDE$는 평행사변형이다. 따라서, $FB = DE$이다. 그런데 위에서 $AE = DE$ 이므로 $AE = FB = 52$이다.

34) 풀이

점 O와 점 C, 점 I와 점 A를 각각 연결하자 $\angle A = 50^\circ$ 이고, 점 O는 $\triangle ABC$의 외심이므로 $\angle BOC = 100^\circ$ 이다. $\triangle OBC$는 $OB = OC$인 이등변삼각형이므로 $\angle OBC = 40^\circ$ 이다. 또, 점 I가 $\triangle ABC$의 내심이므로 $\angle IBC = \angle IBA$ 이고, $\angle ICB = \angle ICA$ 이므로

$$2\angle IBC + 2\angle ICB + 50^\circ = 180^\circ, \quad \angle IBC + \angle ICB = 65^\circ \qquad (1)$$

이다. $\angle OBC = 40^\circ$ 이므로 $\angle IBC = 30^\circ$ 또는 $\angle ICB = 50^\circ$ 이다. 따라서 (1)에 의해 $\angle ICB = 35^\circ$ 또는 $\angle ICB = 15^\circ$ 이다. 그런데, $\angle ICB = 15^\circ$ 인 경우는 $\angle C = 30^\circ$ 이므로 성립하지 않는다. 즉, $\angle OBC > \angle IBC$이다. 따라서, $\angle ICB = 35^\circ$ 이다.

35) 풀이

피타고라스의 정리를 이용하면

$$AD = \sqrt{14^2 + AC^2} = \sqrt{14^2 + 18^2 + 21^2} = \sqrt{961} = 31$$

이다. 따라서, 사각형 $ABCD$의 둘레의 길이는 84이다.

36) 풀이

삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하자. 또, CG의 중점을 H라 하자. 무게중심의 성질과 삼각형 중점연결정리를 이용하여

$$GD = \frac{1}{3}AD = 3, \; HD = \frac{1}{2}BG = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}BE = 4, \; GH = \frac{1}{3}CF = 5$$

임을 알 수 있다. 그러므로 GDH는 넓이가 6인 직각삼각형이다. 따라서, $\triangle GDH = \frac{1}{12}\triangle ABC$이므로, 삼각형 ABC의 넓이는 72이다.

37) 풀이

점 F에서 변 AC에 내린 수선의 발을 D라고 하자. 피타고라스의 정리에 의하여 $EC = \sqrt{BC^2 - BE^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$이다. 삼각형 중점연결정리에 의하여 $FD = \frac{1}{2}BE = 2$이다. 그러므로 $DC = \sqrt{CF^2 - FD^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$이다. 이로부터 $AD = DE = 2\sqrt{3} - 3$이다. 따라서,

$$\triangle ABC = \triangle ABE + \triangle BEC = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2(2\sqrt{3} - 3) + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3 = 8\sqrt{3} - 6\text{이다.}$$

38) 풀이

x, y를 지름 AB의 각각 십의 자리의 숫자와 일의 자리 숫자라고 하자. 즉, $AB = 10x + y$이다. 그러면 $CD = 10y + x$이다. $OH = p$라고 하자. 점 H는 CD의 중점이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$$\left(\frac{1}{2}AB\right)^2 - p^2 = \left(\frac{1}{2}CD\right)^2$$

이다. 그러므로

$$p = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 - CD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{99(x^2 - y^2)} = \frac{3}{2}\sqrt{11(x-y)(x+y)}$$

이다. p는 유리수이고, $1 \leqq x, \; y \leqq 9$이므로 $x + y = 11$, $x - y = 1$ 또는 4이다. 이를 풀면 $x = 6$, $y = 5$이다. 따라서, $AB = 65$이다.

39) 풀이

점 P가 호 AC 위에 있다고 가정해도 일반성을 잃지 않는다. 정삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R, AC의 중점을 M이라 하고, BM의 삼등분점을 각각 X, Y라 하자.
(점 B에 가까운 점이 X이다.) 그러면 Y는 정삼각형 ABC의 무게중심이므로, 외접원의 중심(외심)이다. $\triangle PAC$에서 파프스의 중선정리에 의하여

$$PA^2+PC^2=2(PM^2+AM^2) \qquad \cdots\cdots (1)$$

이고, $\triangle PBY$에서 파프스의 중선정리에 의하여

$$PB^2+PY^2=2(PX^2+BX^2) \qquad \cdots\cdots (2)$$

이다. $\triangle PXM$에서 파프스의 중선정리에 의하여

$$PX^2+PM^2=2(XY^2+PY^2) \qquad \cdots\cdots (3)$$

그런데 $BX=XY=YM$ 이므로 식 (1), (2), (3)에 의하여

$$\begin{aligned} PA^2+PB^2+PC^2+PY^2 &= 2(PM^2+PX^2)+2AM^2+2BX^2 \\ &= 4XY^2+4PY^2+2AM^2+2BX^2 \\ &= 4PY^2+6XY^2+2AM^2 \\ &= 4R^2+6\left(\frac{R}{2}\right)^2+2\left(\frac{AC}{2}\right)^2 \\ &= \frac{11}{2}R^2+\frac{AC^2}{2} \end{aligned}$$

이다. 즉,

$$PA^2+PB^2+PC^2=\frac{9}{2}R^2+\frac{AC^2}{2}$$

이다, 정삼각형 ABC가 주어지면, 외접원의 반지름의 길이 R와 AC의 길이는 일정하므로
$PA^2+PB^2+PC^2$도 일정하다.

40) 풀이

$BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $BD=x$ $CE=y$, $AF=z$라 하자. $\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)\leqq x^2+y^2+z^2$임을 보이면 된다. 그러면 $FB=c-z$, $DC=a-z$, $EA=b-y$이다. $\triangle PBD$, $\triangle PDC$, $\triangle PCE$, $\triangle PEA$, $\triangle PAF$, $\triangle PFB$의 여섯 개의 직각삼각형에 피타고라스의 정리를 적용하면

$$\begin{aligned} PB^2+PC^2+PA^2 &= x^2+PD^2+y^2+PE^2+z^2+PF^2 \\ &= (a-x)^2+PD^2+(b-y)^2+PE^2+(c-z)^2+PF^2 \end{aligned}$$

이다. 위 식을 정리하면 $ax+by+cz=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$이다. 그러므로, 코시 – 슈바르트 부등식에 의하여

$$\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)^2=(ax+by+cz)^2 \leqq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$

이다. 즉, $\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)\leqq (x^2+y^2+z^2)$이다, 등호는 $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$일 때, 성립한다.

41) 풀이

PB와 PQ를 이웃한 두 변으로 하는 평행사변형을 그리고 나머지 한 점을 O라 하면, $\angle OQC=\angle A=60^\circ$이다. 따라서, $\triangle OCQ$는 정삼각형이다. 즉, $\angle QCO=60^\circ$이다. 그러므로
$\angle OCB=\angle C-\angle QCO=70^\circ-60^\circ=10^\circ$이다, 또한, $\triangle OBC$는 이등변삼각형이므로,
$\angle OBC=\angle OCB=10^\circ$이다. 따라서, $\angle PBO=\angle B-\angle OBC=50^\circ-10^\circ=40^\circ$이다. 즉,
$\angle APQ=\angle PBO=40^\circ$이다.

42) 풀이

파프스의 중선정리에 의하여 $AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$에서 $36+100=2(52+BM^2)$이다. 따라서, $BM=4$이고,

$BC=8$이다. $AB^2+BC^2=CA^2$이 성립하므로 피타고라스의 정리로부터 $\triangle ABC$는 직각삼각형이다. 따라서, $\triangle ABC$ $=\frac{1}{2}\times 8\times 6=24$이다.

43) 풀이

$BA=\frac{1}{2}BC$ 이므로 $BD^2=\frac{1}{4}BC^2$이다. 이 식을 파푸스의 중선정리 $AB^2+AC^2=2(AD^2+BD^2)$에 대입하여 정리하면

$$4AD^2=AB^2+2CA^2-BC^2 \qquad \cdots\cdots (1)$$

이다. 마찬가지로

$$4BE^2=2BC^2+2AB^2-CA^2 \qquad \cdots\cdots (2)$$

이다. 식 (1), (2), (3)을 변변 더하면

$$4(AD^2+BE^2+CF^2)=3(BC^2+CA^2+AB^2)$$

이다.

44) 풀이

정리 2.2(삼각형의 넓이의 비에 대한 정리)로부터

$$\begin{aligned}\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}&=\frac{\triangle PBC}{\triangle ABC}+\frac{\triangle APC}{\triangle ABC}+\frac{\triangle ABP}{\triangle ABC}\\&=\frac{\triangle ABC}{\triangle ABC}=1\end{aligned}$$

이다.

45) 풀이

정리 2.2(삼각형 넓이의 비에 대한 정리)로부터

$$\begin{aligned}\frac{KF}{LF}=\frac{\triangle KBD}{\triangle LBD}=\frac{\triangle KBD}{\triangle KBL}\cdot\frac{\triangle KBL}{\triangle LBD}&=\frac{CD}{CL}\cdot\frac{AK}{AD}\\ \frac{\triangle ACD}{\triangle ACL},\frac{\triangle ACK}{\triangle ACD}&=\frac{\triangle ACK}{\triangle ACL}=\frac{KG}{LG}\end{aligned}$$

이다.

46) 풀이

$\triangle ABL$의 넓이를 S라 하자. 정리 2.2 (삼각형의 넓이의 비에 대한 정리)에 의해, $\triangle CAL=3S$이고, $\triangle BCL=\frac{S}{3}$이다. 주어진 조건에 의해 $\triangle ABL+\triangle BCL+\triangle CAL=\triangle ABC=1$ 이므로 $S+\frac{S}{3}+3S=1$이다. 따라서, $S=\frac{3}{13}$이다. 즉, $\triangle ABL=\frac{3}{13}$이다. 마찬가지로,

$\triangle BCM=\triangle CAK=\frac{3}{13}$임을 알 수 있다. 그러므로

$$\begin{aligned}\triangle KLM&=\triangle ABC-\triangle BAL-\triangle BCM-\triangle CAK\\&=1-\frac{1}{13}-\frac{3}{13}-\frac{3}{13}=\frac{4}{13}\end{aligned}$$

이다.

47) 풀이

BB'와 CC'이 만나는 점을 O라고 하고, OA와 $A'B'$이 A_1에서 만난다고 하자. 그러면

$\triangle A'B'C'$과 $\triangle ABC$가 닮음이므로

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A_1B'}{AB}$$

이다. 그러므로 A_1과 A'는 같은 점이다. 따라서, AA', BB', CC'는 한 점에서 만난다.

48) 풀이

메네라우스 정리에 의하여,

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BC}{CD} \cdot \frac{DF}{FA} = 1$$

이다. 따라서, $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{DF}{FA} = 1$이다. 그러므로 $AF : FD = 1 : 1$이다.

49) 풀이

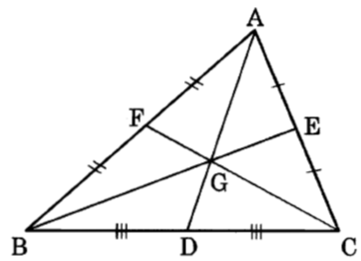
(그림 2, 10 참고) 삼각형 ABC에서 변 BC, CA, AB의 중점을 각각 D, E, F라 하자.
그러면, AD, BE, CF가 중선이므로

$$\frac{AF}{FB} = \frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = 1$$

이다. 따라서,

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

이다. 체바의 정리의 역에 의하여 세 선분 AD, BE, CF는 한 점에서 만난다.



50) 풀이

(그림 2, 11참고) 삼각형 ABC에서 $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$라 하자. 또, 꼭지점 A, B, C에서 변 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자. 그러면 삼각비에 의하여,

$$\frac{AF}{FB} = \frac{b\cos A}{a\cos B},\ \frac{BD}{DC} = \frac{c\cos B}{b\cos C},\ \frac{CE}{EA} = \frac{a\cos C}{c\cos A}$$

이므로

$$\frac{AF}{FV} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

이다. 체바의 정리의 역에 의하여 세 선분 AD, BE, CF는 한 점에서 만난다.

51) 풀이

(그림 2,12 참고) 삼각형 ABC에서 $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$라 하자. 또, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$의 내각의 이등분선이 변 BC, CA, AB와 만나는 점을 각각 D, E, F라 하자. 그러면 내각의 이등분선의 정리에 의하여

$$\frac{AF}{FB} = \frac{b}{a},\ \frac{BD}{DC} = \frac{c}{b},\ \frac{CE}{EA} = \frac{a}{c}$$

이다. 따라서,

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} = 1$$

이다. 체바의 정리에의 역에 의하여 세 선분 AD, BE, CF는 한 점에 만난다.

52) 풀이

(그림 2,13 참고) 삼각형 ABC에서 $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$라 하자. 또, $\angle A$의 내각의 이등분선이 BC와 만나는 점을 D라 하고, $\angle B$, $\angle C$의 외각의 이등분선이 변 CA, AB의 각 연장선과 만나는 점을 E, F라 하자. 그리고, 점 A에서

BC에 평행선을 그어 FC와 만나는 점을 G라 하자. 이 때, $\triangle ACG$는 이등변삼각형이고, $AG=b$ 이므로, $\frac{AF}{FB}=\frac{AG}{BC}=\frac{b}{a}$이다. 마찬가지로, $\frac{CE}{EA}=\frac{a}{c}$가 된다. 또한 AD는 $\angle A$의 내각의 이등분선이므로, $\frac{BD}{DC}=\frac{c}{b}$이다. 따라서,

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}=1$$

이다. 체바의 정리 역에 의하여 세 선분 AD, BE, CF는 한 점에서 만난다.

53) 풀이

$\triangle DKL$과 점 B에 체바의 정리를 적용하면

$$\frac{DA}{AK}\cdot\frac{KF}{FL}\cdot\frac{LC}{CD}=1 \qquad (1)$$

이다. $\triangle DKL$과 직선 ACG에 메네라우스의 정리를 적용하면,

$$\frac{DA}{AK}\cdot\frac{KG}{GL}\cdot\frac{LC}{CD}=1 \qquad (2)$$

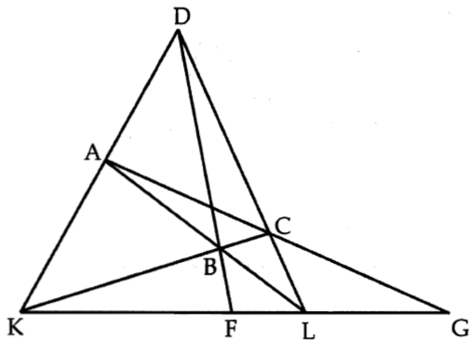


그림 2.14: 예제 2.18 관련그림

이다. 식 (1)을 식 (2)으로 나누면

$$\frac{KF}{FL}=\frac{KG}{GL}$$

이다.

54) 풀이

삼각형 중점연결정리에 의해 $DE \parallel BC$이다, BC의 연장선 위에 $EF \parallel DC$가 되게 점 F를 잡으면 $\square DCFE$는 평행사변형이다. 그러므로 $EF=DC=BE$이다. 따라서, $\triangle EBF$는 이등변삼각형이다. 그러므로 $\angle EBC=\angle EFC=\angle DCB$이다. 또, BC는 공통, $CD=BE$이므로 $\triangle BCE \equiv \triangle CBD$($SAS$합동)이다. $\angle ABC=\angle ACB$이다. 즉, $\triangle ABC$는 이등변삼각형이다.

55) 풀이

BD의 중점을 G라 하자. 그러면 삼각형 중점연결정리에 의하여

$$GN=\frac{1}{2}BC, \qquad GM=\frac{1}{2}DA$$

이다. $BC=DA$ 이므로 $GN=GM$이다. 따라서, $\triangle GNM$는 이등변삼각형이다. 즉, $\angle GNA=\angle GMN$이다. 또, GN

$\| BC$, $GM \|\ DA$이므로, 평행선에 동위각과 엇각의 성질에 의하여
$$\angle BFM = \angle GNM = \angle GMN = \angle AEM$$
이다.

56) 풀이

그림 2.20과 같이 $\triangle ABC$의 각 변 위에 $\triangle PQR$의 둘레가 최소가 되는 경우를 살펴보자.
(i) P를 직선 AB, AC에 대하여 대칭이동시킨 점을 각각 P', P''이라 하고 직선 P', P''이 $\triangle ABC$의 변과 만나는 점을 R', Q'이라 하면 $\triangle PQ'R'$의 둘레의 길이가 $P'P''$의 길이가 최소이다. (그림 2.21 참고)

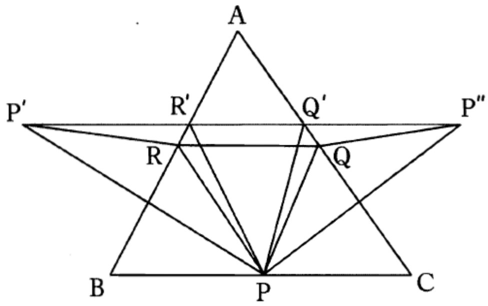


그림 2.21: 파그나노의 문제 풀이 (1)

(ii) 점 P의 위치가 변하면 $P'P''$의 길이가 변하므로 (i)의 경우가 $\triangle PQR$은 둘레가 최소인 삼각형이 아니다. 그런데, 점 P의 위치에 관계없이 $\angle P'AP'' = 2\angle BAC$로 일정하고,
$AP' = AP = AP''$ 이므로 AP의 길이가 가장 짧을 때, $AP' = AP''$의 길이가 최소가 되어 $P'P''$ 길이가 최소이다. (그

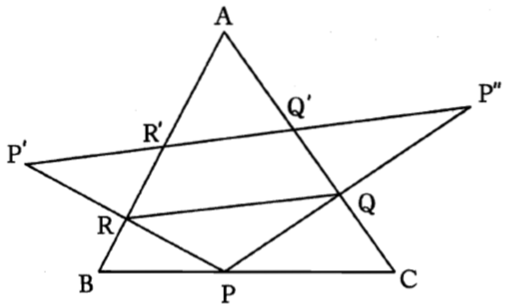


그림 2.22: 파그나노의 문제 풀이 (2)

림 2 .22 참고)

따라서, (i), (ii)에 의하여 점 P가 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발일 때, $\triangle PQR$의 둘레의 길이가 최소이다. 같은 방법으로 점 Q, R이 각각 B, C에서 CA, AB에 내린 수선의 발일 때, $\triangle PQR$의 둘레의 길이가 최소가 된다. 이와 같이 $\triangle ABC$에서 꼭지점에서 내린 수선의 발을 꼭지점으로 하는 PQR이 둘레의 길이가 최소인 삼각형이다.

57) 풀이

변 AB위에 AD 대하여 점 C와 대칭이 되는 점 C'을 잡자. 그러면 $AC=AC'$고, $\angle CAD=\angle C'AD$다. 또, AP가 공통이므로 $\triangle AC'P\equiv\triangle ACP$($SAS$합동)이다. 따라서, $PC'=PC$다. 그러므로 $PB-PC<BC'$이다. 그런데, $AB-AC=AB-AC'=BC'$ 이므로 $AB-AC>PB-PC$이다.

58) 풀이

(그림 2,23 참고) 점 D를 중심으로 하여 $\triangle DBE$ 반시계 방향으로 120° 돌리면 $\angle ADB=120^\circ$, $DA=DB$이므로 점 B는 점 A에 대응되고, 점 E는 점 G에 대응된다. 그리고 F와 G를 연결한다. 볼록 육각형 $ADBECF$의 내각의 합이 720°이고, 세 내각이 $\angle ADB=\angle BEC=\angle CFA=120^\circ$ 이므로

$$\angle DBE+\angle ECF+\angle FAD=360^\circ$$

이다. 또, $\angle DAF=\angle DBE$이다, 따라서, $\angle GAF=\angle ECF$이다. 또한 $AG=BE=EC$, $AF=CF$ 이므로 $\triangle AFG\equiv\triangle CFE$($SAS$합동)이다. 따라서, $\angle AFG=\angle CFE$, $FG=FE$이다. $\angle CFA=120^\circ$ 이므로 $\angle EFG=120^\circ$, $\angle EDG=120^\circ$ 이다. $\triangle\ ^\circ$ 와 $\triangle FEG$에서 $DE=DG$, $FE=FG$ 이므로 DF는 두 이등변삼각형의 대칭축이다. 따라서, DF는 $\angle EDG$와 $\angle EFG$를 이등분한다. 즉, $\angle EDF=60^\circ$, $\angle EFD=60^\circ$이다. 따라서, $\triangle DEF$는 정삼각형이다.

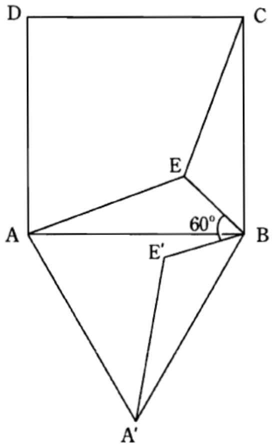


그림 2.24: 예제 2.35 관련그림

59) 풀이

(그림 2.24 참고) 회전이동을 이용하여 풀자. 점 B를 중심으로 반 시계방향으로

$\triangle BEA$를 60° 회전시켜 $\triangle BE'A$를 얻으면 $EE'=EB$, $E'A'=EA$이다. 따라서, CA'은 E로부터 세 점 A, B, C까지의 거리의 합의 최솟값이다. 즉, $CA'=\sqrt{2}+\sqrt{6}$이다. $\triangle BCA'$에서 $BC=BA'$, $\angle CBA'=150^\circ$이다. 정사각형 $ABCD$의 한 변의 길이를 x라 하자. 제 2코사인법칙을 이용하면 $(2+\sqrt{6})^2=x^2+x^2-2x^2\cos 150^\circ=(2+\sqrt{3})x^2$이다. 이를 풀면 $x^2=4$이다. 즉, $x=2$이다.

60) 풀이

$\triangle ABC$의 내접원 반지름의 길이를 π, 내심 I에서 변 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자. 그러면 $ID=IE=IF=r$이고, 에로도스 모델의 정리로부터

$$AI+BI+CI\geq 2(ID+IE+IF)=6r$$

이다. 따라서, AI, BI, CI 중 적어도 하나는 $2r$보다 크거나 같다.

61) 풀이

$AG : GA' = BG : GB' = CG : GC' = 2 : 1$ 이므로 $\triangle ABC$와 $\triangle A'B'C'$은 닮음이고, 점 A와 점 A'이점 G를 중심으로 서로 반대방향에 있으므로 닮음비는 $-\frac{1}{2}$이다.

62) 풀이

AC를 AB로 옮기는 소용돌이 변환을 생각하자. 점 D가 이 소용돌이 변환으로 옮겨지는 점을 P라고 하자. 그러면 $\triangle ADC$와 $\triangle APB$는 닮음이다. 소용돌이 변환의 성질(정리 2.45)로부터 $\triangle ABC$와 $\triangle APD$도 닮음이다. 따라서,

$$BP \cdot AC = AB \cdot CD, \qquad PD \cdot AC = BC \cdot AD$$

이다, 삼각부등식으로부터 $BP + PD \geq BD$ 이므로

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = (BP + PD) \cdot AC. \geq BD \cdot AC$$

이다. 단, 등호는 P가 BD 위에 있을 때, 즉, $\angle ACD = \angle ABD$일 때, 성립한다. 이 경우는 볼록사각형 $ABCD$가 원에 내접할 때이다.

63) 풀이 :

원O에 사각형 ABCD에 내접하므로 AO는 $\angle BAD$의 이등분선이고, $AB + CD = BC + DA$ 이다. 따라서

$$DA - CD = AB - BC \tag{1}$$

이다. $\triangle ADC$의 내접원과 변 CA와 접점을 H라 하자. 그러면 $2AH = AC + DA - CD$이다.
식(1)에 의하여

$$2AH = AC + AB - BC$$

이다. 즉 H는 삼각형ABC의 내접원과 변 CA의 접점이다. 따라서, AH는 삼각형 AEF의 높이이다.
K가 $\triangle AEF$의 외심과 AH가 $\triangle AEF$의 높이라는 조건으로부터 AK는 AH의 등각켤레점이다. 그러므로 $\angle EAK = \angle HAF = \frac{1}{2}\angle HAD$이다. 또한, $\angle BAE = \frac{1}{2}\angle BAH$이다. 따라서

$$\angle BAK = \angle BAE + \angle EAK = \frac{1}{2}\angle BAH + \frac{1}{2}\angle HAD = \frac{1}{2}\angle BAD$$

이다. 즉 AK는 $\angle BAD$의 이등분선이다. 그러므로 A, K, O는 한 직선 위에 있다.

64) 풀이:

$(BCQF) \barwedge (DAPF) \barwedge (CBQF)$이므로 $(BC, QF) = (CB, QF) = \frac{1}{(BC, QF)}$이다.
즉, $(BC, QF)^2 = 1$이다. 또, B, C, Q, F는 서로 다른 점이다. 따라서, $(BC, QF) = -1$이다.
즉, B, Q, C, F는 조화점열이다. 따라서, A, P, D, F도 조화점열이다.

65) 풀이:

EF가 AD, BC와 만나는 점을 각각 R, S라 하자. 그러면 Q, A, R, D와 Q, B, S, C는 조화점열로 비조화비가 -1로 같다. 따라서, AB, CD, RS는 한 점 P에서 만난다.
즉, P, E, F는 한 직선 위에 있다.

66) 풀이:
AC와 BD가 평행할 때와 평행하지 않을 때로 나누어 생각하자.
(ⅰ) AC와 BD가 평행할 때, 평행사변형 ABDE, CDFA에서 BD = AD, DF = AC이므로 BF = CE이다. 사각형 EFBC는 평행사변형이므로, EF와 BC는 평행하다.

(ⅱ) AC와 BD가 평행하지 않은 때, 이 두 직선의 교점을 O라고 하자. 그러면 $\triangle OAB$과 $\triangle ODE$가 닮음이므로 $\frac{OA}{OB}=\frac{OE}{OD}$이다. 또 $\triangle OCD$와 $\triangle OAF$가 닮음이므로 $\frac{OC}{OD}=\frac{OA}{OF}$이다. 그러므로 $OB \cdot OE = OA \cdot OD = OC \cdot OF$이다. 그래서 $\frac{OE}{OF}=\frac{OC}{OB}$이다.
따라서, EF와 BC는 평행하다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $EF \parallel BC$이다.

67) 증명 :
삼각형 ABC에 메네라우스의 정리를 적용하면

$$\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CO}{OA}=1$$

이다. 여서서, $AO=OC$, $AF=AB+BF$, $CE=BC-BE$이므로,

$$\frac{AF}{BF}=\frac{AB+BF}{BF},\ \frac{CE}{BE} \cdot \frac{OA}{CO}=\frac{CE}{BE}=\frac{BC-BE}{BE}=\frac{BC}{BE}-1$$

이다. 정리하면,

$$\frac{AB+2BF}{BF}=\frac{BC}{BE}$$

이다. 따라서, $BE(AB+2BF)=BC \cdot BF$이다.

68) 풀이 :
삼각형 넓이 QLP 대한 정리로부터

$$\begin{aligned}\frac{AF}{AB}+\frac{BH}{BC}+\frac{CE}{CA} &= \frac{\triangle AOC}{\triangle ABC}+\frac{\triangle BHA}{\triangle ABC}+\frac{\triangle CEB}{\triangle ABC} \\ &= \frac{\triangle AOC}{\triangle ABC}+\frac{\triangle BOA}{\triangle ABC}+\frac{\triangle COB}{\triangle ABC} \\ &= \frac{\triangle AOC+\triangle BOA+\triangle COB}{\triangle ABC} \\ &= \frac{\triangle ABC}{\triangle ABC}=1\end{aligned}$$

이다.

69) 풀이 :
$\triangle ABC$에 메네라우스 정리를 적용하면,

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CR}{RA}=\frac{2}{1} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{2}{1}=1$$

이다. 따라서, $PB:PC=1:4$이다.

70) 풀이 :
체바의 정리에 의하여

$$\frac{BF}{AR}\cdot\frac{CP}{BP}\cdot\frac{AQ}{CQ}=\frac{3}{2}\cdot\frac{CP}{BP}\cdot\frac{4}{3}=1$$

이다. 따라서 $BP:PC=2:1$이다.

71) 풀이 :
삼각형 ADC에서 메네라우스 정리에 의하여

$$\frac{EA}{CE}\cdot\frac{BD}{AB}\cdot\frac{FC}{DF}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{FC}{DF}=1$$

이다. 따라서 $CF:FD=16:5$이다.

72) 풀이 :
(그림 2.33 참고) 직각삼각형 ADF와 AFC는 닮음비가 $1:2$인 닮음이다. 그러므로 $DF=\frac{1}{2}AF$이고, $AF=\frac{1}{2}FC$이다. 따라서, $DF:FC=\frac{1}{2}AF:2AF=1:4$이다.
또한, 삼각형CBD에서 메네라우스의 정리에 의하여

$$\frac{BE}{CE}\cdot\frac{AD}{BA}\cdot\frac{FC}{DF}=\frac{BE}{CE}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{1}=1$$

이다. 따라서, $BE:EC=1:2$이다.

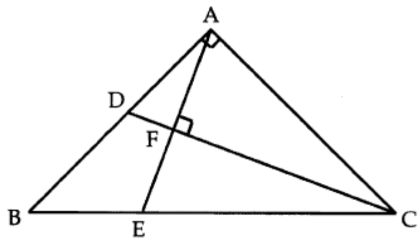


그림 2.33: 연습문제풀이 2.7 관련그림

73) 풀이 :
삼각형ADC에서 메네라우스 정리에 의하여

$$\frac{EC}{AE}\cdot\frac{BD}{DB}\cdot\frac{FA}{DF}=\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{FA}{DF}=1$$

이다. 즉, $\frac{FA}{DF}=1$이다. 또한 삼각형BCE에서 메네라우스 정리에 의하여

$$\frac{DC}{BD}\cdot\frac{AE}{CA}\cdot\frac{BF}{EF}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{BF}{EF}=1$$

이다. 즉, $\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{BF}}=\frac{1}{3}$이다. 따라서 $\frac{\mathrm{FD}}{\mathrm{AF}}+\frac{\mathrm{FE}}{\mathrm{BF}}=\frac{4}{3}$이다.

74) 풀이 :

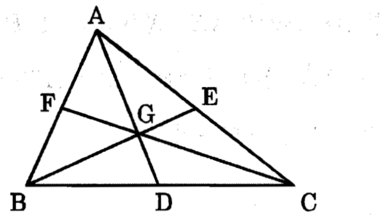


그림 2.34: 연습문제풀이 2.9 관련그림

그림 2.34처럼 삼각형 ABC의 중선을 AD, BE, CF라 하고, 무게중심을 G라 하자. $\mathrm{AD}=12$, $\mathrm{BE}=18$라 하자. 그러면 $\mathrm{AG}=12\times\frac{2}{3}=8$, $\mathrm{BG}=18\times\frac{2}{3}=12$이다. 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times \mathrm{AG}\times \mathrm{BG}\times \sin\angle \mathrm{AGB}=\frac{1}{2}\times 8\times 12\times \sin\angle \mathrm{AGB}=48\times \sin\angle \mathrm{AGB}\leqq 48$$

이다. $\angle \mathrm{AGB}=90^\circ$ 이면, 등호가 성립한다. 삼각형 ABG의 넓이가 각각5, 8, 3일 때, $\triangle \mathrm{ABC}$의 넓이의 $\frac{1}{3}$ 이므로 $\triangle \mathrm{ABC}$의 최대값은 $48\times 3=144$이다.

75) 풀이 :

$\triangle \mathrm{PDE}$의 넓이를 x, $\triangle \mathrm{PBC}$의 넓이를 y라 하자. $\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=\frac{\triangle \mathrm{ADC}}{\triangle \mathrm{DBC}}=\frac{\triangle \mathrm{ADE}}{\triangle \mathrm{DBE}}$이므로 $\frac{x+8}{8+y}=\frac{5}{x+8}$이 성립한다. 이를 정리하면,

$$x^2+16x+24=5y \tag{1}$$

이다. 또, $\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{PC}}=\frac{\triangle \mathrm{BDP}}{\triangle \mathrm{BPC}}=\frac{\triangle \mathrm{EDP}}{\triangle \mathrm{EPC}}$이므로

$$\frac{8}{y}=\frac{x}{3},\ xy=24 \tag{2}$$

이다. 식(1), (2)에 의하여 $x^3+16x^2+24x=5xy=120$이 성립한다. 이를 인수분해하면 $(x-2)(x^2+18x+60)=0$이다.이다. 그런데 x는 양의 실수이므로 $x=2$이다. 이것을 식 (2)에 대입하면 $y=12$를 얻는다. 따라서, $\triangle \mathrm{ABC}=16+x+y=30$이다.

76) 풀이 :

$\mathrm{AX}=3a$, $\mathrm{XB}=4a$, $\mathrm{AZ}=4b$, $\mathrm{ZC}=3b$이라 하면

$$\triangle \mathrm{AXZ}:\triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times 3a\times 4b\sin \mathrm{A}:\frac{1}{2}\times 7a\times 7b\times \sin \mathrm{A}=3\times 4:7\times 7$$

이므로, $\frac{\triangle \mathrm{AXZ}}{2009}=\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7}$이다. 같은 방법을 적용하면,

$$\frac{\triangle \mathrm{BXY}}{2009}=\frac{4}{7}\cdot\frac{20}{41},\qquad \frac{\triangle \mathrm{CYZ}}{2009}=\frac{21}{41}\cdot\frac{3}{7}$$

이다. 따라서,

$$\begin{aligned}\frac{\triangle XYZ}{2009} &= 1-\left(\frac{\triangle AXZ}{2009}+\frac{\triangle BXY}{2009}+\frac{\triangle CYZ}{2009}\right)\\ &= 1-\left(\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7}+\frac{4}{7}\cdot\frac{20}{41}+\frac{21}{41}\cdot\frac{3}{7}\right)\\ &= 1-\frac{1493}{2009}\end{aligned}$$

이므로 $\triangle XYZ = 2009-1493 = 516$

77) 풀이 :

삼각형 중점연결정리에 의하여, $BC = 2CP$, $PM = MA$이다. $\triangle ABP$에 메네라우스 정리를 적용하면

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BC}{CP}\cdot\frac{PM}{MA} = \frac{AN}{NB}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{1} = 1$$

이다. 즉, $AN : NB = 1 : 2$이다. 따라서, $\frac{AN}{AB} = \frac{AN}{AN+NB} = \frac{1}{3}$이다.

78) 풀이 :(IMO,'1982)

대각선BE와 AC의 교점을 P라고 하고, $\triangle CPE$와 직선BMN에 메네라우스 정리를 적용하면,

$$\frac{CM}{MP}\cdot\frac{PB}{BE}\cdot\frac{EN}{NC} = 1 \qquad (1)$$

이다.

(i) $AC = 1$로 두면, $AM = r$, $AP = \frac{1}{2}$이므로, $\frac{CM}{MP} = \frac{1-r}{r-\frac{1}{2}} = \frac{2-2r}{2r-1}$이다.

(ii) 삼각비를 이용하면, $PB = AB\cos\angle ABP = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{4}BE$이다. 즉, $\frac{PB}{BE} = \frac{1}{4}$이다.

(iii) $CE = AC = 1$, $NC = r$, $EN = 1-r$이므로, $\frac{EN}{NC} = \frac{1-r}{r}$이다.

그러므로 (i), (ii), (iii)에서 구한 값을 식 (1)에 대입하면

$$\frac{2-2r}{2r-1}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1-r}{r} = 1$$

이다. 이를 풀면 $r>0$이므로 $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

79) 풀이 :

AP가 $\angle A$의 외각의 이등분선이므로

$$BP : PC = AB : CA,\ 즉\ \frac{BP}{PC} = \frac{AB}{CA} \qquad (1)$$

이다. 마찬가지로, BQ, CR이 각각 $\angle B$, $\angle C$의 이등분선이므로

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{BC}{AB},\quad \frac{AR}{RB} = \frac{CA}{BC} \qquad (2)$$

이다. 그러므로, 식 (1)과 (2)로부터

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CA}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{BC}}=1$$

이다. 점 P가 변 BC의 연장선 위에 있고, 점 Q, R이 각각 변 CA, AB 위에 있으므로 메네라우스의 정리의 역에 의하여 세 점 P, Q, R은 한 직선 위에 있다.

80) AD가 접선이므로, $\angle\mathrm{CAD}=\angle\mathrm{ABD}$, $\angle\mathrm{ADC}=\angle\mathrm{BDA}$이다. 따라서 $\triangle\mathrm{ABD}$와 $\triangle\mathrm{CAD}$는 닮음(AA닮음)이다. 그러므로,

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{CD}},\ 즉,\ \frac{\mathrm{AB}^2}{\mathrm{AC}^2}=\frac{\mathrm{AC}^2}{\mathrm{CD}^2}$$

이다. 또, 방멱의 원리에 의하여 $\mathrm{AD}^2=\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DB}$이므로,

$$\frac{\mathrm{AB}^2}{\mathrm{AC}^2}=\frac{\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DB}}{\mathrm{CD}^2}=\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{CD}}$$

이다. 같은 방법으로

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}=\frac{\mathrm{CA}^2}{\mathrm{BC}^2},\ \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=\frac{\mathrm{BC}^2}{\mathrm{AB}^2}$$

이다. 따라서,

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1$$

이다. 그러므로 메네라우스의 정리의 역에 의하여 세 점 D, E, F는 한 직선 위에 있다.

81) 풀이 :
직선DEF 와 $\triangle\mathrm{ACK}$에 메네라우스의 정리를 적용하면,

$$\frac{\mathrm{KF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DA}}\cdot\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EK}}=1$$

이다. 또, $\mathrm{CD}=\mathrm{DA}$이므로 $\frac{\mathrm{KF}}{\mathrm{FC}}=\frac{\mathrm{EK}}{\mathrm{AE}}$이다. 내각의 이등분선의 정리에 의하여 $\frac{\mathrm{EK}}{\mathrm{AE}}=\frac{\mathrm{CK}}{\mathrm{CA}}$이다.
즉 $\frac{\mathrm{KF}}{\mathrm{FC}}=\frac{\mathrm{CK}}{\mathrm{CA}}$이다. 그리고, B에서 CE에 내린 수선의 발을 G, E에서 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.
그러면, 네 점 B, K, G, C는 한 원에 있고, $\angle\mathrm{EBG}=\angle\mathrm{ECK}$이다. 또, $\angle\mathrm{ACK}=\angle\mathrm{ABC}$, $\angle\mathrm{ACE}=\angle\mathrm{ECK}$이다. 따라서, $\angle\mathrm{EBG}=\angle\mathrm{CBG}$이다. 그러면 $\mathrm{BE}=\mathrm{BC}$이다. 그러므로 $\mathrm{CK}=\mathrm{EH}$이다.
또, $\mathrm{EH}\parallel\mathrm{AC}$, $\mathrm{EC}\parallel\mathrm{KH}$이므로

$$\frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BC}}=\frac{\mathrm{BK}}{\mathrm{BE}}$$

이다. 즉, $\frac{\mathrm{CK}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{BK}}{\mathrm{BE}}$이다. 따라서, $\frac{\mathrm{KF}}{\mathrm{FC}}=\frac{\mathrm{BK}}{\mathrm{BE}}$이다. 또,

$$\frac{\mathrm{KF}}{\mathrm{FC}-\mathrm{KF}}=\frac{\mathrm{BK}}{\mathrm{BE}-\mathrm{BK}}$$

이다. 즉, $\frac{\mathrm{KF}}{\mathrm{KC}}=\frac{\mathrm{BK}}{\mathrm{KE}}$이다. 따라서, $\triangle\mathrm{BKF}$와 $\triangle\mathrm{EKC}$는 닮음이고, $\angle\mathrm{FBK}=\angle\mathrm{CEK}$이다.
따라서, $\mathrm{BF}\parallel\mathrm{CE}$이다.

82) 풀이 : (KMO,'1987)

$\angle ABD=\alpha$, $\angle CBD=\beta$라 하면, 삼각형의 넓이의 비에 대한 정리로부터

$$\triangle ABD:\triangle BCD=\frac{1}{2}AB\cdot BD\cdot \sin\alpha:\frac{1}{2}BC\cdot BD\cdot \sin\beta=AD:DC=2:1$$

이다. 따라서,

$$AB\sin\alpha=2BC\sin\beta \qquad (1)$$

이다. 그러므로 삼각형의 넓이의 비에 대한 정리로부터

$$\begin{aligned}EG:GF&=\triangle BEG:\triangle BFG\\&=\frac{1}{2}BE\cdot BG\sin\alpha:\frac{1}{2}BF\cdot BG\sin\beta\\&=2\sin\alpha:\sin\beta &&(BE=2BF\text{이므로})\\&=2\sin\alpha:\frac{AB}{2BC}\sin\alpha &&(\text{식}(1)\text{로부터})\\&=4BC:AB\end{aligned}$$

이다. 따라서, $EG:GF=4BC:AB$이다.

83) 풀이 : (IMO,'1978)

주어진 원의 중심을 O라 하자. 이 원이 삼각형 ABC의 외접원과의 교점을 D, PQ의 중점을 I라 하자. 이등변삼각형의 성질에 의하여 네 점 A, I, O, D는 한 직선 위에 있다. 원 O에 대하여 점 D를 지나는 접선과 AB, AC의 연장선과의 교점을 각각 B', C'라 하자. 이제 $\triangle ABC$를 중심 A에 대한 닮음변환 $\triangle AB'C'$를 생각하자. 그러면 닮음비 $k=\dfrac{AB'}{AB}$이다. 또한, 직각삼각형 AIP, ADB', ABD, APO는 모두 닮음이다. 따라서

$$\frac{AI}{AO}=\frac{\frac{AI}{AP}}{\frac{AO}{AP}}=\frac{\frac{AD}{AB'}}{\frac{AD}{AB}}=\frac{AB}{AB'}=\frac{1}{k}$$

이다. 이 닮음변환은 I를 O로 보낸다. O는 삼각형 $AB'C'$의 내심이므로 I 또한 $\triangle ABC$의 내심이다.

84) 풀이 :

$PA=PB$, PC는 공통, $BC=AC$이므로 $\triangle APC\equiv\triangle BPC$ (SSS합동)이다. 또, $BF=BC$, $\angle PBF=\angle PBC$, BP는 공통이므로 $\triangle BPF\equiv\triangle BPC$ (SAS합동)이다. 따라서

$\angle BFP=\angle BCP=\angle ACP=\dfrac{1}{2}\angle C=30^\circ$ 이다.

85) 풀이 :

삼각형 ACM과 직선 BPX에 메네라우스의 정리를 적용하면

$$\frac{AX}{XC}\cdot\frac{CP}{PM}\cdot\frac{MB}{BA}=1$$

이다. $\dfrac{CP}{PM}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{MB}{BA}=\dfrac{1}{2}$이므로 $AX=4XC$이다. 따라서 $XC=\dfrac{1}{5}AC$이다. 또 $YC=\dfrac{1}{2}AC$이므로 $XY=\dfrac{3}{10}AC$이다. 따라서, $\dfrac{CX+AY}{XY}=\dfrac{7}{3}$이다.

86) 풀이 :
A를 지나면서 BC에 평행한 직선과 DE의 연장선, DF의 연장선과의 교점을 각각 G, H라 하자.
체바의 정리에 의하여

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1 \qquad (1)$$

이다. $\triangle ECD$와 $\triangle EAG$가 닮음(AA닮음)이고, $\triangle FAH$와 $\triangle FBD$가 닮음(AA닮음)이므로,

$$\frac{CE}{EA}=\frac{CD}{AG},\quad \frac{AF}{FB}=\frac{AH}{BD} \qquad (2)$$

이다. 식(2)를 식(1)에 대입하면

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CD}{AG}\cdot\frac{AH}{BD}=1$$

이다. 따라서, $AH=AG$이다. eHGS, $HG\parallel BC$, $AD\perp BC$이므로 $AD\perp HG$이다. 따라서, AD는 $\angle EDF$의 이등분선이다.

87) 풀이 : 몰리의 정리 증명에서 $\angle ZXU=\angle YXU=30^\circ$이다. 같은 방법으로 $\angle XYV=\angle ZYV=30^\circ$이고, $\angle YZW=\angle XZW=30^\circ$이다. 그러므로 세 직선 UX, VY, WZ는 정삼각형 XYZ의 내각의 이등분선이다. 즉 세 직선 UX, VY, WZ는 한 점에서 만난다.□

88) 풀이 : AC와 BD가 직교하는 점을 H라 하자. 두 대각선이 직교하면 각 변의 원주각은 모두 90° 보다 작고, 따라서, 각 변의 중심각은 모두 180° 보다 작다. 즉 원의 중심 O는 사각형 $ABCD$의내부에 존재한다. O에서 BD에 내린 수선의 발을 E라 하면 $OE\parallel AC$ 이다. 따라서, $\triangle AOC=\angle AEC$, $BE=ED$이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\square CDAO&=\triangle CDA+\triangle AOC=\triangle CDA+\triangle AEC\\&=\square AECD=AC\cdot ED\\&=AC\cdot BE=\frac{1}{2}AC\cdot BD\\&=\frac{1}{2}\square ABCD\end{aligned}$$

이다. 따라서, $\square ABCO=\square AECD$이다. 마찬가지로, $\square ABOD=\square BCDO$이다.□

89) 풀이 : 사각형 $FBDM$과 $ECDM$은 대각의 합이 180°이므로 원에 내접하는 사각형들이다. 그러므로,

$$\begin{aligned}\angle FDE&=\angle FDM+\angle EDM\\&=\angle FBM+\angle ECM\\&=(\angle ABC-\angle MBC)+(\angle ACB-\angle MCB)\\&=(\angle ABC+\angle ACB)-(\angle MBC+\angle MCB)\\&=(180^\circ-\angle A)-(180^\circ-\angle BMC)\end{aligned}$$

가 되고, 이것을 계산하면, $\angle FDE=76^\circ$이다. 따라서, 답은 (2)번이다. □

90) (풀이) 점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 D라 하면, $\angle ABD=60^\circ$이며, $\square ABPQ$는 원에 내접한다. 또한, $\angle PQC$는 $\angle ABP$의 내대각이므로 60°이다.(그림 3.17 참고) □

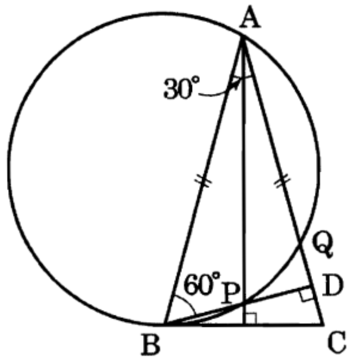


그림 3.17: 예제 3.25 관련 그림

91) 증명 : (그림 3.18 참고) BD위의 한 점 E가 $\angle BAE = \angle CAD$을 만족한다고 하자. 그러면, 호 AD에 대한 원주각의 성질에 의하여 $\angle ABE = \angle ABD = \angle ACD$이다. 따라서, $\triangle ABE$와 $\angle ACD$가 닮음이다.

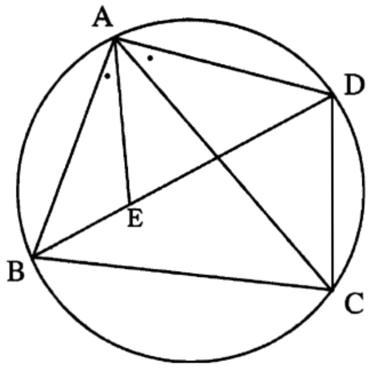


그림 3.18: 톨레미의 정리

$$AB \cdot CD = AC \cdot BE \qquad (1)$$

이다. 또한, $\angle EAD = \angle CAD + \angle EAC = \angle BAE + \angle EAC = \angle BAC$, 호 AB에 대한 원주각의 성질에 의하여 $\angle BCA = \angle ADB = \angle ADE$이다. 따라서, $\triangle ADE$와 $\angle ACB$는 닮음이다.

$$AD \cdot BC = AC \cdot DE \qquad (2)$$

이다. 식 (1), (2) 를 변변 더하면

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC(BE + DE) = AC \cdot BD$$

이다. □

92) 풀이 : 사각형 $ABPC$에서 톨레미의 정리에 의하여

$$PA \cdot BC = PB \cdot AC + PC \cdot AB$$

이다. 그런데, $AB = BC + CA$이므로 $PA = PB + PC$이다. □

93) 풀이: $BN = 4$, $NE = 3$이므로 $BE = 5$이다. 또한, $BK = BN = 4$이므로 $EK = 1$이다. 그러므로 삼각형 EBN과 EOK는 닮음비가 $3:1$인 닮음이다. 그래서, $OK = OM = \frac{4}{3}$, $KE = EM = 1$, $OE = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$이므로 톨레미의 정리

에 의해서 $\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=KM\cdot\frac{5}{3}$이다. 따라서, $5KM=8$이다.

94) 풀이 : P, Q, R, S가 등변사다리꼴의 두 대각선의 교점 아래에 있다고 하자. $AB=CD=a$, $BD=AC=b$라고 하자. a, b는 일정하다. 또, $AP:PB=m:n$이라고 하면 $\triangle ABD$에서 $\frac{PQ}{AD}=\frac{BP}{BA}=\frac{n}{m+n}$이므로

$$PQ=AD\cdot\frac{n}{m+n} \qquad (1)$$

이다. 같은 방법으로 $\triangle ABC$에서 $\frac{PR}{BC}=\frac{AP}{AB}=\frac{m}{m+n}$이므로

$$PR=BC\cdot\frac{m}{m+n} \qquad (2)$$

이다. 식 (1)과 (2)로부터

$$PR\cdot PQ=AD\cdot BC\cdot\frac{mn}{(m+n)^2} \qquad (3)$$

이다. 등변사다리꼴은 한 쌍의 대각이 합이 180°이므로 원에 내접한다. 그러므로 톨레미의 정리를 이용하면,

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$$

이다. 즉, $AD\cdot BC=b^2-a^2$이다. 따라서,

$$PR\cdot PQ=(b^2-a^2)\frac{mn}{(m+n)^2}$$

이 되어 일정하다. 같은 방법으로 P, Q, R, S가 등변사다리꼴의 두 대각선의 교점 위에 있을 때도 $PQ\cdot PR$는 일정하다. □

95) 증명 : $\angle DBC=\angle DAC=\theta$라고 하자. 그러면 $\angle BOE=\angle ADO=90^\circ-\theta$이다. 또, $\angle FOD=\angle BOE=90^\circ-\theta$이다. 그러므로 $\angle FDO=\angle FOD$이고, 따라서, $DF=OF$이다. 즉, F는 직각삼각형 ADO의 외심이므로 $AF=DF$이다. □

96) 풀이 : 사각형 $ABCD$의 두 꼭지점 A와 D의 내각의 이등분선을 그어 그 교점을 O라 하고, O에서 변 AB, BC, CD, DA에 내린 수선의 발을 각각 E, F, G, H라 하자. 그러면, $\triangle AOE\equiv\triangle AOH$($RHA$합동)이므로, $OE=OH$, $AE=AH$이다. $\triangle DOG\equiv\triangle DOH$이므로 $OG=OH$이다. 만약 $OF>OE$라면 $BF<BE$, $CF<CG$이다. 이 때, $AD+BC-(AB+CD)=(BE+CG)-(BF+CF)>0$이므로 문제의 조건에 모순이다. 만약 $OF<OE$라면 $BF>BE$, $CF>CG$이다 .이 때, $AD+BC-(AB+CD)=(BE+CG)-(BF+CF)<0$이므로 문제의 조건에 모순이다. 따라서, $OE=OF=OG=OH$이다 .따라서, 한 점 O에서 사각형의 네 변 AB, BC, CD, DA에 이르는 거리가 모두 같으므로, 사각형 $ABCD$는 점 O를 중심으로 하는 한 원에 외접한다. □

97) 증명1 : $PDB=\angle PEC=\angle PFA=90^\circ$이므로 P, D, B, F와 P, D, E, C는 각각 한 원 위에 있다. 그러므로 $\angle PDF=\angle PBF$, $\angle PDE+\angle PCE=180^\circ$이다. 또 A, B, P, C가 한 원 위에 있으므로, $\angle PBF=\angle PCE$이다. 따라서, $\angle PDE+\angle PDF=180^\circ$이다. 그러므로 세 점 F, D, E는 한 직선 위에 있다. □

증명2 : 삼각비와 메네라우스의 정리를 이용하여 증명하자.

$$AF=PA\cos\angle PAF,\ FB=PB\cos\angle PBF$$
$$BD=PB\cos\angle PBD,\ DC=PC\cos\angle PCD$$

$$CE = PC\cos\angle PCE,\ EA = PA\cos\angle PAE$$

이다. 그러므로

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA} = \frac{\cos\angle PAF\times\cos\angle PBD\times\cos\angle PCE}{\cos\angle PBF\times\cos\angle PCD\times\cos\angle PAE}$$

이다. 원주각의 성질에 의해서

$$\angle PAF = \angle PCD,\ \angle PBD = \angle PAE,\ \angle PCE = \angle PBF$$

이다. 따라서,

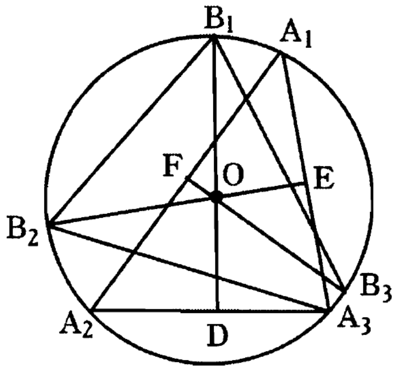
$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA} = 1$$

이다. 메네라우스 정리의 역에 의하여, 점 F, D, E는 한 직선 위의 점이다. □

98) 풀이 : $\angle PXC + \angle PXB = 180^\circ$ 이므로 B, X, C는 한 직선 위에 있다. 마찬가지로, $\angle PYC + \angle PYA = 180^\circ$ 이므로 A, Y, C도 한 직선 위에 있다. 또, $\angle PZA = \angle PZB = 90^\circ$ 이다. 그러므로 Z, A, B도 한 직선 위에 있다. 즉, X, Y, Z는 각각 점 P에 대한 삼각형 ABC의 세 변 BC, CA, AB의 수선의 발이다. 따라서, 심슨의 정리에 의하여 X, Y, Z는 한 직선 위에 있다. □

99) 풀이 : (KMO, '2007)

(아래그림 참고) 변 A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2의 수직이등분선과의 변과의 교점을 각각 D, E, F라 하자. $OE\perp A_1A_2$,



3.22: 연습문제풀이 3.1 관련그림

$OD\perp A_2A_3$이므로 네 점 O, D, A_3, E는 한 원 위에 있고, $\angle DOE = 100^\circ$가 된다. 맞꼭지각인 $\angle B_1OB_2 = 100^\circ$ 이므로 중심각과 원주각의 성질에 의하여 $\angle B_1B_3B_2 = 50^\circ$ 이다. 마찬가지 방법으로 $\angle B_1 = 75^\circ$, $\angle B_2 = 55^\circ$ 이다. 따라서, 가장 큰 각은 75° 이다. □

100) 풀이 : (KMO, '2007)

(아래그림 참고) AD와 BE의 교점을 Z라 하자. $\angle ZXC = \angle ZYC = 90^\circ$ 이므로 점 Z, X, C, Y는 한 원 위에

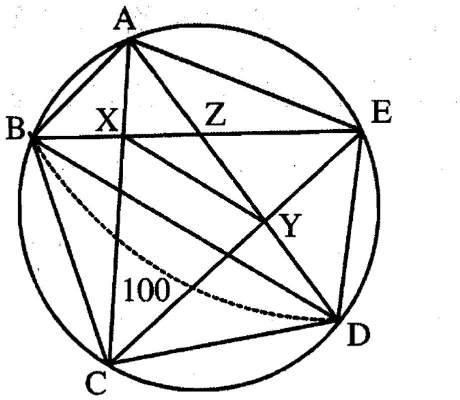


그림 3.23: 연습문제풀이 3.2 관련그림

있다. 또한, 내대각과 원주각의 성질에 의하여 $\angle ACE = \angle XZA$, $\angle ACE = \angle ABE$이므로 $\triangle ABX = \triangle AZX$이다. 따라서, $BX = ZX$이다. 마찬가지로 내대각과 원주각의 성질에 의하여 $\angle ACE = \angle EZY$, $\angle ACE = \angle EDY$이므로, $\triangle EZY \equiv \triangle EYD$이다. 따라서, $ZY = YD$이다. 그러므로 삼각형 ZBD의 중점연결정리에 의하여 $XY = \frac{1}{2} \cdot BD = 50$이다. □

101) 풀이 : 점 M에서의 공통 내접선과 선분 AB의 교점을 O라 하면, $AO = MO = BO$이므로, 점 O는 세 점 A, M, B를 지나는 원의 중심이 된다. $\angle AO_1M = 2\alpha$, $\angle BO_2M = 2\beta$라 하면, $\square ABO_2O_1$에서 $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$이다. 따라서, 점 A, O, B는 한 직선 위에 있다. 그러면, $\angle AOM = 180^\circ - 2\alpha = 2\beta$, $\angle BOM = 180^\circ - 2\beta = 2\alpha$이고, $\angle O_1OO_2 = \beta + \alpha = 90^\circ$이다. 따라서, $\triangle O_1OO_2$는 $\angle O_1OO_2 = 90^\circ$인 직각삼각형이다. 또, $O_1O_2 \perp OM$이므로, $\triangle O_1OM$과 $\triangle O_2OM$이 닮음이다. 따라서, $OM^2 = O_1M \cdot O_2M$이다. 즉, $r^2 = r_1r_2$이다. □

102) 풀이 : AD가 지름이 되도록 원주 위에 점 D를 잡자. $\angle ACB$, $\angle ADB$는 호 AD의 원주각이므로 $\angle ACB = \angle ADB = 30^\circ$이다. $AD = 6$, $\angle ADB = 30^\circ$이므로 직각삼각형의 성질과 삼각비에 의하여 $AB = 3$, $BD = 3\sqrt{3}$이다. $\triangle ACD$가 직각삼각형이므로 피타고라스정리에 의해 $AD^2 = AC^2 + CD^2$, $CD^2 = 36 - 4 = 32$이므로 $CD = 4\sqrt{2}$이다. 톨레미의 정리에 의하여 $AB \cdot CD + AC \cdot BD = AD \cdot BC$이다. 즉, $12\sqrt{2} + 6\sqrt{3} = 6BC$이다. 따라서, $BC = 2\sqrt{2} + \sqrt{3}$이다. □

103) 풀이 : $\angle QPR = \angle XQR$이므로 $\triangle XQR$과 $\triangle XPQ$은 닮음이다. $QX = a$, $RX = b$이라하면, 닮음비는 $2:3 = a:3+b = b:a$이다. 닮음비에 의해 $6 + 2b = 3a$, $a^2 = 3b + b^2$이므로 두 식을 연립하면 $\left(2 + \frac{2}{3}b\right)^2 = 3b + b^2$이고 정리하면 $5b^2 + 3b - 36 = 0$이고 인수분해하면 $(5b - 12)(b + 3) = 0$이다. 따라서, $RX = \frac{12}{5}$이다. □

104) 풀이 : 팔각형 $ABCDEFGH$의 내접원의 중심을 O라고 하자. 그러면 $\angle BOH = 90^\circ$, $\angle BAH = 135^\circ$이다. 또, $BH = \sqrt{2}R$이다. 삼각형 BAH에 제 2코사인법칙을 적용하면

$$2R^2 = 3^2 + 1^2 - 6\cos 135^\circ = 10 + 3\sqrt{2}$$

이다. 따라서, $R^2 = 5 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$이다. □

105) 풀이 : (KMO, '2007)

(아래그림 참고) 원의 중심을 O라 하고, 꼭지점 A_{17}과 중심 O를 연결하여 대각선 A_1A_{13}과 만나는 점을 B, 꼭지

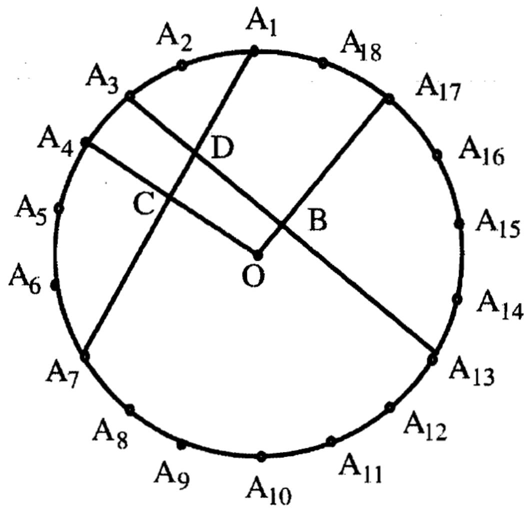


그림 3.24: 연습문제풀이 3.7 관련그림

점 A_4와 중심 O를 연결하여 대각선 A_1A_7과 만나는 점을 C라 하자. 대각선 A_1A_7, $A_{13}A_3$의 교점을 D라 하면 $A_{17}B\perp A_3A_{13}$, $A_1A_7\perp OA_4$이므로, 네 점 O, B, D, C는 한 원 위에 있고, $\angle A_{17}OA_4=100^\circ$이므로 $\angle BDC=80^\circ$이다. □

106) 풀이 : $EC=x$, $BE=y$, $ED=z$라고 하자. 그러면 $\angle EDC=\angle DBC=\angle CAD$이므로 $\triangle DCE$와 $\triangle ACD$는 닮음이다. 그러므로 $\dfrac{CD}{CA}=\dfrac{EC}{DC}$이다. 즉, $\dfrac{4}{6+x}=\dfrac{x}{4}$가 성립한다. 이로부터 $x=2$임을 알 수 있다. 삼각부등식에 의하여, $y+z<4+4=8$이다. 사각형 $ABCD$가 원에 내접하므로 방멱의 정리에 의하여 $yz=6x=12$이다. 그러므로, $y=3$, $z=4$ 또는 $y=4$, $z=3$임을 알 수 있다. 따라서, $BD=y+z=7$이다. □

107) 풀이 : $\angle BYC=\angle BZC=90^\circ$이므로 BC를 지름으로 하는 원 위에 점 Y, Z가 있다. $\angle BYC$의 이등분선과 원과의 교점을 D라고 하자. 그러면 $\angle BYD=\angle CYD=45^\circ$이므로 호 BD와 호 DC의 길이는 같다. 마찬가지로, $\angle BZC$의 이등분선과 원과의 교점을 F라고 하자. 그러면 $\angle BZF=\angle CZF=45^\circ$이므로 호 BF와 호 FC의 길이는 같다. 즉, $D=F$이다. 따라서, $\angle BYC$의 이등분선과 $\angle BZC$의 이등분선의 교점이 X이므로, $D=F=X$이다. 따라서, 현과 원주각의 성질에 의하여, $\angle BYX=\angle CYX$이므로 $BX=XC$이다. 즉, 삼각형 BXC는 이등변 삼각형이다. □

108) 풀이 : $\angle MFB=\angle MDB=90^\circ$이므로 네 점 M, D, B, F는 한 원 위에 있다. 또, $\angle MDC=\angle MEC=90^\circ$이므로 네 점 M, D, C, E는 한 원 위에 있다. 따라서, $\angle FBM=\angle FDM$, $\angle ECM=\angle EDM$이다. 그러므로 $\angle FDE=\angle FBM+\angle ECM$이다. 따라서, $\angle B=\angle C=60^\circ$이므로

$$\begin{aligned}\angle FDE=90^\circ &\iff \angle FBM+\angle ECM=90^\circ\\ &\iff \angle MBD+\angle MCD=30^\circ\\ &\iff \angle BMC=150^\circ\end{aligned}$$

이다. 따라서, 점 M은 $\triangle ABC$의 내부의 점이면서 BC를 현으로 갖고, 이 현에 대한 원주각이 150°인 원 위를 움직인다. □

109) 풀이 : 원 O과 변 AB, BC, CD, DA와 접하는 점을 각각 I, J, K, L이라 하자. 또, $OI=OJ=OK=OL=R$이

라고 하자. 단, R은 원 O의 반지름의 길이이다. 그러면 $\triangle IBJ$는 $\angle B=120^\circ$인 이등변삼각형이다. 그러므로 $\angle BIJ=\angle BJI=30^\circ$이다. 또한, $\angle OIJ=60^\circ$이다. 따라서, $\triangle OIJ$는 정삼각형이다. 즉, $OI=OJ=IJ=R$이다. $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30^\circ=\frac{\frac{IJ}{2}}{BJ}$이므로, $BJ=\frac{R}{\sqrt{3}}$이다. $\square OKDL$은 정사각형이고, $\triangle OIJ$와 $\triangle OIL$은 정삼각형이므로, $\angle KOJ=150^\circ$이다. 그러므로 $\angle OCJ=15^\circ$이다. 또한, $2-\sqrt{3}=\tan 15^\circ=\frac{OJ}{CJ}$이므로, $CJ=R(2+\sqrt{3})$이다. 주어진 조건으로부터 $BC=1=BJ+CJ$이므로 $R=\frac{\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}$이다. 그러므로 $DL=R$, $AL=BJ=\frac{R}{\sqrt{3}}$이므로 $AD=AL+DL=\frac{R}{\sqrt{3}}+R$이다. 따라서, $AD=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$이다. □

110) 풀이 : 원 O의 반지름의 길이를 r이라 하자. 원 O가 볼록사각형 $ABCD$에 내접하므로 $AB+CD=AD+BC$이다. 그런데, 위 식의 양변에 $\frac{r}{2}$를 곱하면 $\frac{r\cdot AB}{2}+\frac{r\cdot CD}{2}=\frac{r\cdot AD}{2}+\frac{r\cdot BC}{2}$ 이다. 즉,

$$\triangle OAB+\triangle OCD=\triangle OAD+\triangle OBC$$

이다. 따라서, $\triangle OAB+\triangle OCD=\frac{1}{2}\square ABCD$이다 .그런데,

$$\triangle NAB+\triangle NCD=\frac{1}{2}\triangle ABD+\frac{1}{2}\triangle BCD=\frac{1}{2}\square ABCD$$

이다. 마찬가지로,

$$\triangle MAB+\triangle MCD=\frac{1}{2}\square ABCD$$

이다. 따라서, O, M, N은 $\triangle XAB+\triangle XCD=\frac{1}{2}\square ABCD$를 만족하는 점 X의 자취의 점이고 $\square ABCD$의 대변이 평행하지 않으므로 O, M, N은 같은 직선 위의 점이다. □

111) 풀이 : 내심의 성질로부터 $\angle AKB=180^\circ-\frac{\angle BAC}{2}-\frac{\angle ABC}{2}=90^\circ+\frac{\angle ACB}{2}$이다.

마찬가지로 $\angle ANB=90^\circ+\frac{\angle ADB}{2}$이다. 사각형 $ABCD$가 원에 내접하므로 $\angle ACB=\angle ADB$이다. 따라서, $\angle AKB=\angle ANB$이다 .즉, 사각형 $ANKB$는 원에 내접한다. 그러므로 $\angle NKB=180^\circ-\angle BAN=180^\circ-\frac{\angle A}{2}$ 이다. 마찬가지 방법으로 $\angle BKL=180^\circ-\frac{\angle C}{2}$이다. 따라서,

$$\angle NKL=360^\circ-(\angle NKB+\angle BKL)=\frac{\angle A+\angle C}{2}=90^\circ$$

이다, 같은 방법으로

$$\angle KLM=90^\circ,\ \angle LMN=90^\circ,\ \angle MNK=90^\circ$$

을 보일 수 있다. 따라서, 사각형 $KLMN$은 직사각형이다. □

112) 풀이 : PH와 원 O_1이 만나는 점을 E라 하고, A와 E, A와 B를 연결한다. 그러면 $\angle ABP=\angle AEP$이다. 사각형 $ABCD$가 원에 내접하는 사각형이므로 $\angle ABP=\angle C$이다. 따라서, $\angle AEP=\angle C$이다. 그러므로, 네 점 A, E, H, C는 한 원 위에 있다. 따라서, $\angle PAE=\angle PHC=90^\circ$이다. 그러므로 PE는 원 O_1의 지름이다. 따라서, PH는 반드시 중심 O_1을 지난다. □

113) 풀이 : D와 C를 연결한다. D가 BC의 수직이등분선 위의 점이므로 $BD=DC$이다. 따라서, $\angle BCD=\angle B$이다 .CE와 AE는 원의 접선이다. 접선과 현이 이루는 각의 성질에 의하여 $\angle ECA=\angle B$이다. 즉, $\angle BCD=\angle ECA$이다. 따라서,

$$\angle ACB=\angle BCD+\angle ACD=\angle ECA+\angle ACD=\angle DCE$$

이다. 또한, $\angle EAC=\angle ABC$, $\angle ACB+\angle CAB+\angle ABC=180^\circ$ 이고,

$$\angle EAB=\angle EAC+\angle CAB=\angle ABC+\angle CAB=180^\circ-\angle ACB=180^\circ-\angle DCE$$

이다. 따라서, $\angle ECA=\angle EDA$이다. 즉, $\angle EDA=\angle B$이다. 그러므로 평행선과 동위각의 성질에 의하여 $DE//BC$이다. □

114) 풀이 : 현 AD에 대한 원주각 $\angle ABD=\angle ACD$이다. 또, PT가 접선이므로 접선과 현이 이루는 각의 성질에 의하여, $\angle TPA=\angle ABP=\angle ABD$이다. 따라서, $\angle APT=\angle ACD$이다. 평행선과 동위각의 성질에 의하여 $PT//CD$이다. □

115) 풀이 : 점 F는 직각삼각형 AMB의 빗변 AB의 중점이다. 그러므로, $MF=AF$이다. 따라서, $\angle FAM=\angle FMA=\angle CME$이다. 또, ME는 직각삼각형 DMC의 빗변에 내린 수선이다. 그러므로 $\angle CME=\angle MDC$이다. 따라서, $\angle BAC=\angle BDC$이다. 즉, 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다.

116) 풀이 : $\angle B=\angle EDA=\angle EFA$이므로 네 점 B, C, F, E는 한 원 위에 있다. 따라서, 방멱의 원리에 의하여 $AE\cdot AB=AF\cdot AC$이다. □

117) 풀이 : 각의 이등분선의 정리에 의하여 $PT:PA=ET:EA$이다. 즉,

$$ET=PT\cdot\frac{EA}{PA}\qquad(1)$$

이다. 마찬가지로, $PT:PB=FT:FB$이다. 즉,

$$FT=PT\cdot\frac{FB}{PB}\qquad(2)$$

이다. 식 (1)과 (2)를 변변 곱하면

$$ET\cdot FT=\frac{PT^2\cdot EA\cdot FB}{PA\cdot PB}$$

이다. 방멱의 원리에 의하여 $PT^2=PA\cdot PB$이다. 따라서, $ET\cdot FT=EA\cdot FB$이다. □

118) 풀이 : $\angle AEB$는 지름 AB에 대한 원주각이므로 $\angle AEB=90^\circ$ 이다. 또한, $\angle ADC=90^\circ$ 이므로 네 점 A, D, F, E는 한 원 위에 있다. 따라서, 방멱의 원리에 의하여 $BF\cdot BE=BD\cdot BA$이다.

119) 풀이 : (KMO, '1988)
(아래그림 참고) XB, YA의 교점을 Q라 한다. XY는 지름이므로 $\angle XAY=\angle XBY=90^\circ$ 이다.

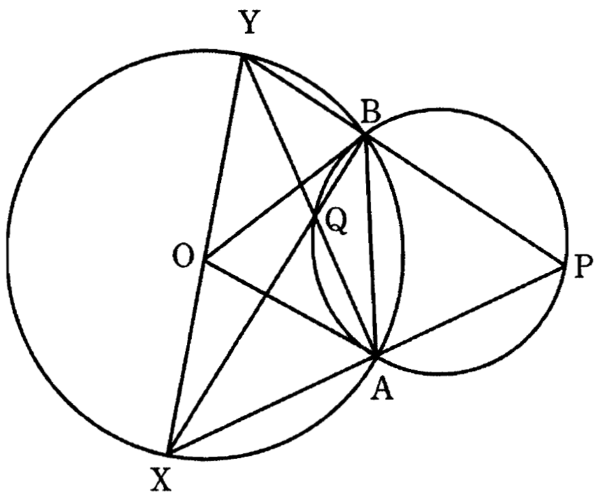


그림 3.25: 연습문제풀이 3.21 관련그림

따라서, $\angle PAQ = \angle PBQ = 90^\circ$ 이다. 그러므로 네 점 A, P, B, Q는 PQ를 지름으로 하는 원 위에 있다. 따라서,

$$\begin{aligned}\angle APB &= \angle XQA = \angle XYA + \angle YXB \\ &= \frac{1}{2}(\angle XOA + \angle YOB) = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOB) = \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ\end{aligned}$$

이다. 따라서, P(또는 Q)는 AB를 현, AB에 대한 원주각이 60°(또는 $\angle AQB = 120^\circ$)인 원 위에 있다. 즉, P는 AB를 현으로 갖고, 이 현에 대한 원주각이 60°(또는 120°)인 원 위를 움직인다. □

120) 풀이 :

$AB \| CD$ 이므로 삼각형 ABP 와 CDP 는 닮음비가 2 : 5 인 닮음이다. 그래서, $AP = 2x$, $BP = 2y$ 라고 하자. 그러면 $CP = 5x$, $DP = 5y$ 이다. $\angle APB = 90^\circ$ 이므로

$$\begin{aligned}\square ABCD &= \triangle ABD + \triangle CBD = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot BD + \frac{1}{2} \cdot CP \cdot BD \\ &= \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{49xy}{2}\end{aligned}$$

이다. $\alpha = \angle ADP$, $\beta = \angle BCP$ 라고 하자. 직각삼각형 ADP 와 DCP 로부터

$$\tan\alpha = \frac{AP}{DP} = \frac{2x}{5y} \text{ 이고, } \tan\beta = \frac{BP}{CP} = \frac{2y}{5y}$$

이다. 또한, $\angle CPD = \angle CQD + \angle QCP + \angle QDP$ 이므로 $\alpha + \beta = \angle QCP + \angle QDP = 45^\circ$ 이다. 삼각함수의 덧셈정리로부터

$$1 = \tan 45^\circ = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{2x}{5y} + \frac{2y}{5x}}{1 - \frac{2x}{5y} \cdot \frac{2y}{5x}} = \frac{10(x^2 + y^2)}{21xy}$$

이다. 즉, $xy = \dfrac{19(x^2 + y^2)}{21}$ 이다. 직각삼각형 ABP 에서 피타고라스 정리에 의하여 $AB^2 = AP^2 + BP^2$ 이므로 $16 = 4(x^2 + y^2)$ 이다. 즉, $x^2 + by^2 = 4$ 이다. 따라서, $xy = \dfrac{40}{21}$ 이다.

그러므로 $\square ABCD = \frac{49xy}{2} = \frac{140}{3}$ 이다.

121) 풀이 :

삼각함수의 성질을 이용하여 이 문제를 풀어보자. x, y, z 는 모두 0 보다 크고 1 보다 작은 값을 갖는 것에 착안하여 삼각함수 형태로 고쳐서 문제를 해결한다. $z = \sin^2\alpha$ 라고 하면, $x + y = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$ 이다.

즉, $\frac{x}{\cos^2\alpha} + \frac{y}{\cos^2\alpha} = 1$ 이다. 따라서, $x = \cos^2\alpha\cos^2\beta$, $y = \cos^2\alpha\sin^2\alpha$ 라고 놓으면 위 조건을 만족한다. 따라서, 이들을 주어진 식에 대입하여 풀면

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} &= \sec^2\alpha\sec^2\beta + 4\sec^2\alpha\csc^2\beta + 9\csc^2\alpha \\ &= (\tan^2\alpha + 1)(\tan^2\beta + 1) + 4(\tan^2\alpha + 1)(\cot^2 + 1) + 9(\cot^2\alpha + 1) \\ &= 14 + 5\tan^2\alpha + 9\cot^2\alpha + (\tan^2\beta + 4\cot^2\beta)(1 + \tan^2\alpha) \\ &\geqq 14 + 5\tan^2\alpha + 9\cot^2\alpha + 2\tan\beta \cdot 2\cot\beta(1 + \tan^2\alpha) \\ &= 18 + 9(\tan^2\alpha + \cot^2\alpha) \\ &\geqq 18 + 18 \cdot \tan\alpha\cot\alpha = 36\end{aligned}$$

이다. 등호는 $\tan\alpha = \cot\alpha$, $\tan\beta = 2\cot\beta$ 일 때, 즉 $\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$, $2\cos^2\beta = \sin^2\beta$ 일 때, 성립한다. 즉, $x + y + z = 1$, $x + y = z$, $y = 2x$ 이다. x, y, z 에 대한 등호 성립 조건으로 바꾸면 $x = \frac{1}{6}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = \frac{1}{2}$ 이다.

122) 풀이 :

삼각형 ABD 에서 $\angle CDA = \angle ABC + \angle DAB = 60^\circ$ 임을 알 수 있다. 또, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ 이다. 점 C 에서 AD 에 내린 수선의 발을 E 라고 하자. 그러면 삼각형 CDE 는 직각삼각형이고, $\angle DCE = 30^\circ$ 이므로 $DE = CD\sin\angle DCE$, 즉 $CD = 2DE$ 임을 알 수 있다. 따라서, $2BD = CD = 2DE$ 이므로 삼각형 BDE 는 $BD = DE$ 인 이등변삼각형이다. 그러므로 $\angle DBE = \angle DEB = 30^\circ$ 이다. 따라서, $\angle CBE = 30^\circ = \angle BCE$, $\angle EBA = 15^\circ = \angle EAB$ 이다. 즉, 삼각형 CBE 와 EBA 는 이등변삼각형이다. 그러므로 $CE = BE = AE$ 이다. 따라서, 삼각형 CEA 는 직각이등변삼각형입니다. 즉, $\angle ACE = \angle EAC = 45^\circ$ 이다. 그러므로 $\angle ACB = \angle ACE + \angle ECB = 75^\circ$ 이다.

123) 풀이 :

$\tan c = \tan(\pi - (a + b)) = -\tan(a + b) = -\frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ 이다. 따라서,

$$\tan c - \tan a \tan b \tan c = -\tan a - \tan b$$

이다. 즉, $\tan a + \tan b + \tan c = \tan a \tan b \tan c$ 이다.

124) 풀이 :

사인법칙으로부터 $\dfrac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R$ 이다. 따라서, $b = \sqrt{6}$, $R = \sqrt{3}$ 이다.

125) 풀이 :

R 을 외접원의 반지름의 길이, r 을 내접원의 반지름의 길ㅇ, $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ 라고 하자.

$\angle A = 60^\circ$ 이므로 가장 큰 강느 60° 이상이고, 가장 작은 각은 60° 이하이다. 따라서, $\angle A$는 가장 큰 변과 가장 작은 변 사이에 끼인 각이다. 그러므로 b 를 가장 큰 변, c 를 가장 작은 변이라고 하면, 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여 $b+c=9$, $bc = \dfrac{32}{3}$ 이다.

따라서,

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}\cdot\frac{32}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{3}\sqrt{3}$$

이다. 제2 코사인법칙에 의하여

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 60^\circ = (b+c)^2 - 3bc = 9^2 - 3\frac{32}{3} = 49$$

이다. 따라서, $a = 7$, $a+b+c = 16$ 이다. 사인법칙으로부터 $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ 이다. 따라서,

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{7}{2\sin 60^\circ} = \frac{7}{3}\sqrt{3}$$ 이다.

126) 풀이 :

$BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $\alpha = \angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$, $PA = x$, $PB = y$, $PC = z$ 라고 하자.

$\triangle PCA$, $\triangle PAB$, $\triangle PBC$ 에 제2 코사인법칙을 적용하면,

$$x^2 = z^2 + b^2 - 2bz\cos\alpha,\ y^2 = x^2 + c^2 - 2cx\cos\alpha,\ z^2 = y^2 + a^2 - 2ay\cos\alpha$$

이다. 이 세 식을 변변 더하면

$$2(cx + ay + bz)\cos\alpha = a^2 + b^2 + c^2 \qquad (1)$$

이다. 또한,

$$\triangle ABC = \triangle PAB + \triangle PBC + \triangle PCA = \frac{(cx + ay + bz)\sin\alpha}{2} \qquad (2)$$

이다. 따라서, 식 (1)과 (2)로부터

$$\tan\alpha = \frac{4\triangle ABC}{a^2 + b^2 + c^2}$$

이다. 여기서 주어진 조건 $a = 14$, $b = 15$, $c = 13$ 을 대입하자. 또한, 헤론의 공식으로부터 $\triangle ABC = \sqrt{21\cdot 7\cdot 6\cdot 8} = 84$ 이다. 따라서, $\tan\alpha = \dfrac{168}{295}$ 이다.

127) 풀이 :

정리 4.23로부터

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a},\ \tan\frac{B}{2}=\frac{r}{s-b},\ \tan\frac{C}{2}=\frac{r}{s-c}$$

이다. 위 식을 주어진 식에 대입하면

$$\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{s}}\leq\frac{1}{\sqrt{s-a}}+\frac{1}{\sqrt{s-b}}+\frac{1}{\sqrt{s-c}}\leq\frac{\sqrt{s}}{r}$$

이 된다. 왼쪽 부등식부터 보이자. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 라고 하면, $f(x)$ 는 볼록함수가 된다. 따라서,

젠센부등식에 의하여 $\dfrac{1}{\sqrt{s-a}}+\dfrac{1}{\sqrt{s-b}}+\dfrac{1}{\sqrt{s-c}}\geqq 3-\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}}}=3\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{s}}$ 이다.

등호는 $\triangle ABC$ 가 정삼각형일 때, 성립한다.

이제 오른쪽 부등식을 보이자. 산술-기하평균 부등식과 삼각형의 넓이 구하는 공식으로부터

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}\left(\frac{1}{\sqrt{s-a}}+\frac{1}{\sqrt{s-b}}+\frac{1}{\sqrt{s-c}}\right)\\
&=\sqrt{(s-a)(s-c}+\sqrt{(s-c)(s-a)}+\sqrt{(s-a)(s-b)}\\
&\leqq\frac{2s-b-c}{2}+\frac{2s-c-a}{2}+\frac{2s-a-b}{2}\\
&=s=\frac{\triangle ABC}{r}=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{r}
\end{aligned}$$

이다. 양변을 $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}$ 으로 나누면 오른쪽 부등식이 된다. 등호는 $\triangle ABC$ 가 정삼각형일 때, 성립한다.

128) 풀이 :

주어진 원의 중심을 O 라고 하자. 주어진 조건으로부터 $\angle HOB=90^\circ$ 이고, $\angle HAB=\dfrac{1}{2}\times 270^\circ=135^\circ$ 임을 알 수 있다. 제 2 코사인 정리를 적용하면,

$$HB=\sqrt{2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos135^\circ}=\sqrt{13+6\sqrt{2}}$$

이다. 또한 삼각형 HOB 가 직각이등변삼각형이므로 주어진 원의 반지름의 길이는 $\dfrac{HB}{\sqrt{2}}$ 이다. 팔각형 $ABCDEFGH$ 의 넓이는 사각형 $OHAB$ 의 넓이의 4 배이다. 따라서, 사각형 $OHAB$ 의 넓이를 구하면,

$$\begin{aligned}
&\square OHAB=\triangle HAB+\triangle OHB\\
&=\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin135^\circ+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{13+6\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{13+6\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\times\sin90^\circ\\
&=\frac{1}{2}\times2\times3\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{13+6\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{13+6\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\times1\\
&=\frac{13+12\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

이다. 따라서, 팔각형 $ABCDEFGH$ 의 넓이는 $13+12\sqrt{2}$ 이다.

129) 풀이 :

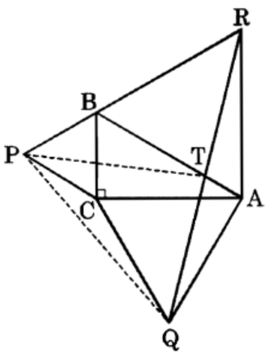
점 H 가 삼각형 ABC 의 수심이 된다. 점 D, E 를 점 A, B 에서 각각 변 BC, CA 에 내린 수선의 발이라고 하자. 그러면 $\angle HAE=20^\circ$, $\angle HCD=10^\circ$ 이므로 $\angle HCE=60^\circ$ 이다. 드러면,

$\sin\angle HAE = \sin 20^\circ = \dfrac{HE}{AH}$, $\tan\angle ECH = \tan 60^\circ = \dfrac{HE}{CE}$, $\cos\angle BCE = \cos 70^\circ = \dfrac{CE}{BC}$
이다. 따라서,

$$AH = \frac{HE}{\sin 20^\circ} = \frac{EC\tan 60^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{BC\cos 70^\circ \tan 60^\circ}{\sin 20^\circ} = BC\tan 60^\circ = 2\sqrt{3}$$

이다.

130) 풀이 :



삼각비에 의해,
$BC = \dfrac{1}{2}$, $AC = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle QAT = 90^\circ$, $\angle QCP = 150^\circ$, $\angle RBP = 180^\circ$ 이다.
그러면 $\triangle AQT = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times AT \times \sin 90^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{4}AT$ 이고, $\triangle ART = \dfrac{1}{2} \times 1 \times AT \times \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{4}AT$
이므로, $\triangle AQT = \triangle ART$ 이다. 또한 $TQ = TR$ 이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\triangle PRT = \triangle PQT &= \frac{1}{2}\triangle PQR \\ &= \frac{1}{2}(\triangle ABC + \triangle ABR + \triangle BCP + \triangle ACQ + \triangle CPQ - \triangle AQR) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16} + \frac{\sqrt{3}}{16} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{9\sqrt{3}}{32}\end{aligned}$$

이다.

131) 풀이 :
주어진 조건의 양변에 $(a+b)(c+a)$ 를 곱하면 $c(c+a) + b(a+b) = (a+b)(c+a)$ 이다. 전재하여 정리하면,

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc \qquad (1)$$

이다. 제2 코사인법칙으로부터

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A \qquad (2)$$

이다. 식(1)과 (2)를 비교하면 $2\cos\angle A = 1$ 이다. 즉, $\cos\angle A = \dfrac{1}{2}$ 이다. 따라서, $\angle A = 60^\circ$ 이다.

132) 풀이 :
$\angle ABP = \alpha$, $\angle PBC = \beta$ 라고 하면, 제2 코사인 법칙으로부터

$$\cos\alpha = \frac{9 + x^2 - 25}{2 \cdot 3 \cdot x} > 0 \qquad (1)$$

$$\cos\beta = \frac{9+x^2-49}{2\cdot 3\cdot x} > 0 \qquad (2)$$

이다. 한편, $\cos\beta = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ 이므로 이를 식 (2)에 대입하면

$$\sin\alpha = \frac{9+x^2-49}{2\cdot 3\cdot x} > 0 \qquad (3)$$

이다. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 이므로 식 (1)과 (3)으로부터

$$1 = \left(\frac{9+x^2-25}{2\cdot 3\cdot x}\right)^2 + \left(\frac{9+x^2-49}{2\cdot 3\cdot x}\right)^2$$

이다. 이를 정리하면 $x^4 - 74x^2 + 928 = 0$ 이다. 이를 풀면 $x^2 = 16$ 또는 58 인데 식 (1)과 (3)에서 $x^2 > 40$ 이므로 $x^2 = 58$ 이다.

133) 풀이 :

$BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $\triangle ABC = S$ 라고 하자. 그러면,

$$\triangle BDF = \frac{1}{2}BD\cdot BF\sin\angle B = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}a\cdot\frac{1}{5}c\sin\angle B = \frac{2}{15}\cdot\frac{1}{2}ac\sin\angle B = \frac{2}{15}S$$

이다. 같은 방법으로 $\triangle CDE = \frac{1}{4}S$, $\triangle AEF = \frac{1}{5}S$ 이다. 따라서,

$$\triangle DEF = S - \left(\frac{2}{15}S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{5}S\right) = \frac{5}{12}S$$

이다. 따라서, $\triangle ABC : \triangle DEF = S : \frac{5}{12}S = 12 : 5$ 이다.

134) 풀이 :

$\angle PCB = x$ 라고 하자. 그러면, $\angle PBC = 80^\circ - x$ 이다. 사인법칙으로부터

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{PA}{PB}\cdot\frac{PB}{PC}\cdot\frac{PC}{PA} \\ &= \frac{\sin\angle PBA}{\sin\angle PAB}\cdot\frac{\sin\angle PCB}{\sin\angle PBC}\cdot\frac{\sin\angle PAC}{\sin\angle PCA} \\ &= \frac{\sin 20^\circ \sin x \sin 40^\circ}{\sin 10^\circ \sin(80^\circ - x)\sin 30^\circ} \\ &= \frac{4\sin x\sin 40^\circ\cos 10^\circ}{\sin(80^\circ - x)} \end{aligned}$$

이다. 삼각함수의 곱을 합 또는 차로 고치는공식으로부터

$$1 = \frac{2\sin x(\sin 30^\circ + \sin 50^\circ)}{(\sin(80^\circ - x)} = \frac{\sin x(1 + 2\cos 40^\circ)}{\sin(80^\circ - x)}$$

이다. 또한, 삼감함수의 합 또는 차를 곱으로 고치는 공식으로부터

$$2\sin x\cos 40^\circ = \sin(80^\circ - x) - \sin x = 2\sin(40^\circ - x)\cos 40^\circ$$

이다. 따라서, $x = 40^\circ - x$ 이다. 즉, $x = 20^\circ$ 이다. 그러므로, $\angle ACB = 50^\circ = \angle BAC$ 이다. 따라서, $\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이다.

135) 풀이 :

점 A 에서 BC 에내린 수선의 발을 M 이라 하자. $AB = AC$ 이므로 $BM = MC = 3$ 이다. 피타고라스의 정리에 의하여 $AM = 4$ 이다. $\alpha = \angle BCP = \angle ABP$, $\theta = \angle ACP$ 라고 하자. 그러면 $\triangle ABC$가 이등변삼각형이므로 $\angle PBC = \theta$ 이다. AC 를 지름으로 하는 원을 그리면, $\angle APC = \angle AMC = 90^\circ$ 이므로 중심각과 원주각의 성질에 의하여 점 P 와 M 은 AC 를 지름으로 하는 원 위의 점이다. 점 P 와 M 을 연결하자. 그러면 같은 현에

대한 원주각의 크기가 같으므로 $\angle PAM = \angle PCM = \alpha$ 이다. 같은 방법으로 $\angle AMP = \angle ACP = \theta$ 이다.

따라서, $\triangle MPA$ 와 $\triangle BPC$ 는 닮음이다. 즉, $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{MA}{BC} = \dfrac{4}{6}$ 이다. 그러므로 $\tan\theta = \dfrac{PA}{PC} = \dfrac{2}{3}$ 이다.

DC 의 길이를 구하기 위하여 삼각형 DBC 에 사인법칙을 적용하면, $\dfrac{DC}{\sin\theta} = \dfrac{BC}{\sin\angle BDC}$ 이다.

양변에 $\sin\theta$ 곱하고 정리하면,

$$\begin{aligned} DC &= \frac{6\sin\theta}{\sin(180^\circ - \theta - \angle DCB)} = \frac{6\sin\theta}{\sin(\theta + \angle DCB)} \\ &= \frac{6\sin\theta}{\sin\theta\cos\angle DCB + \cos\theta\sin\angle DCB} \\ &= \frac{6}{\cos\angle DCB + \cot\theta\sin\angle DCB} \\ &= \frac{6}{\frac{3}{5} + \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5}} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

이다. 따라서, $AD = 5 - \dfrac{10}{3} = \dfrac{5}{3}$ 이다. 즉, $AD : DC = 1 : 2$ 이다.

136) 풀이 :

$\triangle ABP$ 와 $\triangle ACP$ 에 사인법칙을 적용하면

$$\sin\angle APB = \frac{AB\sin\angle ABP}{AP} = \frac{AC\sin\angle ACP}{AP} = \sin\angle APC$$

이다. 따라서, $\angle APB = \angle APC$, 또는 $\angle APB + \angle APC = 180^\circ$ 이다. 첫 번째 경우에서, $\triangle ABP \equiv \triangle ACP$ 이다. 그러므로, $BP = CP$ 이다. 즉, P 는 BC 의 수직이등분선 위의 점이다. 두 번째 경우에서, P 는 BC 위의 점이다.

137) 풀이 :

$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 하면, 사인법칙으로부터

$$\begin{aligned} &(b^2+c^2-a^2)\sin^2 A + (c^2+a^2-b^2)\sin^2 B + (a^2+b^2-c^2)\sin^2 C \\ &= \frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{4R^2} + \frac{b^2(c^2+a^2-b^2)}{4R^2} + \frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{4R^2} \\ &= \frac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}{4R^2} \\ &= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{4R^2} > 0 \end{aligned}$$

이다. 그러므로 제2 코사인 법칙으로부터

$$\begin{aligned} &2bc\cos^3 A + 2ca\cos^3 B + 2ab\cos^3 C \\ &= (b^2+c^2-a^2)\cos^2 A + (c^2+a^2-b^2)\cos^2 B + (a^2+b^2-c^2)\cos^2 C \\ &= (b^2+c^2-a^2)(1-\sin^2 A) + (c^2+a^2-b^2)(1-\sin^2 B) + (a^2+b^2-c^2)(1-\sin^2 C) \\ &< (b^2+c^2-a^2) + (c^2+a^2-b^2) + (a^2+b^2-c^2) \\ &= a^2+b^2+c^2 \end{aligned}$$

이다. 양변을 $2abc$ 로 나누면

$$\frac{\cos^3 A}{a} + \frac{\cos^3 B}{b} + \frac{\cos^3 C}{c} < \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

이다.

138) 풀이 :
$\tan\angle B = 2\tan\angle A$, $\tan\angle C = 3\tan\angle A$ 과 항등식(예제4.9참고) $\tan\angle A + \tan\angle B + \tan\angle C$
$= \tan\angle A \tan\angle B \tan\angle C$ 이로부터 $6\tan\angle A = 6(\tan\angle A)^3$ 임을 알 수 있다.
$\tan\angle A \neq 0$ 이므로 $\tan\angle A = -1$, $\tan\angle A = 1$ 인 경우로 나눠서 살펴보자.
$\tan\angle A = -1$ 인 경우, $\angle A = 135^\circ$ 이 되어 삼각형 ABC 의 모든 각이 둔각이 된다. 따라서 이런 경우의 삼각형은 존재하지 않는다.
$\tan\angle A = 1$ 인 경우, $\angle A = 45^\circ$ 이다. 점 C 에서 AB 에 내린 수선의 발을 H 라 하자.
그러면, $\dfrac{CH}{AH} = \tan\angle A = 1$, $\dfrac{CH}{BH} = \tan\angle B = 2$ 이다. 또, $\angle A$, $\angle B$ 가 모두 예각이므로 점 H 는 변 AB 위에 있다. 따라서, $AB = AH + HB = \dfrac{3}{2}CH$ 이다. 삼각비에 의하여 $AC = CH\sqrt{2}$ 이므로,
$\dfrac{AC}{AB} = 2\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ 이다.

139) 풀이 :
삼각함수의 곱을 합 또는 차로 고치는 공식

$$\cos\angle A\cos\angle B = 1ove2\{\cos(\angle A + \angle B) + \cos(\angle A - \angle B)\}$$

이로 부터

$$\frac{1}{2}\{\cos(\angle A + \angle B) + \cos(\angle A - \angle B)\}\cos\angle C = \frac{1}{8}$$

이다. 또한,

$$\cos(\angle A - \angle B) = \frac{1}{4\cos\angle c} - \cos(\angle A + \angle B) = \frac{1}{4\cos\angle C} + \cos\angle C$$

이다. 산술-기하평균 부등식으로부터

$$\cos(\angle A - \angle B) = \frac{1}{4\cos\angle C} + \cos\angle C \geqq 2\sqrt{\left(\frac{1}{4\cos\angle C}\right)(\cos\angle C)} = 1$$

이다. 따라서, 등호성립조건이 $\cos\angle C = \dfrac{1}{2}$ 이고, 그 때, $\cos(\angle C - \angle B) = 1$ 이다. 즉, $\angle A = \angle B$ 이다.
마찬가지 방법으로 $\angle B = \angle C$ 이다. 따라서, $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$ 이다.
즉, 삼각형 ABC 는 정삼각형이다.

140) 풀이 :
$\alpha = \angle A$, $\beta = \angle ABD = \dfrac{\angle B}{3}$, $\gamma = \angle ACE = \dfrac{\angle C}{3}$ 라고 놓자. 그러면,

$$\angle BEC = 180^\circ - \angle AEC = \alpha + \gamma$$

이다. 마찬가지로, $\angle BDC = \alpha + \beta$ 이다. $\triangle BOE$ 과 $\triangle COD$ 에 사인버버칙을 적용하면

$$\frac{OE}{\sin\beta} = \frac{BE}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)},\quad \frac{OD}{\sin\gamma} = \frac{CD}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$$

이다. 따라서,

$$\frac{OE}{OD} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot\frac{BE}{CD} \qquad (1)$$

이다. 마찬가지 방법으로 $\triangle BDC$ 와 $\triangle BEC$ 에 사인법칙을 적용하면

$$\frac{CD}{\sin 2\beta} = \frac{BC}{\sin(\alpha+\beta)},\quad \frac{BE}{\sin 2\gamma} = \frac{BC}{\sin(\alpha+\gamma)}$$

이다. 따라서,

$$\frac{BE}{CD} = \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\beta}\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\gamma)} \qquad (2)$$

이다. 식 (2)를 식 (1)에 대입하면

$$\frac{OE}{OD}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot\frac{\sin2\gamma}{\sin2\beta}\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\gamma)}$$
$$=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot\frac{2\sin\gamma\cos\gamma}{2\sin\beta\cos\beta}\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\gamma)}$$
$$=\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\gamma)}$$
$$=\frac{\sin\alpha+\tan\beta\cos\alpha}{\sin\alpha+\tan\gamma\cos\alpha}$$

이다. 따라서,

$$OE=OD \Leftrightarrow \tan\beta\cos\alpha=\tan\gamma\cos\alpha$$
$$\Leftrightarrow \alpha=90^\circ \text{ 또는 } \beta=\gamma$$

이다. 따라서, $\triangle ABC$ 는 $\angle A=90^\circ$ 인 직각삼각형 또는 $AB=AC$ 인 이등변삼각형이다.

141) 풀이

삼각함수의 덧셈정리에 의하여, $\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$ 이다. $x=45^\circ, y=-x$ 를 대입하면

$\tan(45^\circ-x)=\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}=\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}=\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$ 이다. 이 식의 우변과 주어진 방정식의 우변과 같다. 따라서, $\tan(4x)=\tan)(45^\circ-x)$ 이고, $4x=45^\circ-x$ 가 되어 $x=9^\circ$ 이다.

142) 풀이

$BC=x$, $AD=y$ 라 하자. 그러면, $x+y=640-360=280$ 이다. $\angle A=\angle C=\theta$ 라고 하자.

$\triangle ABD$ 와 $\triangle CBD$ 에 각각 제2 코사인법칙을 적용하여 BD 의 길이를 구하면

$BD^2=AB^2+AD^2-2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos\theta$, $BD^2=CB^2+CD^@-2\cdot CB\cdot CD\cdot\cos\theta$

이다. 위 식에 $AB=CD=180$, $BC=x$, $AD=y$ 를 대입하면

$$BD^2=180^2+y^2-360y\cos\theta,\ BD^2=x^2+180^\circ-360x\cos\theta$$

이다. 그러므로 $180^2+y^2-360y\cos\theta=x^2+180^2-360x\cos\theta$ 이다.

이를 정리하면 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)=360(x-y)\cos\theta$ 이다. $x\neq y$, $x+y=280$ 이므로 $280=360\cos\theta$ 이다.

즉, $\cos\theta=\dfrac{7}{9}$ 이다.

143) 풀이

$AP=x$, $AQ=y$, $\angle PCB=\alpha$, $\angle QCD=\beta$ 라고 하자. 주어진 조건으로부터

$$AP+AQ+QP=x+y+\sqrt{x^2+y^2}=2 \qquad (1)$$

이다. 위 식을 정리하면 $x+y=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 이고, 양변을 제곱하면

$(x+y)^2=4-4\sqrt{x^2+y^2}+(x^2+y^2)$ 이다. 따라서, $xy=2-2\sqrt{x^2+y^2}$ 이다. 그러므로,

$$xy=2-2(2-x-y) \quad \Rightarrow 2-x-y=x+y-xy \quad \Rightarrow \frac{2-x-y}{x+y-xy}=1 \qquad (2)$$

이다. $\tan\alpha=\dfrac{PB}{BC}=1-x$ 이고, $\tan\beta=\dfrac{QD}{DC}=1-y$ 이다. 그러므로

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{(1-x)+(1-y)}{x+y-xy}=\frac{2-x-y}{x+y-xy}$$

이다. 식 (2)로부터 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{2-x-y}{x+y-xy}=1$ 이다. 즉, $\alpha+\beta=45^\circ$ 이다.

따라서, $\angle PCQ=90^\circ-(\alpha+\beta)=45^\circ$ 이다.

144) 풀이

$EC=\sqrt{25^2-24^2}=7$ 이다. 그러므로 $\tan\angle EDC=\dfrac{7}{24}$ 이다. 삼각함수의 덧셈정리로부터

$$\tan\angle BDC=\tan(\angle BDE+\angle EDC)=\frac{\tan\angle BDE+\tan\angle EDC}{1-\tan\angle BDE\tan\angle EDC}=\frac{3+\frac{7}{24}}{1-3\cdot\frac{7}{24}}=\frac{79}{3}$$

이다. $\tan\angle BDC=\dfrac{BC}{CD}$ 이므로, $BC=CD\cdot\tan\angle BDC=24\cdot\dfrac{79}{3}=632$ 이다.

또한, $\angle AGD=90^\circ-\angle BDC$ 이고, $\tan\angle AGD=\dfrac{1}{\tan\angle BDC}=\dfrac{3}{79}$ 이다. 그러므로 $\tan\angle AGD=\dfrac{AD}{DG}$ 이다.

따라서, $DG=\dfrac{AD}{\tan\angle AGD}=\dfrac{632}{\frac{3}{79}}=\dfrac{2^3\cdot 79^2}{3}$ 이다. 삼각형 HIG 에서 $\tan\angle HGI=\dfrac{HI}{IG}$ 이므로

$$HI=IG\cdot\tan HGI=\frac{3}{79}IG \qquad (1)$$

이다. $\triangle EDC$ 와 $\triangle HDI$ 가 닮음이므로

$$\frac{HI}{ID}=\frac{EC}{CD}=\frac{7}{24} \qquad \Rightarrow \qquad HI=\frac{7}{24}ID=\frac{7}{24}(DG-IG) \qquad (2)$$

이다. 식 (1)과 (2)로부터

$$HI=\frac{3}{79}IG=\frac{7}{24}(DG-IG)$$

이다. IG 에 대하여 위 식을 풀면 $IG=\dfrac{\frac{7}{24}DG}{\frac{3}{79}+\frac{7}{24}}$ 이다. 그런데 $DG=\dfrac{2^3\cdot 79^2}{3}$ 이므로 이를

대입하면 $$IG=\frac{\frac{7}{24}\cdot\frac{2^3\cdot 79^2}{3}}{\frac{3\cdot 24+7\cdot 79}{24\cdot 79}}=\frac{2^3\cdot 7\cdot 79^3}{3\cdot 5^4}$$ 이다.

145) 풀이 :

AB 의 중점을 X, $AX=BX=r$, $\angle AXM=\alpha$, $\angle BXN=\beta$ 라 하자. CP 의 중점을 Q 라 하자. 그러면, CP, AC 는 $\triangle ACP$ 의 외접원 O 의 현이므로, $OQ\perp CP$, $OM\perp AC$ 이다. 따라서, $XM=r\cos\alpha$ 이다. DC 의 연장선과 XM 의 연장선의 교점을 Y 라 하자. 그러면, $\angle PXC+\alpha+\beta=90^\circ$ 이므로, $\angle PYX=90^\circ-\angle PXY=90^\circ-\angle PXC-\angle CXM=\alpha+\beta-\alpha=\beta$ 이다. 따라서, XM 은 점 O 를 지나므로 $PQ=OX\cos\beta$ 이고,

$$\frac{OX}{XM}=\frac{PQ}{r\cos\alpha\cos\beta}$$

이다. 같은 방법으로

$$\frac{O'X}{XN}=\frac{PQ}{r\cos\alpha\cos\beta}$$

이다. 따라서, $OO'//MN$ 이다.

146) 풀이 :

$\angle DQC = \alpha$, $\angle DPC = \beta$, $\angle DBC = \gamma$ 라고 하자. 그러면,

$$\tan\alpha = 1,\ \tan\beta = \frac{1}{2},\ \tan\gamma = \frac{1}{3}$$

이다. 삼각함수의 덧셈정리로부터

$$\tan(\beta+\gamma) = \frac{\tan\beta + \tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1 = \tan\alpha$$

이다. 따라서, $\angle DBC + \angle DPC = \angle DQC$ 이다.

147) 풀이

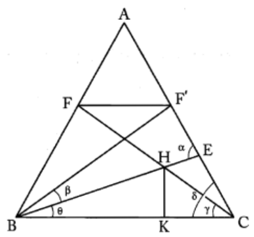
$CD = x$ 라고 하면,

$\triangle ABC = \frac{1}{2}ab\sin C\ ab\sin\frac{C}{2}cos\frac{C}{2}$, $\triangle BCD = \frac{1}{2}ax\sin\frac{C}{2}$, $\triangle ACD = \frac{1}{2}bx\sin\frac{C}{2}$

이다. $\triangle ABC = \triangle BCD + \triangle ACD$ 이므로 $ab\sin\frac{C}{2}cos\frac{C}{2} = \frac{1}{2}ax\sin\frac{C}{2} + \frac{1}{2}bx\sin\frac{C}{2}$ 이다.

이를 정리하면 $x = CD = \dfrac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$ 이다.

148) 풀이



(그림 4.7참고) $AF = AF'$ 이 되도록 점 F' 를 변 CA 위에 잡자. $\angle AEB = \alpha$, $\angle EBF' = \beta$, $\angle FCB = \gamma$, $\angle ACB = \delta$, $\angle EBC = \theta$ 라고 하자. $\theta \neq \gamma$ 이므로 $F' = E$ 이다. 또한, $BE = CF = BF'$ 이므로, $\triangle BEF'$ 는 이등변삼각형이다. $\sin\theta = \frac{5}{13}$, $\cos\delta = \frac{3}{5}$ 이다.

따라서, $\tan\theta = \frac{5}{12}$, $\tan\delta = \frac{4}{3}$ 이다. $\alpha = \theta + \delta$ 이므로,

$$\tan\alpha = \tan(\theta+\delta) = \frac{\tan\theta+\tan\delta}{1-\tan\theta\tan\delta} = \frac{\frac{5}{12}+\frac{4}{3}}{1-\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{3}} = \frac{63}{16}$$

이다. $\tan\alpha > 0$ 이므로 $\alpha < 90^\circ$ 이다. $\triangle BEF'$ 이 이등변삼각형이므로 점 E 는 F' 과 C 사이에 있다. 따라서, $\gamma = \angle FCB = \angle F'BC = \beta + \theta$ 이다. 또, $\beta + 2\alpha = 180^\circ$ ($\triangle BEF'$ 의 내각의 합)이므로

$$\tan\beta = \tan(180^\circ - 2\alpha) = -\tan(2\alpha) = -\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2016}{3713}$$

이다. 따라서,

$$\tan\gamma = \tan(\beta+\theta) = \frac{\tan\beta+\tan\theta}{1-\tan\beta\tan\theta} = \frac{253}{204}$$

이다. $\tan\theta = \frac{HK}{BK}$, $\tan\gamma = \frac{HK}{KC}$, $BK + KC = BC = 6$ 이므로, $HK = \dfrac{6\tan\theta\tan\gamma}{\tan\theta+\tan\gamma} = \dfrac{1265}{676}$ 이다.

149) 풀이
정삼각형 ABC 의 한 변의 길이를 1, $AD=AE=x$ 라 하면, 삼각형 ABD 에서 제 2 코상인법칙에 의하여

$$x^2=1+\left(\frac{1}{3}\right)^2-2\cdot 1\cdot \frac{1}{3}cos60^\circ=1+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$$

이다. 그런데 $x>0$ 이므로 $x=\frac{\sqrt{7}}{3}$ 이다. 따라서,

$$\cos\angle DAE=\frac{\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}{2\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}}=\frac{\frac{13}{9}}{\frac{14}{9}}=\frac{13}{14}$$

이다.

150) 풀이
$AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, $\square ABCD=S$, $\angle DAB=\alpha$, $\angle ECD=\beta$ 라 하자.
그러면, $\square ABCD=\triangle ABD+\triangle BCD$ 이므로

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha+\frac{1}{2}bc\sin\beta \qquad (1)$$

이다. 한편 $\triangle ABD$ 와 $\triangle BCD$ 에서 제2 코사인법칙에 의하여

$$BD^2=a^2+d^2-2ad\cos\alpha \qquad (2)$$
$$BD^2=b^2+c^2-2bc\cos\beta \qquad (3)$$

이고 식 (2)과 (3)으로부터

$$a^2+d^2-b^2-c^2=2ad\cos\alpha-2bc\cos\beta \qquad (4)$$

이다. 식 (1)과 (4)에서

$$\begin{aligned}(4S)^2+(a^2+d^2-b^2-c^2)^2 &= 4(a^2d^2+b^2c^2)+8abcd(\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha+\cos\beta)\\ &= 4(a^2d^2+b^2c^2)-8abcd\cos(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

이다. S 는 $\cos(\alpha+\beta)=-1$, 즉, $\alpha+\beta=180^\circ$ 일 때, 최대가 되고, 이 때, 한 쌍의 대각의 합이 180° 이므로 사각형 $ABCDE$ 는 원의 내접한다.

151) 풀이
$\angle BAD=\alpha$, $\angle DAE=\angle DAF=\beta$, $\angle FAC=\gamma$, $\angle ABC=\delta$ 라고 하자. 호 CF 에 대한 원주각 $\angle FAC=\angle FBC=\gamma$ 이다. AD 가 $\angle A$ 의 으등분선의 $\angle BAD=\angle DAC$ 이다.
따라서, $\alpha=\beta+\gamma$ 이다. 또한, $ED\perp BC$, $\angle DAE=\angle EDA$ 이므로 $\triangle ABD$ 에서

$$\delta+\alpha=\beta+90^\circ,\ \delta+\beta+\gamma=\beta+90^\circ$$

이다. 따라서, $\delta+\gamma=90^\circ$ 이다. 즉, $\angle ABF=90^\circ$ 이므로 AF 는 $\triangle ABC$ 의 외접원의 지름이다.
따라서, 삼각비에 으하여 $\sin C=\sin F=\frac{AB}{AF}=\frac{c}{GF}=d$ 이다.

152) 풀이 :
마름모 $ABCD$의 대각선 AC와 BD가 만나는 점을 O라 하면, $AO=OC$, $BO=OD$, $AC\perp BD$이다. $PA=PC$이므로 점 P는 AC의 수직이등분선 위에 있는 점이다. 즉, $AC\perp PO$이며, 점 P는 BD의 연장선 위의 점

이다. 이로부터 P가 점 O에 대하여 점 D와 같은 쪽에 있으면

$PB \cdot PD = (PO+OB)(PO-OD) = (PO+OD)(PO-OD) = PO^2 - OD^2$

이다. 따라서, $PB \cdot PD = PA^2 - AB^2$이다. 마찬가지로, 점 P가 점 O에 대하여 점 B와 같은 쪽에 있을 때도 $PB \cdot PD = PA^2 - AB^2$이다. □

153) 풀이 :

점 A에서 밑변 BC에 내린 수선의 발을 M이라 하면, M은 BC의 중점이다. 점 P가 선분 MC 위에 있다고 하자. 그러면,

$$\begin{aligned} AB^2 - AP^2 &= (AM^2 + BM^2) - (AM^2 + PM^2) \\ &= (BM^2 - PM^2) \\ &= (BM+PM)(BM-PM) \\ &= (BM+PM)(CM-PM) \\ &= BP \cdot CP \end{aligned}$$

이다. 마찬가지로, 점 P가 선분 BM 위에 있을 때도 $AB^2 - AP^2 = BP \cdot CP$이다. □

154) 풀이 :

점 A에서 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. 그러면 $\angle B$는 공통, $\angle CAB = \angle AHB$이므로 $\triangle ABH$와 $\triangle ABC$는 닮음(AA닮음)이다. 그러므로 $\dfrac{BH}{AB} = \dfrac{AB}{BC}$이고, 따라서, $AB^2 = BH \cdot BC = (BD-HD)(BD+CD)$이다. 한편 $\triangle CAH$에서 점 M은 CA의 중점이고, $MD \parallel AH$이므로 삼각형 중점연결정리에 의하여 $CD = HD$이다. 따라서, $AB^2 = (BD-CD)(BD+CD) = BD^2 - CD^2$이다. □

155) 풀이 :

AC와 BD의 교점을 O, AE와 BO의 교점을 G, $BE = CF$를 만족하는 점 F를 BC의 연장선 위에 잡자. 그러면, 주어진 조건으로부터 $BF = BC + CF = BC + BE = BD$이다. 그러므로 $\triangle BDF$는 이등변삼각형이다. 따라서, $\angle BDF = \angle BFD$이다. 한편, $EF = BF - BE = BF - CF = BC$이므로 $\square AEFD$는 평행사변형이다. 따라서, $GE \parallel DF$이다.

따라서, $\triangle BEG$ 또한 이등변삼각형이므로, $\angle BGE = \angle BEG$이다. 또한,

$\angle ABD = \angle BGE - \angle BAG = \angle BEG - \angle GAC = \angle EAD - \angle EAC = \angle CAD = \angle OCB$

이다. 따라서, $\triangle ABD$와 $\triangle OCB$는 닮음(AA닮음)이다. 그러므로 $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{CB}{OB}$이다. 그런데, $AD = BC$, $OB = \dfrac{BD}{2}$이므로, $\dfrac{DB}{BC} = \dfrac{2BC}{BD}$이다. 따라서, $\left(\dfrac{BD}{BC}\right)^2 = 2$이다. 즉, $\dfrac{BD}{BC} = \sqrt{2}$이다. □

156) 풀이 :

$\triangle DBC$에서 $\angle BDC = 90^\circ$이고, $DG \perp BC$이므로 $GD^2 = BG \cdot GC$이다. $\triangle FGC$와 $\triangle BGH$에서 $\angle FGC = \angle BGH = 90^\circ$, $\angle FCG = \angle BHG$이다. 따라서, $\triangle FGC$와 $\triangle BGH$는 닮음(AA닮음)이다. 그러므로, $GF : BG = GC : GH$이다. 즉, $GF \cdot GH = BG \cdot GC$이다. 따라서, $GD^2 = GF \cdot GH$이다. □

157) 풀이 :

$\triangle DPQ$와 $\triangle ABC$가 닮음임을 보이면 된다. I가 내심이므로 AI는 공통, $\angle IAF = \angle IAE$,

$\angle AFI = \angle AEI = 90^\circ$이다. $\triangle IAF \equiv \triangle IAE$(RHA합동)이다. 그러므로 $AF = AE$, $\angle AFE = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$이다. 그러므로, $\angle BFP = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$이다. 그런데, $\angle FBP = \frac{1}{2}\angle B$, $\angle FPB = \frac{1}{2}\angle C$이다. $BF = BD$, BP는 공통, $\angle FBP = \angle BDP$이므로 $\triangle BFP \equiv \triangle BDP$(SAS합동)이다. 따라서, $\angle DPB = \frac{1}{2}\angle C$, $\angle DPQ = \angle C$이다. 같은 방법으로 $\angle DQP = \angle B$이다. 따라서, $\angle PDQ = \angle A$이다. 그러므로 $\triangle DQP$와 $\triangle ABC$는 닮음이다. 즉, $\triangle DQP$가 이등변삼각형이면, $\triangle ABC$도 이등변삼각형이다. □

158) 풀이 :

점 P에서 변 AD에 내린 수선의 발을 R이라 하고, $AR = x$, $RD = y$라 하자. 또, 점 P에서 변 CD에 내린 수선의 발을 S라 하고, $DS = a$, $SC = b$라 하면,

$$x^2 + a^2 = AP^2 = 16,\ a^2 + y^2 = PD^2 = 64,\ y^2 + b^2 = PC^2 = 49$$

이므로,

$$PB^2 = x^2 + b^2 = (x^2 + a^2) + (y^2 + b^2) - (a^2 + y^2) = 16 + 49 - 64 = 1$$

이다. 따라서, $PB = 1$이다. □

159) 풀이:

$\triangle ABC$의 무게중심을 G라 하자. $\triangle CDG$와 $\triangle CAN$은 닮음비가 $2:3$인 닮음이다. 따라서, $GD : AB = 1:3$이다. 즉, $\triangle PDG$와 $\triangle PBA$는 닮음비가 $1:3$인 닮음이다. 그러므로, $PG : AP = 1:3$이다. 즉, $\triangle PDG$와 $\triangle PBA$는 닮음비가 $1:3$인 닮음이다. 그러므로, $PG : AP = 1:3$이다. 마찬가지로, $\triangle AGE$와 $\triangle AMC$는 닮음비가 $2:3$인 닮음이다. 그런데, $MC = BM$이므로 따라서, $GE : BM = 2:3$이다. 그러므로 $GQ : QM = 2:3$이다. 그런데, $AG : GM = 2:1$이므로, $AP : PG : GQ : QM = 7.5 : 2.5 : 2 : 3$이다. 따라서, $\frac{PQ}{AM} = \frac{4.5}{15} = \frac{3}{10}$이다. □

160) 풀이:

$\alpha = \angle BAD$, $\beta = \angle DAE$, $\gamma = \angle EAC$이다. $BA = BE$이므로 $\angle AEB = \alpha + \beta$이다. 마찬가지로, $CA = CD$이다. 그러므로 $\angle ADC = \beta + \gamma$이다. 따라서,

$$180^\circ = (\alpha + \beta) + (\beta + \gamma) + \beta = (\alpha + \beta + \gamma) + 2\beta$$

이다. 그런데, $29^2 = 20^2 + 21^2$이다. 즉, $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$이다. 따라서, $\beta = 45^\circ$이다. 즉, $\angle DAE = 45^\circ$이다. □

161) 풀이:

$\angle ABF = \angle DCG = 30^\circ$이므로 $BF \parallel CG$이다. 따라서, $\triangle BFG = \triangle BFC = \frac{1}{2}\triangle ABC = 12$이다. □

162) 풀이:

B와 D, C와 E를 연결하면, $BC = CD = DE$, $\angle BCD = \angle CDE = 140^\circ$이므로 $\triangle BCD \equiv \triangle CDE$이다. 따라서, $\angle CBD = \angle CDB = \angle DCE = \angle DEC = 20^\circ$이다. 그러므로 $\angle BCE = 140^\circ - 20^\circ = 120^\circ$이다. 또

한, $\angle BAE = 60^\circ$ 이다. $\angle BCE + \angle BAE = 180^\circ$ 이므로 네 점 A, B, C, E가 한 원 위에 있고, B, C, D, E를 지나는 원이 존재한다. 이 두 원은 B, C, E를 지나므로 동일한 원이다. 따라서, $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE = 20^\circ$ 이다. □

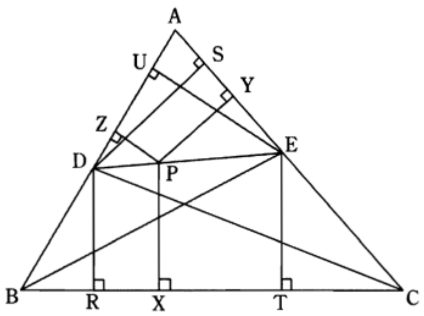
163) 풀이:

$\angle BAD = \angle DCB$이다. 그러므로 $\angle PAD = \angle PCB$, $\angle APD = \angle CPB$이므로 $\triangle PAD$와 $\triangle PCB$는 닮음(AA닮음)이다. 또한, 사각형 $ABCD$가 원에 내접하므로 $\angle PCA = \angle PBD$, $\angle APC = \angle DPB$이므로 $\triangle PAC$와 $\triangle PDB$는 닮음(AA닮음)이다. 따라서, $\frac{PA}{PD} = \frac{AC}{DB} = \frac{CP}{BP}$이므로 $\frac{PA}{6} = \frac{AC}{3} = \frac{10}{5}$이다. $PA = 12$, $CA = 6$이고, $AB = PA - PB = 7$이다. □

164) 풀이:

점 D에서 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 그러면, $\angle AHD = \angle AED = 90^\circ$ 이다. 그러므로 네 점 A, H, E, D는 한 원 위에 있다. 따라서, $\angle DAE = \angle DHE$이다. 또한, $\triangle BHD \equiv \triangle BMD$(RHA합동)이고, 더욱이 $\triangle BHE \equiv \triangle BME$(SAS합동)이다. 그러므로 $\angle DME = \angle DMB - \angle EMB = \angle DHB - \angle EHB = \angle DHE = \angle DAE$이다. 즉, $\angle DME = \angle DAE$이다. 또한, $\angle DAE = \angle DCF$, $\angle DFC = \angle DMC$이다. 따라서, 네 점 D, M, C, F도 한 원 위에 있다. 따라서, $\angle DCF = \angle DMF$이다. 즉, $\angle DME = \angle DMF$이다. □

165) 풀이:



(그림참고) 점 D에서 변 BC, CA에 내린 수선의 발을 각각 R, S, 점 E에서 변 BC, AB에 내린 수선의 발을 각각 T, U라 하자. 그러면, DC는 공통, $\angle DCR = \angle DCS$, $\angle DRC = \angle DSC = 90^\circ$ 이므로 $\triangle DCR \equiv \triangle DCS$(RHA합동)이다. 마찬가지로, $\triangle EBU \equiv \triangle EBT$(RHA합동)이다. 따라서, $DR = DS$, $ET = EU$이다. $r = \frac{DP}{DE}$라고 하자. 그러면 $0 < r < 1$이고, $\frac{PE}{DE} = 1 - r$이다. $PY \parallel DS$이므로 $PY = (1-r)DS = (1-r)DR$이다. 마찬가지로, $PZ \parallel EU$이므로 $PZ = rEU = rET$이다. 따라서, $DR \parallel PX \parallel ET$이고, $\frac{DP}{PE} = \frac{r}{1-r}$이므로

$$PY + PZ = (1-r)DR + rET = PX$$

이다. □

166) 풀이:

내심 I에서 변 CA에 내린 수선의 발을 E, $\angle CAD = \alpha$라 하자. 그러면 $\sin\alpha = \frac{a}{2b}$이다. $ID = IE$(내접원의 반지름)이므로

$$\sin\alpha = \frac{a}{2b} = \frac{24}{25}$$

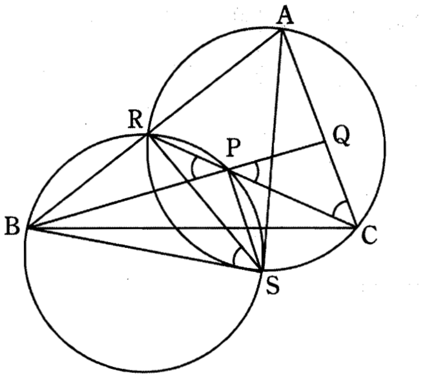
이다. a, b가 서로소이므로 $a = 48$, $b = 25$이다. 따라서, $BC = 48$, $DC = \frac{1}{2}a = 24$이고, $AE = AC - EC = 1$이다. 그러므로

$$ID = IE = AE\tan\alpha = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}$$

이다. □

167) 풀이:



(그림참고) 삼각형 BPR과 RCA의 외접원의 교점을 S라 하자. 네 점 B, S, P, R이 한 원 위에 있으므로 $\angle BSR = \angle BPR$이다. 또, 네 점 A, R, S, C도 한 원 위에 있으므로 $\angle RCA = \angle RSA$이다. 그러므로

$$\angle BSR = \angle BPR = \angle QPC = \angle PCQ = \angle RCA = \angle RSA$$

이다. 따라서, RS는 $\angle BSA$를 이등분한다. $BR = RA$이므로 각 이등분선의 정리에 의하여 $BS = SA$이다. 그러므로, $\angle BRS = 90^\circ$이다. B, S, P, R이 한 원 위에 있으므로, $\angle BPS = 90^\circ$이다. 그러므로

$$\angle CPS = 90^\circ - \angle QPC = 90^\circ - \angle BSR = \angle RBS = \angle ABS$$

이고,

$$\angle SCP = \angle SCR = \angle SAR = \angle SAB$$

이다. 따라서, $\triangle ABS$와 $\triangle CPS$는 닮음이다. $\triangle ABS$가 이등변삼각형이므로 $BS = SA$이다. 그러므로 $\triangle CPS$도 $PS = SC$인 이등변삼각형이다. 또한,

$$\frac{PS}{BS} = \frac{CP}{AB} = \frac{\frac{1}{2}AB}{AB} = \frac{1}{2}$$

이다. 따라서, $\triangle PBS$가 직각삼각형이므로 삼각비에 의하여 $\angle SBP = 30^\circ$이다. 따라서,

$\angle BRC = \angle BRS + \angle SRC = \angle BRS + \angle SRP = \angle BRS + \angle SBP = 90^\circ + 30^\circ + 120^\circ$

이다. □

168) 풀이:

$\triangle ABC$의 내심을 I라 하자. 그러면,

$$\angle BAA_1 = 90^\circ - \frac{\angle B}{2} = \frac{\angle A + \angle C}{2} > \frac{\angle A}{2} = \angle BAI$$

$$\angle CAA_2 = 90^\circ - \frac{\angle C}{2} = \frac{\angle A + \angle B}{2} > \frac{\angle A}{2} = \angle CAI$$

이다. 따라서, A_1와 A_2는 $\angle A$의 이등분선 AI을 기준으로 서로 반대편에 있다. 더욱이, $\angle AIA_1 = 180^\circ - \angle AIB$이므로,

$$\angle IAA_1 = 90^\circ - \angle AIA_1 = 90^\circ - \left(\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2}\right) = \frac{\angle C}{2}$$

이다. 마찬가지로, $\angle IAA_2 = \dfrac{\angle B}{2}$이다. 따라서,

$$IA_1 = AI\sin\frac{C}{2},\ IA_2 = AI\sin\frac{B}{2} \qquad (1)$$

$$AA_1 = c\sin\frac{B}{2},\ AA_2 = b\sin\frac{C}{2} \qquad (2)$$

이다. A, A_2, I, A_1은 AI를 지름으로 하는 한 원 위에 있다. 그러므로, 톨레미의 정리에 의하여

$$A_1A_2 \cdot AI = IA_2 \cdot AA_1 + IA_1 \cdot AA_2$$

이다. 식 (1)과 식 (2)를 위 식에 대입하면

$$A_1A_2 = c\sin^2\frac{B}{2} + b\sin^2\frac{C}{2}$$

이다. 마찬가지로 B_1B_2과 C_1C_2를 구하면

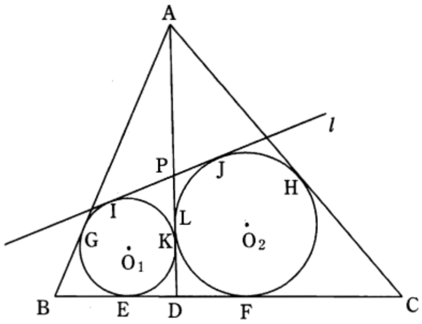
$$B_1B_2 = a\sin^2\frac{C}{2} + c\sin^2\frac{A}{2},\ C_1C_2 = b\sin^2\frac{A}{2} + a\sin^2\frac{B}{2}$$

이다. 따라서,

$$\begin{aligned}
&2(A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2)\\
&= 2(a+b)\sin^2\frac{C}{2} + 2(b+c)\sin^2\frac{A}{2} + 2(c+a)\sin^2\frac{B}{2}\\
&= (a+b)(1+\cos C) + (b+c)(1-\cos A) + (c+a)(1-\cos B)\\
&= 2(a+b+c) - \{(c\cos B + b\cos C) + (a\cos C + c\cos A) + (a\cos B + b\cos A)\}\\
&= 2(a+b+c) - (a+b+c) = a+b+c = AB + BC + CA
\end{aligned}$$

이다. □

169) 풀이:



그림과 같이 원 O_1과 접선 l, 변 AB, BD, AD와의 접점을 각각 I, G, E, K라고 잡자. 또, 원 O_2가 접선 l, 변 AD, DC, AC와의 접점을 각각 J, L, F, H라 잡자. 그러면,

$$\begin{aligned} AB+AC-BC &= AG+AH-EF \\ &= AK+AL-IJ \\ &= 2AP+PK+PL-PI-PJ \\ &= 2AP \end{aligned}$$

이다. □

170) 풀이:

$\triangle ABC$는 이등변삼각형이고, AD는 수선이므로 B, C는 AD에 대하여 대칭이다. 따라서,

$$\angle BCN=\angle ECM=\angle MBN=\angle EBM=\frac{1}{3}\angle ABC$$

이다. 따라서, $\angle ECM=\angle EBM$이다. 그러므로, 네 점 E, B, C, M은 한 원 위에 있다.
따라서, 원주각의 성질에 의하여

$$\angle EMB=\angle ECB=\angle MBN$$

이다. 따라서, $EM \parallel BN$이다. □

171) $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $a+b+c=2s$라 하면, $BP=AR=s$이므로 $PA=BR=s-c$, $MP=MR=s-\frac{c}{2}$, $PR=2MP=2s-c=a+b$이다. 방접원 O의 반지름의 길이를 r_b, $\triangle ABC$의 내접원의 반지름의 길이를 r이라 하면

$$\frac{r_b}{r}=\frac{s}{s-b},\ r_b=\frac{sr}{s-b}$$

이다. 따라서, $PQ=2r_b=\frac{2sr}{s-b}$이다. $\triangle ABC=sr$이고, 점 C에서 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$CH=a\sin B=\frac{2}{c}\left(\frac{ca}{2}\sin B\right)=\frac{2}{c}\triangle ABC=\frac{2sr}{c}$$

이다 또한,

$$\begin{aligned} RH &= AR-AH \\ &= s-b\cos A \\ &= s-b+b(1-\cos A) \\ &= s-b+b\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} \end{aligned}$$

$$= s-b+\frac{4(s-b)(s-c)}{2c}$$

$$= \frac{s-b}{c}(a+b)$$

이다. 따라서,

$$\frac{CH}{RH} = \frac{2sr}{(a+b)(s-b)} = \frac{PQ}{PR}$$

이다. 따라서, Q, C, R은 한 직선 위에 있다. □

172) 풀이:

CP를 한 변으로 하는 정삼각형 CPD를 PD와 BC가 만나도록 그리면,

$$AC = BC,\ CD = CP,\ \angle ACP = 60 - \angle PCB = \angle BCD$$

이므로 $\triangle ACP$와 $\angle BCD$는 합동이다. 따라서, $BD = AP = 1$이다. 그런데, $BD^2 + BD^2 = 3+1 = PD^2$이므로 $\angle PBD = 90^\circ$이다. 그리고, $\sin\angle PDB = \frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 따라서, $\angle PDB = 60^\circ$이다. 즉, $\angle BDC = 120^\circ$이다. $\triangle BDC$에 제 2 코사인 법칙을 적용하면

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 - 2BD \cdot DC\cos 120^\circ = 7$$

이다. 따라서, 구하는 정삼각형 한 변의 길이는 $\sqrt{7}$이다. □

173) 풀이:

□$ACDB$는 원에 내접하는 등변사다리꼴이므로 $AC = BD$, $\angle FBD = \angle GCA$이다. 또한, □$FGCB$는 평행사변형이므로 $FB = GC$이다. 따라서, $\triangle ACG \equiv \triangle DBF$(SAS합동)이다. 그러므로, $\angle GAC = \angle FDB$이다. 원주각과 동위각, 엇각 등의 성질에 의하여

$$\angle FDB = \angle EAB = \angle BCD = \angle BAD = \angle ADC$$

이다. 즉, $\angle GAC = \angle ADC$이므로, AG는 원 K에 접한다. □

174) 풀이:

$\angle A = \angle PBA$이므로 $\angle A = \angle DBA = \alpha$라고 하자. 점 A는 접점이므로

$$QA^2 = QD \cdot QC \qquad (1)$$

이다. 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있으므로, $\angle CAB = \angle CDB = \alpha$, $\alpha = \angle ABD$이므로
$AB \parallel CD$이다. 따라서,

$$\angle DAB = \angle ADQ \qquad (2)$$

이다. 또한, A는 접점이므로 $\triangle ABD$에서

$$\angle ABD = \alpha = \angle DAQ \qquad (3)$$

이다. 식 (2), (3)에서 $\triangle ABD$와 $\triangle DAQ$(AA닮음)이다. 따라서, $AD : AB = DQ : AD$이다. 즉,

$$AD^2 = AB \cdot DQ$$

이다. 식 (1)과 (4)에 의하여

$$AQ^2 : AD^2 = DQ \cdot CQ \ : \ AB \cdot DQ = CQ \ : AB$$

이다. □

175) 풀이:

가정에서 $a+b+c=2s$이고, 변의 길이이므로 $a,b,c>0$이다. 따라서, 산술-기하평균 부등식에 의하여

$$\begin{aligned}(2s-a)(2s-b)(2s-c) &= (a+b+c-a)(a+b+c-b)(a+b+c-c)\\ &= (b+c)(c+a)(a+b)\\ &\geq 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}\cdot 2\sqrt{ab}\\ &= 8abc\end{aligned}$$

이다. 그런데, $\triangle ABC=\dfrac{abc}{4R}$에서 $R=1$이므로 $abc=4\triangle ABC$이다. 이를 식 (1)에 대입하면

$$(2s-a)(2s-b)(2s-c)\geq 32\triangle ABC$$

이다. 단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립한다. □

176) 풀이:

$BX=CX$이므로 호 QC에 대한 원주각의 성질에 의하여 $\angle XCB=\angle XBC=\angle QBC=\angle QAC$이다. 또한, $\angle XCB=\angle ACB=\angle QBC$이므로 평행선과 엇각의 성질에 의하여 $AQ\parallel BC$이다. 따라서, $\angle PAQ=\angle ADB=90^\circ$이다. 그러므로, 중심각과 원주각의 관계에 의하여, PQ는 원 O의 지름이다 .□

177) 풀이:

PD의 연장선과 원 O과의 교점을 Q라 하자. 그러면,

$$\angle ADQ=\angle BDP=180^\circ-\angle ADP=180^\circ-\angle ACB=\angle AQB$$

이다. 또, $\angle QAD=\angle BAQ$이므로, $\triangle ADQ$와 $\angle AQB$는 닮음(AA닮음)이다. 따라서, $\dfrac{AD}{AQ}=\dfrac{AQ}{AB}$이다. $AB=4AD$이므로 $AB=2AQ$이다. 그런데, $\angle DPB=\angle QPB=\angle QAB$, $\angle DBP=\angle ABP=\angle AQP$이므로, $\triangle PDB$와 $\triangle AQB$가 닮음(AA닮음)이다. $\dfrac{PD}{AQ}=\dfrac{PB}{AB}$이다. $AB=2AQ$이므로 이를 대입하면 $PB=2PD$이다. □

178) 풀이:

$\triangle ABC$에서 $BC=a$, $Ca=b$, $AB=c$, $2s=a+b+c$라고 하자. 그러면, 산술-기하평균 부등식에 의하여

$$\frac{s}{3}=\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\geq\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

이다. 양변을 세제곱하면,

$$(s-a)(s-b)(s-c)\leq\frac{s^3}{27}\qquad(1)$$

이다. 헤론의 공식에 식 (1)과 $S=rs$를 이용하여 정리하면,

$$S^2=s(s-a)(s-b)(s-c)\leq\frac{s^4}{27}=\frac{S^4}{27r^4}$$

이다. 따라서, $\dfrac{S^2}{r^4}\geq 27$이다. 즉, $\dfrac{S}{r^2}\geq 3\sqrt{3}$이다. 단, 등호는 삼각형 ABC가 정삼각형일 때 성립한다. □

179) 풀이:

현 AB의 중점을 M, 원의 중심 I에서 OA에 내린 수선의 발을 P라 하자. 그러면, $AM=c$, $OA=R$, $IP=r$, $OI=R-r$이다. $\angle IOP=\angle AOM$, $\angle IPO=\angle AMO=90^\circ$ 이므로 $\triangle OMA$와 $\triangle OPI$는 닮음(AA 닮음)이다. 따라서,

$$\frac{OI}{IP}=\frac{OA}{AM},\ \frac{R-r}{r}=\frac{R}{c}$$

이다. 양변을 R로 나누고 정리하면, $\frac{1}{r}=\frac{1}{c}+\frac{1}{R}$이다. □

180) 풀이:

CD의 중점을 F라 하자. 그러면, FE는 변 CD의 수직이등분선이 된다. $\angle ADB=2\alpha$라고 하자. 그러면, $\angle DAB=\angle DBA=90^\circ-\alpha$, $\angle DBC=\angle DCB=2\alpha$이다. $\triangle BCD$의 외접원을 O라 하자. 직선 AB와 원 O의 교점 중 B가 아닌 점을 E'라 하자. 그러면, 네 점 B, C, D, E'는 원 O 위에 있다. $\angle CE'D=\angle CBD=2\alpha$, $\angle DCE'=\angle DBA=90^\circ-\alpha$이다. $\triangle CDE'$에서 $\angle E'DC=180^\circ-\angle CE'D-\angle DCE'=90^\circ-\alpha\angle DCE'$이다. 따라서, $\triangle CDE'$는 $CE'=DE'$인 이등변삼각형이다. 그러므로, $E=E'$이다. 따라서, $\angle BCE=\angle DCE=\angle DCB=90^\circ-3\alpha$이다. $\angle BCE=2\angle CED=4\alpha$이므로 $\alpha=\frac{90^\circ}{7}$이다. 따라서, $\angle BCE=\frac{360^\circ}{7}$이다. □

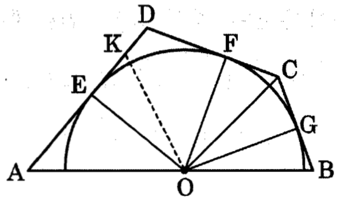
181) 풀이:

AB와 MP의 연장선과의 교점을 N, BP의 연장선과 AC와의 교점을 H라 하자. $\angle BAP=\angle HAP$, AP는 공통, $\angle APB=\angle APH$이므로 $\triangle ABP\equiv\triangle AHP$(ASA 합동)이다. 따라서, $BP=PH$이다. 즉, 점 P는 BH의 중점이다. 주어진 조건으로부터 M은 BC의 중점이다. 따라서, $\triangle BCH$에서 삼각형 중점연결정리에 의하여 $PM \parallel HC$이다. 즉 $PN \parallel CA$이다. 삼각형 중점연결정리에 의하여 N은 AB이 중점이 된다. 즉, $AN=NB$이다. $\triangle ABM$에 체바의 정리를 적용하면

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BD}{DM}\cdot\frac{ME}{EA}=1$$

이다. $AN=NB$이므로 $\frac{BD}{DM}\cdot\frac{ME}{EA}=1$이다. 즉, $MD:DB=ME:EA$이다. 따라서, ED와 AB는 평행하다. □

182) 풀이:



(그림참고) 주어진 조건으로부터 $OE=OF=OG$, $OE\perp AD$, $OF\perp DC$, $OG\perp BC$이다. 또한, $\triangle OCF\equiv\triangle OCG$이므로 $FC=CG=\sqrt{2}$이다. ED 위에 $FC=EK$인 점 K를 잡으면 $\triangle OCF\equiv OKE$이다. 그러므로 $EK=\sqrt{2}$이다. $\angle OCF=\angle OCG=\angle OKE=\theta$라 하면, 사각형 $ABCD$는 원에 내접하는 사각형

이므로 $\angle A = 180^\circ - 2\theta$이다. 그러므로 $\angle AOK = \theta$이다. 따라서, $AK = AO$이다. 그래서, $\sqrt{2} + a = 3a$, $2a = \sqrt{2}$이다. 따라서, $4a^2 = 2$이다. □

183) 풀이:

주어진 조건으로부터 $AE = s-a$, $EC = s-c$, $AF = s-a$, $FB = s-b$임을 알 수 있다. 그러므로, AD, BE, CF가 한 점 G에서 만나므로, 반 오우벨의 정리에 의하여

$$\frac{AG}{GD} = \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC} = \frac{s-a}{s-b} + \frac{s-a}{s-c} = \frac{\{(s-b)+(s-c)\}(s-a)}{(s-b)(s-c)}$$

이다. 그런데, $(s-b)+(s-c) = 2s-(b+c) = a$이므로, $\dfrac{AG}{GD} = \dfrac{a(s-a)}{(s-b)(s-c)}$이다. □

184) $\triangle EPN$과 $\triangle EBC$가 닮음이므로, $EN : EC = PN : BC$이다. 즉, $(x-2) : x = PN : 4$이다. 따라서, $PN = \dfrac{4(x-2)}{x}$이다. 또, $\triangle FBC$와 $\triangle FMP$가 닮음이므로, $FM : MP = FB : BC$이다.

즉, $(FB-2) : MP = FB : 4$이다. 따라서, $MP = \dfrac{4(FB-2)}{FB}$이다.

그러므로

$$PN + MP = MN = \frac{4(x-2)}{x} + \frac{4(FB-2)}{FB} = 2$$

이다. 따라서, $FB = \dfrac{4x}{3x-4}$이다. □

185) 풀이:

BC와 EF의 연장선의 교점을 H라 하자. 삼각형 FBH와 직선 AGM에 메네라우스의 정리를 적용하면,

$$\frac{HG}{FG} \cdot \frac{FA}{BA} \cdot \frac{BM}{HM} = 1$$

이다. 또, 삼각형 ECH와 직선 AGM에 메네라우스의 정리를 적용하면

$$\frac{HG}{EG} \cdot \frac{EA}{CA} \cdot \frac{CM}{HM} = 1$$

이다. $CM = BM$, $EA = 2FA$이므로 위의 두 식을 변변 나누어 정리하면,

$$\frac{EF}{FG} = 2 \cdot \frac{BA}{CA} = 2 \cdot \frac{6}{8} = \frac{3}{2}$$

이다. □

186) 풀이:

점 B에서 AC에 내린 수선의 발을 F라 하자. 그러면 $AD \perp BC$, $AE \perp BF$, $DE \perp FC$이므로 $\triangle ADE$와 $\triangle BCF$는 닮음(AA닮음)이다. 점 D가 BC의 중점이고, $DE \parallel BF$이므로 점 E가 FC의 중점이다. 또한 M이 DE의 중점이므로 $\triangle BEC$와 $\triangle AMD$는 닮음이다. 따라서, $\angle EBC = \angle MAD$이다. 그러므로

$\angle ABE + \angle BAM = (\angle ABD - \angle EBC) + (\angle BAD + \angle MAD) = \angle ABD + \angle BAD = 90^\circ$

이다 .따라서, $AM \perp BE$이다. □

187) 풀이:

AC의 연장선 위에 $CB=CE$를 만족하는 점 E를 잡자. 점 M과 점 A, B, E를 연결하자. MC의 연장선과 BE의 교점을 N이라 하자. 호 MA와 호 MB의 길이가 같으므로 $AM=MB$이다. □$ABCM$은 원에 내접하므로, $\angle BCN=\angle BAM$, $\angle ECN=\angle ACM=\angle ABM=\angle BAM$이다. 따라서, $\angle BCN=\angle ECN$이다. 즉, 이등변삼각형 CBE에서 CN은 $\angle C$의 이등분선이므로 $BN=EN$, $MN\perp BE$이다. 따라서, $ME=MB$이다. 즉, $MA=ME$이다. 그러므로 $\triangle MAE$는 이등변삼각형이고, $MD\perp AE$이므로 $AD=DE$이다. 따라서, $2AD=AE=AC+CE=AC+BC$이다. □

188) $\triangle ABC$의 외접원과 AI의 연장선과의 교점을 N이라 하자. I가 $\triangle ABC$의 내심으로 $\angle BIC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A=120^\circ$이다. 원주각과 중심각 사이의 관계에 의하여 $\angle BOC=2\angle A=120^\circ$이다. 즉, $\angle BIC=\angle BOC=120^\circ$이므로, B, I, O, C는 한 원 위에 있다. 또, $\angle BAN=\angle CAN=30^\circ$이므로 $BN=CN$이다. 따라서, $BN=CN=IN=ON$이다. □$BCOI$의 외접원의 중심이 N이다. 이 외접원을 Γ라고 하자. $BH\perp AC$, $CH\perp AB$이므로 $\angle BHC=180^\circ-60^\circ=120^\circ$이다. 또, $\angle AB'B=60^\circ$이므로 $\angle BB'C=180^\circ-\angle AB'B=120^\circ$이다. 따라서, $\angle BHC=\angle BB'C=\angle BIC=\angle BOC=120^\circ$이므로, 점 H, B'도 원 Γ 위에 있다. $\angle BC'C=\angle BI'C=60^\circ$이므로 $\angle BC'C+\angle BIC=\angle BI'C+\angle BIC=180^\circ$이다. 따라서, C', I'도 원 Γ 위에 있다. 그러므로, 여덟 점 B, C,H, O, I, I', B', C'은 한 원 위에 있다. □

189) 풀이:

$\triangle ABC$의 무게중심을 G라 하자. 그러면, $\angle CAL=\angle CNL$, $\angle ACL=\angle ALN$이므로 $\triangle AGC$와 $\triangle NGL$은 닮음(AA닮음)이다. 같은 방법으로 $\triangle MGL$과 $\triangle AGB$는 닮음(AA닮음)이다. 따라서,

$$\frac{LN}{AC}=\frac{LG}{CG},\ \frac{LM}{AB}=\frac{GL}{BG}$$

이다. 주어진 조건으로부터 $LM=LN$이므로 위 식을 변변 나누면, $\frac{AB}{AC}=\frac{BG}{CG}$이다. 중선의 정리로부터

$$BC^2+AB^2=2(EC^2+BE^2)=2\left(\frac{1}{4}AC^2+\frac{9}{4}BG^2\right)$$

이다. 이를 정리하면 $9BG^2=2BC^2+2AB^2-AC^2$이다. 같은 방법으로

$$AC^2+BC^2=2(AF^2+CF^2)=2\left(\frac{1}{4}AB^2+\frac{9}{4}CG^2\right)$$

이다. 이를 정리하면 $9CG^2=2AC^2+2BC^2-AB^2$이다. 따라서,

$$\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{BG^2}{CG^2}=\frac{2BC^2+2AB^2-AC^2}{2AC^2+2BC^2-AB^2}$$

이다. 이를 정리하여 인수분해하면,

$$(CA^2-AB^2)(2BC^2-AB^2-CA^2)=0$$

이다. $AB\neq CA$이므로 $2BC^2=CA^2+AB^2$이다. □

39) 풀이 : (나비의 정리(Butterfly's Theorem))

$UM=VM=a$, $XM=x$, $YM=y$라고 하자. 점 X에서 AC, BD에 내린 수선의 길이를 각각 h_1, h_2, 점 Y에서 BD, AC에 내린 수선의 길이를 각각 h_3, h_4라고 하면,

$$\frac{a^2-x^2}{a^2-y^2}=\frac{UX\cdot VX}{UY\cdot VY}=\frac{AX\cdot BX}{CY\cdot DY}$$
$$=\frac{AX\sin\angle BAC\cdot\ BX\sin\angle ABD}{CY\sin\angle ACD\cdot\ DY\sin\angle BDC}$$
$$=\frac{h_1\cdot h_2}{h_3\cdot h_4}=\frac{h_1}{h_4}\cdot\frac{h_2}{h_3}=\frac{x^2}{y^2}$$

이다. 따라서, $x=y$이다. 즉, $MX=MY$이다. □

40) 풀이 : (KMO, '1998)

점 A에서 BC에 내린 수선의 발을 X라 하자. BE가 삼각형 ABC의 외접원의 지름이므로, $\angle BCE=90^\circ$이다. 또, $\angle AXB=90^\circ$이므로 $AH /\!/ CE$이다. 또한, 원주각의 성질에 의하여 $\angle EBC=\angle EAC$, $\angle ABE=\angle ACE$이다. 또, $AH /\!/ CE$이므로 $\angle ACE=\angle HAC$이다.

$\angle HAC=\angle HBC$이므로, $\angle B=\angle EBC+\angle ABE=\angle EAC+\angle HAC=\angle HAE$

이다. $\angle HCE=90^\circ-\angle BCH=90^\circ-(90^\circ-\angle B)=\angle B$이다. 따라서, $\angle HAE=\angle HCE$, $\angle HAC=\angle ACE$ 이다. 즉, $\angle EAC=\angle HCA$이다. 따라서, $AE /\!/ HC$이므로 $\square AHCE$는 평행사변형이다. AC의 중점이 D이고, HE의 중점도 D이므로 H, D, E는 동일 직선 위에있다. □

41) 풀이 : (KMO, '1998)

$\triangle ABC$ 와 외접원과 $\angle A$의 이등분선과의 교점을 D'라고 하자. 그러면, $BD'=D'C$이다. 따라서, $OD'\perp BC$이다. 또, $AO=OD'$이므로 $\angle OD'A=\angle OAD'$이다. $ED /\!/ OD'$이므로 $\angle OD'A=\angle EDA$이다. 따라서, $\angle EDA=\angle EAD$이다. 즉, $\triangle ADE$는 이등변삼각형이다.□

42) 풀이 : (KMO, '2002)

AM의 연장선과 EM의 연장선이 BC의 연장선과 만나는 점을 각각 A', E'라고 하자. 정사각형 $ABCD$의 한 변의 길이를 x라고 하자. $\angle MED=\angle ME'C$이므로 $\triangle BEE'$는 이등변삼각형이다. $\triangle MDE$와 $\triangle MCE'$는 닮음이고, $CM=MD$이므로 $ME=ME'$이다. 그러므로 $BM\perp EE'$이다. 따라서, $\triangle BME'$는 직각삼각형이고, $\triangle BCM$과 $\triangle MCE'$는 닮임이 된다. 따라서, $MC:CE'=BC:CM=2:1$이므로 $CE'=\frac{1}{4}x=DE$이다. $\triangle PBA'$과 $\triangle PEA$가 닮음이므로 $\frac{PE}{BP}=\frac{AE}{BA'}=\frac{\frac{3}{4}x}{2x}=\frac{3}{8}$ 이다. □

43) 풀이 : (CRUX, 2002)

$\angle PEA=\angle PFA=90^\circ$이므로, 피타고라스의 정리에 의하여 $PA^2=PF^2+FA^2=PE^2+EA^2$이다. 따라서,

$$(AF+PE)(AF-PE)=(AE+PF)(AE-PE)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

이다. $\square AFPE$가 원에 외접하므로

$$AF+PE=AE+PE\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

이다. 따라서, 식 (1)은 $AF-PE=AE-PF$이다. 이것을 식 (2)에 대입하면 $PE=PF$이다. 같은 방법으로 $PD=PE$이다. 따라서, $PD=PE=PF$이다. 즉, P는 $\triangle ABC$의 내심이다. □

44) 풀이 :

DA의 중점을 O라 하자. 그러면, $\angle DCA=90^\circ$이므로 점 O는 $\triangle DAC$의 외심이다. $\triangle DAC$의 외접원과 BC의 교점을 E라 하자. 그러면, $\angle AOE=2\angle ACE=\angle ABE$이다. 그러므로 $BE=OE=\frac{1}{2}AD$이다. 따라서, 방멱의 원리에 의하여 $\frac{1}{2}AD\cdot BC=BE\cdot BC=BA\cdot BD$이다. 그러므로 $\frac{2AB}{BC}=\frac{AD}{BD}=\frac{BD-AB}{BD}=1-\frac{AB}{BD}$ 이다. 즉,

$\frac{1}{AB}-\frac{1}{BD}=\frac{2}{BC}$ 이다. □

45) 풀이 :
$\alpha=\frac{\angle A}{2}$, $\beta=\frac{\angle B}{2}$, $\gamma=\frac{\angle C}{2}$라 하자. 그러면 $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$ 이다. 그리고, $\angle ADE=\angle CED+\angle DCE=\angle CED+\gamma$이다. 주어진 가정으로부터 $\angle ADE=\angle BIF$이므로 $\angle ADE=\angle BIF=90^\circ-\beta=\alpha+\gamma$이다. 따라서, $\angle CED=\alpha$이다. 즉, $\angle IED=\angle IAD$이다. 그러므로 네 점 A, E, I, F는 한 원 위에 있다. 따라서,

$$\angle AED=\angle AID=\angle BAI+\angle ABI=\alpha+\beta=90^\circ-\gamma=\angle CIF\text{이다. □}$$

46) 풀이 :
AD가 지름이므로 $\angle AED=\angle AFD=90^\circ$ 이다. 따라서, 직각삼각형의 닮음에 의하여, $BD^2=BE\cdot AB$, $CD^2=AC\cdot CF$이다. 또한, 피타고라스의 정리에 의하여 $AB^2-BD^2=AD^2=AC^2-CD^2$이다. 따라서, $AB^2-BD^2=AB^2-BE\cdot AB=AB\cdot AE$이고, $AC^2-CD^2=AC^2-AC\cdot CF=AC\cdot AF$이다. 즉, $AE\cdot AB=AF\cdot AC$이다. □

47) 풀이 :
$\angle DBC$의 이등분선과 $\angle BCE$의 이등분선의 교점을 O라 하자. 그러면, $BD=BC$, $\angle DBO=\angle CBO$, BO가 공통이므로 $\triangle BDO\equiv\triangle CBO$($SAS$합동)이다. 마찬가지로, $BC=CE$, $\angle BCO=\angle ECO$, CO가 공통이므로 $\triangle BCO\equiv\triangle ECO$($SAS$합동)이다. 따라서, $\angle BDO=\angle BCO$, $\angle BOD=\angle BOC$, $DO=CO$이다. 또한, $\angle CBO=\angle CEO$, $\angle BOC=\angle COE$, $BO=OE$이다. $\angle DBO=\angle CBO$이고, $\angle BCO=\angle ECO$이므로

$$\angle BOC=90^\circ-\frac{1}{2}\angle BAC=90^\circ-30^\circ=60^\circ$$

이다. 그러므로 $\angle DOE=3\angle BOC=180^\circ$ 또는 $\angle DOE=360^\circ-3\angle BOC=180^\circ$ 이다. 따라서, D, O, E는 한 직선 위에 있다. 그러므로 $\angle DBC=2\angle CBO=2\angle CEO=2\angle CED$이고, $\angle BCE=2\angle BCO=2\angle BDO=2\angle BDE$이다. 또, $DO=OC$이므로 $\angle ODC=\angle OCD$이다. 즉, $\angle CDE=\angle CDO=\frac{1}{2}\angle COE=30^\circ$ 이다. □

48) 풀이 :
$\beta=\angle B$, $\gamma=\angle C$라고 하면, $\angle A=2\gamma$, $\angle D=2\beta$이다. $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$ 이므로 $2\gamma+\beta+\gamma+2\beta=360^\circ$ 이고, $\beta+\gamma=120^\circ$ 이다. BA의 연장선과 CD의 연장선의 교점을 O라고 하자. 그러면 $\angle BOC=180^\circ-(\beta+\gamma)=60^\circ$ 이다. $AP\mathbin{/\mkern-5mu/}DC$, $CP\mathbin{/\mkern-5mu/}DA$를 만족하도록 점 P를 잡자. 그러면 $\angle APC=\angle ADC=2\beta$이다. $\angle BAP=\angle BOC=60^\circ$ 이고, $AB=AP$이므로 $\triangle ABP$는 정삼각형이다. 따라서, $\angle BPC=360^\circ-(\angle APB+\angle APC)=360^\circ-(60^\circ+3\beta)$
이므로 $\angle PCB=180^\circ-(\angle PBC+\angle BPC)=\beta-60^\circ$ 이다. 따라서, $\angle PBC=\beta-60^\circ=\angle PCB$이다.
즉, $PB=PC$이다. 따라서, $AB=CD$이다. □

49) 풀이 :
$\triangle BCD$의 외심을 O라고 하자. 그러면 $OB=OC=OD$이고, $\angle DOC=2\angle DBC=60^\circ$ 이다. 따라서, $\triangle OCD$는 정삼각형이다. 즉, $OB=OD=OC=CD$이다. 가정에서 $AB=AD=CD$이므로 $AB=AD=OD=OB$이다. 즉, $\square ABOD$는 마름모이다. 더욱이 $\angle BAD=\angle BOD=2\angle BCD$이다. □

50) 풀이 :
네 점 D, B, C, E가 한 원 위에 있으므로, $\angle BDC=\angle BEC$이다. $\angle BDA=60^\circ$ 이므로

$$\angle ADC = \angle BDA - \angle BDC = \angle CEA - \angle BEC = \angle AEB \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

이다. $AD = AB$, $AC = AE$, $\angle DAC = \angle BAE$이므로 $\triangle ADC \equiv \triangle ABE$($SAS$합동)이고,

$$\angle ADC = \angle ABE \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

이다. 식 (1)과 (2)로부터 $\angle AEB = \angle ABE$이다. 즉, $AB = AE$이다. $AC = AE$이므로 $AB = AC$이다. □

51) 풀이 :

$\angle PAB = \angle QAC$이고, $\angle PCB = \angle QCA$이므로 P와 Q는 $\triangle ABC$의 등각켤레점이다. 그러므로 $\angle ABP = \angle CBQ$이다. PQ와 $\angle PAQ$의 이등분선과의 교점을 I라 하자. 그러면 $PI : IQ = AP : AQ = CP : CQ$이다. 따라서, $\angle PCI = \angle QCI$이다. $\angle PAB = \angle QAC$이고. $\angle PCB = \angle QCA$이므로

$$\angle BAI = \angle PAB + \angle PAI = \angle QAC + \angle QAI = \angle CAI$$

이다. 같은 방법으로 $\angle BCI = \angle ACI$이다. 따라서, I는 $\triangle ABC$의 내심이다. 그러므로 $\angle ABI = \angle CBI$이다. 따라서,

$$\angle PBI = \angle ABI - \angle ABP = \angle CBI - \angle CBQ = \angle QBI$$

이다. 그러므로 $BP : BQ = PI : IQ = AP : AQ$이다. □

52) 풀이 :

정사각형 $ABCD$의 한 변의 길이를 1라고 가정해도 일반성을 잃지 않는다. $MA = a$, $MB = b$, $MC = c$, $MD = d$라고 가정하자. 그러면, □$AMBC$에 톨레미의 정리를 적용하면 $b + a\sqrt{2} = d$이고, □$AMBC$에 톨레미의 정리를 적용하면 $a + b\sqrt{2} = c$이다. 그러므로 산술-기하평균 부등식에 의하여

$$cd - \sqrt{2}a^2 + \sqrt{2}b^2 + 3ab \geqq (3 + 2\sqrt{2})ab$$

이다. 그런데, $12\sqrt{2} > 10$이고, 양변에 17을 더하면, $17 + 12\sqrt{2} > 27$이다. 양변에 제곱근을 씌우면 $3 + 2\sqrt{2} > 3\sqrt{3}$이다. 따라서, $cd > 3\sqrt{3}ab$이다. 즉, $MC \cdot MD > 3\sqrt{3} \cdot MA \cdot MB$ 이다. □

53) 풀이 : (IrMO, '1998)

$AC = a$, $CE = b$, $AE = c$라고 하자. □$ABCE$에 톨레미의 정리를 적용하면

$$AC \cdot BE \leqq AB \cdot CE + BC \cdot AE = BC(CE + AE)$$

이다. 즉, $a \cdot BE \leqq BC(b = c)$이다. 따라서, $\dfrac{BC}{BE} \geqq \dfrac{a}{b+c}$이다. 같은 방법으로

$$\frac{DE}{DA} \geqq \frac{b}{c+a}, \quad \frac{FA}{FC} \geqq \frac{c}{a+b}$$

이다. 따라서,

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geqq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

이고,

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geqq 3\sqrt[3]{\frac{1}{b+c} \cdot \frac{1}{c+a} \cdot \frac{1}{a+b}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

이고,

$$a + b + c \geqq \frac{3}{2}\sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

이다. 식 (2)와 (3)을 변변 곱하면

$$\frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} \geqq \frac{9}{2}$$

이다. 다시 정리하면

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqq \frac{3}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

이다. 식(1)과 (4)로부터

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geqq \frac{3}{2}$$

이다. □

54) 풀이 :
$b > a$라고 가정하자. 그러면 $\angle ABC > \angle ACB$이다. 그러므로 $\angle ABE = \angle EBC > \angle ACF = \angle FCB$이다.
$\angle GBE = \angle ACF$를 만족하는 점 G를 AE위에 잡고, BG와 CF의 교점을 H라 하자. H는 FI위의 점이므로, $CH < CF$이다. $\triangle GBE$와 $\triangle GCH$가 닮음(AA닮음)이므로 $\frac{BE}{CH} = \frac{BG}{CG}$이다. $\angle GBE = \angle ACH$, $\angle EBC > \angle HCB$이므로 $\angle GBC > \angle GCB$이다. 그러므로 $BG < CG$이다. 즉, $\frac{BG}{CG} < 1$이다. 따라서, $\frac{BE}{CH} < 1$이다. 즉, $BE < CH < CF$이다. $AB < AC$, $BE < CF$이므로 $\frac{BE}{AC} < \frac{CF}{AB}$이다. 즉, $\frac{BE}{b} < \frac{CF}{c}$이다. 이것은 가정 $\frac{BE}{b} = \frac{CF}{c}$에 모순된다. $b < c$라고 가정하면 같은 방법으로 모순됨을 알 수 있다. 따라서, $b = c$이다. 같은 방법으로 $a > b$, $a < b$라고 가정하면 모순됨을 알 수 있다. 그러므로 $a = b$ 이다. 따라서, $a = b = c$이다. 즉, $\triangle ABC$는 정삼각형이다. □

55) 풀이 :
원 Γ와 AB와의 교점을 N이라고 하자. 접선과 현이 이루는 각의 성질에 의하여
$\angle MDC = \angle CAD = \frac{1}{2}\angle A$이다.

$$\begin{aligned}\angle AMD &= \angle ADC - \angle MDC \\ &= (180^\circ - \angle CAD - \angle DCA) - \angle MDC \\ &= \left(180^\circ - \frac{1}{2}\angle A - \angle C\right) - \frac{1}{2}\angle A \\ &= 180^\circ - \angle A - \angle C = \angle B\end{aligned}$$

이다. 또한, $\angle ADM = \angle ANM$이다. 따라서, $\angle ANM = \angle B$이다. 즉, $NM /\!/ BC$이다. 그러므로, $\angle QPB = \angle APM = \angle ANM = \angle BQP = \angle BQA$이므로 $\triangle BPQ$와 $\triangle ABQ$는 닮음이다. 따라서, $\frac{BQ}{QA} = \frac{QP}{BQ}$이다. 즉, $BQ^2 = QP \cdot QA$이다. 방멱의 원리로부터 $QP \cdot QA = QD^2$이다. 따라서, $BQ = QD$이다. □

56) 풀이 :
$\triangle ABC = S$라 하자. 그러면, $\sin\alpha = \frac{2S}{bc}$, $\sin\beta = \frac{2S}{ca}$, $\sin\gamma = \frac{2S}{ab}$, $r = \frac{S}{s} = \frac{2S}{a+b+c}$이다. 단, $s = \frac{a+b+c}{2}$이다. 산술-기하평균 부등식에 의하여

$$\begin{aligned}(a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma)\cdot\frac{1}{r} &= 2S\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}\right)\cdot\frac{a+b+c}{2S} \\ &= \left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}\right)(a+b+c) \\ &= 3\sqrt[3]{\frac{a}{bc}\cdot\frac{b}{ca}\cdot\frac{c}{ab}}\cdot 3\sqrt[3]{abc} \\ &= 9\end{aligned}$$

이다. 따라서, $a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma \geqq 9r$이다. 단, 등호는 $a = b = c$일 때 성립한다. □

57) 풀이 : (SMO, '1999)
점 A에서 원 C_1에 접하는 접선 위에 M쪽에 가까운 한 점 T를 잡자. 그러면, 접선과 현이이루는 각의 성질에 의하여 $\angle TAM = \angle ANM$이고, 원주각의 성질에 의하여 $\angle ANM = \angle MBC$이다. 그러므로 $\angle TAM = \angle ANM = \angle MBC$이다. $\angle TAB = \angle ABC$이다. 따라서, $AT /\!/ BC$이다. □

58) 풀이 : (HKPSC, '2007)
접선의 성질에 의하여 $PE = PB = 2$이다. $QD = QE = x$라 하자. 그러면, $QA = 9 - x$, $PQ = x + 2$이다. $\triangle APQ$에 피타고라스의 정리를 적용하면 $(9-x)^2 + 7^2 = (x+2)^2$이다. 따라서, $x = \frac{63}{11}$이다. $\angle CEP = \angle CBP = 90^\circ$이므로

$\square CEPB$는 원에 내접한다. 또, BD는 대각선이라 $AK=KC$이므로 $\angle MPA=\angle KCB=\angle KAB$이다. 즉, $MP=MA$이다. 마찬가지로, $MQ=MA$이다. 따라서, $AM=\frac{1}{2}PQ=\frac{1}{2}\left(\frac{63}{11}+2\right)=\frac{85}{22}$ □

59) 풀이 : (PMO, '1999)

$AF /\!/ BD$, $BF /\!/ AD$를 만족하도록 점 F를 잡자. $\square AFBD$가 평행사변형이므로 $FB=AD$이고, $FA=BD$이다. FE의 연장선과 BC의 연장선과의 교점을 G라고 하자.

그러면, $FA /\!/ CG$이므로, $\frac{FA}{CG}=\frac{AE}{EC}=\frac{BD}{AD-BC}$

이다. $FA=BD$이므로 $\frac{BD}{CG}=\frac{BD}{AD-BC}$

이다. 따라서, $CG=AD-BC$이다. 그러므로 $AD=BC+CG=BG$이다. $BF=AD$이므로, $BF=BG$이다. 따라서,

$\angle BEF>\angle BGF=\angle BFG=\angle BFE$

이다. 즉, $BF>BE$이다. 그러므로 $AD>BE$이다. □

60) 풀이 :

$AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, AB의 연장선과 DC의 연장선의 교점을 E라 하자. $\angle ABC=\angle BCD=120^\circ$ 이므로 $\angle EBC=\angle ECB=60^\circ$ 이다. 따라서, $BE=CE=BC=b$이다. $\triangle AED$에서 제 2코사인 법칙으로부터

$$\begin{aligned} d^2 &= (a+b)^2+(b+c)^2-2(a+b)(b+c)\cos 60^\circ \\ &= a^2+b^2+c^2+ab+bc-ca \end{aligned}$$

이다. 주어진 조건으로부터 $d^2=a^2+b^2+c^2$이므로 $ab+bc-ac=0$이다. 그러므로

$$d^2=a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca=(a+c-b)^2$$

이다. 따라서, $d=a+c-b$ 또는 $d=b-a-c$이다. $d^2>b^2$이므로 $d=a+c-b$이다. 즉, $a+c=b+d$이다. 즉, $\square ABCD$는 원에 외접한다. □

61) 풀이 :

$\triangle ABC$의 내접원이 변 BC, CA, AB에 접하는 접점을 각각 P, Q, R, $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $2s=a+b+c$라 하자. $DE /\!/ BC$이므로 $\triangle ADE$와 $\triangle ABC$는 닮음이다. 따라서, 가비의 리에 의하여

$$\frac{AD+DE+AE}{AB+BC+AC}=\frac{DE}{BC}=\frac{DE}{a}$$

이다. $AD+DE+AE=AR+AQ=b+c-a$이므로

$$\frac{b+c-a}{a+b+c}=\frac{DE}{a}$$

이다. 즉, $DE=\frac{a(b+c-a)}{a+b+c}$이다. 그러므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}(AB+BC+CA)-DE &= \frac{a+b+c}{8}-\frac{a(b+c-a)}{a+b+c} \\ &= \frac{(a+b+c)^2-8a(b+c-a)}{8(a+b+c)} \\ &= \frac{(b+c-3a)^2}{8(a+b+c)} \geq 0 \end{aligned}$$

이다. 따라서, $\frac{1}{8}(AB+BC+CA)\geq DE$이다. □

62) 풀이 :

$\angle FDA=\angle AGF=90^\circ$ 이므로 $\square AGFD$는 원에 내접한다. 원주각의 성질에 의하여 $\angle GAF=\angle GDF=45^\circ$ 이고, $\angle GFA=\angle GDA=45^\circ$ 이다. 따라서, $\triangle AGF$는 이등변삼각형이고, $GA=GF$이다. 그러므로 직각삼각형 AGK와

FGE는 합동이고, $GK = GE$이다. 따라서, $\triangle GKE$는 이등변삼각형이다. 그러므로 $\angle GKE = 45^\circ$ 이고, $\angle EKF = 180^\circ - \angle GKE = 135^\circ$ 이다. □

63) 풀이 :
BP와 호 BAC의 교점을 D라 하자. 접선과 현이 이루는 각의 성질에 의하여 $\angle CBD = \angle PCD$이고, $\triangle PBC$와 $\triangle PCD$는 닮음이다. 같은 방법으로 $\angle ABD = \angle DAP$이고, $\triangle PAB$와 $\triangle PDA$는 닮음이다. 따라서, $\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{BC}{CD}$ 또는 $\dfrac{AB}{DA} = \dfrac{PA}{PD}$이다. $PA = PC$이므로 $\dfrac{AB}{DA} = \dfrac{BC}{CD}$이다. 즉, $AB \cdot CD = DA \cdot BC$이다. 톨레미의 정리에 의하여

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + DA \cdot BC = 2AB \cdot CD$$

이다. $AC = 2AB$이므로 $BD = CD$이다. □

64) 풀이 : (HKPSC, '2007)
$\triangle DCB$는 이등변삼각형이므로 N은 BC의 중점이 된다. 그러므로, $BN = NC = 30$ 이다. 피타고라스의 정리에 의하여 $DN = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$이다. $\square ABCD = 60 \times 40 = 50 \times DM$이다. 따라서, $DM = 48$이다. 그러므로 $DM + DN = 48 + 40 = 88$이다. □

65) 풀이 :
EF, BC를 밑변으로 볼 때, $\triangle AEF$와 $\triangle EBC$의 높이를 각각 $\triangle ABC$의 k, $1-k$배라고 하자. 단, $0 < k < 1$이다. $\triangle AEF$와 $\triangle ABC$는 닮음이므로 $\triangle AEF = k^2$이다. $\triangle EBC$와 $\triangle ABC$는 같은 밑변을 가지므로, $\triangle EBC = 1-k$이다. 따라서, $k^2 = 1-k$이다. 따라서, $k = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $(k > 0)$이다. 그러므로 $\triangle EFC = 1 - k^2 - (1-k) = \sqrt{5} - 2$이다. □

66) 풀이 :
점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발을 F라 하자. CF와 BD의 교점을 P라 하자. $\triangle ABC$가 이등변삼각형이므로 $AF = FB$이다. $\triangle BAE$화 $\triangle BFP$는 닮음비가 $2:1$인 닮음이므로, $BP = \dfrac{1}{2}BE = \dfrac{17}{2}$이다. 그러면, $PD = BD - BP = 15 - \dfrac{17}{2} = \dfrac{13}{2}$이다. $\triangle ADB$와 직선 CPF에 메네라우스의 정리를 적용하면

$$\frac{AC}{CD} \cdot \frac{DP}{PB} \cdot \frac{BF}{FA} = \frac{AC}{CD} \cdot \frac{DP}{PB} = 1$$

이다. 따라서,

$$CD = AC \cdot \frac{DP}{PB} = 16 \cdot \frac{\frac{13}{2}}{\frac{17}{2}} = \frac{208}{17}$$

이다. □

67) 풀이 :
방멱의 원리에 의하여, $XY \cdot XQ = XA \cdot XP$, $XZ \cdot XQ = XB \cdot XP$이다. 그런데, $XA = XB$이므로 $XY = XZ$이다. 즉, YZ의 중점이다. □

68) 풀이 :
$\square ABCD$이 내접원을 가지므로, $AD + BC = AB + CD = 5$이다. $AD : BC = 1 : x$ 라 하자. 그러면

$3:8 = BP:DP = AB\cdot BC : CD\cdot DA = x:4$이다. 그러므로, $x = \dfrac{3}{2}$이다. 따라서, $AD+BC=5$이므로 $AD=2$, $BC=3$이다. 브라마굽타의 공식으로부터 $s = \dfrac{1+2+3+4}{2} = 5$이므로, $\square ABCD = \sqrt{(5-1)(5-3)(5-4)(5-2)} = \sqrt{24}$이다. 또, $\square ABCD = rs = 5r$이므로 $r = \dfrac{\sqrt{24}}{5}$이다. 따라서, $\square ABCD$의 내접원의 넓이는 $\dfrac{24}{25}\pi$이다. □

69) 풀이 :

$CD' = 7$, $D'A = 1$을 만족하도록 점 D'를 $\square ABCD$의 외접원 위에 잡자. $\angle D'AB = \alpha$, $\angle BCD' = 180^\circ - \alpha$라 하자. 그러면 제 2코사인 법칙으로부터

$$1^2 + 8^2 - 2\cdot 1\cdot 8\cos\alpha = BD'^2 = 4^2 + 7^2 - 2\cdot 4\cdot 7\cos(180^\circ - \alpha)$$

이다. 이를 정리하면 $\cos\alpha = 0$이다. 즉, $\alpha = 90^\circ$이다. 따라서, $\triangle D'AB$는 직각삼각형이고, $\square ABCD$의 외접원의 반지름의 길이는 $\dfrac{\sqrt{65}}{2}$이다. $\triangle PAB$와 $\triangle PDC$가 닮음(AA닮음)이므로, $PA:PD = PB:PC = 8:1$이다. 또, $\triangle PCB$와 $\triangle PDA$가 닮음(AA닮음)이므로 $0PB:PA = PC:PD = 4:7$이다. 그러므로, $PA:PB:PC:PD = 56:32:4:7$이다. $PA = 56x$라고 놓으면 $AC = 60x$, $BD = 39x$이다. 톨레미의 정리에 의하여 $60x\cdot 39x = 1\cdot 8 + 4\cdot 7 = 36$이다. $x^2 = \dfrac{1}{65}$이다. 이제 $\triangle BOD$에 스튜워드 정리를 적용하여 정리하면,

$$OB^2\cdot PD + OD^2\cdot BP = OP^2\cdot BD + BP\cdot BD\cdot PD$$
$$\frac{65}{4}(32x + 7x) = 39x\cdot OP^2 + 32x\cdot 39x\cdot 7x$$
$$\frac{65}{4} - 7\cdot 32\cdot \frac{1}{65} = OP^2$$
$$OP^2 = \frac{3329}{260}$$

이다. □

70) 풀이 :

주어진 조건으로부터 네 점 B, P, I, C 는 $\triangle IBC$의 외접원 위에 있으므로

$$\angle APC = 180^\circ - \angle CPB = 180^\circ - \angle CIB = \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2}$$
$$\angle ACP = 180^\circ - \angle A - \angle APC = \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2}$$

이다. 즉, $\triangle APC$는 $AP = AC = 2$인 이등변삼각형이다. 따라서, $BP = AB - AP = \sqrt{5} - 2$ 이다. □

71) 풀이 :

$\triangle AFP$와 $\triangle FBP$가 같은 높이를 가지므로 $\dfrac{BF}{FA} = \dfrac{\triangle FBP}{\triangle CEP} = \dfrac{k}{24}$이다. 체바의 정리에 의하여

$$1 = \frac{CD}{BD}\cdot\frac{BF}{FA}\cdot\frac{AE}{EC} = \frac{CD}{DB}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{24}$$

이므로 $\dfrac{CD}{DB} = \dfrac{48}{k}$이다. $\dfrac{\triangle ADC}{\triangle ABD} = \dfrac{\triangle PDC}{\triangle PBD} = \dfrac{CD}{DB} = \dfrac{48}{k}$이다. 따라서, $\dfrac{\triangle ADC - \triangle PDC}{\triangle ABD - \triangle PBD} = \dfrac{\triangle APC}{\triangle APB} = \dfrac{48}{k}$이다. 또, $\triangle APC = \triangle APE + \triangle EPC = k + 24$이고, $\triangle ABP = \triangle AFP + \triangle FBP = 126 + 63 = 189$이다. 그러므로 $\dfrac{24+k}{189} = \dfrac{48}{k}$이고, 이를 정리하면 $k^2 + 24k - 9072 = 0$이다. 이를 인수분해하면, $(k+108)(k-84) = 0$이 되어

$k=84(k>0)$이다. 그러므로 $\frac{AE}{EC}=\frac{7}{2}$, $\frac{CD}{DB}=\frac{4}{7}$이다. $\triangle ABD$와 직선 FPC에 메네라우스의 정리를 적용하면

$$\frac{BF}{FA}\cdot\frac{CD}{BC}\cdot\frac{PA}{DP}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{PA}{DP}=1$$

이다. 따라서, $\frac{AP}{PD}=\frac{11}{2}$이다. 즉, $\frac{\square ABPC}{\triangle PBC}=\frac{11}{2}$이다. 따라서,

$$\triangle ABC=\frac{13}{11}\cdot\square ABPC=\frac{13}{11}(24+84+126+63)=351$$

이다. □

72) 풀이 : (Baltic, 1995)

BP와 AC의 교점을 D라 하고, AP와 BC의 교점을 E라 하자. 그러면, $\angle ABP=\angle EBP$, BP는 공통, $\angle BPA=\angle BPE=90^\circ$이므로, $\triangle BPA\equiv\triangle BPE(ASA$ 합동$)$이다. 따라서, P는 AE의 중점이다. 삼각형 중점연결정리에 의하여 $PM /\!/ BC$이다. 그러면, $\angle AMP=\angle C$이다. 한편 $\angle BHC=\angle 90^\circ=\angle BQC$이므로 $\square BHQC$는 원에 내접한다. 또, $\angle HQB=\angle C$이다. 즉, $\angle HMP=\angle HQP=\angle C$이다. 따라서, 네 점 H, Q, M, P는 한원 위에 있다. □

73) 풀이 :

주어진 조건으로부터 $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$는 등차수열을 이룬다. 또한, r, R은 각각 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이, 외접원의 반지름의 길이라 할 때, 잘 알려진 삼각함수의 항등식(정리 4.26 참고) $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$으로부터

$$3\cos B=\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}=\frac{21}{16}$$

이다. $\cos A=\frac{7}{16}+k$, $\cos B=\frac{7}{16}$, $\cos C=\frac{7}{16}-k$이다. 먼저, 삼각함수 항등식

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$$

이 성립함을 보이자. $\cos(A+B)=\cos(180^\circ-C)=-\cos C$이다. 좌변은 삼각함수의 덧셈정리에 의하여 정리하면 $\cos A\cos B-\sin A\sin B=-\cos C$이다. 이를 정리하면 $\cos A\cos B+\cos C=\sin A\sin B$이다. 양변을 제곱하면

$$\cos^2 A\cos^2 B+2\cos A\cos B\cos C+\cos^2 C=\sin^2 A\sin^2 B=(1-\cos^2 A)(1-\cos^2 B)$$

이다. 양변을 전개하여 정리하면

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$$

이다. 위 식에 $\cos A=\frac{7}{16}+k$, $\cos B=\frac{7}{16}$, $\cos C=\frac{7}{16}-k$를 대입하여 양변을 정리하여 k를 구하면 $k=\pm\frac{23}{48}$이다. 따라서, $\cos A=\frac{11}{12}$, $\cos B=\frac{7}{16}$, $\cos C=-\frac{1}{24}$이다. 그러므로 $\sin A=\frac{\sqrt{23}}{12}$, $\sin B=\frac{3}{16}\sqrt{23}$, $\sin C=\frac{5}{24}\sqrt{23}$ 이다. 따라서,

$$\triangle ABC=2R^2\sin A\sin B\sin C=2\cdot 16^2\cdot\frac{\sqrt{23}}{12}\cdot\frac{3}{16}\sqrt{23}\cdot\frac{5}{24}\sqrt{23}=\frac{115\sqrt{23}}{3}$$

이다. □

74) 풀이 : (Baltic, 1992)

$\triangle ABD$는 $AB=BD$인 이등변삼각형이다. AC의 중점을 O라 할 때, 직선 BO은 AD를 수직이등분한다. 또한 $\angle ADC=90^\circ$이므로 $BO /\!/ CD$이다. 따라서, $\triangle POB$와 $\triangle PCD$는 닮음이다. 그러므로, $CD:OB=PC:PO$이다. 즉, $CD:1=\frac{2}{5}:\frac{3}{5}$이다. 따라서, $CD=\frac{2}{3}$이다. □

75) 풀이 : (Baltic, 1993)

CO의 연장선과 AB와의 교점을 P라 하자. AM이 중선이므로 $PK \parallel BC$이다. 체바의 정리에 의하여 $AP:PB = AK:KC$이다. 또, 각의 이등분선의 정리에 의하여 $AB:BC = AK:KC = 5:4$이다. 따라서, $AP:PB = AK:KC = AB:BC = 5:4$이다. 즉, $AP = \frac{25}{3}$, $BP = \frac{20}{3}$이다. 또한, $AC^2 - BC^2 = 25 = AP^2 - BP^2$이다. 즉, 피타고라스의 정리가 성립한다. 따라서, P는 점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발이다. 즉, P와 L은 같은 점이다. M이 직각삼각형 BPC의 외심이므로, $\angle OPK = \angle OCM = \angle OPM$이다. □