

Fredi Tröltzsch

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen

Theorie, Verfahren und Anwendungen

2. Auflage

STUDIUM



Fredi Tröltzsch

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen

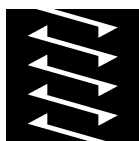
Fredi Tröltzsch

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen

Theorie, Verfahren und Anwendungen

2., überarbeitete Auflage

STUDIUM



VIEWEG+
TEUBNER

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

Prof. Dr. Fredi Tröltzsch

Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Straße des 17. Juni 136
10623 Berlin

E-Mail: troeltzsch@math.tu-berlin.de

1. Auflage 2005
- 2., überarbeitete Auflage 2009

Alle Rechte vorbehalten

© Vieweg+Teubner | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2009

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Nastassja Vanselow

Vieweg+Teubner ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.viewegteubner.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.
Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-0885-1

Vorwort

Die mathematische Optimierung von Vorgängen, die durch partielle Differentialgleichungen modelliert werden, hat in den letzten Jahren einen beachtlichen Aufschwung genommen. Die Verfügbarkeit immer besserer Computer ermöglichte neue interessante Anwendungen dieses Gebietes in der Praxis, etwa in Strömungsmechanik, Mikroelektronik, Kristallzüchtung, Gefäßchirurgie oder Herzmedizin, um nur einige Beispiele zu nennen. Im Zusammenhang damit ist das Interesse von Numerikern und Optimierern an der Verwendung ihrer Methoden in der Optimalsteuerung von partiellen Differentialgleichungen deutlich gestiegen und es gibt mehr Nachfrage von Studenten und Doktoranden der Mathematik nach einer Einführung in Grundideen der zugehörigen Theorie.

Heute existiert eine Reihe von Monographien zu verschiedenen Aspekten der optimalen Steuerung von partiellen Differentialgleichungen, insbesondere das bekannte Standardwerk von J.L. Lions [144], dem für Aufgaben mit linearen Gleichungen und konvexen Zielfunktionalen kaum etwas hinzuzufügen ist. Das Interesse am Skript meiner Vorlesungen zur optimalen Steuerung an den technischen Universitäten in Chemnitz und Berlin zeigte jedoch den Bedarf an einer Einführung in die Thematik in deutscher Sprache, die auch Aspekte der nichtlinearen Optimierung im Funktionenraum berücksichtigt.

Das vorliegende Buch soll diesem Anliegen entsprechen und den Leser befähigen, grundlegende Probleme bzw. Begriffe wie die Existenz von Lösungen gängiger linearer und semilinearer partieller Differentialgleichungen, Existenz optimaler Steuerungen, notwendige Optimalitätsbedingungen und adjungierte Gleichung, hinreichende Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung sowie die Konzeption einfacher numerischer Verfahren zu verstehen. Dabei sind generell Schranken an die Steuerfunktionen zugelassen und teilweise auch Restriktionen an den Zustand des betrachteten Systems vorgegeben. Das sind die Schwerpunkte des Buchs. Weitere wichtige Fragestellungen wie Steuerbarkeit, Regelung und Riccati-Gleichungen, Diskretisierung und Fehlerabschätzungen oder Hamilton-Bellman-Jacobi-Theorie hätten den beabsichtigten Rahmen überschritten.

Der erste Teil behandelt konvexe Aufgaben mit quadratischem Zielfunktional und linearen elliptischen bzw. parabolischen Gleichungen und damit Resultate, die lange bekannt sind und umfassender in [144] dargestellt wurden. Zur Überleitung auf Probleme mit semilinearen Gleichungen sind aber diese Aufgaben am besten geeignet. Es werden auch einige Begriffe der Funktionalanalysis sowie der Theorie linearer elliptischer und parabolischer partieller Differentialgleichungen zusammengestellt, um Lesern das Verständnis zu erleichtern, die kaum Vorkenntnisse auf diesen Gebieten haben. Den Schwerpunkt der Darstellung bilden nichtkonvexe Aufgaben mit semilinearen Gleichungen. Sie erfordern Methoden aus Analysis, Optimierung und Numerik, die bisher vorrangig in Originalarbeiten zu finden sind. Dazu gehören insbesondere grundlegende Resultate von E. Casas sowie von J.-P. Raymond über die Beschränktheit und Stetigkeit von Lösungen semilinearer partieller Differentialgleichungen.

Das Buch konzentriert sich im Wesentlichen auf die Analysis der Probleme, obwohl auch numerische Verfahren angesprochen werden. Numerische Methoden könnten sicher ein weiteres Buch füllen. Die Darstellung beschränkt sich auf kurze Einführungen in entsprechende Grundideen, um dem Leser eine Vorstellung davon zu geben, wie man die Theorie vom Grundsatz her numerisch umsetzen kann. Großer Wert wird auf das Herausarbeiten versteckter mathematischer Schwierigkeiten gelegt, die man erfahrungsgemäß leicht übersieht.

Der gesamte Stoff ist für einen vierstündigen einsemestrigen Kurs zu umfangreich, so dass man Teile auswählen muss. Eine zu empfehlende Variante besteht im Durcharbeiten der gesamten elliptischen Theorie (linear-quadratisch und nichtlinear) bei Verzicht auf den parabolischen Teil. Eine solche Vorlesung könnte sich auf die Abschnitte 1.2–1.4, 2.3–2.10 und 2.12 zur linear-quadratischen sowie 4.1–4.6, 4.8–4.10 zur nichtlinearen Theorie konzentrieren. Die Kapitel zu elliptischen Problemen benötigen keine Resultate aus denen zu parabolischen Aufgaben.

Alternativ kann man sich auf linear-quadratische elliptische und parabolische Aufgaben beschränken und die Abschnitte 3.3–3.7 zur linear-quadratischen parabolischen Theorie hinzufügen. Bei hinreichenden Vorkenntnissen zu Funktionalanalysis und partiellen Differentialgleichungen ist aber ein größerer Umfang zu schaffen. Mit einem Stern gekennzeichnete Abschnitte sind für das Verständnis der nachfolgenden Kapitel nicht unbedingt erforderlich. Sie können daher bei Bedarf ausgelassen werden. Der Leser findet eine Reihe von Formeln eingerahmt. Das betrifft besonders wichtige Aussagen sowie die für den jeweiligen Abschnitt maßgebende partielle Differentialgleichung.

Die Arbeit am Buch fand das Interesse und die Unterstützung vieler Fachkollegen. Dazu gehören die Herren M. Hinze, P. Maaß sowie L. v. Wolfersdorf, die verschiedene Kapitel durchgesehen und zum Teil mit ihren Studenten bzw. Doktoranden behandelt haben. Herr W. Alt hat mir mit Hinweisen zur typographischen Gestaltung geholfen und den ersten Anstoß zum Buch gab Herr T. Grund mit einer in LATEX geschriebenen Vorlesungsmitschrift. Meine Berliner Kollegen C. Meyer, I. Neitzel, U. Prüfert, T. Slawig, D. Wachsmuth und I. Yousept haben schließlich die Endversion Korrektur gelesen. Allen Genannten bin ich für ihre Hilfe sehr dankbar. Außerdem danke ich Frau U. Schmickler-Hirzebruch und Frau P. Rußkamp vom Vieweg-Verlag für die sehr angenehme Zusammenarbeit bei der Vorbereitung und Umsetzung des Buchprojekts.

Berlin, April 2005

Vorwort zur zweiten Auflage. Neben der Korrektur von Schreibfehlern und Unsauberkeiten habe ich einige Passagen überarbeitet und ergänzt. Die Abschnitte zum Gradientenverfahren sind gekürzt, um der primal-dualen Aktive-Mengen-Strategie mehr Raum zu geben. Deren Darstellung führt jetzt bis auf die zu lösenden linearen Gleichungssysteme. Auf Wunsch mehrerer Leser werden die verwendeten Greenschen Funktionen mit der Fouriermethode hergeleitet. Manche Quellen sind detaillierter angegeben und einige aktuelle Referenzen zur numerischen Analysis zustandsbeschränkter Aufgaben hinzugefügt. In der Transliteration russischer Namen bevorzuge ich hier die englische Version.

Allen Lesern, die mich mit Hinweisen zu Fehlern und Verbesserungsvorschlägen unterstützt haben, danke ich herzlich, insbesondere Roland Griesse, Markus Müller, Hans Josef Pesch, Uwe Prüfert, Arnd Rösch und Lothar v. Wolfersdorf. Bei der Aktualisierung der Resultate zu partiellen Differentialgleichungen haben mich Eduardo Casas und Jens Griepentrog unterstützt, denen ich für ihre Hilfe sehr dankbar bin. Besonderer Dank gilt Jürgen Sprekels für die sorgfältige Übersetzung des Buchs ins Englische. Seine zahlreichen Anregungen sind auch in die zweite deutsche Auflage eingeflossen.

Berlin, April 2009.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung und Beispiele	1
1.1	Was ist optimale Steuerung?	1
1.2	Beispiele konvexer Aufgaben	2
1.2.1	Optimale stationäre Aufheizung	2
1.2.2	Optimale instationäre Randtemperatur	4
1.2.3	Optimales Schwingen	5
1.3	Beispiele nichtkonvexer Probleme	6
1.3.1	Aufgaben mit semilinear elliptischer Gleichung	6
1.3.2	Probleme mit semilinear parabolischer Gleichung	7
1.4	Grundkonzepte im endlichdimensionalen Fall	8
1.4.1	Endlichdimensionale Aufgabe der optimalen Steuerung	8
1.4.2	Existenz optimaler Steuerungen	9
1.4.3	Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung	10
1.4.4	Adjungierter Zustand und reduzierter Gradient	11
1.4.5	Lagrangefunktion	13
1.4.6	Diskussion der Variationsungleichung	14
1.4.7	Formulierung als Karush-Kuhn-Tucker-System	14
2	Linear-quadratische elliptische Probleme	17
2.1	Lineare normierte Räume	17
2.2	Sobolewräume	19
2.2.1	L^p -Räume	19
2.2.2	Reguläre Gebiete	21
2.2.3	Schwache Ableitungen und Sobolewräume	21
2.3	Schwache Lösungen elliptischer Gleichungen	24
2.3.1	Poissongleichung	24
2.3.2	Randbedingung dritter Art	27
2.3.3	Differentialoperator in Divergenzform	30
2.4	Lineare Abbildungen	32
2.4.1	Lineare stetige Operatoren und Funktionale	32
2.4.2	Schwache Konvergenz	35
2.5	Existenz optimaler Steuerungen	38
2.5.1	Optimale stationäre Temperaturquelle	38
2.5.2	Optimale stationäre Randtemperatur	42
2.5.3	Allgemeinere elliptische Gleichungen und Zielfunktionale *	43
2.6	Differenzierbarkeit in Banachräumen	44
2.7	Adjungierte Operatoren	47
2.8	Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung	49
2.8.1	Quadratische Optimierungsaufgabe im Hilbertraum	50
2.8.2	Optimale stationäre Temperaturquelle	51

2.8.3	Stationäre Temperaturquelle und Randbedingung dritter Art . . .	59
2.8.4	Optimale stationäre Randtemperatur	60
2.8.5	Ein lineares Optimalsteuerungsproblem	63
2.9	Konstruktion von Testaufgaben	63
2.9.1	Bang-Bang-Steuerung	64
2.9.2	Verteilte Steuerung und Neumann-Randbedingung	65
2.10	Das formale Lagrangeprinzip	67
2.11	Weitere Beispiele *	71
2.11.1	Differentialoperator in Divergenzform	71
2.11.2	Optimale stationäre Temperaturquelle mit vorgegebener Außen- temperatur	72
2.12	Numerische Verfahren	72
2.12.1	Bedingtes Gradientenverfahren	73
2.12.2	Gradienten-Projektionsverfahren	76
2.12.3	Überführung in ein endlichdimensionales quadratisches Optimierungsproblem	77
2.12.4	Primal-duale Aktive-Mengen-Strategie	80
2.13	Adjungierter Zustand als Lagrangescher Multiplikator *	85
2.13.1	Elliptische Gleichungen mit Daten aus V^*	85
2.13.2	Anwendung beim Beweis von Optimalitätsbedingungen	86
2.13.3	Adjungierter Zustand als Multiplikator	88
2.14	Höhere Regularität für elliptische Aufgaben *	89
2.14.1	Grenzen des Zustandsraums $H^1(\Omega)$	89
2.14.2	Sobolew-Slobodetskii-Räume	89
2.14.3	Höhere Regularität von Lösungen	90
2.15	Regularität optimaler Steuerungen *	91
2.16	Übungsaufgaben	93
3	Linear-quadratische parabolische Probleme	95
3.1	Einführung	95
3.2	Die Fouriermethode im örtlich eindimensionalen Fall	99
3.2.1	Eindimensionale Modellprobleme	99
3.2.2	Integraldarstellung von Lösungen – Greensche Funktion	100
3.2.3	Notwendige Optimalitätsbedingungen	102
3.2.4	Bang-Bang-Prinzip	106
3.3	Schwache Lösungen in $W_2^{1,0}(Q)$	110
3.4	Schwache Lösungen in $W(0, T)$	113
3.4.1	Abstrakte Funktionen	113
3.4.2	Abstrakte Funktionen und parabolische Gleichungen	116
3.4.3	Vektorwertige Distributionen	116
3.4.4	Zugehörigkeit schwacher Lösungen aus $W_2^{1,0}(Q)$ zu $W(0, T)$	119
3.5	Parabolische Optimalsteuerungsprobleme	123
3.5.1	Optimale instationäre Randtemperatur	123
3.5.2	Optimale instationäre Temperaturquelle	124
3.6	Notwendige Optimalitätsbedingungen	125
3.6.1	Hilfssatz für adjungierte Operatoren	126
3.6.2	Optimale instationäre Randtemperatur	127
3.6.3	Optimale instationäre Temperaturquelle	130

3.6.4	Differentialoperator in Divergenzform *	131
3.7	Numerische Lösungstechniken	134
3.7.1	Gradienten-Projektionsverfahren	134
3.7.2	Aufstellen des reduzierten Problems	135
3.8	Herleitung der verwendeten Fourierreihenentwicklungen	138
3.9	Parabolische Gleichungen in $L^2(0, T; V^*)$ *	141
3.10	Übungsaufgaben	143
4	Steuerung semilinearer elliptischer Gleichungen	145
4.1	Vorbemerkungen	145
4.2	Semilineare elliptische Modellgleichung	146
4.2.1	Motivation des weiteren Vorgehens	146
4.2.2	Lösungen in $H^1(\Omega)$	147
4.2.3	Stetige Lösungen	151
4.2.4	Abschwächung der Voraussetzungen	154
4.3	Nemytskii-Operatoren	156
4.3.1	Stetigkeit von Nemytskii-Operatoren	156
4.3.2	Differenzierbarkeit von Nemytskii-Operatoren	158
4.3.3	Ableitungen in weiteren L^p -Räumen *	162
4.4	Existenz optimaler Steuerungen	163
4.4.1	Grundvoraussetzungen des Kapitels	163
4.4.2	Verteilte Steuerung	165
4.5	Der Steuerungs-Zustands-Operator	168
4.5.1	Verteilte Steuerung	169
4.5.2	Randsteuerung	171
4.6	Notwendige Optimalitätsbedingungen	171
4.6.1	Verteilte Steuerung	171
4.6.2	Randsteuerung	174
4.7	Anwendung des formalen Lagrangeprinzips	176
4.8	Pontrjaginsches Maximumprinzip *	178
4.8.1	Hamiltonfunktionen	178
4.8.2	Maximumprinzip	179
4.9	Ableitungen zweiter Ordnung	180
4.10	Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung	184
4.10.1	Grundideen hinreichender Optimalitätsbedingungen	184
4.10.2	Die Zwei-Norm-Diskrepanz	187
4.10.3	Verteilte Steuerung	190
4.10.4	Randsteuerung	198
4.10.5	Berücksichtigung stark aktiver Restriktionen *	199
4.10.6	Fälle ohne Zwei-Norm-Diskrepanz	203
4.10.7	Lokale Optimalität in $L^r(\Omega)$	204
4.11	Numerische Verfahren	205
4.11.1	Gradienten-Projektionsverfahren	205
4.11.2	Grundidee des SQP-Verfahrens	205
4.11.3	Das SQP-Verfahren für elliptische Probleme	207
4.12	Übungsaufgaben	210

5	Steuerung semilinearer parabolischer Gleichungen	211
5.1	Die semilineare parabolische Modellgleichung	211
5.2	Grundvoraussetzungen des Kapitels	213
5.3	Existenz optimaler Steuerungen	214
5.4	Steuerungs-Zustands-Operator	217
5.5	Notwendige Optimalitätsbedingungen	220
5.5.1	Verteilte Steuerung	221
5.5.2	Randsteuerung	224
5.6	Pontrjaginsches Maximumprinzip *	226
5.7	Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung	227
5.7.1	Ableitungen zweiter Ordnung	227
5.7.2	Verteilte Steuerung	229
5.7.3	Randsteuerung	233
5.7.4	Ein Fall ohne Zwei-Norm-Diskrepanz	234
5.8	Testaufgaben	235
5.8.1	Testaufgabe mit Steuerungsrestriktionen	236
5.8.2	Aufgabe mit integraler Zustandsrestriktion *	238
5.9	Numerische Verfahren	243
5.9.1	Gradientenverfahren	243
5.9.2	Das SQP-Verfahren	244
5.10	Weitere parabolische Probleme *	247
5.10.1	Phasenfeldmodell	247
5.10.2	Instationäre Navier-Stokes-Gleichungen	249
5.11	Übungsaufgaben	253
6	Optimierungsaufgaben im Banachraum	254
6.1	Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen	254
6.1.1	Konvexe Aufgaben	254
6.1.2	Differenzierbare Aufgaben	259
6.1.3	Eine semilineare elliptische Aufgabe	263
6.2	Steuerprobleme mit Zustandsbeschränkungen	265
6.2.1	Konvexe Aufgaben	266
6.2.2	Eine nichtkonvexe Aufgabe	273
6.3	Übungsaufgaben	276
7	Ergänzungen zu partiellen Differentialgleichungen	277
7.1	Einbettungssätze	277
7.2	Elliptische Gleichungen	278
7.2.1	Elliptische Regularität und Stetigkeit von Lösungen	278
7.2.2	Methode von Stampacchia	279
7.2.3	Elliptische Gleichungen mit Maßen	284
7.3	Parabolische Gleichungen	285
7.3.1	Lösungen in $W(0, T)$	285
7.3.2	Stetige Lösungen	293
	Index	298
	Literaturverzeichnis	301

1 Einführung und Beispiele

1.1 Was ist optimale Steuerung?

Die mathematische Theorie der optimalen Steuerung hat sich im Zusammenhang mit Berechnungen für die Raumfahrt schnell zu einem wichtigen und eigenständigen Gebiet der angewandten Mathematik entwickelt. Die Bewegungsgleichungen von Luft- und Raumfahrzeugen werden durch Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen beschrieben und Aspekte der Optimierung kommen dann ins Spiel, wenn die Bewegungen der Flugkörper optimal ablaufen sollen.

Folgendes einfache akademische Beispiel verdeutlicht die Situation: Ein Fahrzeug soll auf einer geraden Strecke aus der Ruhelage in einem Punkt A heraus in kürzester Zeit nach Punkt B bewegt werden und dort wieder zum Stehen kommen. Das Fahrzeug kann dabei in beiden Richtungen mit der gleichen Kraft beschleunigt werden, etwa durch je ein nach vorn und hinten gerichtetes Düsentriebwerk. Bezeichnet $y(t) \in \mathbb{R}$ die Position des Fahrzeugs zur Zeit t , m seine Masse und $u(t)$ die Schubkraft des Fahrzeugs mit der Kapazität $-1 \leq u(t) \leq 1$ (+1: volle Kraft voraus, -1: Vollbremsung), dann lautet die Aufgabe mathematisch wie folgt:

Minimiere die Zeit T unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} m y''(t) &= u(t) && \text{in } (0, T) \\ y(0) &= y_0 \\ y'(0) &= 0 \\[1em] y(T) &= y_T \\ y'(T) &= 0, && |u(t)| \leq 1 \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Die Punkte $y_0, y_T \in \mathbb{R}$ entsprechen den Positionen A, B. Dieses Beispiel wird im Lehrbuch von Macki und Strauss [154] als das *Problem des Raketenautos* bezeichnet. Es enthält die wesentlichen Bestandteile eines *Optimalsteuerungsproblems*. Das sind die zu minimierende *Zielfunktion*, hier die Fahrtzeit T , die den gesamten Bewegungsprozess modellierende Differentialgleichung $m y'' = u$ mit Anfangsbedingungen zur Bestimmung des *Zustands* y , eine *Steuerfunktion* u sowie zu erfüllende *Nebenbedingungen* $y(T) = y_T$, $y'(T) = 0$, $|u| \leq 1$. Die Steuerung u kann innerhalb der gegebenen Schranken frei gewählt werden (z.B. per Gaspedal im Raketenauto), während sich der Zustand in Abhängigkeit von der gewählten Steuerung eindeutig als Lösung der Differentialgleichung unter Beachtung der Anfangsbedingungen ergibt. Die Steuerung ist so zu wählen, dass die Zielfunktion den kleinsten Wert annimmt. Eine solche Steuerung heißt *optimal*. Beim Beispiel des Raketenautos ist diese intuitiv sofort zu ermitteln. Es wird daher gern zum

Testen der Theorie benutzt.

Optimale Steuerung bei gewöhnlichen Differentialgleichungen ist nicht nur für die Luft- und Raumfahrt von Interesse. Sie ist auch wichtig für die Robotik, für Bewegungsabläufe im Sport, für die Steuerung chemischer Prozesse oder die Kraftwerksoptimierung, um nur einige der vielfältigen Anwendungen zu nennen. Oft können die zu optimierenden Prozesse nicht adäquat durch gewöhnliche Differentialgleichungen modelliert werden, sondern es sind *partielle Differentialgleichungen* zu ihrer Beschreibung nötig. Beispielsweise werden Wärmeleitung, Diffusion, Schwingungen, elektromagnetische Wellen, Strömungen, Erstarrungsvorgänge und andere physikalische Phänomene durch partielle Differentialgleichungen erfasst.

Es gibt zahlreiche interessante Optimierungsprobleme, eine Zielfunktion bei Vorgabe einer partiellen Differentialgleichung unter weiteren Nebenbedingungen zu minimieren. Der Unterschied zum obigen Beispiel besteht „nur“ darin, dass an Stelle einer gewöhnlichen eine partielle Differentialgleichung gegeben ist. Im Buch treten als mathematisch vereinfachte Beispiele exemplarisch die optimale Steuerung von Aufheizungsprozessen, Zweiphasenproblemen sowie von Strömungen auf.

Die Vielfalt an Typen partieller Differentialgleichungen ist groß. Wir werden hier nur lineare und semilineare elliptische sowie parabolische partielle Differentialgleichungen zulassen. Die Regularität der Lösungen dieser Gleichungen ist gut untersucht. Bei hyperbolischen Differentialgleichungen liegen die Dinge anders. Auch die Behandlung quasilinearer partieller Differentialgleichungen ist deutlich schwieriger und die entsprechende Theorie der optimalen Steuerung noch in mancher Beziehung offen.

Wir behandeln am Anfang Probleme mit linearer Gleichung und quadratischem Zielfunktional. Im nächsten Abschnitt sind dazu einfache akademische Modellprobleme formuliert, die im Weiteren zur Illustration der Theorie immer wieder herangezogen werden. Für die linear-quadratische Theorie reichen Hilberträume aus, was das Arbeiten erleichtert. Der zweite Teil ist Aufgaben mit semilinearen Gleichungen gewidmet. Hier sind die Beispiele weniger akademisch. Bedingt durch die Nichtlinearitäten ist die Theorie aber komplizierter.

1.2 Beispiele konvexer Aufgaben

1.2.1 Optimale stationäre Aufheizung

Optimale Randtemperatur

Gegeben sei ein Ortsgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mit Rand Γ , das für einen aufzuheizenden bzw. abzukühlenden Körper steht. An seinem Rand Γ wird eine zeitlich konstante, aber vom Randpunkt x abhängige Temperatur $u = u(x)$ - die Steuerung - angelegt. Ziel der Steuerung ist die bestmögliche Approximation einer vorgegebenen stationären Temperaturverteilung $y_\Omega = y_\Omega(x)$ in Ω . Diese Zielstellung führt auf das Problem

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y(x) - y_\Omega(x))^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Gamma} u(x)^2 ds(x)$$

bei den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcl} -\Delta y & = & 0 \quad \text{in } \Omega \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} & = & \alpha (u - y) \quad \text{auf } \Gamma \end{array}$$

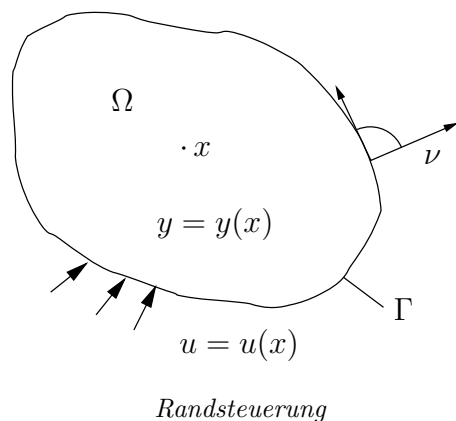
(Zustandsgleichung) sowie

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \quad \text{auf } \Gamma$$

(punktweise Beschränkungen an die Steuerung).

Schranken an die Steuerung sind wegen beschränkter Aufheizungs- bzw. Abkühlungskapazität einzuhalten. Den Faktor λ kann man als Maß für die Energiekosten der Steuerung u interpretieren. Mathematisch gesehen dient dieser Term auch der Regularisierung. Er bewirkt, dass optimale Steuerungen bessere Glattheitseigenschaften aufweisen.

Wir bezeichnen generell mit ds das Oberflächenelement und mit $\nu = \nu(x)$ den nach außen gerichteten Normalenvektor auf Γ . Die Funktion α steht für die Wärmeübergangszahl von Ω in das umgebende Medium. Das zu minimierende Funktional J wird *Zielfunktional* genannt. Der hier enthaltene Faktor $1/2$ hat auf die optimale Lösung keinen Einfluss und wird nur aus Gründen der Zweckmäßigkeit gewählt. Er kompensiert später den Faktor 2, der sich aus der Ableitung ergibt. Gesucht ist eine optimale *Steuerung* $u = u(x)$ mit zugehörigem *Zustand* $y = y(x)$. Das auf den ersten Blick überflüssige Minuszeichen vor dem Laplace-Operator hat damit zu tun, dass $-\Delta$, aber nicht Δ koerziv ist.



Die Aufgabe hat ein quadratisches Zielfunktional, eine lineare elliptische partielle Differentialgleichung als Zustandsgleichung und eine Steuerung, die auf dem Rand des Ortsgebiets auftritt. Daher gehört dieses Problem zur Klasse der *linear-quadratischen elliptischen Randsteuerungsprobleme*.

Bemerkung. Die Aufgabenstellung ist stark vereinfacht. Beispielsweise muss bei realistischer Modellierung an Stelle der Laplacegleichung $\Delta y = 0$ die stationäre Wärmeleitungsgleichung $\operatorname{div}(a \operatorname{grad} y) = 0$ betrachtet werden, wobei der Koeffizient a von x und sogar von y abhängen kann. Im Fall $a = a(y)$ oder $a = a(x, y)$ liegt eine quasilineare partielle Differentialgleichung vor. Außerdem wird eine zeitlich instationäre Beschreibung oft sinnvoller sein.

Optimale Temperaturquelle

Analog kann die Steuerung als *Temperaturquelle im Gebiet* Ω wirken. Probleme dieser Art treten etwa bei der Aufheizung eines Körpers Ω durch elektromagnetische Induktion

oder Mikrowellen auf. Die Randtemperatur sei zunächst gleich null. Dann erhalten wir die Aufgabe

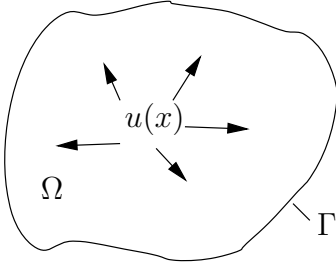
$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y(x) - y_{\Omega}(x))^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} u(x)^2 dx$$

bei

$$\begin{array}{rcl} -\Delta y & = & \beta u \quad \text{in } \Omega \\ y & = & 0 \quad \text{auf } \Gamma \end{array}$$

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \quad \text{in } \Omega.$$

Hier ist zusätzlich ein Koeffizient $\beta = \beta(x)$ vorgegeben. Durch die Wahl $\beta = \chi_{\Omega_c}$ kann



Verteilte Steuerung

man u gegebenenfalls nur in einem Teilgebiet $\Omega_c \subset \Omega$ wirken lassen (χ_E ist die charakteristische Funktion einer Menge E). Die Aufgabe ist ein *linear-quadratisches elliptisches Steuerproblem mit verteilter Steuerung*.

Anstatt die Randtemperatur mit null anzunehmen, kann die Vorgabe einer Außentemperatur y_a realistischer sein. Dann modelliert die Zustandsgleichung

$$\begin{array}{rcl} -\Delta y & = & \beta u \quad \text{in } \Omega \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} & = & \alpha (y_a - y) \quad \text{auf } \Gamma \end{array}$$

den Sachverhalt besser.

1.2.2 Optimale instationäre Randtemperatur

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ stehe für eine Kartoffel, die wir im Feuer in fest vorgegebener Zeit $T > 0$ braten wollen. Ihre Temperatur sei $y = y(x, t)$, $x \in \Omega$, $t \in [0, T]$. Zu Beginn habe sie die Temperatur $y_0 = y_0(x)$ und zum Endzeitpunkt T ist eine mundgerechte Temperaturverteilung y_{Ω} gewünscht. Im Weiteren verwenden wir generell die Bezeichnungen $Q := \Omega \times (0, T)$ sowie $\Sigma := \Gamma \times (0, T)$. Die Aufgabe lautet damit

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y(x, T) - y_{\Omega}(x))^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} u(x, t)^2 ds(x) dt$$

$$\begin{array}{rcl} y_t - \Delta y & = & 0 \quad \text{in } Q \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} & = & \alpha (u - y) \quad \text{in } \Sigma \\ y(x, 0) & = & y_0(x) \quad \text{in } \Omega \end{array}$$

$$u_a(x, t) \leq u(x, t) \leq u_b(x, t) \quad \text{in } \Sigma.$$

Durch laufendes Drehen des Bratspießes erzeugen wir uns $u(x, t)$. Die Aufheizung wird nun durch die *stationäre Wärmeleitungsgleichung* beschrieben, eine parabolische Differentialgleichung. Es liegt ein *linear-quadratisches parabolisches Randsteuerungsproblem* vor. Hier und im Weiteren bezeichnet y_t die partielle Ableitung von y nach t .

1.2.3 Optimales Schwingen

Eine Gruppe von Fußgängern läuft über eine Brücke und regt sie (offenbar gezielt) zum Schwingen an. Stark abstrahiert ergibt sich folgende Konstellation: $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist das Gebiet der Brücke, $y = y(x, t)$ deren vertikale Auslenkung, $u = u(x, t)$ die vertikal wirkende Kraftdichte und $y_d = y_d(x, t)$ ein gewünschter Schwingungsverlauf. Es ergibt sich die Optimalsteuerungsaufgabe

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (y(x, t) - y_d(x, t))^2 dx dt + \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_{\Omega} u(x, t)^2 dx dt$$

bei

$$\begin{aligned} y_{tt} - \Delta y &= u && \text{in } Q \\ y(0) &= y_0 && \text{in } \Omega \\ y_t(0) &= y_1 && \text{in } \Omega \\ y &= 0 && \text{in } \Sigma \end{aligned}$$

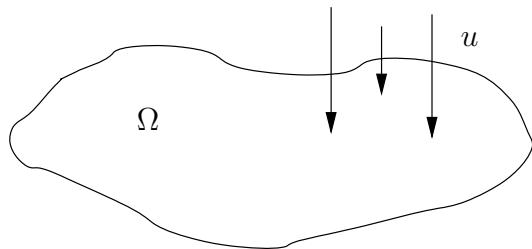
sowie

$$u_a(x, t) \leq u(x, t) \leq u_b(x, t) \quad \text{in } Q.$$

Das ist ein *linear-quadratisches hyperbolisches Steuerproblem mit verteilter Steuerung*. Hyperbolische Probleme behandeln wir hier nicht und verweisen auf das Standardwerk

von Lions [144] sowie auf Ahmed und Teo [4]. Interessante Probleme der Beeinflussung schwingender elastischer Netzwerke werden durch Lagnese et al. [136] behandelt. Eine elementare Einführung in die Steuerbarkeit von Schwingungen findet man in Krabs [127].

Im linear-quadratischen Fall hat die Theorie hyperbolischer Aufgaben viele Analogien zu parabolischen Problemen, die in diesem Buch ausführlich behandelt werden. Semilineare hyperbolische Probleme sind aber wegen schwacher Glättungseigenschaften der Lösungsoperatoren deutlich schwieriger. Ein Teil der im Buch verwendeten Methoden geht bei ihnen nicht durch.



Anregung von Schwingungen

1.3 Beispiele nichtkonvexer Probleme

Die bis jetzt betrachteten Differentialgleichungen waren linear. Für viele in der Realität vorkommende Erscheinungen reicht jedoch ein lineares Modell nicht aus. Oft benötigt man quasilineare Gleichungen oder - was einfacher ist - semilineare. Wir nennen eine Gleichung zweiter Ordnung *semilinear*, wenn die Hauptteile der im Gebiet und auf dem Rand gegebenen Differentialoperatoren, d.h. deren Anteile mit der höchsten Differentiationsordnung, nur linear in Bezug auf die gesuchte Lösung auftreten. Im semilinearen Fall ist die Theorie der optimalen Steuerung sehr weit entwickelt.

Solche Optimalsteuerungsprobleme sind in der Regel nichtkonvex, selbst wenn das Zielfunktional konvex ist. Im Weiteren werden Beispiele solcher Gleichungen erläutert. Durch Vorgabe eines Zielfunktionals und entsprechender Beschränkungen erhält man daraus optimale Steuerungsprobleme.

1.3.1 Aufgaben mit semilinearer elliptischer Gleichung

Aufheizung mit Strahlungsrandbedingung

Bei Berücksichtigung der Wärmeabstrahlung des aufzuheizenden Körpers ergibt sich eine Aufgabe mit nichtlinearer Stefan-Boltzmann-Randbedingung. Die Steuerung ist in diesem Beispiel die Außentemperatur u :

$$\begin{aligned} -\Delta y &= 0 && \text{in } \Omega \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} &= \alpha (u^4 - y^4) && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Hier tritt die Nichtlinearität y^4 in der Randbedingung auf, während die Wärmeleitungsgleichung selbst linear ist.

Vereinfachte Aufgabe der Supraleitung

Das folgende vereinfachte Ginzburg-Landau-Modell der Supraleitung wurde von Ito und Kunisch [113] für numerische Verfahren der Optimalsteuerung verwendet:

$$\begin{aligned} -\Delta y - y + y^3 &= u && \text{in } \Omega \\ y|_{\Gamma} &= 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Wir diskutieren sie aus Gründen der Analysis vereinfacht in der Form $-\Delta y + y + y^3 = u$. Auch diese Gleichung ist von Interesse für die Theorie der Supraleitung, [113].

Steuerung stationärer Strömungen

Zeitlich stationäre Strömungen inkompressibler Medien in zwei- oder dreidimensionalen Ortsgebieten Ω werden durch die stationären *Navier-Stokes-Gleichungen* beschrieben,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{Re} \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma \\ \operatorname{div} u &= 0 && \text{in } \Omega, \end{aligned}$$

Temam [191], Galdi [73]. Im Gegensatz zu unserer bisherigen Notation bezeichnet hier $u = u(x) \in \mathbb{R}^3$ den Geschwindigkeitsvektor des im Ortspunkt x befindlichen Partikels, $p = p(x)$ den Druck und $f = f(x)$ die Dichte der im Gebiet wirkenden Volumenkraft. Mit Re bezeichnet man die sogenannte Reynoldszahl. Die Nichtlinearität steckt im Differentialoperator erster Ordnung $(u \cdot \nabla) u$. Die hier verwendete Kurzschreibweise ist wie folgt zu verstehen: Durch $u \cdot \nabla = u_1 D_1 + u_2 D_2 + u_3 D_3$ erfolgt die Operatorbildung (D_i steht für $\partial/\partial x_i$). Dieser Operator wird dann auf u angewendet, also

$$(u \cdot \nabla) u = u_1 D_1 u + u_2 D_2 u + u_3 D_3 u = \sum_{i=1}^3 u_i \begin{bmatrix} D_i u_1 \\ D_i u_2 \\ D_i u_3 \end{bmatrix}.$$

Die Steuerung ist f . Dieses mathematische Modell ist zum Beispiel bei Flüssigkeiten von Interesse, die auf steuerbare Magnetfelder reagieren. Optimierungsziel kann die Approximation einer gewünschten stationären Zielströmung sein.

1.3.2 Probleme mit semilinearer parabolischer Gleichung

Beispiele aus Abschnitt 1.3.1

Beide Beispiele semilinearer elliptischer Gleichungen aus Abschnitt 1.3.1 können ebenso gut zeitlich instationär formuliert werden. Das erste ergibt ein parabolisches Anfangs-Randwertproblem mit Stefan-Boltzmann-Randbedingung für die Temperatur $y(x, t)$,

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y &= 0 && \text{in } Q \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} &= \alpha (u^4 - y^4) && \text{in } \Sigma \\ y(\cdot, 0) &= 0 && \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

Im Zusammenhang mit der Optimalsteuerung wurde eine solche Aufgabe erstmalig von Sachs [182] betrachtet, siehe auch Schmidt [185]. Analog kann das vereinfachte Modell der Supraleitung zeitlich instationär betrachtet werden,

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y - y + y^3 &= u && \text{in } Q \\ y|_{\Gamma} &= 0 && \text{in } \Sigma \\ y(\cdot, 0) &= 0 && \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

Ein Phasenfeldmodell

Manche Schmelz- bzw. Erstarrungsprozesse werden durch Systeme von *Phasenfeldgleichungen* wie das folgende modelliert:

$$\begin{aligned} u_t + \frac{\ell}{2} \varphi_t &= \kappa \Delta u + f && \text{in } Q \\ \tau \varphi_t &= \xi^2 \Delta \varphi + g(\varphi) + 2u && \text{in } Q \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0, && \text{in } \Sigma \\ u(\cdot, 0) &= u_0, \quad \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0 && \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

Hier ist $u = u(x, t)$ die Temperatur und $\varphi = \varphi(x, t) \in [-1, 1]$ die sogenannte *Phasenfunktion*, die den Erstarrungszustand beschreibt. Die flüssige Phase entspricht $\varphi = 1$, die feste $\varphi = -1$. Die Funktion f stellt eine steuerbare Temperaturquelle dar und $-g$ ist Ableitung eines sogenannten „double well“ Potentials G . Oft wählt man $G(z) = \frac{1}{8}(z^2 - 1)^2$. Meist hat g die Form $g(z) = az + bz^2 - cz^3$ mit beschränkten Koeffizientenfunktionen a, b und $c > 0$. Weiter bezeichnet κ die Wärmeleitzahl, ℓ die latente Wärme, τ die Relaxationszeit und ξ eine Längeneinheit. Hier kann das Annähern eines gewünschten Erstarrungs- oder Schmelzverlaufs Ziel der Optimierung sein. Erste Ergebnisse zur Theorie entsprechender Optimalsteuerungsprobleme wurden durch Chen und Hoffmann [56] sowie Hoffmann und Jiang [109] veröffentlicht.

Steuerung instationärer Strömungen

Zeitvariante Strömungen inkompressibler Medien werden durch die *instationären Navier-Stokes-Gleichungen* erfasst:

$$\begin{aligned} u_t - \frac{1}{Re} \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p &= f && \text{in } Q \\ \operatorname{div} u &= 0 && \text{in } Q \\ u &= 0 && \text{in } \Sigma \\ u(\cdot, 0) &= u_0 && \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

Hier wirkt eine Volumenkraft f auf das Medium, das die Anfangsgeschwindigkeit u_0 und die Randgeschwindigkeit null hat (Haftbedingung). Je nach Sachverhalt sind auch andere Randbedingungen von Interesse. Eine der ersten Arbeiten zur mathematischen Theorie der Steuerung von Strömungsvorgängen wurde von Abergel und Temam [1] veröffentlicht.

1.4 Grundkonzepte im endlichdimensionalen Fall

Einige Grundbegriffe der optimalen Steuerung lassen sich sehr einfach an Optimierungsaufgaben im Euklidischen Raum mit endlich vielen Gleichungsrestriktionen erläutern. Dieser Abstecher in die endlichdimensionale Optimierung hat den Vorteil, dass die Darstellung nicht durch technische Details partieller Differentialgleichungen und Aspekte der Funktionalanalysis überlagert wird.

1.4.1 Endlichdimensionale Aufgabe der optimalen Steuerung

Es seien eine zu minimierende Zielfunktion $J = J(y, u)$, $J : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, eine (n, n) -Matrix A , eine (n, m) -Matrix B sowie eine nichtleere Menge $U_{ad} \subset \mathbb{R}^m$ gegeben („ad“ für admissible, zulässig). Wir betrachten die *Optimierungsaufgabe*

$$\begin{aligned} \min J(y, u) \\ Ay = Bu, \quad u \in U_{ad}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Es sind also Vektoren y und u gesucht, welche die Zielfunktion J unter den Nebenbedingungen $Ay = Bu$ sowie $u \in U_{ad}$ minimieren. Wenn nicht anders vereinbart, sind Vektoren in diesem Buch Spaltenvektoren.

Beispiel. Oft werden quadratische Zielfunktionen verwendet, etwa

$$J(y, u) = |y - y_d|^2 + \lambda |u|^2,$$

wobei $|\cdot|$ die Euklidische Norm bezeichnet. ◇

Noch hat (1.1) die Form einer normalen Optimierungsaufgabe, bei der y und u gleichberechtigt sind. Jetzt fordern wir zusätzlich, dass A eine invertierbare Matrix ist. Dann kann die Gleichung in (1.1) nach y aufgelöst werden,

$$y = A^{-1}Bu. \quad (1.2)$$

Zu beliebigem $u \in \mathbb{R}^m$ gibt es genau eine Lösung $y \in \mathbb{R}^n$. Man kann u beliebig wählen („steuern“) und immer stellt sich als abhängige Größe genau ein zugehöriges y ein. Wir bezeichnen deshalb u als Steuerungsvektor oder kurz als *Steuerung* und y als den zugehörigen Zustandsvektor bzw. *Zustand*. Auf diese Weise wird (1.1) zu einer endlichdimensionalen Aufgabe der Optimalsteuerung.

Um den Zusammenhang mit Optimalsteuerungsproblemen bei partiellen Differentialgleichungen herzustellen, führen wir die Matrix $S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$S = A^{-1}B,$$

ein. Das ist die Lösungsmatrix unseres Steuersystems und es gilt $y = Su$. Mit (1.2) können wir y in J eliminieren und erhalten eine *reduzierte Zielfunktion* f ,

$$J(y, u) = J(Su, u) =: f(u).$$

Für die quadratische Funktion im obigen Beispiel ergibt sich $f(u) = |Su - y_d|^2 + \lambda |u|^2$. Damit wird (1.1) zur nichtlinearen Optimierungsaufgabe

$$\min f(u), \quad u \in U_{ad}. \quad (1.3)$$

Bei diesem auf u *reduzierten Problem* tritt nur die Steuerung u als Unbekannte auf. Wir werden nun einige Grundideen diskutieren, die uns in ähnlicher Form bei der optimalen Steuerung von partiellen Differentialgleichungen immer wieder begegnen werden.

1.4.2 Existenz optimaler Steuerungen

Definition. Ein Vektor $\bar{u} \in U_{ad}$ heißt *optimale Steuerung* für die Aufgabe (1.1), wenn $f(\bar{u}) \leq f(u)$ für alle $u \in U_{ad}$ gilt; $\bar{y} := S\bar{u}$ heißt zu \bar{u} *gehöriger optimaler Zustand*.

Optimale oder lokal optimale Größen werden wir durch Überstreichung wie in \bar{u} kennzeichnen.

Satz 1.1 Ist J stetig auf $\mathbb{R}^n \times U_{ad}$, die Menge U_{ad} nichtleer, beschränkt und abgeschlossen sowie die Matrix A invertierbar, dann existiert mindestens eine optimale Steuerung für (1.1).

Beweis: Mit J ist auch f stetig auf U_{ad} . Außerdem ist U_{ad} als beschränkte und abgeschlossene Menge eines endlichdimensionalen Raums kompakt. Der bekannte Satz von Weierstraß sichert, dass f sein Minimum in U_{ad} annimmt. Es existiert also ein $\bar{u} \in U_{ad}$ mit der Eigenschaft $f(\bar{u}) = \min_{u \in U_{ad}} f(u)$. ■

Bei Optimalsteuerungsproblemen für partielle Differentialgleichungen wird dieser Beweis komplizierter, weil beschränkte und abgeschlossene Mengen in (unendlichdimensionalen) Funktionenräumen nicht notwendig kompakt sind.

1.4.3 Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung

In diesem Abschnitt wird behandelt, welche Bedingungen optimale Vektoren \bar{u} und \bar{y} erfüllen müssen. Damit verbindet man die Erwartung, aus diesen Bedingungen \bar{u} und \bar{y} ermitteln zu können. In der Regel muss das mit numerischen Methoden geschehen.

Bezeichnungen. Wir verwenden folgende Bezeichnungen für Ableitungen von Funktionen $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} D_i &= \frac{\partial}{\partial x_i}, & D_x &= \frac{\partial}{\partial x} && \text{(partielle Ableitungen),} \\ f'(x) &= (D_1 f(x), \dots, D_m f(x)) && \text{(Ableitung),} \\ \nabla f(u) &= f'(u)^\top && \text{(Gradient),} \end{aligned}$$

mit dem Zeichen $^\top$ für Transposition. Für Funktionen $f = f(x, y) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet $D_x f$ den Zeilenvektor der partiellen Ableitungen von f nach x_1, \dots, x_m und $\nabla_x f$ den entsprechenden Spaltenvektor. Analog sind $D_y f$ und $\nabla_y f$ definiert.

Weiter bezeichnet

$$(u, v)_{\mathbb{R}^m} = u \cdot v = \sum_{i=1}^m u_i v_i$$

das Skalarprodukt in \mathbb{R}^m . Wir werden aus Gründen der Zweckmäßigkeit beide Bezeichnungen des Skalarprodukts für Vektoren verwenden. Die Anwendung von $f'(u)$ auf einen Spaltenvektor $h \in \mathbb{R}^m$, gegeben durch das Produkt $f'(u)h$, ergibt die Richtungsableitung in Richtung h ,

$$f'(u)h = (\nabla f(u), h)_{\mathbb{R}^m} = \nabla f(u) \cdot h.$$

Wir setzen jetzt zusätzlich voraus, dass die Zielfunktion J stetig partiell nach y und u differenzierbar ist. Die partiellen Ableitungen nach y bzw. u , $D_y J(y, u)$ und $D_u J(y, u)$, sollen also stetig in (y, u) sein. Aus der Kettenregel folgt dann die stetige Differenzierbarkeit von $f(u) = J(Su, u)$.

Beispiel.
$$f(u) = \frac{1}{2} |Su - y_d|^2 + \frac{\lambda}{2} |u|^2$$

Hier ergibt sich

$$\begin{aligned} \nabla f(u) &= S^\top (Su - y_d) + \lambda u, & f'(u) &= (S^\top (Su - y_d) + \lambda u)^\top \\ f'(u)h &= (S^\top (Su - y_d) + \lambda u, h)_{\mathbb{R}^m}. \end{aligned}$$

◇

Satz 1.2 *Ist \bar{u} optimale Steuerung für (1.1) und U_{ad} konvex, dann genügt \bar{u} der Variationsungleichung*

$$f'(\bar{u})(u - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \quad (1.4)$$

Diese einfache aber fundamentale Aussage folgt aus dem allgemeineren Lemma 2.21 auf S. 50 und drückt die Beobachtung aus, dass die Funktion f an der Stelle eines Minimums in keiner Richtung fallen kann.

Mit der Kettenregel und dem Satz über das totale Differential wird die Ableitung f' in (1.4) durch $f' = D_y J S + D_u J$ berechnet,

$$\begin{aligned} f'(\bar{u})h &= D_y J(S\bar{u}, \bar{u})Sh + D_u J(S\bar{u}, \bar{u})h \\ &= (\nabla_y J(\bar{y}, \bar{u}), A^{-1}Bh)_{\mathbb{R}^n} + (\nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}), h)_{\mathbb{R}^m} \\ &= (B^\top(A^\top)^{-1}\nabla_y J(\bar{y}, \bar{u}) + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}), h)_{\mathbb{R}^m}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Die Variationsungleichung (1.4) nimmt so die etwas unübersichtliche Form

$$(B^\top(A^\top)^{-1}\nabla_y J(\bar{y}, \bar{u}) + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}), u - \bar{u})_{\mathbb{R}^m} \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad} \quad (1.6)$$

an. Durch Einführung des adjungierten Zustands, einem einfachen, aber für die Theorie der optimalen Steuerung entscheidenden Trick, kann man (1.6) deutlich vereinfachen.

1.4.4 Adjungierter Zustand und reduzierter Gradient

Wir nehmen zur Motivation an, dass die Verwendung der inversen Matrix A^{-1} für numerische Rechnungen zu aufwendig ist. Das ist bei realistischen Optimalsteuerungsproblemen meist der Fall. Statt dessen soll ein numerisches Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme der Form $Ay = b$ verwendet werden, das A^{-1} nicht direkt benutzt, beispielsweise das konjugierte Gradientenverfahren. Gleiches trifft dann auf A^\top zu. Deshalb ersetzen wir in (1.6) den Ausdruck $(A^\top)^{-1}\nabla_y J(\bar{y}, \bar{u})$, durch \bar{p} ,

$$\bar{p} := (A^\top)^{-1}\nabla_y J(\bar{y}, \bar{u}).$$

Die zum Paar (\bar{y}, \bar{u}) gehörige Größe \bar{p} bestimmt sich aus dem Gleichungssystem

$$A^\top \bar{p} = \nabla_y J(\bar{y}, \bar{u}). \quad (1.7)$$

Definition. Die Gleichung (1.7) heißt *adjungierte Gleichung*. Ihre Lösung \bar{p} wird zu (\bar{y}, \bar{u}) gehöriger *adjungierter Zustand* genannt.

Beispiel. Für die quadratische Funktion $J(y, u) = \frac{1}{2}|y - y_d|^2 + \frac{\lambda}{2}|u|^2$ erhalten wir die adjungierte Gleichung

$$A^\top \bar{p} = \bar{y} - y_d,$$

denn hier gilt $\nabla_y J(y, u) = y - y_d$. ◇

Die Einführung des adjungierten Zustands bringt zwei Vorteile. Die notwendigen Bedingungen erster Ordnung werden übersichtlicher und die Verwendung der inversen Matrix $(A^\top)^{-1}$ kann vermieden werden. Zunächst vereinfacht sich die Formel für den Gradienten von f . Mit $\bar{y} = S\bar{u}$ folgt aus (1.5)

$$\nabla f(\bar{u}) = B^\top \bar{p} + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}).$$

Der Vektor $\nabla f(\bar{u})$ heißt auch (auf u) *reduzierter Gradient*. Die Richtungsableitung $f'(\bar{u})h$ an einer beliebigen Stelle \bar{u} ist mit $\bar{y} = S\bar{u}$ durch

$$f'(\bar{u})h = (B^\top \bar{p} + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}), h)_{\mathbb{R}^m},$$

gegeben. Diese zwei Darstellungen mit dem adjungierten Zustand p sind unabhängig davon, ob \bar{u} optimal ist oder nicht. Sie werden uns auch bei Steuerungsproblemen mit partiellen Differentialgleichungen immer wieder begegnen. Satz 1.2 vereinfacht sich damit:

Satz 1.3 *Die Matrix A sei invertierbar, \bar{u} optimale Steuerung für (1.1) und \bar{y} der zugehörige optimale Zustand. Dann existiert genau eine Lösung \bar{p} der adjungierten Gleichung (1.7) und es gilt*

$$(B^\top \bar{p} + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}), u - \bar{u})_{\mathbb{R}^m} \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \quad (1.8)$$

Der Satz folgt direkt aus den obigen Betrachtungen, nämlich aus der Variationsungleichung (1.6) und der Definition von \bar{p} . Insgesamt haben wir folgendes *Optimalitätssystem* für die drei unbekannten Vektoren \bar{y} , \bar{u} , \bar{p} hergeleitet, das zur Berechnung der optimalen Steuerung herangezogen werden kann:

$$\begin{aligned} Ay &= Bu, \quad u \in U_{ad} \\ A^\top p &= \nabla_y J(y, u) \\ (B^\top p + \nabla_u J(y, u), v - u)_{\mathbb{R}^m} &\geq 0 \quad \forall v \in U_{ad}. \end{aligned}$$

(1.9)

Jede Lösung (\bar{y}, \bar{u}) des Optimalsteuerungsproblems (1.1) muss gemeinsam mit \bar{p} diesem System genügen.

Keine Restriktionen an u

Dieser Fall wird durch $U_{ad} = \mathbb{R}^m$ erfasst. Dann kann $u - \bar{u}$ jeden Wert $h \in \mathbb{R}^m$ annehmen, also folgt aus der Variationsungleichung (1.8) die Gleichung

$$B^\top \bar{p} + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}) = 0.$$

Beispiel. Gegeben sei

$$J(y, u) = \frac{1}{2} |Cy - y_d|^2 + \frac{\lambda}{2} |u|^2$$

mit einer (n, n) -Matrix C . Die benötigten Gradienten sind

$$\nabla_y J(y, u) = C^\top (Cy - y_d), \quad \nabla_u J(y, u) = \lambda u.$$

Hier ergibt sich das Optimalitätssystem

$$\begin{aligned} Ay &= Bu, \quad u \in U_{ad} \\ A^\top p &= C^\top (Cy - y_d) \\ (B^\top p + \lambda u, v - u)_{\mathbb{R}^m} &\geq 0 \quad \forall v \in U_{ad}. \end{aligned}$$

Bei $U_{ad} = \mathbb{R}^m$ folgt $B^\top \bar{p} + \lambda \bar{u} = 0$. Im Fall $\lambda > 0$ können wir dann nach \bar{u} auflösen,

$$\bar{u} = -\frac{1}{\lambda} B^\top \bar{p}. \quad (1.10)$$

Durch Einsetzen in die beiden anderen Beziehungen erhalten wir in diesem Fall als Optimalitätssystem

$$\begin{aligned} Ay &= -\frac{1}{\lambda} B B^\top p \\ A^\top p &= C^\top (Cy - y_d), \end{aligned}$$

also ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Unbekannten \bar{y} und \bar{p} . Sind \bar{y} und \bar{p} gefunden, dann berechnet man die Steuerung \bar{u} aus Beziehung (1.10). \diamond

Bemerkung. Die Gleichung (1.1) wurde der Einfachheit halber linear gewählt. Die voll nicht-lineare Aufgabe

$$\min J(y, u), \quad T(y, u) = 0, \quad u \in U_{ad} \quad (1.11)$$

wird in Übungsaufgabe 2.1, S. 93, diskutiert.

1.4.5 Lagrangefunktion

Mit Hilfe der aus der Analysis bekannten Lagrangefunktion kann das Optimalitätssystem auch als *Lagrangesche Multiplikatorenregel* formuliert werden.

Definition. Die Funktion

$$L(y, u, p) := J(y, u) - (Ay - Bu, p)_{\mathbb{R}^n},$$

$L : \mathbb{R}^{2n+m} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Lagrangefunktion*.

Mit L eliminiert man in (1.1) formal die Nebenbedingungen in Gleichungsform, während die als einfacher angesehene Restriktion $u \in U_{ad}$ zunächst noch explizit mitgeführt wird. Ein Vergleich ergibt, dass die zweite und dritte Bedingung des Optimalitätssystems äquivalent sind mit

$$\begin{aligned} \nabla_y L(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}) &= 0 \\ (\nabla_u L(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}), u - \bar{u})_{\mathbb{R}^m} &\geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \end{aligned}$$

Folgerung. Die adjungierte Gleichung (1.7) ist äquivalent zu $\nabla_y L(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}) = 0$, kann also durch Ableitung der Lagrangefunktion nach y aufgestellt werden. Analog erhält man die Variationsungleichung aus L mittels Ableitung nach u .

Deshalb erfüllt (\bar{y}, \bar{u}) die notwendigen Optimalitätsbedingungen der Aufgabe ohne Gleichungsrestriktionen

$$\min_{y, u} L(y, u, p), \quad u \in U_{ad}, \quad y \in \mathbb{R}^n. \quad (1.12)$$

Daraus folgt übrigens nicht, dass (\bar{y}, \bar{u}) immer als Lösung der Aufgabe (1.12) numerisch bestimmt werden kann. Erstens ist das richtige \bar{p} in der Regel unbekannt und zweitens

kann (1.12) unlösbar sein oder sogar auf falsche Lösungen führen. Der Vektor $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$ ist auch ein Lagrangescher Multiplikator, er gehört zur Gleichung $Ay - Bu = 0$.

Die obige Folgerung bleibt auch für die voll nichtlineare Aufgabe (1.11) richtig, wenn die Lagrangefunktion durch $L(y, u, p) := J(y, u) - (T(y, u), p)_{\mathbb{R}^n}$ definiert wird.

1.4.6 Diskussion der Variationsungleichung

In den späteren Kapiteln zur optimalen Steuerung wird die Menge U_{ad} durch obere und untere Schranken, sogenannte *Box-Restriktionen*, gegeben sein. Das wollen wir auch hier annehmen, also

$$U_{ad} = \{u \in \mathbb{R}^m : u_a \leq u \leq u_b\}. \quad (1.13)$$

Dabei sind $u_a \leq u_b$ fest vorgegebene Vektoren des \mathbb{R}^m und die Ungleichungen komponentenweise als $u_{a,i} \leq u_i \leq u_{b,i}$, $i = 1, \dots, m$, zu verstehen. Wir schreiben die Variationsungleichung (1.8) um,

$$(B^\top \bar{p} + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}), \bar{u})_{\mathbb{R}^m} \leq (B^\top \bar{p} + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}), u)_{\mathbb{R}^m} \quad \forall u \in U_{ad}.$$

Daher löst \bar{u} die lineare Optimierungsaufgabe

$$\min_{u \in U_{ad}} (B^\top \bar{p} + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}), u)_{\mathbb{R}^m} = \min_{u \in U_{ad}} \sum_{i=1}^m (B^\top \bar{p} + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}))_i u_i.$$

Ist U_{ad} in der obigen Form gegeben, dann folgt daraus wegen der Unabhängigkeit der einzelnen u_i komponentenweise

$$(B^\top \bar{p} + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}))_i \bar{u}_i = \min_{u_{a,i} \leq u_i \leq u_{b,i}} (B^\top \bar{p} + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}))_i u_i,$$

$i = 1, \dots, m$; also muss

$$\bar{u}_i = \begin{cases} u_{b,i}, & \text{falls } (B^\top \bar{p} + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}))_i < 0 \\ u_{a,i}, & \text{falls } (B^\top \bar{p} + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}))_i > 0. \end{cases} \quad (1.14)$$

gelten. Für die Komponenten mit $(B^\top \bar{p} + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}))_i = 0$ bringt die Variationsungleichung keine Information. Aber die Tatsache, dass die Komponente verschwindet, liefert meist auch eine auswertbare Gleichung.

1.4.7 Formulierung als Karush-Kuhn-Tucker-System

Bisher haben wir mit Hilfe der Lagrangefunktion L nur die Bedingungen in Gleichungsform eliminiert. Das kann auch mit den in U_{ad} steckenden Ungleichungsrestriktionen geschehen. Wir definieren einfach

$$\begin{aligned} \mu_a &:= (B^\top \bar{p} + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}))_+ \\ \mu_b &:= (B^\top \bar{p} + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}))_-, \end{aligned} \quad (1.15)$$

d.h., $\mu_{a,i} = (B^\top \bar{p} + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}))_i$, wenn die rechte Seite positiv ist und ansonsten $\mu_{a,i} = 0$ sowie $\mu_{b,i} = |(B^\top \bar{p} + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}))_i|$, wenn die rechte Seite negativ ist und anderenfalls

$\mu_{b,i} = 0$. Durch diese Festsetzung ergeben sich unter Beachtung von (1.14) die Beziehungen

$$\begin{aligned}\mu_a &\geq 0, & u_a - \bar{u} &\leq 0, & (u_a - \bar{u}, \mu_a)_{\mathbb{R}^m} &= 0 \\ \mu_b &\geq 0, & \bar{u} - u_b &\leq 0, & (\bar{u} - u_b, \mu_b)_{\mathbb{R}^m} &= 0,\end{aligned}$$

die aus der Optimierungstheorie unter dem Namen *komplementäre Schlupfbedingungen* oder *Komplementaritätsbedingungen* bekannt sind. Die Ungleichungen sind dabei trivial, nur die Schlupfbedingungen muss man sich überlegen. Beispielsweise sieht man die erste Orthogonalitätsbeziehung wie folgt ein:

Die echte Ungleichung $u_{a,i} < \bar{u}_i$ kann wegen (1.14) nur für $(B^\top \bar{p} + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}))_i \leq 0$ gelten. Das impliziert nach Definition $\mu_{a,i} = 0$, also $(u_{a,i} - \bar{u}_i) \mu_{a,i} = 0$. Gilt $\mu_{a,i} > 0$, so folgt nach Definition von μ_a auch $(B^\top \bar{p} + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}))_i > 0$, somit $u_{a,i} = \bar{u}_i$ nach (1.14). Wieder folgt $(u_{a,i} - \bar{u}_i) \mu_{a,i} = 0$. Summation über i ergibt dann $(u_a - \bar{u}, \mu_a)_{\mathbb{R}^m} = 0$.

Aus (1.15) folgt $\mu_a - \mu_b = \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}) + B^\top \bar{p}$, also

$$\nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}) + B^\top \bar{p} - \mu_a + \mu_b = 0. \quad (1.16)$$

Wir erweitern nun die Lagrangefunktion durch Hinzunahme der Ungleichungsrestriktionen zu

$$\mathcal{L}(y, u, p, \mu_a, \mu_b) := J(y, u) - (Ay - Bu, p)_{\mathbb{R}^n} + (u_a - u, \mu_a)_{\mathbb{R}^m} + (u - u_b, \mu_b)_{\mathbb{R}^m}.$$

Dann lässt sich (1.16) in der Form

$$\nabla_u \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}, \mu_a, \mu_b) = 0$$

ausdrücken. Außerdem ist die adjungierte Gleichung äquivalent zur Beziehung

$$\nabla_y \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}, \mu_a, \mu_b) = 0,$$

denn $\nabla_y L = \nabla_y \mathcal{L}$. Die Vektoren μ_a und μ_b sind damit die Lagrangeschen Multiplikatoren zu den Ungleichungsrestriktionen $u_a - u \leq 0$ und $u - u_b \leq 0$ und wir können die Optimalitätsbedingungen alternativ wie folgt ausdrücken:

Satz 1.4 *Ist \bar{u} eine optimale Steuerung für (1.1) mit zugehörigem Zustand \bar{y} , A invertierbar und U_{ad} von der Form (1.13), dann existieren Lagrangesche Multiplikatoren $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$ und $\mu_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2$, so dass die folgenden Beziehungen erfüllt sind:*

$$\begin{aligned}\nabla_y \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}, \mu_a, \mu_b) &= 0 \\ \nabla_u \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}, \mu_a, \mu_b) &= 0 \\ \mu_a &\geq 0, \quad \mu_b \geq 0 \\ (u_a - \bar{u}, \mu_a)_{\mathbb{R}^m} &= (\bar{u} - u_b, \mu_b)_{\mathbb{R}^m} = 0.\end{aligned}$$

Das gesamte Optimalitätssystem setzt sich aus den Bedingungen von Satz 1.4 sowie den Nebenbedingungen

$$Ay - Bu = 0, \quad u_a \leq u \leq u_b$$

zusammen und bildet die nach Karush, Kuhn und Tucker benannten *Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen*.

Zum Vergleich mit den Ergebnissen in Abschnitt 4.10 formulieren wir noch die hinreichenden Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung, siehe z.B. [88], [74] oder [148]. Dazu führen wir die Indexmengen der *aktiven* Ungleichungsrestriktionen $I(\bar{u}) = I_a(\bar{u}) \cup I_b(\bar{u})$ und der *stark aktiven* Ungleichungsrestriktionen $A(\bar{u}) \subset I(\bar{u})$ ein,

$$I_a(\bar{u}) = \{i : \bar{u}_i = u_{a,i}\}, \quad I_b(\bar{u}) = \{i : \bar{u}_i = u_{b,i}\}, \quad A(\bar{u}) = \{i : \mu_{a,i} > 0 \text{ oder } \mu_{b,i} > 0\}$$

sowie den *kritischen Kegel* $C(\bar{u})$ aller $h \in \mathbb{R}^m$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} h_i &= 0 & \text{für } i \in A(\bar{u}) \\ h_i &\geq 0 & \text{für } i \in I_a(\bar{u}) \setminus A(\bar{u}) \\ h_i &\leq 0 & \text{für } i \in I_b(\bar{u}) \setminus A(\bar{u}). \end{aligned}$$

Nach Definition von μ_a, μ_b gilt $i \in A(\bar{u}) \Leftrightarrow |(B^\top \bar{p} + \nabla_u J(\bar{y}, \bar{u}))_i| > 0$.

Eine aktive Restriktion für u ist also genau dann stark aktiv, wenn die entsprechende Komponente des Gradienten von f nicht verschwindet.

Satz 1.5 U_{ad} habe die Form (1.13). Erfüllen \bar{y} und \bar{u} gemeinsam das obige Optimalitätssystem und gilt

$$\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{yy}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}, \mu_a, \mu_b) & \mathcal{L}_{yu}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}, \mu_a, \mu_b) \\ \mathcal{L}_{uy}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}, \mu_a, \mu_b) & \mathcal{L}_{uu}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}, \mu_a, \mu_b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} > 0$$

für alle $(y, u) \neq (0, 0)$ mit $Ay = Bu$ und $u \in C(\bar{u})$, dann ist (\bar{y}, \bar{u}) lokal optimal für (1.1).

Im Satz bezeichnen \mathcal{L}_{yy} , \mathcal{L}_{yu} und \mathcal{L}_{uu} die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung $D_y^2 \mathcal{L}$, $D_u D_y \mathcal{L}$ sowie $D_u^2 \mathcal{L}$. Mit einem bekannten Kompaktheitsschluss folgt, dass die im Satz formulierte Definitheitsbedingung äquivalent ist zur Existenz eines $\delta > 0$ mit

$$\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{yy}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}, \mu_a, \mu_b) & \mathcal{L}_{yu}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}, \mu_a, \mu_b) \\ \mathcal{L}_{uy}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}, \mu_a, \mu_b) & \mathcal{L}_{uu}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}, \mu_a, \mu_b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \geq \delta (|y|^2 + |u|^2)$$

für alle entsprechenden (y, u) . Ist A invertierbar, dann kommt man sogar mit der Forderung aus, dass die obige quadratische Form nicht kleiner als $\delta |u|^2$ ist.

Ausblick auf partielle Differentialgleichungen

Im Prinzip läuft die Diskussion von Optimalsteuerungsproblemen für partielle Differentialgleichungen analog ab. Dort steht die Gleichung $Ay = Bu$ für ein elliptisches oder parabolisches Randwertproblem, wobei A ein gewisser Differentialoperator ist und B einen Koeffizienten oder Einbettungsoperator darstellt. Aus der Matrix $S = A^{-1}B$ wird der Teil des Lösungsoperators der Differentialgleichung, der im Zielfunktional auftritt. Die zugehörigen Optimalitätsbedingungen werden die gleiche Form wie die oben dargestellten haben.

Auch bei der Steuerung partieller Differentialgleichungen leisten Lagrangefunktionen gute Dienste. Bei der formalen Lagrangetechnik werden sie als Hilfsmittel dazu verwendet, Optimalitätsbedingungen bequem herzuleiten und einprägsam aufzuschreiben. Ihre nicht ganz einfache Anwendung beim Beweis von Optimalitätsbedingungen beruht auf der Karush-Kuhn-Tucker-Theorie von Optimierungsaufgaben im Banachraum und wird erst in Kapitel 6 diskutiert.

2 Linear-quadratische elliptische Steuerungsprobleme

2.1 Lineare normierte Räume

Wir beginnen mit der Bereitstellung einiger Begriffe der Funktionalanalysis. Dabei gehen wir nach dem Prinzip vor, immer nur das abzuhandeln, was zum Verständnis des jeweils folgenden Abschnitts unbedingt nötig ist. Die entsprechenden Aussagen werden hier nicht bewiesen. Dazu verweisen wir auf Standardwerke der Funktionalanalysis wie Alt [6], Heuser [101], Kantorowitsch und Akilow [118], Ljusternik und Sobolew [146], Werner [208] oder Yosida [213].

Der Begriff des linearen Raums über dem Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen wird als bekannt vorausgesetzt. Standardbeispiele dafür sind der n -dimensionale Vektorraum \mathbb{R}^n oder der Raum $C[a, b]$ aller auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$ definierten und stetigen reellwertigen Funktionen. (Die Bezeichnung $C[a, b]$ ist dabei verbunden mit der unten eingeführten Maximumnorm). Ihre Elemente sind Vektoren $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$ bzw. Funktionen $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. In beiden Räumen ist die Addition „+“ zweier Elemente sowie deren Multiplikation mit einer reellen Zahl definiert und diese beiden Operationen genügen den bekannten Gesetzen, die in einem linearen Raum gelten.

Definition. Es sei X ein linearer Raum über \mathbb{R} . Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Norm in X , wenn folgende Eigenschaften für alle $x, y \in X$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt sind:

- (i) $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)
- (iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (Positive Homogenität)

Ist $\|\cdot\|$ eine Norm in X , dann heißt $\{X, \|\cdot\|\}$ (reeller) normierter Raum.

Der Raum \mathbb{R}^n ist, versehen mit der Euklidischen Norm $|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$, ein normierter Raum. $C[a, b]$ wird mit der Maximumnorm von $x(\cdot)$,

$$\|x\|_{C[a,b]} = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|,$$

zu einem normierten Raum. Auch der lineare Raum $C_{L^2}[a, b]$, der die gleichen Funktionen wie $C[a, b]$ umfasst, aber mit der L^2 -Norm

$$\|x\|_{C_{L^2}[a,b]} = \left(\int_a^b x^2(t) dt\right)^{1/2}$$

versehen ist, stellt einen normierten Raum dar. Beide Normen genügen den Axiomen (i)–(iii), Übungsaufgabe 2.2.

Bemerkung. Der Raum X und die darin definierte Norm gehören als ein Paar $\{X, \|\cdot\|_X\}$ zusammen. Führt man eine andere Norm ein, dann liegt auch ein anderer normierter Raum vor. In der Regel ist aber klar, welche Norm zum definierten Raum gehört. Deshalb werden wir meist vom Raum X sprechen, ohne die zugeordnete Norm in die Bezeichnung aufzunehmen.

Definition. Eine Folge $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ von Elementen eines normierten Raums $\{X, \|\cdot\|\}$ heißt konvergent, wenn ein Grenzelement $x \in X$ existiert, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

gilt. Wir schreiben dafür $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Sie heißt Cauchyfolge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0 = n_0(\varepsilon)$ gibt mit

$$\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon), \forall m > n_0(\varepsilon).$$

Jede konvergente Folge ist auch eine Cauchyfolge, aber die Umkehrung gilt nicht in jedem Raum.

Beispiel. Wir betrachten im Raum $C_{L^2}[0, 2]$ die Funktionenfolge $x_n(t) = \min\{1, t^n\}$, $n = 1, 2, \dots$. Eine leichte Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|_{C_{L^2}[0,2]}^2 &= \int_0^1 (t^n - t^m)^2 dt = \int_0^1 (t^{2n} - 2t^{n+m} + t^{2m}) dt \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{2}{n+m+1} + \frac{1}{2m+1} \leq \frac{2}{2m+1} \end{aligned}$$

für $m \leq n$. Offenbar ist damit diese Folge eine Cauchyfolge. Sie hat aber keine stetige Grenzfunktion, also kein Grenzelement aus $C_{L^2}[0, 2]$, denn der punktweise Limes ist

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 1 \\ 1 & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

◇

Definition. Ein normierter Raum $\{X, \|\cdot\|\}$ heißt vollständig, wenn in X jede Cauchyfolge konvergiert, also ein Grenzelement in X besitzt. Ein vollständiger normierter Raum heißt Banachraum.

Die Räume \mathbb{R}^n und $C[a, b]$ sind mit den eingeführten natürlichen Normen Banachräume, $C_{L^2}[a, b]$ ist nicht vollständig und deshalb kein Banachraum.

In Banachräumen gibt es nicht notwendig ein Äquivalent zu dem aus dem \mathbb{R}^n bekannten Skalarprodukt zweier Vektoren, mit dem man insbesondere den Begriff der Orthogonalität definieren kann.

Definition. Es sei H ein linearer Raum über \mathbb{R} . Eine Abbildung $(\cdot, \cdot) : H \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Skalarprodukt in H , wenn die folgenden Eigenschaften für alle $u, v, u_1, u_2 \in H$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

erfüllt sind:

- (i) $(u, u) \geq 0$ und $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$
- (ii) $(u, v) = (v, u)$
- (iii) $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v)$
- (iv) $(\lambda u, v) = \lambda (u, v)$.

Ist (\cdot, \cdot) ein Skalarprodukt in H , dann heißt $\{H, (\cdot, \cdot)\}$ Prä-Hilbertraum.

Der Raum \mathbb{R}^n ist mit dem Skalarprodukt $(u, v) := u^\top v$ ein Prä-Hilbertraum, der Raum $C_{L^2}[a, b]$ mit

$$(u, v) = \int_a^b u(t) v(t) dt$$

ebenfalls. Jeder Prä-Hilbertraum $\{H, (\cdot, \cdot)\}$ wird durch die Einführung der Norm

$$\|u\| := \sqrt{(u, u)}$$

zu einem normierten Raum, Übungsaufgabe 2.3. In jedem Prä-Hilbertraum $\{H, (\cdot, \cdot)\}$ gilt die *Ungleichung von Cauchy-Schwarz*

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in H.$$

Definition. Ein Prä-Hilbertraum $\{H, (\cdot, \cdot)\}$, der mit der Norm

$$\|u\| := \sqrt{(u, u)}$$

vollständig ist, heißt Hilbertraum.

Der Raum \mathbb{R}^n ist mit dem oben eingeführten Skalarprodukt ein Hilbertraum, während $C_{L^2}[a, b]$ nicht vollständig ist, also kein Hilbertraum.

2.2 Sobolewräume

In diesem Abschnitt stellen wir Grundbegriffe aus der Theorie der Räume integrierbarer Funktionen und Sobolewräume zusammen, die für das Verständnis der folgenden Kapitel benötigt werden. Im Weiteren ist $E \subset \mathbb{R}^N$ eine nichtleere, beschränkte und Lebesguemessbare Menge. Mit $|E|$ bezeichnen wir das N -dimensionale Lebesguemaß.

2.2.1 L^p -Räume

Definition. Unter $L^p(E)$, $1 \leq p < \infty$, versteht man den Raum aller (Äquivalenzklassen von) messbaren Funktionen $y: E \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\int_E |y(x)|^p dx < \infty.$$

$L^p(E)$ wird versehen mit der Norm

$$\|y\|_{L^p(E)} = \left(\int_E |y(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Dabei werden Funktionen, die sich nur auf einer Menge vom Maß null unterscheiden, als gleich angesehen. Sie gehören der gleichen Äquivalenzklasse an.

Definition. Mit $L^\infty(E)$ wird der Raum aller (Äquivalenzklassen von) fast überall gleichmäßig beschränkten und messbaren Funktionen $y : E \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet, versehen mit der Norm

$$\|y\|_{L^\infty(E)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in E} |y(x)| := \inf_{|F|=0} \left(\sup_{x \in E \setminus F} |y(x)| \right).$$

Unter *ess sup* versteht man das *essentielle* oder wirkliche Maximum bzw. Supremum einer Funktion. Dadurch werden z.B. Maxima ausgeschlossen, die sich schon durch Herausnahme einzelner, in gewissem Sinne isolierter Punkte ändern und damit unwesentlich sind. So hat die Funktion $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, die null ist auf $[0, 1] \setminus \{0\}$ und eins im Nullpunkt, das Maximum 1, aber das essentielle Supremum 0. Die Räume $L^p(E)$ sind für $1 \leq p \leq \infty$ Banachräume und für $1 < p < \infty$ reflexiv (dieser Begriff ist in Abschnitt 2.4 definiert).

Im Weiteren ist $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein Gebiet, also eine offene und zusammenhängende Menge, deren Rand wir generell mit Γ bezeichnen. Mit $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sei in diesem Abschnitt eine auf Ω definierte Funktion und mit \overline{E} die Abschließung einer Menge E bezeichnet.

Definition. Die Menge $\operatorname{supp} v = \overline{\{x \in \Omega : v(x) \neq 0\}}$ heißt Träger (support) von v . Es ist die kleinste abgeschlossene Menge, außerhalb der v identisch verschwindet. Mit $C_0^k(\Omega)$, $0 \leq k \leq \infty$, wird die Menge aller k -mal stetig differenzierbaren Funktionen $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger in Ω bezeichnet.

Von besonderem Interesse ist für uns der Fall $k = \infty$, d.h. die Menge $C_0^\infty(\Omega)$. Die Funktionen von $C_0^\infty(\Omega)$ haben am Rand Γ den Wert null und liefern damit bei partiellen Integrationen verschwindende Randintegrale. Andererseits sind sie nach Belieben differenzierbar. Beide Eigenschaften werden bei der Einführung von Sobolewräumen ausgenutzt. Da wir die Topologisierung von $C_0^\infty(\Omega)$ hier nicht brauchen, haben wir den Begriff „Menge“ an Stelle von „Raum“ für $C_0^\infty(\Omega)$ verwendet. Analog bezeichnen wir mit $C^k(\Omega)$ die Menge aller k -mal in Ω stetig differenzierbaren reellwertigen Funktionen.

Im Folgenden ist der Vektor nichtnegativer ganzer Zahlen $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ ein sogenannter *Multiindex*. Seine Komponenten α_i geben an, wie oft nach x_i differenziert wird. Beispielsweise sagt der Multiindex $\alpha = (1, 0, 2)$ im Fall $N = 3$ aus, dass D_1 einmal, D_2 nicht und D_3 zweimal angewendet wird. $D^\alpha y(x)$ ist also die Kurzbezeichnung für $D_1^{\alpha_1} \dots D_N^{\alpha_N} y(x)$, z.B.

$$D^{(1,0,2)}y = \frac{\partial^3 y}{\partial x_1 \partial x_3^2}.$$

Die *Ordnung* von α ist $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_N$ und es ist sinnvoll, $D^0 y := y$ zu setzen.

Definition. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ beschränkt. Mit $C(\overline{\Omega})$ wird der lineare Raum aller auf $\overline{\Omega}$ stetigen reellwertigen Funktionen bezeichnet und mit $C^k(\overline{\Omega})$, $k \in \mathbb{N}$, der lineare Raum aller Funktionen aus $C^k(\Omega)$, die zusammen mit ihren partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k stetig auf $\overline{\Omega}$ fortgesetzt werden können. Versehen mit den folgenden Normen sind dies Banachräume:

$$\|y\|_{C(\overline{\Omega})} = \max_{x \in \overline{\Omega}} |y(x)|, \quad \|y\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha y\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

2.2.2 Reguläre Gebiete

Die Theorie partieller Differentialgleichungen erfordert Ortsgebiete Ω mit hinreichend glattem Rand. Die nächste Definition findet man bei Nečas [167]. Sie ist auch in Adams [2], Gajewski et al. [72] oder Ladyzhenskaya et al. [134] nachzulesen. Ausführliche Erläuterungen zu Lipschitzgebieten enthalten die Monographien von Alt [6], Grisvard [86] oder Wloka [209].

Definition. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, ein beschränktes Gebiet mit Rand Γ . Das Gebiet Ω bzw. sein Rand Γ gehören zur Klasse $C^{k,1}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, wenn endlich viele lokale Koordinatensysteme S_1, \dots, S_M , Funktionen h_1, \dots, h_M sowie Konstanten $a, b > 0$ existieren, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) Alle h_i sind auf dem $(N-1)$ -dimensionalen abgeschlossenen Würfel $\bar{Q}_{N-1} = \{y = (y_1, \dots, y_{N-1}) : |y_i| \leq a, i = 1 \dots N-1\}$ k -mal differenzierbar mit Lipschitz-stetigen Ableitungen der Ordnung k .
- (ii) Zu jedem $P \in \Gamma$ gibt es ein $i \in \{1, \dots, M\}$, so dass P im Koordinatensystem S_i die Darstellung $P = (y, h_i(y))$, $y \in \bar{Q}_{N-1}$ hat.
- (iii) Im lokalen Koordinatensystem S_i gilt

$$(y, y_N) \in \Omega \Leftrightarrow y \in \bar{Q}_{N-1}, h_i(y) < y_N < h_i(y) + b$$

$$(y, y_N) \notin \Omega \Leftrightarrow y \in \bar{Q}_{N-1}, h_i(y) - b < y_N < h_i(y).$$

Bedingung (iii) bedeutet anschaulich, dass das Gebiet lokal nur auf einer Seite des Randes liegt. Gebiete bzw. Ränder der Klasse $C^{0,1}$ heißen *Lipschitzgebiet* (auch reguläres Gebiet) bzw. *Lipschitzrand*. Einen Rand der Klasse $C^{k,1}$ nennt man kurz $C^{k,1}$ -Rand.

Innerhalb des lokalen Koordinatensystems S_i kann in natürlicher Weise das Lebesguesche Maß auf Γ eingeführt werden: Es sei $E \subset \Gamma$ eine ganz im Bereich des Koordinatensystems S_i liegende Menge und $D = (h_i)^{-1}(E) \subset \bar{Q}_{N-1}$ das vollständige Urbild von E . Die Menge E heißt messbar, wenn D bezüglich des $(N-1)$ -dimensionalen Lebesguemaßes messbar ist. Das Maß von E wird definiert durch

$$|E| = \int_D \sqrt{1 + |\nabla h_i(y_1, \dots, y_{N-1})|^2} dy_1 \dots dy_{N-1},$$

siehe [2] oder [72]. Bei Mengen E , die zu ihrer Darstellung verschiedene lokale Koordinatensysteme erfordern, wird das Maß entsprechend „zusammengesetzt“. Außerdem wird ausgenutzt, dass die Lipschitzfunktion h_i nach dem Satz von Rademacher fast überall differenzierbar ist, vgl. [6] oder auch [43]. Nach Definition des Oberflächenmaßes lassen sich in üblicher Weise messbare und integrierbare Funktionen auf Γ einführen. Wir bezeichnen das Oberflächenmaß mit $ds(x)$ bzw. kurz ds .

2.2.3 Schwache Ableitungen und Sobolewräume

In beschränkten Lipschitzgebieten Ω kann der Gaußsche Integralsatz angewendet werden. Sind y, v aus $C^1(\bar{\Omega})$ gegeben, dann gilt die *Formel der partiellen Integration*

$$\int_{\Omega} v(x) D_i y(x) dx = \int_{\Gamma} v(x) y(x) \nu_i(x) ds(x) - \int_{\Omega} y(x) D_i v(x) dx.$$

Hier ist $\nu_i(x)$ die i -te Komponente des nach außen gerichteten Einheitsnormalenvektors ν im Punkt $x \in \Gamma$ und ds das Lebesguesche Oberflächenmaß auf Γ . Gilt zusätzlich $v = 0$ auf Γ , dann folgt daraus

$$\int_{\Omega} y(x) D_i v(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) D_i y(x) dx.$$

Allgemeiner ergibt sich für $y \in C^k(\bar{\Omega})$, $v \in C_0^k(\Omega)$ sowie Multiindizes α mit $|\alpha| \leq k$ nach mehrmaliger partieller Integration

$$\int_{\Omega} y(x) D^{\alpha} v(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x) D^{\alpha} y(x) dx.$$

Diese Beziehung motiviert eine Verallgemeinerung des klassischen Ableitungsbegriffs, die wir im Weiteren erläutern. In der nächsten Definition bezeichnet $L_{loc}^1(\Omega)$ die Menge aller in Ω lokal integrierbaren Funktionen. Eine Funktion heißt *lokal integrierbar* in Ω , wenn sie auf jeder kompakten Teilmenge von Ω im Lebesgueschen Sinne integrierbar ist.

Definition. Es sei $y \in L_{loc}^1(\Omega)$ gegeben und α ein Multiindex. Existiert eine Funktion $w \in L_{loc}^1(\Omega)$ mit der Eigenschaft

$$\int_{\Omega} y(x) D^{\alpha} v(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} w(x) v(x) dx \quad \forall v \in C_0^{\infty}(\Omega), \quad (2.1)$$

so heißt w schwache Ableitung von y und wird mit $D^{\alpha} y$ bezeichnet.

In anderen Worten: w ist schwache Ableitung von y , wenn w an Stelle der (starken) Ableitung $D^{\alpha} y$ die Formel der partiellen Integration erfüllt.

Beispiel. Wir betrachten die Funktion $y(x) = |x|$ in $\Omega = (-1, 1)$. Dann besitzt y die schwache Ableitung

$$y'(x) := w(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-1, 0) \\ +1, & x \in [0, 1), \end{cases}$$

wie man leicht nachrechnet: Für alle $v \in C_0^{\infty}(-1, 1)$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |x| v'(x) dx &= \int_{-1}^0 (-x) v'(x) dx + \int_0^1 x v'(x) dx = -x v(x) \Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 (-1) v(x) dx \\ &\quad + x v(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (+1) v(x) dx = - \int_{-1}^1 w(x) v(x) dx. \end{aligned}$$

Welchen Wert wir y' im Nullpunkt zumessen ist unwichtig, weil ein Punkt eine Menge vom Maß null darstellt. \diamond

Eine schwache Ableitung kann, muss aber nicht existieren. Sie kann „besseren“ Räumen als nur $L_{loc}^1(\Omega)$ angehören, beispielsweise dem Raum $L^p(\Omega)$.

Definition. Es sei $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Unter $W^{k,p}(\Omega)$ versteht man den linearen Raum aller $y \in L^p(\Omega)$, für die alle schwachen Ableitungen $D^{\alpha} y$ mit $|\alpha| \leq k$ existieren und zu $L^p(\Omega)$ gehören, versehen mit der Norm

$$\|y\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^{\alpha} y(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Analog wird $W^{k,\infty}(\Omega)$ für $p = \infty$ eingeführt mit der Norm

$$\|y\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha y\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Die Räume $W^{k,p}(\Omega)$ sind Banachräume, siehe z.B. [2], [209], und werden als *Sobolewräume* bezeichnet. Von besonderem Interesse ist der Fall $p = 2$. Man setzt

$$H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega).$$

Weil der Raum $H^1(\Omega)$ für unsere Zwecke besonders wichtig ist, schreiben wir die obige Definition hierfür noch einmal explizit auf. Es ist

$$H^1(\Omega) = \{y \in L^2(\Omega) : D_i y \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, N\},$$

versehen mit der Norm

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (y^2 + |\nabla y|^2) dx \right)^{1/2}$$

(dabei gilt $|\nabla y|^2 = (D_1 y)^2 + \dots + (D_N y)^2$). Durch Einführung des Skalarprodukts

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} u v dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

wird $H^1(\Omega)$ zu einem Hilbertraum.

Eine etwas versteckte Schwierigkeit besteht in der Definition von Randwerten für Funktionen aus Sobolewräumen. Was soll bei einer Funktion y aus $W^{k,p}(\Omega)$ die Aussage $y = 0$ auf Γ bedeuten? Ist y aus $L^p(\Omega)$, so kann man die Werte von y auf Γ beliebig abändern, ohne dass sich y im Sinne des Raums $L^p(\Omega)$ ändert. Das liegt daran, dass Γ als Teilmenge von \mathbb{R}^N gesehen das Maß null hat. Funktionen, die sich nur auf Mengen vom Maß null unterscheiden, sind aber gleich im Sinne von $L^p(\Omega)$.

Definition. Die Abschließung von $C_0^\infty(\Omega)$ in $W^{k,p}(\Omega)$ bezeichnet man mit $W_0^{k,p}(\Omega)$. Dieser Raum wird mit der gleichen Norm wie $W^{k,p}(\Omega)$ versehen und ist ein abgeschlossener Teilraum von $W^{k,p}(\Omega)$. Insbesondere setzen wir $H_0^k(\Omega) := W_0^{k,2}(\Omega)$.

Die *Abschließung* einer Menge $E \subset X$ besteht aus allen Elementen $x \in X$, die Grenzwerte von Folgen aus E im Sinne der Norm von X sind, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - e_n\|_X = 0$ mit $e_n \in E$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Eine Menge $E \subset X$ heißt *dicht* in X , wenn ihre Abschließung der ganze Raum X ist. Aus der obigen Definition ergibt sich speziell, dass die Menge $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $H_0^1(\Omega)$ ist.

Funktionen aus $W_0^{k,p}(\Omega)$ können als solche angesehen werden, bei denen die Randwerte aller Ableitungen bis zur Ordnung $k - 1$ verschwinden. Inhomogene Randwerte definiert man durch die *Spur* von Funktionen aus $W^{k,p}(\Omega)$ auf dem Rand.

Satz 2.1 (Spursatz) Ist Ω ein beschränktes Lipschitzgebiet und $1 \leq p \leq \infty$, so existiert eine lineare und stetige Abbildung $\tau : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Gamma)$, die für alle y aus $W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ die Eigenschaft $(\tau y)(x) = y(x)$ f.ü. auf Γ besitzt.

Insbesondere ergibt sich für $p = 2$ die Eigenschaft $\tau : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$. Bei stetigen Funktionen y fällt also das Bild von τ mit deren Randwerten von y zusammen. Den Beweis des Satzes findet man z.B. in Adams [2], Alt [6], Evans [67], Nečas [167] oder Wloka [209]. Für $p > N$ folgt aus dem Einbettungssatz 7.1 auf S. 277, dass Funktionen aus $W^{1,p}(\Omega)$ mit Funktionen aus $C(\bar{\Omega})$ identifiziert werden können. Deshalb ist die Spurabbildung τ in diesem Fall stetig von $W^{1,p}(\Omega)$ nach $C(\Gamma)$.

Definition. Das Element τy heißt *Spur von y auf Γ* , die Abbildung τ *Spuroperator*.

Bemerkungen. Im Weiteren werden wir der Einfachheit halber an Stelle von τy die Bezeichnung $y|_\Gamma$ verwenden. In diesem Sinne ist auch $y|_{\Gamma_0}$ auf messbaren Teilmengen $\Gamma_0 \subset \Gamma$ als Einschränkung von τy auf Γ_0 definiert.

Die Stetigkeit des Spuroperators ist äquivalent zu seiner Beschränktheit, also zur Existenz einer Konstanten $c_\tau = c_\tau(\Omega, p)$, so dass

$$\|y|_\Gamma\|_{L^p(\Gamma)} \leq c_\tau \|y\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall y \in W^{1,p}(\Omega)$$

gilt. Für beschränkte Lipschitzgebiete Ω beweist man

$$H_0^1(\Omega) = \{y \in H^1(\Omega) : y|_\Gamma = 0\},$$

siehe z.B. [2] oder [209]. Man kann in $H_0^1(\Omega)$ durch

$$\|y\|_{H_0^1(\Omega)}^2 := \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx$$

eine Norm einführen, die zur oben in $H^1(\Omega)$ eingeführten Norm äquivalent ist. Mit positiven Konstanten c_1, c_2 gilt also $c_1 \|y\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|y\|_{H^1(\Omega)} \leq c_2 \|y\|_{H_0^1(\Omega)}$ für alle $y \in H_0^1(\Omega)$; vgl. Abschätzung (2.10) auf S. 27 und die darauf folgende Bemerkung.

2.3 Schwache Lösungen elliptischer Gleichungen

Eine ausführliche Darstellung der Theorie elliptischer Randwertprobleme würde den Rahmen dieses Buches sprengen. Statt dessen behandeln wir nur einige wenige Gleichungen, für die wir später Grundideen der Optimalsteuerungstheorie entwickeln. Das sind Gleichungen mit dem Laplace-Operator bzw. allgemeiner mit Differentialoperatoren in Divergenzform. In diesem Kapitel ist $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, ein beschränktes Lipschitzgebiet mit Rand Γ .

2.3.1 Poissonsgleichung

Wir beginnen mit der elliptischen Randwertaufgabe

$$\boxed{\begin{array}{rcl} -\Delta y & = & f \quad \text{in } \Omega \\ y & = & 0 \quad \text{auf } \Gamma \end{array}} \quad (2.2)$$

in der $f \in L^2(\Omega)$ gegeben und y gesucht ist. Eine solche Funktion f kann sehr irregulär sein. Man denke an das schachbrettartig unterteilte offene Einheitsquadrat $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und

eine dort definierte Funktion f , die in den schwarzen Feldern den Wert 1 und in den restlichen den Wert 0 hat. Über die Werte von f auf den inneren Rändern brauchen wir uns keine Gedanken zu machen, weil diese Ränder das Lebesguemaß null haben und Funktionen aus $L^2(\Omega)$ auf Mengen vom Maß null nicht unterscheidbar sind. Es leuchtet ein, dass man für eine solche Funktion keine klassische Lösung $y \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ der Poissonsgleichung finden kann. Statt dessen suchen wir y als *schwache Lösung* im Raum $H_0^1(\Omega)$. Grundlage ist eine *Variationsformulierung* der Aufgabe (2.2).

Zu deren Herleitung nehmen wir zunächst an, dass f hinreichend glatt und $y \in C^2(\Omega)$ eine genügend glatte klassische Lösung von (2.2) ist, für die alle unten auftretenden Ableitungen und Integrale existieren. Das Gebiet Ω wird generell als beschränkt vorausgesetzt. Wir multiplizieren die Poissonsgleichung in (2.2) mit einer beliebigen aber festen *Testfunktion* $v \in C_0^\infty(\Omega)$, integrieren über Ω und erhalten

$$-\int_{\Omega} v \Delta y \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$$

sowie nach partieller Integration

$$-\int_{\Gamma} v \partial_{\nu} y \, ds + \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Dabei bezeichnet ∂_{ν} die Normalenableitung, d.h. die Ableitung ∂/∂_{ν} in Richtung der äußeren Normalen ν auf Γ . Weil v auf Γ verschwindet, folgt

$$\int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Diese Gleichung (2.3) haben wir für *alle* $v \in C_0^\infty(\Omega)$ hergeleitet. Da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $H_0^1(\Omega)$ ist und alle Ausdrücke in der Gleichung bei gegebenem $y \in H_0^1(\Omega)$ stetig von $v \in H_0^1(\Omega)$ abhängen, gilt sie auch für alle $v \in H_0^1(\Omega)$. Umgekehrt kann man unter den oben genannten Voraussetzungen an y (insbesondere $y \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$) wegen der Beliebigkeit von $v \in C_0^\infty(\Omega)$ aus der eben hergeleiteten Beziehung auf die Gleichung $-\Delta y = f$ schließen. Alles zusammen rechtfertigt die folgende Definition:

Definition. Ein $y \in H_0^1(\Omega)$ heißt *schwache Lösung der Randwertaufgabe (2.2)*, wenn die *Variationsformulierung oder schwache Formulierung*

$$\int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (2.3)$$

erfüllt ist.

Man bezeichnet (2.3) auch als *Variationsgleichung*. Die Randbedingung $y|_{\Gamma} = 0$ ist in der Definition des Lösungsraums $H_0^1(\Omega)$ enthalten. Es ist bemerkenswert, dass man bei einer Gleichung zweiter Ordnung mit (schwachen) Ableitungen erster Ordnung auskommt.

Um allgemeinere Gleichungen als die Poissonsgleichung in einem einheitlichen Rahmen zu diskutieren, führen wir die Bezeichnung $V = H_0^1(\Omega)$ und eine *Bilinearform* $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$a[y, v] := \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla v \, dx \quad (2.4)$$

ein. Dann kann die Variationsformulierung (2.3) in der abstrakteren Form

$$a[y, v] = (f, v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in V$$

aufgeschrieben werden. Wir definieren ein lineares und stetiges Funktional $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ (zu diesem Begriff vgl. Abschnitt 2.4) durch

$$F(v) := (f, v)_{L^2(\Omega)}.$$

So nimmt die Variationsformulierung (2.3) die folgende allgemeine Form an:

$$a[y, v] = F(v) \quad \forall v \in V. \quad (2.5)$$

Der Raum aller linearen und stetigen Funktionale auf V , der zu V duale Raum (siehe S. 33), wird mit V^* bezeichnet; wir haben also $F \in V^*$. Die Lösbarkeit linearer elliptischer Gleichungen wird oft auf folgende wichtige Aussage zurückgeführt:

Lemma 2.2 (Lax und Milgram) *Es sei V ein reeller Hilbertraum und $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform mit folgenden Eigenschaften: Es existieren positive Konstanten α_0 und β_0 , so dass für alle $v, y \in V$ die Beziehungen*

$$|a[y, v]| \leq \alpha_0 \|y\|_V \|v\|_V \quad (\text{Beschränktheit}) \quad (2.6)$$

$$a[y, y] \geq \beta_0 \|y\|_V^2 \quad (V\text{-Elliptizität}) \quad (2.7)$$

erfüllt sind. Dann hat die Variationsformulierung (2.5) für jedes $F \in V^*$ genau eine Lösung $y \in V$ und es existiert eine von F unabhängige Konstante c_a , so dass die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\|y\|_V \leq c_a \|F\|_{V^*}. \quad (2.8)$$

Das ist die grundlegende Aussage für den Beweis der Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung von (2.2) und die anderen hier interessierenden linearen elliptischen Randwertaufgaben. Zur Anwendung bei homogenen Dirichlet-Randbedingungen braucht man die folgende Abschätzung:

Lemma 2.3 (Friedrichs'sche-Ungleichung) *Ist Ω ein beschränktes Lipschitzgebiet, dann existiert eine nur von Ω abhängige Konstante c_Ω , so dass die Ungleichung*

$$\int_{\Omega} y^2 dx \leq c_\Omega \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx$$

für alle $y \in H_0^1(\Omega)$ erfüllt ist.

Den Beweis findet man z.B. bei Alt [6], Casas [43], Nečas [167] oder Wloka [209]. Für die Aussage sind homogene Randwerte wie in $H_0^1(\Omega)$ wesentlich. In $H^1(\Omega)$ kann sie nicht gelten, man denke an $y(x) \equiv 1$.

Satz 2.4 *Ist Ω ein beschränktes Lipschitzgebiet, so besitzt die Poissonsgleichung (2.2) für jedes $f \in L^2(\Omega)$ genau eine schwache Lösung $y \in H_0^1(\Omega)$ und es existiert eine von f unabhängige Konstante c_P , so dass gilt*

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} \leq c_P \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.9)$$

Beweis: Wir wenden das Lemma von Lax und Milgram in $V = H_0^1(\Omega)$ an und verifizieren dazu, dass die Bilinearform (2.4) die nötigen Voraussetzungen erfüllt. Da $H_0^1(\Omega)$ Teilraum von $H^1(\Omega)$ ist, verwenden wir die normale H^1 -Norm, vgl. aber Bemerkung (i) nach diesem Beweis. Die Beschränktheit (2.6) der Bilinearform a ergibt sich mit Hilfe der Ungleichung von Cauchy-Schwarz aus

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla v \, dx \right| &\leq \int_{\Omega} |\nabla y| |\nabla v| \, dx \leq \left(\int_{\Omega} |\nabla y|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} y^2 + |\nabla y|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} v^2 + |\nabla v|^2 \, dx \right)^{1/2} \\ &\leq \|y\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Die V -Elliptizität folgt mit

$$\begin{aligned} a[y, y] = \int_{\Omega} |\nabla y|^2 \, dx &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla y|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla y|^2 \, dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla y|^2 \, dx + \frac{1}{2c_{\Omega}} \int_{\Omega} y^2 \, dx \\ &\geq \frac{1}{2} \min \left(1, \frac{1}{c_{\Omega}} \right) \|y\|_{H^1(\Omega)}^2, \end{aligned} \quad (2.10)$$

wobei wir am Ende die Friedrichs'sche Ungleichung angewendet haben. Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 2.2 in $V = H_0^1(\Omega)$ erfüllt. Die Beschränktheit des Funktionals F ergibt sich mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$|F(v)| \leq \left| \int_{\Omega} f v \, dx \right| = |(f, v)_{L^2(\Omega)}| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

also $\|F\|_{V^*} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$. Aus Lemma 2.2 erhalten wir die Existenz einer eindeutig bestimmten Lösung y von (2.2). Nach Einsetzen der obigen Abschätzung für F in (2.8) folgt $\|y\|_{H^1(\Omega)} \leq c_a \|F\|_{V^*} \leq c_a \|f\|_{L^2(\Omega)}$, womit auch (2.9) bewiesen ist. ■

Bemerkungen. (i) Ungleichung (2.10) zeigt, dass $\|y\|_{H_0^1(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |\nabla y|^2 \, dx \right)^{1/2}$ eine Norm in $H_0^1(\Omega)$ ist. Wird $V = H_0^1(\Omega)$ von vornherein so normiert, dann sind die Voraussetzungen von Lemma 2.2 direkt erfüllt. Deshalb wird diese „verkürzte“ Norm oft angewendet.

(ii) Das Lemma lässt auch allgemeinere lineare stetige Funktionale F zu, die nicht durch $f \in L^2(\Omega)$ erzeugt werden. Das nutzen wir im nächsten Abschnitt aus.

2.3.2 Randbedingung dritter Art

Ähnlich kann die Randwertaufgabe

$$\boxed{\begin{aligned} -\Delta y + c_0 y &= f && \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu} y + \alpha y &= g && \text{auf } \Gamma \end{aligned}} \quad (2.11)$$

behandelt werden, in der Funktionen $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in L^2(\Gamma)$ sowie nichtnegative Koeffizientenfunktionen $c_0 \in L^{\infty}(\Omega)$, $\alpha \in L^{\infty}(\Gamma)$ vorgegeben sind. Die Randbedingung in (2.11) wird *Randbedingung 3. Art* oder auch *Robin-Randbedingung* genannt. Mit ∂_{ν} bezeichnen wir wie bisher die Ableitung in Richtung der äußeren Normalen ν auf Γ .

Diese Aufgabe wird ähnlich wie die Poissongleichung behandelt. Durch Multiplikation mit einer Testfunktion v aus $C^1(\bar{\Omega})$ ergibt sich unter den gleichen Annahmen wie in Abschnitt 2.3.1 durch partielle Integration

$$-\int_{\Gamma} v \partial_{\nu} y \, ds + \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} c_0 y v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Nach Einsetzen der Randbedingung $\partial_{\nu} y = g - \alpha y$ folgt

$$\int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} c_0 y v \, dx + \int_{\Gamma} \alpha y v \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma} g v \, ds \quad (2.12)$$

für alle $v \in C^1(\bar{\Omega})$. Wegen Dichtheit von $C^1(\bar{\Omega})$ in $H^1(\Omega)$ gelangt man schließlich unter der Annahme $y \in H^1(\Omega)$ zur folgenden Definition:

Definition. Eine Funktion $y \in H^1(\Omega)$ heißt *schwache Lösung der Randwertaufgabe (2.11)*, wenn sie die *Variationsgleichung (2.12)* für alle $v \in H^1(\Omega)$ erfüllt.

Die Randbedingung in (2.11) muss nicht im Lösungsraum berücksichtigt werden. Sie stellt sich für hinreichend glatte Lösungen automatisch als sogenannte *natürliche Randbedingung* ein. Zur Anwendung des Lemmas von Lax und Milgram führen wir den Lösungsraum $V := H^1(\Omega)$ ein sowie die Funktionale

$$\begin{aligned} F(v) &:= \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma} g v \, ds \\ a[y, v] &:= \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} c_0 y v \, dx + \int_{\Gamma} \alpha y v \, ds. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Hier kann F nicht mehr mit einer Funktion $f \in L^2(\Omega)$ identifiziert werden; F ist von komplizierterer Bauart und nur als Funktional auf V zu verstehen. Die Variationsformulierung (2.12) hat wieder die Form (2.5). Jetzt benötigen wir folgende Ungleichung:

Lemma 2.5 Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Lipschitzgebiet und $\Gamma_1 \subset \Gamma$ eine messbare Menge mit $|\Gamma_1| > 0$, so existiert eine von $y \in H^1(\Omega)$ unabhängige Konstante c_{Γ_1} , so dass

$$\|y\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq c_{\Gamma_1} \left(\int_{\Omega} |\nabla y|^2 \, dx + \left(\int_{\Gamma_1} y \, ds \right)^2 \right) \quad (2.14)$$

für alle $y \in H^1(\Omega)$ erfüllt ist.

Der Beweis dieser Verallgemeinerung der Friedrichs'schen Ungleichung ist z.B. in [43] oder [209] zu finden, siehe auch [72]. Die Friedrichs'sche Ungleichung ergibt sich als Spezialfall mit $\Gamma_1 := \Gamma$ für Funktionen $y \in H_0^1(\Omega)$. Eine analoge Beziehung gilt in Teilmengen von Ω : Ist $E \subset \Omega$ eine Menge von positivem Maß, dann existiert eine von $y \in H^1(\Omega)$ unabhängige Konstante c_E , so dass die *verallgemeinerte Ungleichung von Poincaré*

$$\|y\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq c_E \left(\int_{\Omega} |\nabla y|^2 \, dx + \left(\int_E y \, dx \right)^2 \right) \quad (2.15)$$

für alle $y \in H^1(\Omega)$ erfüllt ist, siehe [43] oder [72]. Für $E := \Omega$ erhält man die Poincarésche Ungleichung.

Satz 2.6 *Es seien ein beschränktes Lipschitzgebiet Ω sowie fast überall nichtnegative Funktionen $c_0 \in L^\infty(\Omega)$ und $\alpha \in L^\infty(\Gamma)$ vorgegeben mit*

$$\int_{\Omega} (c_0(x))^2 dx + \int_{\Gamma} (\alpha(x))^2 ds(x) > 0.$$

Dann besitzt die Randwertaufgabe (2.11) für jedes Paar $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma)$ genau eine schwache Lösung $y \in H^1(\Omega)$. Es existiert eine von f und g unabhängige Konstante c_R , so dass die folgende Ungleichung gilt:

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} \leq c_R (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}). \quad (2.16)$$

Beweis: Wir wenden das Lemma von Lax und Milgram in $V = H^1(\Omega)$ an und verifizieren, dass die Bilinearform (2.13) die nötigen Voraussetzungen erfüllt. Im Beweis, wie überall in diesem Buch, steht c für eine generische Konstante. Man sieht leicht die Ungleichung

$$|a[y, v]| = \left| \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} c_0 y v dx + \int_{\Gamma} \alpha y v ds \right| \leq \alpha_0 \|y\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

ein. Insbesondere wird dazu

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} c_0 y v dx \right| &\leq \|c_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|y\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|c_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|y\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \\ \left| \int_{\Gamma} \alpha y v ds \right| &\leq \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma)} \|y\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma)} c \|y\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

verwendet (Spursatz): Damit ist die Beschränktheit (2.6) erfüllt. Die V -Elliptizität ergibt so: Unsere Voraussetzung sichert $c_0 \neq 0$ in $L^\infty(\Omega)$ bzw. $\alpha \neq 0$ in $L^\infty(\Gamma)$. Im Fall $c_0 \neq 0$ existiert eine messbare Teilmenge $E \subset \Omega$ mit $|E| > 0$ und ein $\delta > 0$, so dass $c_0(x) \geq \delta$ auf E gilt. Daraus folgt mit (2.15) und der Ungleichung $(\int_E y dx)^2 \leq c \int_E y^2 dx$

$$\begin{aligned} a[y, y] &= \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx + \int_{\Omega} c_0 y^2 dx + \int_{\Gamma} \alpha y^2 ds \geq \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx + \delta \int_E y^2 dx \\ &\geq \min(1, \delta) \left(\int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx + \int_E y^2 dx \right) \geq \frac{\min(1, \delta)}{c_E \max(1, |E|)} \|y\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Im Fall $\alpha \neq 0$ existieren eine messbare Teilmenge $\Gamma_1 \subset \Gamma$ von positivem Maß sowie ein $\delta > 0$ mit $\alpha(x) \geq \delta$ auf Γ_1 . Mit (2.14) ergibt sich analog

$$a[y, y] \geq \int_{\Omega} |\nabla y|^2 ds + \delta \int_{\Gamma_1} y^2 ds \geq \frac{\min(1, \delta)}{c_{\Gamma_1} \max(1, |\Gamma_1|)} \|y\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (2.17)$$

Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 2.2 erfüllt. Ferner gilt

$$\begin{aligned} |F(v)| &\leq \int_{\Omega} |f v| dx + \int_{\Gamma} |g v| ds \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + c \|g\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \tilde{c} (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}) \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

(Spursatz), also $\|F\|_{V^*} \leq \tilde{c} (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)})$. Aus dem Lemma von Lax und Milgram erhalten wir die behauptete Abschätzung für $\|y\|_{H^1(\Omega)}$. ■

2.3.3 Differentialoperator in Divergenzform

Die beiden in den Abschnitten 2.3.1 bzw. 2.3.2 diskutierten Randwertprobleme sind ein Spezialfall der Aufgabenstellung

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathcal{A}y + c_0 y & = & f \quad \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu_{\mathcal{A}}} y + \alpha y & = & g \quad \text{auf } \Gamma_1 \\ y & = & 0 \quad \text{auf } \Gamma_0 \end{array}} \quad (2.18)$$

in der \mathcal{A} ein elliptischer Differentialoperator der Form

$$\mathcal{A}y(x) = - \sum_{i,j=1}^N D_i (a_{ij}(x) D_j y(x)) \quad (2.19)$$

ist. Die Koeffizientenfunktionen a_{ij} von \mathcal{A} sollen zu $L^\infty(\Omega)$ gehören, der Symmetriebedingung $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ in Ω genügen und mit einem $\alpha_0 > 0$ die *Bedingung der gleichmäßigen Elliptizität*

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \gamma_0 |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \quad (2.20)$$

für fast alle $x \in \Omega$ erfüllen. Mit $\partial_{\nu_{\mathcal{A}}}$ bezeichnen wir in diesem allgemeineren Fall die Ableitung in Richtung der *Konormalen* $\nu_{\mathcal{A}}$, definiert durch

$$(\nu_{\mathcal{A}})_i(x) = \sum_{j=1}^N a_{ij}(x) \nu_j(x). \quad (2.21)$$

Fassen wir die Koeffizienten a_{ij} zu einer Matrix A zusammen, so gilt $\nu_{\mathcal{A}} = A\nu$. Der Rand Γ ist durch $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ in zwei disjunkte messbare Teilmengen Γ_0 und Γ_1 aufgeteilt, wobei eine der beiden Teilmengen leer sein kann. Ferner sind fast überall nichtnegative Funktionen $c_0 \in L^\infty(\Omega)$, $\alpha \in L^2(\Gamma_1)$ sowie Funktionen $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in L^2(\Gamma_1)$ gegeben. Der adäquate Lösungsraum für diese Gleichung ist

$$V := \{y \in H^1(\Omega) : y|_{\Gamma_0} = 0\},$$

d.h. $\tau y = 0$ fast überall in Γ_0 . Als Bilinearform a definiert man hier

$$a[y, v] := \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_i y D_j v \, dx + \int_{\Omega} c_0 y v \, dx + \int_{\Gamma_1} \alpha y v \, ds. \quad (2.22)$$

Die schwache Lösung y ist definiert durch $y \in V$ sowie

$$a[y, v] = (f, v)_{L^2(\Omega)} + (g, v)_{L^2(\Gamma_1)} \quad \forall v \in V.$$

Satz 2.7 *Es sei Ω ein beschränktes Lipschitzgebiet, $c_0 \in L^\infty(\Omega)$, $\alpha \in L^\infty(\Gamma_1)$. Fast überall auf Ω bzw. auf Γ_1 gelte $c_0(x) \geq 0$, $\alpha(x) \geq 0$ und eine der zwei folgenden Voraussetzungen sei erfüllt:*

- (i) $|\Gamma_0| > 0$
(ii) $\Gamma_1 = \Gamma$ und $\int_{\Omega} c_0^2(x) dx + \int_{\Gamma} \alpha^2(x) ds(x) > 0$.

Dann besitzt die Aufgabe (2.18) für alle Paare $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma_1)$ genau eine schwache Lösung $y \in V$. Außerdem genügt y mit einer von f und g unabhängige Konstanten $c_A > 0$ der Ungleichung

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} \leq c_A (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_1)}) \quad \forall f \in L^2(\Omega), \forall g \in L^2(\Gamma_1). \quad (2.23)$$

Der Beweis wird wie der von Satz 2.6 mit Lemma 2.2 ausgeführt, Übungsaufgabe 2.4; vgl. auch die Behandlung von Gleichungen der Form (2.18) in [43], [144] oder [209].

Bemerkungen. (i) Die obige Voraussetzung (ii) ist äquivalent zur Existenz einer Menge $E \subset \Omega$ mit $|E| > 0$ mit $c_0(x) > 0 \forall x \in E$ oder einer Menge $D \subset \Gamma$ mit $|D| > 0$ und $\alpha(x) > 0 \forall x \in D$.

(ii) Dirichlet-Randbedingungen waren in allen drei Fällen nur als homogene vorgegeben. Dafür gibt es gute Gründe. Erstens folgt aus einer inhomogenen Bedingung der Form $y|_{\Gamma} = g$ für g automatisch die Glattheit $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, falls y im Raum $H^1(\Omega)$ liegt (Sobolewräume mit gebrochenem Exponenten werden in Abschnitt 2.15 definiert). Ist g wie in späteren Abschnitten eine Steuerungsfunktion, dann müsste diese a priori aus $H^{1/2}(\Gamma)$ gewählt werden. In vielen Anwendungen ist das nicht sinnvoll. Zweitens kann man für inhomogene Dirichlet-Randbedingungen nicht mit der gängigen Variationsformulierung arbeiten. Eine mögliche Methode besteht in der Zurückführung auf homogene Randbedingungen, indem eine die inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen erfüllende Funktion verwendet wird. Inhomogene Dirichlet-Randbedingungen werden bei elliptischen und parabolischen Aufgaben in Lions [144] mit der Transpositions- methode behandelt. Im parabolischen Fall verweisen wir auch auf Bensoussan et al. [24], [25], wo mit Halbgruppen und der Formel der Variation der Konstanten gearbeitet wird. Neue Resultate zur Randsteuerung in Dirichlet-Randbedingungen enthalten z.B. [50], [130], [204].

(iii) Die bewiesenen Abschätzungen (2.9), (2.16) und (2.23) des Typs $\|y\| \leq c(\|f\| + \|g\|)$ sind äquivalent zur Stetigkeit der Abbildung $f \mapsto y$ bzw. $(f, g) \mapsto y$ in den entsprechenden Räumen.

Vorgaben aus L^p -Räumen mit $p < 2$

Wir betrachten noch einmal unsere Aufgabe (2.18) auf S. 30 in der Form

$$\begin{aligned} \mathcal{A}y + c_0 y &= f && \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu_A} y + \alpha y &= g && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

unter den Voraussetzungen von Satz 2.7, Variante (ii). Wir haben bisher $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in L^2(\Gamma)$ vorausgesetzt und zeigen jetzt, dass die obige Aufgabe auch für $f \in L^r(\Omega)$ und $g \in L^s(\Gamma)$ mit gewissen $r, s < 2$ genau eine Lösung $y \in H^1(\Omega)$ besitzt. Dazu fassen wir f und g als Funktionale aus $(H^1(\Omega))^*$ auf und definieren

$$F_1(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx, \quad F_2(v) = \int_{\Gamma} g(x)v(x) ds(x).$$

Aus Satz 7.1 auf S. 277 (Sobolewscher Einbettungssatz) folgt $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ für alle $p < \infty$ und $N = \dim \Omega = 2$ sowie für alle $p \leq 2N/(N-2)$ und $N > 2$. Mit der Hölderschen Ungleichung erhalten wir

$$|F_1(v)| \leq \|f\|_{L^r(\Omega)} \|v\|_{L^p(\Omega)},$$

wenn r gemäß $1/r + 1/p = 1$ fixiert wird. Bei $N = 2$ kann man p beliebig groß wählen, also r beliebig nahe an 1. Folglich gehört F_1 im Fall $N = 2$ zu $(H^1(\Omega))^*$, wenn f in $L^r(\Omega)$ mit $r > 1$ liegt. Für $N > 2$ ergibt sich das kleinstmögliche r aus

$$\frac{1}{r} + \frac{N-2}{2N} = 1 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{2N}{N+2}.$$

In diesem Fall hat F_1 diese Eigenschaft, falls f zu $L^r(\Omega)$ mit $r \geq 2N/(N+2)$ gehört.

Analog wird F_2 unter Beachtung von Satz 7.2 auf S. 277 untersucht. Die Spur τy gehört im Fall $N = 2$ für alle $p < \infty$ dem Raum $L^p(\Gamma)$ an und bei $N > 2$ für alle $p \leq 2(N-1)/(N-2)$. Für $N = 2$ folgt $F_2 \in (H^1(\Omega))^*$ aus $g \in L^s(\Gamma)$ mit $s > 1$. Im Fall $N > 2$ folgt diese Eigenschaft aus $s \geq 2 - 2/N$.

Das Lemma von Lax und Milgram sichert unter diesen Voraussetzungen Existenz und Eindeutigkeit der Lösung $y \in H^1(\Omega)$ für die obige Gleichung und die Abschätzung

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} \leq c (\|f\|_{L^r(\Omega)} + \|g\|_{L^s(\Gamma)}).$$

2.4 Lineare Abbildungen

2.4.1 Lineare stetige Operatoren und Funktionale

Die ohne Beweis aufgeführten Sätze dieses Abschnittes finden sich in den meisten Standardwerken der Funktionalanalysis, zum Beispiel in Alt [6], Kantorowitsch und Akilow [118], Ljusternik und Sobolew [146], Heuser [101], Werner [208] oder Yosida [213].

Im Weiteren seien $\{U, \|\cdot\|_U\}$ und $\{V, \|\cdot\|_V\}$ normierte Räume über \mathbb{R} .

Definition. Eine Abbildung $A : U \rightarrow V$ heißt *linear* bzw. *linearer Operator*, wenn $A(u+v) = Au + Av$ sowie $A(\lambda v) = \lambda Av$ für alle $u, v \in U$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. Eine lineare Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *lineares Funktional*.

Reell- oder komplexwertige Abbildungen werden auch *Funktional* genannt.

Definition. Eine Abbildung $A : U \rightarrow V$ heißt *stetig*, wenn aus $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ in U die Konvergenz der Bildfolge gegen Au in V folgt, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} Au_n = Au$.

Definition. Ein linearer Operator $A : U \rightarrow V$ heißt *beschränkt*, wenn er mit einer von $u \in U$ unabhängigen Konstanten c_A für alle $u \in U$ der folgenden Abschätzung genügt:

$$\|Au\|_V \leq c_A \|u\|_U.$$

Satz 2.8 Ein linearer Operator ist genau dann beschränkt, wenn er stetig ist.

Beispiel. Wir definieren in $U = V = C[0, 1]$ einen *Integraloperator* A durch

$$(Au)(t) = \int_0^1 e^{t-s} u(s) ds, \quad t \in [0, 1].$$

Offenbar bildet A den Raum U in sich ab und ist linear. Außerdem ist A stetig. Dazu zeigen wir die Beschränktheit und erhalten die Stetigkeit aus dem letzten Satz. Wir

schätzen ab,

$$\begin{aligned} |(Au)(t)| &\leq e^t \int_0^1 e^{-s} |u(s)| ds \leq e^t (1 - e^{-1}) \max_{t \in [0,1]} |u(t)| \\ &\leq (e - 1) \|u\|_{C[0,1]}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\|Au\|_U = \max_{t \in [0,1]} |(Au)(t)| \leq (e - 1) \|u\|_U,$$

also die Beschränktheit von A mit $c_A = e - 1$. \diamond

Definition. Ist $A : U \rightarrow V$ ein linearer und stetiger Operator, dann ist die Zahl

$$\|A\| = \sup_{\|u\|_U=1} \|Au\|_V$$

endlich und heißt Norm von A . Sie wird mit $\|A\|_{\mathcal{L}(U,V)}$ oder kurz mit $\|A\|$ bezeichnet.

Da Stetigkeit von A mit Beschränktheit äquivalent ist, existiert eine Zahl c , so dass $\|Au\|_V \leq c \|u\|_U$ für alle $u \in U$ gilt. Die Zahl $c = \|A\|$ ist die kleinste Zahl dieser Art; $\|A\|$ erfüllt wirklich die Axiome einer Norm, Übungsaufgabe 2.5.

Definition. Mit $\mathcal{L}(U, V)$ wird der lineare Raum aller linearen und stetigen Operatoren von U nach V bezeichnet, versehen mit der oben eingeführten Operatornorm $\|A\|_{\mathcal{L}(U,V)}$.

Der Raum $\mathcal{L}(U, V)$ ist bereits vollständig, also ein Banachraum, wenn nur V vollständig ist. Im Fall $U = V$ schreiben wir $\mathcal{L}(U, V) =: \mathcal{L}(U)$.

Beispiel - Multiplikationsoperator. Wir wählen $U = V = L^\infty(\Omega)$ und eine feste Funktion $a \in L^\infty(\Omega)$. Als Operator A wird

$$(Au)(x) = a(x)u(x) \quad \text{für fast alle } x \in \Omega$$

definiert. A ist beschränkt, denn

$$\|Au\|_V = \|a(\cdot)u(\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^\infty(\Omega)},$$

wobei sich die letzte Abschätzung offenbar nicht verbessern lässt. Folglich ist A stetig, d.h. $A \in \mathcal{L}(L^\infty(\Omega))$, und hat die Norm $\|A\|_{\mathcal{L}(L^\infty(\Omega))} = \|a\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Zur Illustration betrachten wir den Operator

$$(Au)(x) = x^2 u(x),$$

$A : L^\infty(0, 1) \rightarrow L^\infty(0, 1)$. Er ist beschränkt und hat die Norm 1, denn die Funktion $a(x) = x^2$ ist aus $L^\infty(0, 1)$ und hat die Norm 1. \diamond

Definition. Der lineare Raum aller auf $\{U, \|\cdot\|_U\}$ definierten linearen stetigen Funktionale heißt der zu U duale Raum und wird mit U^* bezeichnet.

Diesen Raum kann man auch durch $U^* = \mathcal{L}(U, \mathbb{R})$ definieren. Die zugehörige Norm ist

$$\|f\|_{U^*} = \sup_{\|u\|_U=1} |f(u)|.$$

Auf Grund der Vollständigkeit von \mathbb{R} ist U^* stets ein Banachraum.

Beispiel. Wir betrachten im Raum $U = C[0, 1]$ das Funktional $f(u) = u(\frac{1}{2})$. Es ist beschränkt, denn

$$|f(u)| = |u(\frac{1}{2})| \leq \max_{t \in [0, 1]} |u(t)| = 1 \cdot \|u\|_{C[0, 1]}.$$

Daraus folgt $\|f\|_{U^*} \leq 1$. Nach Einsetzen von $u(t) \equiv 1$ folgt $|f(u)| = 1 = \|u\|$ und deshalb $\|f\|_{U^*} \geq 1$, insgesamt also $\|f\|_{U^*} = 1$. \diamond

Die weiteren Ausführungen beziehen sich auf konkrete Darstellungen linearer stetiger Funktionale und damit auf die Charakterisierung des dualen Raums. Ein und dasselbe lineare stetige Funktional kann auf unendlich viele verschiedene Weisen dargestellt werden. Beispielsweise stellen die Ausdrücke

$$F(v) = \int_0^1 \ln(\exp(3v - 5)) ds + 5, \quad G(x) = 3v \quad (2.24)$$

das gleiche lineare Funktional auf \mathbb{R} dar, obwohl sie verschieden aussehen. Im Hilbertraum gilt die folgende Aussage:

Satz 2.9 (Rieszscher Darstellungssatz) *In jedem reellen Hilbertraum $\{H, (\cdot, \cdot)_H\}$ kann jedes lineare und stetige Funktional $F \in H^*$ mit Hilfe des Skalarprodukts durch genau ein Element $f \in H$ mit $\|F\|_{H^*} = \|f\|_H$ in der Form*

$$F(v) = (f, v)_H$$

dargestellt werden.

In diesem Sinne kann man H^* mit H identifizieren und schreibt $H = H^*$. Bei dem durch (2.24) auf $H = \mathbb{R}$ definierten Funktional hat G mit $f = 3 \in \mathbb{R}$ die im Satz angegebene kanonische Form.

Es sei jetzt U ein reeller Banachraum mit dualen Raum U^* . Wird $u \in U$ fixiert und $f \in U^*$ als variabel betrachtet, so ist die durch u erzeugte Abbildung $F_u : U^* \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F_u : f \mapsto f(u),$$

linear und stetig auf U^* . Die Linearität ist offensichtlich und die Stetigkeit folgt aus

$$|F_u(f)| = |f(u)| \leq \|u\|_U \|f\|_{U^*}.$$

Deshalb ist dieses durch u erzeugte Funktional F_u ein Element des zu U^* dualen Raums $(U^*)^* =: U^{**}$. Die Abbildung $u \mapsto F_u$ ist injektiv. Daher kann man im Sinne dieser Konstruktion jedes Element $u \in U$ als Funktional aus U^{**} auffassen, indem man es mit F_u identifiziert. Der Raum U^{**} heißt zu U *bidualer Raum*. Mit der eben beschriebenen Identifikation gilt immer $U \subset U^{**}$. Die Zuordnung $u \mapsto F_u$ von U in U^{**} heißt kanonische Einbettung oder kanonische Abbildung. Ist diese surjektiv, gilt also $U = U^{**}$, dann heißt der Raum U *reflexiv*. Bei einem reflexiven Raum gelangt man durch zweifache Dualisierung wieder zum Ausgangsraum zurück. Wegen des Rieszschen Darstellungssatzes sind alle Hilberträume reflexiv.

Beispiel. Für $1 < p < \infty$ sind die in Abschnitt 2.1 eingeführten Räume $L^p(E)$ reflexiv, denn es gilt folgende Darstellung: Jedes lineare stetige Funktional $F \in L^p(E)^*$ kann durch genau eine Funktion $f \in L^q(E)$ in der Form

$$F(u) = \int_E f(x) u(x) dx$$

dargestellt werden, wobei der *konjugierte Index* q durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ definiert ist. In diesem Sinne gilt also

$$L^p(E)^* = L^q(E), \quad 1 < p < \infty.$$

Durch Dualisierung von $L^q(E)$ gelangt man offenbar wieder zurück zu $L^p(E)$. Die Stetigkeit des Funktional F folgt aus der *Hölderschen Ungleichung für Integrale*,

$$\int_E |f(x)| |u(x)| dx \leq \left(\int_E |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_E |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.25)$$

◇

Bemerkung. Die obige Aussage gilt auch für $p = 1$, d.h. $L^1(E)^* = L^\infty(E)$. Der duale Raum von $L^\infty(E)$ ist jedoch nicht der Raum $L^1(E)$; $L^\infty(E)$ und $L^1(E)$ sind also nicht reflexiv.

2.4.2 Schwache Konvergenz

Der Inhalt dieses Abschnitts wird vor allem für den Beweis der Existenz optimaler Steuerungen benötigt. Leser, die sich zunächst mehr für die Grundlagen zur *Lösung* von Optimalsteuerungsproblemen interessieren, können diesen Abschnitt zurückstellen. Im weiteren werden die zugrunde liegenden Räume stets Banachräume sein, auch wenn man deren Vollständigkeit nicht für alle Aussagen benötigt.

Definition. Es sei U ein reeller Banachraum. Eine Folge $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ von Elementen aus U heißt *schwach konvergent* gegen $u \in U$, wenn für $n \rightarrow \infty$

$$f(u_n) \rightarrow f(u) \quad \forall f \in U^*$$

gilt. Die schwache Konvergenz wird mit \rightharpoonup gekennzeichnet, d.h. durch $u_n \rightharpoonup u$, $n \rightarrow \infty$.

Das (schwache) Grenzelement u ist eindeutig bestimmt. Nach dem Satz von Banach und Steinhaus, einer Folgerung aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, ist für jede in U schwach konvergente Folge $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ die Folge der Normen $\{\|u_n\|\}_{n=1}^\infty$ beschränkt.

Beispiele.

(i) Jede in U (stark) gegen $u \in U$ konvergente Folge konvergiert auch schwach gegen u ,

$$u_n \rightarrow u \quad \Rightarrow \quad u_n \rightharpoonup u, \quad n \rightarrow \infty.$$

(ii) Als Folgerung aus dem Rieszschen Satz ist schwache Konvergenz im Hilbertraum $\{H, (\cdot, \cdot)\}$ gleichbedeutend mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v, u_n) \rightarrow (v, u) \quad \forall v \in H.$$

Gilt $u_n \rightharpoonup u$ und $v_n \rightarrow v$ (starke Konvergenz), so auch $(v_n, u_n) \rightarrow (v, u)$ für $n \rightarrow \infty$, Übungsaufgabe 2.8. Das Skalarprodukt einer schwach konvergenten mit einer stark konvergenten Folge konvergiert also gegen das Skalarprodukt der Grenzelemente.

(iii) Wir betrachten im Hilbertraum $H = L^2(0, 2\pi)$ die Funktionenfolge

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$$

sowie eine beliebige Funktion $f \in L^2(0, 2\pi)$. Dann stellt das Skalarprodukt

$$(f, u_n) = \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) dx$$

gerade den n -ten Fourierkoeffizienten der Funktion f bezüglich des Orthonormalsystems der Funktionen $\sin(nx)/\sqrt{\pi}$ in $L^2(0, 2\pi)$ dar. Wegen der Besselschen Ungleichung bilden diese Koeffizienten eine Nullfolge. Daraus folgt

$$(f, u_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Weil aber offenbar $0 = (f, 0)$ für alle $f \in H$ erfüllt ist, erhalten wir

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(n \cdot) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Der schwache Grenzwert der Folge $\{u_n\}$ ist die Nullfunktion, aber wir haben für alle n

$$\|u_n\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(nx) dx = 1.$$

Folgerung *Es gibt schwach gegen null konvergente Folgen, deren Elemente sämtlich der Einheitskugeloberfläche angehören.*

Die oben betrachtete Folge von Sinusfunktionen konvergiert schwach gegen null. Diese Funktionen oszillieren aber mit wachsendem n immer stärker. Das Beispiel verdeutlicht, dass schwache Konvergenz nur wenig über das Konvergenzverhalten aussagt. Deshalb ist die Information, dass eine durch einen Algorithmus berechnete Folge von Funktionen schwach konvergiert, aus numerischer Sicht kaum von Bedeutung. Die schwache Konvergenz entfaltet ihre Kraft beim Beweis von Existenzsätzen. Im Weiteren stellen wir einige für die Anwendung des Konzepts der schwachen Konvergenz wesentliche Aussagen bereit.

Definition. *Eine Abbildung $F : U \rightarrow V$ zwischen zwei reellen Banachräumen U und V heißt schwach folgenstetig, wenn aus der schwachen Konvergenz einer beliebigen Folge $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ von Elementen aus U gegen $u \in U$ die schwache Konvergenz der Bildfolge $\{F(u_n)\}_{n=1}^\infty$ gegen $F(u)$ in V folgt, d.h.*

$$u_n \rightharpoonup u \Rightarrow F(u_n) \rightharpoonup F(u), \quad n \rightarrow \infty.$$

Beispiele.

(i) *Jeder lineare stetige Operator $A : U \rightarrow V$ ist schwach folgenstetig.*

Das lässt sich leicht nachweisen: Wir haben zu zeigen, dass $A u_n \rightharpoonup A u$ aus $u_n \rightharpoonup u$ folgt, also $f(A u_n) \rightarrow f(A u)$ für alle $f \in V^*$. Für fixiertes $f \in V^*$ ist das zusammengesetzte Funktional F , definiert durch $F(u) := f(A u)$, linear und stetig auf U , also ein Element aus U^* . Deshalb ist wegen der schwachen Konvergenz der Folge $\{u_n\}$ die Eigenschaft $F(u_n) \rightarrow F(u)$ erfüllt. Nach Konstruktion von F bedeutet das aber $f(A u_n) \rightarrow f(A u)$. Aus der Beliebigkeit von f folgt $A u_n \rightharpoonup A u$.

(ii) Das Funktional $f(u) = \|u\|$ ist im Hilbertraum $H = L^2(0, 2\pi)$ nicht schwach folgenstetig. Als (Gegen-)Beispiel betrachten wir die bereits eingeführte Folge der Funktionen $u_n(x) = \sin(nx)/\sqrt{\pi}$. Für $n \rightarrow \infty$ gilt $u_n \rightharpoonup 0$ wie wir wissen, aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = 1 \neq \|0\| = f(0).$$

Die Norm im Hilbertraum $H = L^2(0, 2\pi)$ ist deshalb nicht schwach folgenstetig, ein Problem das in unendlichdimensionalen Banachräumen zu berücksichtigen ist. Deshalb arbeitet man mit schwacher Halbstetigkeit nach unten, vgl. das Beispiel nach 2.12. \diamond

Definition. Eine Teilmenge M eines reellen Banachraums U heißt schwach folgenabgeschlossen, wenn aus $u_n \in M$ und $u_n \rightharpoonup u$, $n \rightarrow \infty$, die Inklusion $u \in M$ folgt. M heißt relativ schwach folgenkompakt, wenn jede Folge von Elementen $u_n \in M$ eine in U schwach konvergente Teilfolge enthält. Ist die Menge M zusätzlich schwach folgenabgeschlossen, dann wird sie schwach folgenkompakt genannt.

Jede stark konvergente Folge ist schwach konvergent, Übungsaufgabe 2.7. Die Umkehrung gilt i.a. nicht, man denke an das obige Beispiel der Sinusfunktionen. Deshalb gibt es i.a. mehr schwach konvergente als stark konvergente Folgen.

Folgerung. Eine schwach folgenabgeschlossene Menge ist stets (stark) abgeschlossen, aber eine (stark) abgeschlossene Menge muss nicht schwach folgenabgeschlossen sein.

Zum Beispiel ist die Einheitskugeloberfläche im Raum $H = L^2(0, 2\pi)$, abgeschlossen aber nicht schwach folgenabgeschlossen: Die Funktionenfolge $\{\sin(nx)/\sqrt{\pi}\}$ gehört der Einheitskugeloberfläche an, nicht aber deren schwacher Limes, die Nullfunktion.

Der nächsten zwei Sätze sind z.B. in [6], [208] oder [213] zu finden.

Satz 2.10 Jede beschränkte Menge eines reflexiven Banachraums ist relativ schwach folgenkompakt.

Es ist vor allem diese Aussage, welche die schwache Konvergenz für die Anwendungen so wertvoll macht – die relative schwache Folgenkompaktheit dient in gewissem Sinne als Ersatz für Präkompaktheit. Aus dem Satz von Eberlein und Šmuljan folgt sogar, dass diese Eigenschaft reflexive Banachräume charakterisiert, [213].

Definition. Eine Teilmenge C eines reellen Banachraums U heißt konvex, wenn mit zwei beliebigen Elementen $u, v \in U$ und jedem $\lambda \in (0, 1)$ auch die konvexe Linearkombination $\lambda u + (1 - \lambda)v$ zu C gehört. Ein auf C definiertes reellwertiges Funktional f heißt konvex, wenn

$$f(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v)$$

für alle $\lambda \in (0, 1)$ und alle Elemente $u, v \in C$ gilt. Es heißt streng konvex, wenn für $u \neq v$ und $\lambda \in (0, 1)$ die obige Ungleichung mit $<$ an Stelle von \leq erfüllt ist.

Satz 2.11 Jede konvexe und abgeschlossene Menge eines Banachraums ist schwach folgenabgeschlossen. Ist der Raum reflexiv und die Menge zusätzlich beschränkt, dann ist sie schwach folgenkompakt.

Der erste Teil des Satzes folgt aus dem Satz von Mazur, der aussagt, dass sich der (schwache) Grenzwert einer schwach konvergenten Folge als (starker) Grenzwert konvexer Linearkombinationen von Elementen dieser Folge darstellen lässt. Dieser Teil gilt schon in normierten Räumen, [20], [208]. Die zweite Aussage ergibt sich aus Satz 2.10.

Satz 2.12 Jedes in einem Banachraum U konvexe und stetige Funktional f ist schwach nach unten halbstetig, d.h. aus $u_n \rightharpoonup u$ für $n \rightarrow \infty$ folgt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(u_n) \geq f(u).$$

Wir verweisen auf [6], [20] oder [208]. Die letzten zwei Sätze unterstreichen die Bedeutung der Konvexität für die Behandlung von Optimierungsaufgaben in Funktionenräumen.

Beispiel. Die Norm ist schwach halbstetig nach unten: Sie ist konvex, weil

$$\|\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2\| \leq \lambda \|u_1\| + (1 - \lambda) \|u_2\| \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

aus Dreiecksungleichung und Homogenität der Norm folgt. Außerdem ist die Norm stetig. Aus dem letzten Satz folgt deren schwache Halbstetigkeit nach unten. \diamond

Bemerkung. Meist werden an Stelle von schwacher Folgenkompaktheit oder schwacher Folgenabgeschlossenheit die Begriffe der schwachen Kompaktheit bzw. schwachen Abgeschlossenheit im Sinne der schwachen Topologie verwendet. Das erschwert das entsprechende Literaturstudium. In reflexiven Banachräumen sind beide Konzepte äquivalent, vgl. [6], Abschn. 6.7 oder [58].

2.5 Existenz optimaler Steuerungen

In Kapitel 2 untersuchen wir Probleme der optimalen Steuerung bei linearen elliptischen Differentialgleichungen. Dabei gehen wir folgenden Grundfragen nach: Existiert eine Lösung des Problems, d.h. eine optimale Steuerung mit zugehörigem optimalen Zustand? Welchen Optimalitätsbedingungen müssen optimale Lösungen genügen? Mit welchen numerischen Methoden kann man diese bestimmen?

Wir studieren zunächst das Problem der Existenz optimaler Steuerungen und beginnen mit dem einfachsten in Abschnitt 2.3 diskutierten Randwertproblem für die Poissongleichung. Gelingt es für ein gegebenes Problem nicht, mit gängigen Methoden die Existenz einer Lösung nachzuweisen, dann verbergen sich dahinter oft Modellierungsfehler, die auch zu numerischen Schwierigkeiten führen können.

Die Aussagen dieses Kapitels beruhen auf folgenden Grundvoraussetzungen an die gegebenen Größen: Das sind ein Ortsgebiet Ω mit Rand Γ , anzusteuernde „gewünschte“ Funktionen y_Ω , y_Γ , Koeffizienten α , β sowie Schranken u_a , u_b , v_a , v_b , die je nach Problemstellung auf $E = \Omega$ oder $E = \Gamma$ definiert sind. Die konkrete Menge E ergibt sich aus dem Zusammenhang heraus.

Voraussetzung 2.13 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sei ein beschränktes Lipschitzgebiet und es seien $\lambda \geq 0$, $y_\Omega \in L^2(\Omega)$, $y_\Gamma \in L^2(\Gamma)$, $\beta \in L^\infty(\Omega)$, $\alpha \in L^\infty(\Gamma)$ mit $\alpha(x) \geq 0$, f.ü. auf Γ , sowie $u_a, u_b, v_a, v_b \in L^2(E)$ mit $u_a(x) \leq u_b(x)$ und $v_a(x) \leq v_b(x)$ für fast alle $x \in E$ gegeben.

Im Weiteren werden wir die Steuerfunktion meist mit u bezeichnen. Diese gängige Bezeichnungsweise geht auf das russische Wort „**u**pravlenie“ für Steuerung zurück. Treten aber in einer Aufgabe sowohl eine verteilte Steuerung als auch eine Randsteuerung auf, dann wird u die Randsteuerung und v die verteilte Steuerung sein.

2.5.1 Optimale stationäre Temperaturquelle

Als ersten Modellfall behandeln wir das Problem der optimalen Temperaturquelle mit homogener Dirichlet-Randbedingung, in Kurzform

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.26)$$

bei den Nebenbedingungen

$$\boxed{\begin{array}{rcl} -\Delta y & = & \beta u \quad \text{in } \Omega \\ y & = & 0 \quad \text{auf } \Gamma \end{array}} \quad (2.27)$$

sowie

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \quad \text{f.ü. in } \Omega. \quad (2.28)$$

Zunächst muss geklärt werden, zu welcher Klasse von Funktionen u überhaupt gehören soll. Stetige Funktionen scheiden zunächst aus, da die Menge aller stetigen u mit $u_a \leq u \leq u_b$ in der Regel nicht die zum Existenzbeweis nötige Kompaktheit aufweist, z.B. für stetige Schranken mit $u_a(x) < u_b(x)$ auf Ω . Außerdem wird sich herausstellen, dass optimale Steuerungen im Fall $\lambda = 0$ Sprungstellen haben können. Ein natürlicher Raum für die Steuerfunktionen ist der Hilbertraum $L^2(\Omega)$. Wir definieren die *Menge der zulässigen Steuerungen* als

$$U_{ad} = \{u \in L^2(\Omega) : u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \text{ f.ü. in } \Omega\}.$$

U_{ad} ist eine nichtleere, konvexe und abgeschlossene Teilmenge von $L^2(\Omega)$, Übungsaufgabe 2.9. Die Elemente von U_{ad} heißen *zulässige Steuerungen*.

Nach Satz 2.4 auf S. 26 existiert zu jedem $u \in U_{ad}$ genau eine schwache Lösung $y \in H_0^1(\Omega)$ der Poissongleichung (2.27). Sie heißt *zu u gehöriger Zustand* und liegt im *Zustandsraum*

$$Y := H_0^1(\Omega).$$

Die Zugehörigkeit von y zu u drücken wir auch durch $y = y(u)$ aus. Verwechslungen mit dem Funktionswert $y(x)$ an der Stelle $x \in \bar{\Omega}$ werden durch den Kontext nicht auftreten.

Definition. Eine Steuerung $\bar{u} \in U_{ad}$ heißt *optimal* und $\bar{y} = y(\bar{u})$ *zugehöriger optimaler Zustand*, wenn

$$J(\bar{y}, \bar{u}) \leq J(y(u), u) \quad \forall u \in U_{ad}$$

erfüllt ist.

Zur Behandlung der Existenzfrage reformulieren wir die Optimalsteuerungsaufgabe als ein auf u reduziertes Optimierungsproblem. Zu jedem $u \in L^2(\Omega)$ existiert nach Satz 2.4 genau eine Lösung $y(u) \in H_0^1(\Omega)$ von (2.27).

Definition. Die durch Satz 2.4 auf S. 26 definierte Abbildung $G : u \mapsto y(u)$, $G : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$, nennen wir *Steuerungs-Zustands-Operator*.

G ist linear und stetig. Die Stetigkeit folgt aus Abschätzung (2.9).

Offenbar ist $H^1(\Omega)$ und damit auch der Teilraum $H_0^1(\Omega)$ linear und stetig eingebettet in $L^2(\Omega)$, denn es gilt $\|y\|_{L^2(\Omega)} \leq \|y\|_{H^1(\Omega)}$. Deshalb können wir G auch als linearen stetigen Operator mit Bild in $L^2(\Omega)$ auffassen, was wir im Weiteren tun. Präziser heißt das, an Stelle von G den Operator $E_Y G$ zu betrachten, wobei $E_Y : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ der Einbettungsoperator ist, der jeder Funktion $y \in Y = H^1(\Omega)$ die gleiche Funktion in $L^2(\Omega)$ zuordnet. Streng genommen müssten wir E_Y zunächst als Operator von $H_0^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ auffassen. Aber $H_0^1(\Omega)$ ist ein Teilraum von $H^1(\Omega)$, die Normen beider

Räume sind äquivalent und wir ersparen uns so im Weiteren die Verwendung verschiedener Einbettungsoperatoren. Der Operator E_Y ist linear und stetig. Wir bezeichnen den so aufgefassten Operator mit S , also

$$S = E_Y G.$$

Im Folgenden wird S immer für den Teil des Zustands y stehen, der im quadratischen Zielfunktional wirklich auftritt. Das kann y selbst sein oder auch die Spur $y|_\Gamma$. Bei der Aufgabe der stationären Temperaturquelle gilt somit

$$S : u \mapsto y(u), \quad S : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega).$$

Die Verwendung von S hat den Vorteil, dass der adjungierte Operator S^* (zur Definition des Begriffs vgl. Abschnitt 2.7) ebenfalls im Raum $L^2(\Omega)$ wirkt. Durch S wird das Problem der optimalen Steuerung (2.26)–(2.28) zur quadratischen Optimierungsaufgabe im Hilbertraum $L^2(\Omega)$,

$$\min_{u \in U_{ad}} f(u) := \frac{1}{2} \|Su - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.29)$$

Das eben definierte Funktional f wird (auf u) *reduziertes Funktional* genannt. Für Aufgabe (2.29) formulieren wir einen einfach zu beweisenden Existenzsatz, der im Weiteren immer wieder angewendet wird.

Satz 2.14 *Es seien reelle Hilberträume $\{U, \|\cdot\|_U\}$ und $\{H, \|\cdot\|_H\}$, eine nichtleere, beschränkte, abgeschlossene und konvexe Menge $U_{ad} \subset U$, ein Element $y_d \in H$ sowie eine Konstante $\lambda \geq 0$ gegeben. Ferner sei $S : U \rightarrow H$ ein linearer und stetiger Operator. Dann besitzt die quadratische Optimierungsaufgabe im Hilbertraum*

$$\min_{u \in U_{ad}} f(u) := \frac{1}{2} \|Su - y_d\|_H^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_U^2 \quad (2.30)$$

eine optimale Lösung \bar{u} . Ist λ positiv oder S injektiv, dann ist diese eindeutig bestimmt.

Beweis: Wegen $f(u) \geq 0$ existiert das Infimum j aller möglichen Funktionswerte

$$j := \inf_{u \in U_{ad}} f(u).$$

Damit gibt es eine Folge $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ aus U_{ad} mit $f(u_n) \rightarrow j$ für $n \rightarrow \infty$. U_{ad} ist beschränkt und abgeschlossen, jedoch – im Gegensatz zum Existenzsatz 1.1 für den endlichdimensionalen Fall – nicht notwendig kompakt. Aber U_{ad} ist als beschränkte, abgeschlossene und konvexe Menge eines Hilbertraums nach Satz 2.11 schwach folgenkompakt (man beachte die Reflexivität von Hilberträumen).

Deshalb existiert eine schwach gegen ein $\bar{u} \in U_{ad}$ konvergente Teilfolge $\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, d.h. für $k \rightarrow \infty$ gilt

$$u_{n_k} \rightharpoonup \bar{u} \quad \bar{u} \in U_{ad}.$$

Mit S ist auch f stetig. Es wäre nun falsch, aus der Stetigkeit von f auf $f(u_{n_k}) \rightarrow f(\bar{u})$ zu schließen. Hier hilft die Konvexität von f . Sie sichert zusammen mit der Stetigkeit von f die schwache Halbstetigkeit von f nach unten,

$$f(\bar{u}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(u_{n_k}) = j.$$

Weil j das Infimum der zulässigen Funktionswerte ist und \bar{u} zu U_{ad} gehört, kann $f(\bar{u})$ nicht kleiner als j werden, also ist nur $f(\bar{u}) = j$ möglich. Damit ist \bar{u} eine optimale Steuerung.

Die zusätzlich behauptete Eindeutigkeit folgt aus der *strengen Konvexität* von f . Für $\lambda > 0$ erhält man diese sofort aus dem zweiten Summanden von f . Im Fall $\lambda = 0$ sichert die Injektivität von S die strenge Konvexität, Übungsaufgabe 2.10. ■

Bemerkung. Im Beweis wurde nur die Eigenschaft von f benutzt, konvex und stetig zu sein. Die Existenzaussage gilt deshalb für jedes konvexe und stetige Funktional $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ im Hilbertraum U . Das gesamte Resultat bleibt nach Satz 2.11 auch in reflexiven Banachräumen U gültig.

Als Folgerung ergibt sich ein Existenzsatz für die elliptische Aufgabe (2.26)–(2.28):

Satz 2.15 *Unter Voraussetzung 2.13 besitzt die Aufgabe (2.26)–(2.28) eine optimale Steuerung \bar{u} . Für $\lambda > 0$ oder $\beta(x) \neq 0$ f.ü. in Ω ist \bar{u} eindeutig bestimmt.*

Beweis: Die Aussage folgt aus dem letzten Satz mit $U = H = L^2(\Omega)$, $y_d = y_\Omega$ und $S = E_Y G$. Die Menge $U_{ad} = \{u \in L^2(\Omega) : u_a \leq u \leq u_b\}$ ist beschränkt, konvex und abgeschlossen. Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 2.14 erfüllt und die zugeordnete Aufgabe (2.30) besitzt eine optimale Lösung \bar{u} . Der Operator S ist unter der obigen Voraussetzung an β im Fall $\lambda = 0$ injektiv, denn $Su = 0$ bedeutet $y = 0$, woraus nach Einsetzen von y in die Laplace-Gleichung $\beta u = 0$ und schließlich $u = 0$ folgt. ■

Bemerkung. Im Beweis von Satz 2.14 ist \bar{u} der Grenzwert einer schwach konvergenten Folge $\{u_{n_k}\}$. Als stetiger linearer Operator ist der Steuerungs-Zustands-Operator $G : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ auch schwach stetig. Daher konvergiert die Zustandsfolge $\{y_{n_k}\}$ in $H_0^1(\Omega)$ schwach gegen $\bar{y} = G\bar{u}$.

Wir lassen jetzt zu, dass eine oder beide der U_{ad} definierenden Ungleichungsrestriktionen fehlen, was formal durch $u_a = -\infty$ und/oder $u_b = +\infty$ ausgedrückt werden kann. Dann ist U_{ad} nicht mehr beschränkt, also auch nicht schwach folgenkompakt.

Satz 2.16 *Ist $\lambda > 0$ und U_{ad} nichtleer, konvex und abgeschlossen, so besitzt die Aufgabe (2.30) genau eine optimale Lösung.*

Beweis: Nach Voraussetzung existiert ein $u_0 \in U_{ad}$. Für $\|u\|_U^2 > 2\lambda^{-1}f(u_0)$ gilt

$$f(u) = \frac{1}{2} \|Su - y_d\|_H^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_U^2 \geq \frac{\lambda}{2} \|u\|_U^2 > f(u_0).$$

Folglich kann man sich bei der Suche nach dem Optimum auf die beschränkte, konvexe und abgeschlossene Menge $U_{ad} \cap \{u \in U : \|u\|_U^2 \leq 2\lambda^{-1}f(u_0)\}$ zurückziehen. Der weitere Beweis verläuft wie beim letzten Satz. ■

Als direkte Folgerung erhalten wir:

Satz 2.17 *Es sei $u_a = -\infty$ und/oder $u_b = +\infty$ sowie $\lambda > 0$. Dann besitzt die Aufgabe (2.26)–(2.28) der optimalen stationären Temperaturquelle unter den gegebenen Voraussetzungen genau eine optimale Steuerung.*

Optimale stationäre Temperaturquelle mit vorgegebener Außentemperatur.

Wir hatten eine weitere Variante des Problems der optimalen stationären Temperaturquelle definiert, bei der an Stelle der homogenen Dirichlet-Randbedingung eine Randbedingung dritter Art gegeben war. Die Zustandsgleichung ist dabei

$$\begin{array}{lll} -\Delta y & = & \beta u \quad \text{in } \Omega \\ \partial_\nu y & = & \alpha(y_a - y) \quad \text{auf } \Gamma \end{array}$$

mit vorgegebener Außentemperatur $y_a \in L^2(\Gamma)$ und einer fast überall nichtnegativen Funktion $\alpha \in L^\infty(\Gamma)$ mit $\int_\Gamma \alpha^2 ds > 0$. Dieses Problem kann weitgehend analog zu dem mit homogener Dirichlet-Randbedingung behandelt werden. Im Unterschied zur letzten Aufgabe ist als Zustandsraum der Raum $Y = H^1(\Omega)$ zu wählen. Satz 2.6 sichert für jedes beliebige Paar $u \in L^2(\Omega)$, $y_a \in L^2(\Gamma)$ genau eine Lösung $y \in Y$ der obigen Randwertaufgabe dritter Art. Mit dem Superpositionsprinzip können wir y in der Form

$$y = y(u) + y_0$$

darstellen, wobei $y(u)$ die Lösung zum Paar $(u, y_a = 0)$ und y_0 die Lösung zum Paar $(u = 0, y_a)$ ist. Die Abbildung $G : u \mapsto y(u)$ ist linear und stetig von $L^2(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$. Wir betrachten G wieder als Operator mit Bild in $L^2(\Omega)$, also $S = E_Y G$, $S : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, so dass der Zustand y in der Form

$$y = S u + y_0$$

geschrieben werden kann. Damit nimmt die Aufgabe die Form

$$\min_{u \in U_{ad}} f(u) := \frac{1}{2} \|S u - (y_\Omega - y_0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.31)$$

an. Die Existenzsätze 2.15 und 2.17 bleiben unter obigen Voraussetzungen offenbar gültig für diese Variante des Problems der stationären Temperaturquelle. Das folgt unmittelbar aus den Sätzen 2.14 bzw. 2.16. Es existiert also eine optimale Steuerung, die eindeutig bestimmt ist, falls $\lambda > 0$ oder $\beta(x) \neq 0$ f.ü. in Ω gilt.

2.5.2 Optimale stationäre Randtemperatur

In gleicher Weise können wir die Aufgabe der optimalen stationären Randtemperatur behandeln,

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 \quad (2.32)$$

bei den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{lll} -\Delta y & = & 0 \quad \text{in } \Omega \\ \partial_\nu y & = & \alpha(u - y) \quad \text{auf } \Gamma \end{array} \quad (2.33)$$

sowie

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \quad \text{f.ü. auf } \Gamma. \quad (2.34)$$

Für Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der obigen elliptischen Aufgabe fordern wir von α zusätzlich

$$\int_\Gamma (\alpha(x))^2 ds(x) > 0. \quad (2.35)$$

Die Steuerfunktion u wird in $L^2(\Gamma)$ gesucht, der zugehörige Zustand y im Zustandsraum $Y = H^1(\Omega)$. Wir definieren

$$U_{ad} = \{u \in L^2(\Gamma) : u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \quad \text{f. ü. auf } \Gamma\}.$$

Nach Satz 2.6 besitzt Gleichung (2.33) für jedes $u \in L^2(\Gamma)$ genau eine schwache Lösung $y \in H^1(\Omega)$, die wir wieder mit $y(u)$ bezeichnen. Der Operator $G : u \mapsto y(u)$ ist stetig von $L^2(\Gamma)$ in $H^1(\Omega)$. Wir fassen G als linearen stetigen Operator von $L^2(\Gamma)$ in $L^2(\Omega)$ auf, verwenden also $S = E_Y G$ und haben $S : L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Omega)$. Es ergibt sich analog zum letzten Satz:

Satz 2.18 *Unter den Voraussetzungen 2.13 von S. 38 sowie (2.35) besitzt die Aufgabe (2.32)–(2.34) der optimalen stationären Randtemperatur eine optimale Steuerung, die für $\lambda > 0$ eindeutig bestimmt ist.*

Auch dieser Satz folgt aus Satz 2.14. Die Frage der Eindeutigkeit von \bar{u} für $\lambda = 0$ behandeln wir nicht, um die sonst nötige Diskussion der Bedeutung von $\partial_\nu y$ zu umgehen. Man kann außerdem Satz 2.16 anwenden, um die letzte Aussage auf unbeschränkte Mengen U_{ad} zu übertragen.

2.5.3 Allgemeinere elliptische Gleichungen und Zielfunktionale *

Analog lässt sich die allgemeinere Aufgabe

$$\min J(y, u, v) := \frac{\lambda_\Omega}{2} \|y - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda_\Gamma}{2} \|y - y_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{\lambda_v}{2} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda_u}{2} \|u\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \quad (2.36)$$

bei den Nebenbedingungen

$\begin{aligned} \mathcal{A}y + c_0 y &= \beta_\Omega v && \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu_{\mathcal{A}}} y + \alpha y &= \beta_\Gamma u && \text{auf } \Gamma_1 \\ y &= 0 && \text{auf } \Gamma_0 \end{aligned}$	(2.37)
--	--------

sowie

$$\begin{aligned} v_a(x) \leq v(x) \leq v_b(x) & \quad \text{f.ü. in } \Omega \\ u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) & \quad \text{f.ü. auf } \Gamma_1 \end{aligned} \quad (2.38)$$

behandeln. Dabei sind der gleichmäßig elliptische Differentialoperator \mathcal{A} und die Mengen Γ_0, Γ_1 wie in Abschnitt 2.3.3 auf S. 30 definiert.

Voraussetzung 2.19 *Es sei Voraussetzung 2.13 von S. 38 erfüllt und zusätzlich seien $c_0 \in L^\infty(\Omega)$, $\beta_\Omega \in L^\infty(\Omega)$, $\beta_\Gamma \in L^\infty(\Gamma_1)$ sowie nichtnegative Konstanten λ_Ω , λ_Γ , λ_v und λ_u gegeben. Die Funktionen c_0 und α sollen eine der im Existenzsatz 2.7 auf S. 30 enthaltenen Voraussetzungen (i) oder (ii) erfüllen.*

Unter dieser Voraussetzung ist die Abbildung $G : (u, v) \mapsto y$ linear und stetig von $L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$. Wir verwenden wieder $S = E_Y G$, $S : L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Omega) \rightarrow$

$L^2(\Omega)$. Der Operator der *Randbeobachtung* $S_\Gamma : (u, v) \mapsto y|_\Gamma$, $S_\Gamma = \tau \circ G$, ist stetig von $L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Omega)$ in $L^2(\Gamma)$. Die Steuerungen sind in den Mengen

$$\begin{aligned} V_{ad} &= \{v \in L^2(\Omega) : v_a(x) \leq v(x) \leq v_b(x) \quad \text{für fast alle } x \in \Omega\} \\ U_{ad} &= \{u \in L^2(\Gamma_1) : u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \quad \text{für fast alle } x \in \Gamma_1\} \end{aligned}$$

gesucht. Das Zielfunktional J nimmt nach Elimination von y die reduzierte Form

$$\begin{aligned} J(y, u, v) = f(u, v) &= \frac{\lambda_\Omega}{2} \|S(u, v) - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda_\Gamma}{2} \|S_\Gamma(u, v) - y_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\quad + \frac{\lambda_v}{2} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda_u}{2} \|u\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \end{aligned}$$

an. Hier treten gleichzeitig eine *verteilte Steuerung* v und eine *Randsteuerung* u auf sowie im Zielfunktional Terme von y im Gebiet und auf dessen Rand (*verteilte Beobachtung* und *Randbeobachtung*). Auch dieses Funktional ist konvex und stetig in (v, u) , so dass Satz 2.14 von S. 40 angewendet werden kann. Der zweite Term des Zielfunktional (2.36) wird nur auf Γ_1 wirksam, denn auf Γ_0 ist $y = 0$ fest vorgegeben.

Wir erhalten die Existenz optimaler Steuerungen $\bar{u} \in L^2(\Gamma_1)$, $\bar{v} \in L^2(\Omega)$ wie in Satz 2.14 auf S. 40 und ihre Eindeutigkeit, falls λ_u und λ_v gleichzeitig positiv sind (strenge Konvexität von f). Für unbeschränktes U_{ad} ergibt sich die Existenz mit $\lambda_u > 0$ und $\lambda_v > 0$ wie in Satz 2.16.

2.6 Differenzierbarkeit in Banachräumen

Gâteaux-Ableitungen

Zur Herleitung notwendiger Optimalitätsbedingungen benötigt man Verallgemeinerungen des bekannten Ableitungsbegriffs. Wir beginnen hier mit der Einführung von Ableitungen erster Ordnung. Später lernen wir auch Ableitungen höherer Ordnung kennen. Die in diesem Abschnitt verwendeten Bezeichnungen U und V haben keinen Bezug zu ihrer späteren Bedeutung bei Optimalsteuerungsproblemen. Im Weiteren sind U und V reelle Banachräume, $\mathcal{U} \subset U$ eine offene Menge und $F : U \supset \mathcal{U} \rightarrow V$ eine Abbildung von U in V .

Definition. Existiert zu gegebenen Elementen $u \in \mathcal{U}$, $h \in U$ der Grenzwert

$$\delta F(u, h) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (F(u + th) - F(u))$$

in V , so heißt dieser Richtungsableitung von F an der Stelle u in Richtung h . Existiert dieser Grenzwert für alle $h \in U$, dann heißt die Abbildung $h \mapsto \delta F(u, h)$ erste Variation von F an der Stelle u .

Diese Abbildung braucht nicht linear zu sein, wie folgendes Beispiel aus [112] zeigt: Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, in Polarkoordinaten gegeben durch $f(x) = r \cos(\varphi)$, besitzt im Nullpunkt die in h nichtlineare erste Variation $\delta f(0, h) = f(h)$.

Definition. Existieren die erste Variation $\delta F(u, h)$ an der Stelle u und ein linearer stetiger Operator $A : U \rightarrow V$, so dass

$$\delta F(u, h) = Ah$$

für alle h aus U gilt, dann heißt F an der Stelle u Gâteaux-differenzierbar und A Gâteaux-Ableitung von F an der Stelle u . Wir schreiben $A = F'(u)$.

Aus der Definition folgt, dass man Gâteaux-Ableitungen wie in den folgenden Beispielen als Richtungsableitungen berechnen kann. Ist $f : U \supset \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle u Gâteaux-differenzierbar, dann ist $f'(u)$ ein Element des dualen Raumes U^* .

Manchmal bezeichnet man die Gâteaux-Ableitung nicht mit $F'(u)$, etwa durch $F'_G(u)$, um sie von der Fréchet-Ableitung $F'(u)$ zu unterscheiden. Für Fréchet-Ableitungen gilt $F'(u) = F'_G(u)$. Da in allen weiteren Beispielen und Aufgaben die Gâteaux-Ableitungen sogar Fréchet-Ableitungen sind, verwenden wir der Einfachheit halber die einheitliche Bezeichnung $F'(u)$.

Beispiele.

(i) Nichtlineares Punktfunktional

Wir wählen $U = \mathcal{U} = C[0, 1]$ und definieren $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(u(\cdot)) = \sin(u(1)).$$

Offenbar ist f wohldefiniert. Es sei $h = h(x)$ eine weitere Funktion aus $C[0, 1]$. Wir berechnen die Richtungsableitung von f an der Stelle $u(\cdot)$ in Richtung $h(\cdot)$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(u + t h) - f(u)) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\sin(u(1) + t h(1)) - \sin(u(1))) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \sin(u(1) + t h(1)) \right|_{t=0} \\ &= \cos(u(1) + t h(1)) h(1) \Big|_{t=0} = \cos(u(1)) h(1). \end{aligned}$$

Damit gilt $\delta f(u, h) = \cos(u(1)) h(1)$. Die Abbildung $h(\cdot) \mapsto \cos(u(1)) h(1)$ ist linear und stetig in $h \in C[0, 1]$, daher existiert überall in U die Gâteaux-Ableitung $f'(u)$ und ist gegeben durch

$$f'(u) h = \cos(u(1)) h(1).$$

Bemerkung. Hier ist es offenbar nicht direkt möglich, $f'(u)$ ohne das Inkrement h aufzuschreiben. Deshalb wird die Bildungsvorschrift für $f'(u) \in U^*$ angegeben.

(ii) Norm-Quadrat im Hilbertraum

Es sei H ein reeller Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_H$ und Norm $\|\cdot\|_H$ und

$$f(u) = \|u\|_H^2.$$

Für die Gâteaux-Ableitung von f folgt

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(u + t h) - f(u)) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\|u + t h\|_H^2 - \|u\|_H^2) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 t (u, h)_H + t^2 \|h\|_H^2}{t} \\ &= 2 (u, h)_H, \end{aligned}$$

also

$$f'(u) h = (2 u, h)_H.$$

Meist identifiziert man den Dualraum H^* von H nach dem Satz von Riesz mit H selbst. Dann folgt für $f(u) = \|u\|_H^2$ die einfache Formel

$$f'(u) = 2u.$$

Den nach der Identifikation von $f'(u)$ mit einem Element von H entstandenen Ausdruck nennt man *Gradient* von f . Wir unterscheiden also zwischen der Ableitung, gegeben durch die Vorschrift $f'(u)h = (2u, h)_H$, und dem Gradienten $f'(u) = 2u$.

(iii) Anwendung auf die Norm in $L^2(\Omega)$

Aus (ii) ergibt sich für

$$f(u) := \|u(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} u(x)^2 dx$$

die Ableitung

$$f'(u)h = \int_{\Omega} 2u(x)h(x) dx$$

oder, nach Identifikation von $L^2(\Omega)^*$ mit $L^2(\Omega)$, der Gradient $(f'(u))(x) = 2u(x)$. \diamond

Alle eben diskutierten Abbildungen haben noch bessere Differentiationseigenschaften. Sie sind sogar Fréchet-differenzierbar.

Fréchet-Ableitungen

Es seien wieder $\{U, \|\cdot\|_U\}$ und $\{V, \|\cdot\|_V\}$ reelle Banachräume und $\mathcal{U} \subset U$ sei offen.

Definition. Eine Abbildung $F : U \supset \mathcal{U} \rightarrow V$ heißt an der Stelle $u \in \mathcal{U}$ Fréchet-differenzierbar, wenn ein Operator $A \in \mathcal{L}(U, V)$ und eine Abbildung $r(u, \cdot) : U \rightarrow V$ mit den folgenden Eigenschaften existieren: Für alle $h \in U$ mit $u + h \in \mathcal{U}$ gilt

$$F(u + h) = F(u) + Ah + r(u, h)$$

und das Restglied r genügt der Beziehung

$$\frac{\|r(u, h)\|_V}{\|h\|_U} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \|h\|_U \rightarrow 0.$$

A heißt Fréchet-Ableitung von F an der Stelle u . Wir schreiben $A = F'(u)$.

Oft ist es einfacher, Fréchet-Differenzierbarkeit durch die Beziehung

$$\frac{\|F(u + h) - F(u) - Ah\|_V}{\|h\|_U} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \|h\|_U \rightarrow 0 \quad (2.39)$$

zu beweisen. Diese ist offensichtlich äquivalent zu $F(u + h) - F(u) - Ah = r(u, h)$ und der Eigenschaft $\|r(u, h)\|_V / \|h\|_U \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$.

Beispiele.

(iv) Folgende Funktion aus [112] ist ein Standardbeispiel dafür, dass Gâteaux-Differenzierbarkeit nicht hinreichend für Fréchet-Differenzierbarkeit ist: Wir definieren $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } y = x^2 \text{ und } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion ist Gâteaux-differenzierbar im Nullpunkt, aber dort nicht einmal stetig. Also kann sie im Nullpunkt nicht Fréchet-differenzierbar sein.

(v) $f(u) = \sin(u(1))$ ist Fréchet-differenzierbar in $C[0, 1]$.

(vi) $f(u) = \|u\|^2$ ist im Hilbertraum Fréchet-differenzierbar, Übungsaufgabe 2.11.

(vii) Jeder lineare stetige Operator A ist Fréchet-differenzierbar mit Restglied null, denn

$$A(u + h) = Au + Ah + 0.$$

„Die Ableitung eines linearen stetigen Operators ist der Operator selbst.“ \diamond

Berechnung von Fréchet-Ableitungen. Jede Fréchet-differenzierbare Abbildung F ist offenbar auch Gâteaux-differenzierbar und beide Ableitungen sind identisch (d.h. $F'_G(u) = F'(u)$, vgl. die Bemerkungen nach der Definition der Gâteaux-Ableitung). Damit kann man die konkrete Form einer Fréchet-Ableitung über die Gâteaux-Ableitung berechnen, also letztlich als Richtungsableitung. Das wurde auf S. 44 bereits vorgeführt.

Satz 2.20 (Kettenregel) *Es seien U, V und Z Banachräume, $\mathcal{U} \subset U, \mathcal{V} \subset V$ offene Mengen und $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ sowie $G : \mathcal{V} \rightarrow Z$ an den Stellen $u \in \mathcal{U}$ bzw. $F(u)$ Fréchet-differenzierbare Abbildungen. Dann ist auch $E = G \circ F$, definiert durch $E(u) = G(F(u))$, Fréchet-differenzierbar an der Stelle u und*

$$E'(u) = G'(F(u)) F'(u).$$

Beispiel. Es seien $\{U, (\cdot, \cdot)_U\}$ sowie $\{H, (\cdot, \cdot)_H\}$ reelle Hilberträume, $z \in H$ fixiert, $S \in \mathcal{L}(U, H)$ und

$$E(u) = \|Su - z\|_H^2.$$

In diesem Fall hat E die Darstellung $E(u) = G(F(u))$ mit $G(v) = \|v\|_H^2$ und $F(u) = Su - z$. Wir wissen aus den Beispielen (ii) und (vi)

$$G'(v)h = (2v, h)_H, \quad F'(u)h = Sh.$$

Die Kettenregel ergibt

$$\begin{aligned} E'(u)h &= G'(F(u))F'(u)h = (2v, F'(u)h)_H \\ &= 2(Su - z, Sh)_H \\ &= 2(S^*(Su - z), h)_U. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Dabei ist $S^* \in \mathcal{L}(H, U)$ der in Abschnitt 2.7 definierte *adjungierte Operator* zu S . \diamond

Bemerkung. Die obigen Aussagen und weitere Informationen zur Differenzierbarkeit von Operatoren und Funktionalen findet zum Beispiel in [41], [112], [116], [118] oder [208].

2.7 Adjungierte Operatoren

Ist A eine (m, n) -Matrix, dann gilt $(Au, v)_{\mathbb{R}^m} = (u, A^\top v)_{\mathbb{R}^n}$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^m$ mit der transponierten Matrix A^\top . Analog kann man in reellen Hilberträumen U, V einem linearen und stetigen Operator $A : U \rightarrow V$ den sogenannten adjungierten Operator A^* zuordnen, der die Umformung $(Au, v)_V = (u, A^*v)_U$ für alle $u \in U$ und

$v \in V$ gestattet. Allgemeiner ist die entsprechende Definition in Banachräumen. Dazu seien zwei reelle Banachräume U und V , ein linearer stetiger Operator $A : U \rightarrow V$ und ein lineares Funktional $f \in V^*$ gegeben. Mit f und A definieren wir ein neues Funktional $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g(u) = f(Au).$$

Offenbar ist g linear und die Abschätzung

$$|g(u)| \leq \|f\|_{V^*} \|A\|_{\mathcal{L}(U,V)} \|u\|_U$$

zeigt die Beschränktheit von g , damit auch die Stetigkeit. Folglich ist dieses Funktional g ein Element des dualen Raums U^* . Für dessen Norm gilt

$$\|g\|_{U^*} = \|A^* f\|_{U^*} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(U,V)} \|f\|_{V^*}. \quad (2.41)$$

Definition. Die eben definierte Zuordnung $f \mapsto g$ heißt zu A adjungierter Operator oder auch dualer Operator und wird hier mit A^* bezeichnet, $A^* : V^* \rightarrow U^*$.

Bemerkung. Heute wird in vielen Lehrbüchern die Schreibweise A' für den adjungierten bzw. dualen Operator bevorzugt. Zur besseren Unterscheidung von der Ableitung verwenden wir hier aber A^* . Der Begriff des adjungierten Operators ist oft für Hilberträume reserviert, wir schreiben deshalb unten für einen Moment A^* ; man beachte den typografischen Unterschied zwischen A^* und A^* . Bei der Definition des adjungierten bzw. dualen Operators halten wir uns an Alt [6] oder Werner [208].

Mit A ist auch A^* stetig, denn aus (2.41) folgt $\|A^*\|_{\mathcal{L}(V^*,U^*)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(U,V)}$. Beide Normen sind sogar gleich, vgl. etwa [6], [208]. Der besseren Lesbarkeit halber verwendet man für den Wert eines Funktionals $f \in V^*$, angewendet auf $v \in V$, gern die folgende, einem Skalarprodukt ähnelnde Schreibweise (duality pairing)

$$f(v) = \langle f, v \rangle_{V^*,V}.$$

Sie verdeutlicht die Bildungsvorschrift des Operators A^* besser, denn unter Verwendung dieser Klammern folgt

$$\langle f, Au \rangle_{V^*,V} = \langle A^* f, u \rangle_{U^*,U} =: \langle u, A^* f \rangle_{U,U^*} \quad \forall f \in V^*, \forall u \in U.$$

Diese Form ist einprägsamer, kann aber zu dem Fehlschluss führen, dass A^* dadurch schon in expliziter Form (wie z.B. in Matrixdarstellung oder als Integraloperator) festgelegt ist. Das ist so nicht zu erwarten, denn ein und dasselbe lineare stetige Funktional $f \in V^*$ kann ganz verschieden dargestellt werden, vgl. (2.24) auf S. 34. Mit Sätzen über eine konkrete Form linearer stetiger Funktionale wie dem Rieszschen Darstellungssatz kann man explizite Ausdrücke für adjungierte Operatoren ableiten. Wir beschränken uns hier auf die Form adjungierter Operatoren im Hilbertraum.

Definition. Es seien $\{U, (\cdot, \cdot)_U\}$ und $\{V, (\cdot, \cdot)_V\}$ reelle Hilberträume und $A : U \rightarrow V$ ein linearer stetiger Operator. Dann heißt A^* Hilbertraum-adjungierter Operator bzw. ebenfalls adjungierter Operator zu A , wenn er folgender Beziehung genügt:

$$(v, Au)_V = (A^* v, u)_U \quad \forall v \in V, u \in U. \quad (2.42)$$

Die Begriffe „dual“, „adjungiert“ und „Hilbertraum-adjungiert“ sind in der Literatur nicht einheitlich definiert. Wir werden in Banach- wie auch in Hilberträumen den Begriff „adjungierter“ Operator verwenden, da sich die Definition aus dem Kontext erschließt. Außerdem kennzeichnen wir duale Räume und adjungierte Operatoren generell durch $*$.

Beispiele.

(i) Es sei $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein durch eine ebenfalls mit A bezeichnete (m, n) -Matrix dargestellter linearer Operator. Dann gilt $(v, Au)_{\mathbb{R}^m} = (A^\top v, u)_{\mathbb{R}^n}$ für alle Vektoren $u \in \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^m$. Deshalb kann der (Hilbertraum-) adjungierte Operator A^* mit der transponierten Matrix A^\top identifiziert werden.

(ii) Im Hilbertraum $L^2(0, 1)$ betrachten wir den Integraloperator

$$(Au)(t) = \int_0^t e^{(t-s)} u(s) ds.$$

Offenbar wirkt A linear und auch stetig im Raum $L^2(0, 1)$, Übungsaufgabe 2.12. Den adjungierten Operator A^* berechnet man so:

$$\begin{aligned} (v, Au)_{L^2(0,1)} &= \int_0^1 v(t) \left(\int_0^t e^{(t-s)} u(s) ds \right) dt \\ &= \int_{t=0}^1 \int_{s=0}^t v(t) e^{(t-s)} u(s) ds dt \\ &= \int_{s=0}^1 \int_{t=s}^1 v(t) e^{(t-s)} u(s) dt ds && \text{(Satz von Fubini)} \\ &= \int_0^1 u(s) \left(\int_s^1 e^{(t-s)} v(t) dt \right) ds \\ &= \int_0^1 \left(\int_t^1 e^{(s-t)} v(s) ds \right) u(t) dt && \text{(Variablenuaustausch)} \\ &= (A^* v, u)_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

Folglich hat der adjungierte Operator die Darstellung

$$(A^* v)(t) = \int_t^1 v(s) e^{(s-t)} ds. \quad \diamond$$

Die oben angewendete Vertauschung der Integrationsreihenfolge bei Integralen mit veränderlicher oberer Grenze wird zum Beispiel in [65] auf S. 203 erläutert.

2.8 Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung

Im Abschnitt 2.5 wurde für ausgewählte Grundtypen elliptischer Optimalsteuerungsprobleme die Existenz und Eindeutigkeit optimaler Steuerungen bewiesen. Hier leiten wir mit Hilfe der ersten Ableitung des Zielfunktionals Bedingungen her, die optimale Lösungen erfüllen müssen. Diese notwendigen Bedingungen gestatten weitreichende Schlüsse über die Form optimaler Steuerungen sowie die Überprüfung numerisch berechneter Steuerungen auf Optimalität. Sie sind auch Grundlage für die Entwicklung numerischer Methoden zur Bestimmung optimaler Steuerungen.

2.8.1 Quadratische Optimierungsaufgabe im Hilbertraum

Wir haben zum Nachweis der Existenz optimaler Steuerungen die Steuerungsprobleme in eine auf u reduzierte quadratische Optimierungsaufgabe der Form

$$\min_{u \in U_{ad}} f(u) := \frac{1}{2} \|Su - y_d\|_H^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_U^2 \quad (2.43)$$

umgewandelt. Darauf kann folgende grundlegende Aussage angewendet werden, die den Schlüssel für die Herleitung notwendiger Optimalitätsbedingungen erster Ordnung bei Beschränkungen an die Steuerung liefert:

Lemma 2.21 *Es sei U ein reeller Banachraum, $C \subset U$ eine konvexe Menge und f ein auf einer C umfassenden offenen Teilmenge von U Gâteaux-differenzierbares reellwertiges Funktional. Mit $\bar{u} \in C$ sei eine Lösung der Aufgabe*

$$\min_{u \in C} f(u)$$

gegeben. Dann ist die folgende Variationsungleichung erfüllt:

$$f'(\bar{u})(u - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u \in C. \quad (2.44)$$

Ist umgekehrt $\bar{u} \in C$ eine Lösung der Variationsungleichung (2.44) und f zusätzlich konvex, dann löst \bar{u} die Aufgabe $\min_{u \in C} f(u)$.

Beweis: Wir wählen $u \in C$ beliebig aus und betrachten die konvexe Linearkombination

$$u(t) = \bar{u} + t(u - \bar{u})$$

für beliebiges $t \in (0, 1]$. Die Konvexität von C sichert $u(t) \in C$. Aus der Optimalität von \bar{u} folgt $f(u(t)) \geq f(\bar{u})$, also auch

$$\frac{1}{t} (f(\bar{u} + t(u - \bar{u})) - f(\bar{u})) \geq 0.$$

Nach Grenzübergang $t \downarrow 0$ ergibt sich $f'(\bar{u})(u - \bar{u}) \geq 0$, die Variationsungleichung.

Die Umkehrung sieht man wie folgt ein: Für beliebiges $u \in C$ folgt in bekannter Weise aus der Konvexität

$$f(u) - f(\bar{u}) \geq f'(\bar{u})(u - \bar{u}).$$

Mit (2.44) ist die rechte Seite der Ungleichung nichtnegativ, woraus $f(u) - f(\bar{u}) \geq 0$, also die Optimalität von \bar{u} folgt. ■

Lemma 2.21 stellt eine *notwendige bzw. im Falle der Konvexität auch hinreichende Optimalitätsbedingung erster Ordnung* dar. Die Aussage bleibt offenbar gültig, wenn nur die Existenz aller Richtungsableitungen von f vorausgesetzt wird. Es kann sogar sinnvoll sein, nur die Ableitungen für Richtungen aus einem dichten Teilraum zu betrachten.

Beispiel. Das für festes $\varepsilon > 0$ auf $C_\varepsilon = \{u \in L^2(a, b) : u(x) \geq \varepsilon \text{ f.ü. in } (a, b)\}$ wohldefinierte Funktional

$$f(u) = \int_a^b \ln(u(x)) \, dx$$

ist an der Stelle $\bar{u}(x) \equiv 1$ nicht Gâteaux-differenzierbar im Sinne von $L^2(a, b)$ (es sei $\varepsilon \in (0, 1)$ angenommen, damit 1 in C_ε liegt). Aber die Richtungsableitung existiert in jeder Richtung $h \in L^\infty(a, b)$,

$$\delta f(\bar{u}, h) = \int_a^b \frac{h(x)}{\bar{u}(x)} dx = \int_a^b h(x) dx.$$

Funktionale dieses Typs treten bei Innere-Punkte-Methoden zur Lösung von Optimierungsverfahren im Funktionenraum auf. \diamond

Wir wenden nun Lemma 2.21 auf die quadratische Optimierungsaufgabe (2.43) an.

Satz 2.22 *Es seien reelle Hilberträume U und H , eine nichtleere und konvexe Menge $U_{ad} \subset U$, $y_d \in H$ sowie eine Konstante $\lambda \geq 0$ gegeben. Ferner sei $S : U \rightarrow H$ ein linearer und stetiger Operator. Das Element $\bar{u} \in U_{ad}$ löst genau dann die Aufgabe (2.43), wenn die folgende Variationsungleichung erfüllt ist:*

$$(S^*(S\bar{u} - y_d) + \lambda \bar{u}, u - \bar{u})_U \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \quad (2.45)$$

Beweis: Der Gradient des Funktionals f in (2.43) ist nach (2.40)

$$f'(\bar{u}) = S^*(S\bar{u} - y_d) + \lambda \bar{u}. \quad (2.46)$$

Die Aussage folgt unmittelbar aus Lemma 2.21. \blacksquare

Oft ist es günstiger, die Variationsungleichung (2.45) in der äquivalenten Form

$$(S\bar{u} - y_d, Su - S\bar{u})_H + \lambda (\bar{u}, u - \bar{u})_U \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad} \quad (2.47)$$

aufzuschreiben, die den adjungierten Operator S^* vermeidet.

Wir wenden die obige Variationsungleichung nacheinander auf unsere verschiedenen Optimalsteuerungsprobleme an und folgen dabei dem in Abschnitt 1.4 skizzierten Schema.

2.8.2 Optimale stationäre Temperaturquelle

Die durch (2.26)–(2.28) auf S. 38 definierte Aufgabe mit Randtemperatur lautet

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

bei

$\begin{aligned} -\Delta y &= \beta u && \text{in } \Omega \\ y &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \quad \text{f.ü. in } \Omega.$$

Den als Abbildung in $L^2(\Omega)$ aufgefassten Lösungsoperator der Poissonsgleichung hatten wir mit S bezeichnet. Eine optimale Steuerung \bar{u} muss nach (2.45) der Variationsungleichung

$$(S^*(S\bar{u} - y_\Omega) + \lambda \bar{u}, u - \bar{u})_{L^2(\Omega)} \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad} \quad (2.48)$$

genügen. Sie enthält den Operator S^* , der noch zu bestimmen ist. Dazu dient folgender Hilfssatz:

Lemma 2.23 *Es seien Funktionen $z, u \in L^2(\Omega)$, $c_0, \beta \in L^\infty(\Omega)$ mit $c_0 \geq 0$ f.ü. in Ω gegeben und y bzw. p die schwachen Lösungen von*

$$\begin{array}{rclcl} -\Delta y + c_0 y & = & \beta u & -\Delta p + c_0 p & = & z & \text{in } \Omega \\ y & = & 0 & p & = & 0 & \text{auf } \Gamma. \end{array}$$

Dann gilt

$$\int_{\Omega} z y \, dx = \int_{\Omega} \beta p u \, dx. \quad (2.49)$$

Beweis: Wir schreiben die Variationsformulierungen für beide obigen Randwertprobleme auf. Für y folgt mit Testfunktion $p \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (\nabla y \cdot \nabla p + c_0 y p) \, dx = \int_{\Omega} \beta p u \, dx,$$

für p gilt mit Testfunktion $y \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (\nabla p \cdot \nabla y + c_0 p y) \, dx = \int_{\Omega} z y \, dx.$$

Die linken Seiten sind gleich, also auch die rechten. Daraus folgt die Richtigkeit der Behauptung. ■

Lemma 2.24 *Der adjungierte Operator $S^* : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ ist im Fall der Poisson-Gleichung (2.27) gegeben durch die Vorschrift*

$$S^* z := \beta p,$$

wobei $p \in H_0^1(\Omega)$ die schwache Lösung der folgenden Poisson-Gleichung darstellt:

$$\begin{array}{rcl} -\Delta p & = & z \quad \text{in } \Omega \\ p & = & 0 \quad \text{auf } \Gamma. \end{array}$$

Beweis: Der Operator S^* ist gemäß (2.42) auf S. 48 durch

$$(z, Su)_{L^2(\Omega)} = (S^* z, u)_{L^2(\Omega)} \quad \forall z \in L^2(\Omega), \quad \forall u \in L^2(\Omega)$$

festgelegt. Die Aussage folgt aus Lemma 2.23 mit $c_0 = 0$ und $y = Su$. Wir erhalten

$$(z, Su)_{L^2(\Omega)} = (z, y)_{L^2(\Omega)} = (\beta p, u)_{L^2(\Omega)}.$$

Die Zuordnung $z \mapsto \beta p$ ist nach Satz 2.4 von S. 26 linear und stetig von $L^2(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$. Da z und u beliebig wählbar sind und S^* eindeutig bestimmt ist, haben wir $S^* z = \beta p$ bewiesen. ■

Die Konstruktion von S^* erfolgte über Lemma 2.23 und ist intuitiv nicht sehr verständlich. Wir werden in Abschnitt 2.10 mit der formalen *Lagrange-Technik* ein Hilfsmittel kennen lernen, mit dem die Form der partiellen Differentialgleichung zur Ermittlung von S^* leicht und zuverlässig zu ermitteln ist.

Bemerkungen. Eigentlich wissen wir, dass das Bild von $S = E_Y G$ im Raum $H_0^1(\Omega)$ liegt. Hätten wir an Stelle von S den Operator $G : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ betrachtet, dann wäre (bei Identifikation von $L^2(\Omega)^*$ mit $L^2(\Omega)$) der adjungierte Operator $G^* : H_0^1(\Omega)^* \rightarrow L^2(\Omega)$ aufgetreten. Durch Verwendung von $S : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ haben wir den Raum $H_0^1(\Omega)^*$ umgangen. Das schränkt die Anwendbarkeit der bisherigen Theorie etwas ein, ist aber einfacher und für unsere Zwecke vorerst ausreichend. Das Arbeiten in $H_0^1(\Omega)^*$ wird kurz in Abschnitt 2.13 behandelt. Man identifiziert dabei aus guten Gründen $H_0^1(\Omega)^*$ nicht mit dem Hilbertraum $H_0^1(\Omega)$.

Adjungierter Zustand und Optimalitätssystem

Die Variationsungleichung (2.48) lässt sich bei Kenntnis von S^* leicht umformen.

Definition. Die schwache Lösung $p \in H_0^1(\Omega)$ der adjungierten Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta p &= \bar{y} - y_\Omega & \text{in } \Omega \\ p &= 0 & \text{auf } \Gamma \end{aligned} \quad (2.50)$$

bezeichnet man als den zu \bar{y} gehörigen adjungierten Zustand.

Die rechte Seite der adjungierten Gleichung ist aus $L^2(\Omega)$, denn wir haben $y_\Omega \in L^2(\Omega)$ vorausgesetzt und wissen $\bar{y} \in Y = H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Nach Satz 2.4 auf S. 26 existiert genau eine Lösung $p \in H_0^1(\Omega)$ von (2.50). Mit $z = \bar{y} - y_\Omega$ erhalten wir aus Lemma 2.24

$$S^*(S\bar{u} - y_\Omega) = S^*(\bar{y} - y_\Omega) = \beta p,$$

also schließlich nach (2.48)

$$(\beta p + \lambda \bar{u}, u - \bar{u})_{L^2(\Omega)} \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}.$$

Aus der Variationsungleichung (2.44) folgt deshalb direkt der

Satz 2.25 *Ist \bar{u} optimale Steuerung des Problems der optimalen stationären Temperaturquelle (2.26)–(2.28) auf S. 38 und \bar{y} der zugehörige Zustand, dann existiert genau eine schwache Lösung p der adjungierten Gleichung (2.50), so dass die Variationsungleichung*

$$\int_{\Omega} (\beta(x)p(x) + \lambda \bar{u}(x))(u(x) - \bar{u}(x)) \, dx \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad} \quad (2.51)$$

erfüllt ist. Umgekehrt ist jedes $\bar{u} \in U_{ad}$ optimal, das mit dem zugehörigen Zustand $\bar{y} = y(\bar{u})$ und der Lösung p von (2.50) der obigen Variationsungleichung (2.51) genügt.

Die Umkehrung der Aussage gilt wegen der Konvexität von f . Eine Steuerung u ist also genau dann optimal für (2.26)–(2.28), wenn sie gemeinsam mit y und p dem folgenden Optimalitätssystem genügt:

$$\boxed{\begin{aligned} -\Delta y &= \beta u & -\Delta p &= y - y_\Omega \\ y|_\Gamma &= 0 & p|_\Gamma &= 0 \\ & & u &\in U_{ad} \\ (\beta p + \lambda u, v - u)_{L^2(\Omega)} &\geq 0 & \forall v &\in U_{ad}. \end{aligned}} \quad (2.52)$$

Punktweise Diskussion der Optimalitätsbedingungen

Im Weiteren formulieren wir die Variationsungleichung (2.51) um und diskutieren sie vollständig aus. Nach Umstellen folgt

$$\int_{\Omega} (\beta p + \lambda \bar{u}) \bar{u} \, dx \leq \int_{\Omega} (\beta p + \lambda \bar{u}) u \, dx \quad \forall u \in U_{ad},$$

also

$$\int_{\Omega} (\beta p + \lambda \bar{u}) \bar{u} \, dx = \min_{u \in U_{ad}} \int_{\Omega} (\beta p + \lambda \bar{u}) u \, dx. \quad (2.53)$$

Folgerung Setzen wir den Klammerausdruck in (2.53) als bekannt voraus, dann ergibt sich \bar{u} als Lösung einer linearen Optimierungsaufgabe im Funktionenraum.

Diese einfache Beobachtung ist Grundlage des bedingten Gradientenverfahrens, siehe Abschnitt 2.12.1. Es ist intuitiv einleuchtend, dass die Variationsungleichung auch *punktweise* formuliert werden kann.

Lemma 2.26 Die Variationsungleichung (2.51) gilt genau dann, wenn für fast alle $x \in \Omega$ die Beziehungen

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u_a(x), & \text{falls } \beta(x)p(x) + \lambda \bar{u}(x) > 0 \\ \in [u_a(x), u_b(x)], & \text{falls } \beta(x)p(x) + \lambda \bar{u}(x) = 0 \\ u_b(x), & \text{falls } \beta(x)p(x) + \lambda \bar{u}(x) < 0 \end{cases} \quad (2.54)$$

erfüllt sind. Äquivalent dazu ist die folgende punktweise Variationsungleichung in \mathbb{R} :

$$(\beta(x)p(x) + \lambda \bar{u}(x))(v - \bar{u}(x)) \geq 0 \quad \forall v \in [u_a(x), u_b(x)], \text{ für fast alle } x \in \Omega. \quad (2.55)$$

Beweis: (i) Wir zeigen zuerst (2.51) \Rightarrow (2.54) und nehmen dazu an, dass (2.54) nicht erfüllt ist. Dann definieren wir die messbaren Mengen

$$\begin{aligned} A_+(\bar{u}) &= \{x \in \Omega : \beta(x)p(x) + \lambda \bar{u}(x) > 0\}, \\ A_-(\bar{u}) &= \{x \in \Omega : \beta(x)p(x) + \lambda \bar{u}(x) < 0\}, \end{aligned}$$

wobei $\bar{u}(\cdot)$ ein beliebiger Repräsentant der für \bar{u} stehenden Äquivalenzklasse ist. Analog seien u_a, u_b beliebige aber feste Repräsentanten ihrer entsprechenden Äquivalenzklassen. Haben wir die Aussage für die so gewählten Funktionen u_a, u_b bewiesen, dann gilt sie offenbar auch für alle anderen Funktionen aus ihren Äquivalenzklassen.

Unter unserer Annahme existiert eine Menge $E_+ \subset A_+(\bar{u})$ von positivem Maß mit $\bar{u}(x) > u_a(x)$ für alle $x \in E_+$ oder eine Menge $E_- \subset A_-(\bar{u})$ von positivem Maß mit $\bar{u}(x) < u_b(x)$ für alle $x \in E_-$. Im ersten Fall definieren wir

$$u(x) = \begin{cases} u_a(x) & \text{für } x \in E_+, \\ \bar{u}(x) & \text{für } x \in \Omega \setminus E_+. \end{cases}$$

Es folgt

$$\int_{\Omega} (\beta(x)p(x) + \lambda \bar{u}(x))(u(x) - \bar{u}(x)) \, dx = \int_{E_+} (\beta(x)p(x) + \lambda \bar{u}(x))(u_a(x) - \bar{u}(x)) \, dx < 0,$$

denn der erste Faktor ist auf E_+ positiv und der zweite negativ. Das ist ein Widerspruch zu (2.51). Analog gehen wir im zweiten Fall vor, indem wir $u(x) = u_b(x)$ auf E_- setzen und $u(x) = \bar{u}(x)$ in den restlichen Punkten.

(ii) Aus (2.54) folgt (2.55): Zum Beispiel gilt fast überall auf $A_+(\bar{u})$ die Beziehung $\bar{u}(x) = u_a(x)$ und damit für jede reelle Zahl $v \in [u_a(x), u_b(x)]$ die Ungleichung $v - \bar{u}(x) \geq 0$. Aus $\beta(x)p(x) + \lambda \bar{u}(x) > 0$ in $A_+(\bar{u})$ ergibt sich fast überall in A_+

$$(\beta(x)p(x) + \lambda \bar{u}(x))(v - \bar{u}(x)) \geq 0.$$

Analog schließen wir auf diese Ungleichung f.ü. in $A_-(\bar{u})$. Sie gilt erst recht in allen Punkten, in denen $\beta(x)p(x) + \lambda \bar{u}(x)$ verschwindet. Daraus folgt (2.55) fast überall in Ω .

(iii) (2.55) impliziert (2.51): Wir wählen dazu $u \in U_{ad}$ beliebig aus. Wir haben $\bar{u}(x) \in [u_a(x), u_b(x)]$ für fast alle $x \in \Omega$ und aus (2.55) folgt mit $v := u(x)$

$$(\beta(x)p(x) + \lambda \bar{u}(x))(u(x) - \bar{u}(x)) \geq 0 \quad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Nach Integration ergibt sich die Variationsungleichung (2.51). ■

Durch einfaches Umstellen erhält man aus der punktweisen Variationsungleichung (2.55)

$$(\beta(x)p(x) + \lambda \bar{u}(x)) \bar{u}(x) \leq (\beta(x)p(x) + \lambda \bar{u}(x)) v \quad \forall v \in [u_a(x), u_b(x)] \quad (2.56)$$

für fast alle $x \in \Omega$. Hier, wie auch in (2.55), ist v eine reelle Zahl und keine Funktion!

Satz 2.27 *Eine Steuerung $\bar{u} \in U_{ad}$ ist genau dann optimal für (2.26)–(2.28), wenn mit dem zugehörigen adjungierten Zustand p aus (2.50) eine der folgenden zwei Minimumbedingungen für fast alle $x \in \Omega$ erfüllt ist: Das schwache Minimumprinzip*

$$\min_{v \in [u_a(x), u_b(x)]} (\beta(x)p(x) + \lambda \bar{u}(x)) v = (\beta(x)p(x) + \lambda \bar{u}(x)) \bar{u}(x)$$

oder das Minimumprinzip

$$\min_{v \in [u_a(x), u_b(x)]} (\beta(x)p(x)v + \frac{\lambda}{2} v^2) = \beta(x)p(x)\bar{u}(x) + \frac{\lambda}{2} \bar{u}(x)^2.$$

Beweis: Das schwache Minimumprinzip ist weiter nichts als eine Umformulierung von (2.56). Ebenso einfach sieht man das Minimumprinzip ein: Eine reelle Zahl \bar{v} löst für festes x genau dann die (konvexe) quadratische Optimierungsaufgabe in \mathbb{R} ,

$$\min_{v \in [u_a(x), u_b(x)]} g(v) := \beta(x)p(x)v + \frac{\lambda}{2} v^2,$$

wenn die Variationsungleichung $g'(\bar{v})(v - \bar{v}) \geq 0 \quad \forall v \in [u_a(x), u_b(x)]$ erfüllt ist, also

$$(\beta(x)p(x) + \lambda \bar{v})(v - \bar{v}) \geq 0 \quad \forall v \in [u_a(x), u_b(x)].$$

Die Minimumbedingung folgt mit $\bar{v} = \bar{u}(x)$. ■

Die hergeleiteten punktweisen Bedingungen können noch weiter ausgewertet werden. Je nach Wahl von λ ergeben sich unterschiedliche Konsequenzen:

Fall 1, $\lambda = 0$: Aus (2.54) ergibt sich fast überall

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u_a(x), & \text{falls } \beta(x)p(x) > 0 \\ u_b(x), & \text{falls } \beta(x)p(x) < 0. \end{cases} \quad (2.57)$$

In den Punkten $x \in \Omega$ mit $\beta(x)p(x) = 0$ liefert diese Beziehung keine Aussage über $\bar{u}(x)$. Gilt $\beta(x)p(x) \neq 0$ f.ü. auf Ω , dann liegt $\bar{u}(x)$ fast überall an der oberen Grenze $u_b(x)$ oder an der unteren Grenze $u_a(x)$ des zulässigen Bereiches. Es liegt eine *Bang-Bang-Steuerung* vor. So bezeichnet man eine Steuerungsfunktion, die fast überall nur die Werte der Schranken u_a und u_b annimmt.

Fall 2, $\lambda > 0$: Wir interpretieren die zweite Beziehung in (2.54) als „ \bar{u} ist unbestimmt, falls $\lambda \bar{u} + \beta p = 0$ “ gilt. Das stimmt eigentlich nicht ganz, denn die Gleichung $\lambda \bar{u} + \beta p = 0$ liefert mit $\bar{u}(x) = -\lambda^{-1} \beta(x) p(x)$ zumindest einen Hinweis auf eine vollständige Diskussion der Minimumbedingung:

Satz 2.28 *Im Fall $\lambda > 0$ ist \bar{u} genau dann optimale Steuerung der Aufgabe (2.26)–(2.28), wenn mit dem zugehörigen adjungierten Zustand p die Projektionsformel*

$$\bar{u}(x) = \mathbb{P}_{[u_a(x), u_b(x)]} \left\{ -\frac{1}{\lambda} \beta(x) p(x) \right\} \quad (2.58)$$

für fast alle $x \in \Omega$ erfüllt ist. Dabei bezeichnet $\mathbb{P}_{[a,b]}$ für $a \leq b \in \mathbb{R}$ die Projektion von \mathbb{R} auf $[a, b]$,

$$\mathbb{P}_{[a,b]}(u) := \min \{b, \max\{a, u\}\}.$$

Beweis: Die Aussage folgt direkt aus Satz 2.27: Die Lösung der im Minimumprinzip formulierten quadratischen Optimierungsaufgabe in \mathbb{R} ,

$$\min_{v \in [u_a(x), u_b(x)]} \left\{ \beta(x) p(x) v + \frac{\lambda}{2} v^2 \right\}$$

ist durch die Projektionsformel (2.58) gegeben, Übungsaufgabe 2.13. ■

Fall 2a, $\lambda > 0$ und $\mathbf{U}_{\text{ad}} = \mathbf{L}^2(\Omega)$: Das ist der Fall ohne Beschränkungen an die Steuerung. Hier folgt aus (2.58) oder direkt aus (2.55)

$$\bar{u} = -\frac{1}{\lambda} \beta p. \quad (2.59)$$

Durch Einsetzen in die Zustandsgleichung erhalten wir das Optimalitätssystem

$\begin{aligned} -\Delta y &= -\lambda^{-1} \beta^2 p & -\Delta p &= y - y_\Omega \\ y _\Gamma &= 0 & p _\Gamma &= 0, \end{aligned}$
--

ein gekoppeltes System zweier elliptischer Randwertprobleme zur Bestimmung von $y = \bar{y}$ und p . Nach Berechnung von p ergibt sich die gesuchte optimale Steuerung \bar{u} aus (2.59).

Formulierung als Karush-Kuhn-Tucker-System

Die Variationsungleichung (2.51) kann in den Optimalitätssystemen durch Einführung von Lagrangeschen Multiplikatoren als weitere Gleichung formuliert werden. Die zugehörige Methode wurde bereits in Abschnitt 1.4.7 erläutert.

Satz 2.29 *Die Variationsungleichung (2.51) ist äquivalent zur Existenz von fast überall nichtnegativen Funktionen μ_a, μ_b aus $L^2(\Omega)$, so dass die Gleichung*

$$\beta p + \lambda \bar{u} - \mu_a + \mu_b = 0 \quad (2.60)$$

und die Komplementaritätsbedingungen

$$\mu_a(x) (u_a(x) - \bar{u}(x)) = \mu_b(x) (\bar{u}(x) - u_b(x)) = 0 \quad (2.61)$$

fast überall in Ω erfüllt sind.

Beweis. (i) Wir zeigen zuerst, dass (2.60) und (2.61) aus der Variationsungleichung (2.51) folgen. Dazu definieren wir analog zu Abschnitt 1.4.7

$$\begin{aligned}\mu_a(x) &:= (\beta(x)p(x) + \lambda\bar{u}(x))_+ \\ \mu_b(x) &:= (\beta(x)p(x) + \lambda\bar{u}(x))_-, \end{aligned} \quad (2.62)$$

wobei für $s \in \mathbb{R}$ die Werte s_+ bzw. s_- wie üblich durch

$$s_+ = \frac{1}{2}(s + |s|), \quad s_- = \frac{1}{2}(|s| - s)$$

erklärt sind. Dann gilt nach Definition $\mu_a \geq 0$, $\mu_b \geq 0$ und $\beta p + \lambda\bar{u} = \mu_a - \mu_b$, also (2.60). Wegen (2.54) sind außerdem für fast alle $x \in \Omega$ folgende Implikationen erfüllt:

$$\begin{aligned}(\beta p + \lambda\bar{u})(x) > 0 &\Rightarrow \bar{u}(x) = u_a(x) \\ (\beta p + \lambda\bar{u})(x) < 0 &\Rightarrow \bar{u}(x) = u_b(x) \\ u_a(x) < \bar{u}(x) < u_b(x) &\Rightarrow (\beta p + \lambda\bar{u})(x) = 0. \end{aligned}$$

Deshalb gilt für fast alle $x \in \Omega$ die Beziehung (2.61), denn stets ist in beiden Produkten mindestens einer der Faktoren null. Beispielsweise folgt aus $\mu_a(x) > 0$ sofort $\mu_b(x) = 0$, daher $(\beta p + \lambda\bar{u})(x) = \mu_a > 0$ und somit $\bar{u}(x) - u_a(x) = 0$. Für fast alle x mit $\bar{u}(x) > u_a(x)$ muss $(\beta p + \lambda\bar{u})(x) \leq 0$ erfüllt sein und daher $\mu_a(x) = 0$ nach (2.62). Deshalb verschwindet das erste Produkt in (2.61) fast überall.

(ii) Umgekehrt seien (2.60)–(2.61) erfüllt mit $\bar{u} \in U_{ad}$ und es sei $u \in U_{ad}$ gegeben. Dann sind für x drei verschiedene Fälle zu diskutieren:

Für fast alle x mit $u_a(x) < \bar{u}(x) < u_b(x)$ folgt aus den Komplementaritätsbedingungen (2.61) die Beziehung $\mu_a(x) = \mu_b(x) = 0$ und aus Gleichung (2.60)

$$(\beta p + \lambda\bar{u})(x) = 0,$$

somit auch

$$(\beta(x)p(x) + \lambda\bar{u}(x))(u(x) - \bar{u}(x)) \geq 0. \quad (2.63)$$

Im Fall $u_a(x) = \bar{u}(x)$ erhalten wir $u(x) - \bar{u}(x) \geq 0$ aus $u \in U_{ad}$. Außerdem ergibt (2.61) sofort $\mu_b(x) = 0$. Aus Gleichung (2.60) folgt die Beziehung

$$\beta(x)p(x) + \lambda\bar{u}(x) = \mu_a(x) \geq 0,$$

daher wieder Ungleichung (2.63). Im Fall $\bar{u}(x) = u_b(x)$ argumentiert man analog. Somit ist für fast alle $x \in \Omega$ Ungleichung (2.63) erfüllt, woraus sich nach Integration die Variationsungleichung (2.51) ergibt. ■

Als Folgerung erhalten wir das folgende *Karush-Kuhn-Tucker-System* an Stelle des bisher mit der Variationsungleichung aufgeschriebenen Optimalitätssystems (2.52):

$$\boxed{\begin{aligned} -\Delta y &= \beta u & -\Delta p &= y - y_\Omega \\ y|_\Gamma &= 0 & p|_\Gamma &= 0 \\ \beta p + \lambda u - \mu_a + \mu_b &= 0 \\ u_a \leq u \leq u_b, \quad \mu_a &\geq 0, \quad \mu_b \geq 0, \\ \mu_a (u_a - u) &= \mu_b (u - u_b) = 0. \end{aligned}} \quad (2.64)$$

Die nichtdifferentiellen Beziehungen sind hier für fast alle x in Ω zu verstehen.

Definition. Die in Satz 2.29 definierten Funktionen $\mu_a, \mu_b \in L^2(\Omega)$ heißen Lagrangesche Multiplikatoren zu den Ungleichungsrestriktionen $u_a \leq u$ bzw. $u \leq u_b$.

Bemerkung. Dieses System kann auch direkt über eine Lagrangefunktion hergeleitet werden, wenn man die Existenz der Multiplikatoren $\mu_a, \mu_b \in L^2(\Omega)$ voraussetzt, siehe Abschnitt 6.1. Gerade diese ist aber aus der bekannten Karush-Kuhn-Tucker-Theorie im Banachraum nicht ohne Weiteres zu erhalten, weil die Menge der fast überall nichtnegativen Funktionen in $L^2(\Omega)$ kein Inneres besitzt. Diese Schwierigkeit, die ausführlich in Abschnitt 6.1 diskutiert wird, haben wir durch explizite Definition der Multiplikatoren μ_a, μ_b umgangen.

Der reduzierte Gradient des Zielfunktional

Der adjungierte Zustand erleichtert die Angabe des reduzierten Gradienten, also des Gradienten von $f(u) = J(y(u), u)$. Die im nächsten Lemma enthaltene Darstellung für $f'(u)$ wird für fast alle in diesem Buch behandelten Optimalsteuerungsprobleme zutreffen.

Lemma 2.30 *Der Gradient des Funktional*

$$f(u) = J(y(u), u) = \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

ist gegeben durch

$$f'(u) = \beta p + \lambda u,$$

wobei $p \in H_0^1(\Omega)$ die schwache Lösung der adjungierten Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta p &= y - y_\Omega && \text{in } \Omega \\ p &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned} \tag{2.65}$$

darstellt und $y = y(u)$ der zu u gehörige Zustand ist.

Beweis: Unter Verwendung von Formel (2.46) auf S. 51 folgt aus Lemma 2.24

$$f'(u)h = (S^*(Su - y_\Omega) + \lambda u, h)_{L^2(\Omega)} = (\beta p + \lambda u, h)_{L^2(\Omega)}.$$

Nach dem Satz von Riesz wird $f'(u)$ mit $\beta p + \lambda u$ identifiziert. ■

Bringt man S^* auf die rechte Seite des Skalarprodukts in (2.48) auf S. 51, dann erhält man die äquivalente Form

$$(S\bar{u} - y_\Omega, Su - S\bar{u})_{L^2(\Omega)} + \lambda(\bar{u}, u - \bar{u})_{L^2(\Omega)} \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \tag{2.66}$$

Mit $\bar{y} = S\bar{u}$, $y = Su$ folgt

$$f'(\bar{u})(u - \bar{u}) = (\bar{y} - y_\Omega, y - \bar{y})_{L^2(\Omega)} + \lambda(\bar{u}, u - \bar{u})_{L^2(\Omega)} \geq 0. \tag{2.67}$$

Die Form (2.67) der Variationsungleichung gestattet die Anwendung des nachfolgenden Lemmas 2.31 zur Bestimmung von S^* . Der Operator S^* tritt dort nicht explizit auf, steht aber hinter der Konstruktion. Diese Herangehensweise werden wir im Weiteren bevorzugen.

2.8.3 Stationäre Temperaturquelle und Randbedingung dritter Art

In diesem Abschnitt behandeln wir das unten stehende Optimalsteuerungsproblem (2.69) –(2.71) und beginnen mit einer zu Lemma 2.23 analogen Aussage, die direkt zur Bestimmung der adjungierten Gleichung angewendet werden kann.

Lemma 2.31 *Es seien Funktionen $a_\Omega, v \in L^2(\Omega)$, $a_\Gamma, u \in L^2(\Gamma)$, $c_0, \beta_\Omega \in L^\infty(\Omega)$, $\alpha, \beta_\Gamma \in L^\infty(\Gamma)$ gegeben und fast überall $\alpha \geq 0$, $c_0 \geq 0$ erfüllt. Mit y bzw. p seien die schwachen Lösungen der elliptischen Randwertprobleme*

$$\begin{aligned} -\Delta y + c_0 y &= \beta_\Omega v & -\Delta p + c_0 p &= a_\Omega \\ \partial_\nu y + \alpha y &= \beta_\Gamma u & \partial_\nu p + \alpha p &= a_\Gamma \end{aligned}$$

bezeichnet. Dann gilt

$$\int_\Omega a_\Omega y \, dx + \int_\Gamma a_\Gamma y \, ds = \int_\Omega \beta_\Omega p v \, dx + \int_\Gamma \beta_\Gamma p u \, ds. \quad (2.68)$$

Beweis: Wir schreiben die Variationsformulierungen für beide obigen Randwertprobleme auf und setzen y und p wechselseitig als Testfunktion ein. Für y folgt mit Testfunktion $p \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega (\nabla y \cdot \nabla p + c_0 y p) \, dx + \int_\Gamma \alpha y p \, ds = \int_\Omega \beta_\Omega p v \, dx + \int_\Gamma \beta_\Gamma p u \, ds,$$

für p erhalten wir mit Testfunktion $y \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega (\nabla p \cdot \nabla y + c_0 p y) \, dx + \int_\Gamma \alpha p y \, ds = \int_\Omega a_\Omega y \, dx + \int_\Gamma a_\Gamma y \, ds.$$

Die linken Seiten sind gleich, also auch die rechten. Daraus folgt die Behauptung. ■

Mit diesem Resultat können wir nun leicht die Aufgabe der optimalen stationären Temperaturquelle mit Randbedingung dritter Art behandeln, die wir der Einfachheit halber noch als homogen annehmen. Wir lassen auch einen Randterm im Zielfunktional zu. Die Aufgabe lautet

$$\min J(y, u) := \frac{\lambda_\Omega}{2} \|y - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda_\Gamma}{2} \|y - y_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.69)$$

bei

$$\boxed{\begin{aligned} -\Delta y &= \beta u & \text{in } \Omega \\ \partial_\nu y + \alpha y &= 0 & \text{auf } \Gamma, \end{aligned}} \quad (2.70)$$

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \quad \text{f.ü. in } \Omega. \quad (2.71)$$

Wir setzen $\lambda, \lambda_\Omega, \lambda_\Gamma \geq 0$, $0 \leq \alpha \in L^\infty(\Gamma)$, $\|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma)} \neq 0$, $y_\Omega \in L^2(\Omega)$, $y_\Gamma \in L^2(\Gamma)$ voraus. Für die optimalen Größen \bar{u}, \bar{y} lauten die Optimalitätsbedingungen

$$\int_\Omega (\beta p + \lambda \bar{u})(u - \bar{u}) \, dx \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad},$$

wobei der adjungierte Zustand p durch

$$\begin{aligned} -\Delta p &= \lambda_\Omega (\bar{y} - y_\Omega) && \text{in } \Omega \\ \partial_\nu p + \alpha p &= \lambda_\Gamma (\bar{y} - y_\Gamma) && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

definiert ist. Die Herleitung dieser Beziehungen erfolgt wie im nächsten Abschnitt mit Lemma 2.31; Übungsaufgabe 2.14.

2.8.4 Optimale stationäre Randtemperatur

Das Randsteuerungsproblem (2.32)–(2.34) von S. 42 lautete

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2$$

bei

$$\begin{aligned} -\Delta y &= 0 && \text{in } \Omega \\ \partial_\nu y + \alpha y &= \alpha u && \text{auf } \Gamma, \end{aligned}$$

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \quad \text{f.ü. auf } \Gamma.$$

Der Lösungsoperator $G : u \mapsto y(u)$ bildet nach Satz 2.6 den Raum $L^2(\Gamma)$ linear und stetig in $H^1(\Omega)$ ab, aber wir betrachten ihn wieder als Operator mit Bild in $L^2(\Omega)$, also $S = E_Y G : L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Omega)$ mit dem Einbettungsoperator $E_Y : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$. Das Zielfunktional hat damit die Gestalt

$$J(y, u) = f(u) = \frac{1}{2} \|Su - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

Die weiteren Schritte verlaufen analog zu Abschnitt 2.8.2. Dazu sei $\bar{u} \in U_{ad}$ optimale Steuerung und \bar{y} der zugehörige Zustand. Wir wenden Satz 2.22 von S. 51 an und bringen die entstehende Variationsungleichung wie in (2.67) auf die Form

$$f'(\bar{u})(u - \bar{u}) = (\bar{y} - y_\Omega, y - \bar{y})_{L^2(\Omega)} + \lambda (\bar{u}, u - \bar{u})_{L^2(\Gamma)} \geq 0. \quad (2.72)$$

Mit $y := y - \bar{y}$ hat $(\bar{y} - y_\Omega, y - \bar{y})$ die gleiche Form wie die linke Seite von (2.68), wenn wir dort $a_\Omega = \bar{y} - y_\Omega$ und $a_\Gamma = 0$ wählen. Wir wenden nun Lemma 2.31 mit dieser Wahl und $\beta_\Omega = 0$, $\beta_\Gamma = \alpha$, $c_0 = 0$ an und können $y - \bar{y}$ durch einen Term mit $u - \bar{u}$ ersetzen, indem wir p als Lösung der folgenden adjungierten Gleichung einführen:

$$\begin{aligned} -\Delta p &= \bar{y} - y_\Omega && \text{in } \Omega \\ \partial_\nu p + \alpha p &= 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Ein einfaches Rezept zum Aufstellen der adjungierten Gleichung wird uns später die Lagrangetechnik liefern. Die rechte Seite der Differentialgleichung ist aus $L^2(\Omega)$, denn wir haben $y_\Omega \in L^2(\Omega)$ vorausgesetzt und wissen $\bar{y} \in Y = H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Nach Satz 2.6 existiert genau eine Lösung $p \in H^1(\Omega)$ von (2.73). Als schwache Lösung ist sie durch

$$\int_\Omega \nabla p \cdot \nabla v \, dx + \int_\Gamma \alpha p v \, ds = \int_\Omega (\bar{y} - y_\Omega) v \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (2.74)$$

definiert. Der optimale Zustand $\bar{y} = S\bar{u}$ ist die schwache Lösung der Zustandsgleichung zu \bar{u} , analog gehört $y = Su$ zu u , also $y - \bar{y}$ zu $u - \bar{u}$ (Linearität der Zustandsgleichung). Nach Lemma 2.31, angewendet auf $y = y - \bar{y}$, $v = u - \bar{u}$ gilt

$$\int_{\Omega} (\bar{y} - y_{\Omega})(y - \bar{y}) \, dx = \int_{\Gamma} \alpha p (u - \bar{u}) \, ds.$$

Mit diesem Ergebnis lautet (2.72)

$$f'(\bar{u})(u - \bar{u}) = \int_{\Gamma} (\lambda \bar{u} + \alpha p)(u - \bar{u}) \, ds \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}.$$

Die Form der Ableitung $f'(\bar{u})$ ist unabhängig von der hier angenommenen Optimalität von \bar{u} . Als Nebenergebnis erhalten wir so die Gestalt des reduzierten Gradienten $f'(u)$ an einer beliebigen Stelle u ,

$$f'(u) = \alpha p|_{\Gamma} + \lambda u. \quad (2.75)$$

Dabei löst der zugehörige adjungierte Zustand p die adjungierte Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta p &= y(u) - y_{\Omega} && \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu} p + \alpha p &= 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Riesz haben wir die Ableitung $f'(u)$ durch ein Element von $L^2(\Gamma)$, den Gradienten, repräsentiert.

Die eben hergeleiteten Ergebnisse fasst folgender Satz zusammen:

Satz 2.32 *Ist \bar{u} optimale Steuerung des Problems (2.32)–(2.34) auf S. 42 und \bar{y} der zugehörige Zustand, dann existiert genau eine Lösung p der adjungierten Gleichung (2.73), so dass die Variationsungleichung*

$$\int_{\Gamma} (\alpha(x) p(x) + \lambda \bar{u}(x))(u(x) - \bar{u}(x)) \, ds(x) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad} \quad (2.76)$$

erfüllt ist. Umgekehrt ist jede Steuerung $\bar{u} \in U_{ad}$ optimal, die mit $\bar{y} := y(\bar{u})$ und der Lösung p von (2.73) der Variationsungleichung (2.76) genügt.

Die weitere Diskussion der Variationsungleichung (2.76) läuft wie bei der Poissongleichung ab. Als Ergebnis erhalten wir

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u_a(x), & \text{falls } \alpha(x) p(x) + \lambda \bar{u}(x) > 0 \\ \in [u_a(x), u_b(x)], & \text{falls } \alpha(x) p(x) + \lambda \bar{u}(x) = 0 \\ u_b(x), & \text{falls } \alpha(x) p(x) + \lambda \bar{u}(x) < 0 \end{cases} \quad (2.77)$$

und das *schwache Minimumprinzip*

$$\min_{u_a(x) \leq v \leq u_b(x)} (\alpha(x) p(x) + \lambda \bar{u}(x)) v = (\alpha(x) p(x) + \lambda \bar{u}(x)) \bar{u}(x) \quad \text{für fast alle } x \in \Gamma.$$

Als Folgerung ergibt sich:

Satz 2.33 (Minimumprinzip) *Ist \bar{u} optimale Steuerung von (2.32)–(2.34) auf S. 42 und p der zugehörige adjungierte Zustand, dann wird für fast alle $x \in \Gamma$ das Minimum*

$$\min_{u_a(x) \leq v \leq u_b(x)} \left\{ \alpha(x) p(x) v + \frac{\lambda}{2} v^2 \right\}$$

durch $v = \bar{u}(x)$ angenommen. Daher ist für $\lambda > 0$ die Projektionsformel

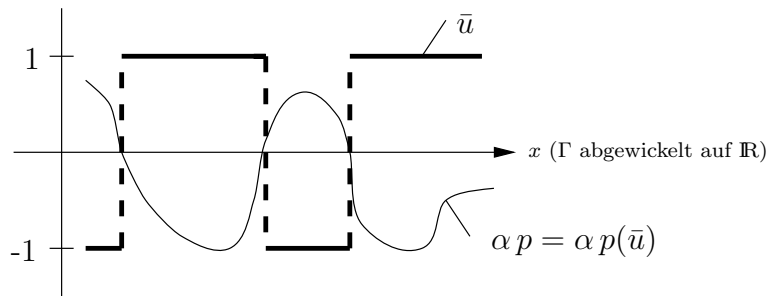
$$\bar{u}(x) = \mathcal{P}_{[u_a(x), u_b(x)]} \left\{ -\frac{1}{\lambda} \alpha(x) p(x) \right\} \quad (2.78)$$

für fast alle $x \in \Gamma$ erfüllt. Umgekehrt ist eine Steuerung $\bar{u} \in U_{ad}$ optimal, wenn sie der Projektionsformel (2.78) mit dem zugehörigen adjungierten Zustand p genügt.

Der Beweis ist identisch mit dem für das Problem der stationären Temperaturquelle. Im Fall ohne Beschränkungen an die Steuerfunktion, d.h. $u_a = -\infty$ und $u_b = \infty$ erhält man

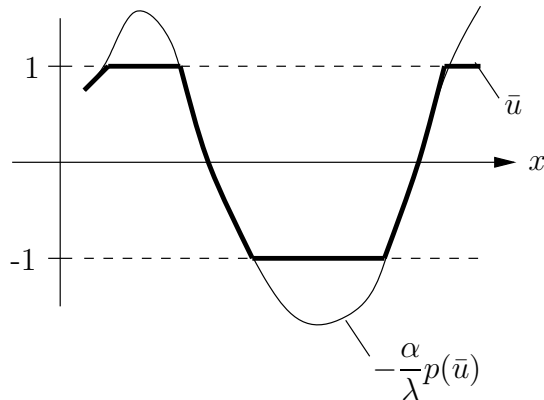
$$\bar{u}(x) = -\frac{1}{\lambda} \alpha(x) p(x).$$

Im Spezialfall $\lambda = 0$ erhält man \bar{u} aus einer Fallunterscheidung analog zu (2.57) auf S. 55. Zur Illustration wählen wir ein zweidimensionales Gebiet Ω , dessen Rand Γ wir uns auf ein Stück der reellen Achse abgewickelt denken. Als Schranken sind $u_a = -1$, $u_b = +1$ vorgegeben.



Optimale Steuerung für $\lambda = 0$

Bei $\lambda > 0$ ergibt sich \bar{u} als Projektion der Funktion $-\lambda^{-1} \alpha p$ auf $[-1, 1]$.



Optimale Steuerung für $\lambda > 0$

2.8.5 Ein lineares Optimalsteuerungsproblem

Wir betrachten die lineare Aufgabe mit verteilter Steuerung v und Randsteuerung u ,

$$\min J(y, u, v) := \int_{\Omega} (a_{\Omega} y + \lambda_{\Omega} v) dx + \int_{\Gamma} (a_{\Gamma} y + \lambda_{\Gamma} u) ds$$

bei

$$\begin{array}{rcl} -\Delta y & = & \beta_{\Omega} v \quad \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu} y + \alpha y & = & \beta_{\Gamma} u \quad \text{auf } \Gamma \end{array}$$

$$v_a(x) \leq v(x) \leq v_b(x) \quad \text{f.ü. in } \Omega, \quad u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \quad \text{f.ü. auf } \Gamma.$$

Die gegebenen Funktionen a_{Ω} , λ_{Ω} , a_{Γ} , λ_{Γ} seien quadratisch integrierbar auf ihren Definitionsbereichen Ω bzw. Γ , β_{Ω} und β_{Γ} seien beschränkt und messbar auf Ω bzw. Γ . Die Schranken v_a , v_b , u_a , u_b sollen ebenfalls quadratisch integrierbar sein, α sei fast überall nichtnegativ und nicht fast überall gleich null.

Für ein optimales Tripel $(\bar{y}, \bar{v}, \bar{u})$ lauten die Optimalitätsbedingungen

$$\int_{\Omega} (\beta_{\Omega} p + \lambda_{\Omega})(v - \bar{v}) dx + \int_{\Gamma} (\beta_{\Gamma} p + \lambda_{\Gamma})(u - \bar{u}) ds \geq 0 \quad \forall v \in V_{ad}, \forall u \in U_{ad},$$

wobei der adjungierte Zustand p durch

$$\begin{array}{rcl} -\Delta p & = & a_{\Omega} \quad \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu} p + \alpha p & = & a_{\Gamma} \quad \text{auf } \Gamma \end{array}$$

definiert ist. Die Herleitung dieser Beziehungen erfolgt in Übungsaufgabe 2.15.

Lineare Steuerungsprobleme entstehen beispielsweise bei der Linearisierung von nichtlinearen Optimalsteuerungsproblemen an einer optimalen Stelle. Dadurch kann man notwendige Optimalitätsbedingungen für nichtlineare Aufgaben durch Linearisierung und Anwendung der notwendigen Bedingungen auf die lineare Aufgabe herleiten. Das ist eine der Möglichkeiten, nichtlineare Probleme zu behandeln.

2.9 Konstruktion von Testaufgaben

Für die Validierung numerischer Verfahren zur Lösung von Problemen der optimalen Steuerung benötigt man Testbeispiele, von denen die exakte Lösung bekannt ist. Mit ihnen kann man nachprüfen, ob die numerische Methode das richtige Ergebnis liefert. Durch Anwendung der bewiesenen notwendigen Optimalitätsbedingungen ist es nicht schwer, solche Beispiele zu konstruieren. Dazu muss man bei partiellen Differentialgleichungen andere Wege gehen als bei gewöhnlichen.

In der Theorie der optimalen Steuerung bei gewöhnlichen Differentialgleichungen kann die Zustandsgleichung zumindest bei gut gewählten Übungsaufgaben geschlossen gelöst werden, wenn ein analytischer Ausdruck für die Steuerung vorgegeben ist. Bei partiellen Differentialgleichungen ist das schwieriger. Selbst in einfachen Fällen bekommt man bestenfalls eine Reihenentwicklung für den Zustand y zu gegebenem u . Deshalb gehen wir

hier umgekehrt vor: Wir geben Wunschlösungen \bar{u} , \bar{y} und den zugehörigen adjungierten Zustand p einfach vor. Dann werden die Zustandsgleichung und das zu minimierende Funktional so angepasst, dass diese drei festgelegten Funktionen das System der notwendigen Optimalitätsbedingungen erfüllen.

2.9.1 Bang-Bang-Steuerung

Bang-Bang-Steuerungen ergeben sich unter gewissen Voraussetzungen, wenn der Regularisierungsparameter λ vor $\|u\|^2$ verschwindet. Man bezeichnet damit Funktionen, die fast überall nur Werte auf dem Rand der zulässigen Menge annehmen. Im betrachteten Beispiel sind das die Werte 1 und -1 . Eine solche Steuerung wird hier konstruiert. Wir behandeln das Problem

$$\min \int_{\Omega} (y - y_{\Omega})^2 dx$$

bei

$$\begin{aligned} -\Delta y &= u + e_{\Omega} \\ y|_{\Gamma} &= 0 \end{aligned}$$

und den Beschränkungen

$$-1 \leq u(x) \leq 1.$$

Diese Aufgabe unterscheidet sich von dem in Abschnitt 2.8.2 diskutierten Problem der optimalen stationären Temperaturquelle durch den Term e_{Ω} in der Zustandsgleichung. Es ist jedoch leicht zu überlegen, dass dieser Ausdruck die adjungierte Gleichung (2.50) sowie die Variationsungleichung (2.51) nicht beeinflusst; Übungsaufgabe 2.16.

Als Grundgebiet wählen wir wieder das Einheitsquadrat $\Omega = (0, 1)^2$ und wünschen uns eine „Schachbrettfunktion“ \bar{u} als optimale Lösung. Dazu wird das Einheitsquadrat wie ein Schachbrett in $8 \times 8 = 64$ Teilgebiete unterteilt, in denen die optimale Steuerung \bar{u} abwechselnd gleich 1 und -1 sein soll.

Nach der notwendigen Optimalitätsbedingung (2.57) und wegen $u_a = -1$, $u_b = 1$ ist \bar{u} genau dann optimal, wenn die Vorzeichenbedingung

$$\bar{u}(x) = -\operatorname{sign} p(x)$$

fast überall in Ω erfüllt ist; dabei haben wir $\operatorname{sign}(0) := [-1, 1]$ gesetzt. Es liegt auf der Hand, dass ein zum Schachbrettmuster passender adjungierter Zustand durch

$$p(x) = p(x_1, x_2) = -\frac{1}{128\pi^2} \sin(8\pi x_1) \sin(8\pi x_2)$$

gegeben ist. Der Faktor $1/128\pi^2$ vereinfacht weitere Ausdrücke. Die Steuerung \bar{u} hat im linken unteren Feld von Ω den Wert 1 und wechselt dann dem Schachbrettmuster entsprechend das Vorzeichen. Für \bar{y} wählen wir die Funktion

$$\bar{y}(x) = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2),$$

die homogene Randwerte hat. Sie genügt der Poissongleichung

$$-\Delta \bar{y} = 2\pi^2 \bar{y} = 2\pi^2 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2).$$

Damit die Zustandgleichung von \bar{y} gelöst wird, muss $-\Delta\bar{y} = \bar{u} + e_\Omega$ gelten, also

$$e_\Omega = -\Delta\bar{y} - \bar{u} = 2\pi^2 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) + \text{sign}(-\sin(8\pi x_1) \sin(8\pi x_2))$$

gewählt werden. Der adjungierte Zustand erfüllt entsprechend

$$\Delta p(x) = 2(8\pi)^2 \sin(8\pi x_1) \sin(8\pi x_2) \frac{1}{128\pi^2} = \sin(8\pi x_1) \sin(8\pi x_2).$$

Er muss der Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta p &= \bar{y} - y_\Omega \\ p|_\Gamma &= 0 \end{aligned}$$

genügen. Dazu passt $y_\Omega = \bar{y} + \Delta p$, also

$$y_\Omega(x) = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) + \sin(8\pi x_1) \sin(8\pi x_2).$$

2.9.2 Verteilte Steuerung und Neumann-Randbedingung

Wir betrachten die Aufgabe mit homogener *Neumann-Randbedingung* $\partial_\nu y = 0$,

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \int_\Omega (y - y_\Omega)^2 dx + \int_\Gamma e_\Gamma y ds + \frac{1}{2} \int_\Omega u^2 dx \quad (2.79)$$

bei

$$\begin{aligned} -\Delta y + y &= u + e_\Omega \\ \partial_\nu y &= 0 \end{aligned}$$

und den Beschränkungen

$$0 \leq u(x) \leq 1.$$

Als Grundgebiet wählen wir der Einfachheit halber wieder das Einheitsquadrat $\Omega = (0, 1)^2$ mit Mittelpunkt $\hat{x} = (0.5, 0.5)^\top$. Die festen Funktionen y_Ω , e_Ω und e_Γ werden so angepasst, dass sich eine gewünschte Lösung der Aufgabe einstellt.

Im Weiteren wird $r = |x - \hat{x}| = \sqrt{(x_1 - 0.5)^2 + (x_2 - 0.5)^2}$ gesetzt. Ziel der Konstruktion ist es, die in der Abbildung dargestellte Funktion

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } r > \frac{1}{3} \\ 12r^2 - \frac{1}{3} & \text{für } r \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{3}] \\ 0 & \text{für } r < \frac{1}{6} \end{cases}$$

als optimale Steuerung zu erhalten, kurz

$$\bar{u}(x) = \min \{1, \max\{0, 12r^2 - 1/3\}\}. \quad (2.80)$$

Mit dem adjungierten Zustand p als Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta p + p &= \bar{y} - y_\Omega \\ \partial_\nu p &= e_\Gamma \end{aligned} \quad (2.81)$$

muss \bar{u} der Projektionsformel

$$\bar{u}(x) = \mathbb{P}_{[0,1]} \{ -p(x) \}$$

in Ω genügen, Übungsaufgabe 2.17. Wir legen deshalb als adjungierten Zustand

$$p(x) = -12|x - \hat{x}|^2 + \frac{1}{3} = -12r^2 + \frac{1}{3}$$

fest. Der Graph von $-p$ ist ein Rotationsparaboloid, das durch die Ebenen $p = 0$ bzw. $p = 1$ so abgeschnitten wird, dass die obige Steuerung \bar{u} entsteht. Steuerung und adjungierter Zustand sind bereits festgelegt. Als Nächstes definieren wir den Zustand \bar{y} , der zu \bar{u} gehören soll. Dessen Normalenableitung muss auf Γ verschwinden. Wir machen es uns einfach durch die Festsetzung

$$\bar{y}(x) \equiv 1.$$

Damit diese Funktion die Zustandsgleichung erfüllt, wird zum Ausgleich die Funktion $e_\Omega = e_\Omega(x)$ gebraucht. Wegen $\Delta \bar{y} = 0$ muss $e_\Omega = 1 - \bar{u}$ definiert werden, also legen wir nach Einsetzen des Ausdrucks (2.80) für \bar{u}

$$e_\Omega = 1 - \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, 12r^2 - \frac{1}{3} \right\} \right\}$$

fest. Nun sind noch y_Ω und e_Γ frei, um die adjungierte Gleichung (2.81) an den adjungierten Zustand anzupassen. Die Anwendung des Laplace-Operators auf p ergibt

$$\Delta p = D_1^2 p + D_2^2 p = -12 \{2 + 2\} = -48,$$

also wegen $y_\Omega = \bar{y} + \Delta p - p$,

$$y_\Omega(x) = 1 - 48 - \frac{1}{3} + 12|x - \hat{x}|^2 = -\frac{142}{3} + 12r^2.$$

Einen Haken hat die Sache noch, die Randbedingung von p . Wir brauchen einen adjungierten Zustand, welcher die gewünschte Form der optimalen Steuerung liefert, der die adjungierte Gleichung und gleichzeitig eine homogene Randbedingung erfüllt. Dazu steht das Randintegral im Zielfunktional. Es sichert die Randbedingung der adjungierten Gleichung und e_Γ muss der Beziehung

$$\partial_\nu p = e_\Gamma$$

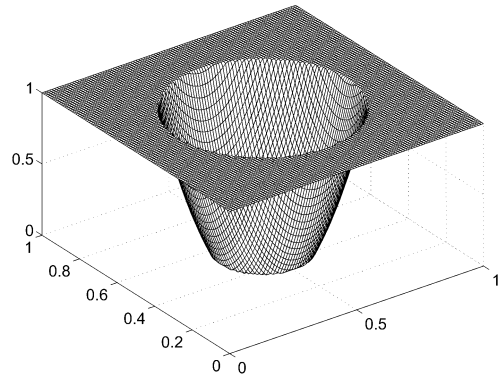
genügen. Wir finden

$$\begin{aligned} D_1 p &= -24(x_1 - 0.5), \\ D_2 p &= -24(x_2 - 0.5). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich z.B. am linken Rand $x_1 = 0$

$$\partial_\nu p = -D_1 p|_{x_1=0} = 24(0 - 0.5) = -12.$$

Den gleichen Wert erhält man auf den anderen Randstücken, also $e_\Gamma(x) = \partial_\nu p(x) \equiv -12$.



Konstruierte Steuerung

2.10 Das formale Lagrangeprinzip

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir die konkrete Form der adjungierten Gleichung mehr oder weniger intuitiv festgelegt. Die Gleichung kann aber mit Hilfe einer Lagrange-funktion leicht bestimmt werden. Bei der Behandlung des endlichdimensionalen Falls in Abschnitt 1.4 ergab sich die adjungierte Gleichung aus $D_y L$, der Ableitung der Lagrange-funktion nach y . Das sollte auch hier möglich sein, wir benötigen nur den richtigen Formalismus.

Notwendige Optimalitätsbedingungen kann man im Funktionenraum direkt aus der Karush-Kuhn-Tucker-Theorie für Optimierungsaufgaben in Banachräumen herleiten. Auf diese Methode, man könnte sie *exakte Lagrangetechnik* nennen, geht Kapitel 6 ein. Ihre Anwendung ist oft schwierig, weil dazu einige Erfahrung mit der Abstimmung von Operatoren, Funktionalen und passenden Räumen erforderlich ist: Die gegebenen Größen müssen in den ausgewählten Räumen differenzierbar sein, gewisse adjungierte Operatoren sind zu bestimmen und die Lagrangeschen Multiplikatoren sollen im richtigen Raum existieren. Anwendungsbeispiele dieser Methode werden in den Abschnitten 2.13, 6.1.3 und 6.2 diskutiert.

Wir sind bisher anders vorgegangen, indem wir den Zustand y durch die Steuerungs-Zustands-Abbildung G mit $y = G(u)$ eliminiert haben. Daraus wurde eine Variationsungleichung hergeleitet und durch Einführung eines adjungierten Zustands p vereinfacht. Der adjungierte Zustand ist der Lagrangesche Multiplikator zur partiellen Differentialgleichung nebst Randbedingungen, wenn man das wie in Abschnitt 2.13 oder 6.1.3 definiert. Diese Methode ist äquivalent zur Anwendung der allgemeinen Karush-Kuhn-Tucker-Theorie, denn eigentlich beweist man so jedesmal eine Regel der Lagrangeschen Multiplikatoren. Aber die Anwendung von Karush-Kuhn-Tucker-Sätzen kann durch die dazu notwendigen Räume recht kompliziert sein.

Diese Bemerkungen bezogen sich auf den *Beweis* von Optimalitätsbedingungen. Eine andere Sache ist deren Aufstellung (z.B. das Bestimmen der adjungierten Gleichung bei komplexeren Problemen) sowie eine möglichst einprägsame Form der Bedingungen. Dazu eignet sich besonders gut die *formale Lagrangetechnik*, die wir hier einführen. Vom Grundgedanken her ist sie nichts anderes als das (exakte) Lagrangeprinzip, das zum Beispiel in Ioffe und Tichomirov [112] oder Luenberger [147] beschrieben und in Kapitel 6 behandelt wird, insbesondere bei einer Aufgabe mit semilinear elliptischer Gleichung in Abschnitt 6.1.3.

Das formale Lagrangeprinzip unterscheidet sich vom exakten dadurch, dass Differentialoperatoren wie $-\Delta$ oder ∂_ν formal hingeschrieben und alle Multiplikatoren als Funktionen betrachtet werden, ohne zugehörige Räume zu spezifizieren. Man nimmt einfach an, dass der Zustand y , die verwendeten Multiplikatoren sowie ihre Ableitungen quadratisch integrierbare Funktionen sind. So umgeht man Funktionale aus allgemeineren Dualräumen und schreibt L^2 -Skalarprodukte auf.

Obwohl in gewissem Sinne gerechtfertigt, ist die Methode nicht bis ins Detail stichhaltig. Bei ihrer Anwendung geht es uns aber nicht primär um einen sauberen Beweis, sondern um ein Handwerkszeug zur Ermittlung und zum Aufschreiben der richtigen Optimalitätsbedingungen. Sind diese einmal bestimmt, dann ist es nicht so wichtig, auf welche Weise wir sie gefunden haben. Bei sehr komplexen Aufgabenstellungen mit nichtlinearen Systemen von partiellen Differentialgleichungen ist diese Verfahrensweise besonders

hilfreich.

Zur Einführung der Technik eignet sich recht gut das Problem der optimalen stationären Randtemperatur. Bei der Aufgabe der stationären Temperaturquelle kann man die adjungierte Gleichung zu leicht erraten. Wir untersuchen deshalb noch einmal das Problem (2.32)–(2.34),

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2$$

bei

$$\begin{array}{rcl} -\Delta y & = & 0 \quad \text{in } \Omega \\ \partial_\nu y + \alpha y & = & \alpha u \quad \text{auf } \Gamma \end{array}$$

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \quad \text{f.ü. auf } \Gamma.$$

Es sind drei Nebenbedingungen gegeben, zwei „komplizierte“ differentielle (die Gleichung nebst Randbedingung) und eine harmlose (die punktweise Restriktion $u \in U_{ad}$). Nun wenden wir das Lagrangeprinzip an und eliminieren nur die Gleichungen durch Lagrangesche Multiplikatoren p_1, p_2 . Wir definieren dazu, noch etwas formal, die *Lagrangefunktion*

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(y, u, p) = J(y, u) - \int_{\Omega} (-\Delta y) p_1 \, dx - \int_{\Gamma} (\partial_\nu y - \alpha(u - y)) p_2 \, ds$$

mit auf Ω bzw. Γ definierten Funktionen p_1, p_2 , den *Lagrangeschen Multiplikatoren*, die wir in \mathcal{L} mit $p := (p_1, p_2)$ zusammenfassen.

Diese Definition von \mathcal{L} enthält drei mathematische Unsauberkeiten: Wir wissen bisher nur $y \in H^1(\Omega)$, also ist Δy nicht notwendig eine Funktion. Ebenso ist $\partial_\nu y$ nicht notwendig als Funktion definiert. Wir können ohne zusätzliche Kenntnisse über höhere Regularität von y nur $\Delta y \in H^1(\Omega)^*$, $\partial_\nu y \in H^{-1/2}(\Gamma)$ erwarten (zur Definition von $H^{-1/2}(\Gamma)$ siehe Lions und Magenes [145]). Deshalb sind die Integrale nicht notwendig definiert. Schließlich wäre zu klären, welche Regularität p_1, p_2 haben.

Trotzdem lassen wir uns nicht beirren, nehmen einfach hinreichende Glattheit von p_1, p_2 an und benutzen die zweite Greensche Formel zur partiellen Integration. Der Kürze halber verzichten wir auf die Differentiale unter den Integralen,

$$\mathcal{L}(y, u, p) = J(y, u) + \int_{\Gamma} p_1 \partial_\nu y - \int_{\Gamma} y \partial_\nu p_1 + \int_{\Omega} y \Delta p_1 - \int_{\Gamma} (\partial_\nu y - \alpha(u - y)) p_2.$$

Wir erwarten nach dem Lagrangeprinzip, dass das Paar (\bar{y}, \bar{u}) mit Lagrangeschen Multiplikatoren p_1, p_2 die notwendigen Optimalitätsbedingungen der Aufgabe

$$\min \mathcal{L}(y, u, p), \quad y \text{ frei, } u \in U_{ad}$$

erfüllt. Da jetzt y formal keinen Restriktionen mehr unterworfen ist, muss die Ableitung von \mathcal{L} nach y an der optimalen Stelle verschwinden, d.h.

$$D_y \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, p) h = 0 \quad \forall h \in Y = H^1(\Omega).$$

Aus den Box-Restriktionen an u folgt

$$D_u \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, p)(u - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}.$$

Für $D_y \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, p)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} D_y \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, p) h &= \int_{\Omega} ((\bar{y} - y_{\Omega}) + \Delta p_1) h \, dx + \int_{\Gamma} (p_1 - p_2) \partial_{\nu} h \, ds \quad \forall h \in Y. \\ &\quad - \int_{\Gamma} (\partial_{\nu} p_1 + \alpha p_2) h \, ds = 0. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Bei der Berechnung der Ableitung wurde die bereits erwähnte Merkregel angewendet, dass die Ableitung einer linearen Abbildung mit dieser Abbildung identisch ist. Wir wählen zunächst h aus $C_0^{\infty}(\Omega)$ und damit $h = \partial_{\nu} h = 0$ auf Γ . Mit (2.82) folgt

$$\int_{\Omega} ((\bar{y} - y_{\Omega}) + \Delta p_1) h \, dx = 0 \quad \forall h \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Weil $C_0^{\infty}(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ dicht liegt, ergibt sich

$$-\Delta p_1 = \bar{y} - y_{\Omega} \quad \text{in } \Omega.$$

Das ist bereits die erste Hälfte des vorher nur erratenen adjungierten Systems. Nun verlangen wir nur $h|_{\Gamma} = 0$ und variieren $\partial_{\nu} h$ (vgl. Bemerkung (iii) auf der nächsten Seite). Die mit der Laplace-Gleichung verbundenen Ausdrücke sind in (2.82) bereits weggefallen. Jetzt folgt

$$\int_{\Gamma} (p_1 - p_2) \partial_{\nu} h \, ds = 0$$

für alle so gewählten h und deshalb $p_1 = p_2$ auf Γ . Schließlich variieren wir h auf Γ und betrachten den einzigen in (2.82) verbliebenen Term

$$0 = - \int_{\Gamma} (\partial_{\nu} p_1 + \alpha p_2) h \, ds = - \int_{\Gamma} (\partial_{\nu} p_1 + \alpha p_1) h \, ds.$$

Aus der Beliebigkeit von h auf Γ (vgl. Bemerkung (iii) unten) folgt schließlich

$$\partial_{\nu} p_1 + \alpha p_1 = 0 \quad \text{auf } \Gamma.$$

Setzen wir $p := p_1$ und dann $p_2 := p|_{\Gamma}$, so haben wir die beim Problem der optimalen stationären Randtemperatur intuitiv eingeführte adjungierte Gleichung gefunden. Ebenso einfach folgt die Variationsungleichung aus

$$D_u \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, p) (u - \bar{u}) = \int_{\Gamma} \lambda \bar{u} (u - \bar{u}) \, ds + \int_{\Gamma} \alpha p (u - \bar{u}) \, ds \geq 0.$$

Nun definieren wir die Lagrangefunktion anders, so dass alle Terme sauber erklärt sind:

Definition. Die Lagrangefunktion $\mathcal{L} : H^1(\Omega) \times L^2(\Gamma) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ wird für die Aufgabe (2.32)–(2.34) definiert durch

$$\mathcal{L}(y, u, p) := J(y, u) - \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla p \, dx + \int_{\Gamma} \alpha (u - y) p \, ds. \quad (2.83)$$

Diese Form entsteht durch einmalige partielle Integration aus der ersten, nur formal richtigen Definition von \mathcal{L} . Die $\partial_{\nu} y$ enthaltenden Terme heben sich gegenseitig auf. Dann überzeugt man sich leicht von folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} D_y \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, p) h &= 0 \quad \forall h \in H^1(\Omega) &\Leftrightarrow &\text{schwache Formulierung von (2.73)} \\ D_u \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, p) (u - \bar{u}) &\geq 0 \quad \forall u \in U_{ad} &\Leftrightarrow &\text{Variationsungleichung (2.76).} \end{aligned}$$

Folgerung. Durch Verwendung der zuletzt eingeführten Lagrangefunktion erhält man die in Abschnitt 2.8.4 bewiesenen Optimalitätsbedingungen. Die adjungierte Gleichung ergibt sich durch Ableitung nach dem Zustand y , die Variationsungleichung durch Ableitung nach der Steuerung u .

Obwohl \mathcal{L} jetzt durch (2.83) sauber definiert ist, bleibt eine Frage offen. Woher wissen wir, dass ein solches p in $H^1(\Omega)$ existiert? Wir haben diese Klippe im letzten Abschnitt dadurch umschifft, dass wir p direkt als Lösung der adjungierten Gleichung *definiert* haben. Unsere obige Methode sollte nur dazu dienen, die richtige adjungierte Gleichung zu ermitteln. Die Existenz von p als Lagrangeschem Multiplikator folgt aber auch direkt aus der Karush-Kuhn-Tucker-Theorie im Banachraum, siehe Abschnitt 2.13.

Bemerkungen. (i) Geht man bei der obigen Herleitung von Anfang an davon aus, dass die Lagrangeschen Multiplikatoren p_1 und p_2 auf dem Rand gleich sind, dann erübrigt sich die zweimalige partielle Integration, die auf den Term $-\Delta p_1$ führt. Es reicht eine partielle Integration und man liest die Variationsformulierung für die adjungierte Gleichung sofort ab, vgl. die Argumentation im nächsten Abschnitt. Diese vereinfachte Variante führt aber nicht immer zum Ziel, beispielsweise nicht bei Dirichlet-Randsteuerung, vgl. Übungsaufgabe 2.19 auf S. 94.

(ii) Der Gradient von $f(u) = J(y(u), u)$ ergibt sich durch

$$f'(u) = D_u \mathcal{L}(y, u, p),$$

wenn $y = y(u)$ und $p = p(u)$ gewählt werden. Man kann sich also merken, dass dieser reduzierte Gradient durch Ableitung der Lagrangefunktion nach der Steuerung berechnet wird.

(iii) Die weitgehende Beliebigkeit von $\partial_\nu h$ auf Γ für h mit $h|_\Gamma = 0$ folgt aus der Surjektivität der Abbildung $h \mapsto (\tau h, \partial_\nu h)$ von $H^2(\Omega)$ auf $H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$, [2], Thm. 7.53. Die Beliebigkeit von h ist eine Folgerung aus der Surjektivität der Abbildung $\tau : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$.

Die Anwendung der Lagrangefunktion wurde für die Aufgabe (2.32)–(2.34) vorgeführt. Andere Probleme können ähnlich behandelt werden. Schließlich kann man auch die Ungleichungsrestriktionen an die Steuerfunktion eliminieren und mit weiteren Lagrangeschen Multiplikatoren μ_a, μ_b in die Lagrangefunktion aufnehmen. Das wurde bereits in Abschnitt 1.4.7 gezeigt. Die Lagrangefunktion (2.83) ist dann wie folgt zu erweitern:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y, u, p, \mu_a, \mu_b) &:= J(y, u) - \int_\Omega \nabla y \cdot \nabla p \, dx + \int_\Gamma \alpha(u - y) p \, ds \\ &\quad + \int_\Gamma (\mu_a(u_a - u) + \mu_b(u - u_b)) \, dx. \end{aligned} \tag{2.84}$$

Die in diesem Abschnitt beschriebene formale Lagrange-Methode wird uns noch mehrmals gute Dienste leisten, um adjungierte Gleichungen zu bestimmen. Lagrangefunktionen der Form (2.83) oder (2.84) sind das passende Vehikel, um notwendige Optimalitätsbedingungen elegant (und exakt) aufzuschreiben. Wir werden sie auch dazu nutzen, hinreichende Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung (wiederum exakt) in einer einprägsamen Form darzustellen, die auch in der endlichdimensionalen Optimierung und bei der Formulierung numerischer Methoden üblich ist.

2.11 Weitere Beispiele *

2.11.1 Differentialoperator in Divergenzform

In gleicher Weise kann man die allgemeinere Aufgabe (2.36)–(2.38) auf S. 43 mit der Lagrangetechnik diskutieren:

$$\min J(y, u, v) := \frac{\lambda_\Omega}{2} \|y - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda_\Gamma}{2} \|y - y_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{\lambda_v}{2} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda_u}{2} \|u\|_{L^2(\Gamma_1)}^2$$

bei

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}y + c_0 y & = & \beta_\Omega v \quad \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu_{\mathcal{A}}} y + \alpha y & = & \beta_\Gamma u \quad \text{auf } \Gamma_1 \\ y & = & 0 \quad \text{auf } \Gamma_0 \end{array}$$

sowie

$$\begin{array}{rcl} v_a(x) \leq v(x) \leq v_b(x) & \text{f.ü. in } & \Omega \\ u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) & \text{f.ü. auf } & \Gamma_1. \end{array}$$

Da y auf Γ_0 verschwindet und deshalb dort fixiert ist, wird bei der Minimierung des Randterms der Zielfunktion nur der Anteil auf Γ_1 wirksam. Die Voraussetzung 2.19 von S. 43 sei erfüllt. Als Zustandsraum wird gewählt

$$Y = \{y \in H^1(\Omega) \mid y|_{\Gamma_0} = 0\}.$$

Die Optimalitätsbedingungen leiten wir wie in Abschnitt 2.8.4 her. Zuerst wird mit Hilfe der Lagrangetechnik die Form der adjungierten Gleichung bestimmt. Die Lagrangefunktion kann durch

$$\mathcal{L}(y, u, v, p) = J(y, u, v) - \int_\Omega (\mathcal{A}y + c_0 y - \beta_\Omega v) p \, dx - \int_{\Gamma_1} (\partial_{\nu_{\mathcal{A}}} y + \alpha y - \beta_\Gamma u) p \, ds,$$

definiert werden, weil die Randbedingung $y|_{\Gamma_0} = 0$ schon im Raum Y berücksichtigt ist. Außerdem vereinfachen wir die Herleitung etwas, indem wir stillschweigend annehmen, dass der Multiplikator p im Randintegral gerade der Randwert des Multiplikators p des Gebietsintegrals ist. Das ergibt sich hier wie in Abschnitt 2.10. Ansonsten hätten wir auch wieder verschiedene Multiplikatoren p_1 und p_2 wählen können. Nach partieller Integration folgt mit der in (2.22) auf S. 30 definierten Bilinearform a

$$D_y \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{v}, p) h = \int_\Omega \lambda_\Omega (\bar{y} - y_\Omega) h \, dx + \int_\Gamma \lambda_\Gamma (\bar{y} - y_\Gamma) h \, ds - a[h, p] = 0 \quad \forall h \in Y.$$

Es ist jetzt nicht mehr nötig, weiter partiell zu integrieren, um den Differentialoperator zweiter Ordnung auf p zu übertragen. Die eben erhaltene Beziehung ist die Variationsformulierung für die schwache Lösung der adjungierten Gleichung

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}p + c_0 p & = & \lambda_\Omega (\bar{y} - y_\Omega) \quad \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu_{\mathcal{A}}} p + \alpha p & = & \lambda_\Gamma (\bar{y} - y_\Gamma) \quad \text{auf } \Gamma_1 \\ p & = & 0 \quad \text{auf } \Gamma_0, \end{array} \quad (2.85)$$

Bemerkung. Die vom Operator \mathcal{A} geforderte Symmetriebedingung wird für die eindeutige Lösbarkeit der Zustandsgleichung und für die Optimalitätsbedingungen nicht benötigt. Ohne diese Forderung ist in der adjungierten Gleichung \mathcal{A} durch den zu \mathcal{A} (formal) adjungierten Differentialoperator \mathcal{A}^* zu ersetzen, der durch

$$\mathcal{A}^* p(x) = - \sum_{i,j=1}^N D_j (a_{ij}(x) D_i y(x)).$$

definiert ist. Die Symmetriebedingung wird später für gewisse Regularitätsresultate gebraucht, und wurde deshalb generell vorausgesetzt.

Die formale Lagrangetechnik gibt uns den Hinweis, die adjungierte Gleichung gerade so einzuführen. Nach Satz 2.7 auf S. 30 existiert genau eine Lösung p dieser Gleichung in Y , also genau ein adjungierter Zustand zu \bar{y} . Durch Anwendung einer Verallgemeinerung des Lemmas 2.31 von S. 59 zur Bestimmung von S^* können die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung hergeleitet werden, Übungsaufgabe 2.18. An Stelle dieser exakten Herleitung verlassen wir uns noch einmal auf die Lagrangetechnik und schreiben die Variationsungleichungen auf,

$$\begin{aligned} D_v \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{v}, p)(v - \bar{v}) &= \int_{\Omega} (\lambda_v \bar{v} + \beta_{\Omega} p)(v - \bar{v}) \, dx \geq 0 \quad \forall v \in V_{ad} \\ D_u \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{v}, p)(u - \bar{u}) &= \int_{\Gamma_1} (\lambda_u \bar{u} + \beta_{\Gamma} p)(u - \bar{u}) \, ds \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \end{aligned}$$

Insgesamt ergeben sich die folgenden notwendigen und hinreichenden Optimalitätsbedingungen erster Ordnung:

Satz 2.34 *Unter Voraussetzung 2.19 sind die Steuerungen $\bar{v} \in V_{ad}$ und $\bar{u} \in U_{ad}$ genau dann optimal mit zugehörigem optimalen Zustand $\bar{y} \in Y$, wenn mit dem durch (2.85) definierten adjungierten Zustand $p \in Y$ die Variationsungleichungen*

$$\begin{aligned} (\lambda_v \bar{v} + \beta_{\Omega} p, v - \bar{v})_{L^2(\Omega)} &\geq 0 \quad \forall v \in V_{ad} \\ (\lambda_u \bar{u} + \beta_{\Gamma} p, u - \bar{u})_{L^2(\Gamma_1)} &\geq 0 \quad \forall u \in U_{ad} \end{aligned}$$

erfüllt sind.

2.11.2 Optimale stationäre Temperaturquelle mit vorgegebener Außentemperatur

Dieses auf S. 4 erwähnte Problem ist ein Spezialfall der obigen allgemeinen Aufgabe mit $\mathcal{A} := -\Delta$, $c := 0$, $\beta_{\Gamma} := \alpha$, $\beta_{\Omega} := \beta$ und $u_a = u_b = y_a$. Die Randsteuerung wird so durch y_a fixiert. Das Zielfunktional ist sogar allgemeiner und kann durch die Wahl $\lambda_{\Gamma} = \lambda_u = 0$, $\lambda_{\Omega} = 1$ auf die in Abschnitt 1.2.1 diskutierte Form gebracht werden. Hier spielt die Steuerfunktion v die Rolle von u . Die notwendigen Optimalitätsbedingungen folgen direkt aus Satz 2.34.

2.12 Numerische Verfahren

In diesem Abschnitt skizzieren wir Grundkonzepte der numerischen Lösung linear-quadratischer elliptischer Aufgaben. Hier und in anderen Abschnitten zu numerischen Verfahren

soll der Leser einen Eindruck davon erhalten, wie man prinzipiell an die Lösung der Optimalsteuerungsprobleme herangehen kann. Die Numerik der Optimalsteuerung partieller Differentialgleichungen ist bereits gut ausgebaut. Es existiert eine Reihe guter numerischer Verfahren, mit denen auch komplexe Probleme erfolgreich gelöst werden können. Eine auch nur halbwegs vollständige Darstellung entsprechender Methoden würde den beabsichtigten Rahmen dieses Buches sprengen. Dazu gibt es zahlreiche Veröffentlichungen in der Fachliteratur, insbesondere die Monographien Betts [30], Gruver und Sachs [90], Hinze et al. [108], Kelley [120], Ito und Kunisch [115].

Meist ignorieren wir die Notwendigkeit einer Diskretisierung der Aufgaben, indem wir stillschweigend annehmen, dass die partiellen Differentialgleichungen exakt gelöst werden können. Natürlich muss eine detaillierte numerische Analysis die Diskretisierung der Gleichungen durch Differenzenverfahren oder Methoden der finiten Elemente mit einbeziehen. Die optimierungstheoretischen Aspekte der Verfahren lassen sich aber klarer ohne diese Details darstellen. In den Abschnitten 2.12.3 und 2.12.4 wird jedoch die Anwendung des Differenzenverfahrens bzw. der Finite-Elemente-Methode (FEM) kurz erläutert.

Wir beginnen mit Gradientenverfahren, die aus historischer Sicht zu den ersten Techniken gehört haben, mit denen Steuerungsprobleme bei partiellen Differentialgleichungen gelöst wurden. Diese Verfahren sind langsam, aber einfach zu implementieren. Daher eignen sie sich gut zu Übungszwecken und ersten Testrechnungen. Außerdem sind sie bei sehr komplexen oder hoch nichtlinearen Aufgaben oft das Mittel der Wahl.

Danach behandeln wir die direkte Überführung in ein endlichdimensionales Optimierungsproblem durch Anwendung der Differenzenmethode sowie die Aufstellung des reduzierten Optimalsteuerungsproblems, die sich in gewissen Fällen lohnen kann. Schließlich wird die Grundidee der primal-dualen Aktive-Mengen-Strategie besprochen, die derzeit zu den leistungstärksten und gängigsten numerischen Lösungsverfahren gehört.

2.12.1 Bedingtes Gradientenverfahren

Wir erwähnen das bedingte Gradientenverfahren vor allem aus methodischen Gründen, weil es schön die Anwendung notwendiger Optimalitätsbedingungen zur Konstruktion eines numerischen Verfahrens verdeutlicht. Außerdem lässt es sich zu Übungszwecken leicht programmieren. Die Theorie dieses i.a. linear konvergenten Verfahrens wird durch Gruver und Sachs [90] behandelt. Im allgemeinen konvergiert das *Gradienten-Projektionsverfahren* aber schneller.

Das bedingte Gradientenverfahren im Hilbertraum

Wir formulieren das bedingte Gradientenverfahren zuerst allgemein für ein Optimierungsproblem im Hilbertraum U ,

$$\min_{u \in U_{ad}} f(u),$$

bei dem $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ein Gâteaux-differenzierbares Funktional und $U_{ad} \subset U$ eine nichtleere, beschränkte, konvexe und abgeschlossene Menge sein sollen. Die Iterierten u_1, \dots, u_n sei bereits bestimmt, so dass u_n die aktuelle Lösung ist. Dann sind folgende Schritte durchzuführen:

S1 (*Richtungssuche*) Bestimme eine Richtung v_n als Lösung der Optimierungsaufgabe im Hilbertraum,

$$f'(u_n) v_n = \min_{v \in U_{ad}} f'(u_n) v.$$

Wegen der Voraussetzungen an U_{ad} ist diese in Bezug auf das Zielfunktional lineare Aufgabe lösbar. Gilt $f'(u_n)(v_n - u_n) \geq 0$, dann erfüllt u_n die Variationsungleichung (warum?) und wir haben mit u_n eine Lösung gefunden. Das Verfahren wird beendet.

Anderenfalls gilt $f'(u_n)(v_n - u_n) < 0$, also ist $v_n - u_n$ eine Abstiegsrichtung.

S2 (*Schrittweitenbestimmung*) Finde $s_n \in (0, 1]$ aus

$$f(u_n + s_n(v_n - u_n)) = \min_{s \in (0, 1]} f(u_n + s(v_n - u_n))$$

und setze $u_{n+1} := u_n + s_n(v_n - u_n)$; $n := n + 1$, gehe zu S1.

Im konvexen Fall konvergiert die Folge der Funktionswerte $\{f(u_n)\}_{n=1}^\infty$ monoton fallend gegen den Optimalwert (Abstiegsverfahren). Man beachte, dass mit u_n und v_n auch die konvexe Linearkombination $u_n + s_n(v_n - u_n)$ zu U_{ad} gehört. Das ist eine wesentliche Grundlage für dieses Verfahren.

Anwendung auf elliptische Steuerprobleme

Als Anwendung des bedingten Gradientenverfahrens diskutieren wir das Problem der optimalen stationären Temperaturquelle:

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.86)$$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} -\Delta y & = & \beta u \\ y|_\Gamma & = & 0 \end{array}} \quad (2.87)$$

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x). \quad (2.88)$$

Der Raum für die Steuerungen ist $U = L^2(\Omega)$, U_{ad} definieren wir wie bisher durch die gegebenen Box-Restriktionen (2.88) an u und die reduzierte Zielfunktion f ist erklärt durch $f(u) = J(y(u), u)$. Die Ableitung $f'(u)$ wurde in Lemma 2.30 auf S. 58 berechnet,

$$f'(u_n) v = \int_{\Omega} (\beta p_n + \lambda u_n) v \, dx,$$

wobei p_n die Lösung der adjungierten Gleichung

$$\boxed{\begin{array}{rcl} -\Delta p_n & = & y_n - y_\Omega \\ (p_n)|_\Gamma & = & 0 \end{array}} \quad (2.89)$$

ist. Das Verfahren läuft wie folgt ab:

- S1** Bestimme y_n zu u_n aus der Zustandsgleichung (2.87).
S2 Berechne p_n aus der adjungierten Gleichung (2.89).
S3 (*Richtungssuche*) Berechne v_n als Lösung der linearen Optimierungsaufgabe

$$\min_{v \in U_{ad}} \int_{\Omega} (\beta p_n + \lambda u_n) v \, dx.$$

Wenn v_n in dieser linearen Aufgabe den gleichen Wert wie u_n liefert, dann bricht das Verfahren ab, v_n ist optimal. Numerisch ist dieser Fall so gut wie ausgeschlossen. Man kann zum Beispiel abbrechen, wenn der genannte Wert für v_n nicht mindestens um $\varepsilon > 0$ kleiner als der für u_n ist.

- S4** (*Schrittweitenbestimmung*) Bestimme die Schrittweite s_n aus

$$f(u_n + s_n(v_n - u_n)) = \min_{s \in (0,1]} f(u_n + s(v_n - u_n)).$$

- S5** Setze $u_{n+1} := u_n + s_n(v_n - u_n)$, $n := n + 1$, und gehe zu S1.

Bemerkungen zur Umsetzung von S3, S4. Beide Schritte können analytisch erledigt werden.

- S3:** Eine sinnvolle Richtung v_n ist offenbar

$$v_n(x) := \begin{cases} u_a(x), & \text{falls } \lambda u_n(x) + \beta(x) p_n(x) > 0 \\ \frac{1}{2}(u_a + u_b)(x), & \text{falls } \lambda u_n(x) + \beta(x) p_n(x) = 0 \\ u_b(x), & \text{falls } \lambda u_n(x) + \beta(x) p_n(x) < 0. \end{cases}$$

Der mittlere Fall wird numerisch kaum eintreten.

- S4:** Wir nutzen aus, dass f eine quadratische Zielfunktion ist.

$$f(u_n + s(v_n - u_n)) = \frac{1}{2} \|y_n + s(w_n - y_n) - y_{\Omega}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u_n + s(v_n - u_n)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

wobei $y_n = y(u_n)$ bzw. $w_n = y(v_n)$ die Zustände zu v_n bzw. u_n sind. Da es jetzt nur um die Abhängigkeit von der Schrittweite s geht, setzen wir $g(s) := f(u_n + s(v_n - u_n))$ und erhalten durch einfaches Umformen

$$\begin{aligned} g(s) &= \frac{1}{2} \|y_n - y_{\Omega}\|_{L^2(\Omega)}^2 + s (y_n - y_{\Omega}, w_n - y_n)_{L^2(\Omega)} + \frac{s^2}{2} \|w_n - y_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda s (u_n, v_n - u_n)_{L^2(\Omega)} + s^2 \frac{\lambda}{2} \|v_n - u_n\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Die Funktion $g = g(s)$ hat die Gestalt $g(s) = g_0 + g_1 s + g_2 s^2$ mit Konstanten g_i , die vorher berechnet werden können. Damit lässt sich die Aufgabe

$$s_n := \arg \min_{s \in (0,1]} g(s)$$

auf dem Papier erledigen. Die Lösung ist die Projektion der Nullstelle von $g'(s)$ auf das Intervall $[0, 1]$ und wird als *exakte Schrittweite* bezeichnet.

Das bedingte Gradientenverfahren konvergiert anfangs schnell, dann recht langsam. Das ist charakteristisch für Verfahren vom Gradiententyp. Jeder Schritt erfordert die Lösung von zwei elliptischen Gleichungen. Die Möglichkeit der analytischen Ausführung der Schritte S3 und S4 ist ein Vorteil des Verfahrens. Beim Gradienten-Projektionsverfahren ist die Bestimmung der Schrittweite komplizierter und kann weitere Lösungen von Differentialgleichungen erfordern.

Wie eingangs erwähnt wurde, kann das Verfahren nur in Verbindung mit einer Diskretisierung durchgeführt werden. Die Steuerfunktion u ist zu diskretisieren, etwa durch Treppenfunktionen oder stückweise linear. Gleiches gilt für den Zustand y . Die Durchführung der obigen Schritte ist auch mit Diskretisierung klar. Das Verfahren verlangt de facto nur die Lösung der elliptischen Gleichungen sowie Routinen zur Berechnung aller Integrale. Das bedingte Gradientenverfahren kann auch im Fall $\lambda = 0$ durchgeführt werden.

2.12.2 Gradienten-Projektionsverfahren

Man verwendet bei Entscheidung für ein Gradientenverfahren besser das Gradienten-Projektionsverfahren. Wir diskutieren ein solches in Kapitel 3 für parabolische Aufgaben. Deshalb erläutern wir hier nur kurz die Unterschiede zum bedingten Gradientenverfahren: Als Abstiegsrichtung verwendet man in Schritt **S3** den Antigradienten

$$v_n := -(\beta p_n + \lambda u_n).$$

Um Zulässigkeit zu garantieren, wird die Schrittweite s_n durch

$$f(\mathbb{P}_{[u_a, u_b]}(u_n + s_n v_n)) = \min_{s > 0} f(\mathbb{P}_{[u_a, u_b]}(u_n + s v_n))$$

bestimmt. Sind keine Restriktionen für die Steuerung vorgegeben, dann erhält man die optimale Schrittweite aus

$$f(u_n + s_n v_n) = \min_{s > 0} f(u_n + s v_n).$$

Im zugrunde gelegten linear-quadratischen Fall kann s_n als exakte Schrittweite leicht berechnet werden, vgl. S. 75. Die neue Steuerung ergibt sich aus

$$u_{n+1} := \mathbb{P}_{[u_a, u_b]}(u_n + s_n v_n),$$

unabhängig davon, wie s_n berechnet worden ist.

Bei Vorgabe von Restriktionen ist die Bestimmung der Schrittweite nicht trivial. Die exakte Schrittweite ist dann in der Regel nicht zu erhalten und man muss numerisch eine akzeptable Schrittweite finden. Man kann z.B. mit dem *Halbierungsverfahren* für s arbeiten: Ausgehend von einer kleinen Anfangsschrittweite s_0 , beispielsweise der letzten erfolgreichen Schrittweite, setzt man nacheinander $s = \frac{s_0}{2}, \frac{s_0}{4}, \frac{s_0}{8}$ etc., bis zu s eine Lösung gefunden ist, die gegenüber $f(u_n)$ die Zielfunktion hinreichend verkleinert. Ansonsten wird nach einer endlichen Zahl von Verkleinerungen der Schrittweite abgebrochen. Sinnvoll kann auch die Anwendung der aus der nichtlinearen Optimierung bekannten Regel zur Schrittweitenbestimmung von Armijo sein, siehe z.B. Alt [7] oder Grossmann und Terno [88], Nocedal und Wright [169] oder Polak [172].

Für jede neue Schrittweite muss zur Funktionswertbestimmung eine partielle Differentialgleichung gelöst werden und das ist in der Regel teuer. Manchmal zieht man es daher

sogar vor, mit einer festen, kleinen Schrittweite zu arbeiten und diese solange beizubehalten, wie ein hinreichender Abstieg erzielt wird.

Schöne Darstellungen des Gradienten-Projektionsverfahrens und seiner Konvergenzeigenschaften im endlichdimensionalen Raum findet man bei Gruver und Sachs [90], Kelley [120] sowie (mit geometrischer Veranschaulichung) in Nocedal und Wright [169]; im Hilbertraum wird es z.B. durch Hinze et al. [108] behandelt.

2.12.3 Überführung in ein endlichdimensionales quadratisches Optimierungsproblem

Aufstellen einer diskretisierten Aufgabe

Zur numerischen Behandlung von Aufgabe (2.86)–(2.88) sind die partielle Differentialgleichung, die Zustandsfunktion y sowie die Steuerung u zu diskretisieren. Wenn das Ortsgebiet rechteckig berandet ist, dann lässt sich die Diskretisierung der partiellen Differentialgleichung am einfachsten durch die Methode der finiten Differenzen bewerkstelligen. Diesen Weg wollen wir hier der Einfachheit halber gehen, auch wenn er aus Sicht der numerischen Analysis unbefriedigend ist. Optimale Steuerungen sind meist nicht so glatt, dass die Konvergenz der Methode der finiten Differenzen gesichert ist oder entsprechende Fehlerabschätzungen verfügbar sind. Deshalb wird in einschlägigen Arbeiten fast ausschließlich die Methode der finiten Elemente angewendet, deren deren Anwendung wir kurz in Abschnitt 2.12.4 behandeln. Die Differenzenmethode eignet sich aber gut zu Übungszwecken, da sie sich schnell programmieren lässt.

Wir betrachten das Problem der optimalen stationären Temperaturquelle (2.86)–(2.88) für die Ortsdimension $N = 2$ im Einheitsquadrat $\Omega = (0, 1)^2$. Dieses wird in n^2 gleiche Quadrate zerlegt,

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i,j=1}^n \bar{\Omega}_{ij}, \quad \Omega_{ij} = \left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right) \times \left(\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right), \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.90)$$

Damit verbunden ist ein Gitter mit der Feinheit $h = 1/n$ und den Gitterpunkten

$$x_{ij} = h \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}, \quad i, j = 0, \dots, n.$$

Das Differenzenverfahren bestimmt Näherungswerte y_{ij} für die Werte $y(x_{ij})$ des Zustands in den Gitterpunkten. Mit dem üblichen 5-Punkte-Stern wird $-\Delta y(x_{ij})$ in den inneren Gitterpunkten approximiert durch

$$-\Delta y(x_{ij}) \sim \frac{4y_{ij} - [y_{(i-1)j} + y_{i(j-1)} + y_{(i+1)j} + y_{i(j+1)}]}{h^2}, \quad (2.91)$$

$i, j = 1 \dots n-1$. Außerdem definieren wir offene achsenparallele Quadrate $\hat{\Omega}_{ij}$ um Mittelpunkte x_{ij} und Seitenlänge h , wo wir die Steuerungsfunktion u als konstant annehmen, d.h. wir setzen $u(x) \equiv u_{ij}$ auf $\hat{\Omega}_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n-1$. Auf dem verbleibenden Randbereich von Ω setzen wir u der Einfachheit halber null.

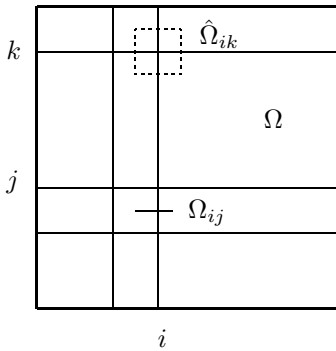
Schließlich nummerieren wir die Werte y_{ij} , u_{ij} und x_{ij} durch (z.B. lexikographisch von der Südwestecke von Ω bis zur Nordostecke) und erhalten so Vektoren $\vec{y} = (y_1, \dots, y_{(n-1)^2})^\top$,

$\vec{u} = (u_1, \dots, u_{(n-1)^2})^\top$ und analog \vec{x} der Dimension $(n-1)^2$. Ferner setzen wir $y_{\Omega,i} = y_\Omega(x_i)$, $u_{a,i} = u_a(x_i)$, $u_{b,i} = u_b(x_i)$ und fassen diese Komponenten in Vektoren \vec{u}_a , \vec{u}_b zusammen. Aus (2.91) entsteht nach Division des Zielfunktionals durch den Faktor h^2 , der aus Integralen wie $\int_{\hat{\Omega}_{ij}} y(x) dx \approx h^2 y_{ij}$ resultiert, mit einer $(n-1)^2 \times (n-1)^2$ -Matrix A_h das folgende Problem:

$$\min \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{(n-1)^2} [(y_i - y_{\Omega,i})^2 + \lambda u_i^2]$$

$$A_h \vec{y} = B_h \vec{u}, \quad \vec{u}_a \leq \vec{u} \leq \vec{u}_b.$$

Die Matrix B_h ist eine Diagonalmatrix mit den Elementen $b_{ii} = \beta(x_i)$.



Zerlegung von Ω

Bemerkung. Das Aufstellen einer diskretisierten Aufgabe ist analog mit der Methode der finiten Elemente möglich. Die Matrizen und das Zielfunktional haben dann eine andere Gestalt. Wir erläutern dieses Verfahren im Zusammenhang mit der primal-dualen Aktive-Mengen-Strategie in Abschnitt 2.12.4.

Das so entstandene Optimierungsproblem mit Gleichungs- und Ungleichungsrestriktionen kann man nun in ein verfügbares numerisches Lösungsverfahren für quadratische Optimierungsaufgaben eingeben. In MATLAB steht dazu der Code `quadprog` zur Verfügung. Außerdem werden weitere Programme für große Optimierungsaufgaben angeboten, die recht beachtliche Dimensionen verkraften. Eine Auswahl ist unter der Website von NEOS (*NEOS Server for Optimization*) zu finden. Elliptische Aufgaben in zweidimensionalen Ortsgebieten bereiten kaum Schwierigkeiten, wie die Ergebnisse von Maurer und Mittelmann [157], [158] zu semilinearen elliptischen Aufgaben mit Steuerungs- und Zustandsbeschränkungen zeigen.

Bei dieser Methode, die auch „discretize then optimize“ genannt wird, sind \vec{y} und \vec{u} gleichberechtigte Variablen, die Verschiedenheit ihrer Rollen als Zustand und Steuerung wird nicht ausgenutzt. Im nächsten Teilabschnitt erläutern wir kurz die Aufstellung eines auf u reduzierten Problems. Es ist von niedrigerer Dimension, so dass Verfahren der quadratischen Optimierung geringere Speicherprobleme haben. Diese Methode ist durchführbar, wenn nur die partielle Differentialgleichung vom Rechner bewältigt wird.

Aufstellen einer reduzierten Optimierungsaufgabe

Ist die Steuerungsfunktion als Linearkombination relativ weniger Ansatzfunktionen darstellbar, dann ist das Aufstellen einer auf u reduzierten quadratischen Optimierungsaufgabe sinnvoll, die mit verfügbaren Methoden gelöst wird. Die Ansatzfunktionen können (wie unten beschrieben) aus einer Diskretisierung resultieren, sie können aber auch durch

die konkrete Anwendung fest vorgegeben sein.

Die Steuerfunktion u habe also die Form

$$u(x) = \sum_{i=1}^m u_i e_i(x). \quad (2.92)$$

mit endlich vielen gegebenen Funktionen $e_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und variablen reellen Zahlen u_i . Außerdem seien die Beschränkungen an die Steuerfunktion u entweder äquivalent zu

$$u_a \leq u_i \leq u_b, \quad i = 1, \dots, m,$$

mit gegebenen reellen Zahlen $u_a < u_b$ oder aber von vornherein in dieser Form gegeben.

Beispiel. Im Zusammenhang mit der Zerlegung (2.90) seien die Ansatzfunktionen $\epsilon_{ij}(x)$ durch

$$\epsilon_{ij}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega_{ij} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Ihr Wert auf den Rändern zwischen den Teilgebieten ist ohne Belang, weil diese das Maß null haben. Diese Funktionen werden von 1 bis $m = n^2$ durchnummeriert, $e_1 = \epsilon_{11}, \dots, e_n = \epsilon_{1n}, e_{n+1} = \epsilon_{21}, \dots, e_m = \epsilon_{nn}$. Es entsteht eine Treppenfunktion u . Zu beachten ist, dass wir hier die Steuerung auf den Teilgebieten Ω_{ij} als konstant annehmen, während wir im letzten Teilabschnitt dazu die Hilfsgebiete $\hat{\Omega}_{ij}$ benutzt haben. Das lag an der Verwendung des Differenzenverfahrens zur Lösung der Differentialgleichung.

Der Einfachheit halber nehmen wir dazu wieder an, dass wir zu gegebener Steuerfunktion u den Zustand y als Lösung der Zustandsgleichung exakt bestimmen können. Die Hauptarbeit zur Aufstellung des reduzierten Problems steckt nun in der Berechnung der Funktionen

$$y_i(x) := (S e_i)(x), \quad i = 1, \dots, m.$$

Diese Funktionen $y_i(x)$ sind die Lösungen von

$$\begin{aligned} -\Delta y &= \beta e_i \\ y|_{\Gamma} &= 0. \end{aligned}$$

Deshalb sind m partielle Differentialgleichungen zu lösen, wenn man diesen Weg geht. Bei der oben beschriebenen Zerlegung in Quadrate der Seitenlänge $h = 0.01$ wären das immerhin schon 10^4 . Deshalb lohnt sich das direkte Aufstellen einer auf u reduzierten Aufgabe nur bei relativ kleinem m oder wenn man die gleiche Aufgabe oftmals mit verschiedenen Daten rechnen möchte.

Sind die Funktionen y_i einmal bestimmt, dann erhält man den Zustand $y = Su$ mit dem Superpositionsprinzip für lineare Gleichungen aus

$$y = \sum_{i=1}^m u_i y_i. \quad (2.93)$$

Nach Einsetzen der Darstellungen (2.92), (2.93) in die Zielfunktion entsteht die Zielfunktion

$$f_m(u_1, \dots, u_m) = \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^m u_i y_i - y_{\Omega} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \left\| \sum_{i=1}^m u_i e_i \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Als endlichdimensionale Approximation des Optimalsteuerungsproblems lösen wir

$$(P_m) \quad \min_{u_a \leq u_i \leq u_b} f_m(\vec{u})$$

zur Bestimmung von $\vec{u} = (u_1, \dots, u_m)^\top$. Eine Umformung der Zielfunktion ergibt

$$\begin{aligned} f_m(\vec{u}) &= \frac{1}{2} \|y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 - \left(y_\Omega, \sum_{i=1}^m u_i y_i \right)_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^m u_i y_i, \sum_{j=1}^m u_j y_j \right)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \left(\sum_{i=1}^m u_i e_i, \sum_{j=1}^m u_j e_j \right)_{L^2(\Omega)} \\ &= \frac{1}{2} \|y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 - \sum_{i=1}^m u_i (y_\Omega, y_i)_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m u_i u_j (y_i, y_j)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \sum_{i,j=1}^m u_i u_j (e_i, e_j)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Folglich ist (P_m) bis auf die Konstante $\frac{1}{2} \|y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2$ äquivalent zur endlichdimensionalen *quadratischen Optimierungsaufgabe*

$$\boxed{\begin{aligned} \min \quad & \left\{ \frac{1}{2} \vec{u}^\top (C + \lambda D) \vec{u} - \vec{a}^\top \vec{u} \right\} \\ \vec{u}_a &\leq \vec{u} \leq \vec{u}_b \end{aligned}} \quad (2.94)$$

mit $\vec{u}_a = (u_a, \dots, u_a)^\top$, $\vec{u}_b = (u_b, \dots, u_b)^\top$. Dazu sind folgende Größen numerisch vor-
auszuberechnen:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (a_i), \quad a_i = (y_\Omega, y_i)_{L^2(\Omega)} \\ C &= (c_{ij}), \quad c_{ij} = (y_i, y_j)_{L^2(\Omega)} \\ D &= (d_{ij}), \quad d_{ij} = (e_i, e_j)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Im Fall der im Beispiel verwendeten Treppenfunktionen gilt $(e_i, e_j)_{L^2(\Omega)} = \delta_{ij} \|e_i\|_{L^2(\Omega)}^2$. Dann ist D eine Diagonalmatrix, $D = \text{diag}(\|e_i\|_{L^2(\Omega)}^2)$.

Zur Lösung solcher Aufgaben steht in MATLAB das bereits erwähnte Programm **quadprog** zur Verfügung. Zahlreiche weitere Codes sind unter der Website von NEOS (NEOS Server for Optimization) im Internet zu finden.

2.12.4 Primal-duale Aktive-Mengen-Strategie

Der unendlichdimensionale Fall

Wir erläutern diese für Steuerprobleme bei partiellen Differentialgleichungen auf Ito und Kunisch [114] zurückgehende Technik für die Aufgabe der optimalen stationären Temperaturquelle

$$\min f(u) := \frac{1}{2} \|Su - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

bei

$$u \in U_{ad} = \{u \in L^2(\Omega) : u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \text{ f.ü. in } \Omega\}.$$

Dabei ist $S : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ der Lösungsoperator zu

$$\begin{aligned} -\Delta y &= u \\ y|_{\Gamma} &= 0 \end{aligned}$$

(der besseren Lesbarkeit halber wird $\beta(x) = 1$ angenommen). Die optimale Steuerung muss mit dem adjungierten Zustand p aus (2.50) von S. 53 die Projektionsbeziehung (2.58) auf S. 56 erfüllen,

$$\bar{u}(x) = \mathbb{P}_{[u_a(x), u_b(x)]} \{ -\lambda^{-1} p(x) \}.$$

Wir definieren

$$\mu = -(\lambda^{-1} p + \bar{u}) = -\lambda^{-1} f'(\bar{u}).$$

Aus der obigen Projektionsbeziehung folgt dann

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u_a(x), & \text{falls } -\lambda^{-1} p(x) < u_a(x) & (\Leftrightarrow \mu(x) < 0) \\ -\lambda^{-1} p(x), & \text{falls } -\lambda^{-1} p(x) \in [u_a(x), u_b(x)] & (\Leftrightarrow \mu(x) = 0) \\ u_b(x), & \text{falls } -\lambda^{-1} p(x) > u_b(x) & (\Leftrightarrow \mu(x) > 0). \end{cases} \quad (2.95)$$

Im oberen Fall gilt nach Definition von μ und wegen $\bar{u} = u_a$ die Ungleichung $\mu(x) < 0$ und daher $\bar{u}(x) + \mu(x) < u_a(x)$, im unteren analog $\bar{u}(x) + \mu(x) > u_b(x)$. Im mittleren haben wir $\mu(x) = 0$, somit $\bar{u}(x) + \mu(x) = -\lambda^{-1} p(x) \in [u_a(x), u_b(x)]$. Also erfüllt $u = \bar{u}$ die Beziehungen

$$u(x) = \begin{cases} u_a(x), & \text{falls } u(x) + \mu(x) < u_a(x) \\ -\lambda^{-1} p(x), & \text{falls } u(x) + \mu(x) \in [u_a(x), u_b(x)] \\ u_b(x), & \text{falls } u(x) + \mu(x) > u_b(x). \end{cases} \quad (2.96)$$

Umgekehrt sei ein $u \in U_{ad}$ gegeben, das (2.96) genügt. Dann erfüllt u die Projektionsbeziehung und ist deshalb optimal. Beispielsweise folgt aus der obersten Zeile wegen $u = u_a$ sofort $\mu(x) < 0$, daher

$$0 > -\lambda^{-1} p - u = -\lambda^{-1} p - u_a,$$

deshalb $-\lambda^{-1} p < u_a$ und folglich in diesem Fall $u(x) = \mathbb{P}_{[u_a(x), u_b(x)]} \{ -\lambda^{-1} p(x) \}$. Analog diskutiert man die anderen Fälle. Somit ist die Größe $u + \mu$ ein Indikator für Aktivität oder Inaktivität der Ungleichungsrestriktionen. Diese Vorbemerkungen motivieren die folgende *primal-duale Aktive-Mengen-Strategie*:

Am Anfang werden beliebige Startfunktionen u_0, μ_0 aus $L^2(\Omega)$ fixiert. Dabei braucht u_0 nicht zulässig zu sein. Die Iterierten u_{n-1} und μ_{n-1} seien bereits bestimmt worden. Zur Berechnung von u_n führt man folgende Schritte aus:

S1 (*Neue aktive bzw. inaktive Mengen*)

$$\begin{aligned} A_n^b &= \{x : u_{n-1}(x) + \mu_{n-1}(x) > u_b(x)\} \\ A_n^a &= \{x : u_{n-1}(x) + \mu_{n-1}(x) < u_a(x)\} \\ I_n &= \Omega \setminus (A_n^b \cup A_n^a). \end{aligned}$$

Wenn $A_n^a = A_{n-1}^a$ und $A_n^b = A_{n-1}^b$ gilt, dann wird das Verfahren wegen Optimalität beendet, ansonsten mit dem nächsten Schritt fortgesetzt.

S2 (Neue Steuerung)

Löse das folgende lineare System für $u \in L^2(\Omega)$, $y, p \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} -\Delta y &= u \\ -\Delta p &= y - y_\Omega, \end{aligned} \quad u = \begin{cases} u_a & \text{auf } A_n^a \\ -\lambda^{-1} p & \text{auf } I_n \\ u_b & \text{auf } A_n^b. \end{cases}$$

Man definiert $u_n := u$, $p_n := p$, $\mu_n := -(\lambda^{-1} p_n + u_n)$, $n := n+1$ und führt den nächsten Schritt **S1** aus. Die eindeutige Lösbarkeit des obigen linearen Systems folgt daraus, dass es die notwendige Optimalitätsbedingung für ein lösbares linear-quadratisches Optimalsteuerungsproblem ist (Lösung der eingangs gestellten Aufgabe bei Fixierung von u durch $u = u_a$ auf A_n^a und $u = u_b$ auf A_n^b).

Das in Schritt S2 zu lösende lineare System schreibt man zweckmäßiger Weise etwas anders auf. Mit Hilfe der charakteristischen Funktionen χ_n^a und χ_n^b der Mengen A_n^a bzw. A_n^b fasst man die obigen Beziehungen für u wie folgt zusammen:

$$u + (1 - \chi_n^a - \chi_n^b) \lambda^{-1} p = \chi_n^a u_a + \chi_n^b u_b.$$

Somit ist in S2 folgendes System bei homogenen Randbedingungen für y und p zu lösen:

$$\begin{aligned} -\Delta y \quad -u &= 0 \\ -\Delta p \quad -y &= -y_\Omega \\ (1 - \chi_n^a - \chi_n^b) \lambda^{-1} p \quad +u &= \chi_n^a u_a + \chi_n^b u_b. \end{aligned} \tag{2.97}$$

Die Fallunterscheidung (2.95) ändert sich offenbar nicht, wenn man für die Funktion μ ein Vielfaches $c\mu$ mit einer positiven Konstanten c einsetzt. Deshalb besteht die Möglichkeit, in Schritt S1 an Stelle von μ_{n-1} auch mit einem festen Vielfachen $c\mu_{n-1}$ zu arbeiten. Das kann numerisch von Vorteil sein und wird z.T. für die Konvergenzanalyse genutzt.

Zur Analysis des Verfahrens und zu etwas allgemeineren Varianten, in denen z.B. durch eine Multiplikatorenverschiebung Zulässigkeit erzwungen wird, verweisen wir auf das Buch Ito und Kunisch [115] sowie auf Ito und Kunisch [114], Bergounioux et al. [26] und Kunisch und Rösch [129]. Die Methode ist als halbglatte (semismooth) Newtonverfahren interpretierbar, was ihre i.a. überlineare Konvergenz erklärt, siehe [115] oder [108].

Numerische Umsetzung mit einer FEM-Approximation der Aufgabe

Bei der numerischen Anwendung der primal-dualen Aktive-Mengen-Strategie ist eine diskrete Variante zu rechnen. Im Unterschied zu der auf S. 77 beschriebenen Diskretisierung der Poissongleichung durch finite Differenzen gehen wir jetzt von einer Approximation durch die Finite-Elemente-Methode (FEM) aus. Wir setzen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ als polygonal berandetes Gebiet voraus, das durch eine (reguläre) Triangulation in endlich viele Dreiecke mit paarweise disjunktem Inneren zerlegt ist. Dazu gehört eine Menge von stückweise linearen und stetigen Basisfunktionen $\{\Phi_1, \dots, \Phi_\ell\} \subset H_0^1(\Omega)$. Wir beschreiben die reguläre Triangulation und die Form der Basisfunktionen nicht näher und verweisen auf die Bücher von Braess [37], Brenner und Scott [38], Ciarlet [57] oder Großmann und Roos [87]. Für Einsteiger ist das Buch von Göring et al. [82] sehr zu empfehlen.

Die Steuerung sei stückweise konstant, d.h. u ist konstant auf den einzelnen Dreiecken der Zerlegung. Dazu definieren wir entsprechende Ansatzfunktionen e_i , $i = 1, \dots, m$, die identisch gleich eins auf dem Teildreieck i sind und null auf den restlichen.

Insgesamt verwenden wir damit die Ansätze

$$y(x) = \sum_{i=1}^{\ell} y_i \Phi_i(x), \quad u(x) = \sum_{i=1}^m u_i e_i(x)$$

mit reellen Unbekannten y_i, u_j , $i = 1, \dots, \ell$, $j = 1, \dots, m$. Nach Einsetzen dieser Darstellungen in die schwache Formulierung der Poissongleichung und Wahl von Φ_j als Testfunktion ergibt sich

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{\ell} y_i \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_j \, dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m u_i e_i \Phi_j \, dx$$

und schließlich das folgende lineare Gleichungssystem für $\vec{y} = (y_1, \dots, y_{\ell})^{\top}$ und $\vec{u} = (u_1, \dots, u_m)^{\top}$:

$$K_h \vec{y} = B_h \vec{u}$$

mit der *Steifigkeitsmatrix* K_h und einer Matrix B_h , deren Elemente durch

$$k_{h,ij} = \int_{\Omega} \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_j \, dx, \quad b_{h,ij} = \int_{\Omega} \Phi_i e_j \, dx$$

definiert sind. Die Zahl h bezeichnet die Gitterweite der Triangulation und ist das Maß für deren Feinheit. Nach leichter Rechnung erhalten wir ferner

$$\frac{1}{2} \|y - y_{\Omega}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{2} \vec{y}^{\top} M_h \vec{y} - \vec{a}_h^{\top} \vec{y} + \frac{\lambda}{2} \vec{u}^{\top} D_h \vec{u} + \frac{1}{2} \|y_{\Omega}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

mit *Massematrizen* M_h, D_h und einem Vektor \vec{a}_h , deren Elemente durch

$$m_{h,ij} = \int_{\Omega} \Phi_i \Phi_j \, dx, \quad d_{h,ij} = \int_{\Omega} e_i e_j \, dx, \quad a_{h,i} = \int_{\Omega} \Phi_i y_{\Omega} \, dx$$

definiert sind. Der konstante Term mit $\|y_{\Omega}\|$ hat auf die Minimierung keinen Einfluss. Weil die Inneren der Teildreiecke zueinander disjunkt sind, ist D_h eine Diagonalmatrix. Als Diskretisierung der eingangs gestellten Optimalsteuerungsaufgabe ist nun das Problem

$$\boxed{\begin{aligned} \min \left\{ \frac{1}{2} \vec{y}^{\top} M_h \vec{y} - \vec{a}_h^{\top} \vec{y} + \frac{\lambda}{2} \vec{u}^{\top} D_h \vec{u} \right\}, \\ K_h \vec{y} = B_h \vec{u}, \\ \vec{u}_a \leq \vec{u} \leq \vec{u}_b \end{aligned}} \quad (2.98)$$

mit $\vec{u}_a = (u_a, \dots, u_a)^{\top}$, $\vec{u}_b = (u_b, \dots, u_b)^{\top}$ zu lösen.

Das zugehörige Optimalitätssystem ist durch

$$\begin{aligned} K_h \vec{y} &= B_h \vec{u}, & \vec{u}_a &\leq \vec{u} \leq \vec{u}_b, \\ K_h \vec{p} &= M_h \vec{y} - \vec{a}_h, \\ (\lambda D_h \vec{u} + B_h^{\top} \vec{p})^{\top} (\vec{v} - \vec{u}) &\geq 0 & \forall \vec{u}_a &\leq \vec{v} \leq \vec{u}_b \end{aligned}$$

gegeben. Da D_h eine Diagonalmatrix ist, schließen wir daraus analog zum unendlichdimensionalen Fall mit $\vec{\mu} = -((\lambda D_h)^{-1} B_h^\top \vec{p} + \vec{u})$ für den optimalen Vektor \vec{u} auf

$$u_i = \begin{cases} u_a, & \text{falls } u_i + \mu_i < u_a \\ \mu_i, & \text{falls } u_i + \mu_i \in [u_a, u_b] \\ u_b, & \text{falls } u_i + \mu_i > u_b, \end{cases}$$

$i = 1, \dots, m$. Durch Vergleich mit dem unendlichdimensionalen Fall wird damit die folgende primal-duale Aktive-Mengen-Strategie plausibel:

Als Startwerte werden Vektoren $\vec{u}_0, \vec{\mu}_0$ gewählt. Im n -ten Schritt sind die Mengen der aktiven bzw. inaktiven Restriktionen durch

$$\begin{aligned} A_n^b &= \{i \in \{1, \dots, m\} : u_{n-1,i} + \mu_{n-1,i} > u_b\}, \\ A_n^a &= \{i \in \{1, \dots, m\} : u_{n-1,i} + \mu_{n-1,i} < u_a\}, \\ I_n &= \{1, \dots, m\} \setminus (A_n^b \cup A_n^a) \end{aligned}$$

definiert. Nach Festlegung dieser neuen aktiven Mengen A_n^a und A_n^b werden in Analogie zu den auf S. 82 definierten charakteristischen Funktionen χ_n^a, χ_n^b Diagonalmatrizen X_n^a, X_n^b mit Diagonalelementen

$$X_{n,ii}^a = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \in A_n^a \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad \begin{cases} X_{n,ii}^b = 1, & \text{falls } i \in A_n^b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

bestimmt. Wir setzen $E_h := (\lambda D_h)^{-1}(I - X_n^a - X_n^b)$. Die Diagonalelemente $e_{h,ii}$ von E_h verschwinden genau dann, wenn $i \in A_n^a \cup A_n^b$. Danach ist das folgende lineare Gleichungssystem für \vec{p}, \vec{y} und \vec{u} zu lösen:

$$\begin{bmatrix} 0 & K_h & -B_h \\ K_h & -M_h & 0 \\ E_h B_h^\top & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{p} \\ \vec{y} \\ \vec{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\vec{a}_h \\ X_n^a \vec{u}_a + X_n^b \vec{u}_b \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

Das Ergebnis sind neue Vektoren $\vec{u}_n := \vec{u}$ und $\mu_n := -((\lambda D_h)^{-1} B_h^\top \vec{p}_n + \vec{u}_n)$.

Man kann beweisen, dass dieses Verfahren nach endlich vielen Schritten das Optimum findet. Dieser Fall tritt ein, wenn sich erstmalig $A_n^a = A_{n-1}^a$ und $A_n^b = A_{n-1}^b$ ergibt. Dann erfüllt der Vektor \vec{u}_n alle Restriktionen. In diesem Sinne erzeugt die primal-duale Aktive-Mengen-Strategie mit Ausnahme des Optimums unzulässige Iterierte. Beweise sind in [26], [129] zu finden. Durch Einführen einer Multiplikatorenverschiebung lässt sich in allen Schritten Zulässigkeit erreichen, [114]. Außerdem kann wie im unendlichdimensionalen Fall $c\mu_n$ an Stelle von μ_n verwendet werden.

Oft wird an Stelle eines stückweise konstanten Ansatzes für die Steuerung der stückweise lineare Ansatz $u = \sum_{i=1}^n u_i \Phi_i$ verwendet. Dann ist D_h keine Diagonalmatrix mehr und die obige Diskussion der Variationsungleichung nicht korrekt. Hier schreibt man meist die in Abschnitt 2.12.4 für den stetigen Fall beschriebene Aktive-Mengen-Strategie punktweise in den Gitterpunkten der Triangulierung auf. Man ersetzt also in den Fallunterscheidungen $x \in \Omega$ durch die Gitterpunkte x_i .

Bemerkung. Im Zusammenhang mit der FEM-Approximation interessiert die Abschätzung des Fehlers zwischen der exakten optimalen Steuerung und der optimalen Steuerung der diskretisierten Aufgabe. Wir verweisen z.B. bei elliptischen Aufgaben auf [14], [48], [49], [105], [108], [160] und im Zusammenhang mit parabolischen auf [155], [178], [193].

Andere Aktive-Mengen-Strategien

Die eben beschriebene Strategie erzeugt bis vor Erreichen der Lösung unzulässige Steuerungen. Liegt erstmals Zulässigkeit vor, dann ist das Optimum erreicht.

Es existieren mit projizierten Newtonverfahren ähnliche Methoden, die generell zulässige Steuerungen erzeugen und ein vergleichbares Konvergenzverhalten wie die beschriebene primal-duale Aktive-Mengen-Strategie aufweisen. Sie wurden insbesondere erfolgreich auf parabolische Aufgaben angewendet. Wir verweisen auf die Darstellung der Grundlagen des Verfahrens bei Bertsekas [29] oder Kelley [120] und in Bezug auf die Lösung parabolischer Optimalsteuerungsprobleme auf Kelley und Sachs [121], [122].

Direkte Lösung des Optimalitätssystems

Eine weitere empfehlenswerte Methode besteht in der direkten numerischen Lösung des nichtglatten Optimalitätssystems

$$\begin{aligned} -\Delta y &= \beta \mathbb{P}_{[u_a, u_b]} \{-\lambda^{-1} \beta p\} & -\Delta p &= y - y_\Omega \\ y|_\Gamma &= 0 & p|_\Gamma &= 0. \end{aligned}$$

Dieses Verfahren wird für parabolische Probleme auf S. 137 etwas genauer beschrieben.

2.13 Adjungierter Zustand als Lagrangescher Multiplikator *

2.13.1 Elliptische Gleichungen mit Daten aus V^*

Alle in diesem Kapitel behandelten elliptischen Randwertprobleme wurden mit der Theorie schwacher Lösungen auf die allgemeine Form

$$a[y, v] = F(v) \tag{2.100}$$

gebracht, in der $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform und F ein Funktional aus V^* ist. Wir betrachten die Bilinearform jetzt aus einer etwas anderen Sicht. Für fest vorgegebenes $y \in V$ und variables $v \in V$ ist die Abbildung $a_y : v \mapsto a[y, v]$ von V in \mathbb{R} linear und stetig. Sie ist damit selbst ein lineares stetiges Funktional auf V , also ein Element aus V^* . Die Zuordnung $y \mapsto a_y$ ist eine lineare Abbildung von V in V^* , die wir mit A bezeichnen. Der Operator $A : V \rightarrow V^*$ ist stetig, denn es gilt

$$\begin{aligned} \|A y\|_{V^*} &= \sup_{\|v\|_V=1} |a_y(v)| = \sup_{\|v\|_V=1} |a[y, v]| \\ &\leq \sup_{\|v\|_V=1} \alpha_0 \|y\|_V \|v\|_V = \alpha_0 \|y\|_V \end{aligned}$$

mit α_0 aus Ungleichung (2.6) von S. 26 (Stetigkeit der Bilinearform a). Daraus folgt $\|A\| \leq \alpha_0$, A ist also beschränkt, daher stetig und wir haben

$$a[y, v] = a_y(v) \quad \forall y, v \in V. \tag{2.101}$$

Die Variationsformulierung $a[y, v] = F(v)$ kann man deshalb auch als Gleichung in V^* aufschreiben,

$$A y = F.$$

Das Lemma von Lax und Milgram sagt aus, dass diese Gleichung unter den entsprechenden Voraussetzungen für jedes Funktional $F \in V^*$ genau eine Lösung $y \in V$ hat und $\|y\|_V \leq c_a \|F\|_{V^*}$ gilt. Deshalb existiert der inverse Operator $A^{-1} : F \mapsto y$ von V^* in V und ist stetig. Unsere Betrachtungen fasst das folgende Lemma zusammen:

Lemma 2.35 *Jede V -elliptische und beschränkte Bilinearform $a = a[y, v]$ erzeugt durch*

$$\langle A y, v \rangle_{V^*, V} = a[y, v] \quad \forall y, v \in V$$

einen stetigen und bijektiven linearen Operator $A : V \rightarrow V^$. Der inverse Operator $A^{-1} : V^* \rightarrow V$ ist ebenfalls stetig.*

Die Stetigkeit von A^{-1} folgt aus dem Lemma von Lax und Milgram, aber auch aus dem bekannten Satz von Banach über den inversen Operator, weil A surjektiv ist.

Die Anwendung von Lemma 2.35 hat mehrere Vorteile. Man kann mit dem Operator A so arbeiten wie mit der Matrix A im Abschnitt 1.4. Die Darstellung wird symmetrisch, denn für den adjungierten Operator A^* ergibt sich $A^* : (V^*)^* \rightarrow V^*$ und deshalb $A^* : V \rightarrow V^*$ im Falle eines reflexiven Raums V , der hier immer vorliegt.

2.13.2 Anwendung beim Beweis von Optimalitätsbedingungen

Wir wollen die Vorteile der Anwendung von Lemma 2.35 am Beispiel der optimalen stationären Randtemperatur verdeutlichen, bei dem $y \in H^1(\Omega)$ die schwache Lösung der folgenden Aufgabe ist:

$$\begin{aligned} -\Delta y &= 0 & \text{in } \Omega \\ \partial_\nu y + \alpha y &= \alpha u & \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Es sei $\alpha \geq 0$ und $\|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma)} > 0$ vorausgesetzt. Hier wird $V = H^1(\Omega)$ gewählt und a sowie F sind gegeben durch

$$\begin{aligned} a[y, v] &= \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma} \alpha y v \, ds \\ F(v) &= \int_{\Gamma} \alpha u \tau v \, ds, \end{aligned}$$

wobei $\tau : V \rightarrow L^2(\Gamma)$ der Spuroperator ist. Mit dem von $a[y, v]$ erzeugten Operator A kann die Aufgabe der optimalen Steuerung so aufgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \min J(y, u) &:= \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ A y &= B u, \quad u \in U_{ad}. \end{aligned} \tag{2.102}$$

Dabei ist $B : L^2(\Gamma) \rightarrow V^* = (H^1(\Omega))^*$ definiert durch

$$\langle B u, v \rangle_{V^*, V} = \int_{\Gamma} \alpha u \tau v \, ds \quad \forall v \in V$$

Im Weiteren identifizieren wir $(L^2(\Omega))^*$ mit $L^2(\Omega)$ aber V^* nicht mit V , weil das z.B. die Verwendung des H^1 -Skalarprodukts an Stellen erfordern würde, wo das nicht sinnvoll ist. Wir definieren den Lösungsoperator durch $G := A^{-1}$, $G : V^* \rightarrow V$, also gilt $y = GBu$. Nun betrachten wir aber G als Operator mit Bild in $L^2(\Omega)$, bezeichnet mit S . Das ist wegen $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$ sinnvoll. Wir setzen also wieder $S = E_V G$ mit dem Einbettungsoperator $E_V : V \rightarrow L^2(\Omega)$; dann folgt $S : V^* \rightarrow L^2(\Omega)$ und

$$S = E_V A^{-1}.$$

Der adjungierte Operator bildet S^* von $L^2(\Omega)$ nach V ab, damit insbesondere in $L^2(\Omega)$. Nach Einsetzen von $y = E_V G B u = S B u$ in $J(y, u)$ lautet die Aufgabe (2.102) kurz

$$\min_{u \in U_{ad}} f(u) := \frac{1}{2} \|S B u - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

Satz 2.14 von S.40 sichert die Existenz der optimalen Steuerung \bar{u} und Satz 2.22 auf S. 51 liefert mit (2.45) die entsprechende Variationsungleichung

$$(B^* S^* (\bar{y} - y_\Omega) + \lambda \bar{u}, u - \bar{u})_{L^2(\Gamma)} \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \quad (2.103)$$

Wir definieren den adjungierten Zustand p durch

$$p := S^* (\bar{y} - y_\Omega) = (A^{-1})^* E_V^* (\bar{y} - y_\Omega).$$

Dann löst p die adjungierte Gleichung

$$A^* p = E_V^* (\bar{y} - y_\Omega). \quad (2.104)$$

$E_V^* : L^2(\Omega) \rightarrow V^*$ ordnet die Funktion $\bar{y} - y_\Omega$ sich selbst zu, aber betrachtet als Funktional auf V , das durch $(E_V^* (\bar{y} - y_\Omega))(v) := (\bar{y} - y_\Omega, v)_{L^2(\Omega)}$ definiert ist. Jetzt ist noch die konkrete Form von A^* zu bestimmen, um die Optimalitätsbedingungen zu erhalten. Die Bilinearform $a[y, v]$ ist symmetrisch. Deshalb gilt

$$\langle A y, v \rangle_{V^*, V} = a[y, v] = a[v, y] = \langle A v, y \rangle_{V^*, V} = \langle y, A v \rangle_{V, V^*} \quad \forall y, v \in V,$$

woraus $A = A^*$ folgt. Die adjungierte Gleichung (2.104) ist deshalb äquivalent zum Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta p &= \bar{y} - y_\Omega \\ \partial_\nu p + \alpha p &= 0. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Für den adjungierten Operator $B^* : V \rightarrow L^2(\Gamma)$ ergibt sich $B^* p = \alpha \tau p$ und so nimmt die Variationsungleichung (2.103) die Form

$$(\alpha \tau p + \lambda \bar{u}, u - \bar{u})_{L^2(\Gamma)} \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad} \quad (2.106)$$

an. All das hatten wir bereits auf anderem Wege bewiesen. Aber die hier vorgestellte Methode ist allgemeiner. Sie wird insbesondere in der Monographie von Lions [144] angewendet, der wir hier gefolgt sind. Ein Vorteil liegt z.B. in der bereits auf S. 32 erläuterten Möglichkeit, als Steuerungen Funktionen aus L^r -Räumen mit $r < 2$ oder allgemeinere Funktionale aus V^* zu verwenden. Außerdem kann man mit dieser Methode den adjungierten Zustand p in natürlicher Weise als Lagrangeschen Multiplikator definieren. Das wird im Abschnitt 2.13.3 erläutert.

2.13.3 Adjungierter Zustand als Multiplikator

Das eben erhaltene Ergebnis kann auch mit der Regel der Lagrangeschen Multiplikatoren für Optimierungsaufgaben in Banachräumen hergeleitet werden. Im Vorgriff auf den Inhalt von Kapitel 6 führen wir das exemplarisch an der Aufgabe (2.102) vor. Sie ist ein Optimierungsproblem im Banachraum vom Typ (6.1) auf S. 255 mit Gleichungsrestriktion $Ay - Bv = 0$ für die Unbekannte $u := (y, v) \in U := Y \times L^2(\Gamma)$ und Bildraum $Z := Y^*$ für die Gleichung. Wir bezeichnen hier die Steuerung mit v an Stelle von u und setzen $Y := H^1(\Omega)$, $V_{ad} := U_{ad}$, um kompatibel mit den Bezeichnungen aus Kapitel 6 zu sein. Wir betrachten somit die Aufgabe

$$\min J(y, v) := \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|v\|_{L^2(\Gamma)}^2, \quad Ay - Bv = 0, \quad v \in V_{ad}.$$

Die zugehörige Lagrangefunktion $L : Y \times U \times Y^{**} \rightarrow \mathbb{R}$ lautet gemäß (6.2) auf S. 255

$$\begin{aligned} L(y, v, z^*) &= J(y, v) + \langle z^*, Ay - Bv \rangle_{Y^{**}, Y^*} \\ &= \frac{1}{2} \|E_V y - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|v\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \langle z^*, Ay - Bv \rangle_{Y^{**}, Y^*}. \end{aligned}$$

Wegen Reflexivität gilt nach Identifikation $Y^{**} = Y$ und z^* kann mit einem Element aus Y identifiziert werden. Der Operator A ist surjektiv und deshalb ist die Regularitätsbedingung (6.11) von Zowe und Kurcyusz für Gleichungsrestriktionen erfüllt. Laut Satz 6.3 auf S. 260 existiert daher ein Lagrangescher Multiplikator $z^* \in Y$. Mit diesem ist die Variationsungleichung (6.13) erfüllt, also in unserem Falle

$$D_{(y,v)} L(\bar{y}, \bar{v}, z^*)(y - \bar{y}, v - \bar{v}) \geq 0 \quad \forall (y, v) \in Y \times V_{ad}.$$

Weil y frei wählbar ist, folgt

$$D_y L(\bar{y}, \bar{v}, z^*) = 0,$$

also

$$E_V^*(E_V \bar{y} - y_\Omega) + A^* z^* = 0$$

und mit $p := -z^*$ sowie $E_V \bar{y} = \bar{y}$ schließlich die Gleichung (2.104),

$$A^* p = E_V^*(\bar{y} - y_\Omega).$$

Die Lösung dieser Gleichung ist eindeutig bestimmt und schwache Lösung der Aufgabe (2.105). Auf diese Weise haben wir folgendes Resultat erhalten:

Lemma 2.36 *Der adjungierte Zustand p zur optimalen Steuerung \bar{v} des Problems der optimalen stationären Temperaturquelle ist Lagrangescher Multiplikator zur gegebenen Zustandsgleichung $Ay - Bv = 0$. Als solcher ist er eindeutig bestimmt.*

Der Vollständigkeit halber erwähnen wir noch, dass aus $D_v L(\bar{y}, \bar{v}, z^*)(v - \bar{v}) \geq 0$ für alle $v \in V_{ad}$ wie erwartet die Variationsungleichung (2.106) folgt, formuliert mit v an Stelle von u .

Auf diese Weise können auch alle anderen Aufgaben bei linearen elliptischen Gleichungen behandelt werden. Eine ähnliche Vorgehensweise ist für parabolische Gleichungen sinnvoll. Schwierigkeiten ergeben sich allerdings bei gewissen Klassen nichtlinearer Gleichungen (siehe Kapitel 4), weil rechte Seiten $v \in Y^*$ nur die Regularität $y \in H^1(\Omega)$ ergeben. Bei unseren nichtlinearen Aufgaben werden wir aber die Beschränktheit des Zustands y benötigen, die in $H^1(\Omega)$ nicht gewährleistet ist. Zur Untersuchung von Zustandsbeschränkungen brauchen wir später sogar die Regularität $y \in C(\bar{\Omega})$.

2.14 Höhere Regularität für elliptische Aufgaben *

2.14.1 Grenzen des Zustandsraums $H^1(\Omega)$

In diesem Kapitel wurde der Zustand generell im Raum $H^1(\Omega)$ betrachtet. Das ist für gängige linear-quadratische Aufgaben ausreichend. Schon bei einfachen Änderungen stößt man aber auf Schwierigkeiten, die in $H^1(\Omega)$ nicht zu beheben sind. Die nächsten zwei Beispiele verdeutlichen das.

Minimierung eines Punktfunktional

An Stelle des bisher verwendeten quadratischen Integralfunktional soll der Wert des Zustands an einem fixierten Punkt $x_0 \in \Omega$ minimiert werden. Wir betrachten also die Aufgabe

$$\min y(x_0)$$

bei

$$\begin{aligned} -\Delta y + y &= 0 & \text{in } \Omega \\ \partial_\nu y + \alpha y &= u & \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

und den Restriktionen an die Steuerfunktion $u \in L^2(\Gamma)$,

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x).$$

Diese Aufgabe ist in $H^1(\Omega)$ nicht korrekt gestellt, denn der Wert $y(x_0)$ ist erst bei Stetigkeit von y definiert. Hat Ω mindestens die Dimension 2, dann ist diese Eigenschaft nicht gesichert. Wir behandeln die Aufgabe in $Y = H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ im Abschnitt 6.2.1.

Bestmögliche Approximation in der Maximumnorm

Ähnlich liegen die Dinge bei der Aufgabe

$$\min J(y, u) := \|y - y_\Omega\|_{C(\bar{\Omega})} + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2$$

mit den gleichen Restriktionen wie im Fall des Punktfunktional. Hier soll y den Zielzustand y_Ω nicht im quadratischen Mittel, sondern gleichmäßig approximieren.

Auch in diesem Fall ist $H^1(\Omega)$ nicht der passende Zustandsraum, denn y muss wieder stetig sein, damit J definiert ist. Außerdem ist J zwar konvex, aber nicht differenzierbar. Wir behandeln die Aufgabe durch Überführung in ein Problem mit differenzierbarem Funktional und punkweisen Zustandsbeschränkungen in Abschnitt 6.2.1.

2.14.2 Sobolew-Slobodetskii-Räume

Wir geben hier einige wenige Erläuterungen zu Sobolewräumen mit gebrochener Ableitungsordnung. Diese Räume sind für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen sehr wichtig, werden hier aber nur im Abschnitt 2.15 zum Nachweis benutzt, dass die optimale Steuerung des Problems der optimalen stationären Randtemperatur im Raum $H^1(\Gamma)$ liegt. In der folgenden Definition halten wir uns an Adams [2], Thm. 7.48.:

Definition. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet, $s > 0$ nicht ganz und $\lambda = s - [s]$ der nichtganze Anteil von s . Unter $H^s(\Omega)$ versteht man den normierten Raum aller Funktionen $v \in H^{[s]}(\Omega)$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{|\alpha|=[s]} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(D^{\alpha}v(x) - D^{\alpha}v(y))^2}{|x - y|^{N+2\lambda}} dx dy < \infty.$$

Dieser Raum wird versehen mit der Norm

$$\|v\|_{H^s(\Omega)}^2 = \|v\|_{H^{[s]}(\Omega)}^2 + \sum_{|\alpha|=[s]} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(D^{\alpha}v(x) - D^{\alpha}v(y))^2}{|x - y|^{N+2\lambda}} dx dy.$$

Um $H^s(\Gamma)$ zu definieren, benötigt man die Darstellung des Randes $y_N = h_i(y)$ mit $y \in Q_{N-1}$ in allen lokalen Koordinatensystemen S_i , die zur Definition von $C^{k,1}$ -Gebieten in Abschnitt 2.2.2 verwendet wurde. Eine Funktion v gehört zu $H^s(\Gamma)$, wenn alle Funktionen $v_i(y) = v(y, h_i(y))$ im Raum $H^s(Q_{N-1})$ liegen. Die dazu nötigen Grundlagen sind ausführlich in Wloka [209], Kap. 1, §4, dargestellt. Sie sind auch bei Adams [2] oder Alt [6] nachzulesen. In gleicher Weise wird $H^k(\Gamma)$ für ganze k in $C^{k-1,1}$ -Gebieten durch den Sobolewraum $H^k(Q_{N-1})$ eingeführt, vgl. Gajewski et al. [72].

Diese *Sobolew-Slobodetskii-Räume* sind – versehen mit dem entsprechenden Skalarprodukt – Hilberträume. In ähnlicher Weise definiert man die Räume $W^{s,p}(\Omega)$ für $p \neq 2$, vgl. [2]. Als Spezialfall ergibt sich $H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$.

2.14.3 Höhere Regularität von Lösungen

Die Beispiele des Abschnitts 2.14.1 zeigen, dass für wichtige Klassen von Aufgaben H^1 -Lösungen der elliptischen Randwertprobleme nicht ausreichen. Unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen an die Glattheit des Randes und/oder die gegebenen Daten kann höhere Regularität gezeigt werden. Hier sind einige aus der Literatur bekannte Standardaussagen zusammengestellt.

Randwertprobleme in $C^{1,1}$ -Gebieten. Wir betrachten das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} \mathcal{A}y + \lambda y &= f & \text{in } \Omega \\ y &= g & \text{auf } \Gamma \end{aligned} \quad (2.107)$$

sowie das Neumannproblem

$$\begin{aligned} \mathcal{A}y + \lambda y &= f & \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu_{\mathcal{A}}} y &= g & \text{auf } \Gamma \end{aligned} \quad (2.108)$$

mit dem in (2.19) auf S.30 definierten elliptischen Operator \mathcal{A} , welcher der Symmetriebedingung für die Koeffizienten a_{ij} sowie der Elliptizitätsbedingung (2.20) genügt. Wir setzen zusätzlich $a_{ij} \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$ für alle $i, j \in \{1, \dots, N\}$ voraus und fordern, dass Ω ein beschränktes $C^{1,1}$ -Gebiet ist. Ferner ist $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgegeben.

Homogene Randdaten: Hier folgt aus Grisvard, [86], Thm. 2.2.2.3 sowie 2.2.2.5:

Für $g = 0$, $\lambda \geq 0$ und $f \in L^2(\Omega)$ gehört die schwache Lösung y des Dirichlet-Problems (2.107) zu $H^2(\Omega)$. Gleiches gilt für das Neumannproblem (2.108) mit $\lambda > 0$.

Inhomogene Randdaten: Aus [86], Thm. 2.4.2.5 und 2.4.2.7 folgt:

Es sei $1 < p < \infty$. Für $g \in W^{2-1/p,p}(\Gamma)$, $\lambda \geq 0$ und $f \in L^p(\Omega)$ gehört die schwache Lösung y des Dirichlet-Problems (2.107) zu $W^{2,p}(\Omega)$. Gleiches gilt für das Neumannproblem (2.108) mit $\lambda > 0$, falls $g \in W^{1-1/p,p}(\Gamma)$.

Die aus [86] angewendeten Sätze sind für etwas allgemeinere Randoperatoren bewiesen worden und umfassen insbesondere das dritte Randwertproblem. Die Aussagen für homogene Randwerte sind ein Spezialfall der $W^{2,p}$ -Resultate, weil $g = 0$ beliebig glatt ist.

Lipschitzgebiete. Für Lipschitzgebiete gibt es folgendes interessante Resultat von Jerison und Kenig [117]:

Für $\mathcal{A} = -\Delta$, $\lambda > 0$, $f = 0$ sowie $g \in L^2(\Gamma)$ gehört die schwache Lösung y des Neumannproblems zu $H^{3/2}(\Omega)$.

Konvexe Gebiete. Ist Ω ein beschränktes und konvexes Gebiet, dann bleiben die für $C^{1,1}$ -Gebiete formulierten Aussagen für homogene Randdaten gültig, d.h. aus $g = 0$, $f \in L^2(\Omega)$ und $\lambda \geq 0$ bzw. $\lambda > 0$ folgt $y \in H^2(\Omega)$.

Das ist eine Folgerung aus den Sätzen 3.2.1.2 sowie 3.2.1.3 in [86]. Weitere Regularitätsresultate findet man für C^∞ -Ränder in Triebel [194]. Unter etwas schwächeren Voraussetzungen ist mit der Stampacchia-Methode Beschränktheit bzw. Stetigkeit der Lösung y beweisbar. Wir behandeln das in den Abschnitten 4.2 und 7.2.2.

2.15 Regularität optimaler Steuerungen *

Die Steuerungen gehörten bei den bisher behandelten Aufgaben dem Hilbertraum $L^2(\Gamma)$ bzw. $L^2(\Omega)$ an, so dass wir von optimalen Steuerungen zunächst nicht mehr als die Regularität von L^2 -Funktionen erwarten können. Es zeigt sich jedoch, dass Optimalität im Fall eines positiven Regularisierungsparameters λ höhere Glattheit mit sich bringt.

Optimale stationäre Temperaturquelle

Wir behandeln das Problem mit Randtemperatur null, analog wird die Regularität bei vorgegebener Außentemperatur und Randbedingung dritter Art diskutiert. Das Optimalitätssystem der entsprechenden Aufgabe (2.26)–(2.28) auf S. 38 ist

$$\begin{aligned} -\Delta y &= \beta u & -\Delta p &= y - y_\Omega \\ y|_\Gamma &= 0, & p|_\Gamma &= 0, \end{aligned}$$

$$u = \mathbb{P}_{[u_a, u_b]} \{ -\lambda^{-1} \beta p \}.$$

Satz 2.37 *Ist die Funktion β Lipschitz-stetig auf $\bar{\Omega}$ und gehören die Schranken u_a, u_b zu $H^1(\Omega)$ sowie y_Ω zu $L^2(\Omega)$, dann ist die optimale Steuerung des Problems der optimalen stationären Temperaturquelle (2.26)–(2.28) auf S. 38 eine Funktion aus $H^1(\Omega)$.*

Beweis. Auf der rechten Seite der adjungierten Gleichung steht mit $y - y_\Omega$ eine Funktion aus $L^2(\Omega)$. Die Lösung p gehört deshalb zu $H_0^1(\Omega)$. Das Produkt $\beta(x)p(x)$ hat diese

Eigenschaft aber nur für hinreichend glattes β . Wir haben deshalb zusätzlich die Lipschitzstetigkeit von β auf $\bar{\Omega}$ vorausgesetzt, d.h. $\beta \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$. Dann gehört βp ebenfalls $H_0^1(\Omega)$ an, siehe Grisvard [86], Thm. 1.4.1.2. Außerdem wissen wir u_a, u_b aus $H^1(\Omega)$.

Das Bild des Projektionsoperators $\mathbb{P}_{[u_a, u_b]}$, angewandt auf Funktionen aus $H^1(\Omega)$, liegt wieder in $H^1(\Omega)$. Das folgt mit einem Ergebnis aus Stampacchia und Kinderlehrer [123] über die Stetigkeit der Abbildung $u(\cdot) \mapsto |u(\cdot)|$ in $H^1(\Omega)$. Die optimale Steuerung $u = \bar{u}$ ist also ein Element von $H^1(\Omega)$. ■

Optimale stationäre Randtemperatur

Das Optimalitätssystem für diese Aufgabe lautet

$$\begin{aligned} -\Delta y &= 0 & -\Delta p &= y - y_\Omega \\ \partial_\nu y + \alpha y &= \alpha u, & \partial_\nu p + \alpha p &= 0, \\ u &= \mathbb{P}_{[u_a, u_b]} \{ -\lambda^{-1} \alpha p|_\Gamma \}. \end{aligned}$$

Wendet man die gleiche Methode wie eben an, dann erhält man nicht die erwartete Regularität. Aus der adjungierten Gleichung folgt wieder $p \in H^1(\Omega)$. In der Projektionsbeziehung für u steht aber die Spur von p und diese gehört laut Satz 7.3 nur $H^{1/2}(\Gamma)$ an. Bestenfalls könnten wir auf diese Weise $u \in H^{1/2}(\Gamma)$ erwarten. Unter natürlichen Voraussetzungen ist höhere Regularität beweisbar.

Satz 2.38 *Es sei Ω ein beschränktes $C^{1,1}$ -Gebiet, α Lipschitz-stetig und u_a, u_b seien aus $H^1(\Gamma)$. Dann gehört die optimale Steuerung \bar{u} des Problems der optimalen stationären Randtemperatur dem Raum $H^1(\Gamma)$ an.*

Beweis: Wir schreiben die adjungierte Gleichung in der Form

$$\begin{aligned} -\Delta p + p &= y - y_\Omega + p \\ \partial_\nu p &= -\alpha p \end{aligned}$$

auf. Die gegebene Lösung $p = p_1 + p_2$ setzt sich additiv aus zwei Anteilen zusammen. Dabei ist p_1 die Lösung von $-\Delta p_1 + p_1 = f$, $\partial_\nu p_1 = 0$ zur rechten Seite $f := y - y_\Omega + p$. Der Anteil p_2 löst $-\Delta p_2 + p_2 = 0$, $\partial_\nu p_2 = g$ mit $g := -\alpha p$. Weil Ω ein $C^{1,1}$ -Gebiet ist, folgt $p_1 \in H^2(\Omega)$ aus den Regularitätsaussagen zum homogenen Neumann-Problem aus [86], die in Abschnitt 2.14.3 zusammengestellt sind.

Auch p_2 liegt in $H^2(\Omega)$: Zunächst wissen wir $p \in H^1(\Omega)$, deshalb $p|_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma)$ nach Spursatz 7.3 auf S.277. Damit liegt das Produkt $g = -\alpha p|_\Gamma$ nach [86], Satz 1.4.1.2, ebenfalls in $H^{1/2}(\Gamma)$. Durch Anwendung der in Abschnitt 2.14.3 enthaltenen Regularitätsaussage über das inhomogene Neumannproblem in $C^{1,1}$ -Gebieten ist die Abbildung $g \mapsto p_2$ stetig von $H^{1/2}(\Gamma) = W^{1-1/2,2}(\Gamma)$ nach $W^{2,2}(\Omega) = H^2(\Omega)$.

Insgesamt gilt $p \in H^2(\Omega)$ und deshalb hat p laut Satz 7.3 zumindest Randwerte in $H^1(\Gamma)$. Der Rest folgt aus der Projektionsformel für \bar{u} und der Stetigkeit der Abbildung $u(\cdot) \mapsto |u(\cdot)|$ in $H^1(\Gamma)$, weil das Produkt der Lipschitzfunktion α und der $H^1(\Gamma)$ -Funktion $p|_\Gamma$ in $H^1(\Gamma)$ liegt, vgl. [86], Satz 1.4.1.2. ■

2.16 Übungsaufgaben

2.1 Wir skizzieren zuerst die Behandlung der nichtlinearen Aufgabe

$$\begin{aligned} \min J(y, u) \\ T(y, u) = 0, \quad u \in U_{ad}, \end{aligned}$$

in der neben den in Abschnitt 1.4.1 auf S. 8 definierten Größen J sowie U_{ad} eine stetig differenzierbare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben ist. Die Jacobi-Matrix $D_y T(\bar{y}, \bar{u})$ sei an der optimalen Stelle (\bar{y}, \bar{u}) invertierbar. Die Lösung z der bei (\bar{y}, \bar{u}) linearisierten Gleichung

$$D_y T(\bar{y}, \bar{u})(z - \bar{y}) + D_u T(\bar{y}, \bar{u})(u - \bar{u}) = 0$$

verhält sich in einer Umgebung von (\bar{y}, \bar{u}) bis auf einen Fehler höherer Ordnung als $\|u - \bar{u}\|$ wie die Lösung y der Gleichung $T(y, u) = 0$. Im Vergleich mit der linearen Zustandsgleichung (1.1) von S. 8 übernimmt $D_y T(\bar{y}, \bar{u})$ die Rolle von A und $D_u T(\bar{y}, \bar{u})$ die von B . Es ist deshalb plausibel, dass das Paar (\bar{y}, \bar{u}) an Stelle von (1.9) auf S. 12 folgendem Optimalitätssystem genügen muss:

$$\begin{aligned} T(y, u) &= 0, \quad u \in U_{ad}, \\ D_y T(y, u)^\top p &= \nabla_y J(y, u), \\ (D_u T(y, u)^\top p + \nabla_u J(y, u), v - u)_{\mathbb{R}^m} &\geq 0 \quad \forall v \in U_{ad}. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Beweisen Sie diese Aussage mit dem Satz über implizite Funktionen.

2.2 Weisen Sie nach, dass die in Abschnitt 2.1 definierten Normen $\|x\|_{C[a,b]}$ (Maximumnorm) sowie $\|x\|_{C_{L^2}[a,b]}$ die Axiome einer Norm erfüllen.

2.3 Zeigen Sie, dass jeder Prä-Hilbertraum $\{H, (\cdot, \cdot)\}$ mit der Norm $\|u\| := \sqrt{(u, u)}$ zu einem normierten Raum wird.

2.4 Beweisen Sie Satz 2.7 auf S. 30.

2.5 Beweisen Sie, dass durch $\|A\|_{\mathcal{L}(U,V)} = \sup_{\|u\|_U=1} \|Au\|_V$ im Raum $\mathcal{L}(U,V)$ der linearen stetigen Operatoren von U nach V eine Norm definiert ist.

2.6 Berechnen Sie die Norm des Integraloperators $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$,

$$(Au)(t) = \int_0^1 e^{(t-s)} u(s) ds, \quad t \in [0, 1].$$

2.7 Zeigen Sie, dass jede stark konvergente Folge in einem normierten Raum auch schwach konvergent ist.

2.8 Beweisen Sie im Hilbertraum $\{H, (\cdot, \cdot)\}$ folgende wichtige Aussage: Aus $u_n \rightarrow u$ und $v_n \rightarrow v$ folgt $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$ für $n \rightarrow \infty$.

2.9 Weisen Sie nach, dass unter Voraussetzung 2.13 von S. 38 die Menge

$$\{u \in L^2(\Omega) : u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \text{ f.ü. in } \Omega\}$$

konvex und abgeschlossen ist. Nutzen Sie die bekannte Aussage, dass aus $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ die Existenz einer fast überall punktweise gegen 0 konvergenten Teilfolge von $\{u_n\}$ folgt.

2.10 Es seien $\{Y, \|\cdot\|_Y\}$ und $\{U, \|\cdot\|_U\}$ Hilberträume, $y_d \in Y$, $\lambda \geq 0$ und ein linearer stetiger Operator $S : U \rightarrow Y$ gegeben. Beweisen Sie die strenge Konvexität des Funktional

$$f(u) = \|Su - y_d\|_Y^2 + \lambda \|u\|_U^2,$$

falls λ positiv oder S injektiv ist.

2.11 Weisen Sie nach, dass die folgenden Funktionale stetig Fréchet-differenzierbar sind:

a) $f(u) = \sin(u(1))$ in $C[0, 1]$,

b) $f(u) = \|u\|_H^2$ im Hilbertraum $\{H, (\cdot, \cdot)\}$.

2.12 Zeigen Sie, dass der Integraloperator

$$(Au)(t) = \int_0^1 e^{(t-s)} u(s) ds, \quad t \in [0, 1]$$

im Raum $H = L^2(0, 1)$ definiert ist und H stetig in H abbildet.

2.13 Lösen Sie die quadratische Optimierungsaufgabe in \mathbb{R} ,

$$\min_{v \in [u_a, u_b]} \left\{ \beta p v + \frac{\lambda}{2} v^2 \right\}$$

bei gegebenen reellen Werten u_a, u_b, β, p sowie $\lambda > 0$, indem Sie eine Projektionsformel des Typs (2.58) auf S. 56 herleiten.

2.14 Beweisen Sie die notwendigen Optimalitätsbedingungen zu Aufgabe (2.69)–(2.71) auf S. 59.

2.15 Leiten Sie die notwendigen Optimalitätsbedingungen zum linearen Optimalsteuerungsproblem von S. 63 her.

Hinweis: Nutzen Sie die Nichtnegativität der Differenz der Zielfunktionswerte einer beliebigen und einer optimalen Lösung und schreiben Sie die Differentialgleichung für die Differenz der beiden Lösungen auf.

2.16 Gegeben seien ein beschränktes Lipschitzgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $y_\Omega \in L^2(\Omega)$, $e_\Omega \in L^2(\Omega)$ und $e_\Gamma \in L^2(\Gamma)$. Die Funktion e_Γ sei Randwert einer Funktion $y \in H^2(\Omega)$. Leiten Sie die notwendigen Optimalitätsbedingungen für die Aufgabe

$$\min \int_\Omega (y - y_\Omega)^2 dx$$

bei $-\Delta y = u + e_\Omega$, $y|_\Gamma = e_\Gamma$ und den Box-Restriktionen $-1 \leq u(x) \leq 1$ her.

2.17 Bestimmen Sie die notwendigen Optimalitätsbedingungen für das folgende, auf Seite 65 definierte Problem:

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \int_\Omega (y - y_\Omega)^2 dx + \int_\Gamma e_\Gamma y ds + \frac{1}{2} \int_\Omega u^2 dx$$

bei $-\Delta y + y = u + e_\Omega$, $\partial_\nu y = e_\Gamma$ und den Box-Restriktionen $0 \leq u(x) \leq 1$.

2.18 Beweisen Sie Satz 2.34 auf S. 72, d.h. die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung, die in Abschnitt 2.11.1 für die Aufgabe (2.36)–(2.38) von Seite 43 nur mit der formalen Lagrangetechnik hergeleitet wurden.

2.19 Bestimmen Sie die für die Aufgabe mit Dirichlet-Randsteuerung

$$\min \int_\Omega (y - y_\Omega)^2 dx + \lambda \int_\Gamma u^2 ds$$

bei

$$\begin{aligned} -\Delta y &= 0 \\ y|_\Gamma &= u \end{aligned}$$

und $-1 \leq u(x) \leq 1$ zu erwartenden notwendigen Optimalitätsbedingungen mit Hilfe der formalen Lagrangetechnik.

Hinweis: Arbeiten Sie mit unterschiedlichen Multiplikatoren p_1 bzw. p_2 für die Laplace-Gleichung bzw. die Randbedingung.

3 Linear-quadratische parabolische Steuerungsprobleme

3.1 Einführung

Vorbetrachtungen

Elliptische Differentialgleichungen beschreiben zeitlich stationäre physikalische Vorgänge wie z.B. Wärmeleitprozesse mit einer Temperaturverteilung im Gleichgewichtszustand. Liegt diese Stationarität nicht vor, dann kommt als weiterer physikalischer Parameter die Zeit ins Spiel. Wir betrachten als Modellfall die Aufgabe der optimalen zeitlich in-stationären Randtemperatur aus Abschnitt 1.2.2, wo ein Ortsgebiet Ω , ausgehend von einer Anfangstemperaturverteilung $y_0(x)$, in endlicher Zeit T auf die gewünschte Endtemperaturverteilung $y_\Omega(x)$ gebracht werden soll. Mathematisch vereinfacht handelt es sich um die Aufgabe

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y(x, T) - y_\Omega(x))^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} u(x, t)^2 ds(x) dt \quad (3.1)$$

$$\begin{array}{rcl} y_t - \Delta y & = & 0 \quad \text{in } Q := \Omega \times (0, T) \\ \partial_\nu y + \alpha y & = & \beta u \quad \text{in } \Sigma := \Gamma \times (0, T) \\ y(x, 0) & = & y_0(x) \quad \text{in } \Omega \end{array} \quad (3.2)$$

$$u_a(x, t) \leq u(x, t) \leq u_b(x, t) \quad \text{f.ü. in } \Sigma. \quad (3.3)$$

Im Unterschied zu elliptischen Problemen läuft der Prozess im Orts-Zeit-Zylinder $Q := \Omega \times (0, T)$ ab, während die Steuerfunktion $u = u(x, t)$ im obigen Beispiel auf den Ortsrand Γ einwirkt und damit auf $\Sigma := \Gamma \times (0, T)$ definiert ist.

In diesem Kapitel werden wir die gleichen Schritte absolvieren wie im elliptischen Fall. Erstens zeigen wir, dass zu jeder vorgegebenen Steuerfunktion $u = u(x, t)$ genau eine Lösung $y = y(x, t)$ der Wärmeleitgleichung (3.2) in einem geeigneten Raum existiert. Danach klären wir die Lösbarkeit der Optimalsteuerungsaufgabe, also die Existenz einer optimalen Steuerung \bar{u} mit zugehörigem optimalen Zustand \bar{y} . Diese folgt wieder aus der Stetigkeit des Lösungsoperators $G : u \mapsto y$. Schließlich werden notwendige Optimalitätsbedingungen hergeleitet.

Die prinzipielle Vorgehensweise ist aus Sicht der Optimierung identisch mit der im elliptischen Fall, aber die Theorie der schwachen Lösungen parabolischer Gleichungen ist etwas komplizierter. Neben Ableitungen zweiter Ordnung nach den Ortsvariablen tritt noch eine Ableitung von y nach der Zeit auf, die nur von erster Ordnung ist. Das erfordert einen anderen Lösungsraum und führt auch dazu, dass als adjungierte Gleichung eine Rückwärtsgleichung bezüglich t zu betrachten ist.

Formale Herleitung der Optimalitätsbedingungen

Um schon vorab eine Vorstellung davon zu haben, welche Optimalitätsbedingungen wir hier erwarten können, wenden wir wieder die formale Lagrangetechnik an. Sie liefert das richtige Ergebnis, wie wir später sehen werden. Dazu wird für die Aufgabe (3.1)–(3.3) die Lagrangefunktion \mathcal{L} eingeführt,

$$\mathcal{L}(y, u, p) = J(y, u) - \iint_Q (y_t - \Delta y) p_1 \, dx dt - \iint_\Sigma (\partial_\nu y + \alpha y - \beta u) p_2 \, ds dt,$$

in der wir die „komplizierten“ differentiellen Nebenbedingungen verankert haben, während wir die Anfangsbedingung sowie die Ungleichungen an u explizit mitführen und deshalb nicht durch Lagrangesche Multiplikatoren eliminieren. Hier kämen wir auch zum Ziel, wenn wir in beiden Integralen die gleiche Funktion p wählen würden. Aber bei manchen Aufgabenstellungen führt das zu Schwierigkeiten und deshalb arbeiten wir vorsichtshalber mit zwei verschiedene Funktionen p_1, p_2 . Am Ende erhalten wir auf Σ doch noch die Beziehung $p_1 = p_2$. Diese Verfahrensweise sollte man in Zweifelsfällen stets anwenden.

Im Weiteren schreiben wir oft $y(\cdot, t)$ oder kürzer $y(t)$, um die Schreibweise zu vereinfachen. Später sehen wir y meist als abstrakte Funktion von t an (zur Definition dieses Begriffes siehe S. 113). In der ersten Form $y(\cdot, t)$ wird die Abhängigkeit von x angedeutet.

Die *Menge der zulässigen Steuerfunktionen* wird hier definiert durch

$$U_{ad} = \{u \in L^2(\Sigma) : u_a(x, t) \leq u(x, t) \leq u_b(x, t) \text{ f.ü. in } \Sigma\}.$$

Als zusätzliche Nebenbedingung für y ist die Anfangsbedingung $y(\cdot, 0) = y_0$ zu berücksichtigen. Daher folgt aus dem Lagrangeprinzip zunächst die Variationsungleichung

$$D_y \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, p)(y - \bar{y}) \geq 0$$

für alle hinreichend glatten y mit $y(\cdot, 0) = y_0$. Nach Substitution $y := y - \bar{y}$ folgt daraus $D_y \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, p)y \geq 0$ für alle y mit $y(\cdot, 0) = 0$ und schließlich $D_y \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, p)y = 0$, denn mit y gehört auch $-y$ zu dieser Menge. Bezüglich u folgt aus dem Lagrangeprinzip wieder die bereits bekannte Variationsungleichung. Wir erwarten deshalb die notwendigen Optimalitätsbedingungen

$\begin{aligned} D_y \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, p) y &= 0 && \text{für alle } y \text{ mit } y(0) = 0 \\ D_u \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, p) (u - \bar{u}) &\geq 0 && \text{für alle } u \in U_{ad}. \end{aligned}$

Die Auswertung der ersten Beziehung führt auf die adjungierte Gleichung: Wir erhalten

$$D_y \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, p) y = \int_\Omega (\bar{y}(T) - y_\Omega) y(T) \, dx - \iint_Q (y_t - \Delta y) p_1 \, dx dt - \iint_\Sigma (\partial_\nu y + \alpha y) p_2 \, ds dt.$$

Dabei wurde verwendet, dass die Ableitung der linearen stetigen Abbildung $y \mapsto y(\cdot, T)$ wieder diese Abbildung ist. Nach partieller Integration (bezüglich t in y_t und x bei Δy) folgt aus der Greenschen Formel

$$0 = \int_{\Omega} (\bar{y}(T) - y_{\Omega}) y(T) dx - \int_{\Omega} y(T) p_1(T) dx + \iint_Q y p_{1,t} dx dt + \iint_{\Sigma} p_1 \partial_{\nu} y ds dt \\ - \iint_{\Sigma} y \partial_{\nu} p_1 ds dt + \iint_Q y \Delta p_1 dx dt - \iint_{\Sigma} p_2 \partial_{\nu} y ds dt - \iint_{\Sigma} \alpha y p_2 ds dt$$

für alle hinreichend glatten y mit $y(0) = 0$. Der $y(0)$ enthaltende Term ist wegen $y(0) = 0$ weggefallen. Wir sortieren nach Integrationsgebieten und erhalten

$$\int_{\Omega} (\bar{y}(T) - y_{\Omega} - p_1(T)) y(T) dx + \iint_Q (p_{1,t} + \Delta p_1) y dx dt \\ - \iint_{\Sigma} (\partial_{\nu} p_1 + \alpha p_2) y ds dt + \iint_{\Sigma} (p_1 - p_2) \partial_{\nu} y ds dt = 0.$$

Zuerst wählen wir y beliebig in $C_0^{\infty}(Q)$. Dann verschwinden $y(T), y(0)$ in Ω und y sowie $\partial_{\nu} y$ auf Σ , also gilt

$$\iint_Q (p_{1,t} + \Delta p_1) y dx dt = 0 \quad \forall y \in C_0^{\infty}(Q).$$

Aus der Beliebigkeit von y in Q (Dichtheit von $C_0^{\infty}(Q)$ in $L^2(Q)$) folgt

$$p_{1,t} + \Delta p_1 = 0 \quad \text{in } Q.$$

Damit fällt das Integral über Q bereits weg. Nun verzichten wir auf die Forderung $y(T) = 0$ und erhalten

$$\int_{\Omega} (\bar{y}(T) - y_{\Omega} - p_1(T)) y(T) dx = 0.$$

Die möglichen Werte von $y(T)$ liegen dicht in $L^2(\Omega)$, was wir nicht weiter diskutieren. Uns geht es nur um eine formale Herleitung. In gleicher Weise verwenden wir weiter unten die Dichtheit der Randwerte glatter Funktionen y bzw. ihrer Normalenableitungen in $L^2(\Sigma)$ ohne Kommentar. Deshalb muss

$$p_1(T) = \bar{y}(T) - y_{\Omega} \quad \text{in } \Omega$$

gelten. Schließlich fordern wir auch nicht mehr $y|_{\Sigma} = 0$ und gelangen zu

$$\iint_{\Sigma} (\partial_{\nu} p_1 + \alpha p_2) y ds dt = 0$$

für alle zugelassenen y , also zu

$$\partial_{\nu} p_1 + \alpha p_2 = 0 \quad \text{in } \Sigma.$$

Nun lassen wir auch $\partial_{\nu} y$ frei variieren und betrachten den letzten verbliebenen Term

$$\iint_{\Sigma} (p_1 - p_2) \partial_{\nu} y ds dt = 0$$

für alle hinreichend glatten y . Aus der Dichtigkeit der Werte $\partial_\nu y$ in $L^2(\Sigma)$ folgt schließlich $p_2 = p_1$ auf Σ . Wir setzen daher $p := p_1$ und erhalten $p_2 = p$ auf Σ . Insgesamt haben wir auf diesem formalen Weg das System

$$\boxed{\begin{array}{lll} -p_t & = & \Delta p & \text{in } Q \\ \partial_\nu p + \alpha p & = & 0 & \text{in } \Sigma \\ p(T) & = & \bar{y}(T) - y_\Omega & \text{in } \Omega \end{array}} \quad (3.4)$$

gefunden, die *adjungierte Gleichung*. Die Auswertung der Variationsungleichung für $D_u \mathcal{L}$ ergibt

$$\begin{aligned} D_u \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, p)(u - \bar{u}) &= \lambda \iint_\Sigma \bar{u} (u - \bar{u}) \, dsdt + \iint_\Sigma \beta p (u - \bar{u}) \, dsdt \\ &= \iint_\Sigma (\lambda \bar{u} + \beta p)(u - \bar{u}) \, dsdt \geq 0. \end{aligned}$$

Deshalb muss die *Variationsungleichung*

$$\boxed{\iint_\Sigma (\lambda \bar{u} + \beta p)(u - \bar{u}) \, dsdt \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}} \quad (3.5)$$

erfüllt sein.

Diese Herleitung erfolgte sehr formal, ohne Rücksicht auf mathematische Strenge. Beispielsweise haben wir die Zeitableitungen y_t und p_t als normale Funktionen verwendet und keine Aussagen über die Räume getroffen, in denen y und p sowie ihre Ableitungen liegen sollen. Auch die sorglose Verwendung der Anfangs- bzw. Endwerte von y und p ist zumindest leichtsinnig. Die mehrmals verwendete Dichtigkeit der Randwerte von y bzw. $\partial_\nu y$ ist ohne konkrete Voraussetzungen an die Glattheit des Randes von Ω nicht immer richtig. Wir können also an dieser Stelle lediglich vermuten, dass unser Ergebnis richtig ist. Die mathematisch saubere Herleitung der gefundenen Optimalitätsbedingungen erfolgt in diesem Kapitel. Die Lagrangefunktion liefert aber bei sinnvoller Anwendung in jedem Fall eine bequeme und einprägsame Formulierung dieser Bedingungen.

Empfohlene Reihenfolge für das Lesen der weiteren Abschnitte

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden wir den Begriff der schwachen Lösung linearer parabolischer Gleichungen definieren, die Existenz und Eindeutigkeit solcher Lösungen zeigen und danach die optimierungstheoretischen Fragen klären.

Zuerst wird aber der örtlich eindimensionale parabolische Fall mit Hilfe der Fouriemethode behandelt. Diese Methode kommt ohne die Theorie schwacher Lösungen parabolischer Gleichungen aus und ist deshalb von Vorteil für solche Leser, die diese Theorie erst später studieren wollen. Die Fouriemethode ist aber auch für sich interessant, da sie äquivalent zur Anwendung von stark stetigen Halbgruppen ist. Außerdem erhalten wir so auf relativ elementare Weise das bekannte Bang-Bang-Prinzip für optimale Steuerungen bei reinem Endwert-Funktional.

Leser, die sich lieber gleich mit der Theorie schwacher Lösungen vertraut machen wollen, können den Abschnitt 3.2 zunächst überspringen und sofort mit Abschnitt 3.3 fortsetzen, der Abschnitt 3.2 nicht voraussetzt.

3.2 Die Fouriermethode im örtlich eindimensionalen Fall

3.2.1 Eindimensionale Modellprobleme

Ein Randsteuerungsproblem

Im Weiteren interpretieren wir die gestellten Aufgaben wieder als Aufheizungsprobleme, um einen physikalischen Hintergrund vor Augen zu haben. Wir betrachten die optimale Aufheizung des eindimensionalen Ortsgebiets $\Omega = (0, 1)$ durch eine als Steuerung am rechten Rand $x = 1$ wirkende Steuerung $u = u(t)$,

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \int_0^1 (y(x, T) - y_\Omega(x))^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T u(t)^2 dt \quad (3.6)$$

bei

$y_t(x, t)$	$=$	$y_{xx}(x, t)$	in $(0, 1) \times (0, T)$
$y_x(0, t)$	$=$	0	in $(0, T)$
$y_x(1, t)$	$=$	$\beta u(t) - \alpha y(1, t)$	in $(0, T)$
$y(x, 0)$	$=$	0	in $(0, 1)$

(3.7)

und den Beschränkungen an die Steuerung

$$u_a(t) \leq u(t) \leq u_b(t) \quad \text{f.ü. in } (0, T). \quad (3.8)$$

Voraussetzung 3.1 *Gegeben sind reelle Zahlen $T > 0$ (Aufheizungsdauer), $\alpha \geq 0$ (Wärmeübergangszahl), $\lambda \geq 0$ sowie Funktionen $\beta \in L^\infty(0, T)$, $\beta(t) \geq 0$ f.ü. auf $(0, T)$, $y_\Omega \in L^2(0, 1)$ (gewünschte Endtemperaturverteilung) sowie $u_a, u_b \in L^2(0, T)$ mit $u_a(t) \leq u_b(t)$ f.ü. in $(0, T)$.*

Die gesuchte Steuerung u gehöre zu $L^2(0, T)$. Falls u_a und u_b beschränkte und messbare Funktionen sind, dann ist jede zulässige Steuerung automatisch essentiell beschränkt.

Aus physikalischer Sicht ist eigentlich $\beta = \alpha$ zu setzen, denn die Randbedingung am rechten Rand lautet physikalisch richtig $y_x(1, t) = \alpha(u(t) - y(1, t))$ (der Temperaturanstieg $y_x(1, t)$ ist am Rand proportional zur Differenz zwischen Außentemperatur $u(t)$ und Randtemperatur $y(1, t)$). Durch unsere Formulierung der Randbedingung können wir aber mit der Wahl $\alpha = 0$ auch Neumannsche Randbedingungen betrachten. Aus mathematischen Gründen ist es ebenfalls sinnvoll, α und β zu entkoppeln.

Bemerkungen. Insgesamt ist diese Aufgabenstellung aus physikalischer Sicht akademisch. Die Betrachtung eines eindimensionalen Ortsgebiets Ω , d.h. eines Intervalls der reellen Achse, ist nicht realistisch. Man kann sich die Aufheizung eines sehr dünnen Stabes der Länge 1 vorstellen, der mit Ausnahme des rechten Endes $x = 1$ vollständig temperaturisoliert ist. Die Randbedingung $y_x = 0$ am linken Ende $x = 0$ modelliert Temperaturisolation. Analog kann sie für eine

Symmetriebedingung stehen, wenn der Stab die Länge 2 hat (rechtes Ende $x = -1$, rechtes Ende $x = 1$) und die Aufheizung links und rechts mit der gleichen Temperatur $u(t)$ erfolgt.

Etwas realistischer ist die Interpretation als Aufheizung einer unendlich ausgedehnten Platte der Dicke 1 (ihre beiden Oberflächen seien orthogonal zur x -Achse), bei der die rechte Oberfläche durch $u(t)$ aufgeheizt wird und die linke temperaturisoliert ist. Analog kann man sich eine Platte der Dicke 2 mit linker und rechter Randtemperatur $u(t)$ vorstellen.

Außerdem nimmt dieses Modell an, dass die Wärmeausbreitung im Inneren der Platte mit der Temperaturleitzahl 1 erfolgt. Auch das ist nicht realistisch. Es geht uns aber hier nicht primär um eine Darstellung von Wärmeleitprozessen, sondern um die Erläuterung von Grundprinzipien der optimalen Steuerung. Das funktioniert am besten für vereinfachte, akademische Modelle. Die Wahl einer homogenen Anfangstemperatur erfolgte nur aus methodischen Gründen.

Ein Problem mit steuerbarer Temperaturquelle

Auch die Steuerung einer Temperaturquelle innerhalb des Ortsgebiets ist physikalisch sinnvoll, z.B. bei induktiver Aufheizung von Metallen. Zur Abwechslung betrachten wir eine andere Zielfunktion. Hier geht es um die Verfolgung eines gewünschten instationären Temperaturverlaufs $y_Q(x, t)$ in $Q = (0, 1) \times (0, T)$. Die Aufgabe lautet

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (y(x, t) - y_Q(x, t))^2 dx dt + \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_0^1 u(x, t)^2 dx dt \quad (3.9)$$

bei

$$\begin{array}{lll} y_t(x, t) & = & y_{xx}(x, t) + u(x, t) & \text{in } (0, 1) \times (0, T) \\ y_x(0, t) & = & 0 & \text{in } (0, T) \\ y_x(1, t) + \alpha y(1, t) & = & 0 & \text{in } (0, T) \\ y(x, 0) & = & 0 & \text{in } (0, 1) \end{array} \quad (3.10)$$

und den Beschränkungen an die Steuerung

$$u_a(x, t) \leq u(x, t) \leq u_b(x, t) \quad \text{f.ü. in } Q. \quad (3.11)$$

Es sind homogene Neumann-Randbedingungen gegeben (Temperaturisolation). Analog hätten feste Randtemperaturen in Randbedingungen dritter Art vorgegeben werden können. Die Funktionen y_Q sowie $u_a \leq u_b$ sind in $L^2(Q)$ fixiert.

3.2.2 Integraldarstellung von Lösungen – Greensche Funktion

Die Lösungen linearer parabolischer Anfangs-Randwertprobleme können unter gewissen Voraussetzungen mit Hilfe von Fourier-Reihen angegeben werden, die man durch Trennung der Veränderlichen herleiten kann. Diese Methode kommt ohne die Theorie schwacher Lösungen aus und ist daher relativ einfach. Allerdings ist sie in ihrer Anwendbarkeit auf Ortsgebiete einfacher Geometrie begrenzt (z.B. für $N > 1$ auf Quader oder Kugeln, vgl. aber Glashoff und Weck [76]).

Dazu behandeln wir die Anfangs-Randwertaufgabe für die örtlich eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{array}{rcl}
y_t(x, t) - y_{xx}(x, t) & = & f(x, t) \\
y_x(0, t) & = & 0 \\
y_x(1, t) + \alpha y(1, t) & = & u(t) \\
y(x, 0) & = & y_0(x)
\end{array} \tag{3.12}$$

in $Q = (0, 1) \times (0, T)$, wobei $f \in L^2(Q)$, $y_0 \in L^2(0, 1)$, $u \in L^2(0, T)$ und eine Konstante $\alpha \geq 0$ gegeben sind. Für hinreichend glatte Vorgaben f , y_0 , u hat die Gleichung eine *klassische Lösung* y , die mittels einer *Greenschen Funktion* $G = G(x, \xi, t)$ in der Gestalt

$$\begin{aligned}
y(x, t) &= \int_0^1 G(x, \xi, t) y_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_0^1 G(x, \xi, t-s) f(\xi, s) d\xi ds \\
&\quad + \int_0^t G(x, 1, t-s) u(s) ds
\end{aligned} \tag{3.13}$$

dargestellt werden kann. In den für uns aus physikalischer Sicht interessanten Fällen für die Konstante α hat G die Form einer Fourier-Reihe

$$G(x, \xi, t) = \begin{cases} 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi x) \cos(n\pi \xi) \exp(-n^2 \pi^2 t) & \text{für } \alpha = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N_n} \cos(\mu_n x) \cos(\mu_n \xi) \exp(-\mu_n^2 t) & \text{für } \alpha > 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

Dabei bezeichnet $\mu_n \geq 0$ die nach wachsender Größe geordneten Lösungen von $\mu \tan \mu = \alpha$ und $N_n = 1/2 + \sin(2\mu_n)/(4\mu_n)$ sind gewisse Normierungsfaktoren. Die Zahlen $n\pi$ bzw. μ_n sind die *Eigenwerte* des Operators $\partial^2/\partial x^2$ bei den in (3.12) formulierten Randbedingungen mit homogener rechter Seite, während die Funktionen $\cos(n\pi x)$ bzw. $\cos(\mu_n x)$ die zugehörigen *Eigenfunktionen* sind. Die obigen Reihenentwicklungen werden in Abschnitt 3.8 hergeleitet. Wir verweisen auch auf Tychonoff und Samarski [200].

Die Greensche Funktion ist nichtnegativ, symmetrisch in den Variablen x und ξ und wird für $x = \xi$ singulär bei $t = 0$. In $(x = \xi, t = 0)$ liegt eine sogenannte *schwache Singularität* vor. Man erhält $y \in L^2(Q)$, wenn die Vorgaben $f \in L^2(Q)$, $y_0 \in L^2(0, 1)$ und $u \in L^2(0, T)$ gegeben sind. Die entsprechende Abschätzung ist in [196] unter Verwendung von Abschätzungen über die Greensche Funktion aus Friedman [70] erläutert.

Definition. Die durch (3.13) mit gegebenen quadratisch integrierbaren Funktionen f , u und y_0 dargestellte Funktion y nennen wir *verallgemeinerte Lösung* von (3.12).

Die drei Summanden in (3.13) können einzeln als lineare Operatoren sinnvoll definiert werden. Für die Diskussion der Anfangs-Randwertaufgabe (3.12) interessieren uns folgende zwei Fälle:

(i) $u := \beta u$, $f = y_0 = 0$ (Randsteuerung):

Im Zielfunktional (3.9) tritt nur der Endwert $y(x, T)$ auf. Aus (3.13) ergibt sich

$$y(x, T) = \int_0^T G(x, 1, T-s) \beta(s) u(s) ds =: (Su)(x). \tag{3.15}$$

Der Integraloperator S stellt den Teil des Zustands y dar, der im Zielfunktional auftritt, hier den Endwert $y(T)$. Er bildet den Raum $L^2(0, T)$ stetig in $L^2(0, 1)$ ab, [196]. Dieses Raumpaars legen wir der Definition zugrunde,

$$S : L^2(0, T) \rightarrow L^2(0, 1).$$

Die Abbildungseigenschaft folgt auch aus der Äquivalenz mit schwachen Lösungen und deren Eigenschaften, siehe Satz 3.13 auf S. 121.

(ii) $u = y_0 = 0$ (verteilte Steuerung):

Dieser Fall tritt im Problem der gesteuerten Temperaturquelle auf. Aus (3.13) folgt die Darstellung

$$y(x, t) = \int_0^t \int_0^1 G(x, \xi, t-s) f(\xi, s) d\xi ds =: (\mathbf{S}f)(x, t). \quad (3.16)$$

\mathbf{S} bildet den Raum $L^2(Q) = L^2((0, 1) \times (0, T))$ linear und stetig in sich ab. Wir legen dieses Raumpaars der Definition von S zugrunde, aber \mathbf{S} ist sogar linear und stetig von $L^2(Q)$ in $C([0, T], L^2(0, 1))$, [196]. Das ist ein Raum abstrakter Funktionen, den wir im Abschnitt 3.4.1 auf S. 114 einführen. Er beinhaltet eine gewisse Stetigkeit in der Variablen t , die insbesondere die Konvergenz $y(x, t) \rightarrow 0$ für $t \downarrow 0$ sichert. Wir halten fest:

$$\mathbf{S} : L^2(Q) \rightarrow L^2(Q).$$

Diese Eigenschaften folgen auch aus Satz 3.13 auf S. 121 über schwache Lösungen.

3.2.3 Notwendige Optimalitätsbedingungen

Mit den angegebenen Integraldarstellungen lassen sich die örtlich eindimensionalen parabolischen Optimalsteuerungsprobleme sehr einfach theoretisch behandeln.

Randsteuerungsproblem

Wir untersuchen zuerst die Aufgabe (3.6)–(3.8), in Kurzform

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \|y(T) - y_\Omega\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(0,T)}^2$$

bei $u \in U_{ad}$ und

$$\begin{aligned} y_t(x, t) &= y_{xx}(x, t) \\ y_x(0, t) &= 0 \\ y_x(1, t) + \alpha y(1, t) &= \beta(t) u(t) \\ y(x, 0) &= 0, \end{aligned}$$

mit $U_{ad} = \{u \in L^2(0, T) : u_a(t) \leq u(t) \leq u_b(t) \text{ f.ü. in } (0, T)\}$. Zur Vereinfachung des Problems setzen wir die Integraldarstellung (3.15) für $y(x, T)$ in das Zielfunktional ein, d.h. $Su = y(\cdot, T)$, und erhalten die quadratische Optimierungsaufgabe im Hilbertraum

$$\min_{u \in U_{ad}} f(u) := \frac{1}{2} \|Su - y_\Omega\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(0,T)}^2.$$

Darauf ist der allgemeine Existenzsatz 2.14 von S.40 anwendbar, denn $S : L^2(0, T) \rightarrow L^2(0, 1)$ ist stetig. Er sichert die Existenz mindestens einer optimalen Steuerung \bar{u} für das Randsteuerungsproblem (3.6)–(3.8), die im Fall $\lambda > 0$ eindeutig bestimmt ist. Die zugehörige verallgemeinerte Lösung sei \bar{y} . Aus Satz 2.22 auf S. 51 erhalten wir als notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingung die Variationsungleichung (2.45) von S. 51, hier

$$(S^*(S\bar{u} - y_\Omega) + \lambda \bar{u}, u - \bar{u})_{L^2(0, T)} \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \quad (3.17)$$

Sie enthält den adjungierten Operator S^* . Unsere Erfahrungen mit elliptischen Problemen lassen vermuten, dass dieser mit einer adjungierten Differentialgleichung zusammenhängen muss. Dazu bestimmen wir die Form des adjungierten Integraloperators S^* . Er ist eindeutig festgelegt durch die Beziehung

$$(v, Su)_{L^2(0, 1)} = (S^*v, u)_{L^2(0, T)} \quad \forall u \in L^2(0, T), \quad \forall v \in L^2(0, 1).$$

Wir geben $u \in L^2(0, T)$, $v \in L^2(0, 1)$ beliebig aber fest vor und rechnen wie folgt:

$$\begin{aligned} (v, Su)_{L^2(0, 1)} &= \int_0^1 v(x) \left(\int_0^T G(x, 1, T-s) \beta(s) u(s) ds \right) dx \\ &= \int_0^1 \int_0^T u(s) \beta(s) G(x, 1, T-s) v(x) ds dx \\ &= \int_0^T u(s) \left(\beta(s) \int_0^1 G(x, 1, T-s) v(x) dx \right) ds \quad (\text{Satz v. Fubini}) \\ &= (u, S^*v)_{L^2(0, T)} = (S^*v, u)_{L^2(0, T)}. \end{aligned}$$

Wir haben somit

$$(S^*v)(t) = \beta(t) \int_0^1 G(\xi, 1, T-t) v(\xi) d\xi. \quad (3.18)$$

Lemma 3.2 *Es gilt $(S^*v)(t) = \beta(t)p(1, t)$, wobei p die verallgemeinerte Lösung des folgenden parabolischen Endwertproblems ist:*

$$\begin{aligned} -p_t(x, t) &= p_{xx}(x, t) \\ p_x(0, t) &= 0 \\ p_x(1, t) + \alpha p(1, t) &= 0 \\ p(x, T) &= v(x). \end{aligned}$$

Beweis: Aus Formel (3.18) folgt mit der Symmetrie der Greenschen Funktion

$$(S^*v)(t) = \beta(t) \int_0^1 G(1, \xi, T-t) v(\xi) d\xi.$$

Wir definieren nun $p : [0, 1] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$p(x, t) := \int_0^1 G(x, \xi, T-t) v(\xi) d\xi$$

und führen nach der Zeittransformation $\tau = T - t$ die Funktion $\tilde{p}(x, \tau) = p(x, t) = p(x, T - \tau)$ ein. Dann hat \tilde{p} die Form

$$\tilde{p}(x, \tau) = \int_0^1 G(x, \xi, \tau) v(\xi) d\xi$$

und löst nach Formel (3.13) die Aufgabe

$$\begin{aligned} \tilde{p}_\tau(x, t) &= \tilde{p}_{xx}(x, t) \\ \tilde{p}_x(0, \tau) &= 0 \\ \tilde{p}_x(1, \tau) + \alpha \tilde{p}(1, \tau) &= 0 \\ \tilde{p}(x, 0) &= v(x). \end{aligned}$$

Nach Ausführung der Rücksubstitution $\tilde{p}(x, \tau) = p(x, t)$ ergibt sich unter Beachtung von

$$D_\tau \tilde{p}(x, \tau) = D_\tau p(x, T - \tau) = -D_t p(x, t)$$

die zu beweisende Gleichung für p . ■

Bemerkung. Die Gleichung für p ist in Bezug auf t eine Rückwärtsgleichung. Aber sie ist korrekt gestellt, denn dazu passend ist eine Endbedingung vorgegeben und keine Anfangsbedingung, was für inkorrekt gestellte rückwärts-parabolische Gleichungen aus der Theorie inverser Probleme charakteristisch wäre.

Nun können die notwendigen – und wegen Konvexität auch hinreichenden – Optimalitätsbedingungen formuliert werden:

Satz 3.3 *Eine Steuerung $\bar{u} \in U_{ad}$ mit zugehörigem Zustand \bar{y} ist genau dann optimal für das örtlich eindimensionale Randsteuerungsproblem (3.6)-(3.8), wenn mit der verallgemeinerten Lösung $p \in L^2(Q)$ der adjungierten Gleichung*

$$\begin{aligned} -p_t(x, t) &= p_{xx}(x, t) \\ p_x(0, t) &= 0 \\ p_x(1, t) + \alpha p(1, t) &= 0 \\ p(x, T) &= \bar{y}(x, T) - y_\Omega(x) \end{aligned} \tag{3.19}$$

die folgende Variationsungleichung erfüllt ist:

$$\int_0^T (\beta(t) p(1, t) + \lambda \bar{u}(t)) (u(t) - \bar{u}(t)) dt \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \tag{3.20}$$

Beweis: Die Behauptung ergibt sich direkt durch Einsetzen der Darstellung von S^* aus Lemma 3.2 in die Variationsungleichung (3.17). Wir wenden sie mit $v := \bar{y}(T) - y_\Omega$ an. ■

Die Funktion p heißt *adjungierter Zustand* zu (\bar{u}, \bar{y}) . Analog zu Lemma 2.26 auf S. 54 erhalten wir:

Lemma 3.4 *Die Variationsungleichung (3.20) gilt genau dann, wenn für fast alle $t \in [0, T]$ die folgende Variationsungleichung in \mathbb{R} erfüllt ist:*

$$(\beta(t) p(1, t) + \lambda \bar{u}(t)) (v - \bar{u}(t)) \geq 0 \quad \forall v \in [u_a(t), u_b(t)]. \tag{3.21}$$

Folgerung. Im Fall $\lambda > 0$ muss die optimale Steuerung fast überall in $[0, T]$ der Projektionsbeziehung

$$\bar{u}(t) = \mathbf{P}_{[u_a(t), u_b(t)]} \left\{ -\frac{\beta(t)}{\lambda} p(1, t) \right\}$$

genügen. Für $\lambda = 0$ ist $\bar{u}(t)$ in allen Punkten $t \in (0, T)$ mit $\beta(t) p(1, t) \neq 0$ festgelegt,

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u_a(t), & \text{falls } \beta(t) p(1, t) > 0 \\ u_b(t), & \text{falls } \beta(t) p(1, t) < 0. \end{cases}$$

Der Beweis verläuft wie für den elliptischen Fall auf S. 56.

Verteilte Steuerung

Das Problem (3.9)–(3.11) auf S. 100 wird analog behandelt. Die Existenz einer optimalen Steuerung \bar{u} folgt aus Satz 2.14 auf S. 40. Sie ist eindeutig bestimmt, da hier S injektiv ist. Zur Anwendung der notwendigen Optimalitätsbedingung (2.45) auf S. 51 bestimmen wir wieder den adjungierten Operator \mathbf{S}^* in $L^2(Q)$. Die Darstellung von \mathbf{S}^* findet man wie bei der Randsteuerung. Es gilt

$$\begin{aligned} (v, \mathbf{S}u)_{L^2(Q)} &= \int_0^T \int_0^1 \left(\int_0^t \int_0^1 u(\xi, s) G(x, \xi, t-s) v(x, t) d\xi ds \right) dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^1 u(x, t) \left(\int_t^T \int_0^1 G(\xi, x, s-t) v(\xi, s) d\xi ds \right) dx dt \\ &= (u, \mathbf{S}^*v)_{L^2(Q)}. \end{aligned}$$

Die eben verwendete Vertauschung der Integrationsreihenfolge bei Integralen mit veränderlicher oberer Grenze ist z.B. bei Emmrich [65], S. 203, erläutert. Daraus folgt

$$(\mathbf{S}^*v)(x, t) = \int_t^T \int_0^1 G(\xi, x, s-t) v(\xi, s) d\xi ds.$$

Lemma 3.5 Die Funktion

$$p(x, t) = \int_t^T \int_0^1 G(\xi, x, s-t) v(\xi, s) d\xi ds$$

ist verallgemeinerte Lösung von

$$\begin{aligned} -p_t(x, t) &= p_{xx}(x, t) + v(x, t) \\ p_x(0, t) &= 0 \\ p_x(1, t) + \alpha p(1, t) &= 0 \\ p(x, T) &= 0. \end{aligned}$$

Beweis: Wir verwenden die Greensche Funktion (3.14) und substituieren $\tau = T - t$, $\sigma = T - s$. Dann läuft die Integrationsvariable σ von $T - t = \tau$ nach 0, also von τ nach 0. Außerdem gilt $d\sigma = -ds$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} p(x, T - \tau) &= - \int_{\tau}^0 \int_0^1 G(\xi, x, \tau - \sigma) v(\xi, T - \sigma) d\xi d\sigma \\ &= \int_0^{\tau} \int_0^1 G(x, \xi, \tau - \sigma) v(\xi, T - \sigma) d\xi d\sigma =: \tilde{p}(x, \tau). \end{aligned}$$

Die Funktion \tilde{p} ist nach Formel (3.13) die verallgemeinerte Lösung der (vorwärts-) parabolischen Gleichung $\tilde{p}_\tau = \tilde{p}_{xx} + v(x, T - \tau)$, $\tilde{p}(x, 0) = 0$ bei homogenen Randbedingungen. Aus $\tilde{p}_\tau = -p_t(x, T - \tau) = -p_t(x, t)$ folgt die Aussage des Lemmas. ■

Insgesamt ergeben sich damit folgende notwendige Optimalitätsbedingungen:

Satz 3.6 *Eine Steuerung $\bar{u} \in U_{ad}$ mit zugehörigem Zustand \bar{y} ist genau dann optimal für die Aufgabe der optimalen Temperaturquelle (3.9)-(3.11) auf S. 100, wenn mit der Lösung $p \in L^2(Q)$ der adjungierten Gleichung*

$$\begin{aligned} -p_t(x, t) &= p_{xx}(x, t) + \bar{y}(x, t) - y_Q(x, t) \\ p_x(0, t) &= 0 \\ p_x(1, t) + \alpha p(1, t) &= 0 \\ p(x, T) &= 0 \end{aligned}$$

die Variationsungleichung

$$\iint_Q (p + \lambda \bar{u})(u - \bar{u}) \, dx dt \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}$$

bzw. für fast alle $(x, t) \in Q$ die folgende punktweise Beziehung erfüllt ist:

$$(p(x, t) + \lambda \bar{u}(x, t))(v - \bar{u}(x, t)) \geq 0 \quad \forall v \in [u_a(x, t), u_b(x, t)].$$

Daraus erhalten wir wie im elliptischen Fall explizite Ausdrücke zur Bestimmung von \bar{u} : Für $\lambda > 0$ muss die optimale Steuerung fast überall in Q der Projektionsbeziehung

$$\bar{u}(x, t) = \mathbb{P}_{[u_a(x, t), u_b(x, t)]} \left\{ -\frac{1}{\lambda} p(x, t) \right\}$$

genügen. Für $\lambda = 0$ gilt fast überall

$$\bar{u}(x, t) = \begin{cases} u_a(x, t), & \text{falls } p(x, t) > 0 \\ u_b(x, t), & \text{falls } p(x, t) < 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

3.2.4 Bang-Bang-Prinzip

Wir diskutieren noch einmal das Problem der optimalen Randsteuerung (3.6)–(3.8), jetzt aber ohne Regularisierungsparameter, also für $\lambda = 0$. Das Fehlen des regularisierenden Anteils wird sich in geringerer Regularität der optimalen Steuerung niederschlagen. Der besseren Übersichtlichkeit halber wählen wir die Schranken $u_a = -1$, $u_b = 1$, fixieren $\beta(t) \equiv 1$, $\alpha \geq 0$ sowie $y_\Omega \in L^2(0, 1)$. Gegeben sei die Aufgabe

$$\min \frac{1}{2} \int_0^1 (y(x, T) - y_\Omega(x))^2 \, dx$$

bei

$y_t(x, t)$	$=$	$y_{xx}(x, t)$	in	$(0, 1) \times (0, T)$
$y_x(0, t)$	$=$	0	in	$(0, T)$
$y_x(1, t)$	$=$	$u(t) - \alpha y(1, t)$	in	$(0, T)$
$y(x, 0)$	$=$	0	in	$(0, 1)$

und

$$|u(t)| \leq 1 \quad \text{in } (0, T).$$

Aus (3.22) folgt

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } p(1, t) < 0 \\ -1, & \text{falls } p(1, t) > 0. \end{cases}$$

Diese Beziehung liefert aber keine Information in den Punkten t mit $p(1, t) = 0$. Es zeigt sich nun bei Aufgaben des obigen Typs, dass dies unter Voraussetzung eines positiven Optimalwerts nur isolierte Punkte betreffen kann.

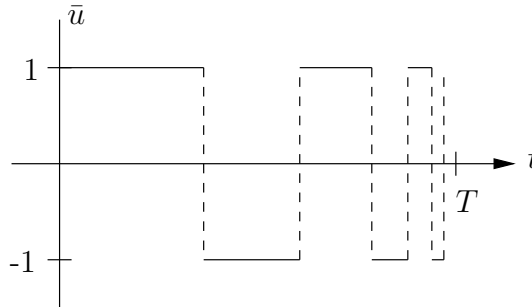
Satz 3.7 (Bang-Bang-Prinzip) *Es sei \bar{u} optimale Steuerung des Randsteuerungsproblems (3.6)–(3.8) auf S. 99 mit den Daten $\lambda = 0$, $u_a = -1$, $u_b = 1$ und $\beta = 1$. Wenn*

$$\|\bar{y}(\cdot, T) - y_\Omega\|_{L^2(0,1)}^2 > 0$$

erfüllt ist, dann hat die Funktion $p(1, t)$ höchstens abzählbar viele Nullstellen, die sich nur bei $t = T$ häufen können. Folglich gilt

$$|\bar{u}(t)| = 1 \quad \text{f.ü. auf } (0, T)$$

und \bar{u} ist stückweise konstant gleich ± 1 mit höchstens abzählbar vielen Umschaltpunkten in den Nullstellen von $p(1, t)$.



Bang-Bang-Steuerung

Beweis: Wir nehmen $\alpha > 0$ an, so dass die untere Darstellung aus (3.14) für G zu verwenden ist. Im Fall $\alpha = 0$ verläuft der Beweis völlig analog mit der oberen Formel.

Wir setzen $d := \bar{y}(\cdot, T) - y_\Omega$. Dann gilt laut Voraussetzung $\|d\|_{L^2(0,1)} \neq 0$. Der adjungierte Zustand \bar{p} hat nach (3.18) und Satz 3.3 bei $x = 1$ die Darstellung

$$\begin{aligned} p(1, t) &= (S^* d)(1, t) = \int_0^1 G(\xi, 1, T - t) d(\xi) d\xi \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{N_n}} \cos(\mu_n) \exp(-\mu_n^2(T - t)) \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{N_n}} \cos(\mu_n \xi) d(\xi) d\xi}_{=d_n}. \end{aligned}$$

Dabei sind die d_n die Fourierkoeffizienten von d bezüglich des Orthonormalsystems der Eigenfunktionen $\frac{1}{\sqrt{N_n}} \cos(\mu_n x)$, vgl. S. 101. Die Folge $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist nach der Besselschen

Ungleichung quadratisch summierbar. Die μ_n verhalten sich für $n \rightarrow \infty$ asymptotisch wie $(n-1)\pi$. Daher klingt der Term $\exp(-\mu_n^2(T-t))$ für alle $t < T$ exponentiell ab, dass für $t < T$ sämtliche Zeitableitungen beliebiger Ordnung der obigen unendlichen Reihe existieren. Die Glieder der beliebig oft abgeleiteten Reihe fallen ebenfalls exponentiell für $n \rightarrow \infty$. Man sieht auf diese Weise, dass die Fortsetzung ins Komplexe,

$$\varphi(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{N_n}} \cos(\mu_n) \exp(-\mu_n^2(T-z)) d_n,$$

eine analytische Funktion der komplexen Variablen z in der Halbebene $\operatorname{Re}(z) < T$ ist. Nun gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten:

(i) $\varphi(z) \not\equiv 0$: Dann kann φ wegen des Identitätssatzes für analytische Funktionen in jedem kompakten Teilbereich der Halbebene $\operatorname{Re}(z) < T$ nur endlich viele Nullstellen besitzen, insbesondere auch in jedem Intervall $[0, T-\varepsilon]$, $0 < \varepsilon < T$, der reellen Achse.

(ii) $\varphi(z) \equiv 0$: Hier gilt auch $p(1, t) \equiv 0$ in $(-\infty, T)$, d.h.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{N_n}} \cos(\mu_n) \exp(-\mu_n^2(T-t)) d_n = 0 \quad \forall t < T.$$

Multiplikation dieser Gleichung mit $\exp(\mu_1^2(T-t))$ ergibt

$$\frac{1}{\sqrt{N_1}} \cos(\mu_1) d_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{N_n}} \cos(\mu_n) \exp(-(\mu_n^2 - \mu_1^2)(T-t)) d_n = 0.$$

Der Grenzübergang $t \rightarrow -\infty$ liefert $d_1 = 0$. Nach Multiplikation mit $\exp(\mu_2^2(T-t))$ und erneutem Grenzübergang erhält man analog $d_2 = 0$. Fortführung des Prozesses ergibt $d_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Also muss $d = 0$ im Fall (ii) gelten, was der Voraussetzung $d \neq 0$ widerspricht. Fall (ii) kann demnach nicht eintreten und es bleibt nur Fall (i) übrig, in dem die Behauptung des Satzes stimmt. ■

Folgerung. *Unter den Voraussetzungen des Bang-Bang-Prinzips ($\lambda = 0$, positiver Optimalwert) ist die optimale Steuerung eindeutig bestimmt.*

Beweis: Es seien \bar{u}_1, \bar{u}_2 zwei verschiedene optimale Steuerungen mit zugehörigen optimalen Zuständen \bar{y}_1, \bar{y}_2 und j der optimale Wert für $\|y(T) - y_\Omega\|$. Dann ist auch $u := (\bar{u}_1 + \bar{u}_2)/2$ optimal: Zu u gehört der Zustand $y = (\bar{y}_1 + \bar{y}_2)/2$. Wegen Konvexität von U_{ad} gehört u zu U_{ad} und aus der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned} \|y(T) - y_\Omega\|_{L^2(0,1)} &= \left\| \frac{1}{2}(\bar{y}_1(T) + \bar{y}_2(T)) - y_\Omega \right\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq \frac{1}{2} \|\bar{y}_1(T) - y_\Omega\|_{L^2(0,1)} + \frac{1}{2} \|\bar{y}_2(T) - y_\Omega\|_{L^2(0,1)} = j. \end{aligned}$$

Also muss

$$\|y(T) - y_\Omega\|_{L^2(0,1)} = j$$

gelten, denn kleiner als der Optimalwert kann das Funktional an der Stelle $u = (\bar{u}_1 + \bar{u}_2)/2$ nicht sein. Nach dem letzten Satz müssen \bar{u}_1, \bar{u}_2 Bang-Bang-Lösungen sein. Für $(\bar{u}_1 + \bar{u}_2)/2$ kann das nicht auch noch zutreffen, im Widerspruch zum letzten Satz. ■

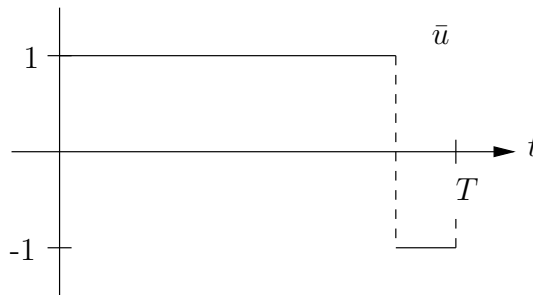
Beispiel. Für die von Schittkowski [183] gestellte Aufgabe

$$\min \frac{1}{2} \int_0^1 (y(x, T) - y_\Omega(x))^2 dx$$

bei

$$\begin{aligned} y_t(x, t) &= y_{xx}(x, t) \\ y_x(0, t) &= 0 \\ y_x(1, t) &= u(t) - y(1, t) \\ y(x, 0) &= 0, \\ |u(t)| &\leq 1, \end{aligned}$$

bestimmt man unter Vorgabe von $y_\Omega(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2)$, $T = 1.58$, numerisch eine Lösung mit einem Umschaltpunkt. Dieser liegt bei 1.329, vgl. die Abbildung.



Berechnete Bang-Bang-Steuerung

Mit einer Kombination aus numerischer Berechnung und sorgfältigen Abschätzungen der Fourier-Reihen lässt sich zeigen, dass der Optimalwert positiv ist und die optimale Steuerung genau einen Umschaltpunkt in $[1.329, 1.3294]$ besitzt, [61].

Literaturhinweise. Weitere Ergebnisse zur Theorie des Bang-Bang-Prinzips in der Steuerung parabolischer Gleichungen sind in [90] zusammengestellt sowie in den Arbeiten [75], [76], [125], [182], [184], [185], [196], um nur einige der zahlreichen Beiträge zu nennen. In [119] wurde bewiesen, dass für den Fall der Maximumnorm an Stelle der L^2 -Norm die optimale Steuerung bei positivem Optimalwert nur endlich viele Umschaltpunkte haben kann. Numerische Anwendungen durch Berechnung von Umschaltpunkten werden zum Beispiel in [66], [152] angegeben oder im Fall gemischter Steuerungs-Zustandsrestriktionen in [195].

Das Arbeiten mit Greenschen Funktionen ist auch im mehrdimensionalen Fall möglich. Darauf wird hier nicht eingegangen. Wir verweisen auf [76] sowie auf die Anwendung der Integralgleichung für semilineare Gleichungen in [196]. Eine Verallgemeinerung besteht in der Verwendung von stark stetigen Halbgruppen, die im Hinblick auf die Steuerungstheorie detailliert in [24], [25] oder [68] dargestellt ist.

3.3 Schwache Lösungen in $W_2^{1,0}(Q)$

Wir betrachten als Muster für parabolische Gleichungen das parabolische Gegenstück zur Aufgabe (2.11) auf S. 27,

$$\boxed{\begin{aligned} y_t - \Delta y + c_0 y &= f && \text{in } Q = \Omega \times (0, T) \\ \partial_\nu y + \alpha y &= g && \text{in } \Sigma = \Gamma \times (0, T) \\ y(\cdot, 0) &= y_0(\cdot) && \text{in } \Omega \end{aligned}} \quad (3.23)$$

und beschränken uns von vornherein auf Randbedingungen dritter Art. Es ist unproblematisch, Γ in Γ_0 und Γ_1 aufzuspalten und auf Γ_0 homogene Dirichlet-Daten vorzugeben, vgl. (2.11) auf S. 27. Die Vorgabe *inhomogener* nichtglatter Dirichlet-Daten ist komplizierter und wird hier nicht besprochen. Solche Randwertaufgaben werden beispielsweise in [144] oder mit Hilfe der Theorie stark stetiger Halbgruppen in [24], [25] bzw. [68] behandelt. Ein approximativer Zugang über schwache Lösungen mit Randbedingung dritter Art ist in [15], [23] dargestellt.

Wir stellen folgende Forderungen:

Voraussetzung 3.8 *Es seien ein beschränktes Lipschitzgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ mit Rand Γ , eine Endzeit $T > 0$ sowie Funktionen $c_0 \in L^\infty(Q)$, $\alpha \in L^\infty(\Sigma)$, $\alpha(x, t) \geq 0$ f. ü. in Σ , fest vorgegeben.*

Die Funktionen c_0, α, f, g hängen sämtlich von (x, t) ab. „Rechte Seiten“ sind $f \in L^2(Q)$, $g \in L^2(\Sigma)$, $y_0 \in L^2(\Omega)$.

Wir erläutern zur Einstimmung kurz die Schwierigkeiten, die bei der Festlegung des Lösungsbegriffs für die parabolische Gleichung (3.23) auftreten. Von einer klassischen Lösung $y = y(x, t)$ fordert man die Existenz aller auftretenden Ableitungen und deren Stetigkeit im Inneren des Orts-Zeit-Zylinders $Q = \Omega \times (0, T)$, also $y \in C^{2,1}(Q)$. Das ist zu viel verlangt für Probleme der optimalen Steuerung, bei denen die gegebenen Steuerungen aus L^2 -Räumen gewählt werden. Für elliptische Aufgaben wurde von $y = y(x)$ nur die Existenz der schwachen partiellen Ableitungen $D_i = \partial/\partial_{x_i}$ erster Ordnung nach der Ortsvariablen x gefordert und die Gleichung in Variationsform überführt. Die andere Hälfte der Ableitungen trug die Testfunktion $v = v(x)$. Bei parabolischen Gleichungen gehen wir zunächst ähnlich vor. Auch hier führen wir eine Variationsformulierung ein und fordern von $y = y(x, t)$ die Existenz der schwachen partiellen Ableitungen $D_i = \partial/\partial_{x_i}$ erster Ordnung. Die andere Hälfte der Ableitung nach x übernimmt die Testfunktion $v = v(x, t)$.

Zusätzlich ist jetzt noch die Zeit t zu berücksichtigen. Bezüglich t kommt ebenfalls nur eine schwache Ableitung in Frage. Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder man fordert die Existenz der schwachen Ableitung y_t , dann braucht man sie nicht bei der Testfunktion v . Oder man verlangt von y keine Zeitableitung und überträgt diese auf v . Die Forderung der Existenz von y_t in einem Funktionenraum, etwa $y_t \in L^2(Q)$, ist meist zu stark. Daher bleibt für den Anfang nur die zweite Variante übrig. Allerdings steckt darin die Quelle einer Asymmetrie in der Behandlung von y und v , welche die Steuerungstheorie erschwert. Am Ende werden wir doch noch die Existenz von y_t bekommen, allerdings nicht als Funktion sondern als Funktional.

Wir beginnen mit zwei gebräuchlichen Räumen zur Behandlung parabolischer Gleichungen, die in Ladyzhenskaya et al. [134] verwendet werden:

Definition. $W_2^{1,0}(Q)$ ist der normierte Raum aller (Äquivalenzklassen von) Funktionen $y \in L^2(Q)$, die alle schwachen partiellen Ableitungen erster Ordnung nach x_1, \dots, x_N im Raum $L^2(Q)$ besitzen, versehen mit der Norm

$$\|y\|_{W_2^{1,0}(Q)} = \left(\int_0^T \int_{\Omega} (y(x,t)^2 + |\nabla y(x,t)|^2) \, dx dt \right)^{1/2},$$

wobei ∇ für den Gradienten bezüglich x steht, also $\nabla := \nabla_x$. Kurz:

$$W_2^{1,0}(Q) = \{y \in L^2(Q) : D_i y \in L^2(Q) \quad \forall i = 1, \dots, N\}$$

Der Raum $W_2^{1,0}(Q)$ wird in der Fachliteratur auch mit $H^{1,0}(Q)$ bezeichnet und fällt zusammen mit $L^2(0, T; H^1(\Omega))$. Dieser Raum abstrakter Funktionen wird im Abschnitt 3.4.1 eingeführt. Folgender Hinweis ist angebracht: In der Bezeichnung $W_2^{1,0}(Q)$ stehen oben die Ordnungen der Ableitungen nach x und t und die Integrationsordnung ist im unteren Index angezeigt. Im Gegensatz dazu gibt der zweite obere Index in $W^{k,p}(\Omega)$ die Integrationsordnung wieder. Verwechslungen sollten aber durch den Zusammenhang und die unterschiedlichen Gebiete Q bzw. Ω ausgeschlossen sein.

Funktionen aus $W_2^{1,0}(Q)$ besitzen also alle Ortsableitungen erster Ordnung als schwache Ableitungen. Diese sind wie folgt definiert: Es existieren Funktionen $w_i \in L^2(Q)$, so dass die Beziehung

$$\iint_Q y(x,t) D_i v(x,t) \, dx dt = - \iint_Q w_i(x,t) v(x,t) \, dx dt \quad \forall v \in C_0^\infty(Q)$$

erfüllt ist. Dann setzen wir $D_i y(x,t) := w_i(x,t)$. Der Raum $W_2^{1,0}(Q)$ ist mit dem in natürlicher Weise entstehenden Skalarprodukt ein Hilbertraum, siehe [134].

Definition. Der normierte Raum $W_2^{1,1}(Q)$ wird durch

$$W_2^{1,1}(Q) = \{y \in L^2(Q) : y_t \in L^2(Q) \text{ und } D_i y \in L^2(Q) \quad \forall i = 1, \dots, N\}$$

eingeführt und versehen mit der Norm

$$\|y\|_{W_2^{1,1}(Q)} = \left(\int_0^T \int_{\Omega} (y(x,t)^2 + |\nabla y(x,t)|^2 + y_t(x,t)^2) \, dx dt \right)^{1/2}.$$

Dabei ist unter $\nabla := \nabla_x$ wieder der Gradient bezüglich x zu verstehen.

$W_2^{1,1}(Q)$ wird mit dem entsprechenden natürlichen Skalarprodukt zu einem Hilbertraum. Für diesen Raum ist auch die Bezeichnung $H^{1,1}(Q)$ üblich. Die Funktionen besitzen hier neben den schwachen partiellen Ableitungen nach x_i auch die schwache partielle Ableitung nach t . Es existiert also eine Funktion $w \in L^2(Q)$, so dass

$$\iint_Q y(x,t) v_t(x,t) \, dx dt = - \iint_Q w(x,t) v(x,t) \, dx dt$$

für alle $v \in C_0^\infty(Q)$ erfüllt ist; hier hat man $y_t := w$.

Wir überführen nun (3.23) in eine Variationsformulierung, indem wir die parabolische partielle Differentialgleichung mit einer Testfunktion $v \in C^1(\bar{Q})$ multiplizieren und über Q integrieren. Das geschieht zunächst *formal*, denn noch wissen wir z.B. nicht, in welchem Sinne (3.23) durch y gelöst wird. Für die Herleitung wird eine klassische Lösung y angenommen, für die alle unten verwendeten Integrale existieren. Insbesondere soll y stetig auf \bar{Q} sein. Am Ende soll die Variationsformulierung aber auch für $y \in W_2^{1,0}(Q)$ sinnvoll sein. In diesem Raum ist y als schwache Lösung gesucht. Nach Integration folgt

$$\int_0^T \int_{\Omega} y_t v \, dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} v \Delta y \, dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} c_0 y v \, dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} f v \, dx dt \quad (3.24)$$

für alle $v \in C^1(\bar{Q})$. Wir integrieren partiell und erhalten

$$\int_{\Omega} y(x, t) v(x, t) \, dx \Big|_0^T - \iint_Q (y v_t - \nabla y \cdot \nabla v - c_0 y v) \, dx dt - \iint_{\Sigma} v \partial_{\nu} y \, ds dt = \iint_Q f v \, dx dt.$$

In dieser Formulierung treten $y(x, 0)$ und $y(x, T)$ auf. Für Funktionen y aus $W_2^{1,0}(Q)$ sind diese Werte wegen nicht garantierter Stetigkeit in t nicht notwendig definiert. Für $y(x, 0)$ können wir den gegebenen Anfangswert $y_0(x)$ einsetzen, aber $y(x, T)$ kann man so nicht eliminieren. Die Testfunktion $v = v(x, t)$ ist glatter, bis jetzt aus $C^1(\bar{Q})$ vorausgesetzt. Aber wir können die gleichen Umformungen sogar für $v \in W_2^{1,1}(Q)$ durchführen. Die Werte $v(x, 0)$ und $v(x, T)$ sind für alle $v \in W_2^{1,1}(Q)$ wohldefiniert als Spuren in $L^2(\Omega)$, siehe [134]. Folglich ist es sinnvoll, $v(x, T) = 0$ für v zu fordern. Dieser Trick schaltet $y(x, T)$ aus. Setzen wir noch $\partial_{\nu} y = g - \alpha y$ ein, so folgt für alle $v \in W_2^{1,1}(Q)$ mit $v(x, T) = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} \iint_Q (-y v_t + \nabla y \cdot \nabla v + c_0 y v) \, dx dt + \iint_{\Sigma} \alpha y v \, ds dt = \\ = \iint_Q f v \, dx dt + \iint_{\Sigma} g v \, ds dt + \int_{\Omega} y_0 v(\cdot, 0) \, dx. \end{aligned}} \quad (3.25)$$

Damit gelangt man schließlich zu folgender Definition:

Definition. Eine Funktion $y \in W_2^{1,0}(Q)$ heißt *schwache Lösung der Anfangs-Randwert-aufgabe (3.23)*, wenn die Variationsgleichung (3.25) für alle $v \in W_2^{1,1}(Q)$ erfüllt ist, die der zusätzlichen Forderung $v(\cdot, T) = 0$ genügen.

Bemerkung. Offenbar sind alle Terme in (3.25) für $y \in W_2^{1,0}(Q)$ sowie $v \in W_2^{1,1}(Q)$ definiert. Die von y geforderte Regularität lässt aber zunächst keine Rückschlüsse auf die Existenz des Anfangswerts $y(\cdot, 0)$ zu.

Satz 3.9 Unter Voraussetzung 3.8 besitzt die parabolische Aufgabe (3.23) genau eine schwache Lösung in $W_2^{1,0}(Q)$. Es existiert eine von f, g, y_0 unabhängige Konstante c_p , so dass

$$\max_{t \in [0, T]} \|y(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} + \|y\|_{W_2^{1,0}(Q)} \leq c_p (\|f\|_{L^2(Q)} + \|g\|_{L^2(\Sigma)} + \|y_0\|_{L^2(\Omega)}) \quad (3.26)$$

für alle $f \in L^2(Q)$, $g \in L^2(\Sigma)$, $y_0 \in L^2(\Omega)$ erfüllt ist.

Der Satz ist ein Spezialfall des allgemeineren Satzes 7.9 aus Abschnitt 7.3.1. Er sichert insbesondere die Stetigkeit von y , aufgefasst als abstrakte Funktion auf $[0, T]$ mit Werten in $L^2(\Omega)$, d.h. $y \in C([0, T], L^2(\Omega))$. Dieser Raum wird im nächsten Abschnitt eingeführt. Deshalb sind die Norm $\max_{t \in [0, T]} \|y(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}$ sowie die Werte $y(\cdot, 0)$ und $y(\cdot, T)$ definiert.

Daraus folgt auch die erwartete Erfüllung der Anfangsbedingung $y(\cdot, 0) = y_0$.

Folgerung. Die Abbildung $(f, g, y_0) \mapsto y$ ist linear und stetig von $L^2(Q) \times L^2(\Sigma) \times L^2(\Omega)$ in $W_2^{1,0}(Q)$ bzw. in $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C([0, T], L^2(\Omega))$.

Die Variationsformulierung (3.25) hat einen gravierenden Nachteil. Die Testfunktion v muss dem Raum $W_2^{1,1}(Q)$ angehören und $v(\cdot, T) = 0$ ist gefordert. Später soll aber für v der adjungierte Zustand p eingesetzt werden können. Dieser ist in der Regel keine Funktion aus $W_2^{1,1}(Q)$ und erfüllt auch nicht notwendig $p(\cdot, T) = 0$. Deshalb stört die Asymmetrie zwischen den Forderungen an y und die Testfunktion v in der Theorie der optimalen Steuerung. Man braucht einen etwas anderen Zugang. Als Fazit bleibt festzustellen, dass sich $W_2^{1,0}(Q)$ nur bedingt für die optimale Steuerung eignet.

3.4 Schwache Lösungen in $W(0, T)$

3.4.1 Abstrakte Funktionen

Das Konzept der abstrakten Funktionen ist ein grundlegendes Hilfsmittel zur Beschreibung zeitlich instationärer Gleichungen (Evolutionsgleichungen) und ist gar nicht so abstrakt, wie es klingt. Wir behandeln hier nur abstrakte Funktionen, die auf einem kompakten Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ definiert sind.

Definition. Eine Abbildung von $[a, b] \subset \mathbb{R}$ in einen Banachraum X heißt *abstrakte Funktion* oder auch *vektorwertige Funktion*.

Beispiele. Je nach Wahl des Raumes X ergeben sich folgende Spezialfälle:

(i) $X = \mathbb{R}$

Eine abstrakte Funktion $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine reellwertige Funktion einer Veränderlichen.

(ii) $X = \mathbb{R}^n$

Eine abstrakte Funktion $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine (n -dimensional-) vektorwertige Funktion einer Veränderlichen,

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

(iii) $X = H^1(\Omega)$

Bei einer abstrakten Funktion $y : [a, b] \rightarrow H^1(\Omega)$ ist der Funktionswert $y(t)$ für jedes $t \in [a, b]$ ein Element von $H^1(\Omega)$, also selbst eine Funktion – eine von $x \in \Omega$ abhängige. Folglich gilt $y(t) = y(\cdot, t) \in H^1(\Omega)$ für jedes feste $t \in [a, b]$, d.h. die Funktion $x \mapsto y(x, t)$ gehört zu $H^1(\Omega)$.

Die Lösung $y \in W_2^{1,0}(Q)$ unseres parabolischen Problems ist von dieser Bauart. \diamond

Wir stellen im Weiteren einige wichtige Räume abstrakter Funktionen bereit.

Definition. Es sei $\{X, \|\cdot\|_X\}$ ein reeller Banachraum. Eine abstrakte Funktion $y : [a, b] \rightarrow X$ heißt stetig im Punkt $t \in [a, b]$, wenn aus $\tau \rightarrow t$, $\tau \in [a, b]$, die Konvergenz $y(\tau) \rightarrow y(t)$ in X folgt, d.h. $\lim_{\tau \rightarrow t} \|y(\tau) - y(t)\|_X = 0$. Mit $C([a, b], X)$ wird der Banachraum aller stetigen (abstrakten) Funktionen $y : [a, b] \rightarrow X$ bezeichnet, versehen mit der Norm

$$\|y\|_{C([a, b], X)} = \max_{t \in [a, b]} \|y(t)\|_X.$$

Beispiel. Dem Raum $C([0, T], L^2(\Omega))$ gehören alle in $\Omega \times [0, T]$ messbaren reellwertigen Funktionen $y = y(x, t)$ an, die an jeder Stelle $t \in [0, T]$ in $x \in \Omega$ quadratisch integrierbar sind und stetig bezüglich t in der Norm von $L^2(\Omega)$. Für jedes $t \in [0, T]$ gilt

$$\int_{\Omega} y(x, t)^2 dx < \infty,$$

und für $\tau \rightarrow t$ folgt

$$\|y(\tau) - y(t)\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (y(x, \tau) - y(x, t))^2 dx \right)^{1/2} \rightarrow 0.$$

Die Norm von y ist

$$\|y\|_{C([0, T], L^2(\Omega))} = \max_{t \in [0, T]} \|y(t)\|_{L^2(\Omega)} = \max_{t \in [0, T]} \left(\int_{\Omega} y(x, t)^2 dx \right)^{1/2}. \quad \diamond$$

Für eine abstrakte Funktion $y \in C([a, b], X)$ wird das Riemann-Integral $I = \int_a^b y(t) dt$ als Grenzwert (Netzlimes) Riemannscher Integralsummen

$$\sum_{i=1}^k y(\xi_i) (t_i - t_{i-1})$$

definiert, mit beliebigen Zwischenstellen $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ bei unbegrenzt feiner werdender Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ des Intervalls $[a, b]$, analog zu reell- oder vektorwertigen Funktionen. Das Integral I ist ein Element der Raums X , Hille und Phillips [103].

Definition. Eine abstrakte Funktion $y : [a, b] \rightarrow X$ heißt Treppenfunktion, wenn endlich viele Elemente $y_i \in X$ und Lebesgue-messbare, paarweise disjunkte Mengen $M_i \subset [a, b]$, $i = 1, \dots, m$, existieren mit $[a, b] = \cup_{i=1}^m M_i$ und $y(t) = y_i$ für alle $t \in M_i$, $i = 1, \dots, m$.

Definition. Ein abstrakte Funktion $y : [a, b] \rightarrow X$ heißt messbar, wenn eine Folge $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ von Treppenfunktionen $y_k : [a, b] \rightarrow X$ existiert, so dass $y(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t)$ für fast alle $t \in [a, b]$ gilt.

Nun können wir L^p -Räume abstrakter Funktionen einführen.

Definition. Unter $L^p(a, b; X)$, $1 \leq p < \infty$, versteht man den linearen Raum aller (Äquivalenzklassen von) messbaren abstrakten Funktionen $y : [a, b] \rightarrow X$ mit der Eigenschaft

$$\int_a^b \|y(t)\|_X^p dt < \infty.$$

Der Raum wird versehen mit der Norm

$$\|y\|_{L^p(a,b;X)} := \left(\int_a^b \|y(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}.$$

Der Raum $L^\infty(a,b;X)$ besteht aus allen (Äquivalenzklassen von) messbaren Funktionen $y : [a,b] \rightarrow X$ mit

$$\|y\|_{L^\infty(a,b;X)} := \operatorname{ess\,sup}_{[a,b]} \|y(t)\|_X < \infty.$$

In beiden Räumen werden Funktionen, die sich nur auf einer Teilmenge von $[a,b]$ mit Lebesguemaß null unterscheiden, als gleich angesehen. Sie gehören zur gleichen Äquivalenzklasse.

Beispiel. Die Funktion $y(x,t) = \frac{e^t}{\sqrt{x}}$ gehört für jedes $T > 0$ zu $C([0,T], L^1(0,1))$, deshalb auch zu $L^p(0,T; L^1(0,1))$ für alle $1 \leq p \leq \infty$. \diamond

Die Räume $L^p(a,b;X)$ sind für alle $p \in [1, \infty]$ Banachräume. Der umfassendste unter ihnen ist $L^1(a,b;X)$. In diesem Raum, und damit in allen anderen auch, kann man für jede abstrakte Funktion das Bochner-Integral einführen. Für Treppenfunktionen y ist es durch

$$\int_a^b y(t) dt := \sum_{i=1}^m y_i |M_i|$$

definiert, wobei $y_i \in X$ der Funktionswert von y auf M_i ist und $|M_i|$ wie bisher das Lebesguemaß der Menge M_i . Das Integral ist offenbar ein Element aus X . Ist $y \in L^1(a,b;X)$ allgemein vorgegeben, so existiert wegen der Messbarkeit von y eine Folge $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ von Treppenfunktionen, die fast überall auf $[a,b]$ gegen $y(t)$ konvergiert. Das Bochner-Integral von y wird durch

$$\int_b^a y(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b y_k(t) dt$$

definiert. Dieser Grenzwert ist unabhängig von der Auswahl der Folge $\{y_k\}_{k=1}^\infty$, siehe Hille und Phillips [103] oder Pazy [170]. Das Bochner-Integral ist das Analogon zum Lebesgue-Integral bei $X = \mathbb{R}$.

Beispiel. Wir betrachten $L^2(0,T; H^1(\Omega))$. Die Elemente des Raumes sind abstrakte Funktionen, können aber gleichzeitig als reellwertige Funktionen der Variablen x und t aufgefasst werden, also $y = y(x,t)$, mit $x \in \Omega$ und $t \in [0,T]$. Für jedes t ist y bezüglich x eine Funktion aus $H^1(\Omega)$. Die Norm ist definiert durch

$$\|y\|_{L^2(0,T; H^1(\Omega))} = \left(\int_0^T \|y(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^T \int_\Omega (y(x,t)^2 + |\nabla_x y(x,t)|^2) dx dt \right)^{1/2}.$$

Es fällt auf, dass die Normen in $W_2^{1,0}(Q)$ und $L^2(0,T; H^1(\Omega))$ identisch sind. Sind es auch die Räume? In der Tat sind sie zueinander isometrisch und isomorph, d.h.

$$W_2^{1,0}(Q) \cong L^2(0,T; H^1(\Omega)).$$

Man kann zeigen, dass jede Funktion $y \in W_2^{1,0}(Q)$ durch Abänderung auf einer Menge vom Maß null zu einer Funktion aus $L^2(0,T; H^1(\Omega))$ wird und umgekehrt. Die Beweis-konstruktion findet man in [103]. \diamond

Mehr über abstrakte Funktionen findet man z.B. in Emmrich [65], Gajewski et al. [72], Hille und Phillips [103], Pazy [170], Tanabe [190] oder Wloka [209].

3.4.2 Abstrakte Funktionen und parabolische Gleichungen

Wir leiten nochmals eine Variationsformulierung der parabolischen Gleichung (3.23) auf S. 110 her und gehen ähnlich vor wie bei der Aufstellung von (3.25). Aber wir multiplizieren (3.23) mit $v \in H^1(\Omega) = V$, d.h. mit $v = v(x)$, integrieren nur über Ω und halten $t \in (0, T)$ fest. Noch ist unklar, wie die Zeitableitung y_t definiert sein soll. Deshalb haben wir für alle $t \in [0, T]$ zunächst nur formal

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} y_t(t) v \, dx &= - \int_{\Omega} \nabla y(t) \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} (f(t) - c_0(t) y(t)) v \, dx \\ &\quad + \int_{\Gamma} (g(t) - \alpha(t) y(t)) v \, ds, \end{aligned} \quad (3.27)$$

wobei wir die Abhängigkeit von x unterdrückt haben. Wegen $L^2(Q) \cong L^2(0, T; L^2(\Omega))$ und analog $L^2(\Sigma) \cong L^2(0, T; L^2(\Gamma))$ können wir f, g, y als abstrakte Funktionen von t auffassen, die fast überall mit den entsprechenden reellen Funktionen übereinstimmen. Beispielsweise gehört nach dem Satz von Fubini die Funktion $x \mapsto f(t, x)$ für fast alle $t \in (0, T)$ dem Raum $L^2(\Omega)$ an. Definiert man sie für die restlichen t entsprechend um (etwa durch null), so liegt die abstrakte Funktion $t \mapsto f(t, \cdot)$ in $L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Für fast alle festen $t \in (0, T)$ wird auf der rechten Seite jedem $v \in H^1(\Omega)$ linear und stetig eine reelle Zahl zugeordnet. Daher ist die rechte Seite für fast jedes t ein lineares und stetiges Funktional $F = F(t)$, angewandt auf $v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} y_t(t) v \, dx = F(t) v \quad \text{f. ü. auf } [0, T]. \quad (3.28)$$

Dieses Funktional $F = F(t) \in H^1(\Omega)^*$ ist durch die rechte Seite von (3.27) definiert. Gleiches sollte für die linke Seite gelten, also muss $y_t(t)$ ein lineares stetiges Funktional auf $H^1(\Omega)$ sein, d.h. $y_t(t) \in H^1(\Omega)^*$ für fast alle $t \in (0, T)$.

Jede schwache Lösung y aus $W_2^{1,0}(Q)$ können wir nach Abänderung auf einer Menge vom Maß null als abstrakte Funktion in $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ auffassen. Im Beweis von Satz 3.12 werden wir daraus auf

$$\int_0^T \|F(t)\|_{H^1(\Omega)^*}^2 \, dt < \infty,$$

schließen, also auf $F \in L^2(0, T; H^1(\Omega)^*)$. Durch Vergleich mit der linken Seite von (3.28) sollte daher gelten

$$y_t \in L^2(0, T; H^1(\Omega)^*). \quad (3.29)$$

Diese Betrachtung gibt einen Hinweis auf den Raum, in dem wir die Ableitung y_t zu suchen haben. Allerdings wissen wir noch nicht, wie diese Ableitung aufzufassen ist. Sie ist definiert im Sinne einer *vektorwertigen Distribution*.

3.4.3 Vektorwertige Distributionen

Im Folgenden sei V ein Banachraum, wobei wir als konkrete Anwendung den Hilbertraum $V = H^1(\Omega)$ im Auge haben. Zu gegebenem $y \in L^2(0, T; V)$ definieren wir eine

vektorwertige Distribution $\mathcal{T} : C_0^\infty(0, T) \rightarrow V$ durch

$$\mathcal{T}\varphi := \int_0^T y(t) \varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(0, T)$$

und identifizieren die Funktion y mit \mathcal{T} . An Stelle von y untersuchen wir das Verhalten der von y erzeugten Distribution \mathcal{T} , die wir auch mit \mathcal{T}_y bezeichnen könnten. Wir verwenden diese Schreibweise aber der Übersichtlichkeit halber nicht.

Die Ableitung \mathcal{T}' wird nun ebenfalls als vektorwertige Distribution eingeführt und zwar durch das Bochner-Integral

$$\mathcal{T}'\varphi := - \int_0^T y(t) \varphi'(t) dt.$$

In gleicher Weise definiert man nun \mathcal{T}'' durch $\mathcal{T}''\varphi := \int_0^T y(t) \varphi''(t) dt$ usw. Man beachte, dass y eine abstrakte Funktion ist, φ aber eine reellwertige. Existiert eine abstrakte Funktion $w = w(t)$ in $L^1(0, T; V)$ mit

$$\mathcal{T}'\varphi = - \int_0^T y(t) \varphi'(t) dt = \int_0^T w(t) \varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(0, T),$$

so können wir \mathcal{T}' mit w identifizieren, denn \mathcal{T}' wird dann durch w erzeugt. Da \mathcal{T} mit der erzeugenden Funktion y identifiziert wurde und \mathcal{T}' mit w , verfährt man ebenso mit den erzeugenden Funktionen und definiert

$$y'(t) := w(t).$$

In diesem Sinne haben wir hier $y' \in L^1(0, T; V)$. Dahinter verbirgt sich die Formel der partiellen Integration, die für alle stetig differenzierbaren $y : [0, T] \rightarrow V$ und alle $\varphi \in C_0^\infty(0, T)$ gilt,

$$\int_0^T y(t) \varphi'(t) dt = y(t) \varphi(t) \Big|_0^T - \int_0^T y'(t) \varphi(t) dt = - \int_0^T y'(t) \varphi(t) dt.$$

Bemerkung. Die in Abschnitt in (2.1) auf S. 22 eingeführten schwachen Ableitungen kann man in gleicher Weise definieren. Man betrachtet dazu die reellwertige Distribution $\mathcal{T} : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathcal{T}\varphi := \int_\Omega y(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

und fasst y als Distribution auf. So ist $D^\alpha y$ zuerst als distributionelle Ableitung definiert. Schwache Ableitungen sind dann solche distributionellen Ableitungen, die durch lokal integrierbare Funktionen erzeugt werden. Diesen Zugang verwenden die meisten Darstellungen zu Sobolevräumen. Die obige Funktion w ist das Analogon zur schwachen Ableitung $w = D^\alpha y$ in (2.1).

Läge w sogar in $L^2(0, T; V)$, so würde y zur Menge aller Funktionen aus $L^2(0, T; V)$ mit regulärer Ableitung in $L^2(0, T; V)$ gehören. Diese Klasse von Funktionen ist aber für unsere Zwecke zu eng. Beziehung (3.29) zeigt im Fall $V = H^1(\Omega)$, dass die Ableitung $y' = y_t$ in der parabolischen Gleichung (3.23) dem größeren Raum $L^2(0, T; V^*)$ angehören wird. Im Weiteren sei V ein $H_0^1(\Omega)$ umfassender Teilraum von $H^1(\Omega)$. In der nächsten Definition fassen wir y als abstrakte Funktion aus $L^2(0, T; V^*)$ auf, so dass ihre vektorwertige

Distribution in V^* abbildet. Das ist möglich, denn V ist stetig in V^* eingebettet wie wir weiter unten begründen.

Definition. Unter $W(0, T)$ versteht man den Raum aller $y \in L^2(0, T; V)$ mit (distributioneller) Ableitung y' in $L^2(0, T; V^*)$, versehen mit der Norm

$$\|y\|_{W(0, T)} = \left(\int_0^T (\|y(t)\|_V^2 + \|y'(t)\|_{V^*}^2) dt \right)^{1/2}.$$

Kurz: $W(0, T) = \{y \in L^2(0, T; V) : y' \in L^2(0, T; V^*)\}.$

Der Raum $W(0, T)$ wird mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{W(0, T)} = \int_0^T (u(t), v(t))_V dt + \int_0^T (u'(t), v'(t))_{V^*} dt$$

zu einem Hilbertraum. Das Skalarprodukt $(F, G)_{V^*}$ definiert man durch $(JF, JG)_V$, wobei $J : V^* \rightarrow V$ die nach dem Satz von Riesz existierende Dualitätsabbildung ist, die jedem Funktional F aus V^* diejenige Funktion $f \in V$ zuordnet, mit der F identifiziert wird.

Zum Verständnis des Weiteren brauchen wir die Konstruktion des sogenannten Gelfandschen Dreiers. In unserem Anwendungsfall sieht die Situation wie folgt aus: $V = H^1(\Omega)$ ist stetig und dicht eingebettet in den Hilbertraum $H = L^2(\Omega)$. Den Raum H^* identifiziert man nach dem Satz von Riesz mit H . Der Raum V ist auch ein Hilbertraum und könnte ebenfalls mit seinem Dualraum V^* identifiziert werden. Das tut man aber aus naheliegenden Gründen nicht, denn z.B. wird bei partieller Integration stillschweigend das Skalarprodukt von H verwendet und nicht das von V , das der Identifikation von V mit V^* zugrunde liegen würde.

Jedes Element $f \in H$ kann durch

$$v \mapsto (f, v)_H \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V$$

als ein lineares und stetiges Funktional auf V aufgefasst werden, damit als Element von V^* . In diesem Sinne gilt

$$V \subset H = H^* \subset V^*.$$

Die Einbettung $H \subset V^*$ ist ebenfalls dicht und stetig, Wloka [209], S.253 ff. Die Kette stetiger und dichter Einbettungen

$$V \subset H \subset V^*$$

heißt *Gelfandscher Dreier*. Funktionale $F \in V^*$ können genau dann vom kleineren Raum V stetig auf H fortgesetzt werden, wenn sie die Form

$$F(v) = (f, v)_H$$

mit einem festen $f \in H$ haben (Rieszscher Satz). Im Fall $V = H^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ bedeutet das

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)^*$$

und $F \in H^1(\Omega)^*$ ist genau dann stetig auf $L^2(\Omega)$ fortsetzbar, wenn ein $f \in L^2(\Omega)$ existiert, so dass für alle $v \in H^1(\Omega)$ die Beziehung

$$F(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx = (f, v)_{L^2(\Omega)}$$

erfüllt ist.

Wesentlich für unsere Zwecke sind die folgenden in Wloka [209] oder Zeidler [215] zu findenden Aussagen, die in jedem Gelfandschen Dreier Gültigkeit besitzen:

Satz 3.10 *Jedes $y \in W(0, T)$ kann, gegebenenfalls nach Abänderung auf einer Menge vom Maß null, als Funktion aus $C([0, T], H)$ angenommen werden. In diesem Sinne gilt die Einbettung $W(0, T) \hookrightarrow C([0, T], H)$ und diese ist stetig.*

Insbesondere folgt aus diesem Satz für alle $y \in W(0, T)$ die Existenz der Werte $y(0)$ und $y(T)$ in H . Die Stetigkeit der Einbettung ist äquivalent zur Existenz einer Konstanten c_E , so dass gilt:

$$\|y\|_{C([0, T], H)} \leq c_E \|y\|_{W(0, T)} \quad \forall y \in W(0, T).$$

Satz 3.11 *Für alle y, p aus $W(0, T)$ ist die Formel der partiellen Integration erfüllt,*

$$\int_0^T (y'(t), p(t))_{V^*, V} dt = (y(T), p(T))_H - (y(0), p(0))_H - \int_0^T (p'(t), y(t))_{V^*, V} dt.$$

Hierbei haben wir die für $F \in V^*$ und $v \in V$ gebräuchliche Schreibweise $(F, v)_{V^*, V} := F(v)$ angewendet, die an ein Skalarprodukt erinnert.

Folgerung. In $W(0, T)$ gilt die nützliche Beziehung

$$\int_0^T (y'(t), y(t))_{V^*, V} dt = \frac{1}{2} \|y(T)\|_H^2 - \frac{1}{2} \|y(0)\|_H^2. \quad (3.30)$$

Sie ergibt sich aus der Formel der partiellen Integration nach Einsetzen von $p = y$. Man kann deshalb formal auch so rechnen:

$$\int_0^T (y'(t), y(t))_{V^*, V} dt = \int_0^T \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|y(t)\|_H^2 dt = \frac{1}{2} \|y(T)\|_H^2 - \frac{1}{2} \|y(0)\|_H^2.$$

3.4.4 Zugehörigkeit schwacher Lösungen aus $W_2^{1,0}(Q)$ zu $W(0, T)$

Wir weisen in diesem Abschnitt nach, dass schwache Lösungen unserer parabolischen Aufgaben in $W(0, T)$ liegen. Dazu betrachten wir unter Voraussetzung 3.8 noch einmal die parabolische Gleichung (3.23) auf S. 110

$y_t - \Delta y + c_0 y$	$= f$	in Q
$\partial_\nu y + \alpha y$	$= g$	in Σ
$y(0)$	$= y_0$	in Ω .

Satz 3.12 Die nach Satz 3.9 in $W_2^{1,0}(Q)$ existierende schwache Lösung y von (3.23) gehört, ggf. nach Abänderung auf einer Menge vom Maß null, dem Raum $W(0, T)$ an.

Beweis: Aus der Variationsformulierung (3.25) folgt

$$\begin{aligned} - \iint_Q y v_t \, dx dt &= - \iint_Q \nabla y \cdot \nabla v \, dx dt - \iint_Q c_0 y v \, dx dt - \iint_\Sigma \alpha y v \, ds dt \\ &\quad + \int_\Omega y_0 v(0) \, dx + \iint_Q f v \, dx dt + \iint_\Sigma g v \, ds dt \end{aligned}$$

für alle $v \in W_2^{1,1}(Q)$ mit $v(T) = 0$. Speziell können wir alle v der Form $v(x, t) := v(x)\varphi(t)$ mit $\varphi \in C_0^\infty(0, T)$ und $v \in V = H^1(\Omega)$ einsetzen. Das ergibt mit $H = L^2(\Omega)$ und $H^N = H \times H \times \dots \times H$ (n -mal)

$$\begin{aligned} - \int_0^T (y(t) \varphi'(t), v)_H \, dt &= - \int_0^T (\nabla y(t), \nabla v)_{H^N} \varphi(t) \, dt - \int_0^T (c_0 y(t), v)_H \varphi(t) \, dt \\ &\quad - \int_0^T (\alpha(t) y(t), v)_{L^2(\Gamma)} \varphi(t) \, dt + \int_0^T (f(t), v)_H \varphi(t) \, dt + \int_0^T (g(t), v)_{L^2(\Gamma)} \varphi(t) \, dt. \end{aligned}$$

Wegen $\varphi(0) = 0$ fällt die Anfangsbedingung weg. Nach Definition von $W_2^{1,0}(Q)$ haben wir $y \in L^2(Q)$. Deshalb gehört die Funktion $y(x, t)$ nach dem Satz von Fubini für fast jedes t bezüglich x zu $L^2(\Omega)$. Weiterhin folgt $D_i y \in L^2(Q)$, $i = 1, \dots, N$, und somit $\nabla y(\cdot, t) \in (L^2(\Omega))^N = H^N$ für fast alle t . Schließlich wissen wir $y(\cdot, t) \in H^1(\Omega)$ und deshalb $y(\cdot, t) \in L^2(\Gamma)$ für fast alle t . Diese Aussagen galten jeweils für fast alle $t \in (0, T)$. In den restlichen Werten t können wir das auf der rechten Seite stehende $y(t)$ durch null festsetzen, ohne die abstrakte Funktion y im Sinne von L^2 -Räumen zu ändern.

Unter den Integralen stehen damit für alle festen t jeweils lineare Funktionale $F_i(t) : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, der Reihe nach

$$\begin{aligned} F_1(t) : v &\mapsto (\nabla y(t), \nabla v)_{H^N} \\ F_2(t) : v &\mapsto (c_0(t) y(t), v)_H \\ F_3(t) : v &\mapsto (\alpha(t) y(t), v)_{L^2(\Gamma)} \\ F_4(t) : v &\mapsto (f(t), v)_H \\ F_5(t) : v &\mapsto (g(t), v)_{L^2(\Gamma)}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Die eben definierten linearen Funktionale sind in allen $t \in (0, T)$ stetig. Ein lineares Funktional F auf V ist genau dann stetig, wenn es beschränkt ist, wenn also eine Konstante c_F existiert, so dass

$$|F(v)| \leq c_F \|v\|_V \quad \forall v \in V$$

gilt. Wir prüfen das exemplarisch für F_1 und F_3 nach:

$$|F_1(t)v| \leq \int_\Omega |\nabla y(t)| |\nabla v| \, dx \leq \|y(t)\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Hier ist die (natürlich von t abhängige) Konstante c_F durch $\|y(t)\|_{H^1(\Omega)}$ gegeben. Die reellwertige Funktion $t \mapsto \|y(t)\|_{H^1(\Omega)}$ gehört zu $L^2(0, T)$ und $c_F = \|y(t)\|_{H^1(\Omega)}$ ist nach Konstruktion überall endlich. Ähnlich wird F_3 abgeschätzt,

$$\begin{aligned} |F_3(t)v| &\leq \int_\Gamma |\alpha(t)| |y(t)| |v| \, ds \leq \|\alpha\|_{L^\infty(\Sigma)} \|y(t)\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq \tilde{c} \|\alpha\|_{L^\infty(\Sigma)} \|y(t)\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Für dieses Funktional ist c_F durch $c_F = \tilde{c} \|\alpha\|_{L^\infty(\Sigma)} \|y(t)\|_{H^1(\Omega)}$ gegeben. Wir erhalten auf diese Weise $F_i(t) \in V^* = H^1(\Omega)^*$ für alle $t, i = 1, \dots, 5$, und schließlich mit einer gewissen Konstanten c

$$\sum_{i=1}^5 \|F_i(t)\|_{V^*} \leq c \{ \|y(t)\|_{H^1(\Omega)} + \|f(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|g(t)\|_{L^2(\Gamma)} \}. \quad (3.32)$$

Die rechts stehenden Funktionen sind alle in t quadratisch integrierbar, folglich auch die links stehenden. Damit haben wir $F_i \in L^2(0, T; V^*)$ für alle $i = 1, \dots, 5$.

Das Funktional F auf der rechten Seite der Variationsformulierung ist die Summe aller F_i . Daraus ergibt sich $F \in L^2(0, T; V^*)$. Schreiben wir die Variationsformulierung unter Verwendung von F um,

$$-\int_0^T (y(t) \varphi'(t), v)_{L^2(\Omega)} dt = \int_0^T (F(t) \varphi(t), v)_{V^*, V} dt \quad \forall v \in V,$$

so erhalten wir

$$\left(-\int_0^T y(t) \varphi'(t) dt, v \right)_{L^2(\Omega)} = \left(\int_0^T F(t) \varphi(t) dt, v \right)_{V^*, V} \quad \forall v \in V$$

und deshalb

$$-\int_0^T y(t) \varphi'(t) dt = \int_0^T F(t) \varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(0, T)$$

als Gleichung im Raum V^* . Das heißt aber $y' = F$ im Sinne vektorwertiger Distributionen, also $y' \in L^2(0, T; V^*)$ und deshalb $y \in W(0, T)$. ■

Satz 3.13 *Die schwache Lösung y der Gleichung (3.23) genügt der Abschätzung*

$$\|y\|_{W(0, T)} \leq c_w (\|f\|_{L^2(Q)} + \|g\|_{L^2(\Sigma)} + \|y_0\|_{L^2(\Omega)})$$

mit einer von f, g, y_0 unabhängigen Konstanten $c_w > 0$. Damit ist die Abbildung $(f, g, y_0) \mapsto y$ stetig von $L^2(Q) \times L^2(\Sigma) \times L^2(\Omega)$ nach $W(0, T)$, insbesondere nach $C([0, T], L^2(\Omega))$.

Beweis: Wir schätzen die Norm $\|y\|_{W(0, T)}$ ab, genauer

$$\|y\|_{W(0, T)}^2 = \|y\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}^2 + \|y'\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega)^*)}^2.$$

Für den ersten Anteil erhält man sofort aus Satz 3.9 auf S. 112,

$$\|y\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}^2 = \|y\|_{W_2^{1,0}(Q)}^2 \leq c (\|f\|_{L^2(Q)} + \|g\|_{L^2(\Sigma)} + \|y_0\|_{L^2(\Omega)}). \quad (3.33)$$

Der zweite erfordert nur unwesentlich mehr Aufwand: Mit den in (3.31) definierten F_i ergibt sich

$$\|y'\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega)^*)} = \left\| \sum_{i=1}^5 F_i \right\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega)^*)} \leq \sum_{i=1}^5 \|F_i\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega)^*)}.$$

Wir wollen nicht alle F_i abschätzen, sondern exemplarisch nur F_1 : Aus (3.32) und (3.33) folgt mit einer generischen Konstanten c

$$\begin{aligned} \|F_1\|_{L^2(0,T;V^*)}^2 &= \int_0^T \|F_1(t)\|_{V^*}^2 dt \leq \int_0^T c \|y(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\ &\leq c \|y\|_{W_2^{1,0}(Q)}^2 \leq c (\|f\|_{L^2(Q)} + \|g\|_{L^2(\Sigma)} + \|y_0\|_{L^2(\Omega)})^2. \end{aligned}$$

Analog können F_2, \dots, F_5 abgeschätzt werden. Insgesamt ergibt sich schließlich die zu beweisende Ungleichung. ■

Damit ist die Existenz der Ableitung $y_t := y'$ hergeleitet und es besteht die Möglichkeit, die Variationsgleichung (3.25) umzuformulieren. Wir können in (3.25), S. 112, $y \in W(0, T)$ voraussetzen und den nun wohldefinierten Endwert $y(T)$ mitführen. Mit (3.24) auf S. 112 haben wir für alle $v \in W_2^{1,1}(Q)$

$$\begin{aligned} & - \iint_Q y v_t + \iint_Q \nabla y \cdot \nabla v + \iint_Q c_0 y v + \iint_\Sigma \alpha y v \\ &= \iint_Q f v + \iint_\Sigma g v + \int_\Omega y_0 v(\cdot, 0) - \int_\Omega y(\cdot, T) v(\cdot, T). \end{aligned}$$

Auf die Angabe der Differentiale in den Integralen wurde der Kürze halber verzichtet. Weiter können wir die Informationen $y, v \in W(0, T)$ sowie $y(0) = y_0$ ausnutzen. Dann folgt aus der Formel der partiellen Integration auf S. 119 für alle $v \in W(0, T)$

$$\begin{aligned} \int_0^T (y_t, v)_{V^*, V} + \iint_Q \nabla y \cdot \nabla v + \iint_Q c_0 y v + \iint_\Sigma \alpha y v &= \iint_Q f v + \iint_\Sigma g v \\ y(0) &= y_0, \end{aligned} \tag{3.34}$$

wobei y_t eine abstrakte Funktion aus $L^2(0, T; V^*)$ ist. Die Erweiterung von $v \in W^{1,1}(Q)$ zu $v \in W(0, T)$ erfolgte mit einem Dichtheitsargument, denn alle obigen Integrale sind stetig in v in $W(0, T)$ und die als Elemente von $W(0, T)$ interpretierten Funktionen aus $W^{1,1}(Q)$ liegen dicht in $W(0, T)$. Diese Variationsformulierung gilt sogar für alle $v \in L^2(0, T; V)$, denn alle verwendeten Ausdrücke bleiben auch stetig in diesem Raum. Daher können wir (3.34) äquivalent wie folgt aufschreiben:

$$\begin{aligned} \int_0^T (y_t, v)_{V^*, V} dt + \iint_Q (\nabla y \cdot \nabla v + c_0 y v) dx dt + \iint_\Sigma \alpha y v ds dt &= \\ = \iint_Q f v dx dt + \iint_\Sigma g v ds dt &\quad \forall v \in L^2(0, T; V), \\ y(0) &= y_0. \end{aligned}$$

(3.35)

Die Lösungsabbildung $(f, g, y_0) \mapsto y$ zum Anfangs-Randwertproblem (3.23),

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y + c_0 y &= f && \text{in } Q = \Omega \times (0, T) \\ \partial_\nu y + \alpha y &= g && \text{in } \Sigma = \Gamma \times (0, T) \\ y(\cdot, 0) &= y_0 && \text{in } \Omega \end{aligned}$$

hat die Struktur

$$y = G_Q f + G_\Sigma g + G_0 y_0 \tag{3.36}$$

mit linearen stetigen Operatoren $G_Q : L^2(Q) \rightarrow W(0, T)$, $G_\Sigma : L^2(\Sigma) \rightarrow W(0, T)$ und $G_0 : L^2(\Omega) \rightarrow W(0, T)$, die durch $G_Q : f \mapsto y$ bei $g = 0$, $y_0 = 0$, $G_\Sigma : g \mapsto y$ bei $f = 0$, $y_0 = 0$ und $G_0 : y_0 \mapsto y$ bei $f = 0$, $g = 0$ definiert sind. Die Grundlage dieser Darstellung ist Satz 3.13.

3.5 Parabolische Optimalsteuerungsprobleme

Analog zum elliptischen Fall beginnen wir mit der Überführung ausgewählter linear-quadratischer parabolischer Probleme der optimalen Steuerung in ein quadratisches Optimierungsproblem im Hilbertraum und beweisen zuerst die Lösbarkeit der Aufgaben, das heißt die Existenz optimaler Steuerungen.

Wir stellen zunächst die Grundvoraussetzungen an die gegebenen Größen zusammen, um deren ständige Wiederholung zu vermeiden. Gegeben sind das Ortsgebiet Ω mit Rand Γ , die Zeitdauer $T > 0$, anzusteuern Funktionen y_Ω , y_Q oder y_Σ , eine Anfangsverteilung y_0 , Koeffizienten α , β sowie Schranken u_a , u_b , v_a , v_b , die je nach Problemstellung auf $E = Q = \Omega \times (0, T)$ oder $E = \Sigma = \Gamma \times (0, T)$ definiert sind. Die Menge E ergibt sich jeweils aus dem Sinn der Aufgabenstellung.

Voraussetzung 3.14 *Es seien ein beschränktes Lipschitzgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ mit Rand Γ , $y_\Omega \in L^2(\Omega)$, $y_Q \in L^2(Q)$, $y_\Sigma \in L^2(\Sigma)$, $\alpha, \beta \in L^\infty(E)$, $u_a, u_b, v_a, v_b \in L^2(E)$ mit $u_a(x, t) \leq u_b(x, t)$ sowie $v_a(x, t) \leq v_b(x, t)$ für fast alle (x, t) in E sowie eine Konstante $\lambda \geq 0$ gegeben. Dabei ist E je nach Problemstellung durch $E = Q$ oder $E = \Sigma$ definiert.*

3.5.1 Optimale instationäre Randtemperatur

Wir betrachten die Aufgabe (3.1)–(3.3) auf S. 95,

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \int_\Omega (y(x, T) - y_\Omega(x))^2 dx + \frac{\lambda}{2} \iint_\Sigma u(x, t)^2 ds(x) dt$$

bei

$y_t - \Delta y$	$=$	0	in Q
$\partial_\nu y + \alpha y$	$=$	βu	in Σ
$y(0)$	$=$	0	in Ω

sowie

$$u_a(x, t) \leq u(x, t) \leq u_b(x, t) \quad \text{f.ü. in } \Sigma.$$

Jeder Steuerung $u \in L^2(\Sigma)$ wird nach den Sätzen 3.13 auf S. 121 und 3.12 von S. 120 genau eine schwache Lösung $y \in W(0, T)$ der (obigen) Wärmeleitungsgleichung (3.2) auf S. 95 zugeordnet. Gemäß (3.36) hat y die Darstellung

$$y = G_\Sigma \beta u.$$

Im Zielfunktional tritt aber nicht y selbst auf, sondern nur der Endwert $y(T)$. Der „Beobachtungsoperator“ $E_T : y \mapsto y(T)$ ist linear und stetig von $W(0, T)$ in $L^2(\Omega)$,

denn die Einbettung $W(0, T) \hookrightarrow C([0, T], L^2(\Omega))$ ist linear und stetig. Daraus folgt $\|y(T)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|y\|_{C([0, T], L^2(\Omega))} \leq c \|y\|_{W(0, T)}$ und wir erhalten

$$y(T) = E_T G_\Sigma \beta u =: S u.$$

S ist wieder der Anteil des Zustands, der im Zielfunktional auftritt. Insgesamt resultiert aus der Verkettung $u \mapsto y \mapsto y(T)$ eine lineare und stetige Abbildung

$$S : u \mapsto y(T)$$

von $L^2(\Sigma)$, dem Raum für u , nach $L^2(\Omega)$, dem Raum für $y(T)$. Wir ersetzen im Zielfunktional (3.1) den Ausdruck $y(T)$ durch $S u$. Auf diese Weise ist die partielle Differentialgleichung (3.2) eliminiert, natürlich nur theoretisch. Die Aufgabe der optimalen Steuerung (3.1)–(3.3) wird zur quadratischen Optimierungsaufgabe im Hilbertraum $U = L^2(\Sigma)$,

$$\min_{u \in U_{ad}} f(u) := \frac{1}{2} \|S u - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Sigma)}^2 \quad (3.37)$$

mit

$$U_{ad} = \{u \in L^2(\Sigma) : u_a(x, t) \leq u(x, t) \leq u_b(x, t) \text{ f.ü. auf } \Sigma\}.$$

Die Lösbarkeit kann wieder mit dem allgemeinen Existenzsatz 2.14 auf S. 40 erledigt werden. Das Funktional f ist konvex und stetig, U_{ad} konvex, abgeschlossen, nichtleer und beschränkt im Hilbertraum $L^2(\Sigma)$. Aus Satz 2.14 folgt:

Satz 3.15 *Unter Voraussetzung 3.14 von S. 123, mit $E := \Sigma$, besitzt das Problem (3.37) und damit die Aufgabe der optimalen instationären Randtemperatur (3.1)–(3.3 auf S. 95 mindestens eine optimale Steuerung $\bar{u} \in U_{ad}$. Diese ist für $\lambda > 0$ eindeutig bestimmt.*

Das eben behandelte Problem war ein *parabolisches Randsteuerungsproblem* mit Endwertfunktional. Als Nächstes behandeln wir in gleicher Weise ein Problem mit im Gebiet Ω wirkender Temperaturquelle als Steuerung, wobei wir zur Abwechslung ein Funktional des Randtemperaturverlaufs („Randbeobachtung“) minimieren und Temperaturisolation auf dem Rand annehmen.

3.5.2 Optimale instationäre Temperaturquelle

Gegenstand dieses Abschnitts ist die Aufgabe

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \iint_\Sigma (y(x, t) - y_\Sigma(x, t))^2 ds(x) dt + \frac{\lambda}{2} \iint_Q u(x, t)^2 dx dt \quad (3.38)$$

bei

$$\boxed{\begin{array}{lll} y_t - \Delta y & = & \beta u & \text{in } Q \\ \partial_\nu y & = & 0 & \text{in } \Sigma \\ y(0) & = & 0 & \text{in } \Omega \end{array}} \quad (3.39)$$

und

$$u_a(x, t) \leq u(x, t) \leq u_b(x, t) \quad \text{f.ü. in } Q. \quad (3.40)$$

Hier geht es um die Bestimmung einer *optimalen Temperaturquelle* u mit dem Ziel der bestmöglichen Approximation eines gewünschten *Randtemperaturverlaufs* y_Σ , wobei die Kosten der Steuerung durch den Term $\frac{1}{2} \lambda \|u\|^2$ berücksichtigt sind. Man kann dieses Problem auch als *inverse Aufgabe* auffassen: Es ist eine unbekannte Temperaturquelle u im Inneren des Körpers Ω aus Messungen des Temperaturverlaufs $y|_\Sigma$ an der Oberfläche Γ zu bestimmen. Dabei - und auch bei der Interpretation als Steuerungsproblem - wirkt $\lambda > 0$ als *Regularisierungsparameter*.

Zunächst sichern uns die Sätze 3.13 auf S. 121 sowie 3.12, S. 120, angewendet mit $f := \beta u$, $g = 0$ und $y_0 = 0$, zu gegebenem $u \in L^2(Q)$ die Existenz genau einer schwachen Lösung $y \in W(0, T)$ der Gleichung (3.39). Die Abbildung $u \mapsto y$ ist wegen $y(x, 0) = 0$ linear und stetig von $L^2(Q)$ nach $W(0, T)$, insbesondere nach $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ aufgrund der Definition von $W(0, T)$. Sie hat die Gestalt

$$y = G_Q(\beta u)$$

mit dem in (3.36) definierten Steuerungs-Zustands-Operator $G_Q : L^2(Q) \rightarrow W(0, T)$. Im Zielfunktional treten aber nur die Randwerte $y(x, t)|_\Sigma$ auf. Die Spurabbildung $y \mapsto y|_\Gamma$ ist stetig von $H^1(\Omega)$ nach $L^2(\Gamma)$, deshalb ist die Abbildung $E_\Sigma : y \mapsto y|_\Sigma$ linear und stetig von $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ nach $L^2(0, T; L^2(\Gamma))$. So erhalten wir die Stetigkeit der Abbildung $u \mapsto y \mapsto y|_\Sigma$, d.h. des Operators

$$S : u \mapsto y|_\Sigma$$

von $L^2(Q)$, dem Raum für u , nach $L^2(0, T; L^2(\Gamma)) \cong L^2((0, T) \times \Gamma) = L^2(\Sigma)$, dem Raum für $y|_\Sigma$. Mit den eben eingeführten Operatoren hat S die Form

$$S u = E_\Sigma G_Q(\beta u). \quad (3.41)$$

Durch Einsetzen von $y = S u$ in das Zielfunktional $J(y, u)$ eliminieren wir die parabolische Gleichung und gelangen zur quadratischen Optimierungsaufgabe im Hilbertraum $U = L^2(Q)$,

$$\min_{u \in U_{ad}} f(u) := \frac{1}{2} \|S u - y_\Sigma\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(Q)}^2. \quad (3.42)$$

Aus Satz 2.14 folgt die Existenz optimaler Steuerungen, also die Lösbarkeit des Problems.

Satz 3.16 *Unter Voraussetzung 3.14 auf S. 123 mit $E = Q$ besitzt die Aufgabe der instationären optimalen Temperaturquelle (3.38)–(3.40) eine optimale Steuerung \bar{u} , die im Fall $\lambda > 0$ eindeutig bestimmt ist.*

3.6 Notwendige Optimalitätsbedingungen

Für die in den Abschnitten 3.5.1 und 3.5.2 aufgestellten Probleme geben wir hier die notwendigen Optimalitätsbedingungen an. Zuerst wird eine Variationsungleichung hergeleitet, die noch den Zustand y enthält. Dieser wird anschließend mit Hilfe eines adjungierten Zustands eliminiert, um eine Variationsungleichung für die Steuerung zu erhalten. Wir beweisen dazu einen entsprechenden Hilfssatz.

3.6.1 Hilfssatz für adjungierte Operatoren

Dazu betrachten wir zunächst die parabolische Aufgabe

$$\begin{aligned} -p_t - \Delta p + c_0 p &= a_Q \\ \partial_\nu p + \alpha p &= a_\Sigma \\ p(\cdot, T) &= a_\Omega \end{aligned} \quad (3.43)$$

mit beschränkten und messbaren Koeffizienten c_0, α und vorgegebenen Funktionen $a_Q \in L^2(Q)$, $a_\Sigma \in L^2(\Sigma)$ und $a_\Omega \in L^2(\Omega)$. Wir definieren die Bilinearform

$$a[t; y, v] := \int_\Omega (\nabla y \cdot \nabla v + c_0(\cdot, t) y v) dx + \int_\Gamma \alpha(\cdot, t) y v ds.$$

Lemma 3.17 *Die Aufgabe (3.43) besitzt genau eine schwache Lösung $p \in W_2^{1,0}(Q)$, definiert durch die Beziehung*

$$\iint_Q p v_t dx dt + \int_0^T a[t; p, v] dt = \int_\Omega a_\Omega v(T) dx + \iint_Q a_Q v dx dt + \iint_\Sigma a_\Sigma v ds dt$$

für alle $v \in W_2^{1,1}(Q)$ mit $v(\cdot, 0) = 0$. Die Lösung p gehört zu $W(0, T)$ und mit einer von den gegebenen Funktionen unabhängigen Konstanten $c_a > 0$ gilt

$$\|p\|_{W(0,T)} \leq c_a (\|a_Q\|_{L^2(Q)} + \|a_\Sigma\|_{L^2(\Sigma)} + \|a_\Omega\|_{L^2(\Omega)}).$$

Beweis: Wir führen mit $\tau \in [0, T]$ die Zeittransformation $\tilde{p}(\tau) := p(T - \tau)$, $\tilde{v}(\tau) := v(T - \tau)$ aus. Dann haben wir die Beziehungen $\tilde{p}(0) = p(T)$, $\tilde{p}(T) = p(0)$, $\tilde{v}(0) = v(T)$, $\tilde{v}(T) = v(0)$, $\tilde{a}_Q(\cdot, t) := a_Q(\cdot, T - \tau)$ usw. und

$$\iint_Q p v_t dx dt = - \iint_Q \tilde{p} \tilde{v}_\tau dx d\tau.$$

Deshalb ist die im Lemma aufgeschriebene Variationsformulierung äquivalent zur Definition der schwachen Lösung der (vorwärts-) parabolischen Gleichung

$$\begin{aligned} \tilde{p}_\tau - \Delta \tilde{p} + c_0 \tilde{p} &= \tilde{a}_Q \\ \partial_\nu \tilde{p} + \alpha \tilde{p} &= \tilde{a}_\Sigma \\ \tilde{p}(0) &= a_\Omega. \end{aligned}$$

Der Rest folgt wieder aus den Sätzen 3.9 auf S. 112 (Existenz der schwachen Lösung \tilde{p}) und 3.12 auf S. 120 (Zugehörigkeit von \tilde{p} zu $W(0, T)$). Der Beweis wird durch Rücktransformation vervollständigt. ■

Wegen $p \in W(0, T)$ können wir analog zu (3.35) auf S. 122 die Variationsformulierung der adjungierten Gleichung nach partieller Integration kürzer so formulieren:

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\{ -(p_t, v)_{V^*, V} + a[t; p, v] \right\} dt &= \iint_Q a_Q v dx dt + \iint_\Sigma a_\Sigma v ds dt \\ &\quad \forall v \in L^2(0, T; V), \\ p(T) &= a_\Omega. \end{aligned}$$

(3.44)

Wie im elliptischen Fall benötigen wir zur Herleitung der adjungierten Gleichung die nächste, etwas farblose Aussage:

Satz 3.18 Es sei $y \in W(0, T)$ die Lösung von

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y + c_0 y &= b_Q v \\ \partial_\nu y + \alpha y &= b_\Sigma u \\ y(0) &= b_\Omega w, \end{aligned}$$

mit Koeffizienten $c_0, b_Q \in L^\infty(Q)$, $\alpha, b_\Sigma \in L^\infty(\Sigma)$, $b_\Omega \in L^\infty(\Omega)$ sowie Steuerungen $v \in L^2(Q)$, $u \in L^2(\Sigma)$ und $w \in L^2(\Omega)$. Außerdem seien quadratisch integrierbare Funktionen a_Ω, a_Q, a_Σ gegeben. Dann gilt mit der durch (3.43) definierten Funktion $p \in W(0, T)$

$$\begin{aligned} \int_\Omega a_\Omega y(\cdot, T) dx + \iint_Q a_Q y dx dt + \iint_\Sigma a_\Sigma y ds dt \\ = \iint_\Sigma b_\Sigma p u ds dt + \iint_Q b_Q p v dx dt + \int_\Omega b_\Omega p(\cdot, 0) w dx. \end{aligned}$$

Beweis: Wir schreiben zunächst die Variationsformulierungen für y und p auf. Für y lautet sie mit Testfunktion p

$$\int_0^T \left\{ (y_t, p)_{V^*, V} + a[t; y, p] \right\} dt = \iint_Q b_Q p v dx dt + \iint_\Sigma b_\Sigma p u ds dt \quad (3.45)$$

bei Vorgabe der Anfangsbedingung $y(0) = b_\Omega w$. Analog folgt für p mit Testfunktion y

$$\int_0^T \left\{ -(p_t, y)_{V^*, V} + a[t; p, y] \right\} dt = \iint_Q a_Q y dx dt + \iint_\Sigma a_\Sigma y ds dt \quad (3.46)$$

bei Endbedingung $p(T) = a_\Omega$. Nach partieller Integration in (3.45) erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\{ -(p_t, y)_{V^*, V} + a[t; y, p] \right\} dt &= -(y(T), a_\Omega)_{L^2(\Omega)} + (b_\Omega w, p(0))_{L^2(\Omega)} + \\ &+ \iint_Q b_Q p v dx dt + \iint_\Sigma b_\Sigma p u ds dt. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist identisch mit der von (3.46), also müssen auch die rechten Seiten von (3.46) und (3.47) gleich sein. Daraus ergibt sich die Behauptung. ■

3.6.2 Optimale instationäre Randtemperatur

Wir behandeln nun die notwendigen Optimalitätsbedingungen für die Aufgabe (3.1)–(3.3) auf S. 95,

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \|y(T) - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Sigma)}^2,$$

$\begin{aligned} y_t - \Delta y &= 0 \\ \partial_\nu y + \alpha y &= \beta u \\ y(0) &= y_0, \end{aligned}$

$$u_a \leq u \leq u_b.$$

Jetzt ist ein inhomogener Anfangszustand $y_0 \in L^2(\Omega)$ zugelassen, was wir bisher aus Gründen der einfacheren Darstellung vermieden haben. Aus dem letzten Abschnitt wissen wir, dass diese Aufgabe mit $y_0 = 0$ eine optimale Steuerung \bar{u} mit zugehörigem optimalem Zustand \bar{y} besitzt. Der Fall $y_0 \neq 0$ wird analog behandelt, Übungsaufgabe 3.2 auf S. 143. Der Lösung ordnen wir folgenden *adjungierten Zustand* p zu, die Lösung der *adjungierten Gleichung*

$$\begin{array}{rcl} -p_t - \Delta p & = & 0 \quad \text{in } Q \\ \partial_\nu p + \alpha p & = & 0 \quad \text{in } \Sigma \\ p(T) & = & \bar{y}(T) - y_\Omega \quad \text{in } \Omega. \end{array} \quad (3.48)$$

Mit der formalen Lagrangetechnik kann diese adjungierte Gleichung leicht ermittelt werden. Unsere Erfahrungen mit elliptischen Problemen gestatten es aber schon, diese direkt von der Aufgabenstellung abzulesen und sofort aufschreiben: Die einzelnen Terme der Ableitung des Zielfunktional J nach dem Zustand y treten als rechte Seiten der adjungierten Gleichung auf. Dabei muss das Definitionsgebiet dieser Terme zu dem Gebiet passen, in dem die entsprechende Bedingung der adjungierten Gleichung erklärt ist. Im vorgelegten Fall ist die Ableitung des Zielfunktional nach y die auf Ω definierte Funktion $\bar{y}(T) - y_\Omega$. Sie muss in derjenigen Bedingung der adjungierten Gleichung stehen, die auf Ω vorgegeben ist. Das ist die Bedingung für $p(T)$.

Satz 3.19 *Eine Steuerung $\bar{u} \in U_{ad}$ mit zugehörigem Zustand \bar{y} ist genau dann optimal für die Aufgabe der optimalen instationären Randtemperatur (3.1)–(3.3) auf S. 95 wenn mit dem zugehörigen adjungierten Zustand $p \in W(0, T)$ aus (3.48) die Variationsungleichung*

$$\iint_{\Sigma} (\beta(x, t) p(x, t) + \lambda \bar{u}(x, t)) (u(x, t) - \bar{u}(x, t)) ds(x) dt \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad} \quad (3.49)$$

erfüllt ist.

Beweis: Es sei $S : L^2(\Sigma) \rightarrow L^2(\Omega)$ der lineare und stetige Operator, der bei homogener Anfangsbedingung $y_0 = 0$ der Steuerung u den Endwert $y(T)$ der schwachen Lösung y der Zustandsgleichung zuordnet. Zum fest gegebenen $y_0 \neq 0$ und $u = 0$ gehöre die Funktion $\hat{y} = G_0 y_0$. Mit dieser Aufteilung folgt aus dem Superpositionsprinzip für lineare Gleichungen

$$y(T) - y_\Omega = S u + (G_0 y_0)(T) - y_\Omega = S u - z,$$

wenn wir $z := y_\Omega - (G_0 y_0)(T)$ setzen. So nimmt die Aufgabe die Gestalt

$$\min_{u \in U_{ad}} f(u) := \frac{1}{2} \|S u - z\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Sigma)}^2$$

an. Aus der allgemeinen Variationsungleichung (2.47) von S. 51 folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq (S \bar{u} - z, S(u - \bar{u}))_{L^2(\Omega)} + \lambda (\bar{u}, u - \bar{u})_{L^2(\Sigma)} \\ &= \int_{\Omega} (\bar{y}(T) - y_\Omega) (y(T) - \bar{y}(T)) dx + \lambda \iint_{\Sigma} \bar{u} (u - \bar{u}) ds dt \end{aligned} \quad (3.50)$$

für alle $u \in U_{ad}$. Dabei haben wir

$$Su - S\bar{u} = Su + (G_0 y_0)(T) - (G_0 y_0)(T) - S\bar{u} = y(T) - \bar{y}(T)$$

sowie wieder $z = y_\Omega - (G_0 y_0)(T)$ verwendet. Wir setzen $\tilde{y} := y - \bar{y}$ und wenden Satz 3.18 mit folgenden Größen an: $a_\Omega = \bar{y}(T) - y_\Omega$, $a_Q = 0$, $a_\Sigma = 0$, $b_\Sigma = \beta$, $v = 0$, $w = 0$, $y := \tilde{y}$ und $\tilde{u} := u - \bar{u}$. Es gilt $w = 0$, da Su nach Definition einen homogenen Anfangswert hat (der zu y_0 gehörige Anteil wird durch z berücksichtigt). So ergibt sich

$$(\bar{y}(T) - y_\Omega, \tilde{y}(T))_{L^2(\Omega)} = \iint_{\Sigma} \beta p \tilde{u} dsdt.$$

Einsetzen dieses Resultats in Ungleichung (3.50) liefert

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega} (\bar{y}(T) - y_\Omega)(y(T) - \bar{y}(T)) dx + \lambda \iint_{\Sigma} \bar{u} (u - \bar{u}) dsdt \\ &= \iint_{\Sigma} \beta p (u - \bar{u}) dsdt + \lambda \iint_{\Sigma} \bar{u} (u - \bar{u}) dsdt = \iint_{\Sigma} (\beta p + \lambda \bar{u}) (u - \bar{u}) dsdt, \end{aligned}$$

also die zu beweisende Variationsungleichung. ■

Mit der auf S. 55 für elliptische Aufgaben vorgeführten Methode erhalten wir eine Reihe von Aussagen über die Form optimaler Steuerungen:

Satz 3.20 *Eine Steuerung $\bar{u} \in U_{ad}$ mit zugehörigem Zustand \bar{y} ist genau dann optimal für die Aufgabe der optimalen instationären Randtemperatur (3.1)–(3.3) auf S. 95, wenn mit dem zugehörigen adjungierten Zustand p aus (3.48) für fast alle $(x, t) \in \Sigma$ die folgenden Beziehungen erfüllt sind:*

$$(\beta(x, t) p(x, t) + \lambda \bar{u}(x, t))(v - \bar{u}(x, t)) \geq 0 \quad \forall v \in [u_a(x, t), u_b(x, t)], \quad (3.51)$$

$$\beta(x, t) p(x, t) \bar{u}(x, t) + \frac{\lambda}{2} \bar{u}(x, t)^2 = \min_{v \in [u_a(x, t), u_b(x, t)]} \left(\beta(x, t) p(x, t) v + \frac{\lambda}{2} v^2 \right) \quad (3.52)$$

sowie im Fall $\lambda > 0$ die Projektionsformel

$$\bar{u}(x, t) = \mathbb{P}_{[u_a(x, t), u_b(x, t)]} \left\{ -\frac{1}{\lambda} \beta(x, t) p(x, t) \right\}. \quad (3.53)$$

Beweis: Die Aussagen ergeben sich mit der gleichen Folge von Schritten aus der Variationsungleichung (3.49), die im elliptischen Fall ausgehend von Satz 2.25 auf S. 53 zu Satz 2.27, S. 55 geführt haben. ■

Die Beziehungen (3.51) bzw. (3.52) nennt man *schwaches Minimumprinzip* bzw. *Minimumprinzip*.

Folgerung. Für $\lambda > 0$ genügt das Tripel (\bar{u}, \bar{y}, p) dem *Optimalitätssystem*

$$\boxed{\begin{array}{ll} y_t - \Delta y &= 0 & -p_t - \Delta p &= 0 \\ \partial_\nu y + \alpha y &= \beta u & \partial_\nu p + \alpha p &= 0 \\ y(0) &= y_0 & p(T) &= y(T) - y_\Omega \end{array}} \quad (3.54)$$

$$u = \mathbb{P}_{[u_a, u_b]} \left\{ -\frac{1}{\lambda} \beta p \right\}.$$

Im Fall $\lambda = 0$ muss die Projektionsformel durch die folgende ersetzt werden:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_a(x, t), & \text{falls } \beta(x, t) p(x, t) > 0 \\ u_b(x, t), & \text{falls } \beta(x, t) p(x, t) < 0. \end{cases}$$

Spezialfall. $u_a = -\infty$, $u_b = \infty$ (keine Beschränkung an die Steuerung)

Hier ergibt die Projektionsformel $u = -\lambda^{-1} \beta p$. Dadurch kann man u in der Zustandsgleichung eliminieren und erhält ein *Vorwärts-Rückwärtssystem* zweier parabolischer Gleichungen für die Unbekannten y , p :

$y_t - \Delta y = 0$	$-p_t - \Delta p = 0$	(3.55)
$\partial_\nu y + \alpha y = -\beta^2 \lambda^{-1} p$	$\partial_\nu p + \alpha p = 0$	
$y(0) = y_0$	$p(T) = y(T) - y_\Omega$	

Die Lösung solcher Systeme ist nicht einfach. Ähnliche Gleichungen entstehen als Hamiltonsche Systeme bei der optimalen Steuerung von gewöhnlichen Differentialgleichungen und werden dort im nichtlinearen Fall numerisch mit Schießverfahren behandelt. Bei partiellen Differentialgleichungen kommt als zusätzliche Schwierigkeit die große Zahl von Variablen hinzu, die aus der Ortsdiskretisierung resultiert. Deshalb ist eine direkte Lösung des obigen Optimalitätssystems schwierig. Eine Möglichkeit ist Anwendung von Multigridmethoden, siehe z.B. Borzi [35] sowie Borzi und Kunisch [36]. Auch die direkte Lösung als elliptisches System ist vielversprechend, siehe die Empfehlungen zu numerischen Verfahren ab S. 137.

3.6.3 Optimale instationäre Temperaturquelle

Die entsprechende Aufgabe (3.38)–(3.40) auf S. 124 lautet in Kurzform

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \|y - y_\Sigma\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(Q)}^2$$

bei $u \in U_{ad}$ und der Zustandsgleichung

$y_t - \Delta y = \beta u$
$\partial_\nu y = 0$
$y(0) = 0.$

Mit dem in (3.36) auf S. 122 eingeführten Operator $G_Q : L^2(Q) \rightarrow W(0, T)$ kann die Lösung y in der Form

$$y = G_Q(\beta u)$$

dargestellt werden. Im Zielfunktional tritt die Beobachtung $y|_\Sigma$ auf. Der Beobachtungsoperator $E_\Sigma : y \mapsto y|_\Sigma$ ist stetig von $W(0, T)$ in $L^2(0, T; L^2(\Gamma)) \cong L^2(\Sigma)$. Deshalb ist der in (3.41) auf S. 125 eingeführte „Steuerungs-Beobachtungs-Operator“ $S : u \mapsto y|_\Sigma$, stetig von $L^2(Q)$ in $L^2(\Sigma)$ und das Problem äquivalent zur reduzierten Aufgabe $\min_{u \in U_{ad}} f(u)$

mit dem in (3.42) auf S. 125 definierten Funktional f . Als notwendige Bedingung für \bar{u} folgt wie in (3.50) für alle $u \in U_{ad}$

$$0 \leq (S\bar{u} - y_\Sigma, Su - S\bar{u})_{L^2(\Sigma)} + \lambda (\bar{u}, u - \bar{u})_{L^2(Q)},$$

d.h.

$$0 \leq \iint_{\Sigma} (\bar{y} - y_\Sigma)(y - \bar{y}) ds dt + \lambda \iint_Q \bar{u}(u - \bar{u}) dx dt \quad \forall u \in U_{ad}. \quad (3.56)$$

Wir haben hier wieder $\bar{y}|_\Sigma = S\bar{u}$, $y|_\Sigma = Su$ eingesetzt. Es ist klar, wie der adjungierte Zustand p definiert werden muss. Er wird als schwache Lösung von

$$\begin{aligned} -p_t - \Delta p &= 0 \\ \partial_\nu p &= \bar{y} - y_\Sigma \\ p(T) &= 0 \end{aligned}$$

eingeführt. Existenz und Eindeutigkeit von p folgen aus Lemma 3.17.

Satz 3.21 *Eine Steuerung $\bar{u} \in U_{ad}$ ist genau dann optimal für das Problem der optimalen instationären Temperaturquelle (3.38)–(3.40), S. 124, wenn sie mit dem oben definierten adjungierten Zustand p der folgenden Variationsungleichung genügt:*

$$\iint_Q (\beta p + \lambda \bar{u})(u - \bar{u}) dx dt \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}.$$

Beweis: Die Aussage folgt wieder aus Satz 3.18 mit $a_\Sigma = \bar{y} - y_\Sigma$ und $a_\Omega = 0$, $a_Q = 0$, $b_Q = \beta$, $b_\Sigma = 0$, $b_Q = 0$. Die weiteren Schritte verlaufen wie im Beweis von Satz 3.20. ■

Die eben bewiesene Variationsungleichung kann wie in Abschnitt 3.6.2 äquivalent in ein punktweises Minimumprinzip und für $\lambda > 0$ in eine Projektionsbeziehung für \bar{u} überführt werden. Es gilt insbesondere für fast alle $(x, t) \in Q$

$$\bar{u}(x, t) = \mathbb{P}_{[u_a(x, t), u_b(x, t)]} \left\{ -\frac{1}{\lambda} \beta(x, t) p(x, t) \right\}.$$

3.6.4 Differentialoperator in Divergenzform *

Problemstellung und Existenz optimaler Steuerungen

Die bisher behandelten parabolischen Gleichungen waren aus methodischen Gründen mit dem Laplace-Operator relativ einfach gewählt. Die Theorie kann leicht auf allgemeinere Gleichungen ausgedehnt werden. Wir betrachten dazu den auf S. 30 eingeführten gleichmäßig elliptischen Differentialoperator in Divergenzform

$$\mathcal{A}y(x) = - \sum_{i,j=1}^N D_i(a_{ij}(x) D_j y(x))$$

unter den dort getroffenen Voraussetzungen und formulieren die Aufgabe

$$\begin{aligned} \min J(y, v, u) = & \frac{\lambda_\Omega}{2} \|y(T) - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda_Q}{2} \|y - y_Q\|_{L^2(Q)}^2 \\ & + \frac{\lambda_\Sigma}{2} \|y - y_\Sigma\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \frac{\lambda_v}{2} \|v\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\lambda_u}{2} \|u\|_{L^2(\Sigma)}^2 \end{aligned} \quad (3.57)$$

bei der parabolischen Gleichung

$$\boxed{\begin{aligned} y_t + \mathcal{A}y + c_0 y &= \beta_Q v & \text{in } Q \\ \partial_{\nu_{\mathcal{A}}} y + \alpha y &= \beta_\Sigma u & \text{in } \Sigma \\ y(0) &= y_0 & \text{in } \Omega, \end{aligned}} \quad (3.58)$$

$t \in (0, T)$, sowie den Beschränkungen an die Steuerungen

$$\begin{aligned} v_a(x, t) \leq v(x, t) \leq v_b(x, t) & \quad \text{f.ü. in } Q \\ u_a(x, t) \leq u(x, t) \leq u_b(x, t) & \quad \text{f.ü. in } \Sigma. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Zusätzlich zu den in Voraussetzung 3.14 auf S. 123 eingeführten Größen sind hier nicht-negative Konstanten λ_Ω , λ_Q , λ_Σ , λ_v , λ_u , sowie Koeffizienten $\beta_Q \in L^\infty(Q)$, $\beta_\Sigma \in L^\infty(\Sigma)$ gegeben.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist in der parabolischen Gleichung die Abhängigkeit aller Funktionen von (x, t) unterdrückt worden. Der Operator \mathcal{A} hängt selbst nicht von t ab. Auf die Zeitabhängigkeit der Koeffizienten a_{ij} verzichten wir aus Gründen der Einfachheit. Der Existenzsatz 5.1 aus Ladyzhenskaya et al. [134] lässt durchaus zeitabhängige Koeffizienten $a_{ij}(x, t)$ unter entsprechenden Glattheitsvoraussetzungen zu, vgl. auch Wloka [209]. Die Definition der schwachen Lösung für die Wärmeleitungsgleichung übertragen wir wie folgt auf Gleichung (3.58):

Definition. Eine Funktion $y \in W_2^{1,0}(Q)$ heißt schwache Lösung von (3.58), wenn die folgende Variationsgleichung für alle $w \in W_2^{1,1}(Q)$ mit $w(\cdot, T) = 0$ erfüllt ist:

$$\begin{aligned} \iint_Q y(x, t) w_t(x, t) dx dt &= \iint_Q \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) D_i y(x, t) D_j w(x, t) dx dt \\ &+ \iint_Q (c_0(x, t) y(x, t) - \beta_Q(x, t) v(x, t)) w(x, t) dx dt \\ &+ \iint_\Sigma (\alpha(x, t) y(x, t) - \beta_\Sigma(x, t) u(x, t)) w(x, t) ds(x) dt \\ &- \int_\Omega y_0(x) w(x, 0) dx. \end{aligned}$$

Die bisherige Definition ist ein Spezialfall dieser allgemeineren. Durch Einführung der Familie von Bilinearformen $a[t; \cdot, \cdot] : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} a[t; y, w] &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N (a_{ij}(x) D_i y(x) D_j w(x) + c(x, t) y(x) w(x)) dx \\ &+ \int_\Gamma \alpha(x, t) y(x) w(x) ds(x) \end{aligned}$$

und $H := L^2(\Omega)$ lässt sich die obige schwache Formulierung übersichtlicher aufschreiben:

$$\begin{aligned} \int_0^T \{-(y(t), w_t(t))_H dt + a[t; y(t), w(t)]\} dt &= \int_0^T (\beta_Q(t) v(t), w(t))_H dt \\ + \int_0^T (\beta_\Sigma(t) u(t), w(t))_{L^2(\Sigma)} dt + (y_0, w(0))_H &\quad \forall w \in W_2^{1,1}(Q) : w(T) = 0. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Hier ist wieder die Abhängigkeit aller Größen von x unterdrückt.

Nach Satz 7.9 von S. 289 besitzt das Anfangs-Randwertproblem (3.58) unter den getroffenen Voraussetzungen für jedes Tripel (v, u, y_0) aus $L^2(Q) \times L^2(\Sigma) \times L^2(\Omega)$ genau eine schwache Lösung $y \in W_2^{1,0}(Q)$. Diese gehört dem Raum $W(0, T)$ an und erfüllt mit einer von v, u, y_0 unabhängigen Konstanten c_P die Abschätzung

$$\|y\|_{W(0,T)} \leq c_P \left(\|v\|_{L^2(Q)} + \|u\|_{L^2(\Sigma)} + \|y_0\|_{L^2(\Omega)} \right). \quad (3.61)$$

Die Zugehörigkeit zu $W(0, T)$ ergibt sich wie in Satz 3.12. Die Abbildung $(v, u, y_0) \mapsto y$ ist deshalb linear und stetig von $L^2(Q) \times L^2(\Sigma) \times L^2(\Omega)$ nach $W(0, T)$. Insbesondere sind folgende Abbildungen stetig, die y auf verschiedenen Gebieten betreffen: $(v, u, y_0) \mapsto y$ von $L^2(Q) \times L^2(\Sigma) \times L^2(\Omega)$ in $L^2(Q)$, $(v, u, y_0) \mapsto y|_\Sigma$ von $L^2(Q) \times L^2(\Sigma) \times L^2(\Omega)$ in $L^2(\Sigma)$ sowie $(v, u, y_0) \mapsto y(T)$ von $L^2(Q) \times L^2(\Sigma) \times L^2(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$. Mit diesen Informationen lässt sich nun analog zu den vorhergehenden Abschnitten folgende Aussage beweisen:

Folgerung. *Die Aufgabe (3.57)–(3.59) besitzt unter den getroffenen Voraussetzungen optimale Steuerungen \bar{v} und \bar{u} . Diese sind eindeutig bestimmt, falls λ_v und λ_u positiv sind bzw. λ_Q positiv ist und β_Q sowie β_Σ fast überall nicht verschwinden.*

Bemerkung. Analog zu Abschnitt 2.3.3 kann man auch eine Aufteilung $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ vornehmen und auf Γ_0 homogene Randwerte für y vorgeben. Dies bleibt dem Leser überlassen.

Notwendige Optimalitätsbedingungen

Für die Aufgabe (3.57)–(3.59) geben wir die Optimalitätsbedingungen ohne Beweis an, weil die Argumentation analog zu der für die bisher diskutierten Probleme ist. Es seien die Steuerungen $\bar{v} \in L^2(Q)$ und $\bar{u} \in L^2(\Sigma)$ mit Zustand \bar{y} optimal. Der zugehörige adjungierte Zustand \bar{p} bestimmt sich aus der adjungierten Gleichung

$-p_t + \mathcal{A}p + c_0 p$	$=$	$\lambda_Q (\bar{y} - y_Q)$	in Q
$\partial_{\nu_A} p + \alpha p$	$=$	$\lambda_\Sigma (\bar{y} - y_\Sigma)$	in Σ
$p(T)$	$=$	$\lambda_\Omega (\bar{y}(T) - y_\Omega)$	in Ω .

Als notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingung erhält man die Variationsungleichungen

$$\begin{aligned} \iint_Q (\beta_Q(x, t) p(x, t) + \lambda_v \bar{v}(x, t)) (v(x, t) - \bar{v}(x, t)) dx dt &\geq 0 \quad \forall v \in V_{ad}, \\ \iint_\Sigma (\beta_\Sigma(x, t) p(x, t) + \lambda_u \bar{u}(x, t)) (u(x, t) - \bar{u}(x, t)) ds dt &\geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}, \end{aligned}$$

die wieder durch punktweise Beziehungen oder Projektionsformeln ausgedrückt werden können. Dabei ist U_{ad} wie bisher definiert und V_{ad} ist die Menge aller v aus $L^2(Q)$, welche die Beschränkungen $v_a(x, t) \leq v(x, t) \leq v_b(x, t)$ fast überall in Q erfüllen.

3.7 Numerische Lösungstechniken

Wir erläutern hier zuerst das Gradienten-Projektionsverfahren sowie das Aufstellen eines endlichdimensionalen reduzierten Problems, weil sich diese Methoden leicht zu Übungszwecken implementieren lassen. Gradientenverfahren sind auch heute noch oft für komplexere Aufgaben (etwa in dreidimensionalen Ortsgebieten) die Methode der Wahl. Am Ende des Abschnitts wird ein kurzer Überblick über empfehlenswerte effizientere Verfahren gegeben.

3.7.1 Gradienten-Projektionsverfahren

Wir skizzieren das Gradienten-Projektionsverfahren für den Fall der optimalen instationären Randtemperatur. Parabolische Aufgaben mit verteilter Steuerung werden völlig analog behandelt, vgl. den elliptischen Fall mit verteilter Steuerung. Zu lösen sei die Aufgabe

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \|y(T) - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Sigma)}^2$$

bei $u_a \leq u \leq u_b$ und

$$\begin{array}{rcl} y_t - \Delta y & = & 0 \\ \partial_\nu y + \alpha y & = & \beta u \\ y(0) & = & y_0. \end{array} \quad (3.62)$$

Wie bisher bezeichnet $S : u \mapsto y(T)$, $L^2(\Sigma) \rightarrow L^2(\Omega)$, den Operator, der einer gegebenen Steuerung u bei vorgegebenem homogenem Anfangswert $y_0 = 0$ den Endwert der Lösung der obigen Gleichung zuordnet. Zum inhomogenen Wert y_0 und der Steuerung $u = 0$ gehöre die Lösung \hat{y} . Damit haben wir

$$y(x, T) = (Su)(x) + \hat{y}(x, T).$$

Das Optimalsteuerungsproblem wird auf diese Weise eine quadratische Optimierungsaufgabe im Hilbertraum,

$$\min_{u \in U_{ad}} f(u) := \frac{1}{2} \|Su + \hat{y}(T) - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Sigma)}^2.$$

Die Ableitung von f an einer Stelle u_n ergibt sich durch

$$f'(u_n)v = \iint_{\Sigma} (\beta(x, t) p_n(x, t) + \lambda u_n(x, t)) v(x, t) \, ds dt,$$

wobei p_n die Lösung der folgenden adjungierten Gleichung ist:

$$\begin{array}{rcl} -p_t - \Delta p & = & 0 \\ \partial_\nu p + \alpha p & = & 0 \\ p(T) & = & y_n(T) - y_\Omega. \end{array} \quad (3.63)$$

Nach Identifikation (Satz von Riesz) erhalten wir unsere übliche Darstellung des reduzierten Gradienten,

$$f'(u_n) = \beta p_n + \lambda u_n.$$

Das Verfahren läuft wie folgt ab: Die Steuerungen u_1, \dots, u_n seien bereits berechnet.

S1 (*Neuer Zustand*) Bestimme zu u_n den Zustand y_n als Lösung der Zustandsgleichung (3.62).

S2 (*Neue Abstiegsrichtung*) Berechne den zugehörigen adjungierten Zustand aus Gleichung (3.63). Wähle als Abstiegsrichtung den Antigradienten

$$v_n = -f'(u_n) = -(\beta p_n + \lambda u_n).$$

S3 (*Schrittweitenbestimmung*) Berechne eine optimale Schrittweite s_n aus

$$f(\mathbb{P}_{[u_a, u_b]}\{u_n + s_n v_n\}) = \min_{s>0} f(\mathbb{P}_{[u_a, u_b]}\{u_n + s v_n\}).$$

S4 $u_{n+1} := \mathbb{P}_{[u_a, u_b]}\{u_n + s_n v_n\}$; $n := n + 1$; gehe zu S1.

Der auszuführende Projektionsschritt ist notwendig, weil $u_n + s_n v_n$ eventuell unzulässig sein kann. Man sieht ansonsten die völlige Analogie zu elliptischen Aufgaben. Das Verfahren ist relativ langsam, kann aber einfach implementiert werden. Daher eignet es sich gut für Testrechnungen. Parabolische Aufgaben sind numerisch aufwändiger als elliptische, denn neben der Ortsvariablen tritt die Zeitvariable auf. Deshalb sind Gradientenverfahren immer noch eine sinnvolle Alternative zu Methoden höherer Konvergenzordnung. Zur Analysis des Verfahrens verweisen wir auf [90] oder [108].

3.7.2 Aufstellen des reduzierten Problems

Ist die Aufgabe (3.62) mehrfach für verschiedene Anfangswerte y_0 , Endwerte y_Ω oder Regularisierungsparameter λ zu lösen, dann kann sich das Aufstellen eines auf u reduzierten Problems lohnen. Das gilt auch für den Fall, dass die Steuerung von vornherein die Form (3.64) mit relativ wenigen a priori gegebenen Funktionen e_i hat.

Aus Gründen der Einfachheit und Übersichtlichkeit stellen wir uns wie im elliptischen Fall vor, dass wir zu gegebener Steuerfunktion u den Zustand y als Lösung der Zustandsgleichung exakt bestimmen können. Gleiches betreffe die Berechnung aller auftretenden Integrale.

Die Steuerfunktion $u = u(x, t)$ habe analog zum elliptischen Fall mit fest gegebenen Ansatzfunktionen e_i die Darstellung

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^m u_i e_i(x, t). \quad (3.64)$$

Beispiel. Es sei $N = 2$ und $\Omega = (0, 1)^2$ das Einheitsquadrat. Den (eindimensionalen) Rand Γ denken wir uns auf das Intervall $[0, 4]$ der reellen Achse abgewickelt. Durchläuft die Variable x den Rand Γ , so können wir u als Funktion der Bogenlänge s und der Zeit t auffassen. Damit ist u auf dem Rechteck $[0, 4] \times [0, T]$ definiert, das wir in $n_s \cdot n_t$ kleine Rechtecke zerlegen.

Die Steuerfunktion u wird als Treppenfunktion angesetzt und ist damit jeweils konstant auf den einzelnen Rechtecken. In diesem Fall sind die Basisfunktionen e_i gleich eins auf jeweils genau einem Rechteck, null außerhalb. Davon existieren $m = n_s \cdot n_t$ verschiedene.

Wie bereits bemerkt wurde, kann aber der obige Ansatz auch ohne Einführung einer Diskretisierung a priori gegeben sein, was bei konkreten Anwendungen nicht selten ist. \diamond

Die Funktionen $y_i(x, T) := (Se_i)(x)$, $i = 1, \dots, m$, sind vorauszuberechnen und ergeben sich als Endwerte der Lösung y von

$$\begin{aligned} y_t &= \Delta y \\ \partial_\nu y + \alpha y &= \beta e_i \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

Außerdem wird $\hat{y}(x, T)$ benötigt, die Lösung zum Anfangswert y_0 ,

$$\begin{aligned} \hat{y}_t &= \Delta \hat{y} \\ \partial_\nu \hat{y} + \alpha \hat{y} &= 0 \\ \hat{y}(0) &= y_0. \end{aligned}$$

Nach Einsetzen dieser Darstellung in die Zielfunktion erhalten wir die reduzierte Zielfunktion f_m , die nur vom Vektor $\vec{u} = (u_1, \dots, u_m)^\top$ abhängt,

$$f_m(\vec{u}) = \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^m u_i y_i(T) - y_\Omega + \hat{y}(T) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \left\| \sum_{i=1}^m u_i e_i \right\|_{L^2(\Sigma)}^2.$$

Als endlichdimensionale Approximation des Optimalsteuerungsproblems lösen wir

$$(P_m) \quad \min_{\vec{u}_a \leq \vec{u} \leq \vec{u}_b} f_m(\vec{u}).$$

Die Ungleichung $\vec{u}_a \leq \vec{u} \leq \vec{u}_b$ ist komponentenweise zu verstehen. Außerdem wird angenommen, dass die Beschränkung $u_a \leq u_i \leq u_b$ mit Konstanten u_a, u_b eine sinnvolle Entsprechung zu $u_a \leq u(x, t) \leq u_b$ ist. Das ist im Fall der im obigen Beispiel beschriebenen Treppenfunktionen e_i sicher der Fall. Alternativ können bei allgemeineren Ansatzfunktionen e_i die Restriktionen $u_a \leq u_i \leq u_b$ von vornherein so gefordert sein.

Nach leichter Rechnung ergibt sich

$$\begin{aligned} f_m(\vec{u}) &= \frac{1}{2} \|\hat{y}(T) - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^m u_i (\hat{y}(T) - y_\Omega, y_i(T))_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m u_i u_j (y_i(T), y_j(T))_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2} \sum_{i,j=1}^m u_i u_j (e_i, e_j)_{L^2(\Sigma)}. \end{aligned}$$

Folglich ist (P_m) - bis auf die Konstante $\frac{1}{2} \|\hat{y}(T) - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2$ - äquivalent zur endlichdimensionalen *reduzierten quadratischen Optimierungsaufgabe*

$$\begin{aligned} \min \quad & \left\{ \frac{1}{2} \vec{u}^\top (C + \lambda D) \vec{u} + \vec{a}^\top \vec{u} \right\}, \\ & \vec{u}_a \leq \vec{u} \leq \vec{u}_b. \end{aligned} \tag{3.65}$$

Um sie aufzustellen, müssen folgende Größen numerisch vorausberechnet werden:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (a_i), & a_i &= (\hat{y}(T) - y_\Omega, y_i(T))_{L^2(\Omega)}, \\ C &= (c_{ij}), & c_{ij} &= (y_i(T), y_j(T))_{L^2(\Omega)}, \\ D &= (d_{ij}), & d_{ij} &= (e_i, e_j)_{L^2(\Sigma)}. \end{aligned}$$

Im oben erläuterten Beispiel der Treppenfunktionen gilt $(e_i, e_j)_{L^2(\Sigma)} = \delta_{ij} \|e_i\|_{L^2(\Sigma)}^2$. Dann ist D eine Diagonalmatrix, $D = \text{diag}(\|e_i\|_{L^2(\Sigma)}^2)$.

Die reduzierte Aufgabe kann mit einem gängigen Code der quadratischen Optimierung wie z.B. **quadprog** in **MATLAB** gelöst werden. Eine Alternative ist die Implementierung einer Aktive-Mengen-Strategie. Die Website von NEOS (NEOS Server for Optimization) enthält eine Liste anderer verfügbarer Codes.

Der hier beschriebene Zugang lohnt sich nur bei nicht zu großem m , denn zur Bestimmung aller Größen müssen $m + 1$ partielle Differentialgleichungen numerisch gelöst werden. Prinzipiell ist er immer anwendbar, wenn man die Wärmeleitungsgleichung numerisch beherrscht, also auch in örtlich dreidimensionalen Gebieten. Ist u von vornherein die Linearkombination (3.64) relativ weniger gegebener Ansatzfunktionen mit unbekannten (Steuerungs-)Komponenten u_i , dann bietet sich diese Methode an.

Zu empfehlende numerische Verfahren

Folgende Verfahren wurden in zahlreichen Fällen mit Erfolg angewendet und können zur numerischen Lösung empfohlen werden:

Fall ohne Restriktionen an u . Hier kann das gekoppelte System (3.55) auf S.130 aus Zustandsgleichung und adjungierter Gleichung gelöst werden, sofern man dieses numerisch beherrscht. Bei eindimensionalen Ortsgebieten ist das unproblematisch. Verfügbare Programmpakete kommen auch gut mit zweidimensionalen Ortsgebieten einfacher Geometrie zurecht. Bei größeren Dimensionen bieten sich Multigridtechniken wie in [35] oder [36] an.

Primal-duale Aktive-Mengen-Strategien. Diese gehören zu den in letzter Zeit am häufigsten angewendeten Methoden, siehe Ito und Kunisch [114], Bergounioux et al. [26], Kunisch und Rösch [129] sowie die ausführliche Darstellung in Ito und Kunisch [115]. Die Arbeit [129] behandelt den Fall einer allgemeinen linearen stetigen Abbildung $u \mapsto y = Su$ und lässt damit auch parabolische Gleichungen zu, während sich die anderen Referenzen auf elliptische Aufgaben beziehen. Wie im elliptischen Fall werden in jedem Iterationsschritt aktuell aktive Mengen für die obere und untere Box-Restriktion an u bestimmt, in denen die Steuerung im nächsten Schritt durch den entsprechenden oberen bzw. unteren Wert der Schranke fixiert wird. Für die restlichen Werte löst man wieder ein Vorwärts-Rückwärtssystem parabolischer Gleichungen ohne Restriktionen an u .

Direkte Lösung des Optimalitätssystems (3.54). Sehr erfolgversprechend ist die Methode, auch im Fall von Restriktionen an u das Optimalitätssystem (3.54) direkt zu lösen. Man setzt u in der Form $u = \mathbb{P}_{[u_a, u_b]} \{-\lambda^{-1} \beta p\}$ in die Zustandsgleichung ein, verwendet dabei die Darstellung $\mathbb{P}_{[u_a, u_b]}(z) = \max\{u_a, \min\{u_b, z\}\}$ und erhält schließlich das nichtlineare System für y und p

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y &= 0 & -p_t - \Delta p &= 0 \\ \partial_\nu y + \alpha y &= \beta \max\{u_a, \min\{u_b, \{-\lambda^{-1} \beta p\}\}\} & \partial_\nu p + \alpha p &= 0 \\ y(0) &= y_0, & p(T) &= y(T) - y_\Omega. \end{aligned}$$

Die hier enthaltenen max- bzw. min-Funktionen sind nur an der Stelle u_a bzw. u_b nicht differenzierbar, aber insgesamt Newton-differenzierbar, vgl. Ito und Kunisch [115]. Das

macht die bisher publizierten Erfolge mit einer direkten numerischen Lösung des obigen nichtglatten Systems verständlich. Man kann die Funktionen aber auch sehr genau durch glatte Approximationen ersetzen (das geschieht in manchen Programmsystemen automatisch). Das so entstehende (glatte) nichtlineare System zweier partieller Differentialgleichungen wird dann numerisch gelöst. Neitzel et al. [166] berichten über gute Erfahrungen bei der Anwendung dieser Technik mit vorhandenen Softwarepaketen.

Vollständige Diskretisierung und nachfolgende Optimierung. Diese oft auch "discretize-then-optimize" genannte Methode beruht wie im elliptischen Fall auf einer vollständigen Diskretisierung von partieller Differentialgleichung und Zielfunktional, um so eine (große) endlichdimensionale Optimierungsaufgabe zu erhalten. Das ist insbesondere für Aufgaben mit örtlich eindimensionaler parabolischer Gleichung leicht durchzuführen. Dann können verfügbare Löser für endlichdimensionale quadratische Optimierungsaufgaben eingesetzt werden.

3.8 Herleitung der verwendeten Fourierentwicklungen

Der Vollständigkeit halber leiten wir noch die Fourier-Entwicklungen (3.14) her. Dazu betrachten wir die schwache Lösung $y \in W_2^{1,0}(Q) \cap W(0, T)$ der parabolischen Aufgabe

$$\begin{aligned} y_t(x, t) - y_{xx}(x, t) &= f(x, t) & \text{in } Q = (0, 1) \times (0, T) \\ y_x(0, t) &= 0 & \text{in } (0, T) \\ y_x(1, t) + \alpha y(1, t) &= u(t) & \text{in } (0, T) \\ y(x, 0) &= y_0(x) & \text{in } (0, 1) \end{aligned} \quad (3.66)$$

für feste $\alpha > 0$, $T > 0$ und gegebene Funktionen $f \in L^2(Q)$, $u \in L^2(0, T)$, $y_0 \in L^2(0, 1)$. Die normalisierten Eigenfunktionen $\{v_n(x)\}_{n=1}^\infty$ des Differentialoperators $A = -\partial^2/\partial x^2$ bei homogenen Randbedingungen

$$\frac{\partial v_n}{\partial x}(0) = 0, \quad \frac{\partial v_n}{\partial x}(1) + \alpha v_n(1) = 0 \quad (3.67)$$

bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(0, 1)$, siehe z.B. Tychonoff und Samarski [200]. Unser Ziel besteht in einer Reihenentwicklung der Form

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) z_n(t) \quad (3.68)$$

mit noch zu bestimmenden Funktionen v_n und z_n . Wir berechnen zunächst die Eigenfunktionen v_n . Dazu seien $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ die Eigenwerte von A , d.h. $Av_n = \lambda_n v_n$. Sie erfüllen also die homogenen Randbedingungen (3.67) sowie

$$v_n''(x) + \lambda_n v_n(x) = 0 \quad \forall x \in (0, 1). \quad (3.69)$$

Mit dem Ansatz $v_n(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} x)$ findet man unter Beachtung von (3.67) zunächst $c_2 = 0$ und dann $\alpha \cos(\sqrt{\lambda}) = \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda})$. Wir setzen $\mu := \sqrt{\lambda}$ und erhalten zur Bestimmung von μ die Gleichung

$$\mu \tan \mu = \alpha. \quad (3.70)$$

Diese Gleichung hat abzählbar unendlich viele positive Lösungen μ_n , die wir als monoton wachsende Folge $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ anordnen. Die zugehörigen Funktionen $\cos(\mu_n x)$ genügen den Orthogonalitätsrelationen

$$\int_0^1 \cos(\mu_n x) \cos(\mu_\ell x) dx = \begin{cases} N_n, & n = \ell \\ 0, & n \neq \ell \end{cases}$$

mit $N_n = \frac{1}{2} + \frac{\sin(2\mu_n)}{4\mu_n}$. Daher bilden die Funktionen

$$v_n(x) = \frac{1}{\sqrt{N_n}} \cos(\mu_n x)$$

ein Orthonormalsystem, das gemäß der Theorie Sturm-Liouvillescher Randwertaufgaben vollständig ist, siehe [200]. Aus der Anfangsbedingung in (3.66) und dem Ansatz (3.68) folgern wir nach formaler Vertauschung von Grenzwertbildung und Summation

$$y_0(x) = \lim_{t \downarrow 0} y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) z_n(0). \quad (3.71)$$

Andererseits folgt aus der Theorie die Fourier-Reihen im Hilbertraum

$$y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{0,n} v_n(x)$$

mit Fourierkoeffizienten

$$y_{0,n} = \int_0^1 v_n(x) y_0(x) dx \quad (3.72)$$

und daher nach Koeffizientenvergleich

$$z_n(0) = \int_0^1 v_n(x) y_0(x) dx.$$

Wir verwenden nun im örtlich eindimensionalen Fall die schwache Formulierung (3.25), S. 112, der parabolischen Aufgabe (3.66) und setzen $v(x, t) = \varphi(t) v_n(x)$ mit $\varphi \in H^1(0, T)$ und $\varphi(T) = 0$ als Testfunktion ein. Dann folgt für all diese φ

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_0^1 y(x, t) \varphi'(t) v_n(x) dx dt + \int_0^T \int_0^1 y_x(x, t) \varphi(t) v_n'(x) dx dt \\ & \quad + \int_0^T y(1, t) \varphi(t) v_n(1) dt - \int_0^T y(0, t) \varphi(t) v_n(0) dt \\ & = \int_0^T \int_0^1 f(x, t) \varphi(t) v_n(x) dx dt + \int_0^T u(t) \varphi(t) v_n(1) dt + \int_0^1 y_0(x) \varphi(0) v_n(x) dx. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Nach Einsetzen der Reihenentwicklung (3.68) in das erste Integral von (3.73) ergibt sich unter Ausnutzung der Orthogonalitätsrelationen

$$- \int_0^T \int_0^1 y(x, t) \varphi'(t) v_n(x) dx dt = - \int_0^T z_n(t) \varphi'(t) dt. \quad (3.74)$$

Das zweite Integral wird unter Beachtung von (3.67), (3.69) sowie der Definition der μ_n und der paarweisen Orthogonalität der v_n wie folgt umgeformt:

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \int_0^1 y_x(x, t) \varphi(t) v'_n(x) dx dt &= \int_0^T (y(1, t) \varphi(t) v'_n(1) - y(0, t) \varphi(t) v'_n(0)) dt \\
 &\quad - \int_0^T \int_0^1 y(x, t) \varphi(t) v''_n(x) dx dt \\
 &= \int_0^T -\alpha y(1, t) \varphi(t) v'_n(1) dt + \int_0^T \int_0^1 y(x, t) \varphi(t) \mu_n^2 v_n(x) dx dt \\
 &= \int_0^T -\alpha y(1, t) \varphi(t) v'_n(1) dt + \int_0^T \mu_n^2 z_n(t) \varphi(t) dt
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

Nach Einsetzen von (3.74) und (3.75) in (3.73) erhalten wir

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^T z_n(t) \varphi'(t) dt + \int_0^T \mu_n^2 z_n(t) \varphi(t) dt \\
 &= \int_0^T \left(\int_0^1 f(x, t) v_n(x) dx + u(t) v_n(1) \right) \varphi(t) dt + \int_0^1 y_0(x) v_n(x) dx \varphi(0)
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

für alle $\varphi \in H^1(0, T)$ mit $\varphi(T) = 0$. Das ist die schwache Formulierung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}
 z'_n(t) + \mu_n^2 z_n(t) &= F_n(t) \quad \text{in } (0, T) \\
 z_n(0) &= z_{0,n}
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

mit

$$\begin{aligned}
 F_n(t) &= \int_0^1 f(x, t) v_n(x) dx + u(t) v_n(1) \\
 z_n(0) &= \int_0^1 y_0(x) v_n(x) dx.
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

Die Lösung von (3.78) ist durch die Formel der Variation der Konstanten

$$z_n(t) = e^{-\mu_n^2 t} z_n(0) + \int_0^t e^{-\mu_n^2 (t-s)} F_n(s) ds$$

gegeben, also unter Beachtung von (3.78) durch

$$\begin{aligned}
 z_n(t) &= \int_0^1 y_0(x) v_n(x) e^{-\mu_n^2 t} dx + \int_0^t \int_0^1 e^{-\mu_n^2 (t-s)} f(x, s) v_n(x) dx \\
 &\quad + \int_0^t e^{-\mu_n^2 (t-s)} u(s) v_n(1) ds.
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

Schließlich ersetzen wir in (3.79) die Integrationsvariable x durch ξ und setzen diese Darstellung für z_n in (3.68) ein. Aus Vertauschung von Summation und Integration folgt

$$\begin{aligned}
 y(x, t) &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) v_n(\xi) e^{-\mu_n^2 t} y_0(\xi) d\xi \\
 &\quad + \int_0^t \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) v_n(\xi) e^{-\mu_n^2 (t-s)} f(\xi, s) d\xi ds \\
 &\quad + \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) v_n(1) e^{-\mu_n^2 (t-s)} u(s) ds.
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

Das ist laut Definition der Greenschen Funktion G die zu beweisende Formel (3.14) für den Fall $\alpha > 0$. Analog leitet man G im Fall $\alpha = 0$ her, Übungsaufgabe 3.11.

Bemerkungen. Wir haben während dieser Herleitung mehrmals Grenzübergang bzw. Integration und Summation vertauscht. Deshalb bleibt der Vollständigkeit halber nachzuprüfen, ob dies gerechtfertigt war. Etwas Vorsicht ist dabei geboten, denn die unter den Integralen in (3.80) stehenden unendlichen Reihen sind nicht gleichmäßig konvergent. Aber für festes t ist die Funktion $s \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mu_n^2(t-s)}$ integrierbar auf $[0, t]$, denn

$$\int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mu_n^2(t-s)} ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} (1 - e^{-\mu_n^2 t}) < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} < \infty$$

gilt wegen $\mu_n \sim (n-1)\pi^2$, $n \rightarrow \infty$. Sind f und u stetig oder zumindest beschränkt, dann ist leicht zu sehen, dass die Partialsummen der f und u enthaltenden Reihen durch eine integrierbare Funktion majorisiert werden. Außerdem konvergieren sie punktweise mit Ausnahme von $s = t$. Deshalb sind hier Integration und Summation nach dem Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz vertauschbar. Die Behandlung des y_0 enthaltenden Anteils sowie die Beziehung (3.71) folgen relativ einfach aus der L^2 -Theorie von Fourier-Reihen, denn die Folge $\{z_n(0)\}$ der Fourierkoeffizienten von y_0 ist quadratisch summierbar und die stetigen Funktionen z_n können wie eben abgeschätzt werden. Diese Details werden dem Leser überlassen. Unbeschränkte f und u approximiert man in $L^2(Q)$ bzw. $L^2(0, T)$ durch Folgen stetiger Funktionen.

Sind y_0 , f und u hinreichend glatt, dann stellt (3.80) sogar eine klassische Lösung y der parabolischen Randwertaufgabe dar. Wir verweisen z.B. auf Tychonoff und Samarski.

3.9 Parabolische Gleichungen in $L^2(0, T; V^*)$ *

Etwas allgemeiner als in den vorangegangenen Abschnitten kann man parabolische Gleichungen im Raum $L^2(0, T; V^*)$ behandeln. Wir betrachten dazu nochmals die Anfangs-Randwertaufgabe

$$\boxed{\begin{aligned} y_t + \mathcal{A}y + c_0 y(t) &= f && \text{in } Q \\ \partial_{\nu_{\mathcal{A}}} y + \alpha y &= g && \text{in } \Sigma \\ y(0) &= y_0 && \text{in } \Omega, \end{aligned}} \quad (3.81)$$

mit gegebenen Funktionen $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $g \in L^2(0, T; L^2(\Gamma))$ und Koeffizienten $c_0 \in L^\infty(\Omega)$, $\alpha \in L^\infty(\Gamma)$. Der elliptische Differentialoperator \mathcal{A} ist wie in (2.19) auf S. 30 mit beschränkten und messbaren Koeffizienten a_{ij} definiert, die der Symmetrieebedingung und der Bedingung der gleichmäßigen Elliptizität (2.20) genügen. Die schwache Formulierung für $y \in W(0, T)$ lautet

$$\begin{aligned} \int_0^T (y_t(t), v(t))_{V^*, V} dt + \int_0^T a[y(t), v(t)] dt &= \int_0^T (F(t), v(t))_{V^*, V} dt \\ &\quad \forall v \in L^2(0, T; V), \\ y(0) &= y_0. \end{aligned}$$

Hier bezeichnet $a = a[y, v]$ die \mathcal{A} zugeordnete, auf S. 30 eingeführte Bilinearform, $V = H^1(\Omega)$ ist der zugrunde liegende Raum und die abstrakte Funktion $F : [0, T] \rightarrow V^*$ ist

definiert durch

$$F(t) v = \int_{\Omega} f(x, t) v(x) dx + \int_{\Gamma} g(x, t) v(x) ds(x).$$

In Abschnitt 2.13 wurde gezeigt, dass die Bilinearform $a[y, v]$ durch $a[y, v] = (Ay, v)_{V^*, V}$ einen linearen stetigen Operator $A : V \rightarrow V^*$ erzeugt. Die schwache Formulierung von Gleichung (3.81) kann man deshalb so aufschreiben: Für alle $v \in L^2(0, T; V)$ gilt

$$\begin{aligned} \int_0^T (y_t(t), v(t))_{V^*, V} dt + \int_0^T (Ay(t), v(t))_{V^*, V} dt &= \int_0^T (F(t), v(t))_{V^*, V} dt \\ y(0) &= y_0. \end{aligned}$$

Weil f und g quadratisch integrierbare abstrakte Funktionen sind, haben wir

$$\|F(\cdot)\|_{L^2(0, T; V^*)} \leq \tilde{c} (\|f\|_{L^2(Q)} + \|g\|_{L^2(\Sigma)}),$$

und damit sind alle Integrale der obigen Beziehung definiert. Die letzte Gleichung ist äquivalent zu

$$\int_0^T (y_t(t) + Ay(t) - F(t), v(t))_{V^*, V} dt = 0 \quad \forall v \in L^2(0, T; V),$$

wobei y_t als (reguläre) vektorwertige Distribution aus $L^2(0, T; V^*)$ zu interpretieren ist. Das impliziert offenbar $y_t(t) + Ay(t) - F(t) = 0$ in $L^2(0, T; V^*)$, so dass Gleichung (3.81) am Ende lautet

$$\begin{aligned} y'(t) + Ay(t) &= F(t) && \text{f.ü. in } [0, T] \\ y(0) &= y_0. \end{aligned}$$

Dabei ist auf der rechten Seite jedes beliebige Funktional $F \in L^2(0, T; V^*)$ zugelassen. Unter unseren Voraussetzungen gilt mit $\beta > 0$, $\beta_0 \in \mathbb{R}$ für alle $y, v \in V$

$$\begin{aligned} |a[y, v]| &\leq \alpha_0 \|y\|_V \|v\|_V \\ a[v, v] &\geq \beta \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 - \beta_0 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \tag{3.82}$$

Satz 3.22 *Unter Voraussetzung (3.82) besitzt die Aufgabe*

$$\begin{aligned} y'(t) + Ay(t) &= F(t) && \text{f.ü. in } [0, T] \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

für jedes $F \in L^2(0, T; V^)$ und jedes $y_0 \in H = L^2(\Omega)$ genau eine Lösung $y \in W(0, T)$. Es existiert eine Konstante $c_P > 0$, so dass gilt*

$$\|y\|_{W(0, T)} \leq c_P (\|F\|_{L^2(0, T; V^*)} + \|y_0\|_H).$$

Satz und Beweis sind z.B. bei Gajewski et al. [72] oder Wloka [209] in einer allgemeineren Fassung nachzulesen, die auch zeitabhängige Koeffizienten zulässt.

Eine Anwendung

Mit Satz 3.22 kann der adjungierte Zustand parabolischer Aufgaben als Lagrangescher Multiplikator zur parabolischen Differentialgleichung interpretiert werden: Die Differentialgleichung $y' + Ay - F = 0$ wird dazu als Nebenbedingung im Bildraum $L^2(0, T; V^*)$ betrachtet. Die Abbildung $y \mapsto y' + Ay$ ist surjektiv. Der Karush-Kuhn-Tucker-Satz 6.3 auf S. 260 liefert dann wegen $(V^*)^* = V$ einen Lagrangeschen Multiplikator $z^* = p \in (L^2(0, T; V^*))^* = L^2(0, T; V)$. Die Anwendung dieser Technik in der optimalen Steuerung ist z.B. bei Lions [144] oder Neittaanmäki und Tiba [165] dargestellt.

3.10 Übungsaufgaben

- 3.1 Die Funktion $y(x, t) = \frac{e^t}{\sqrt{x}}$ gehört dem Raum $C([0, T], L^1(0, 1))$ an. Berechnen Sie ihre Norm. In welchen Räumen $L^p(0, T, L^q(0, 1))$ liegt diese Funktion noch?
- 3.2 Beweisen Sie die Existenz einer optimalen Steuerung für die Aufgabe (3.1)–(3.3) auf S. 95 mit inhomogenem Anfangszustand y_0 .
- 3.3 Erweitern Sie die Definition der schwachen Lösung für die Anfangs-Randwertaufgabe (3.58) von S. 132 auf das Problem mit gemischten Randbedingungen

$$\begin{aligned} y_t + \mathcal{A}y + c_0 y &= \beta_Q v && \text{in } Q \\ \partial_{\nu \mathcal{A}} y + \alpha y &= \beta_\Sigma u && \text{auf } \Sigma_1 \\ y &= 0 && \text{auf } \Sigma_0 \\ y(0) &= y_0 && \text{in } \Omega, \end{aligned}$$

mit $\Sigma_i = \Gamma_i \times (0, T)$, $i = 1, 2$, wobei die Randstücke Γ_i wie in Abschnitt 2.3.3 definiert sind.

- 3.4 Leiten Sie mit der formalen Lagrangetechnik die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung für das Problem (3.57)–(3.59) von S. 132 her.
- 3.5 Untersuchen Sie die Aufgabe (3.1)–(3.3) auf S. 95 mit dem erweiterten Zielfunktional

$$\begin{aligned} \tilde{J}(y, u, v) &:= J(y, u, v) + \int_Q a_Q(x, t) y(x, t) dx dt + \int_\Sigma a_\Sigma(x, t) y(x, t) ds(x) dt \\ &+ \int_Q v_Q(x, t) v(x, t) dx dt + \int_\Sigma u_\Sigma(x, t) u(x, t) ds(x) dt, \end{aligned}$$

wobei J das in (3.1) definierte Zielfunktional ist und Funktionen $a_Q, v_Q \in L^2(Q)$, $a_\Sigma, v_\Sigma \in L^2(\Sigma)$ vorgegeben sind. Existieren optimale Steuerungen für dieses Problem? Stellen Sie die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung auf.

- 3.6 Behandeln Sie die Aufgabe der Anfangswertsteuerung

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \|y(T) - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|w\|_{L^2(\Omega)}^2$$

bei $w \in L^2(\Omega)$, $|w(x)| \leq 1$ fast überall in Ω und

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y &= 0 && \text{in } Q \\ \partial_\nu y + y &= 0 && \text{in } \Sigma \\ y(0) &= w && \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

Die Voraussetzungen 3.14 von S. 123 seien erfüllt. Beweisen Sie die Existenz einer optimalen Steuerung und leiten Sie die notwendigen Optimalitätsbedingungen her.

3.7 Schreiben Sie ein Programm zur numerischen Lösung der Anfangs-Randwertaufgabe

$$\begin{aligned}
 y_t(x, t) - y_{xx}(x, t) &= 0 && \text{in } (0, \ell) \times (0, T) \\
 y_x(0, t) &= 0 && \text{in } (0, T) \\
 y_x(\ell, t) + y(\ell, t) &= u(t) && \text{in } (0, T) \\
 y(x, 0) &= y_0(x) && \text{in } (0, \ell)
 \end{aligned} \tag{3.83}$$

in MATLAB. Verwenden Sie dazu bezüglich t das implizite Euler-Verfahren und bezüglich x den Differenzenquotienten (2.91) auf S. 77 mit Gitterweiten τ bzw. h für entsprechende Zerlegungen von $(0, T)$ bzw. $(0, \ell)$. Die Steuerung u soll entsprechend der Zerlegung von $(0, T)$ als Treppenfunktion eingegeben werden. Von der gegebenen Funktion y_0 sind die Werte in den Gitterpunkten des Ortsgitters einzulesen.

3.8 Stellen Sie mit Hilfe des in der vorhergehenden Aufgabe geschriebenen Programms das endlichdimensionale reduzierte Problem für die Aufgabe

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \|y(T) - y_\Omega\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(0,T)}^2$$

bei (3.83) und den Box-Restriktionen $|u(t)| \leq 1$ auf. Gehen Sie nach der in Abschnitt 3.7.2 beschriebenen Methode vor. Lösen Sie die Aufgabe mit den von Schittkowski [183] gewählten Werten $\ell = 1$, $T = 1.58$, $y_\Omega(x) = 0.5(1 - x^2)$, $y_0(x) = 0$, $\lambda = 10^{-3}$ durch den Code `quadprog` aus MATLAB. Wählen Sie als Zeitschrittweite $\tau = 1/100$. Die Ortsschrittweite h ist sinnvoll anzupassen.

3.9 Lösen Sie das in der vorhergehenden Aufgabe aufgestellte reduzierte Problem auch für $\lambda = 10^{-k}$, $k = -1, 0, \dots, 5$, sowie für $\lambda = 0$. Lösen Sie die gleiche Aufgabe mit der Funktion $y_\Omega(x) = 0.5(1 - x)$ und halbieren Sie schrittweise die Gitterweite τ . Interpretieren Sie das Ergebnis, insbesondere im Hinblick auf Satz 3.7 auf S. 107.

3.10 Stellen Sie unter leichter Modifikation des in Aufgabe 3.7 entwickelten Programms ein solches zur Lösung der zum obigen Optimalsteuerungsproblem zugehörigen adjungierten Gleichung auf. Berechnen Sie damit den adjungierten Zustand zu den in Aufgabe 3.8 bzw. 3.9 berechneten optimalen Endzuständen $y(T)$ und prüfen Sie auf diese Weise die notwendigen Optimalitätsbedingungen numerisch mit der Projektionsformel nach.

3.11 Leiten Sie mit der Methode aus Abschnitt 3.8 die Greensche Funktion (3.14) für $\alpha = 0$ her.

4 Steuerung semilinearer elliptischer Gleichungen

4.1 Vorbemerkungen

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir nur lineare partielle Differentialgleichungen behandelt und damit viele wichtige Anwendungen ausgeschlossen. Jetzt sind auch nichtlineare Gleichungen zugelassen, wie zum Beispiel in der Aufgabe

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y(x) - y_{\Omega}(x))^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} u(x)^2 dx, \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} -\Delta y + y + y^3 &= u && \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu} y &= 0 && \text{auf } \Gamma, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$u_a \leq u(x) \leq u_b \quad \text{f.ü. in } \Omega. \quad (4.3)$$

Die elliptische Gleichung (4.2) ist *semilinear*. Auch hier werden wir die uns bisher interessierenden Probleme wie Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der Gleichung, Existenz einer optimalen Steuerung, notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung sowie numerische Prinzipien diskutieren, aber die zugehörige Analysis wird schwieriger.

Aus formaler Sicht kann man zum Beispiel notwendige Optimalitätsbedingungen mit Hilfe der Lagrange-Technik problemlos herleiten. Man formuliert sie wieder mit Hilfe einer adjungierten Gleichung, die im Sinne von Kapitel 2 die adjungierte Gleichung zur an der Stelle \bar{y} linearisierten Gleichung (4.2) darstellt,

$$\begin{aligned} -\Delta p + p + 3\bar{y}^2 p &= \bar{y} - y_{\Omega} && \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu} p &= 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Außerdem gilt wie im linear-quadratischen Fall die Projektionsformel

$$\bar{u}(x) = \mathbb{P}_{[u_a, u_b]} \left\{ -\frac{1}{\lambda} p(x) \right\}.$$

Wir werden jedoch gleich sehen, dass schon die Verwendung des Raumes $H^1(\Omega)$ problematisch sein kann. Für die Analysis brauchen wir die Differenzierbarkeit von nichtlinearen Abbildungen wie $y(\cdot) \mapsto y(\cdot)^3$ und hier ist die Wahl des Funktionenraums nicht trivial.

Außerdem kommt ein weiterer Aspekt hinzu – die Nichtkonvexität der obigen Optimalsteuerungsaufgabe. Obwohl das Zielfunktional konvex ist, bewirkt die Nichtlinearität der

Gleichung, dass die Aufgabe zur nichtkonvexen Optimierung gehört. Deshalb sind die notwendigen Bedingungen erster Ordnung nicht mehr hinreichend und die Betrachtung hinreichender Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung wird sinnvoll. Und auch hier treten unerwartete Schwierigkeiten in der Analysis auf.

4.2 Semilineare elliptische Modellgleichung

4.2.1 Motivation des weiteren Vorgehens

Zur Erläuterung der weiteren Schritte betrachten wir das obige semilineare elliptische Randwertproblem (4.2) in einem beschränkten Lipschitzgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Auf Grund der Monotonie der Funktion $y \mapsto y^3$ existiert nach Satz 4.4 zu jedem $u \in L^2(\Omega)$ genau eine Lösung y in $H^1(\Omega)$. Für $N = 3$ ist nach Satz 7.1 auf S. 277 die Einbettung $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ stetig und daraus folgt $y^3 \in L^2(\Omega)$. Der *Nemytskii-Operator* $\Phi : y(\cdot) \mapsto y^3(\cdot)$ ist Fréchet-differenzierbar von $L^6(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$, siehe S. 184. Diese Eigenschaft benötigen wir zur Herleitung notwendiger Optimalitätsbedingungen. Ferner ist $A := -\Delta + I$ stetig von $V = H^1(\Omega)$ nach V^* ; Lemma 2.35, S. 86. Also kann man das obige Randwertproblem als Gleichung in V^* formulieren,

$$Ay + B\Phi(y) = Bu,$$

in der B der Einbettungsoperator von $L^2(\Omega)$ in V^* ist. Auf diese Weise ist (4.2) im Zustandsraum $H^1(\Omega)$ gut zu behandeln. Für y^5 an Stelle von y^3 geht diese Methode auch durch, denn $\Phi(y) = y^5$ ist differenzierbar von $L^6(\Omega)$ nach $L^{\frac{6}{5}}(\Omega)$, siehe Abschnitt 4.3.3, und damit von V in V^* , wie man sich überlegt.

Diese für viele Aufgaben gängige Methode hat aber ihre Grenzen. Sie funktioniert nur, wenn Φ von V in V^* abbildet. Dazu benötigt man Wachstumsbedingungen wie in Abschnitt 4.3, die bei y^3 oder y^5 erfüllt sind, aber zum Beispiel nicht bei $\Phi(y) = \exp(y)$. Aus $y \in H^1(\Omega)$ muss nicht einmal $\exp(y) \in L^1(\Omega)$ folgen. Außerdem ergeben sich in der Regel Restriktionen an die Dimension N von Ω . Wir werden jedoch sehen, dass die Lösung y unter natürlichen Voraussetzungen stetig auf $\bar{\Omega}$ ist, falls u dem Raum $L^r(\Omega)$ mit hinreichend großem r angehört. Dann erübrigen sich Wachstumsbedingungen. Auch Dimensionsbeschränkungen wie $N \leq 3$ sind nicht nötig.

Es gibt zwei weitere Gründe für die Betrachtung stetiger Lösungen y . Erstens wird die obige Methode bei parabolischen Gleichungen in $W(0, T)$ komplizierter, weil der Grad der Integrierbarkeit von $y = y(x, t)$ auf $\Omega \times (0, T)$ niedriger ist als der im elliptischen Fall. Zweitens brauchen wir zur Behandlung von Zustandsbeschränkungen in Kapitel 6 ohnehin die Stetigkeit des Zustands y . Insgesamt lohnt es sich deshalb, Stetigkeit oder zumindest Beschränktheit des Zustands y zu beweisen.

Wir gehen wie folgt vor: Zunächst wird die Gleichung unter starken Beschränktheitsbedingungen im Raum $H^1(\Omega)$ behandelt. Danach zeigen wir, dass die Lösung sogar beschränkt bzw. stetig ist und die Beschränktheitsbedingungen abgeschwächt werden können. Dazu untersuchen wir eine allgemeinere Klasse von Aufgaben. Monotone Nichtlinearitäten des Typs y^3 oder $\exp(y)$ sind für manche Anwendungen zu speziell. Steht zum Beispiel $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ für einen aus zwei Materialien zusammengesetzten Körper mit

verschiedenen physikalischen Konstanten κ_1, κ_2 , so kann eine Nichtlinearität der Form

$$d(x, y) = \begin{cases} \kappa_1 y^3 & x \in \Omega_1 \\ \kappa_2 y^3 & x \in \Omega_2 \end{cases}$$

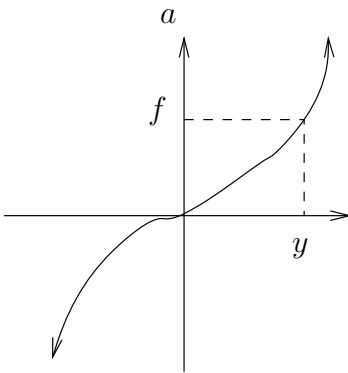
sinnvoll sein. Dabei ist d nicht mehr stetig in x , aber beschränkt und messbar. Motiviert durch diese Überlegungen behandeln wir als Modellproblem die elliptische Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \mathcal{A}y + c_0(x)y + d(x, y) &= f && \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu_{\mathcal{A}}}y + \alpha(x)y + b(x, y) &= g && \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Dabei sind $\Omega, \Gamma, c_0 \geq 0, \alpha \geq 0$ wie in Abschnitt 2.1 definiert und mit d sowie b nichtlineare Funktionen gegeben. Der elliptische Differentialoperator \mathcal{A} hat die Form (2.19) auf S. 30 und die Funktionen f und g werden später die Steuerungen sein. Diese Klasse elliptischer Gleichungen ist noch nicht zu kompliziert, bringt aber schon wesentliche Schwierigkeiten nichtlinearer Gleichungen. Unter gewissen Voraussetzungen werden wir auf die Funktionen c_0 bzw. α verzichten können.

4.2.2 Lösungen in $H^1(\Omega)$

Wir beginnen mit der Frage der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der semilinearen elliptischen Gleichung (4.5) im Raum $H^1(\Omega)$. Dazu wird die *Theorie monotoner Operatoren* angewendet.



f -Stelle y einer monotonen Funktion a

Die Grundidee ist einfach: Ist $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend mit $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} a(x) = \pm\infty$ gegeben, so hat die Gleichung $a(y) = f$ für jedes $f \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung $y \in \mathbb{R}$. Diese simple Tatsache kann man auf allgemeinere Gleichungen der Form $\mathcal{A}y = f$ in Banachräumen übertragen.

Im Weiteren ist V ein reeller und separabler Hilbertraum wie zum Beispiel $V = H^1(\Omega)$ oder $V = H_0^1(\Omega)$. Ein Banachraum heißt *separabel*, wenn er eine abzählbare und überall dichte Teilmenge enthält.

Definition. Ein Operator $A : V \rightarrow V^*$ heißt *monoton*, wenn

$$(Ay_1 - Ay_2, y_1 - y_2)_{V^*, V} \geq 0 \quad \forall y_1, y_2 \in V$$

gilt und *streng monoton*, wenn hier Gleichheit nur für $y_1 = y_2$ eintreten kann. A heißt *koerziv* (auch *koerzitiv*), wenn gilt

$$\frac{(Ay, y)_{V^*, V}}{\|y\|_V} \rightarrow \infty, \quad \text{falls } \|y\|_V \rightarrow \infty$$

und hemistetig, wenn die Funktion $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto (A(y + tv), w)_{V^*, V}$, für alle festen $y, v, w \in V$ auf $[0, 1]$ stetig ist. Existiert ein $\beta_0 > 0$, so dass

$$(Ay_1 - Ay_2, y_1 - y_2)_{V^*, V} \geq \beta_0 \|y_1 - y_2\|_V^2 \quad \forall y_1, y_2 \in V$$

erfüllt ist, dann heißt A stark monoton.

Satz 4.1 (Hauptsatz über monotone Operatoren) *Es sei V ein separabler Hilbertraum und $A : V \rightarrow V^*$ ein monotoner, koerziver und hemistetiger Operator. Dann besitzt die Gleichung $Ay = f$ für jedes $f \in V^*$ eine Lösung y . Die Menge aller Lösungen ist beschränkt, konvex und abgeschlossen. Ist A streng monoton, dann ist y eindeutig bestimmt. Wenn A sogar stark monoton ist, dann ist $A^{-1} : V^* \rightarrow V$ Lipschitz-stetig.*

Der Satz geht auf Browder und Minty zurück und ist z.B. bei Zeidler [216] bewiesen. Wir wenden ihn auf die Aufgabe (4.5) im Raum $V = H^1(\Omega)$ an.

Zunächst ist zu definieren, was eine schwache Lösung des elliptischen Problems (4.5) sein soll. Die Idee ist einfach – wir bringen in (4.5) die Nichtlinearitäten $d(x, y)$ und $b(x, y)$ auf die rechten Seiten. Dann steht ein Gleichungssystem mit rechten Seiten $\tilde{f} = f - d(\cdot, y)$ bzw. $\tilde{g} = g - b(\cdot, y)$ und linearen Differentialoperatoren auf der linken da. Dazu schreiben wir die Variationsformulierung für lineare Randwertprobleme hin. Nun tritt aber ein Problem auf, wenn $b(x, y)$ bzw. $d(x, y)$ unbeschränkt sind wie z.B. y^k oder e^y : Funktionen $y \in H^1(\Omega)$ brauchen nicht beschränkt zu sein und deshalb ist ohne Zusatzvoraussetzungen unklar, in welchem Funktionenraum $d(x, y)$ und $b(x, y)$ liegen. Wir fordern am Anfang, dass d und b auf ihren Definitionsbereichen beschränkt sind. Dann sind auch $d(x, y)$ und $b(x, y)$ beschränkt, selbst bei unbeschränkter Funktion y .

Voraussetzung 4.2 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, ein beschränktes Lipschitzgebiet mit Rand Γ und A ein elliptischer Differentialoperator der Form (2.19) auf S. 30 mit beschränkten und messbaren Koeffizienten a_{ij} , die der Symmetriebedingung und der Bedingung der gleichmäßigen Elliptizität (2.20) genügen.*

Die Funktionen $c_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $\alpha : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ seien beschränkt und messbar sowie fast überall nichtnegativ. Mindestens eine dieser Funktionen sei nicht identisch null, so dass $\|c_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma)} > 0$ gilt. Die Funktionen $d = d(x, y) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $b = b(x, y) : \Gamma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sollen für jedes feste y beschränkt und messbar in x aus Ω bzw. Γ sein sowie stetig und monoton wachsend in y für fast alle $x \in \Omega$ bzw. $x \in \Gamma$.

Aus dieser Voraussetzung folgt insbesondere, dass $d(x, 0)$ bzw. $b(x, 0)$ beschränkt und messbar in Ω bzw. Γ sind. Wegen der Problematik der Unbeschränktheit fordern wir am Anfang zusätzlich die

Voraussetzung 4.3 *Für fast alle $x \in \Gamma$ bzw. $x \in \Omega$ gelte $b(x, 0) = 0$ sowie $d(x, 0) = 0$. Außerdem seien b und d global beschränkt, d.h. es existiere eine Konstante M mit*

$$|b(x, y)| \leq M, \quad |d(x, y)| \leq M \quad (4.6)$$

für fast alle $x \in \Gamma$ bzw. $x \in \Omega$ und alle $y \in \mathbb{R}$.

Zur Differentialgleichung gehört die Bilinearform

$$a[y, v] := \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) D_i y D_j v \, dx + \int_{\Omega} c_0 y v \, dx + \int_{\Gamma} \alpha y v \, ds. \quad (4.7)$$

Definition. Unter den Voraussetzungen 4.2 und 4.3 heißt eine Funktion $y \in H^1(\Omega)$ schwache Lösung von (4.5), wenn die folgende Variationsformulierung erfüllt ist:

$$a[y, v] + \int_{\Omega} d(x, y) v \, dx + \int_{\Gamma} b(x, y) v \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma} g v \, ds \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (4.8)$$

Mit dem Hauptsatz über monotone Operatoren beweisen wir nun die folgende Existenzaussage:

Satz 4.4 Unter den Voraussetzungen 4.2 und 4.3 besitzt die Gleichung (4.5) für jedes Paar von rechten Seiten $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma)$ genau eine schwache Lösung $y \in H^1(\Omega)$. Es existiert eine von d , b , f und g unabhängige Konstante $c_M > 0$ mit

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} \leq c_M (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}). \quad (4.9)$$

Beweis. Wir wenden den Hauptsatz über monotone Operatoren in $V = H^1(\Omega)$ an.

(i) *Definition eines monotonen Operators $A : V \rightarrow V^*$*

Aus Abschnitt 2.13 folgt, dass die Bilinearform (4.7) gemäß

$$(A_1 y, v)_{V^*, V} = a[y, v]$$

einen linearen, stetigen Operator $A_1 : V \rightarrow V^*$ erzeugt. Das ist der lineare Anteil des nichtlinearen Operators A . Der erste nichtlineare Anteil wird formal durch $(A_2 y)(x) := d(x, y(x))$ definiert. Das ist zu präzisieren: Jedes y aus V gehört zu $L^2(\Omega)$. Auf Grund der strengen Voraussetzungen an d ist die Funktion $x \mapsto d(x, y(x))$ messbar (Stetigkeit von d bezüglich y) und auch beschränkt (Beschränktheit von d). Daher gilt $d(\cdot, y) \in L^\infty(\Omega)$ für alle $y \in V$. Das Funktional F_d ,

$$F_d(v) = \int_{\Omega} d(x, y(x)) v(x) \, dx,$$

ist deshalb linear und stetig auf V und gehört so dem Raum V^* an. In diesem Sinne identifiziert man $d(\cdot, y(\cdot))$ mit F_d , also einem Element von V^* . Das geschieht mit dem kanonischen Isomorphismus von V in V^* . Dementsprechend definieren wir $A_2 : V \rightarrow V^*$ durch $A_2 y = F_d$. Analog definiert man den dritten Anteil A_3 , der zur Nichtlinearität b gehört, denn

$$F_b(v) = \int_{\Gamma} b(x, y(x)) v(x) \, ds(x)$$

ist ebenfalls ein Funktional aus V^* , das mit $b(\cdot, y(\cdot))$ identifiziert werden kann. In diesem Sinne gilt $A_3 y = F_b$. Die Summe aller Anteile ergibt $A = A_1 + A_2 + A_3$.

(ii) *Monotonie von A*

Alle A_i sind monoton, also auch A . Das sieht man leicht ein. Die Monotonie von A_1 folgt sofort aus $a[y, y] \geq 0$. Betrachten wir A_2 : Aus der Monotonie von d in y folgt $(d(x, y_1) - d(x, y_2))(y_1 - y_2) \geq 0$ für alle reellen Zahlen y_1, y_2 und alle x . Deshalb gilt auch

$$(A_2(y_1) - A_2(y_2), y_1 - y_2)_{V^*, V} = \int_{\Omega} (d(x, y_1(x)) - d(x, y_2(x)))(y_1(x) - y_2(x)) \, dx \geq 0$$

für alle $y_i \in H^1(\Omega)$. Das Integral ist durch unsere strenge Beschränktheitsvoraussetzung an d definiert, denn sie garantiert die quadratische Integrierbarkeit von $d(x, y_1) - d(x, y_2)$. Damit ist A_2 monoton. Analog zeigt man die Monotonie von A_3 .

(iii) *Koerzivität von A*

A_1 ist koerziv, denn

$$(A_1 v, v)_{V^*, V} = a[v, v] \geq \beta_0 \|v\|_V^2$$

folgt aus den Voraussetzungen an c_0 und α wie im Beweis von Satz 2.6 auf S. 29. Von A_2 und A_3 kommen nur nichtnegative Anteile, die diese Koerzivität nicht zerstören. Hier wird die Voraussetzung $d(x, 0) = b(x, 0) = 0$ ausgenutzt:

$$\begin{aligned} (A_2 v, v)_{V^*, V} &= \int_{\Omega} d(x, v(x)) v(x) dx \\ &= \int_{\Omega} (d(x, v(x)) - d(x, 0))(v(x) - 0) dx \geq 0 \end{aligned}$$

wegen Monotonie von d . Gleiches gilt für A_3 , deshalb ist $A = A_1 + A_2 + A_3$ als Summe der drei Operatoren ebenfalls koerziv.

(iv) *Hemistetigkeit*

A_1 ist als linearer Operator hemistetig. Für A_2 folgt das so: Wir setzen

$$\varphi(t) := (A_2(y + tv), w)_{V^*, V} = \int_{\Omega} d(x, y(x) + tv(x)) w(x) dx.$$

Nun sei $\tau \in \mathbb{R}$ fest ausgewählt und $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen aus \mathbb{R} , die gegen τ konvergiert. Es ist $\varphi(t_n) \rightarrow \varphi(\tau)$ zu zeigen.

Wegen unserer Annahme konvergiert die Funktionenfolge $\{d(x, y(x) + t_n v(x)) w(x)\}_{n=1}^{\infty}$ für fast jedes feste $x \in \Omega$ gegen $d(x, y(x) + \tau v(x)) w(x)$, denn d ist eine stetige Funktion von y . Damit ist die Funktionenfolge $f_n(x) = d(x, y(x) + t_n v(x)) w(x)$ fast überall punktweise konvergent gegen $f(x) = d(x, y(x) + \tau v(x)) w(x)$. Außerdem ist sie beschränkt durch eine integrierbare Funktion, denn aus (4.6) folgt

$$|d(x, y(x) + t_n v(x)) w(x)| \leq M |w(x)|$$

und wir wissen $w \in L^2(\Omega)$. Mit dem Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz, Forster [69], erhalten wir daraus

$$\varphi(t_n) = \int_{\Omega} d(x, y(x) + t_n v(x)) w(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} d(x, y(x) + \tau v(x)) w(x) dx = \varphi(\tau)$$

für $n \rightarrow \infty$. Für den Operator A_3 argumentiert man analog.

(v) *Existenz und Eindeutigkeit der Lösung und Abschätzung*

Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung $y \in H^1(\Omega)$ folgen nun direkt aus dem Hauptsatz über monotone Operatoren. Man sieht auch, dass A stark monoton ist und deshalb die im Satz behauptete Abschätzung gilt. Aber so ist nicht erkennbar, dass diese nicht von d und b abhängig ist. Deshalb beweisen wir die Abschätzung direkt.

In der Variationsgleichung (4.8) für die schwache Lösung y wählen wir y selbst als Testfunktion und erhalten

$$a[y, y] + (A_2 y, y)_{V^*, V} + (A_3 y, y)_{V^*, V} = \int_{\Omega} f(x) y(x) dx + \int_{\Gamma} g(x) y(x) ds(x).$$

Die A_2 und A_3 enthaltenden Anteile sind nichtnegativ, also folgt

$$a[y, y] \leq \int_{\Omega} f(x) y(x) dx + \int_{\Gamma} g(x) y(x) ds(x).$$

Das ist der Grund, warum die behauptete Abschätzung nicht von d und b abhängt. Die Bilinearform $a[y, y]$ wird durch die H^1 -Norm nach unten abgeschätzt und die rechte Seite mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz. So folgt

$$\begin{aligned} \beta_0 \|y\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|y\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)} \|y\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq c (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}) \|y\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

und schließlich die im Satz behauptete Abschätzung. ■

Bemerkungen. (i) Der Satz ist nicht direkt auf Gleichung (4.2) anwendbar, weil $d(x, y) = y^3$ nicht die Voraussetzung 4.3 erfüllt. Diese wird aber nur dazu benötigt, dass $d(x, y(x))$ eine Funktion aus $L^2(\Omega)$ ist. Das ist für $y(x)^3$ bei $y \in H^1(\Omega)$ gesichert, wie bereits erwähnt wurde.

(ii) Im Beweis wurde nur ausgenutzt, dass f und g lineare und stetige Funktionale auf V erzeugen, also mit Elementen aus V^* identifiziert werden können. Dazu ist quadratische Integrierbarkeit nicht nötig, siehe S. 32. Der Satz bleibt insbesondere richtig für Vorgaben $f \in L^r(\Omega)$ und $g \in L^s(\Gamma)$ mit $r > \frac{N}{2}$ und $s > N - 1$, zu denen die Lösung y sogar stetig ist (Satz 4.7). Das schließt für $N = 2, 3$ auch Werte $r, s < 2$ ein.

(iii) Weitere Techniken zur Behandlung nichtlinearer elliptischer Gleichungen findet man z.B. in Barbu [19], Lions [143], Ladyzhenskaya and Ural'ceva [135], Neittaanmäki et al. [164] oder Zeidler [216, 217].

4.2.3 Stetige Lösungen

In diesem Abschnitt folgen wir Ideen von E. Casas [44]. Zunächst wird mit einer von Stampacchia gefundenen Methode gezeigt, dass die schwache Lösung $y \in H^1(\Omega)$ sogar beschränkt ist, wenn die Funktionen f und g „besser“ sind als nur quadratisch integrierbar. Das Hauptergebnis dieses Abschnitts ist Satz 4.8 über die Stetigkeit von y .

Satz 4.5 *Sind die Voraussetzungen 4.2 und 4.3 erfüllt und $r > N/2$, $s > N - 1$ gegeben, dann existiert zu jedem Paar $f \in L^r(\Omega)$ und $g \in L^s(\Gamma)$ genau eine schwache Lösung $y \in H^1(\Omega)$ des Randwertproblems (4.5). Diese gehört zu $L^\infty(\Omega)$ und es gibt eine von d , b , f und g unabhängige Konstante $c_\infty > 0$, mit der folgende Abschätzung erfüllt ist:*

$$\|y\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_\infty (\|f\|_{L^r(\Omega)} + \|g\|_{L^s(\Gamma)}). \quad (4.10)$$

Der Beweis des Satzes wird in Abschnitt 7.2.2 ab S. 279 geführt. Es gilt die Ungleichung

$$\|y\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq \|y\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \forall y \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega),$$

siehe Übungsaufgabe 4.1. Deshalb folgt aus (4.10) die gleiche Abschätzung für $\|y\|_{L^\infty(\Gamma)}$. Es fällt auf, dass (4.10) nicht von d und b abhängt. Das liegt an der Monotonie dieser Funktionen. Es ist daher naheliegend, dass die von ihnen geforderte Beschränktheit gar nicht nötig ist. In der Tat kann man darauf verzichten und sogar die Stetigkeit der Lösung y auf $\bar{\Omega}$ beweisen. Dazu benötigen wir noch einen weiteren Hilfssatz.

Lemma 4.6 ([44]) *Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Lipschitzgebiet und sind $f \in L^r(\Omega)$, $g \in L^s(\Gamma)$ mit $r > N/2$, $s > N - 1$ gegeben, dann ist die schwache Lösung y des Neumannproblems*

$$\begin{aligned}\mathcal{A}y + y &= f \\ \partial_{\nu_{\mathcal{A}}}y &= g\end{aligned}$$

stetig auf $\bar{\Omega}$. Mit einer von f und g unabhängigen Konstanten $c(r, s) > 0$ gilt

$$\|y\|_{C(\bar{\Omega})} \leq c(r, s) (\|f\|_{L^r(\Omega)} + \|g\|_{L^s(\Gamma)}).$$

Beweis: Wir führen den Beweis der Einfachheit halber unter der Zusatzvoraussetzung, dass Ω einen $C^{1,1}$ -Rand besitzt und die Koeffizienten a_{ij} zu $C^{0,1}(\bar{\Omega})$ gehören. Zitate zum allgemeinen Fall folgen nach diesem Beweis. Die Existenz von $y \in H^1(\Omega)$ folgt aus Satz 2.6 auf S. 29 (vgl. auch die Bemerkungen auf S. 32 zu Daten mit $r < 2$ oder $s < 2$). Nach dem letzten Satz, angewendet mit $c_0 = 1$, $d = b = \alpha = 0$, ist y fast überall beschränkt und erfüllt die zu beweisende Abschätzung, allerdings in der L^∞ -Norm. Die Räume $C^\infty(\Omega)$ und $C^\infty(\Gamma)$ sind dicht in $L^r(\Omega)$ bzw. $L^s(\Gamma)$. Man wählt Funktionen $f_n \in C^\infty(\Omega)$ bzw. $g_n \in C^\infty(\Gamma)$ mit $f_n \rightarrow f$ in $L^r(\Omega)$ und $g_n \rightarrow g$ in $L^s(\Gamma)$, $n \rightarrow \infty$. Die zugehörige Lösung y_n hat nach den in Abschnitt 2.14.3 zusammengestellten Ergebnissen aus Grisvard [86] die Regularität $y_n \in W^{2,r}(\Omega)$. Dazu wird die vorausgesetzte Glattheit der Koeffizienten a_{ij} und des Randes gebraucht. Aus der stetigen Einbettung $W^{2,r}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ für $r > N/2$ (Satz 7.1 auf S. 277) folgt $y_n \in C(\bar{\Omega})$. Die Differenz $y - y_n$ löst

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(y - y_n) + y - y_n &= f - f_n \\ \partial_{\nu_{\mathcal{A}}}(y - y_n) &= g - g_n.\end{aligned}$$

Wenden wir wieder den letzten Satz an, dann folgt aus der Konvergenz von $f_n - f$ und $g_n - g$ gegen null auch $\|y - y_n\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Die Folge $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ ist demnach insbesondere Cauchyfolge in $L^\infty(\Omega)$. Andererseits wissen wir inzwischen $y_n \in C(\bar{\Omega})$. Da die Normen stetiger Funktionen in $L^\infty(\Omega)$ und $C(\bar{\Omega})$ identisch sind, ist $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ auch Cauchyfolge in $C(\bar{\Omega})$ und hat daher ihren Grenzwert in $C(\bar{\Omega})$. Das kann nur y sein. Die Stetigkeit von y ist damit bewiesen und die Abschätzung folgt aus (4.10) wegen $\|y\|_{L^\infty(\Omega)} = \|y\|_{C(\bar{\Omega})}$. ■

Der Beweis für den Fall von L^∞ -Koeffizienten a_{ij} und Lipschitzgebiete wurde durch Casas [44] erbracht und von Alibert und Raymond [5] auf allgemeinere Aufgaben übertragen. Neue Ergebnisse von Griepentrog [83] zur Regularität von Lösungen elliptischer Randwertaufgaben schließen die Aussage des Lemmas als Spezialfall ein. Das wird in Abschnitt 7.2.1 ab S. 278 erläutert. Für gemischte (Dirichlet-Neumann-) Randbedingungen gibt es ein neues Resultat zur Hölderstetigkeit der Lösung von Haller-Dintelmann et al. [95].

Im Weiteren verzichten wir auf die Beschränktheit von b und d . Ohne Voraussetzung 4.3 heißt $y \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *schwache Lösung* von (4.5), wenn (4.8) erfüllt ist.

Satz 4.7 *Es sei Voraussetzung 4.2 erfüllt, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Lipschitzgebiet und $r > N/2$, $s > N-1$. Ferner sei zusätzlich $b(x, 0) = 0$ sowie $d(x, 0) = 0$ für fast alle $x \in \Gamma$ bzw. $x \in \Omega$ gefordert. Dann besitzt das semilineare Randwertproblem (4.5) zu jedem Paar $f \in L^r(\Omega)$, $g \in L^s(\Gamma)$ in $H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ genau eine schwache Lösung y . Diese ist stetig und genügt mit einer von d , b , f und g unabhängigen Konstanten c_∞ der Abschätzung*

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} + \|y\|_{C(\bar{\Omega})} \leq c_\infty (\|f\|_{L^r(\Omega)} + \|g\|_{L^s(\Gamma)}). \quad (4.11)$$

Beweis: Wir folgen wieder Casas [44]. Zuerst wird gezeigt, dass die bisherige Beschränktheitsforderung an d und b unnötig ist. Man schneidet die eventuell unbeschränkten Funktionen d und b ab und definiert für beliebiges $k > 0$

$$d_k(x, y) = \begin{cases} d(x, k), & \text{falls } y > k \\ d(x, y), & \text{falls } |y| \leq k \\ d(x, -k), & \text{falls } y < -k. \end{cases}$$

Analog ist b_k definiert. Die Funktionen b_k und d_k sind gleichmäßig beschränkt und erfüllen daher Voraussetzung 4.3. Nun werden $f \in L^r(\Omega)$ und $g \in L^s(\Gamma)$ fest vorgegeben. Nach Satz 4.5 existiert für das elliptische Randwertproblem

$$\begin{aligned} \mathcal{A}y + c_0(x)y + d_k(x, y) &= f & \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu_A} y + \alpha(x)y + b_k(x, y) &= g & \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

genau eine schwache Lösung $y \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Diese genügt der Abschätzung (4.10), die unabhängig von d_k und b_k ist, also auch von k . Wählen wir $k > c_\infty (\|f\|_{L^r(\Omega)} + \|g\|_{L^s(\Gamma)})$, so gilt wegen (4.10) automatisch $|y(x)| \leq k$ und daher $d_k(x, y(x)) = d(x, y(x))$, also löst y die Aufgabe (4.5). Zum Nachweis der Stetigkeit von y schreiben wir das nichtlineare Randwertproblem um, das von y gelöst wird:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}y + y &= f + y - c_0 y - d_k(x, y) & \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu_A} y &= g - \alpha y - b_k(x, y) & \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Da y beschränkt ist, sind die rechten Seiten Funktionen aus $L^r(\Omega)$ bzw. $L^s(\Gamma)$. Lemma 4.6 sichert die Stetigkeit von y .

Es bleibt noch die Eindeutigkeit der Lösung zu beweisen. Ist \tilde{y} eine weitere stetige schwache Lösung, dann sind sowohl y als auch \tilde{y} Lösungen des mit $k := \max\{\|y\|_{C(\bar{\Omega})}, \|\tilde{y}\|_{C(\bar{\Omega})}\}$ definierten Problems, dessen Lösung aber eindeutig bestimmt ist; daher gilt $y = \tilde{y}$. ■

Nun sparen wir noch die Voraussetzung $d(x, 0) = b(x, 0) = 0$ ein. Diese wurde im Beweis von Satz 4.4 dazu benötigt, dass der Operator A monoton ist.

Satz 4.8 *Der Satz 4.7 bleibt ohne die Voraussetzung $b(x, 0) = d(x, 0) = 0$ richtig, wenn die Abschätzung (4.11) mit angepasstem $c_\infty > 0$ durch die folgende ersetzt wird:*

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} + \|y\|_{C(\bar{\Omega})} \leq c_\infty (\|f - d(\cdot, 0)\|_{L^r(\Omega)} + \|g - b(\cdot, 0)\|_{L^s(\Gamma)}). \quad (4.12)$$

Beweis: Wir schreiben die Randwertaufgabe um,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}y + c_0(x)y + d(x, y) - d(x, 0) &= f(x) - d(x, 0) & \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu_A} y + \alpha(x)y + b(x, y) - b(x, 0) &= g(x) - b(x, 0) & \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Die Funktionen $y \mapsto d(x, y) - d(x, 0)$, $y \mapsto b(x, y) - b(x, 0)$ verschwinden im Nullpunkt, so dass Satz 4.7 auf die rechten Seiten $f - d(\cdot, 0)$ und $g - b(\cdot, 0)$ anwendbar ist. Nach Voraussetzung 4.2 sind $d(\cdot, 0)$ und $b(\cdot, 0)$ beschränkt und messbar, so dass die rechten Seiten den gleichen Räumen angehören wie f bzw. g . Abschätzung (4.12) ergibt sich aus (4.11). ■

4.2.4 Abschwächung der Voraussetzungen

Bis jetzt haben wir die semilineare elliptische Modellgleichung in der Form (4.5) auf S. 147 betrachtet. Die benötigte Koerzivität des elliptischen Operators wurde durch die Koeffizienten c_0 bzw. α getragen. Insbesondere war die Wahl $d(x, y) = 0$ und $b(x, y) = 0$ möglich. Unter welchen Bedingungen kommt man ohne die Funktionen c_0 bzw. α aus, weil die im Satz von Browder und Minty vorausgesetzte Koerzivität des nichtlinearen Operators allein aus d oder b resultiert?

Als charakteristische Beispiele untersuchen wir die folgenden semilinearen Neumannprobleme auf die Existenz einer eindeutig bestimmten Lösung in $H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ und deren stetige Abhängigkeit von der rechten Seite f :

$$\begin{aligned} -\Delta y + e^y &= f & \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu_A} y &= 0 & \text{auf } \Gamma \end{aligned} \quad (4.13)$$

sowie

$$\begin{aligned} -\Delta y + y^3 &= f & \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu_A} y &= 0 & \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Bei (4.13) ist das nicht der Fall, was leicht zu sehen ist: Die Funktion $y(x) \equiv c$ löst (4.13) mit $f(x) \equiv e^c$ und wir haben $f \rightarrow 0$ für $c \rightarrow -\infty$. Zu $f = 0$ existiert offenbar keine beschränkte Lösung. Das bestätigt man leicht durch Einsetzen der Funktion $v(x) \equiv 1$ als Testfunktion in die schwache Formulierung. Bei homogener Dirichlet-Randbedingung tritt dieses Problem nicht auf, denn in $H_0^1(\Omega)$ ist $\mathcal{A} = -\Delta$ koerziv.

Gleichung (4.14) ist jedoch in $H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ korrekt gestellt. Hier ist der nächste, von E. Casas mitgeteilte Satz anwendbar. Er bezieht sich auf die Randwertaufgabe

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{A}y + d(x, y) &= 0 & \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu_A} y + b(x, y) &= 0 & \text{auf } \Gamma, \end{aligned}} \quad (4.15)$$

bei der \mathcal{A} wie in (4.5) definiert ist. Hier sind die bisher gegebenen rechten Seiten f bzw. g durch $d(x, y)$ bzw. $b(x, y)$ berücksichtigt.

Voraussetzung 4.9 Das Gebiet Ω und der lineare Differentialoperator \mathcal{A} sollen den in Voraussetzung 4.2 auf S. 148 formulierten Bedingungen genügen.

Die Funktionen $d = d(x, y) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $b = b(x, y) : \Gamma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien für jedes $y \in \mathbb{R}$ messbar in x sowie monoton wachsend und stetig in y für fast alle $x \in \Omega$ bzw. $x \in \Gamma$. Für jedes $M > 0$ sollen Funktionen $\psi_M \in L^r(\Omega)$, $\phi_M \in L^s(\Gamma)$ mit $r > N/2$, $s > N - 1$ existieren, so dass d und b den Abschätzungen

$$\begin{aligned} |d(x, y)| &\leq \psi_M(x) & \text{für fast alle } x \in \Omega \text{ und alle } |y| \leq M \\ |b(x, y)| &\leq \phi_M(x) & \text{für fast alle } x \in \Gamma \text{ und alle } |y| \leq M \end{aligned} \quad (4.16)$$

genügen. Mindestens eine der folgenden Bedingungen (i), (ii) treffe zu:

(i) Es existieren eine Menge $E_d \subset \Omega$ mit positivem Maß und Konstanten $M_d > 0$, $\lambda_d > 0$ so dass die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} d(x, y_1) &< d(x, y_2) \quad \forall x \in E_d, \quad \forall y_1 < y_2, \\ (d(x, y) - d(x, 0)) y &\geq \lambda_d |y|^2 \quad \forall x \in E_d, \quad \forall |y| > M_d. \end{aligned} \quad (4.17)$$

(ii) Es existieren eine Menge $E_b \subset \Gamma$ mit positivem Maß und Konstanten $M_b > 0$, $\lambda_b > 0$ so dass die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} b(x, y_1) &< b(x, y_2) \quad \forall x \in E_b, \quad \forall y_1 < y_2, \\ (b(x, y) - b(x, 0)) y &\geq \lambda_b |y|^2 \quad \forall x \in E_b, \quad \forall |y| > M_b. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Satz 4.10 Unter Voraussetzung 4.9 besitzt das Randwertproblem (4.15) in $H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ genau eine schwache Lösung y . Diese ist stetig auf $\bar{\Omega}$.

Beweis: Wir folgen der Idee von E. Casas und betrachten zunächst für $n = 1, 2, \dots$ die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \mathcal{A}y + n^{-1}y + d(x, y) &= 0 & \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu_{\mathcal{A}}}y + b(x, y) &= 0 & \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Analog zu Satz 4.8 existiert auch unter diesen leicht geänderten Voraussetzungen in $H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ genau eine Lösung y_n dieser Aufgabe. Wir wählen dabei $c_0(x) = n^{-1}$. Aus Satz 7.6 auf S. 283 folgt $\|y_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K$ mit einer von n unabhängigen Schranke K . In dieser Aussage steckt die Hauptschwierigkeit des Beweises. Wegen $\|y_n\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq c \|y_n\|_{L^\infty(\Omega)}$ haben wir auch die gleichmäßige Beschränktheit von $\|y_n\|_{L^\infty(\Gamma)}$ sowie der L^2 -Normen der Funktionen y_n und ihrer Spuren.

Aus der Monotonie der Funktionen d und b und der Ungleichung (2.20) auf S. 30 folgt nach Einsetzen von y_n in die schwache Formulierung für alle n die Abschätzung

$$\gamma_0 \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx \leq \int_{\Omega} \psi_K |y_n| dx + \int_{\Gamma} \phi_K |y_n| ds \leq c,$$

also ist wegen $\|y_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K$ auch $\{\|y_n\|_{H^1(\Omega)}\}$ beschränkt. Wir können eine Teilfolge $\{y_{n_k}\}$ auswählen, die in $H^1(\Omega)$ schwach und in $L^2(\Omega)$ stark gegen ein $y \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ konvergiert. Aus der Beschränktheit von y_n in $L^\infty(\Omega)$ bzw. $L^\infty(\Gamma)$ und dem Satz über die majorisierte Konvergenz folgt die Konvergenz von $d(\cdot, y_n)$ bzw. $b(\cdot, y_n)$ gegen $d(\cdot, y)$ in $L^2(\Omega)$ bzw. gegen $b(\cdot, y)$ in $L^2(\Gamma)$, so dass y Lösung von (4.15) ist. Die Eindeutigkeit dieser Lösung ergibt sich aus einem Standardschluss:

Sind y_1, y_2 zwei beschränkte Lösungen, dann testen wir die Differenz der zugehörigen Gleichungen mit der Testfunktion $v = y_1 - y_2$ und erhalten

$$\gamma_0 \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} (d(x, y_1) - d(x, y_2)) v dx + \int_{\Gamma} (b(x, y_1) - b(x, y_2)) v ds \leq 0. \quad (4.19)$$

Wegen Monotonie von d und b sind alle drei Terme nichtnegativ und damit gleich null. Daraus folgt zuerst $|\nabla v(x)| = 0$ f.ü. in Ω und deshalb fast überall $y_1(x) - y_2(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$, vgl. Zeidler [215], Problem 21.31a. Deshalb ist $y_1 - y_2 \in H^1(\Omega)$ fast überall gleich der stetigen Funktion $y(x) \equiv c$, woraus nach dem Spursatz auch $y_1(x) - y_2(x) = c$ fast überall auf Γ folgt.

Für $c \neq 0$ ist deshalb eine der beiden Funktionen y_1, y_2 fast überall in Ω echt größer als die andere, insbesondere fast überall in E_d bzw. E_b , wo d bzw. b streng monoton ist. Dann wäre aber eines der beiden obigen Integrale positiv im Widerspruch zu 4.19. Folglich gilt $c = 0$, d.h. $y_1 = y_2$. Die Stetigkeit der Lösung erhält man wieder mit Lemma 4.6. ■

Sind $d(x, y)$ bzw. $b(x, y)$ zusätzlich zur Monotonie in y für fast alle x nach y differenzierbar, dann sind folgende Bedingungen hinreichend für (4.17) bzw. (4.18):

Es existieren messbare Mengen $E_d \subset \Omega$ bzw. $E_b \subset \Gamma$ von positivem Maß sowie Konstanten $\lambda_d > 0$ bzw. $\lambda_b > 0$ mit

$$d_y(x, y) \geq \lambda_d \quad \forall x \in E_d, \forall y \in \mathbb{R}, \quad b_y(x, y) \geq \lambda_b \quad \forall x \in E_b, \forall y \in \mathbb{R}. \quad (4.20)$$

Gilt eine dieser Beziehungen, so ist Satz 4.8 auf das Randwertproblem (4.15) anwendbar: Wir definieren $c_0(x) := \chi(E_d)\lambda_d$ und schreiben

$$d(x, y) = c_0(x)y + (d(x, y) - c_0(x)y) = c_0(x)y + \tilde{d}(x, y).$$

Dann ist \tilde{d} monoton wachsend bezüglich y und $\|c_0\|_{L^\infty(\Omega)} \neq 0$. Analog können wir b mit $\alpha(x) := \chi(E_b)\lambda_b$ umformen. Damit hat die Gleichung die Form (4.5). Mit jeder der beiden Bedingungen aus (4.20) sind die Voraussetzungen von Satz 4.8 erfüllt.

4.3 Nemytskii-Operatoren

4.3.1 Stetigkeit von Nemytskii-Operatoren

Mit Nichtlinearitäten wie $d(x, y)$ wird einer gegebenen Funktion $y(\cdot)$ eine neue Funktion $z(x) = d(x, y(x))$ zugeordnet. Operatoren dieses Typs nennt man *Superpositionsoperatoren* oder *Nemytskii-Operatoren*. Ihre Differentiation ist mit gewissen versteckten Schwierigkeiten verbunden.

Beispiele. Die folgenden Zuordnungen $y(\cdot) \mapsto z(\cdot)$ sind Nemytskii-Operatoren:

$$\begin{aligned} z(x) &= (y(x))^3, & z(x) &= a(x) (y(x))^3, \\ z(x) &= \sin(y(x)), & z(x) &= (y(x) - a(x))^2. \end{aligned}$$

Die erste Abbildung kommt im Beispiel der Supraleitung vor, die dritte dient als Paradebeispiel für auftretende Schwierigkeiten und die vierte tritt in unseren quadratischen Integralfunktionalen auf. Die obigen Operatoren werden durch

$$d(y) = y^3, \quad d(x, y) = a(x) y^3, \quad d(y) = \sin(y), \quad d(x, y) = (y - a(x))^2 \quad (4.21)$$

erzeugt. ◇

Alle im Buch vorkommenden Nichtlinearitäten des obigen Typs können von 2 Variablen abhängen, von der „Gebietsvariablen“ x sowie einer „Funktionsvariablen“, in die eine Steuer- oder Zustandsfunktion eingesetzt wird. Die Funktionsvariable bezeichnen wir mit y, u, v oder w . Bei Aufgaben mit einer im Gebiet verteilten Steuerung wird beispielsweise die Funktion $d = d(x, y)$, $x \in \Omega$ (d für **d**istributed) verwendet. Bei Randsteuerung tritt die für $x \in \Gamma$ definierte Funktion $b = b(x, y)$ auf (b für **b**oundary).

In parabolischen Aufgaben kommt zur Ortsvariablen x noch die Zeitvariable t hinzu, so dass (x, t) für die Gebietsvariable steht. Zur Vereinfachung der nächsten Definition bezeichnen wir die von der Gebietsvariablen durchlaufene Menge mit E . Bei elliptischen Aufgaben haben wir $E = \Omega$ oder $E = \Gamma$, bei parabolischen $E = \Omega \times (0, T)$ bzw. $E = \Gamma \times (0, T)$. Generell wird die Menge E als beschränkt und Lebesgue-messbar vorausgesetzt.

Die numerische Analysis der Optimalsteuerung erfordert die Verwendung von Ableitungen erster und zweiter Ordnung solcher Nemytskii-Operatoren. Wir beginnen in diesem Abschnitt mit der Stetigkeit und Ableitungen erster Ordnung. Ableitungen zweiter Ordnung werden später im Zusammenhang mit hinreichenden Optimalitätsbedingungen diskutiert.

Definition. Es sei $E \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, eine beschränkte sowie messbare Menge und $\varphi = \varphi(x, y) : E \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Abbildung Φ ,

$$\Phi(y) = \varphi(\cdot, y(\cdot)),$$

die einer Funktion $y : E \rightarrow \mathbb{R}$ die durch $z(x) = \varphi(x, y(x))$ definierte Funktion $z : E \rightarrow \mathbb{R}$ zuordnet, heißt Nemytskii-Operator oder Superpositionsoperator.

Die Untersuchung von Nemytskii-Operatoren in L^p -Räumen mit $1 \leq p < \infty$ erfordert mehr oder weniger einschränkende Wachstumsbedingungen an $\varphi(x, y)$ in Bezug auf y . Da im Weiteren alle auftretenden Steuer- und Zustandsfunktionen gleichmäßig beschränkt sein werden, können wir in L^∞ und deshalb mit einfacheren Bedingungen arbeiten. Diesen genügen zum Beispiel alle auf ganz \mathbb{R} definierten elementaren Funktionen von y .

Definition. Eine Funktion $\varphi = \varphi(x, y) : E \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt die Carathéodory-Bedingung, wenn φ für jedes feste $y \in \mathbb{R}$ messbar in x ist und stetig in y für fast alle festen $x \in E$. Sie genügt der Beschränktheitsbedingung, wenn eine Konstante K existiert, so dass

$$|\varphi(x, 0)| \leq K \quad (4.22)$$

für fast alle $x \in E$ gilt. Sie heißt lokal Lipschitz-stetig in y , wenn für jede Konstante $M > 0$ eine Konstante $L(M) > 0$ existiert, so dass für fast alle $x \in E$ und alle $y, z \in [-M, M]$ die Abschätzung

$$|\varphi(x, y) - \varphi(x, z)| \leq L(M) |y - z| \quad (4.23)$$

erfüllt ist.

Aus der Beschränktheitsbedingung folgt zusammen mit der lokalen Lipschitzstetigkeit die Beschränktheit von φ für alle $y \in [-M, M]$ und fast alle $x \in E$.

Beispiele. Alle Funktionen $\varphi = \varphi(y)$ aus $C^1(\mathbb{R})$ erfüllen diese Bedingungen. Gleiches gilt für $\varphi(x, y) := a_1(x) + a_2(x)b(y)$ mit $a_i \in L^\infty(E)$ und $b \in C^1(\mathbb{R})$. Die in (4.21) aufgezählten Funktionen genügen ebenfalls den Bedingungen, falls $a \in L^\infty(E)$. \diamond

Lemma 4.11 Die Funktion $\varphi = \varphi(x, y)$ sei für jedes $y \in \mathbb{R}$ messbar in $x \in E$, erfülle die Beschränktheits-Bedingung und sei lokal Lipschitz-stetig in y . Dann ist der zugeordnete Nemytskii-Operator Φ stetig im Raum $L^\infty(E)$. Außerdem gilt für alle $r \in [1, \infty]$

$$\|\Phi(y) - \Phi(z)\|_{L^r(E)} \leq L(M) \|y - z\|_{L^r(E)}$$

für alle Funktionen y und z aus $L^\infty(E)$, die der Bedingung $\|y\|_{L^\infty(E)} \leq M$, $\|z\|_{L^\infty(E)} \leq M$ genügen.

Beweis: Ist $y \in L^\infty(E)$ gegeben, so folgt $|y(x)| \leq M$ mit hinreichend großem M , für fast alle $x \in E$. Die Beschränktheits- und Lipschitzbedingungen (4.22), (4.23) sichern

$$|\varphi(x, y(x))| \leq |\varphi(x, 0)| + |\varphi(x, y(x)) - \varphi(x, 0)| \leq K + L(M)M$$

für fast alle $x \in E$. Damit liegt $\Phi(y(\cdot)) = \varphi(\cdot, y(\cdot))$ in $L^\infty(E)$, also bildet Φ den Raum $L^\infty(E)$ in sich ab. Sind y und z dem Betrag nach f.ü. durch M beschränkt, so folgt aus der lokalen Lipschitzstetigkeit für beliebiges $1 \leq r < \infty$

$$\int_E |\varphi(x, y(x)) - \varphi(x, z(x))|^r dx \leq L(M)^r \int_E |y(x) - z(x)|^r dx = L(M)^r \|y - z\|_{L^r(E)}^r.$$

Das ist äquivalent zur im Lemma formulierten Abschätzung. Für $r = \infty$ geht man analog vor. Deshalb ist Φ auch lokal Lipschitz-stetig in $L^\infty(E)$. ■

Ist die Funktion φ sogar *gleichmäßig beschränkt* und Lipschitz-stetig auf ganz \mathbb{R} , dann ist Φ Lipschitz-stetig in jedem Raum $L^r(E)$ und es existiert ein $L > 0$ mit

$$\|\Phi(y) - \Phi(z)\|_{L^r(E)} \leq L \|y - z\|_{L^r(E)} \quad \forall y, z \in L^r(E).$$

Das sieht man sofort am obigen Beweis.

Beispiel. $\Phi(y) = \sin(y(\cdot))$

Der Nemytskii-Operator Φ wird erzeugt durch $\varphi(x, y) = \sin(y)$. Wir wissen

$$|\sin(y)| \leq 1 \quad \text{und} \quad |\sin(y) - \sin(z)| \leq |y - z| \quad \forall y, z \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion $\varphi(x, y) = \sin(y)$ ist also global beschränkt und Lipschitz-stetig, jeweils mit Konstante 1. Deshalb ist Φ (global) Lipschitz-stetig und

$$\|\sin(y(\cdot)) - \sin(z(\cdot))\|_{L^r(E)} \leq \|y - z\|_{L^r(E)} \quad \forall y, z \in L^r(E). \quad \diamond$$

4.3.2 Differenzierbarkeit von Nemytskii-Operatoren

Voraussetzungen an die Nichtlinearitäten

Für die Differenzierbarkeit von Nemytskii-Operatoren müssen an die definierende Funktion φ höhere Glattheitsvoraussetzungen gestellt werden. Um deren Formulierung etwas abzukürzen, vereinbaren wir folgende Bezeichnungsweise:

Definition. Es sei $E \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$ eine beschränkte Menge und $\varphi = \varphi(x, y) : E \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion der Ortsvariablen x und der Funktionsvariablen y . Für fast alle $x \in E$ sei sie k -mal partiell nach y differenzierbar. Wir sagen, dass die Funktion φ die Beschränktheitsbedingung der Ordnung k erfüllt, wenn eine Schranke K derart existiert, dass

$$|D_y^l \varphi(x, 0)| \leq K \tag{4.24}$$

für fast alle $x \in E$ und alle $l = 0, \dots, k$ gilt. Sie genügt der lokalen Lipschitzbedingung der Ordnung k , wenn eine von M abhängige Lipschitzkonstante $L = L(M)$ existiert, so dass

$$|D_y^k \varphi(x, y_1) - D_y^k \varphi(x, y_2)| \leq L(M) |y_1 - y_2| \tag{4.25}$$

für alle $y_i \in \mathbb{R}$ mit $|y_i| \leq M$, $i = 1, 2$ erfüllt ist.

Wenn φ nur von der zweiten Variablen abhängt, $\varphi = \varphi(y)$, dann sind die obigen zwei Bedingungen äquivalent zur lokalen Lipschitzstetigkeit von $\varphi^{(k)}$,

$$|\varphi^{(k)}(y_1) - \varphi^{(k)}(y_2)| \leq L(M) |y_1 - y_2|$$

für alle in (4.25) spezifizierten y_i .

Bemerkung. Aus Beschränktheitsbedingung und lokaler Lipschitzbedingung der Ordnung k folgt die lokale Beschränktheit sowie lokale Lipschitzstetigkeit aller Ableitungen bis zur Ordnung k . Das sieht man leicht ein: Zunächst ergibt sich aus Lipschitzbedingung und Beschränktheitsbedingung die lokale Beschränktheit in y , denn es gilt für alle y mit $|y| \leq M$

$$|D_y^l \varphi(x, y)| \leq |D_y^l \varphi(x, y) - D_y^l \varphi(x, 0)| + |D_y^l \varphi(x, 0)| \leq L(M) |y| + K \leq K(M).$$

Daraus erhält man die lokale Lipschitzstetigkeit der Ableitung einer Ordnung niedriger. Beispielsweise folgt aus der lokalen Lipschitzstetigkeit der Ordnung 2 die lokale Lipschitzstetigkeit der Ordnung 1, denn aus dem Mittelwertsatz ergibt sich

$$|D_y \varphi(x, y_1) - D_y \varphi(x, y_2)| = |D_y^2 \varphi(x, y_\vartheta)(y_1 - y_2)| \leq 2 K(M) M$$

mit einer zwischen y_1 und y_2 liegenden Zwischenstelle y_ϑ für $|y_i| \leq M$, $i = 1, 2$. So behandelt man Stück für Stück alle Ableitungen niedrigerer Ordnung bis hin zur Funktion φ selbst.

Ableitungen erster Ordnung in $L^\infty(E)$

Bei Forderung der *Differenzierbarkeit* von Φ scheinen die Dinge klar zu liegen. Ist φ stetig differenzierbar nach der Funktionsvariablen, dann sollte auch der zugeordnete Nemytskii-Operator Φ differenzierbar sein. Im Prinzip stimmt das, aber die Wahl des Funktionenraums ist entscheidend. Zur Vereinfachung legen wir folgende Bezeichnungsweise fest: Wir bezeichnen die partiellen Ableitungen $D_y \varphi = \partial \varphi / \partial y$, $D_y^2 \varphi = \partial^2 \varphi / \partial y^2$ in bekannter Weise durch φ_y , φ_{yy} .

Es sei φ für jedes feste x stetig nach y differenzierbar. Hat Φ an der Stelle y eine *Fréchet*-Ableitung, dann können wir sie als *Gâteaux*-Ableitung berechnen,

$$\begin{aligned} (\Phi'(y)h)(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[\varphi(x, y(x) + t h(x)) - \varphi(x, y(x)) \right] \\ &= \left. \frac{d}{dt} \varphi(x, y(x) + t h(x)) \right|_{t=0} = \varphi_y(x, y(x)) h(x). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Dieser Grenzwert existiert für jedes feste x . Aber noch haben wir keine Information darüber, ob der Grenzwert im Sinne eines L^r -Raums existiert, in welchem Raum die Funktion $\varphi_y(x, y(x))$ und ihr Produkt mit $h(x)$ liegt. Die punktweise Existenz dieser Ableitung sagt noch nichts über Differenzierbarkeit aus.

Beispiel: Sinus-Operator. Der Sinus ist unendlich oft differenzierbar und alle Ableitungen sind gleichmäßig beschränkt. Wegen dieser schönen Eigenschaften der Sinusfunktion testen wir die Sachlage bei ihr, und zwar am einfachsten im Hilbertraum $L^2(E)$. Der zugeordnete Nemytskii-Operator $\Phi(y(\cdot)) = \sin(y(\cdot))$ ist global Lipschitz-stetig in $L^2(E)$, wie das entsprechende Beispiel im letzten Abschnitt zeigt. Wir vermuten, dass er auch differenzierbar ist. Die Ableitung muss nach (4.26) durch

$$(\Phi'(y)h)(x) = \cos(y(x)) h(x) \quad (4.27)$$

gegeben sein. Das scheint zu passen, denn der Cosinus ist durch 1 beschränkt, also ist die rechte Seite von (4.27) eine lineare stetige Abbildung in $L^2(E)$, die jedem $h \in L^2(E)$ das Produkt $\cos(y(x)) h(x)$ aus $L^2(E)$ zuordnet.

Diese Vermutung ist leider falsch! Der Operator kann trotz der Glattheit der Sinusfunktion nicht in $L^p(E)$ mit $1 \leq p < \infty$ differenzierbar sein. Das folgt aus einem bekannten Satz, der aussagt, dass Φ genau dann im Raum $L^p(E)$ mit $1 \leq p < \infty$ Fréchet-differenzierbar ist, wenn φ affin-linear in y ist, d.h. $\varphi(x, y) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x)y$ mit $\varphi_0 \in L^p(E)$ und $\varphi_1 \in L^\infty(E)$, Krasnoselskii et al. [128]. Dieser unten für den Sinus-Operator erläuterte Umstand erschwert die Theorie der Optimalsteuerung nichtlinearer Aufgaben außerordentlich.

Die Nichtdifferenzierbarkeit des Sinus-Operators ist leicht nachzuweisen, Übungsaufgabe 4.4, (i). Sehr einfach ist das im Raum $L^p(0, 1)$ im Nullpunkt zu sehen, $1 \leq p < \infty$. Mit $h \in L^p(0, 1)$ folgt aus der Taylorformel mit integralem Restglied, angewendet auf die Sinusfunktion,

$$\begin{aligned} \sin(0 + h(x)) &= \sin(0) + \cos(0) h(x) + \int_{s=0}^1 [\cos(0 + s h(x)) - \cos(0)] h(x) ds \\ &= 0 + h(x) + r(x). \end{aligned}$$

Wir betrachten dabei $h(x)$ bei festem x als reelle Zahl. Für den Zuwachs h wählen wir zu $0 < \varepsilon < 1$ die Treppenfunktion

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{auf } [0, \varepsilon] \\ 0 & \text{auf } (\varepsilon, 1] \end{cases}$$

und vollziehen den Grenzübergang $\varepsilon \downarrow 0$. Das von h abhängige Restglied $r(x)$ kann ohne Verwendung des integralen Restglieds durch Umstellen sofort abgelesen werden, $r(x) = \sin(h(x)) - h(x)$; für $x \in [0, \varepsilon]$ folgt deshalb

$$r(x) = \sin(1) - 1 = c \neq 0$$

und damit

$$r(x) = \begin{cases} c & \text{auf } [0, \varepsilon] \\ 0 & \text{auf } (\varepsilon, 1]. \end{cases}$$

Wäre der Sinus-Operator an der Stelle null Fréchet-differenzierbar, dann müsste der Quotient $\|r\|_{L^p}/\|h\|_{L^p}$ für $\|h\|_{L^p} \rightarrow 0$ nach null streben, aber wir erhalten

$$\frac{\|r\|_{L^p(0,1)}}{\|h\|_{L^p(0,1)}} = \frac{\left(\int_0^\varepsilon |r(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\int_0^\varepsilon |h(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}} = \frac{c \varepsilon^{\frac{1}{p}}}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}} = c.$$

Die Lage ist trotzdem nicht hoffnungslos, denn wenigstens im Raum $L^\infty(E)$ ist der Sinus-Operator differenzierbar. Das ist eine Folgerung aus dem nächsten Hilfssatz. Außerdem erkennt man, dass er für $1 \leq p_2 < p_1$ differenzierbar von $L^{p_1}(0, 1)$ nach $L^{p_2}(0, 1)$ sein sollte, denn dann strebt der entsprechende Quotient $\varepsilon^{\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}}$ nach null, so dass sich oben zumindest kein Widerspruch ergibt. In der Tat lässt sich die Differenzierbarkeit in diesen Raumpaaren beweisen, Übungsaufgabe 4.4, (ii).

Lemma 4.12 Die Funktion φ sei für jedes $y \in \mathbb{R}$ in $x \in E$ messbar und für fast alle $x \in E$ nach y differenzierbar. Sie genüge der Beschränktheitsbedingung (4.24) und lokalen Lipschitzbedingung (4.25) jeweils mit Ordnung $k = 1$. Dann ist der von φ erzeugte Nemytskii-Operator Φ in $L^\infty(E)$ Fréchet-differenzierbar und für alle $h \in L^\infty(E)$ gilt

$$(\Phi'(y)h)(x) = \varphi_y(x, y(x))h(x) \quad \text{für fast alle } x \in E.$$

Beweis: Wir erhalten für beliebige $y, h \in L^\infty(E)$, die dem Betrag nach fast überall durch M beschränkt sind,

$$\varphi(x, y(x) + h(x)) - \varphi(x, y(x)) = \varphi_y(x, y(x))h(x) + r(y, h)(x),$$

wobei das Restglied die Form

$$r(y, h)(x) = \int_{s=0}^1 [\varphi_y(x, y(x) + s h(x)) - \varphi_y(x, y(x))] ds h(x)$$

hat. Wegen Lipschitzstetigkeit von φ_y können wir fast überall durch

$$|r(y, h)(x)| \leq L(2M) \int_0^1 s |h(x)| ds |h(x)| \leq \frac{L(2M)}{2} |h(x)|^2 \leq \frac{L(2M)}{2} \|h\|_{L^\infty(E)}^2$$

abschätzen. Deshalb gilt $\|r(y, h)\|_{L^\infty(E)} \leq c \|h\|_{L^\infty(E)}^2$ und

$$\frac{\|r(y, h)\|_{L^\infty(E)}}{\|h\|_{L^\infty(E)}} \rightarrow 0, \quad \text{wenn } \|h\|_{L^\infty(E)} \rightarrow 0.$$

Die geforderte Restgliedeigenschaft ist damit bewiesen. Außerdem ist der Multiplikationsoperator $h(\cdot) \mapsto \varphi_y(\cdot, y(\cdot))h(\cdot)$ linear und stetig in $L^\infty(E)$, denn $\varphi_y(x, y(x))$ ist wegen der Beschränktheitsbedingung an φ_y beschränkt. Die Messbarkeit von φ_y folgt übrigens aus der von φ , denn die Ableitung nach y ergibt sich als Grenzwert messbarer Funktionen. Alle Eigenschaften der Fréchet-Ableitung sind damit bewiesen. ■

Folgerung. Alle nur von y abhängigen Funktionen φ aus $C^2(\mathbb{R})$ erzeugen in $L^\infty(E)$ differenzierbare Nemytskii-Operatoren, denn φ' ist lokal Lipschitz-stetig.

Da wir später den Satz über implizite Funktionen anwenden wollen, brauchen wir den Begriff der stetigen Differenzierbarkeit einer Abbildung.

Definition. Eine in einer offenen Umgebung \mathcal{U} von $\bar{u} \in U$ Fréchet-differenzierbare Abbildung $F : \mathcal{U} \rightarrow V$ heißt stetig Fréchet-differenzierbar an der Stelle \bar{u} , wenn die Abbildung $u \mapsto F'(u)$ von \mathcal{U} in $\mathcal{L}(U, V)$ stetig an der Stelle \bar{u} ist, d.h.

$$\|u - \bar{u}\|_U \rightarrow 0 \Rightarrow \|F'(u) - F'(\bar{u})\|_{\mathcal{L}(U, V)} \rightarrow 0.$$

Ist F an jeder Stelle $u \in \mathcal{U}$ stetig Fréchet-differenzierbar, dann heißt F stetig Fréchet-differenzierbar in \mathcal{U} .

In diesem Falle hängt der Operator $F'(u)$ stetig von u ab.

Lemma 4.13 Unter den Voraussetzungen von Lemma 4.12 ist der Nemytskii-Operator Φ stetig Fréchet-differenzierbar in $L^\infty(E)$.

Beweis: Es sei $\bar{y} \in L^\infty(E)$ fest gewählt und $y \rightarrow \bar{y}$ in $L^\infty(E)$ angenommen. Zu zeigen ist $\|\Phi'(y) - \Phi'(\bar{y})\|_{\mathcal{L}(L^\infty(E))} \rightarrow 0$. Es gibt ein $M > 0$ mit $\max\{\|\bar{y}\|_{L^\infty(E)}, \|y\|_{L^\infty(E)}\} \leq M$. Wegen der lokalen Lipschitzstetigkeit der Ableitung von φ folgt dann

$$\begin{aligned} \|\Phi'(y) - \Phi'(\bar{y})\|_{\mathcal{L}(L^\infty(E))} &= \sup_{\|v\|_{L^\infty(E)}=1} \left\| [\varphi_y(\cdot, y(\cdot)) - \varphi_y(\cdot, \bar{y}(\cdot))] v(\cdot) \right\|_{L^\infty(E)} \\ &\leq \left\| \varphi_y(\cdot, y(\cdot)) - \varphi_y(\cdot, \bar{y}(\cdot)) \right\|_{L^\infty(E)} \leq L(M) \|y - \bar{y}\|_{L^\infty(E)}. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\|\Phi'(y) - \Phi'(\bar{y})\|_{\mathcal{L}(L^\infty(E))} \rightarrow 0$, also ist Φ (Lipschitz-) stetig differenzierbar. ■

Beispiel. Wir betrachten in $C[0, 1]$ für natürliches $n \geq 2$

$$\Phi(y(\cdot)) = y(\cdot)^n.$$

Die Ableitung an einer Stelle \bar{y} in Richtung y ist

$$\Phi'(\bar{y})y = n\bar{y}^{n-1}y.$$

Wir können $\Phi'(\bar{y})$ mit der Funktion $n\bar{y}^{n-1}$ identifizieren. Für die Operatornorm der Differenz $\Phi'(y_1) - \Phi'(y_2)$ folgt für alle y_1 und y_2 aus einer beschränkten Menge

$$\begin{aligned} \|\Phi'(y_1) - \Phi'(y_2)\|_{\mathcal{L}(C[0,1])} &= \max_{\|y\|_{C[0,1]}=1} \|(\Phi'(y_1) - \Phi'(y_2))y\|_{C[0,1]} \\ &= \max_{\|y\|_{C[0,1]}=1} \|n(y_1^{n-1} - y_2^{n-1})y\|_{C[0,1]} \\ &\leq n\|y_1^{n-1} - y_2^{n-1}\|_{C[0,1]} \\ &\leq n(n-1) \sup_{x \in [0,1]} |(y_1 + \theta(y_2 - y_1))(x)|^{n-2} |(y_1 - y_2)(x)| \\ &\leq n(n-1) (\|y_1\|_{C[0,1]} + \|y_2\|_{C[0,1]})^{n-2} \|y_1 - y_2\|_{C[0,1]} \\ &\leq M \|y_1 - y_2\|_{C[0,1]} \end{aligned}$$

mit $\theta = \theta(x) \in (0, 1)$. Daher ist die Abbildung $y \mapsto \Phi'(y)$ stetig, Φ also stetig differenzierbar. ◇

4.3.3 Ableitungen in weiteren L^p -Räumen *

Der Vollständigkeit halber geben wir hier Eigenschaften von Nemytskii-Operatoren in L^p -Räumen mit $p < \infty$ an. Sie werden zum Beispiel bei der Diskussion der Gleichung $-\Delta y + y + y^3 = u$ in $H^1(\Omega)$ genutzt. Ihre Beweise sind in den Monographien [13], [128] und in den Arbeiten [12], [78] zu finden. Mit Nemytskii-Operatoren in Sobolew- oder Hölder-Räumen befassen sich u.a. [13] und [77].

Stetigkeit. Wir gehen von einer beschränkten und messbaren Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ aus und verlangen, dass $\varphi = \varphi(x, y)$ der Carathéodory-Bedingung genügt. Unter dieser Voraussetzung bildet der Nemytskii-Operator $\Phi(y) := \varphi(\cdot, y(\cdot))$ genau dann für $1 \leq q \leq p < \infty$ von $L^p(E)$ in $L^q(E)$ ab, wenn mit Funktionen $\alpha \in L^q(E)$, $\beta \in L^\infty(E)$ die *Wachstumsbedingung*

$$|\varphi(x, y)| \leq \alpha(x) + \beta(x) |y|^{\frac{p}{q}} \quad (4.28)$$

erfüllt ist. Außerdem ist der Operator Φ für $q < \infty$ automatisch stetig, wenn er überhaupt $L^p(E)$ in $L^q(E)$ abbildet, [13].

Differenzierbarkeit. Es existiere zusätzlich die partielle Ableitung $\varphi_y(x, y)$ für fast alle $x \in E$ und der durch $\varphi_y(x, y)$ erzeugte Nemytskii-Operator bilde $L^p(E)$ in $L^r(E)$ ab, wobei $1 \leq q < p < \infty$ der Beziehung

$$r = \frac{pq}{p-q}. \quad (4.29)$$

genügen sollen. Dann ist Φ Fréchet-differenzierbar von $L^p(E)$ in $L^q(E)$ und es gilt

$$(\Phi'(y)h)(x) = \varphi_y(x, y(x))h(x).$$

Zum Nachweis der Differenzierbarkeit ist also (4.28) mit $q := r$ und $\varphi := \varphi_y$ zu fordern. Das ist plausibel, denn das Produkt $\varphi_y h$ soll für $h \in L^p(E)$ zu $L^q(E)$ gehören. Wir bestimmen deshalb den zu p/q konjugierten Index s aus $1/s + q/p = 1$ und schätzen mit der Hölderschen Ungleichung (2.25) auf S. 35 wie folgt ab:

$$\begin{aligned} \int_E |\varphi_y(x, y(x))|^q |h(x)|^q dx &\leq \left(\int_E |\varphi_y(x, y(x))|^{qs} dx \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_E |h(x)|^{q\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{q}{p}} \\ &= \left(\int_E |\varphi_y(x, y(x))|^r dx \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_E |h(x)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung sind beide Integrale endlich.

Beispiel. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sei ein beschränktes Gebiet, $k \geq 1$ eine natürliche Zahl und Φ der von $\varphi(y) = y^k$ erzeugte Nemytskii-Operator. Im Zusammenhang mit Gleichung (4.2) auf S. 145 interessiert uns, für welche k der Operator Φ differenzierbar von $L^6(\Omega)$ nach $L^{6/5}(\Omega)$ ist. Nach (4.29) muss die Ableitung φ_y den Raum $L^6(\Omega)$ in $L^r(\Omega)$ abbilden mit

$$r = \frac{6 \cdot \frac{6}{5}}{6 - \frac{6}{5}} = \frac{3}{2}.$$

Wir haben $|\varphi_y| = k|y|^{k-1}$. Wegen der Wachstumsbedingung (4.28) fordern wir daher $k-1 \leq p/r$ mit $p=6$ und $r=3/2$, also

$$k-1 \leq \frac{6}{r} = 4,$$

und somit $k \leq 5$. Daher ist $y(\cdot)^k$ für $k \leq 5$ differenzierbar von $L^6(\Omega)$ nach $L^{6/5}(\Omega)$. \diamond

4.4 Existenz optimaler Steuerungen

4.4.1 Grundvoraussetzungen des Kapitels

Die Theorie für Aufgaben mit nichtlinearen Gleichungen und Funktionalen kann durch die nötigen Voraussetzungen an die Nichtlinearitäten leicht unübersichtlich werden. Je nach Fragestellung wie Existenz optimaler Steuerungen, notwendige Bedingungen erster Ordnung oder hinreichende Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung sind die Forderungen unterschiedlich und müssten in jedem Abschnitt neu spezifiziert werden. Um das zu vermeiden, treffen wir hier eine Voraussetzung für das gesamte Kapitel 4, die für die manche Sätze zu stark ist. An den betreffenden Stellen wird dann erwähnt, auf welche

Teile der Voraussetzungen man verzichten kann, siehe auch die Bemerkung am Ende des Abschnitts.

In diesem Kapitel kommen immer wieder die reellwertigen Funktionen $d(x, y)$, $b(x, y)$, $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, u)$ vor, die von der Gebietsvariablen $x \in E$ und den reellen „Funktionsvariablen“ y bzw. u abhängen. Dabei sind für E die Spezifikationen $E = \Omega$ und $E = \Gamma$ möglich. Ferner sind Schranken $u_a, u_b, v_a, v_b : E \rightarrow \mathbb{R}$ an die Steuerungen vorgegeben.

Voraussetzung 4.14 (i) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ist ein beschränktes Lipschitzgebiet.

(ii) Die Funktionen $d = d(x, y)$, $\varphi = \varphi(x, y) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $b = b(x, y) : \Gamma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $\psi = \psi(x, u) : E \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $E = \Omega$ oder $E = \Gamma$, seien für jedes reelle y bzw. u messbar in der Ortsvariablen x und für fast alle $x \in \Omega$ bzw. $x \in \Gamma$ zweimal nach y bzw. u differenzierbar. Sie sollen den Beschränktheits- und lokalen Lipschitzbedingungen (4.24)–(4.25) der Ordnung $k = 2$ genügen. Zum Beispiel bedeutet das für φ : Es existieren eine Konstante K und eine von M abhängige Konstante $L(M)$, so dass

$$|\varphi(x, 0)| + |\varphi_y(x, 0)| + |\varphi_{yy}(x, 0)| \leq K, \quad |\varphi_{yy}(x, y_1) - \varphi_{yy}(x, y_2)| \leq L(M) |y_1 - y_2|$$

für fast alle $x \in \Omega$ und alle $y_1, y_2 \in [-M, M]$ gilt.

(iii) Zusätzlich sei $d_y(x, y) \geq 0$ für fast alle $x \in \Omega$ und alle $y \in \mathbb{R}$ sowie $b_y(x, y) \geq 0$ für fast alle $x \in \Gamma$ und alle $y \in \mathbb{R}$. Außerdem sollen Mengen $E_d \subset \Omega$ und $E_b \subset \Gamma$ von positivem Maß und Konstanten $\lambda_d > 0$, $\lambda_b > 0$ existieren, so dass die Ungleichungen

$$d_y(x, y) \geq \lambda_d \quad \forall x \in E_d, \forall y \in \mathbb{R}, \quad b_y(x, y) \geq \lambda_b \quad \forall x \in E_b, \forall y \in \mathbb{R}.$$

erfüllt sind.

(iv) Die Schranken $u_a, u_b, v_a, v_b : E \rightarrow \mathbb{R}$ seien aus $L^\infty(E)$ für $E = \Omega$ bzw. $E = \Gamma$ und sollen $u_a(x) \leq u_b(x)$ bzw. $v_a(x) \leq v_b(x)$ für fast alle $x \in E$ erfüllen.

Wie bereits erwähnt wurde, ist diese Voraussetzung insgesamt zu stark. Für die Existenz optimaler Steuerungen wird für φ und ψ Teil (ii) nicht für die Ableitungen benötigt, sondern inklusive Lipschitzbedingung nur für die Funktionen selbst (Ordnung $k = 0$), dafür aber Konvexität von ψ in u . Für notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung ist (ii) nur bis zur Ordnung $k = 1$ zu fordern, während die vollständige Voraussetzung 4.14 für Bedingungen zweiter Ordnung und das SQP-Verfahren gebraucht wird.

Beispiel. Folgende Funktionen erfüllen diese Voraussetzungen:

$$\varphi(x, y) = a(x) y + \beta(x) (y - y_\Omega(x))^2 \text{ mit } a, \beta, y_\Omega \in L^\infty(\Omega),$$

$$d(x, y) = c_0(x) y + y^k \text{ mit ungeradem } k \in \mathbb{N} \text{ und } c_0(x) \geq 0 \text{ in } \Omega, \|c_0\|_{L^\infty(\Omega)} > 0,$$

$$d(x, y) = c_0(x) y + \exp(a(x) y) \text{ mit } 0 \leq a \in L^\infty(\Omega) \text{ und dem eben definierten } c_0. \quad \diamond$$

Unter diesen Voraussetzungen ist der Existenzsatz 4.8 von S. 153 auf die im Weiteren auftretenden elliptischen Gleichungen anwendbar: Wir schreiben dazu d in der Form

$$d(x, y) = c_0(x) y + (d(x, y) - c_0(x) y) = c_0(x) y + \tilde{d}(x, y) \quad (4.30)$$

mit $c_0 = \chi(E_d) \lambda_d$ auf. Dann genügt \tilde{d} der Voraussetzung 4.2 auf S. 148. Analog verfahren wir mit b und definieren $\alpha := \chi(E_b) \lambda_b$.

4.4.2 Verteilte Steuerung

Wir untersuchen exemplarisch die Aufgabe

$$\min J(y, u) := \int_{\Omega} \varphi(x, y(x)) dx + \int_{\Omega} \psi(x, u(x)) dx \quad (4.31)$$

bei den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcl} -\Delta y + d(x, y) & = & u \quad \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu} y & = & 0 \quad \text{auf } \Gamma \end{array} \quad (4.32)$$

sowie

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \quad \text{f.ü. in } \Omega. \quad (4.33)$$

Aufgaben, bei denen die Steuerung als Quellterm in der rechten Seite der partiellen Differentialgleichung vorkommt, werden als Aufgaben mit *verteilter Steuerung* bezeichnet. Wir setzen hier

$$U_{ad} = \{u \in L^{\infty}(\Omega) : u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \text{ f.ü. in } \Omega\}.$$

Definition. Eine Steuerung $\bar{u} \in U_{ad}$ heißt *optimal* und $\bar{y} = y(\bar{u})$ *optimaler Zustand*, wenn

$$J(y(\bar{u}), \bar{u}) \leq J(y(u), u) \quad \forall u \in U_{ad}$$

gilt. Sie heißt *lokal optimal* im Sinne von $L^r(\Omega)$, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass die obige Ungleichung für alle $u \in U_{ad}$ mit $\|u - \bar{u}\|_{L^r(\Omega)} \leq \varepsilon$ erfüllt ist.

Bevor wir den ersten Existenzsatz für optimale Steuerungen formulieren und beweisen, machen wir uns zwei Eigenschaften der Funktionale

$$F(y) = \int_{\Omega} \varphi(x, y(x)) dx, \quad Q(u) = \int_{\Omega} \psi(x, u(x)) dx \quad (4.34)$$

klar. Beide sind zusammengesetzt aus einem Nemytskii-Operator und einem Integraloperator, der linear und stetig von $L^1(\Omega)$ nach \mathbb{R} abbildet. F ist deshalb nach Lemma 4.11 auf S. 157 Lipschitz-stetig auf der Menge aller $y \in L^2(\Omega)$ mit $\|y\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq M$, wenn $M > 0$ beliebig vorgegeben ist. Gleiches gilt für Q auf U_{ad} , denn U_{ad} ist in der L^{∞} -Norm beschränkt. Außerdem ist Q konvex auf U_{ad} , wenn die unten stehende Konvexitätsvoraussetzung (4.35) erfüllt ist, Übungsaufgabe 4.5.

Satz 4.15 Es sei Voraussetzung 4.14 erfüllt und ψ konvex in u , d.h.

$$\psi(x, \lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda \psi(x, u) + (1 - \lambda) \psi(x, v) \quad (4.35)$$

für fast alle x aus Ω , alle reellen u, v und alle $\lambda \in (0, 1)$. Dann besitzt die Aufgabe (4.31)–(4.33) mit verteilter Steuerung mindestens eine optimale Steuerung \bar{u} mit zugehörigem optimalen Zustand $\bar{y} = y(\bar{u})$.

Beweis: Wir bringen zunächst die Gleichung (4.32) mit Hilfe der Umformung (4.30) auf die Gestalt (4.5) auf S. 147. Darauf wenden wir Satz 4.8 auf S. 153 mit \tilde{d} an Stelle von d an, vgl. die Bemerkungen nach (4.32). Deshalb besitzt die Zustandsgleichung (4.32) für jede Steuerung $u \in U_{ad}$ genau einen Zustand $y = y(u) \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. U_{ad} ist eine beschränkte Menge in $L^\infty(\Omega)$, damit erst recht beschränkt in $L^r(\Omega)$, $r > N/2$. Wir können o.B.d.A. $r \geq 2$ annehmen, denn die Wahl von $r > N/2$ steht uns frei. Die Abschätzung (4.11) auf S. 153 liefert deshalb eine Konstante M , so dass

$$\|y(u)\|_{C(\bar{\Omega})} \leq M$$

für alle Zustände $y(u)$ gilt, die zu Steuerungen $u \in U_{ad}$ gehören. Das Funktional $J(y, u) = F(y) + Q(u)$ ist wegen Voraussetzung 4.14 nach unten beschränkt. Deshalb existiert

$$j = \inf_{u \in U_{ad}} J(y(u), u).$$

Es sei $\{(y_n, u_n)\}_{n=1}^\infty$ eine Minimalfolge, d.h. $u_n \in U_{ad}$, $y_n = y(u_n)$ und $J(y_n, u_n) \rightarrow j$ für $n \rightarrow \infty$.

Wir fassen U_{ad} jetzt als Teilmenge von $L^r(\Omega)$ auf. Dann ist U_{ad} nichtleer, abgeschlossen, konvex und beschränkt in $L^r(\Omega)$, Übungsaufgabe 4.6. Da $L^r(\Omega)$ ein reflexiver Banachraum ist, sind solche Mengen dieses Raumes nach Satz 2.11 schwach folgenkompakt. Es existiert deshalb eine Teilfolge $\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, die in $L^r(\Omega)$ schwach gegen eine Funktion $\bar{u} \in U_{ad}$ konvergiert. Damit wir am Ende nicht bei einer Dreifach-Indizierung ankommen, bezeichnen wir diese Teilfolge wieder mit $\{u_n\}$, nehmen also

$$u_n \rightharpoonup \bar{u}, \quad n \rightarrow \infty$$

an. Wir haben damit eigentlich schon die optimale Steuerung gefunden. Das ist aber noch zu beweisen! Dazu ist die Konvergenz der Zustandsfolge $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ herzuleiten, was hier nicht so einfach ist wie im linear-quadratischen Fall. Man betrachtet zuerst die Folge

$$z_n(\cdot) = d(\cdot, y_n(\cdot)).$$

Alle Zustände y_n sind in $L^\infty(\Omega)$ durch M beschränkt, erst recht beschränkt in $L^r(\Omega)$. Folglich konvergiert eine Teilfolge $\{z_{n_l}\}_{l=1}^\infty$ schwach gegen ein z in $L^r(\Omega)$. Auch hier nehmen wir wieder an, dass die Folge $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ selbst schwach konvergiert. Wir haben nun

$$-\Delta y_n + y_n = \underbrace{-d(x, y_n) + y_n}_{\rightharpoonup -z} + \underbrace{u_n}_{\rightharpoonup \bar{u}} = R_n.$$

Die rechte Seite R_n strebt schwach in $L^r(\Omega)$ gegen $-z + \bar{u}$. So gesehen löst y_n das lineare Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta y_n + y_n &= R_n \\ \partial_\nu y_n &= 0. \end{aligned}$$

Nach Satz 2.6 auf S. 29 ist die Abbildung $R_n \mapsto y_n$ linear und stetig von $L^2(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$, wegen $r \geq 2$ erst recht von $L^r(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$. Jede lineare stetige Abbildung ist auch schwach stetig. Die schwache Konvergenz der Folge R_n in $L^r(\Omega)$ überträgt sich also auf y_n – diese Folge konvergiert schwach in $H^1(\Omega)$ gegen ein \bar{y} aus $H^1(\Omega)$,

$$y_n \rightharpoonup \bar{y}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Die Funktion \bar{y} ist der Kandidat für den optimalen Zustand. $H^1(\Omega)$ ist nach Satz 7.4 auf S. 277 kompakt eingebettet in $L^2(\Omega)$. In $H^1(\Omega)$ schwach konvergente Folgen sind daher (stark) konvergent in $L^2(\Omega)$, also

$$y_n \rightarrow \bar{y} \in L^2(\Omega), \quad n \rightarrow \infty.$$

Nach dieser etwas umfangreichen Argumentation geht es jetzt schneller. Wir wissen $|y_n(x)| \leq M \quad \forall x \in \bar{\Omega}$. Damit gilt Gleiches für die Grenzfunktion \bar{y} , denn die Menge $\{y \in L^r(\Omega) : \|y\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M\}$ ist konvex und abgeschlossen, daher auch schwach abgeschlossen.

Wegen der Beschränktheit der Folge $\{y_n\}$ in $L^\infty(\Omega)$ gilt nach Lemma 4.11 auf S. 157

$$\|d(\cdot, y_n) - d(\cdot, \bar{y})\|_{L^2(\Omega)} \leq L(M) \|y_n - \bar{y}\|_{L^2(\Omega)}, \quad (4.36)$$

daher $d(\cdot, y_n) \rightarrow d(\cdot, \bar{y})$ in $L^2(\Omega)$. Die Folge $\{u_n\}$ ist auch in $L^2(\Omega)$ schwach konvergent gegen \bar{u} . Jetzt zeigen wir, dass \bar{y} die schwache Lösung zu \bar{u} ist, beide also zusammengehören. Wir haben für beliebiges aber festes $v \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \nabla y_n \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} d(\cdot, y_n) v \, dx = \int_{\Omega} u_n v \, dx.$$

Gehen wir zur Grenze über, so folgt aus $y_n \rightharpoonup \bar{y}$ in $H^1(\Omega)$ die Konvergenz des ersten Integrals, aus $y_n \rightarrow \bar{y}$ in $L^2(\Omega)$ und $\|y_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$ die Konvergenz des zweiten und aus $u_n \rightharpoonup \bar{u}$ in $L^r(\Omega)$ diejenige des dritten, insgesamt nach Grenzübergang

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{y} \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} d(\cdot, \bar{y}) v \, dx = \int_{\Omega} \bar{u} v \, dx.$$

Da v ganz $H^1(\Omega)$ durchlaufen kann, ist \bar{y} die schwache Lösung zu \bar{u} – Fertig? Nein. Jetzt muss noch die Optimalität von \bar{u} bewiesen werden.

Wir können trotz Stetigkeit des Funktional Q nicht aus $u_n \rightharpoonup \bar{u}$ auf $Q(u_n) \rightarrow Q(\bar{u})$ schließen, denn nichtlineare Abbildungen sind nicht notwendig schwach stetig. Aber das Funktional Q ist nicht nur stetig, sondern auch konvex. Nach Satz 2.12 auf S. 37 ist Q deshalb schwach halbstetig nach unten, d.h.

$$u_n \rightharpoonup \bar{u} \quad \Rightarrow \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} Q(u_n) \geq Q(\bar{u}).$$

Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} j &= \lim_{n \rightarrow \infty} J(y_n, u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} Q(u_n) \\ &= F(\bar{y}) + \liminf_{n \rightarrow \infty} Q(u_n) \geq F(\bar{y}) + Q(\bar{u}) = J(\bar{y}, \bar{u}). \end{aligned}$$

Kleiner als das Infimum j kann der Funktionalwert aber nicht sein. Das Paar (\bar{y}, \bar{u}) ergibt deshalb den Wert j , ist also optimal. ■

Analog kann die Existenz optimaler Steuerungen für die homogene Dirichlet-Randbedingung bewiesen werden.

Bemerkungen. Folgende zwei Schlüsse wären im Beweis falsch gewesen:

(i) $y_n \rightharpoonup y \Rightarrow d(\cdot, y_n) \rightarrow d(\cdot, y)$, ohne die starke Konvergenz $y_n \rightarrow y$ zu wissen, denn nichtlineare Abbildungen sind i.a. nicht schwach stetig.

(ii) $y_n \rightarrow y$ in $L^2(\Omega) \Rightarrow d(\cdot, y_n) \rightarrow d(\cdot, y)$, ohne $\|y_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M \quad \forall n$ zu haben.

(iii) Von Voraussetzung (4.14) des Satzes sind die Beschränktheits- und Lipschitzbedingung von φ und ψ nur bis zur Ordnung $k = 0$ zu fordern.

Auf Grund der Nichtlinearität der Zustandsgleichung liegt ein nichtkonvexes Optimierungsproblem in u vor. Daher kann man die Eindeutigkeit der optimalen Steuerung \bar{u} nicht ohne Zusatzannahmen zeigen. Beliebige globale und lokale Minima sind theoretisch möglich. Wie paradox die Situation schon bei einfachen Aufgaben der nichtlinearen Optimierung im Banachraum sein kann, zeigt folgendes Beispiel. Wir werden es später noch weiter diskutieren. Es hat keinen Bezug zur optimalen Steuerung, enthält also keine Differentialgleichung als Nebenbedingung.

Beispiele. (i)

$$\min f(u) := - \int_0^1 \cos(u(x)) dx, \quad 0 \leq u(x) \leq 2\pi, \quad u \in L^\infty(0, 1). \quad (4.37)$$

Offenbar ist -1 der Optimalwert, angenommen durch $\bar{u}(x) \equiv 0$. Aber es gibt noch überabzählbar viele andere globale Lösungen, nämlich alle messbaren Funktionen u , die nur die Werte 0 und 2π annehmen. Die Aufgabe besitzt also unendlich viele verschiedene globale Minima, die noch dazu in der L^2 -Norm beliebig nahe beieinander liegen. In der L^∞ -Norm haben sie voneinander den Abstand 2π .

(ii) Analog liegen die Dinge bei der Aufgabe aus Alt und Malanowski [10],

$$\min \int_0^1 (u^2(x) - 1)^2 dx, \quad |u(x)| \leq 1, \quad u \in L^\infty(0, 1). \quad \diamond$$

Randsteuerung

Die Existenz mindestens einer optimalen Steuerung kann unter Voraussetzung 4.14 vollkommen analog für die später auf Seite 174 definierte Aufgabe (4.50)–(4.52) mit Randsteuerung bewiesen werden.

4.5 Der Steuerungs-Zustands-Operator

Bei allen im Buch behandelten Aufgaben wird der (oder den) Steuerung(en) genau ein Zustand y zugeordnet. Bei linear-quadratischen Problemen hatten wir dem Zustand y den Teil zugeordnet, der im Zielfunktional wirklich auftritt und diesen Su genannt. Von solcher Verfahrensweise gehen wir jetzt ab, weil ganz einfach die Verschiedenheit der auftretenden Räume und Dualräume zu einer sehr technischen Darstellung führen würde. Deshalb betrachten wir nur die eigentliche Abbildung $u \mapsto y$, die wir generell mit G bezeichnen. Der Bildraum von G ist dabei stets $Y = C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$. Wie bisher werden wir oft $y(u)$ für $G(u)$ schreiben. Verwechslungen mit dem Funktionswert $y(x)$ an der Stelle x dürften durch den jeweiligen Kontext ausgeschlossen sein. Wir beginnen die Untersuchung mit einer im Gebiet als Quelle wirkenden Steuerung (verteilte Steuerung).

4.5.1 Verteilte Steuerung

Hier geht es um die Zustandsgleichung (4.32),

$$\begin{array}{rcl} -\Delta y + d(x, y) & = & u \quad \text{in } \Omega \\ \partial_\nu y & = & 0 \quad \text{auf } \Gamma. \end{array}$$

Jeder Steuerung $u \in U := L^r(\Omega)$, $r > N/2$, wird nach Satz 4.8 auf S. 153 genau ein Zustand $y \in Y = H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ zugeordnet, sofern die entsprechenden Voraussetzungen erfüllt sind. Das wollen wir annehmen. Den zugehörigen Steuerungs-Zustands-Operator bezeichnen wir mit $G : U \rightarrow Y$, $G(u) = y$.

Satz 4.16 *Unter Voraussetzung 4.14 auf S. 164 an Ω und d ist die Abbildung G Lipschitz-stetig von $L^r(\Omega)$ nach $H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $r > N/2$: Es existiert eine Konstante $L > 0$, so dass*

$$\|y_1 - y_2\|_{H^1(\Omega)} + \|y_1 - y_2\|_{C(\bar{\Omega})} \leq L \|u_1 - u_2\|_{L^r(\Omega)}$$

für alle $u_i \in L^r(\Omega)$, $i = 1, 2$, und die zugehörigen Zustände $y_i = G(u_i)$ gilt.

Beweis: Nach Satz 4.10 auf S. 155 sind die y_i stetig auf $\bar{\Omega}$. Wir schreiben die Gleichungen für y_1, y_2 auf und ziehen sie voneinander ab,

$$\begin{aligned} -\Delta(y_1 - y_2) + d(x, y_1) - d(x, y_2) &= u_1 - u_2 \\ \partial_\nu(y_1 - y_2) &= 0. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Offenbar gilt

$$\begin{aligned} d(x, y_1(x)) - d(x, y_2(x)) &= - \int_{s=0}^1 \frac{d}{ds} d(x, y_1(x) + s(y_2(x) - y_1(x))) ds \\ &= \int_0^1 d_y(x, y_1(x) + s(y_2(x) - y_1(x))) ds (y_1(x) - y_2(x)). \end{aligned}$$

Das obige Integral stellt eine wegen Monotonie von d nichtnegative Funktion $c_0 = c_0(x)$ aus $L^\infty(\Omega)$ dar, denn d_y, y_1 und y_2 sind stetig. Auf E_d ist der Integrand $d_y(x, y_1(x) + s(y_2(x) - y_1(x)))$ nicht kleiner als $\lambda_d > 0$, also haben wir $c_0(x) \geq \lambda_d$ f.ü. auf E_d . Offenbar hängt c_0 auch von y_1 und y_2 ab, was aber für die weiteren Schlüsse ohne Belang ist. Wir definieren $y = y_1 - y_2$ und $u = u_1 - u_2$. Nach Einsetzen in (4.38) sieht man, dass das so gegebene y gemeinsam mit u das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta y + c_0(x) y &= u \\ \partial_\nu y &= 0 \end{aligned}$$

löst. Wegen $c_0 \geq 0$ ist $c_0(x) y$ in y monoton wachsend. Jetzt wenden wir Satz 4.7 von S. 153 mit obigem c_0 , $d(x, y) = 0$, $f = u$, $g = b = \alpha = 0$ an. Aus (4.11) folgt dann direkt

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} + \|y\|_{C(\bar{\Omega})} \leq L \|u\|_{L^r(\Omega)}$$

für alle u und die zugehörigen y , insbesondere für $u = u_1 - u_2$ und $y = y_1 - y_2$. Das ergibt die zu beweisende Abschätzung. ■

Bemerkung. Im vorhergehenden und im nächsten Satz wird von Voraussetzung 4.14 nur die Beschränktheits- und Lipschitzbedingung der Ordnung $k = 1$ gebraucht.

Als Nächstes interessiert uns die Ableitung des Steuerungs-Zustands-Operators an einer festen Stelle \bar{u} . In den Anwendungen wird \bar{u} eine lokal optimale Steuerung sein.

Satz 4.17 *Unter Voraussetzung 4.14 auf S. 164 ist der Steuerungs-Zustands-Operator G für alle $r > N/2$ Fréchet-differenzierbar von $L^r(\Omega)$ nach $H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Seine Ableitung an der Stelle \bar{u} ist durch*

$$G'(\bar{u})u = y,$$

gegeben, wobei y die schwache Lösung des folgenden, an der Stelle $\bar{y} = G(\bar{u})$ linearisierten Randwertproblems ist:

$$\begin{aligned} -\Delta y + d_y(x, \bar{y})y &= u & \text{in } \Omega \\ \partial_\nu y &= 0 & \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Beweis: Es ist die Darstellung

$$G(\bar{u} + u) - G(\bar{u}) = D u + r(\bar{u}, u)$$

zu zeigen, wobei $D : L^r(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ein linearer stetiger Operator ist und

$$\frac{\|r(\bar{u}, u)\|_{H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})}}{\|u\|_{L^r(\Omega)}} \rightarrow 0 \quad \text{für } \|u\|_{L^r(\Omega)} \rightarrow 0 \quad (4.40)$$

gilt; dabei sei $\|r\|_{H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})} = \|r\|_{H^1(\Omega)} + \|r\|_{C(\bar{\Omega})}$ definiert. Dann folgt $G'(\bar{u}) = D$.

Wir schreiben die Gleichungen für $\bar{y} = y(\bar{u})$ und $\tilde{y} = y(\bar{u} + u)$ auf,

$$\begin{aligned} -\Delta \bar{y} + d(x, \bar{y}) &= \bar{u} & -\Delta \tilde{y} + d(x, \tilde{y}) &= \bar{u} + u \\ \partial_\nu \bar{y} &= 0 & \partial_\nu \tilde{y} &= 0. \end{aligned}$$

Subtraktion ergibt

$$\begin{aligned} -\Delta(\tilde{y} - \bar{y}) + \overbrace{d(x, \tilde{y}) - d(x, \bar{y})}^{=d_y(x, \bar{y})(\tilde{y} - \bar{y}) + r_d} &= u \\ \partial_\nu(\tilde{y} - \bar{y}) &= 0. \end{aligned}$$

Der Nemytskii-Operator $\Phi(y) = d(\cdot, y(\cdot))$ ist nach Lemma 4.12 auf S. 161 Fréchet-differenzierbar von $C(\bar{\Omega})$ in $L^\infty(\Omega)$. Folglich gilt

$$\Phi(\tilde{y}) - \Phi(\bar{y}) = d(\cdot, \tilde{y}(\cdot)) - d(\cdot, \bar{y}(\cdot)) = d_y(\cdot, \bar{y}(\cdot)) (\tilde{y}(\cdot) - \bar{y}(\cdot)) + r_d \quad (4.41)$$

mit einem Rest r_d , der die Eigenschaft $\|r_d\|_{L^\infty(\Omega)} / \|\tilde{y} - \bar{y}\|_{C(\bar{\Omega})} \rightarrow 0$ für $\|\tilde{y} - \bar{y}\|_{C(\bar{\Omega})} \rightarrow 0$ hat. Wir erhalten daraus

$$\tilde{y} - \bar{y} = y + y_\rho$$

mit der Lösung y von (4.39) und einem Rest y_ρ , welcher der Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta y_\rho + d_y(\cdot, \bar{y})y_\rho &= -r_d \\ \partial_\nu y_\rho &= 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

genügt, Übungsaufgabe 4.7. Man beachte wieder $d_y(x, \bar{y}) \geq \lambda_d > 0$ in E_d , so dass diese Gleichung eindeutig lösbar ist. Aus der in Satz 4.16 bewiesenen Lipschitzstetigkeit folgt

$$\|\tilde{y} - \bar{y}\|_{C(\bar{\Omega})} + \|\tilde{y} - \bar{y}\|_{H^1(\Omega)} \leq L \|u\|_{L^r(\Omega)}.$$

Außerdem gilt für r_d

$$\frac{\|r_d\|_{L^\infty(\Omega)}}{\|u\|_{L^r(\Omega)}} = \frac{\|r_d\|_{L^\infty(\Omega)}}{\|\tilde{y} - \bar{y}\|_{C(\bar{\Omega})}} \frac{\|\tilde{y} - \bar{y}\|_{C(\bar{\Omega})}}{\|u\|_{L^r(\Omega)}} \leq \frac{\|r_d\|_{L^\infty(\Omega)}}{\|\tilde{y} - \bar{y}\|_{C(\bar{\Omega})}} L$$

und deshalb $\|r_d\|_{L^\infty(\Omega)} = o(\|u\|_{L^r(\Omega)})$ wegen (4.40). Mit (4.42) haben wir auch

$$\|y_\rho\|_{C(\bar{\Omega})} + \|y_\rho\|_{H^1(\Omega)} = o(\|u\|_{L^r(\Omega)}).$$

Die lineare und stetige Abbildung $u \mapsto y$ sei mit D bezeichnet. Dann ergibt sich insgesamt

$$G(\bar{u} + u) - G(\bar{u}) = \tilde{y} - \bar{y} = D u + y_\rho = D u + r(\bar{u}, u),$$

wobei $r(\bar{u}, u) = y_\rho$ die geforderten Eigenschaften hat. ■

Folgerung. G ist damit erst recht Fréchet-differenzierbar von $L^\infty(\Omega)$ in $H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

4.5.2 Randsteuerung

Hier sind die Verhältnisse ähnlich. Unter Voraussetzung 4.14 auf S. 164 ist G für alle $s > N - 1$ stetig Fréchet-differenzierbar von $U = L^s(\Gamma)$ in $Y = H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Die Ableitung an der Stelle \bar{u} hat die Form

$$G'(\bar{u}) u = y,$$

wobei y die schwache Lösung des bei $\bar{y} = G(\bar{u})$ linearisierten Randwertproblems ist,

$$\begin{aligned} -\Delta y &= 0 \\ \partial_\nu y + b_y(x, \bar{y}) y &= u. \end{aligned}$$

4.6 Notwendige Optimalitätsbedingungen

4.6.1 Verteilte Steuerung

Im Weiteren sei $\bar{u} \in L^\infty(\Omega)$ eine im Sinne der L^∞ -Norm lokal optimale Steuerung der Aufgabe (4.31)–(4.33) von S. 165. Wir leiten die notwendigen Bedingungen erster Ordnung her, die durch \bar{u} und den zugehörigen Zustand \bar{y} zu erfüllen sind. Für y haben wir die Darstellung $y(u) = G(u)$ mit dem Steuerungs-Zustands-Operator $G : L^\infty(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Damit können wir das Zielfunktional wie folgt aufschreiben:

$$J(y, u) = J(G(u), u) = F(G(u)) + Q(u) =: f(u).$$

Zur Definition von F und Q siehe (4.34). Unter Voraussetzung 4.14 ist f ein Fréchet-differenzierbares Funktional in $L^\infty(\Omega)$, denn F , Q und G sind nach Lemma 4.12 auf S. 161 bzw. Satz 4.17 jeweils Fréchet-differenzierbar.

Ist \bar{u} lokal optimal, U_{ad} konvex und $u \in U_{ad}$ beliebig gegeben, dann liegt die konvexe Linearkombination $v := \bar{u} + \lambda(u - \bar{u})$ für alle hinreichend kleinen $\lambda > 0$ in U_{ad} und in der ε -Umgebung von \bar{u} , in der $f(\bar{u}) \leq f(v)$ erfüllt ist. Es gilt also für alle $0 < \lambda \leq \lambda_0$

$$f(\bar{u} + \lambda(u - \bar{u})) \geq f(\bar{u}).$$

Nach Division durch λ und Grenzübergang $\lambda \downarrow 0$ folgt deshalb auch hier die Variationsungleichung von Lemma 2.21 auf S. 50. Auf diese Weise haben wir folgendes Resultat bewiesen:

Lemma 4.18 *Ist Voraussetzung 4.14 von S. 164 erfüllt, so muss jede für (4.31) – (4.33) lokal optimale Steuerung \bar{u} der folgenden Variationsungleichung genügen:*

$$f'(\bar{u})(u - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \quad (4.43)$$

Dieses Lemma gilt für alle im Weiteren auftretenden nichtlinearen Funktionale des Typs $f(u) = J(y(u), u)$. Die Ableitung $f'(\bar{u})$ berechnet man nach der Kettenregel,

$$\begin{aligned} f'(\bar{u})h &= F'(G(\bar{u}))G'(\bar{u})h + Q'(\bar{u})h \\ &= F'(\bar{y})y + Q'(\bar{u})h \\ &= \int_{\Omega} \varphi_y(x, \bar{y}(x))y(x)dx + \int_{\Omega} \psi_u(x, \bar{u}(x))h(x)dx. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Dabei ist $y = G'(\bar{u})h$ gemäß Satz 4.17 die Lösung der linearisierten Aufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta y + d_y(x, \bar{y})y &= h \\ \partial_\nu y &= 0. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Wir definieren den adjungierten Zustand $p \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ als Lösung der *adjungierten Gleichung*

$$\boxed{\begin{aligned} -\Delta p + d_y(x, \bar{y})p &= \varphi_y(x, \bar{y}(x)) && \text{in } \Omega \\ \partial_\nu p &= 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}} \quad (4.46)$$

Lemma 4.19 *Ist y die schwache Lösung von (4.45) zu gegebenem $h \in L^2(\Omega)$ und p der als schwache Lösung von (4.46) definierte adjungierte Zustand, dann gilt*

$$\int_{\Omega} \varphi_y(x, \bar{y}(x))y(x)dx = \int_{\Omega} p(x)h(x)dx.$$

Beweis: Die Aussage folgt aus Lemma 2.31 auf S. 59 mit $a_\Omega(x) = \varphi_y(x, \bar{y}(x))$, $c_0(x) = d_y(x, \bar{y}(x))$ (man beachte $d_y(\cdot, \bar{y}(\cdot)) \neq 0$), $\beta_\Omega = 1$ sowie $a_\Gamma = \alpha = \beta_\Gamma = 0$. ■

Als Folgerung ergibt sich die Formel für die Ableitung des reduzierten Funktionals f in Richtung $h \in L^\infty(\Omega)$,

$$f'(\bar{u})h = \int_{\Omega} (p(x) + \psi_u(x, \bar{u}(x)))h(x)dx. \quad (4.47)$$

Außerdem erhalten wir die gesuchte notwendige Optimalitätsbedingung:

Satz 4.20 *Unter Voraussetzung 4.14 genügt jede lokal optimale Steuerung \bar{u} der Aufgabe (4.31)–(4.33) mit dem durch (4.46) definierten adjungierten Zustand $p \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ der Variationsungleichung*

$$\int_{\Omega} (p(x) + \psi_u(x, \bar{u}(x))) (u(x) - \bar{u}(x)) dx \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \quad (4.48)$$

Wie in Kapitel 2 können wir die Variationsungleichung als Minimumprinzip aufschreiben:

Folgerung. *Ist \bar{u} lokal optimale Steuerung der Aufgabe (4.31)–(4.33), Voraussetzung 4.14 erfüllt und p der zugehörige adjungierte Zustand, dann wird das Minimum in*

$$\min_{u_a(x) \leq v \leq u_b(x)} (p(x) + \psi_u(x, \bar{u}(x))) v \quad (4.49)$$

für fast alle $x \in \Omega$ durch $v = \bar{u}(x)$ angenommen.

Spezialfall: $\psi(x, u) = \frac{\lambda}{2} u^2$ mit $\lambda > 0$.

Diese Funktion ψ erfüllt offenbar unsere Voraussetzungen. Wir haben $\psi_u(x, u) = \lambda u$, also wird das Minimum der Aufgabe

$$\min_{u_a(x) \leq v \leq u_b(x)} (p(x) + \lambda \bar{u}(x)) v$$

für fast alle $x \in \Omega$ durch $v = \bar{u}(x)$ angenommen. Daraus folgt für $\lambda > 0$ wie in (2.58) auf S. 56 für fast alle $x \in \Omega$ die Projektionsbeziehung

$$\bar{u}(x) = \mathbb{P}_{[u_a(x), u_b(x)]} \left\{ -\frac{1}{\lambda} p(x) \right\}.$$

Sind u_a, u_b stetig, so ist auch \bar{u} stetig, denn es gilt $p \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ und der Projektionsoperator bildet stetige Funktionen in stetige ab. Sind u_a und u_b zusätzlich aus $H^1(\Omega)$, so erhalten wir analog $\bar{u} \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Beispiel. Wir diskutieren die Aufgabe „Supraleitung“

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \|y - y_{\Omega}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

bei $-2 \leq u(x) \leq 2$ sowie

$$\begin{aligned} -\Delta y + y + y^3 &= u \\ \partial_{\nu} y &= 0. \end{aligned}$$

Sie ist ein Spezialfall von (4.31)–(4.33) auf S. 165 mit

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} (y - y_{\Omega}(x))^2, \quad \psi(x, u) = \frac{\lambda}{2} u^2, \quad d(x, y) = y + y^3.$$

Setzen wir $y_{\Omega} \in L^{\infty}(\Omega)$ voraus, dann sind alle geforderten Voraussetzungen (Messbarkeit, Beschränktheit, Differenzierbarkeit, Monotonie von d , Konvexität von ψ bezüglich u)

erfüllt. Die Existenz mindestens einer optimalen Steuerung \bar{u} folgt aus Satz 4.15 auf S. 165. Die adjungierte Gleichung für p lautet

$$\begin{aligned} -\Delta p + p + 3\bar{y}^2 p &= \bar{y} - y_\Omega \\ \partial_\nu p &= 0. \end{aligned}$$

Mit deren Lösung $p \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ muss \bar{u} der Variationsungleichung

$$\int_{\Omega} (\lambda \bar{u} + p)(u - \bar{u}) dx \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}$$

genügen. Im Fall $\lambda > 0$ ergibt sich daraus die übliche Projektionsbeziehung und $\bar{u} \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, wenn die Schranken u_a, u_b zu $H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ gehören. Für $\lambda = 0$ folgt $\bar{u}(x) = -2 \operatorname{sign} p(x)$. \diamond

Testbeispiel. Für die Daten $\lambda = 1$ und $y_\Omega = 9$ erfüllt $\bar{u}(x) \equiv 2$ die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung, Übungsaufgabe 4.8. \diamond

Bemerkung. Im obigen Beispiel hätte die Voraussetzung $y_\Omega \in L^r(\Omega)$, $r > N/2$, ausgereicht. Auch dann wäre nach unseren Regularitätssätzen p und deshalb auch die optimale Steuerung \bar{u} stetig, falls $\lambda > 0$. Außerdem werden die Beschränktheits- und Lipschitzbedingung von Voraussetzung 4.14 nur bis zur Ordnung $k = 1$ gebraucht.

4.6.2 Randsteuerung

Wir untersuchen noch die Aufgabe

$$\min J(y, u) := \int_{\Omega} \varphi(x, y(x)) dx + \int_{\Gamma} \psi(x, u(x)) ds(x) \quad (4.50)$$

bei den Nebenbedingungen

$$\boxed{\begin{aligned} -\Delta y + y &= 0 & \text{in } \Omega \\ \partial_\nu y + b(x, y) &= u & \text{auf } \Gamma \end{aligned}} \quad (4.51)$$

sowie

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \quad \text{f.ü. auf } \Gamma. \quad (4.52)$$

Es sei

$$U_{ad} = \{u \in L^\infty(\Gamma) : u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \quad \text{f. ü. auf } \Gamma\}.$$

Der Steuerungs-Zustands-Operator $G : u \mapsto y$ ist unter Voraussetzung 4.14 auf S. 164 eine Abbildung von $L^\infty(\Gamma)$ nach $H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Dies wäre er unter unseren Voraussetzungen auch für $-\Delta$ an Stelle von $-\Delta + I$. Wir werden aber ein Beispiel diskutieren, wo das Fehlen von I in der adjungierten Gleichung im Fall $\bar{y} = 0$ Probleme bereiten würde.

Notwendige Optimalitätsbedingungen für eine lokal optimale Steuerung \bar{u} können analog zum Fall der verteilten Steuerung hergeleitet werden, nur haben jetzt G und G' eine andere Bedeutung. Zunächst ergibt sich die Variationsungleichung

$$\int_{\Omega} \varphi_y(x, \bar{y}(x)) y(x) dx + \int_{\Gamma} \psi_u(x, \bar{u}(x)) (u(x) - \bar{u}(x)) ds(x) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad} \quad (4.53)$$

mit $y = G'(\bar{u})(u - \bar{u})$. Die Ableitung y erhält man analog zu Satz 4.17 auf S. 170 als Lösung des an der Stelle \bar{y} linearisierten Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta y + y &= 0 \\ \partial_\nu y + b_y(x, \bar{y}) y &= u - \bar{u}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Der adjungierte Zustand p wird als Lösung der *adjungierten Gleichung*

$$\boxed{\begin{aligned} -\Delta p + p &= \varphi_y(x, \bar{y}(x)) && \text{in } \Omega \\ \partial_\nu p + b_y(x, \bar{y}) p &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned}} \quad (4.55)$$

definiert. Er gehört dem Raum $H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ an, denn die rechte Seite φ_y ist beschränkt, also aus $L^\infty(\Omega)$. Es würde auch $\varphi_y \in L^r(\Omega)$, $r > N/2$, ausreichen. Aus Lemma 2.31 auf S. 59, angewendet mit $\alpha_\Omega(x) = \varphi_y(x, \bar{y}(x))$, $\alpha(x) = b_y(x, \bar{y}(x))$, $\beta_\Omega = 0$ und $\beta_\Gamma = 1$, folgt

$$\int_\Omega \varphi_y(x, \bar{y}(x)) y(x) dx = \int_\Gamma p(x) (u(x) - \bar{u}(x)) ds(x)$$

für alle $u \in L^2(\Gamma)$. Nach Einsetzen in die Variationsungleichung (4.53) ergibt sich:

Satz 4.21 *Es sei Voraussetzung 4.14 auf S. 164 erfüllt. Ist \bar{u} lokal optimale Steuerung des Randsteuerungsproblems (4.50)–(4.52) und der adjungierte Zustand p durch Gleichung (4.55) definiert, dann muss \bar{u} der folgenden Variationsungleichung genügen:*

$$\int_\Gamma (p(x) + \psi_u(x, \bar{u}(x))) (u(x) - \bar{u}(x)) ds(x) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \quad (4.56)$$

Die Variationsungleichung kann wieder in Form eines punktwisen Minimumprinzips aufgeschrieben werden. Wegen Analogie zum Fall der verteilten Steuerung verzichten wir darauf. Wie bei verteilter Steuerung hat $f(u) = J(G(u), u)$ die Ableitung

$$f'(\bar{u}) u = \int_\Gamma (p(x) + \psi_u(x, \bar{u}(x))) u(x) ds(x). \quad (4.57)$$

Beispiel. Gegeben sei das Randsteuerungsproblem

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2$$

bei

$$\begin{aligned} -\Delta y + y &= 0 \\ \partial_\nu y + y^3|y| &= u \end{aligned}$$

sowie $0 \leq u(x) \leq 1$.

Es ist ein Spezialfall des Randsteuerungsproblems (4.50)–(4.52) mit

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} (y - y_\Omega(x))^2, \quad \psi(x, u) = \frac{\lambda}{2} u^2, \quad b(x, y) = y^3|y|.$$

Die Randbedingung ist eigentlich vom Stefan-Boltzmann-Typ, denn für nichtnegative y gilt $y^3|y| = y^4$. Im Gegensatz zur Funktion y^4 ist aber $y^3|y|$ monoton. Auch hier setzen wir

$y_\Omega \in L^\infty(\Omega)$ voraus. Die geforderten Voraussetzungen (Messbarkeit, Differenzierbarkeit, Monotonie von b , Konvexität von Ψ in u) sind offenbar erfüllt. Deshalb existiert analog zu Satz 4.15 von S. 165 mindestens eine optimale Steuerung \bar{u} .

Die Ableitung von b ist $b'(y) = 4y^2|y|$, wie man leicht nachrechnet. Die adjungierte Gleichung (4.55) lautet deshalb

$$\begin{aligned} -\Delta p + p &= \bar{y} - y_\Omega \\ \partial_\nu p + 4\bar{y}^2|\bar{y}|p &= 0. \end{aligned}$$

Mit deren Lösung p erfüllt \bar{u} für alle u mit $0 \leq u(x) \leq 1$ die Variationsungleichung

$$\int_\Gamma (\lambda \bar{u} + p)(u - \bar{u}) ds \geq 0.$$

4.7 Anwendung des formalen Lagrangeprinzips

Auch bei den nichtkonvexen Problemen, die in diesem Kapitel behandelt werden, leistet das formale Lagrangeprinzip gute Dienste für die Herleitung der Optimalitätsbedingungen. Auf diese Weise gelangt man leicht zum richtigen Ergebnis, das anschließend exakt bewiesen werden kann. Wir wollen das an der folgenden relativ allgemein gehaltenen Aufgabe erläutern:

$$\min J(y, v, u) := \int_\Omega \varphi(x, y(x), v(x)) dx + \int_\Gamma \psi(x, y(x), u(x)) ds(x) \quad (4.58)$$

bei

$$\boxed{\begin{aligned} -\Delta y + d(x, y, v) &= 0 && \text{in } \Omega \\ \partial_\nu y + b(x, y, u) &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned}} \quad (4.59)$$

sowie

$$\begin{aligned} v_a(x) &\leq v(x) \leq v_b(x) && \text{f.ü. in } \Omega \\ u_a(x) &\leq u(x) \leq u_b(x) && \text{f.ü. auf } \Gamma. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Die Zielfunktion enthält auch Randwerte von y , ist also allgemeiner als bisher. Dabei verzichten wir auf die präzise Angabe der Voraussetzungen an die gegebenen Größen, denn die Methode soll ohnehin nur formal erläutert werden. Die Funktionen φ , ψ , d , b müssen in x messbar sein und differenzierbar nach y , u , v . Außerdem benötigen wir mindestens die Monotonie von d und b in y .

Weil die Steuerungen u und v nichtlinear in der Gleichung auftreten, ist ein allgemeiner Existenzbeweis für optimale Steuerungen nicht zu erwarten. Deshalb setzen wir voraus, dass lokal optimale Steuerungen \bar{u} sowie \bar{v} existieren, für die wir die notwendigen Optimalitätsbedingungen herleiten wollen.

Die Mengen der zulässigen Steuerfunktionen bezeichnen wir in Analogie zu den bisherigen Aufgaben mit $V_{ad} \subset L^\infty(\Omega)$ und $U_{ad} \subset L^\infty(\Gamma)$. Die Lagrangefunktion wird formal durch

$$\mathcal{L}(y, v, u, p) = J(y, v, u) - \int_\Omega (-\Delta y + d(\cdot, y, v)) p dx - \int_\Gamma (\partial_\nu y + b(\cdot, y, u)) p ds$$

eingeführt. So ist sie bei Verwendung des Zustandsraums $Y = H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ nicht sauber erklärt, deshalb formen wir sie mit partieller Integration um und definieren

$$\mathcal{L}(y, v, u, p) := J(y, v, u) - \int_{\Omega} (\nabla y \cdot \nabla p + d(\cdot, y, v) p) dx - \int_{\Gamma} b(\cdot, y, u) p ds. \quad (4.61)$$

Dieser Definition liegt die Erwartung zugrunde, dass der Lagrangesche Multiplikator für die Randbedingungen mit den Randwerten des Multiplikators p für die Gleichung identisch sein wird. Deshalb steht in allen Integralen die gleiche Funktion p . Im Zweifelsfalle sollte man für Gleichung und Randbedingung verschiedene Multiplikatoren p_1 und p_2 ansetzen, insbesondere bei Dirichlet-Randsteuerung. Wir erwarten die Existenz einer Funktion $p \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, welche die folgenden Beziehungen erfüllt:

$$\begin{aligned} D_y \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{v}, \bar{u}, p) y &= 0 & \forall y \in H^1(\Omega) \\ D_v \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{v}, \bar{u}, p)(v - \bar{v}) &\geq 0 & \forall v \in V_{ad} \\ D_u \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{v}, \bar{u}, p)(u - \bar{u}) &\geq 0 & \forall u \in U_{ad}. \end{aligned}$$

Die Auswertung dieser Bedingungen wird nur kurz erläutert, weil sie analog zur Arbeitsweise in Kapitel 2 erfolgt. Die erste ergibt

$$\begin{aligned} D_y \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{v}, \bar{u}, p) y &= \int_{\Omega} \varphi_y(\cdot, \bar{y}, \bar{v}) y dx + \int_{\Gamma} \psi_y(\cdot, \bar{y}, \bar{u}) y ds \\ &\quad - \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla p dx - \int_{\Omega} d_y(\cdot, \bar{y}, \bar{v}) y p dx - \int_{\Gamma} b_y(\cdot, \bar{y}, \bar{u}) y p ds = 0 \end{aligned}$$

für alle $y \in H^1(\Omega)$. Das ist die Variationsformulierung für die schwache Lösung p von

$$\boxed{\begin{aligned} -\Delta p + d_y(\cdot, \bar{y}, \bar{v}) p &= \varphi_y(\cdot, \bar{y}, \bar{v}) \\ \partial_{\nu} p + b_y(\cdot, \bar{y}, \bar{u}) p &= \psi_y(\cdot, \bar{y}, \bar{u}), \end{aligned}} \quad (4.62)$$

die wir als *adjungierte Gleichung* definieren. Die Lösung p ist der adjungierte Zustand. Er existiert, wenn $b_y, d_y, \varphi_y, \psi_y$ beschränkt und messbar sind, b_y, d_y nichtnegativ sind und nicht beide identisch verschwinden. Aus der zweiten und dritten Beziehung folgen die Variationsungleichungen

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\varphi_v(\cdot, \bar{y}, \bar{v}) - p d_v(\cdot, \bar{y}, \bar{v})) (v - \bar{v}) dx &\geq 0 & \forall v \in V_{ad} \\ \int_{\Gamma} (\psi_u(\cdot, \bar{y}, \bar{u}) - p b_u(\cdot, \bar{y}, \bar{u})) (u - \bar{u}) ds &\geq 0 & \forall u \in U_{ad}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Die adjungierte Gleichung bildet gemeinsam mit den Variationsungleichungen, den Inklusionen $u \in U_{ad}, v \in V_{ad}$ und der Zustandsgleichung das Optimalitätssystem zum Problem (4.58)–(4.60).

Beispiel. Zur Illustration untersuchen wir die Aufgabe

$$\min J(y, u, v) := \int_{\Omega} [y^2 + y_{\Omega} y + \lambda_1 v^2 + v_{\Omega} v] dx + \int_{\Gamma} \lambda_2 u^8 ds$$

bei

$$\begin{aligned} -\Delta y + y + e^y &= v \\ \partial_{\nu} y + y^4 &= u^4 \end{aligned}$$

sowie

$$-1 \leq v(x) \leq 1, \quad 0 \leq u(x) \leq 1$$

mit gegebenen Funktionen y_Ω , v_Ω aus $L^\infty(\Omega)$. Die Nichtlinearität y^4 vom Stefan-Boltzmann-Typ passt nicht in die allgemeine Theorie, denn y^4 ist nicht monoton. Deshalb ersetzen wir y^4 durch die monotone Funktion $|y|y^3$, die für nichtnegative y mit y^4 zusammenfällt. Dann ist Satz 4.7 auf S. 153 anwendbar und liefert zu jedem Paar zulässiger Steuerungen u, v die Existenz genau eines Zustands $y \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Trotz Auftretens einer nichtlinearen Funktion u^4 in der Randbedingung kann man hier den Beweis mindestens einer optimalen Steuerung erbringen. Man ersetzt u^4 durch eine neue Steuerung \tilde{u} . Dann steht in der Randbedingung \tilde{u} , im Funktional tritt $\lambda_2 \tilde{u}^2$ auf und die Nebenbedingungen werden zu $0 \leq \tilde{u} \leq 1$. Die so transformierte Aufgabe besitzt analog zum Existenzsatz 4.15 auf S. 165 optimale Steuerungen \bar{v} und \tilde{u} , woraus sich für das Ausgangsproblem die optimalen Steuerungen \bar{v} und $\bar{u} = \tilde{u}^{1/4}$ ergeben.

Das Problem ordnet sich wie folgt in die allgemeine Aufgabe (4.58)–(4.60) ein:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, v) &= y^2 + y_\Omega(x) y + v_\Omega(x) v + \lambda_1 v^2, & \psi(x, y, u) &= \lambda_2 u^8, \\ d(x, y, v) &= y + e^y - v, & b(x, y, u) &= |y|y^3 - u^4. \end{aligned}$$

Nur dieser Einordnung wegen haben wir die Beschränktheit von y_Ω und v_Ω vorausgesetzt. Die unten stehenden Optimalitätsbedingungen bleiben offensichtlich auch für quadratisch integrierbare Funktionen y_Ω , v_Ω richtig. Sie lauten für beliebige lokal optimale Steuerungen \bar{v} , \bar{u} :

Adjungierte Gleichung:

$$\begin{aligned} -\Delta p + p + e^{\bar{y}} p &= 2\bar{y} + y_\Omega \\ \partial_\nu p + 4\bar{y}^2 |\bar{y}| p &= 0. \end{aligned}$$

Variationsungleichungen:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (2\lambda_1 \bar{v} + v_\Omega + p)(v - \bar{v}) dx &\geq 0 \quad \forall v \in V_{ad} \\ \int_{\Gamma} (8\lambda_2 \bar{u}^7 + 4\bar{u}^3 p)(u - \bar{u}) ds &\geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \end{aligned}$$

4.8 Pontrjaginsches Maximumprinzip *

4.8.1 Hamiltonfunktionen

Alle bis jetzt hergeleiteten notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung haben in Bezug auf die Steuerungen die Form einer Variationsungleichung. Sie entstanden durch Ableitung der Lagrangefunktion nach der Steuerfunktion.

Das bekannte Pontrjaginsche Maximumprinzip vermeidet die Ableitung nach der Steuerung. Es wurde zuerst für Steuerungsprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen bewiesen, Pontrjagin et al. [173]. Eine Erweiterung auf den Fall semilinearer partieller parabolischer Differentialgleichungen gelang von Wolfersdorf [210, 211] mit der Integralgleichungsmethode. Er wendete eine von Bittner [31] entwickelte allgemeine Technik an.

Allgemeinere Resultate für semilineare elliptische und parabolische Probleme wurden in den folgenden Jahren bewiesen, zuerst durch Bonnans und Casas [32]. Später wurde das

Maximumprinzip auf Zustandsrestriktionen erweitert. Wir verweisen auf Casas [42] sowie Bonnans und Casas [33] bei elliptischen Gleichungen und Casas [46], sowie Raymond und Zidani [176] für parabolische Gleichungen. Außerdem ist das Buch [142] von Li und Yong zu diesem Thema zu nennen.

Wir erläutern das Maximumprinzip exemplarisch für die Aufgabe (4.58)–(4.60),

$$\begin{aligned} \min J(y, u, v) &:= \int_{\Omega} \varphi(x, y, v) dx + \int_{\Gamma} \psi(x, y, u) ds, \\ -\Delta y + d(x, y, v) &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu} y + b(x, y, u) &= 0 \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

sowie $v_a(x) \leq v(x) \leq v_b(x)$ f.ü. in Ω , $u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$ f.ü. auf Γ .

Als Zustandsraum wird $Y = H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ gewählt. Wir gehen von der Lagrangefunktion (4.61) aus. Die Integranden ihrer nicht-differentiellen Terme werden zu Hamilton-Funktionen zusammengefasst, getrennt nach Anteilen auf Ω und Γ .

Definition. Die Funktionen $H^{\Omega} : \Omega \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ und $H^{\Gamma} : \Gamma \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} H^{\Omega}(x, y, v, p_0, p) &= p_0 \varphi(x, y, v) - d(x, y, v) p, \\ H^{\Gamma}(x, y, u, p_0, p) &= p_0 \psi(x, y, u) - b(x, y, u) p, \end{aligned} \quad (4.64)$$

werden als Hamiltonfunktionen bezeichnet.

Die Hamiltonfunktionen sind Funktionen reeller Veränderlicher. Ihre Argumente sind also keine Funktionen, es werden aber Funktionen in sie eingesetzt. Die notwendigen Optimalitätsbedingungen für ein Paar lokal optimaler Steuerungen (\bar{u}, \bar{v}) sind durch (4.62) und (4.63) gegeben. Mit den Hamiltonfunktionen lassen sich diese notwendigen Bedingungen eleganter in folgender Weise ausdrücken: Die adjungierte Gleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} -\Delta p &= D_y H^{\Omega}(x, \bar{y}, \bar{v}, 1, p) \quad \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu} p &= D_y H^{\Gamma}(x, \bar{y}, \bar{u}, 1, p) \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned} \quad (4.65)$$

und die Variationsungleichungen lauten in punktwiser Formulierung

$$\begin{aligned} D_v H^{\Omega}(x, \bar{y}(x), \bar{v}(x), 1, p(x))(v - \bar{v}(x)) &\geq 0 \quad \forall v \in [v_a(x), v_b(x)], \\ D_u H^{\Gamma}(x, \bar{y}(x), \bar{u}(x), 1, p(x))(u - \bar{u}(x)) &\geq 0 \quad \forall u \in [u_a(x), u_b(x)], \end{aligned}$$

jeweils für fast alle $x \in \Omega$ bzw. $x \in \Gamma$. Umstellen nach der Steuerung ergibt *schwache Minimumprinzipien*, beispielsweise

$$\min_{v \in [v_a(x), v_b(x)]} D_v H^{\Omega}(x, \bar{y}(x), \bar{v}(x), 1, p(x)) v = D_v H^{\Omega}(x, \bar{y}(x), \bar{v}(x), 1, p(x)) \bar{v}(x) \quad (4.66)$$

für fast alle $x \in \Omega$. Das Minimum in (4.66) wird also fast überall durch $\bar{v}(x)$ angenommen.

4.8.2 Maximumprinzip

Ist die Hamiltonfunktion H^{Ω} konvex in v , dann ist die schwache Minimumbedingung (4.66) äquivalent zur Minimumbedingung

$$H^{\Omega}(x, \bar{y}(x), \bar{v}(x), 1, p(x)) = \min_{v \in [v_a(x), v_b(x)]} H^{\Omega}(x, \bar{y}(x), v, 1, p(x)) \quad (4.67)$$

für fast alle $x \in \Omega$. Um zu deren *Maximum*-Formulierung zu kommen, multiplizieren wir die Hamiltonfunktion mit -1 und führen mit $q := -p$ den negativen adjungierten Zustand ein. Gemäß (4.65) genügt er der adjungierten Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta q &= D_y H^\Omega(x, \bar{y}, \bar{v}, -1, q) & \text{in } \Omega \\ \partial_\nu q &= D_y H^\Gamma(x, \bar{y}, \bar{u}, -1, q) & \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Aus der Minimumbedingung (4.67) entsteht die Maximumbedingung

$$H^\Omega(x, \bar{y}(x), \bar{v}(x), -1, q(x)) = \max_{v \in [v_a(x), v_b(x)]} H^\Omega(x, \bar{y}(x), v, -1, q(x)) \quad (4.69)$$

für fast alle $x \in \Omega$. Analoges gilt für die Randsteuerung u .

Es ist eine überraschende Tatsache, dass die Maximumbedingung (4.69) unter natürlichen Voraussetzungen auch dann noch erfüllt sein muss, wenn man auf die eben zur Erläuterung geforderte Konvexität verzichtet. Dann ist das Pontrjaginsche Maximumprinzip erfüllt:

Definition. Die Steuerungen $\bar{u} \in U_{ad}$ und $\bar{v} \in V_{ad}$ genügen dem Pontrjaginschen Maximumprinzip, wenn mit $q_0 = -1$ und dem durch (4.68) definierten adjungierten Zustand q die folgenden Maximumbedingungen für fast alle x aus Ω bzw. Γ erfüllt sind:

$$\begin{aligned} H^\Omega(x, \bar{y}(x), \bar{v}(x), q_0, q(x)) &= \max_{v \in [v_a(x), v_b(x)]} H^\Omega(x, \bar{y}(x), v, q_0, q(x)), \\ H^\Gamma(x, \bar{y}(x), \bar{u}(x), q_0, q(x)) &= \max_{u \in [u_a(x), u_b(x)]} H^\Gamma(x, \bar{y}(x), u, q_0, q(x)). \end{aligned} \quad (4.70)$$

Globale Lösungen elliptischer Optimalsteuerungsprobleme müssen dem Pontrjaginschen Maximumprinzip genügen, wenn gewisse natürliche Bedingungen an die Probleme gestellt werden. Das Maximumprinzip hat gegenüber den schwachen Minimumbedingungen den Vorzug, dass es ohne partielle Ableitungen nach den Steuerungen auskommt. Damit lassen sich gegebenenfalls unter mehreren Lösungen von (4.66) diejenigen aussondern, die nicht das Minimum liefern. Außerdem können auch Funktionale zugelassen werden, die nicht differenzierbar nach der Steuerung sind. Die in diesem Kapitel untersuchten Aufgaben mit linear-quadratisch auftretenden Steuerungen erfüllen die Voraussetzungen des Maximumprinzips, so dass optimale Steuerungen dem Pontrjaginschen Maximumprinzip genügen müssen.

Das Maximumprinzip war bei Steuerungsproblemen für partielle Differentialgleichungen bisher vor allem von theoretischem Interesse. Numerische Verfahren benötigen in der Regel Ableitungen nach der Steuerung, weshalb schwache Minimumbedingungen in Form von Variationsungleichungen in der Regel ausreichend sind.

4.9 Ableitungen zweiter Ordnung

Ist F eine Fréchet-differenzierbare Abbildung von einer offenen Menge $\mathcal{U} \subset U$ nach V , so ist $u \mapsto F'(u)$ eine operatorwertige Abbildung von \mathcal{U} nach $Z = \mathcal{L}(U, V)$. Für diese kann man wieder die Frage nach der Differenzierbarkeit stellen.

Definition. Es sei $F : U \supset \mathcal{U} \rightarrow V$ eine Fréchet-differenzierbare Abbildung. Ist die Abbildung $u \mapsto F'(u)$ an der Stelle $u \in \mathcal{U}$ ebenfalls Fréchet-differenzierbar, so heißt

F zweimal Fréchet-differenzierbar an der Stelle u . Als zweite Ableitung bezeichnet man $(F')'(u) =: F''(u)$.

Nach Definition ist $F''(u)$ ein linearer stetiger Operator von U in $Z = \mathcal{L}(U, V)$, also $F''(u) \in \mathcal{L}(U, \mathcal{L}(U, V))$, und damit von der Struktur her schon recht komplex. Zum Glück benötigen wir nicht den Operator F'' selbst, sondern seine Anwendung auf gegebene Elemente. Für jede feste Richtung $u_1 \in U$ ist das Objekt $F''(u)u_1$ schon etwas einfacher, nämlich ein linearer Operator aus $\mathcal{L}(U, V)$. Diesen linearen Operator können wir auf eine andere Richtung $u_2 \in U$ anwenden und erhalten ein Element $(F''(u)u_1)u_2 \in V$. Wir werden es nicht direkt mit der abstrakten Größe $F''(u)$ sondern mit $F''(u)u_1$ oder $(F''(u)u_1)u_2$ zu tun haben und verwenden dabei die Bezeichnungen

$$F''(u)[u_1, u_2] := (F''(u)u_1)u_2, \quad F''(u)v^2 := F''(u)[v, v];$$

$F''(u)[u_1, u_2]$ ist eine symmetrische und in u_1, u_2 stetige Bilinearform, vgl. Cartan [41]. Für zweimal Fréchet-differenzierbare Abbildungen $F : U \rightarrow V$ gilt mit dem Restglied r_2^F zweiter Ordnung der Satz von Taylor

$$F(u+h) = F(u) + F'(u)h + \frac{1}{2}F''(u)h^2 + r_2^F(u, h),$$

vgl. [41]. Das Restglied hat die Eigenschaft

$$\frac{\|r_2^F(u, h)\|_V}{\|h\|_U^2} \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

Analog zu stetiger Differenzierbarkeit heißt F zweimal stetig Fréchet-differenzierbar, wenn die Abbildung $u \mapsto F''(u)$ stetig ist, also aus $\|u - \bar{u}\|_U \rightarrow 0$ die Beziehung

$$\|F''(u) - F''(\bar{u})\|_{\mathcal{L}(U, \mathcal{L}(U, V))} \rightarrow 0$$

folgt. Wie kann man solche Normen ausrechnen bzw. abschätzen? Zum Beispiel durch die Betrachtung der entsprechenden Bilinearform. Nach Definition gilt nämlich

$$\begin{aligned} \|F''(u)\|_{\mathcal{L}(U, \mathcal{L}(U, V))} &= \sup_{\|u_1\|_U=1} \|F''(u)u_1\|_{\mathcal{L}(U, V)} \\ &= \sup_{\|u_1\|_U=1} \left(\sup_{\|u_2\|_U=1} \|(F''(u)u_1)u_2\|_V \right) \end{aligned}$$

und mit der oben eingeführten Bezeichnungsweise

$$\|F''(u)\|_{\mathcal{L}(U, \mathcal{L}(U, V))} = \sup_{\|u_1\|_U=1, \|u_2\|_U=1} \|F''(u)[u_1, u_2]\|_V. \quad (4.71)$$

Die Äquivalenz zwischen $F''(u)$ und der Bilinearform $F''(u)[\cdot, \cdot]$ wird z.B. in [41], [118] oder [214] behandelt.

Berechnung von $F''(u)$

An Stelle von $F''(u)$ arbeiten wir mit der zugeordneten Bilinearform und bestimmen deshalb zuerst für beliebiges aber festes $u_1 \in U$ die Richtungsableitung $F'(u)u_1$. Danach

setzen wir $\tilde{F}(u) = F'(u)u_1$. \tilde{F} ist eine Abbildung von U in V . Für diese ergibt sich die Richtungsableitung $\tilde{F}'(u)u_2$,

$$\begin{aligned}\tilde{F}'(u)u_2 &= \frac{d}{dt}\tilde{F}(u + t u_2)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(F'(u + t u_2)u_1)|_{t=0} \\ &= (F''(u + t u_2)u_1)u_2|_{t=0} = (F''(u)u_1)u_2 \\ &= F''(u)[u_1, u_2].\end{aligned}$$

Nach dieser Prozedur steht die gesuchte Bilinearform da.

Beispiel. Wir führen das (zunächst formal) für den Nemytskii-Operator

$$\Phi(y) = \varphi(\cdot, y(\cdot))$$

vor, und zwar im Raum $Y = L^\infty(E)$. Die Existenz der Ableitung Φ'' wird stillschweigend vorausgesetzt. Sie folgt aus Satz 4.22, dessen Voraussetzungen wir schon hier fordern. Die erste Ableitung kennen wir schon, denn nach Lemma 4.12 auf S. 161 gilt

$$(\Phi'(y)y_1)(x) = \varphi_y(x, y(x)) y_1(x).$$

Wir setzen nun

$$\tilde{\varphi}(x, y) := \varphi_y(x, y) y_1(x)$$

und definieren einen neuen Nemytskii-Operator durch

$$\tilde{\Phi}(y) = \tilde{\varphi}(\cdot, y(\cdot)).$$

Die Funktion $\tilde{\varphi}$ erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 4.12, also ist $\tilde{\Phi}$ differenzierbar. Die Ableitung in Richtung y_2 ist

$$(\tilde{\Phi}'(y)y_2)(x) = \tilde{\varphi}_y(x, y(x)) y_2(x) = \varphi_{yy}(x, y(x)) y_1(x) y_2(x),$$

also insgesamt

$$(\Phi''(y)[y_1, y_2])(x) = \varphi_{yy}(x, y(x)) y_1(x) y_2(x). \quad \diamond$$

Wir haben in der Tat eine Fréchet-Ableitung zweiter Ordnung berechnet, wie der nächste Satz zeigt. Mit der eben erhaltenen Darstellung kann die zweite Ableitung $\Phi''(y)$, ein recht abstraktes Objekt, mit der reellen Funktion $\varphi_{yy}(x, y(x))$ identifiziert werden. Es zeigt sich, dass die Normen beider Größen übereinstimmen:

$$\begin{aligned}\|\Phi''(y)\|_{\mathcal{L}(L^\infty(E), \mathcal{L}(L^\infty(E)))} &= \sup_{\|y_1\|_{L^\infty(E)} = \|y_2\|_{L^\infty(E)} = 1} \|\Phi''(y)[y_1, y_2]\|_{L^\infty(E)} \\ &= \sup_{\|y_1\|_{L^\infty(E)} = \|y_2\|_{L^\infty(E)} = 1} \|\varphi_{yy}(\cdot, y) y_1 y_2\|_{L^\infty(E)} \\ &= \|\varphi_{yy}(\cdot, y)\|_{L^\infty(E)}.\end{aligned} \quad (4.72)$$

Satz 4.22 Die Funktion $\varphi = \varphi(x, y) : E \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei für alle $y \in \mathbb{R}$ messbar in $x \in E$ und für fast alle $x \in E$ zweimal partiell nach y differenzierbar. Sie genüge der Beschränktheits- und lokalen Lipschitzbedingung (4.24)–(4.25) auf S. 158 mit der Ordnung $k = 2$. Dann ist der von φ erzeugte Nemytskii-Operator Φ zweimal stetig Fréchet-differenzierbar in $L^\infty(E)$ und die zweite Ableitung hat folgende Form:

$$(\Phi''(y)[y_1, y_2])(x) = \varphi_{yy}(x, y(x)) y_1(x) y_2(x).$$

Beweis: (i) Wir haben drei Dinge zu beweisen: Erstens, dass die im Satz angegebene Bildungsvorschrift für Φ'' wirklich die erste Ableitung von Φ' darstellt, also

$$\frac{\|\Phi'(y+h) - \Phi'(y) - \Phi''(y)h\|_{\mathcal{L}(L^\infty(E))}}{\|h\|_{L^\infty(E)}} \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0. \quad (4.73)$$

Dazu muss zweitens geklärt sein, dass $\Phi''(y)h$ ein linearer Operator aus $\mathcal{L}(L^\infty(E))$ ist und die lineare Abbildung $h \mapsto \Phi''(y)h$ beschränkt ist. Drittens muss die Abbildung $y \mapsto \Phi''(y)$ stetig sein. Wir verwenden von Anfang an die Bezeichnung Φ'' , auch wenn sie erst am Ende gerechtfertigt ist.

Zum Beweis seien $y \in L^\infty(E)$ und $h \in L^\infty(E)$ gegeben. Es ist klar, wie der lineare Operator $A = \Phi''(y)h$ zu definieren ist, als Multiplikationsoperator durch $k \mapsto Ak$,

$$(Ak)(x) = (\varphi_{yy}(x, y(x))h(x))k(x).$$

A gehört zu den fest vorgegebenen Funktionen y und h , wird durch die beschränkte und messbare Funktion $\varphi_{yy}(x, y(x))h(x)$ erzeugt und ist offenbar ein linearer stetiger Operator in $L^\infty(E)$. Der besseren Übersichtlichkeit halber schreiben wir die Korrespondenzen zwischen den abstrakten Operatoren und ihren erzeugenden Funktionen auf.

$$\begin{array}{llll} \Phi''(y) & \sim & \varphi_{yy}(x, y(x)) & \in \mathcal{L}(L^\infty(E), \mathcal{L}(L^\infty(E))), \\ \Phi''(y)h & \sim & \varphi_{yy}(x, y(x))h(x) & \sim A \in \mathcal{L}(L^\infty(E)), \\ \Phi''(y)[h, k] & \sim & \varphi_{yy}(x, y(x))h(x)k(x) & \sim Ak \in L^\infty(E). \end{array}$$

(ii) Die Abbildung $\Phi''(y) : h \mapsto \Phi''(y)h =: A$ ist linear und beschränkt von $L^\infty(E)$ in $\mathcal{L}(L^\infty(E))$. Die Linearität ist klar, Beschränktheit folgt mit Formel (4.72): Die Funktion $\varphi_{yy}(\cdot, y(\cdot))$ ist beschränkt und messbar, deshalb ist die letzte Norm in (4.72) endlich. Folglich ist $\Phi''(y)$ für festes y ein linearer beschränkter und deshalb stetiger Operator.

(iii) Nachweis von (4.73): Für den Zähler erhalten wir nach Einsetzen der konkreten Bildungsvorschriften

$$\begin{aligned} & \|\Phi'(y+h) - \Phi'(y) - \Phi''(y)h\|_{\mathcal{L}(L^\infty(E))} = \\ &= \sup_{\|k\|_{L^\infty(E)}=1} \|(\varphi_y(\cdot, y+h) - \varphi_y(\cdot, y) - \varphi_{yy}(\cdot, y)h)k\|_{L^\infty(E)} \\ &= \|\varphi_y(\cdot, y+h) - \varphi_y(\cdot, y) - \varphi_{yy}(\cdot, y)h\|_{L^\infty(E)}. \end{aligned}$$

Die Funktion $\tilde{\varphi}(x, y) := \varphi_y(x, y)$ erzeugt einen Fréchet-differenzierbaren Nemytskii-Operator mit einer durch $\tilde{\varphi}_y(x, y) = \varphi_{yy}(x, y)$ erzeugten Ableitung. Daher gilt

$$\frac{\|\varphi_y(\cdot, y+h) - \varphi_y(\cdot, y) - \varphi_{yy}(\cdot, y)h\|_{L^\infty(E)}}{\|h\|_{L^\infty(E)}} \rightarrow 0 \quad \text{für } \|h\|_{L^\infty(E)} \rightarrow 0.$$

Daraus folgt (4.73) nach Division der obigen Gleichungskette durch $\|h\|_{L^\infty(E)}$.

(iv) Stetigkeit von $y \mapsto \Phi''(y)$: Analog zu den bisherigen Schlüssen erhalten wir

$$\begin{aligned} \|\Phi''(y_1) - \Phi''(y_2)\|_{\mathcal{L}(L^\infty(E), \mathcal{L}(L^\infty(E)))} &= \|\varphi_{yy}(\cdot, y_1) - \varphi_{yy}(\cdot, y_2)\|_{L^\infty(E)} \\ &\leq L(M) \|y_1 - y_2\|_{L^\infty(E)}, \end{aligned}$$

für $\max\{\|y_1\|_{L^\infty(E)}, \|y_2\|_{L^\infty(E)}\} \leq M$. Das ist die gesuchte Stetigkeit. Wir haben sogar lokale Lipschitzstetigkeit von Φ'' gezeigt. ■

Ableitungen zweiter Ordnung in anderen L^p -Räumen

Die zweite Ableitung von $\Phi : L^p(E) \rightarrow L^q(E)$ existiert für $1 \leq q < p < \infty$, wenn $y(\cdot) \mapsto \varphi_{yy}(\cdot, y(\cdot))$ eine Abbildung von $L^p(E)$ nach $L^r(E)$ darstellt mit

$$r = \frac{pq}{p-2q}, \quad (4.74)$$

siehe [78]. In diesem Fall gilt

$$(\Phi''(y)[h_1, h_2])(x) = \varphi_{yy}(x, y(x)) h_1(x) h_2(x).$$

Die Beziehung (4.74) leuchtet ein, denn für h_1, h_2 aus $L^p(E)$ liegt das Produkt $h = h_1 h_2$ in $L^{\frac{p}{2}}(E)$. Aus der Sicht der Ableitung erster Ordnung mit Zuwachs h (vgl. Formel 4.29 auf S. 163) muss deshalb die Funktion φ_{yy} nach $L^r(E)$ abbilden mit

$$r = \frac{\frac{p}{2}q}{\frac{p}{2} - q} = \frac{pq}{p-2q}.$$

Beispiel. Wir betrachten den Sinus-Operator $y(\cdot) \mapsto \sin(y(\cdot))$. Dieser bildet jeden Raum $L^p(E)$ in $L^q(E)$ ab für $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Gleiches gilt für $y(\cdot) \mapsto \cos(y(\cdot))$. Für die Differenzierbarkeit des Sinus-Operators von $L^p(E)$ nach $L^q(E)$ ist die Forderung $1 \leq q < p$ hinreichend, denn in diesem Falle gilt $r = pq/(p-q) < \infty$ und es ist klar, dass der Cosinus-Operator von L^p nach $L^r(E)$ abbildet. Für die Existenz der zweiten Ableitung braucht man analog $q < p/2$. \diamond

4.10 Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung

4.10.1 Grundideen hinreichender Optimalitätsbedingungen

Bei den konvexen Aufgaben aus Kapitel 2 und 3 ist jede die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung erfüllende Steuerung automatisch (global) optimal, denn bei Konvexität sind die notwendigen Bedingungen auch hinreichend für Optimalität. Im nichtkonvexen Fall zieht man Ableitungen höherer Ordnung zu Rate, um auf lokale Optimalität zu schließen.

Eine Funktion f von n reellen Veränderlichen hat an der Stelle $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ ein lokales Minimum, wenn zusätzlich zu $f'(\bar{u}) = 0$ die Hesse-Matrix $f''(\bar{u})$ positiv definit ist. Positive Definitheit ist äquivalent zur Existenz eines $\delta > 0$ mit

$$h^\top f''(\bar{u}) h \geq \delta |h|^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Das ist in unendlichdimensionalen Räumen ähnlich, aber die Theorie ist interessanter. Zur Einführung in die Problematik beweisen wir einen einfachen Satz, der im Funktionenraum oft nicht angewendet werden kann, weil seine Voraussetzungen in den gegebenen Räumen nicht erfüllbar sind. Außerdem ist die darin für *alle* $h \in U$ geforderte Beziehung (4.75) in der Regel zu stark, man kann sie abschwächen.

Satz 4.23 *Es sei U ein Banachraum, $C \subset U$ eine konvexe Menge und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ein Funktional, das in einer Umgebung des Punktes $\bar{u} \in C$ zweimal stetig Fréchet-differenzierbar ist. Die Steuerung \bar{u} genüge der notwendigen Bedingung erster Ordnung*

$$f'(\bar{u})(u - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u \in C$$

und es existiere ein $\delta > 0$, so dass

$$f''(\bar{u})[h, h] \geq \delta \|h\|_U^2 \quad (4.75)$$

für alle $h \in U$ erfüllt ist. Dann existieren Konstanten $\varepsilon > 0$ und $\sigma > 0$, so dass die quadratische Wachstumsbedingung

$$f(u) \geq f(\bar{u}) + \sigma \|u - \bar{u}\|_U^2$$

für alle $u \in C$ mit $\|u - \bar{u}\|_U \leq \varepsilon$ gilt. Folglich liegt an der Stelle \bar{u} ein lokales Minimum von f in der Menge C vor.

Beweis: Der Beweis unterscheidet sich nicht von dem im endlichdimensionalen Raum. Wir verwenden die vereinbarte Kurzschreibweise $f''(\bar{u})h^2 := f''(\bar{u})[h, h]$. Mit der reellen Funktion $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(s) := f(\bar{u} + s(u - \bar{u}))$, haben wir $f(u) = F(1)$ und $f(\bar{u}) = F(0)$. Aus der Taylorentwicklung

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(\theta), \quad \theta \in (0, 1), \quad (4.76)$$

erhält man

$$\begin{aligned} f(u) &= f(\bar{u}) + f'(\bar{u})(u - \bar{u}) + \frac{1}{2}f''(\bar{u} + \theta(u - \bar{u}))(u - \bar{u})^2 \\ &\geq f(\bar{u}) + \frac{1}{2}f''(\bar{u} + \theta(u - \bar{u}))(u - \bar{u})^2 \\ &= f(\bar{u}) + \frac{1}{2}f''(\bar{u})(u - \bar{u})^2 + \frac{1}{2}[f''(\bar{u} + \theta(u - \bar{u})) - f''(\bar{u})](u - \bar{u})^2. \end{aligned}$$

Mit $h = u - \bar{u}$ folgt aus (4.75) die Ungleichung $f''(\bar{u})(u - \bar{u})^2 \geq \delta \|u - \bar{u}\|_U^2$. Den Betrag des letzten Ausdrucks der obigen Ungleichungskette können wir nach oben mit $\delta/4 \|u - \bar{u}\|_U^2$ abschätzen, wenn $\|u - \bar{u}\|_U$ genügend klein ist, d.h. $\|u - \bar{u}\|_U \leq \varepsilon$. Das liegt an der vorausgesetzten Stetigkeit der zweiten Ableitung von f . Insgesamt erhalten wir

$$f(u) \geq f(\bar{u}) + \frac{\delta}{2} \|u - \bar{u}\|_U^2 - \frac{\delta}{4} \|u - \bar{u}\|_U^2 \geq f(\bar{u}) + \frac{\delta}{4} \|u - \bar{u}\|_U^2$$

und die Aussage des Satzes ergibt sich mit $\sigma = \delta/4$. ■

Auf Optimalsteuerungsprobleme mit semilinearen partiellen Differentialgleichungen wird der Satz insbesondere dann anwendbar sein, wenn die Steuerungs-Zustands-Abbildung G zweimal stetig differenzierbar von L^2 in den Zustandsraum ist und die Steuerung nur linear bzw. quadratisch im Zielfunktional sowie nur linear in der Differentialgleichung vorkommt. Bildet G von L^2 in $C(\bar{\Omega})$ bzw. $C(\bar{Q})$ ab, dann kann man diesen einfachen Fall erwarten, siehe Abschnitt 4.10.6 bzw. 5.7.4.

Beispiel. Wir betrachten die Aufgabe

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

bei

$$\begin{aligned} -\Delta y + e^y &= u \\ y|_\Gamma &= 0 \end{aligned}$$

sowie

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \quad \text{f.ü. in } \Omega.$$

Das Ortsgebiet Ω habe die Dimension $N \leq 3$ und es seien Funktionen $u_a, u_b \in L^\infty(\Omega)$ sowie $y_\Omega \in L^2(\Omega)$ gegeben. Wir haben $2 > N/2 = 3/2$ und können ausnutzen, dass $\mathcal{A} = -\Delta$ in $H_0^1(\Omega)$ koerziv ist. Deshalb bleibt die Aussage von Satz 4.10 auf S. 155 für diese Randwertaufgabe mit homogener Dirichletscher Randbedingung richtig (vgl. aber das Gegenbeispiel auf S. 154 mit Neumannscher Randbedingung). Die Abbildung $G : u \mapsto y$ ist folglich zweimal stetig Fréchet-differenzierbar von $L^2(\Omega)$ nach $C(\bar{\Omega})$. Deshalb ist das reduzierte Funktional $f : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(u) := \frac{1}{2} \|G(u) - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

ebenfalls zweimal stetig differenzierbar. Wir definieren die Lagrangefunktion $\mathcal{L} : (H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})) \times L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ wie in (4.61) auf S. 177 durch

$$\mathcal{L}(y, u, p) = J(y, u) - \int_{\Omega} (\nabla y \cdot \nabla p + e^y - u) p \, dx.$$

Auch \mathcal{L} ist zweimal stetig differenzierbar. Es sei nun \bar{u} eine Steuerung, die gemeinsam mit dem Zustand $\bar{y} = G(\bar{u})$ und dem adjungierten Zustand p die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung für obige Aufgabe erfüllt.

In Satz 4.25 beweisen wir die Darstellung

$$f''(\bar{u})[h_1, h_2] = \mathcal{L}''(\bar{y}, \bar{u}, p)[(y_1, h_1), (y_2, h_2)], \quad (4.77)$$

wobei y_i , $i = 1, 2$, die zu $h = h_i$ gehörigen Lösungen folgender, an der Stelle \bar{y} linearisierten Gleichung sind:

$$\begin{aligned} -\Delta y + e^{\bar{y}} y &= h \\ y|_{\Gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Genügt das Tripel (\bar{y}, \bar{u}, p) zusätzlich mit einem $\delta > 0$ der *hinreichenden Bedingung zweiter Ordnung*

$$\mathcal{L}''(\bar{y}, \bar{u}, p)(y, h)^2 \geq \delta \|h\|^2$$

für alle $h \in L^2(\Omega)$ und die zugehörigen Lösungen y von (4.78), dann folgt aus dem letzten Satz und (4.77) die lokale Optimalität von \bar{u} im Sinne von $L^2(\Omega)$. \diamond

Die Bedingung (4.77) wurde für alle h aus $L^2(\Omega)$ vorausgesetzt, eine eigentlich zu starke Forderung. Wir wissen zum Beispiel $h(x) = u(x) - \bar{u}(x) \geq 0$ für fast alle x mit $\bar{u}(x) = u_a(x)$ und analog $h(x) \leq 0$ für fast alle x mit $\bar{u}(x) = u_b(x)$. Solche Vorzeichenbedingungen verkleinern die Menge der zulässigen Richtungen h , für die man (4.77) fordern muss. Noch stärker kann man die Menge der zu betrachtenden Richtungen h durch *stark aktive Restriktionen* einschränken. Die in Abschnitt 4.10.5 behandelte Aufgabe

$$\min_{u \in [-1, 1]} -u^2$$

zeigt das auf einfache Weise.

Die Auswahl der zulässigen Richtungen h beeinflusst nur die Stärke der hinreichenden Bedingung zweiter Ordnung, nicht deren generelle Anwendbarkeit. Gravierender sind

Regularitätsaspekte der partiellen Differentialgleichung, denn sie setzen der einfachen L^2 -Technik enge Grenzen: Im betrachteten Beispiel konnten wir ein dreidimensionales Ortsgebiet zulassen. Für eine Randsteuerung müssten wir bei sonst gleicher Konstellation schon $N \leq 2$ fordern. Bei vergleichbaren parabolischen Aufgaben kommen nur verteilte Steuerungen mit $N = 1$ in Frage, während der Fall der Randsteuerung nicht im Raum L^2 behandelbar ist.

Ursachen dieser Schwierigkeiten werden im nächsten Abschnitt erläutert. Später behandeln wir eine Zwei-Norm-Technik zur Überwindung der erwähnten Probleme.

4.10.2 Die Zwei-Norm-Diskrepanz

Das folgende Beispiel zeigt, dass die sorglose Verwendung von Satz 4.23 im Unendlich-dimensionalen leicht zu Fehlschlüssen führt. Hier ist keine Differentialgleichung gegeben, aber die Funktion u kommt nichtquadratisch im Zielfunktional vor.

(Gegen)Beispiel. Wir betrachten die bereits diskutierte Aufgabe (4.37),

$$\min_{0 \leq u(x) \leq 2\pi} f(u) := - \int_0^1 \cos(u(x)) dx.$$

Aus naheliegenden Gründen wählen wir den Hilbertraum $U = L^2(0, 1)$ für unsere Steuerungen aus, denn das Arbeiten in Hilberträumen ist in der Regel am einfachsten. Die Menge C ist gegeben durch $C = \{u \in U : 0 \leq u(x) \leq 2\pi, \text{ f.ü. in } [0, 1]\}$. Eine globale Lösung der Aufgabe kennen wir, $\bar{u} \equiv 0$. Testen wir, ob die Optimalitätsbedingungen für \bar{u} erfüllt sind, zuerst die notwendige Bedingung erster Ordnung:

$$f'(\bar{u})(u - \bar{u}) = \int_0^1 \sin(\bar{u}(x)) (u(x) - \bar{u}(x)) dx = \int_0^1 \sin(0) u(x) dx = 0.$$

Sie ist trivial erfüllt. Wir prüfen noch nach, ob \bar{u} auch der hinreichenden Bedingung zweiter Ordnung genügt. Wir erhalten nach formaler Rechnung

$$f''(\bar{u})u^2 = \int_0^1 \cos(0) u^2(x) dx = 1 \cdot \int_0^1 u^2(x) dx = 1 \cdot \|u\|_{L^2(0,1)}^2$$

für alle $u \in L^2(0, 1)$. Die Bedingung ist mit $\delta = 1$ erfüllt. Nach Satz 4.23 muss deshalb eine Konstante $\sigma > 0$ existieren, so dass $f(u) \geq f(\bar{u}) + \sigma \|u - \bar{u}\|_{L^2(0,1)}^2$ für alle $u \in C$ gilt, die in der L^2 -Norm hinreichend nahe an $\bar{u} \equiv 0$ liegen.

Das kann aber nicht stimmen! Für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ ist auch die Funktion

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} 2\pi & 0 \leq x \leq \varepsilon \\ 0 & \varepsilon < x \leq 1 \end{cases}$$

global optimal, denn auch sie liefert das globale Minimum -1 . Für $\varepsilon \downarrow 0$ strebt u_ε in der L^2 -Norm gegen \bar{u} , denn

$$\|u_\varepsilon - \bar{u}\|_{L^2(0,1)} = \left(\int_0^1 u_\varepsilon^2(x) dx \right)^{1/2} = \left(\int_0^\varepsilon (2\pi)^2 dx \right)^{1/2} = 2\pi\sqrt{\varepsilon}.$$

Laut quadratischer Wachstumsbedingung müsste dann $f(u_\varepsilon)$ für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ größer als $f(\bar{u}) = -1$ sein und das steht im Widerspruch zu $f(u_\varepsilon) = -1$.

Wo liegt der Fehler? Er liegt in der stillschweigend verwendeten Annahme, dass unser Cosinus-Funktional f im Raum $L^2(0, 1)$ zweimal stetig Fréchet-differenzierbar ist. Wir erläutern das unten an der Stelle $u = 0$. Für den allgemeinen Fall soll dies in Übungsaufgabe 4.9 gezeigt werden. \diamond

Wählt man aber für U an Stelle von $L^2(0, 1)$ den Banachraum $L^\infty(0, 1)$, dann ist f zweimal stetig Fréchet-differenzierbar! Hier liegt ein typisches Beispiel für die bekannte *Zwei-Norm-Diskrepanz* vor: Im Raum $L^2(0, 1)$ erfüllt f nicht die nötige Differenzierbarkeitsforderung, aber es liegt positive Definitheit von $f''(\bar{u})$ vor,

$$f''(\bar{u}) u^2 \geq \delta \|u\|_{L^2(0,1)}^2.$$

Im Gegensatz dazu existiert die zweite Ableitung im Raum $L^\infty(0, 1)$ und ist dort stetig, während es kein $\delta > 0$ geben kann, so dass $f''(\bar{u}) u^2 \geq \delta \|u\|_{L^\infty(0,1)}^2$ für alle $u \in L^\infty(0, 1)$ gilt. Ist hier also keine hinreichende Bedingung zweiter Ordnung erfüllbar? Doch! Der von Ioffe [111] gefundene Ausweg besteht darin, mit zwei verschiedenen Normen zu arbeiten.

Wir untersuchen deshalb das Restglied zweiter Ordnung der Taylor-Entwicklung von f im Raum $L^\infty(0, 1)$: Aus der bekannten Entwicklung des Cosinus an der Stelle der reellen Zahl $u = u(x)$ erhalten wir für festes x mit dem Restglied in Integralform für reelle Funktionen, vgl. Heuser [102], Gleichung (168.6),

$$\begin{aligned} f(u+h) &= - \int_0^1 \cos(u(x) + h(x)) dx = \int_0^1 \left[-\cos(u(x)) + \sin(u(x)) h(x) \right. \\ &\quad \left. + \int_{s=0}^1 (1-s) \cos(u(x) + s h(x)) h^2(x) ds \right] dx. \end{aligned}$$

Andererseits gilt nach Definition der Fréchet-Ableitung

$$f(u+h) = \int_0^1 \left[-\cos(u(x)) + \sin(u(x)) h(x) + \frac{1}{2} \cos(u(x)) h^2(x) \right] dx + r_2^f(u, h),$$

wobei $r_2^f(u, h)$ das Restglied zweiter Ordnung von f an der Stelle u in Richtung h ist. Nach Gleichsetzen der Ausdrücke für $f(u+h)$ folgt

$$r_2^f(u, h) = \int_0^1 \int_0^1 (1-s) [\cos(u(x) + s h(x)) - \cos(u(x))] h^2(x) ds dx. \quad (4.79)$$

Diese Darstellung ist ein Spezialfall des allgemeinen Taylorschen Satzes mit integralem Restglied; Cartan [41], Thm. 5.6.1.

Die Verwendung des Restglieds in Integralform empfiehlt sich gegenüber der einfacheren Lagrangeschen Form. So wird die Diskussion der Messbarkeit einer Zwischenstelle θ als Funktion von x vermieden, wie sie z.B. in der Entwicklung

$$\cos(u(x) + h(x)) = \cos(u(x)) - \sin(u(x) + \theta(x)h(x)) h(x)$$

auftritt.

Beispiel. An dieser Stelle schieben wir den Nachweis ein, dass f im Raum $L^2(0, 1)$ insbesondere im Nullpunkt nicht zweimal Fréchet-differenzierbar ist. Dazu berechnen wir $r_2^f(0, h)$ wie auf S. 159 für den Zuwachs

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{auf } [0, \varepsilon] \\ 0 & \text{auf } (\varepsilon, 1] \end{cases}$$

und vollziehen den Grenzübergang $\varepsilon \downarrow 0$. Es folgt

$$r_2^f(0, h) = \int_{x=0}^{\varepsilon} \int_{s=0}^1 (1-s) (\cos(0+s) - \cos(0)) 1^2 ds dx = \varepsilon \left(\frac{1}{2} - \cos(1) \right) = \varepsilon c$$

mit $c \neq 0$ und deshalb

$$\frac{r_2^f(0, h)}{\|h\|_{L^2(0,1)}^2} = \varepsilon c \left\{ \int_0^{\varepsilon} 1^2 dx \right\}^{-1} = c.$$

Dieser Ausdruck strebt für $\varepsilon \downarrow 0$ nicht gegen null, obwohl dabei $\|h\|_{L^2(0,1)}$ verschwindet. Damit ist das Cosinus-Funktional an der Stelle null in $L^2(0,1)$ nicht zweimal Fréchet-differenzierbar. \diamond

Zur Überwindung der Zwei-Norm-Diskrepanz wird $r_2^f(u, h)$ wie folgt abgeschätzt:

$$\begin{aligned} |r_2^f(u, h)| &\leq \int_0^1 \int_0^1 (1-s)s |h(x)| h^2(x) ds dx \\ &\leq \frac{1}{6} \|h\|_{L^\infty(0,1)} \int_0^1 h^2(x) dx = \frac{1}{6} \|h\|_{L^\infty(0,1)} \|h\|_{L^2(0,1)}^2. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Folgerung. *Das Restglied zweiter Ordnung des Cosinus-Funktionals erfüllt*

$$\boxed{\frac{|r_2^f(u, h)|}{\|h\|_{L^2(0,1)}^2} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \|h\|_{L^\infty(0,1)} \rightarrow 0.} \quad (4.81)$$

Zum Nachweis ist nur (4.80) durch $\|h\|_{L^2(0,1)}^2$ zu teilen. In dieser wichtigen Abschätzung treten zwei Normen auf, charakteristisch für die Behandlung der Zwei-Norm-Diskrepanz.

Jetzt kann das Cosinus-Beispiel vervollständigt werden. Wir erhalten an der Stelle unserer Referenzlösung $\bar{u}(x) \equiv 0$

$$\begin{aligned} f(0+h) &= f(0) + f'(0)h + \frac{1}{2} f''(0)h^2 + r_2^f(0, h) \\ &= f(0) + 0 + \frac{1}{2} \|h\|_{L^2(0,1)}^2 + r_2^f(0, h) \\ &= f(0) + \|h\|_{L^2(0,1)}^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{r_2^f(0, h)}{\|h\|_{L^2(0,1)}^2} \right) \\ &\geq f(0) + \|h\|_{L^2(0,1)}^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \|h\|_{L^\infty(0,1)} \right) \\ &\geq f(0) + \frac{1}{3} \|h\|_{L^2(0,1)}^2, \end{aligned}$$

für $\|h\|_{L^\infty(0,1)} \leq \varepsilon = 1$. Damit ist in einer hinreichend kleinen L^∞ -Umgebung von $\bar{u} = 0$ eine quadratische Wachstumsbedingung in der L^2 -Norm erfüllt. Daraus können wir schließen, dass \bar{u} im Sinne von $L^\infty(0,1)$ eine lokal optimale Lösung ist. Natürlich wussten wir das schon, denn \bar{u} ist global optimal.

Die eben erläuterte Methode wird nun sinngemäß auf Probleme der optimalen Steuerung übertragen.

4.10.3 Verteilte Steuerung

Wir untersuchen jetzt Bedingungen zweiter Ordnung für die Aufgabe (4.31)–(4.33),

$$\min J(y, u) := \int_{\Omega} \varphi(x, y(x)) dx + \int_{\Omega} \psi(x, u(x)) dx$$

bei

$$\begin{array}{rcl} -\Delta y + d(x, y) & = & u \quad \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu} y & = & 0 \quad \text{auf } \Gamma \end{array}$$

sowie

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \quad \text{f.ü. in } \Omega.$$

Dabei nehmen wir an, dass eine Steuerung $\bar{u} \in U_{ad}$ gegeben ist, die gemeinsam mit dem zugehörigen Zustand $\bar{y} = G(\bar{u})$ und dem adjungierten Zustand p die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung (4.46)–(4.48) auf S. 172 erfüllt. Das Paar (\bar{y}, \bar{u}) braucht damit nicht optimal zu sein. Es ist unsere Referenzlösung, für die wir lokale Optimalität zeigen wollen. Für die Dimension N von Ω benötigen wir keine Einschränkung, da wir im Steuerungsraum $L^{\infty}(\Omega)$ arbeiten.

Dabei ist zu betonen, dass wir erst dann die hinreichenden Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung nachprüfen können, wenn (\bar{y}, \bar{u}) konkret gegeben ist. Man hält es so wie bei Extremwertaufgaben von Funktionen mehrerer Veränderlicher: Nach in der Regel numerischer Bestimmung einer Lösung des Optimalitätssystems wäre nachzuprüfen, ob eine hinreichende Optimalitätsbedingung erfüllt ist und damit lokale Optimalität vorliegt. Das numerische Verfahren wird aber in der Regel nur dann vernünftig konvergieren, wenn es in der Nähe einer Lösung gestartet wurde, welche die hinreichenden Bedingungen erfüllt. Also muss man hoffen, eine solche Umgebung zu erwischen.

Bemerkung. Eine hinreichende Bedingung zweiter Ordnung im Funktionenraum kann auf numerischem Wege nur sehr schwer verifiziert werden. Das Problem besteht darin, aus einer für endlichdimensionale Approximationen nachgewiesenen positiven Definitheit auf den unendlichdimensionalen Fall schließen zu müssen. Es gibt aber eine numerische Methode von Rösch und Wachsmuth [179], die auf gewisse Typen von Aufgaben anwendbar ist.

Ableitungen zweiter Ordnung

Ableitung der Steuerungs-Zustands-Abbildung. Der Operator G bezeichnet für das obige elliptische Randwertproblem wie bisher die Steuerungs-Zustands-Abbildung $u \mapsto y$. Wir betrachten G von $L^{\infty}(\Omega)$ nach $H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Zunächst kann die Existenz und die Stetigkeit der Fréchet-Ableitung zweiter Ordnung des Operators G gezeigt werden.

Satz 4.24 *Unter Voraussetzung 4.14 von S. 164 ist der Operator $G : L^{\infty}(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ zweimal stetig Fréchet-differenzierbar. Die zweite Ableitung $G''(u)$ ist gegeben durch*

$$G''(u)[u_1, u_2] = z,$$

wobei z die eindeutig bestimmte schwache Lösung der mit $y = G(u)$ definierten elliptischen Randwertaufgabe

$$\begin{array}{rcl} -\Delta z + d_y(x, y) z & = & -d_{yy}(x, y) y_1 y_2 \\ \partial_{\nu} z & = & 0 \end{array} \quad (4.82)$$

ist und die Funktionen $y_i \in H^1(\Omega)$ durch $y_i = G'(u) u_i$ definiert sind.

Beweis: (i) Existenz der zweiten Ableitung

Wir wissen mit Satz 4.17 auf S. 170, dass die Abbildung G Fréchet-differenzierbar ist. Um die Existenz der zweiten Ableitung zu erhalten, wenden wir den Satz über implizite Funktionen an. Dazu wird die elliptische Randwertaufgabe für $y = G(u)$ in eine passende Form gebracht. Es sei R der Lösungsoperator der linearen elliptischen Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta y + y &= v \\ \partial_\nu y &= 0, \end{aligned}$$

$R : L^\infty(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Wir betrachten R als Operator mit Wertebereich in $C(\bar{\Omega})$. Die Beziehung $y = G(u)$ bedeutet

$$\begin{aligned} -\Delta y + y &= u - d(x, y) + y \\ \partial_\nu y &= 0. \end{aligned} \tag{4.83}$$

Unter Verwendung von R heißt das $y = R(u - d(\cdot, y) + y)$ bzw. präziser

$$y - R(u - \Phi(y)) = 0, \tag{4.84}$$

wobei $\Phi : C(\bar{\Omega}) \rightarrow L^\infty(\Omega)$ den durch $d(\cdot, y) - y$ erzeugten Nemytskii-Operator bezeichnet. Ist umgekehrt $y \in C(\bar{\Omega})$ eine Lösung von (4.84), dann liegt y automatisch im Bild von R , gehört deshalb dem Raum $H^1(\Omega)$ an und ist schwache Lösung von (4.83). Damit sind (4.83) und (4.84) äquivalent. Wir definieren nun $F : C(\bar{\Omega}) \times L^\infty(\Omega) \rightarrow C(\bar{\Omega})$ durch

$$F(y, u) = y - R(u - \Phi(y)).$$

Der Operator Φ ist nach Satz 4.22 auf S. 182 zweimal stetig differenzierbar. Außerdem ist R linear und stetig. Deshalb ist auch F als zusammengesetzte Abbildung zweimal stetig Fréchet-differenzierbar. Die Ableitung $D_y F(y, u)$ ist surjektiv, denn die Gleichung

$$D_y F(y, u) w = v$$

ist äquivalent zu $w + R\Phi'(y)w = v$ und mit $\tilde{w} := w - v$ zu $\tilde{w} = -R\Phi'(y)(\tilde{w} + v)$. Nach Definition von R ergibt sich nach etwas Rechnung die Äquivalenz zu

$$\begin{aligned} -\Delta \tilde{w} + d_y(x, y) \tilde{w} &= -d_y(x, y) v + v \\ \partial_\nu \tilde{w} &= 0. \end{aligned}$$

Diese Randwertaufgabe besitzt aber für jedes $v \in C(\bar{\Omega})$ genau eine Lösung $\tilde{w} \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Damit sind die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen erfüllt und die Gleichung $F(y, u) = 0$ hat deshalb für alle u aus einer Umgebung von \bar{u} genau eine Lösung $y = G(u)$. Das wussten wir bereits, denn die Existenz und Eindeutigkeit von $y = G(u)$ hatten wir sogar für alle $u \in U_{ad}$ bewiesen. Aber der Satz über implizite Funktionen sagt zusätzlich aus, dass die Abbildung G so glatt ist wie die Abbildung F , siehe [41]. Somit ist G zweimal stetig Fréchet-differenzierbar.

(ii) Berechnung von $G''(u)$

Nach Einsetzen von $y = G(u)$ erhalten wir laut Definition von F

$$F(G(u), u) = G(u) - Ru + R\Phi(G(u)) = 0.$$

Differentiation in Richtung u_1 ergibt mit der Kettenregel

$$G'(u) u_1 - R u_1 + R \Phi'(G(u)) G'(u) u_1 = 0$$

oder mit $K(u) := G'(u) u_1$, $K : L^\infty(\Omega) \rightarrow C(\bar{\Omega})$,

$$K(u) - R u_1 + R \Phi'(G(u)) K(u) = 0.$$

Wir differenzieren nun in Richtung u_2 und erhalten

$$K'(u) u_2 + R \Phi''(G(u)) [K(u), G'(u) u_2] + R \Phi'(G(u)) K'(u) u_2 = 0$$

nach Anwendung der Ketten- und Produktregel. Wegen $K'(u) u_2 = G''(u)[u_1, u_2]$ (vgl. das auf S. 181 erläuterte Schema zur Berechnung von zweiten Ableitungen) ist das äquivalent zu

$$G''(u)[u_1, u_2] + R \Phi''(G(u)) [G'(u) u_1, G'(u) u_2] + R \Phi'(G(u)) G''(u)[u_1, u_2] = 0,$$

und das heißt mit $z := G''(u)[u_1, u_2]$

$$z + R (\Phi'(y) z + \Phi''(y)[y_1, y_2]) = 0.$$

Das ist nach Definition von R gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} -\Delta z + z &= -d_y(x, y) z - d_{yy}(x, y) y_1 y_2 \\ \partial_\nu z &= 0 \end{aligned}$$

und alle Behauptungen des Satzes sind bewiesen. ■

Zweite Ableitung des Zielfunktionals. Mit Voraussetzung 4.14 auf S. 164 ist das Funktional J zweimal stetig Fréchet-differenzierbar in $Y \times L^\infty(\Omega)$. Deshalb ist die zusammengesetzte Abbildung $f : u \mapsto J(G(u), u)$ ebenfalls zweimal stetig Fréchet-differenzierbar in $L^\infty(\Omega)$. Die Ableitung kann wie im letzten Beweis berechnet werden. Wir erhalten zunächst

$$f'(u) u_1 = D_y J(G(u), u) G'(u) u_1 + D_u J(G(u), u) u_1.$$

Nach Ableitung von $\tilde{f}(u) := f'(u) u_1$ in Richtung u_2 folgt mit Produkt- und Kettenregel

$$\begin{aligned} f''(u)[u_1, u_2] &= \tilde{f}'(u) u_2 = D_y^2 J(G(u), u) [G'(u) u_1, G'(u) u_2] \\ &\quad + D_u D_y J(G(u), u) [G'(u) u_1, u_2] + D_y J(G(u), u) G''(u)[u_1, u_2] \\ &\quad + D_y D_u J(G(u), u) [u_1, G'(u) u_2] + D_u^2 J(G(u), u) [u_1, u_2] \\ &= J''(y, u) [(y_1, u_1), (y_2, u_2)] + D_y J(y, u) G''(u)[u_1, u_2]. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Zur Vereinfachung dieser Ausdrücke setzen wir wieder $z := G''(u)[u_1, u_2]$, $y_i := G'(u) u_i$. Der dabei entstehende Ausdruck

$$D_y J(y, u) z = \int_{\Omega} \varphi_y(x, y(x)) z(x) dx$$

kann durch Einführung des adjungierten Zustands p wie folgt umgeformt werden: Dieser ist definiert durch

$$\begin{aligned} -\Delta p + d_y(\cdot, y) p &= \varphi_y(\cdot, y) \\ \partial_\nu p &= 0. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Die Funktion z löst nach Satz 4.24 das System (4.82), dessen rechte Seite als „Steuerung“ $\tilde{u} = -d_{yy}(\cdot, y) y_1 y_2$ aufgefasst werden kann. Mit passender Wahl der Größen, insbesondere $a_\Omega = \varphi_y$, $\beta_\Omega = 1$, $v = \tilde{u}$, folgt aus Lemma 2.31 auf S. 59

$$D_y J(y, u) z = \int_{\Omega} p \tilde{u} dx = - \int_{\Omega} p d_{yy}(x, y) y_1 y_2 dx. \quad (4.87)$$

Einsetzen in (4.85) liefert schließlich

$$f''(u)[u_1, u_2] = J''(y, u)[(y_1, u_1), (y_2, u_2)] - \int_{\Omega} p d_{yy}(x, y) y_1 y_2 dx. \quad (4.88)$$

Durch die Lagrangefunktion kann dieser Ausdruck weiter vereinfacht werden.

Definition. Die Lagrangefunktion zur Aufgabe (4.31)–(4.33) auf S. 165 ist

$$\mathcal{L}(y, u, p) = \int_{\Omega} (\varphi(x, y) + \psi(x, u) - (d(x, y) - u) p) dx - \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla p dx.$$

Die Schreibweise für die zweite Ableitung von \mathcal{L} nach (y, u) vereinfachen wir durch

$$\mathcal{L}''(y, u, p)[(y_1, u_1), (y_2, u_2)] := D_{(y, u)}^2 \mathcal{L}(y, u, p)[(y_1, u_1), (y_2, u_2)].$$

Das Inkrement (y_i, u_i) zeigt an, dass die Ableitung nach (y, u) gemeint ist. Aus (4.88) folgt

$$\begin{aligned} f''(u)[u_1, u_2] &= \int_{\Omega} (\varphi_{yy}(x, y) y_1 y_2 - p d_{yy}(x, y) y_1 y_2 + \psi_{uu}(x, u) u_1 u_2) dx \\ &= \mathcal{L}''(y, u, p)[(y_1, u_1), (y_2, u_2)]. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Die Lagrangefunktion stellt also wieder ein gutes Hilfsmittel zur Berechnung von Ableitungen nach u dar. Wir haben folgende Aussage bewiesen:

Satz 4.25 Unter Voraussetzung 4.14 ist das reduzierte Funktional $f : L^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(u) = J(y, u) = J(G(u), u),$$

zweimal stetig Fréchet-differenzierbar. Die zweite Ableitung von f kann durch

$$f''(u)[u_1, u_2] = \mathcal{L}''(y, u, p)[(y_1, u_1), (y_2, u_2)]$$

ausgedrückt werden. Dabei ist y der zu u gehörige Zustand, p der zugeordnete adjungierte Zustand und $y_i = G'(u) u_i$, $i = 1, 2$, sind die Lösungen der linearisierten Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta y_i + d_y(x, y) y_i &= u_i \\ \partial_\nu y_i &= 0. \end{aligned}$$

Ein Hilfssatz. Die Zwei-Norm-Diskrepanz erfordert etwas technische Abschätzungen:

Lemma 4.26 Unter Voraussetzungen 4.14 existiert zum Funktional $f : L^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(u) = J(y, u) = J(G(u), u),$$

für alle $M > 0$ eine von u, h, u_1, u_2 unabhängige Konstante $L(M)$, so dass

$$|f''(u+h)[u_1, u_2] - f''(u)[u_1, u_2]| \leq L(M) \|h\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_1\|_{L^2(\Omega)} \|u_2\|_{L^2(\Omega)} \quad (4.90)$$

für alle $u, h, u_1, u_2 \in L^\infty(\Omega)$ mit $\max\{\|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|h\|_{L^\infty(\Omega)}\} \leq M$ gilt.

Beweis: (i) *Umformung mit Hilfe der Lagrangefunktion*

Wir definieren $y = G(u)$, $y_h = G(u + h)$, bezeichnen die zugehörigen adjungierten Zustände entsprechend mit p , p_h und setzen $y_i = G'(u) u_i$ sowie $y_{i,h} = G'(u + h) u_i$, $i = 1, 2$. Die Existenz von $f''(u)$ haben wir in Satz 4.25 geklärt. Mit (4.89) ergibt sich

$$\begin{aligned} f''(u + h)[u_1, u_2] - f''(u)[u_1, u_2] &= \\ &= \mathcal{L}''(y_h, u + h, p_h)[(y_{1,h}, u_1), (y_{2,h}, u_2)] - \mathcal{L}''(y, u, p)[(y_1, u_1), (y_2, u_2)] \\ &= \int_{\Omega} (\varphi_{yy}(x, y_h) y_{1,h} y_{2,h} - \varphi_{yy}(x, y) y_1 y_2) dx - \int_{\Omega} p_h d_{yy}(x, y_h) y_{1,h} y_{2,h} dx \\ &\quad + \int_{\Omega} p d_{yy}(x, y) y_1 y_2 dx + \int_{\Omega} (\psi_{uu}(x, u + h) - \psi_{uu}(x, u)) u_1 u_2 dx. \end{aligned} \quad (4.91)$$

(ii) *Abschätzung von $y_{i,h} - y_i$ und $p_h - p$*

Der Operator G ist nach Satz 4.16 auf S. 169 Lipschitz-stetig von $L^\infty(\Omega)$ in $C(\bar{\Omega})$. Somit gilt

$$\|y_h - y\|_{C(\bar{\Omega})} \leq C_L \|h\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (4.92)$$

und deshalb auch mit einer von M abhängigen Konstanten $c(M)$

$$\|d_y(x, y_h) - d_y(x, y)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c(M) \|h\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (4.93)$$

Im Weiteren bezeichnet c wieder eine generische Konstante. Die Ableitungen y_i bzw. $y_{i,h}$ lösen die elliptischen Gleichungen

$$\begin{aligned} -\Delta y_i + d_y(x, y) y_i &= u_i \\ -\Delta y_{i,h} + d_y(x, y_h) y_{i,h} &= u_i \end{aligned} \quad (4.94)$$

mit Neumannscher Randbedingung. Wegen Monotonie von d existiert ein von h unabhängiges c mit

$$\|y_i\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|u_i\|_{L^2(\Omega)}, \quad \|y_{i,h}\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|u_i\|_{L^2(\Omega)}, \quad (4.95)$$

vgl. Satz 4.7 auf S. 153. Die Differenz $y_{i,h} - y_i$ erfüllt

$$-\Delta (y_{i,h} - y_i) + d_y(x, y) (y_{i,h} - y_i) = -(d_y(x, y_h) - d_y(x, y)) y_{i,h}. \quad (4.96)$$

Die L^2 -Norm der rechten Seite kann mit (4.93), (4.95) abgeschätzt werden,

$$\|(d_y(x, y_h) - d_y(x, y)) y_{i,h}\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|h\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_i\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.97)$$

Mit den Lösungseigenschaften der linearen Gleichung (4.96) folgt unter Beachtung von $d_y(x, y) \geq \lambda_d > 0$ auf E_d

$$\|y_i - y_{i,h}\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|h\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_i\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.98)$$

Die Differenz der adjungierten Zustände genügt der Gleichung

$$-\Delta (p_h - p) + d_y(x, y) (p_h - p) = \varphi_y(\cdot, y_h) - \varphi_y(\cdot, y) + (d_y(x, y) - d_y(x, y_h)) p_h.$$

Wegen (4.92) ist die $C(\bar{\Omega})$ -Norm von y , y_h gleichmäßig beschränkt und das trifft auch für die adjungierten Zustände p_h zu, denn die Beschränktheit von y_h überträgt sich auf die

rechten Seiten $\varphi_y(\cdot, y_h)$ der adjungierten Gleichung (4.86). Die rechten Seiten der letzten Gleichung können deshalb wie folgt abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} & \|\varphi_y(\cdot, y_h) - \varphi_y(\cdot, y)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|d_y(x, y) - d_y(x, y_h)\|_{L^\infty(\Omega)} \|p_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \\ & \leq c \|y_h - y\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \|h\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

Aus der Differenz der adjungierten Gleichungen für p und p_h erhalten wir schließlich

$$\|p_h - p\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \|h\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (4.99)$$

(iii) *Nachweis der Behauptung*

Die Ausdrücke in (4.91) können jetzt abgeschätzt werden. Beispielsweise folgt

$$\begin{aligned} & \|\varphi_{yy}(\cdot, y_h) y_{1,h} y_{2,h} - \varphi_{yy}(\cdot, y) y_1 y_2\|_{L^1(\Omega)} \leq \\ & \leq \|(\varphi_{yy}(\cdot, y_h) - \varphi_{yy}(\cdot, y)) y_1 y_2\|_{L^1(\Omega)} + \|\varphi_{yy}(\cdot, y_h) (y_{1,h} y_{2,h} - y_1 y_2)\|_{L^1(\Omega)} \\ & \leq \|\varphi_{yy}(\cdot, y_h) - \varphi_{yy}(\cdot, y)\|_{L^\infty(\Omega)} \|y_1\|_{L^2(\Omega)} \|y_2\|_{L^2(\Omega)} \\ & \quad + \|\varphi_{yy}(\cdot, y_h)\|_{L^\infty(\Omega)} (\|y_{1,h} (y_{2,h} - y_2)\|_{L^1(\Omega)} + \|(y_{1,h} - y_1) y_2\|_{L^1(\Omega)}) \\ & \leq c \|h\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_1\|_{L^2(\Omega)} \|u_2\|_{L^2(\Omega)} + c \|y_{1,h}\|_{L^2(\Omega)} \|y_{2,h} - y_2\|_{L^2(\Omega)} \\ & \quad + c \|y_2\|_{L^2(\Omega)} \|y_{1,h} - y_1\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|h\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_1\|_{L^2(\Omega)} \|u_2\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Analog schätzt man die anderen Integrale in (4.91) ab, um (4.90) zu erhalten. ■

Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung

Notwendige Bedingungen zweiter Ordnung. Zur Herleitung der notwendigen Bedingungen folgen wir [52]. Das Minimumprinzip (4.49) auf S. 173 liefert für die Lösung der Aufgabe (4.31)–(4.33) auf S. 165 die Darstellung

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u_a(x), & \text{falls } p(x) + \psi_u(x, \bar{u}(x)) > 0 \\ u_b(x), & \text{falls } p(x) + \psi_u(x, \bar{u}(x)) < 0. \end{cases}$$

Damit ist \bar{u} auf der Menge aller x mit $|p(x) + \psi_u(x, \bar{u}(x))| > 0$ festgelegt. Nur auf ihrem Komplement ist es sinnvoll, Bedingungen höherer Ordnung einzusetzen. Es sei

$$A_0(\bar{u}) = \{x \in \Omega : |p(x) + \psi_u(x, \bar{u}(x))| > 0\}. \quad (4.100)$$

Für beliebiges $u \in U_{ad}$ ist $u(x) - \bar{u}(x)$ nichtpositiv, falls $\bar{u}(x) = u_b(x)$ gilt und nichtnegativ, wenn $\bar{u}(x) = u_a(x)$ erfüllt ist. Diese Vorbetrachtungen motivieren die folgende

Definition (Kritischer Kegel). Die Menge $C_0(\bar{u})$ besteht aus allen $h \in L^\infty(\Omega)$ mit den Eigenschaften

$$h(x) \begin{cases} = 0, & \text{falls } x \in A_0(\bar{u}) \\ \geq 0, & \text{falls } x \notin A_0(\bar{u}) \text{ und } \bar{u}(x) = u_a(x) \\ \leq 0, & \text{falls } x \notin A_0(\bar{u}) \text{ und } \bar{u}(x) = u_b(x). \end{cases}$$

Damit ist h beliebig wählbar auf der inaktiven Menge $\{x \in \Omega : u_a(x) < \bar{u}(x) < u_b(x)\}$.

Satz 4.27 *Es sei \bar{u} eine lokal optimale Steuerung für die Aufgabe (4.31)–(4.33) auf S. 165 und Voraussetzung 4.14 auf S. 164 erfüllt. Dann gilt für alle $h \in C_0(\bar{u})$*

$$f''(\bar{u})h^2 \geq 0. \quad (4.101)$$

Beweis. Es sei ein beliebiges $h \in C_0(\bar{u})$ gegeben. Für hinreichend kleines $t > 0$ braucht die Funktion $\bar{u} + th$ nicht in U_{ad} zu liegen. Wir definieren deshalb für $n \in \mathbb{N}$ die Menge $I_n = \{x \in \Omega : u_a(x) + 1/n \leq \bar{u}(x) \leq u_b(x) - 1/n\}$ und betrachten $h_n := \chi_n h$ mit

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in I_n \text{ oder } [\bar{u}(x) \in \{u_a(x), u_b(x)\} \text{ und } u_b(x) - u_a(x) \geq 1/n] \\ 0, & \text{falls } \bar{u}(x) \in (u_a(x), u_a(x) + 1/n) \cup (u_b(x) - 1/n, u_b(x)). \end{cases}$$

Damit verschwindet $\chi_n(x)$ auch, falls $\bar{u}(x) \in \{u_a(x), u_b(x)\}$ und $u_b(x) - u_a(x) < 1/n$ gilt. Die Funktion $u = \bar{u} + th_n$ gehört zu U_{ad} für alle hinreichend kleinen $t > 0$ und deshalb gilt

$$0 \leq J(y, u) - J(\bar{y}, \bar{u}) = f(u) - f(\bar{u}) = f'(\bar{u})th_n + \frac{1}{2}f''(\bar{u})t^2h_n^2 + r_2^f(\bar{u}, th_n)$$

mit dem Restglied zweiter Ordnung r_2^f von f . Wegen der Minimumbedingung (4.49) auf S. 173 verschwindet h und damit auch h_n fast überall dort, wo $p + \psi_u(\cdot, \bar{u})$ ungleich null ist. Deshalb ergibt sich $f'(\bar{u})h_n = (p + \psi_u(\cdot, \bar{u}), h_n) = 0$ und wir erhalten nach Division durch t^2

$$0 \leq \frac{1}{2}f''(\bar{u})h_n^2 + t^{-2}r_2^f(\bar{u}, th_n). \quad (4.102)$$

Nach Grenzübergang $t \downarrow 0$ folgt $f''(\bar{u})h_n^2 \geq 0$. Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert $h_n(x)$ fast überall gegen $h(x)$ und wir haben $h_n(x)^2 \leq h(x)^2$. Nach dem Satz über die majorisierte Konvergenz folgt daraus $h_n \rightarrow h$ in $L^2(\Omega)$. Wegen Stetigkeit der quadratischen Form $f''(\bar{u})h^2$ in $L^2(\Omega)$ ergibt sich die zu beweisende Aussage mit (4.102) für $n \rightarrow \infty$. ■

Die Bedingung zweiter Ordnung (4.101) wurde unter Verwendung von f'' aufgeschrieben, also mit einer nicht explizit verfügbaren Funktion. Aus Satz 4.25 erhalten wir folgende in der Optimierungstheorie gebräuchlichere Form:

Lemma 4.28 *Die notwendige Bedingung zweiter Ordnung (4.101) ist äquivalent zu*

$$\mathcal{L}''(\bar{y}, \bar{u}, p)(y, h)^2 \geq 0$$

für alle $h \in C_0(\bar{u})$ und die zugehörige Lösung $y = y(h) \in H^1(\Omega)$ der linearisierten Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta y + d_y(x, \bar{y})y &= h \\ \partial_\nu y &= 0. \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingungen zweiter Ordnung. Zur Formulierung der hinreichenden Bedingungen führen wir zunächst folgenden Kegel ein:

$$C(\bar{u}) = \{u \in L^\infty(\Omega) : u(x) \geq 0, \text{ falls } \bar{u}(x) = u_a(x), u(x) \leq 0, \text{ falls } \bar{u}(x) = u_b(x)\}. \quad (4.103)$$

Eine *hinreichende Bedingung zweiter Ordnung* ist zum Beispiel die folgende Forderung: *Es existiere ein $\delta > 0$ mit*

$$f''(\bar{u})u^2 \geq \delta \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall u \in C(\bar{u}). \quad (4.104)$$

Nach (4.89) auf S. 193 ist sie äquivalent zu

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ (\varphi_{yy}(x, \bar{y}) - p d_{yy}(x, \bar{y})) y^2 + \psi_{uu}(x, \bar{u}) u^2 \right\} dx &\geq \delta \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \text{für alle } u \in C(\bar{u}) \text{ und } y \in H^1(\Omega) \text{ mit} \\ -\Delta y + d_y(x, \bar{y}) y &= u \\ \partial_{\nu} y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.105)$$

Bemerkung. Die oben eingeführte hinreichende Bedingung ist eine zu starke Forderung. Der Kegel $C(\bar{u})$ ist, verglichen mit $C_0(\bar{u})$, zu groß. Durch Berücksichtigung stark aktiver Restriktionen kann die Lücke zwischen $C(\bar{u})$ und $C_0(\bar{u})$ weitgehend geschlossen werden, siehe Abschnitt 4.10.5. Die obige Form wird dennoch oft verwendet, insbesondere als gängige Voraussetzung in der Konvergenzanalyse numerischer Verfahren.

Erfüllt das Paar (\bar{y}, \bar{u}) die notwendigen Bedingungen erster Ordnung und die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung (4.105), dann ist \bar{u} eine lokal optimale Steuerung im Sinne von $L^\infty(\Omega)$, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 4.29 *Die Voraussetzung 4.14 auf S. 164 sei erfüllt und die Steuerung $\bar{u} \in U_{ad}$ genüge gemeinsam mit dem zugehörigen Zustand $\bar{y} = G(\bar{u})$ und dem adjungierten Zustand p der notwendigen Optimalitätsbedingung erster Ordnung aus Satz 4.20 auf S. 173. Erfüllt das Paar (\bar{y}, \bar{u}) zusätzlich die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung (4.105), dann existieren Konstanten $\varepsilon > 0$ und $\sigma > 0$, so dass die quadratische Wachstumsbedingung*

$$J(y, u) \geq J(\bar{y}, \bar{u}) + \sigma \|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

für alle $u \in U_{ad}$ mit $\|u - \bar{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon$ und die zugehörigen Zustände $y = G(u)$ gilt. Folglich ist \bar{u} lokal optimale Steuerung im Sinne von $L^\infty(\Omega)$.

Beweis: Der Beweis ist fast identisch mit dem für das Cosinus-Beispiel. Daher kürzen wir die Argumentation ab. Wir erhalten

$$J(y, u) = f(u) = f(\bar{u}) + f'(\bar{u})(u - \bar{u}) + \frac{1}{2} f''(\bar{u} + \theta(u - \bar{u}))(u - \bar{u})^2$$

mit $\theta \in (0, 1)$. Der Term erster Ordnung ist wegen der notwendigen Bedingung erster Ordnung nichtnegativ, denn

$$f'(\bar{u})(u - \bar{u}) = \int_{\Omega} (p + \psi_u(\cdot, \bar{u}))(u - \bar{u}) dx \geq 0$$

folgt aus der Variationsungleichung von Satz 4.20, vgl. auch Formel (4.44). Die Differenz $u - \bar{u}$ gehört dem Kegel $C(\bar{u})$ an. Den Term zweiter Ordnung schätzen wir nach unten ab,

$$\begin{aligned} f''(\bar{u} + \theta(u - \bar{u}))(u - \bar{u})^2 &= f''(\bar{u})(u - \bar{u})^2 + [f''(\bar{u} + \theta(u - \bar{u})) - f''(\bar{u})](u - \bar{u})^2 \\ &\geq \delta \|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 - L \|u - \bar{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \frac{\delta}{2} \|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

wenn $\|u - \bar{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon$ hinreichend klein ist. Dabei wurde (4.104) sowie die Abschätzung (4.90) auf S. 193 verwendet und ausgenutzt, dass alle $u \in U_{ad}$ durch eine gemeinsame Konstante M in $L^\infty(\Omega)$ beschränkt sind. Insgesamt folgt daraus

$$J(y, u) \geq f(\bar{u}) + \frac{\delta}{4} \|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 = J(\bar{y}, \bar{u}) + \sigma \|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

mit $\sigma = \delta/4$, falls $\|u - \bar{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon$ gilt und ε genügend klein ist. ■

Analog zu Lemma 4.28 schreibt man (4.105) in folgender gebräuchlicheren Form auf:

Lemma 4.30 *Die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung (4.105) ist äquivalent zu*

$$\mathcal{L}''(\bar{y}, \bar{u}, p)(y, u)^2 \geq \delta \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

für alle $u \in C(\bar{u})$ und alle $y \in H^1(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned} -\Delta y + d_y(x, \bar{y}) y &= u \\ \partial_\nu y &= 0. \end{aligned}$$

4.10.4 Randsteuerung

Zur Erläuterung der hinreichenden Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung betrachten wir exemplarisch das Randsteuerungsproblem (4.50)–(4.52),

$$\min J(y, u) := \int_{\Omega} \varphi(x, y(x)) dx + \int_{\Gamma} \psi(x, u(x)) ds(x)$$

bei den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} -\Delta y &= 0 & \text{in } \Omega \\ \partial_\nu y + b(x, y) &= u & \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

sowie

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \quad \text{f.ü. auf } \Gamma.$$

Dazu verwenden wir die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(y, u, p) = \int_{\Omega} (\varphi(x, y) - \nabla y \cdot \nabla p) dx + \int_{\Gamma} (\psi(x, u) - (b(x, y) - u) p) ds.$$

Die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung fordert die Existenz eines $\delta > 0$, so dass

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}''(\bar{y}, \bar{u}, p)(y, u)^2 &\geq \delta \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ \text{für alle } u \in C(\bar{u}) \text{ und alle } y \in H^1(\Omega) \text{ mit} \\ -\Delta y &= 0 \\ \partial_\nu y + b_y(x, \bar{y}) y &= u \end{aligned} \right\} \quad (4.106)$$

erfüllt ist. Der Kegel $C(\bar{u})$ wird analog zu (4.103) definiert, es ist nur Ω durch Γ zu ersetzen. Als expliziten Ausdruck für \mathcal{L}'' erhalten wir

$$\mathcal{L}''(\bar{y}, \bar{u}, p)(y, u)^2 = \int_{\Omega} \varphi_{yy}(x, \bar{y}) y^2 dx - \int_{\Gamma} b_{yy}(x, \bar{y}) p y^2 ds + \int_{\Gamma} \psi_{uu}(x, \bar{u}) u^2 ds.$$

Satz 4.31 Die Steuerung $\bar{u} \in U_{ad}$ genüge gemeinsam mit dem zugehörigen Zustand $\bar{y} = G(\bar{u})$ und dem adjungierten Zustand p der notwendigen Optimalitätsbedingung erster Ordnung aus Satz 4.21 von S. 175. Erfüllt das Paar (\bar{y}, \bar{u}) zusätzlich die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung (4.106), dann existieren unter Voraussetzung 4.14 Konstanten $\varepsilon > 0$ und $\sigma > 0$, so dass die quadratische Wachstumsbedingung

$$J(y, u) \geq J(\bar{y}, \bar{u}) + \sigma \|u - \bar{u}\|_{L^2(\Gamma)}^2$$

für alle $u \in U_{ad}$ mit $\|u - \bar{u}\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq \varepsilon$ und die zugehörigen Zustände $y = G(u)$ gilt. Folglich ist \bar{u} eine lokal optimale Steuerung im Sinne von $L^\infty(\Gamma)$.

Der Beweis verläuft völlig analog zum Fall der verteilten Steuerung.

4.10.5 Berücksichtigung stark aktiver Restriktionen *

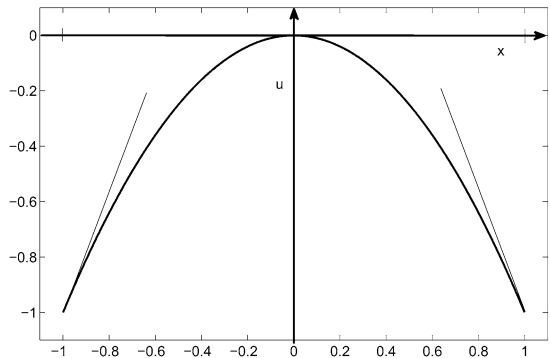
In den bisher bewiesenen Sätzen ist die Lücke zwischen notwendiger bzw. hinreichender Bedingung zweiter Ordnung zu groß: Die Nichtnegativität von \mathcal{L}'' wird bei der notwendigen Bedingung auf dem kritischen Kegel $C_0(\bar{u})$ gefordert. Dieser ist in der Regel kleiner als der Kegel $C(\bar{u})$ in der hinreichenden Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung. In $C_0(\bar{u})$ verschwinden die Steuerungen auf der stark aktiven Menge, während sie in $C(\bar{u})$ nur vorzeichenbeschränkt sind. Die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung ist damit eine eigentlich zu starke Forderung. Durch Einbeziehung stark aktiver Restriktionen kann diese Lücke weitgehend geschlossen werden. Dazu betrachtet man zusätzlich *hinreichende Bedingungen erster Ordnung*.

Beispiel. Die konkave Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(u) = -u^2$, hat in der Menge $U_{ad} = [-1, 1]$ zwei verschiedene Minima, nämlich bei $u_1 = -1$ und $u_2 = 1$. An beiden Stellen gilt die notwendige Bedingung erster Ordnung

$$f'(u_i)(u - u_i) \geq 0 \quad \forall u \in [-1, 1]$$

und wir haben $|f'(u_i)| = 2 > 0$, siehe nebenstehende Abbildung.

Bedingungen zweiter Ordnung der bisher verwendeten Form sind hier nicht erfüllbar, weil f konkav ist. Sie sind auch nicht nötig, denn die u_i genügen den *hinreichenden Optimalitätsbedingungen 1. Ordnung* $|f'(u_i)| \neq 0$.



Hinreichende Bedingungen 1. Ordnung

Daraus folgt schon lokale Optimalität, denn wir haben an der Stelle u_1 für alle $h \in (0, 2)$

$$f(-1 + h) = f(-1) + f'(-1)h + r(h) = f(-1) + 2h - h^2 > -1 = f(-1).$$

Hier liegt natürlich sogar globale Optimalität vor. \diamond

Analoge Konstruktionen wendet man im Funktionenraum zur Abschwächung hinreichender Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung an.

Ein vereinfachtes Beispiel im Funktionenraum

Wir diskutieren die Aufgabe

$$\min_{u \in U_{ad}} f(u) = \int_{\Omega} \varphi(x, u(x)) \, dx$$

mit $U_{ad} = \{u \in L^{\infty}(\Omega) : u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \text{ f.ü. in } \Omega\}$, wobei φ Voraussetzung 4.14 auf S. 164 erfüllen soll. Die Funktion $\bar{u} \in U_{ad}$ genüge den notwendigen Bedingungen erster Ordnung

$$\int_{\Omega} \varphi_u(x, \bar{u}(x)) (u(x) - \bar{u}(x)) \, dx \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}.$$

Dann müssen fast überall in Ω folgende Beziehungen erfüllt sein:

$$\varphi_u(x, \bar{u}(x)) \begin{cases} \geq 0, & \text{falls } \bar{u}(x) = u_a(x) \\ \leq 0, & \text{falls } \bar{u}(x) = u_b(x). \end{cases}$$

Definition. Für beliebig aber fest vorgegebenes $\tau \geq 0$ sei

$$A_{\tau}(\bar{u}) = \{x \in \Omega : |\varphi_u(x, \bar{u}(x))| > \tau\}.$$

Diese Menge heißt Menge der stark aktiven Restriktionen oder kurz stark aktive Menge.

Für $\tau = 0$ erhalten wir die in (4.100) definierte Menge $A_0(\bar{u})$ als Spezialfall. Die obige Definition geht auf Dontchev et al. [62] zurück. In der Beispielaufgabe fordern wir die folgende hinreichende Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung: Es sollen $\delta > 0$, $\tau > 0$ existieren, so dass

$$f''(\bar{u}) h^2 \geq \delta \|h\|_{L^2(\Omega)}^2$$

für alle $h \in L^{\infty}(\Omega)$ mit folgenden zusätzlichen Eigenschaften gilt:

$$h(x) \begin{cases} = 0, & \text{falls } x \in A_{\tau} \\ \geq 0, & \text{falls } x \notin A_{\tau} \text{ und } \bar{u}(x) = u_a(x) \\ \leq 0, & \text{falls } x \notin A_{\tau} \text{ und } \bar{u}(x) = u_b(x). \end{cases}$$

Wir verlangen damit $\varphi_{uu}(x, \bar{u}(x)) \geq \delta$ auf $\Omega \setminus A_{\tau}$ sowie $|\varphi_u(x, \bar{u}(x))| > \tau$ auf A_{τ} und die positive Definitheit von $f''(\bar{u})$ wird nur für eine Teilmenge von $C(\bar{u})$ aus (4.103) auf S. 196 vorausgesetzt. Diese Forderung ist zusammen mit der notwendigen Bedingung erster Ordnung hinreichend für lokale Optimalität von \bar{u} . Das sieht man wie folgt ein:

Ist $u \in U_{ad}$ hinreichend nahe an \bar{u} gegeben, d.h. $\|u - \bar{u}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq \varepsilon$, dann ergibt eine Taylor-Entwicklung

$$f(\bar{u} + h) - f(\bar{u}) = f'(\bar{u}) h + \frac{1}{2} f''(\bar{u}) h^2 + \frac{1}{2} (f''(\bar{u} + \theta h) - f''(\bar{u})) h^2$$

mit $h = u - \bar{u}$ und $\theta \in (0, 1)$. Wir spalten h durch $h = h_1 + h_2$ auf, wobei $h_2(x) = 0$ auf A_{τ} und $h_1(x) = 0$ auf $\Omega \setminus A_{\tau}$ festgesetzt wird. Die Funktion h_1 nutzt die hinreichenden Bedingungen erster Ordnung aus, während bei h_2 die positive Definitheit von f'' greift.

Offenbar gilt $h_1(x) \geq 0$ für alle x mit $\bar{u}(x) = u_a$ und $h_1(x) \leq 0$ für alle x mit $\bar{u}(x) = u_b$. Mit einem Restglied $r(u, h)$ zweiter Ordnung erhalten wir

$$f(\bar{u} + h) - f(\bar{u}) = \int_{\Omega} \varphi_u(x, \bar{u}(x)) h(x) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi_{uu}(x, \bar{u}(x)) h^2(x) dx + r(u, h).$$

Weil $\varphi_u(x, \bar{u}(x)) h(x) \geq 0$ fast überall auf Ω erfüllt sein muss, folgt mit den Abkürzungen $\varphi_u(x) := \varphi_u(x, \bar{u}(x))$, $\varphi_{uu}(x) := \varphi_{uu}(x, \bar{u}(x))$ unter Beachtung von $h_1(x)h_2(x) = 0$

$$\begin{aligned} f(\bar{u} + h) - f(\bar{u}) &\geq \\ &\geq \int_{A_\tau} \varphi_u(x) h_1(x) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi_{uu}(x) (h_1(x) + h_2(x))^2 dx + r(u, h) \\ &= \int_{A_\tau} \left(|\varphi_u(x) h_1(x)| + \frac{1}{2} \varphi_{uu}(x) h_1(x)^2 \right) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus A_\tau} \varphi_{uu}(x) h_2(x)^2 dx + r(u, h) \\ &\geq \int_{A_\tau} \left(\tau |h_1(x)| - \frac{1}{2} \|\varphi_{uu}\|_{L^\infty(\Omega)} |h_1(x)|^2 \right) dx + \frac{\delta}{2} \int_{\Omega \setminus A_\tau} h_2(x)^2 dx + r(u, h). \end{aligned}$$

Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gilt fast überall $\|\varphi_{uu}\|_{L^\infty(\Omega)} |h_1(x)| \leq \|\varphi_{uu}\|_{L^\infty(\Omega)} \varepsilon \leq \tau$ und für $\varepsilon \leq 1$ außerdem $|h_1(x)| \geq h_1(x)^2$. Unter Beachtung beider Ungleichungen folgt mit hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} f(\bar{u} + h) - f(\bar{u}) &\geq \frac{\tau}{2} \int_{\Omega} |h_1(x)| dx + \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} h_2(x)^2 dx + r(u, h) \\ &\geq \min\left(\frac{\tau}{2}, \frac{\delta}{2}\right) \int_{\Omega} (h_1(x)^2 + h_2(x)^2) dx + r(u, h) \\ &= \frac{1}{2} \min(\tau, \delta) \int_{\Omega} h^2(x) dx + r(u, h) \\ &\geq \|h\|_{L^2(\Omega)}^2 \left(\frac{1}{2} \min(\tau, \delta) - \frac{|r(u, h)|}{\|h\|_{L^2(\Omega)}^2} \right), \end{aligned}$$

Wegen der wie in (4.81) auf S.189 erfüllten Eigenschaft

$$\frac{|r(u, h)|}{\|h\|_{L^2(\Omega)}^2} \rightarrow 0 \quad \text{für } \|h\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0$$

erhalten wir schließlich

$$f(\bar{u} + h) - f(\bar{u}) \geq \sigma \|h\|_{L^2(\Omega)}^2$$

mit $\sigma = \frac{1}{4} \min(\tau, \delta)$, falls $\varepsilon > 0$ hinreichend klein ist und $\|\bar{u} - u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon$. Das ist die lokale Optimalität von \bar{u} .

Stark aktive Restriktionen bei elliptischen Optimalsteuerungsproblemen

Es liegt auf der Hand, dass sich diese Methode auch zur Abschwächung hinreichender Optimalitätsbedingungen bei Problemen mit partiellen Differentialgleichungen eignet. Das ist für elliptische Aufgaben mit Restriktionen an die Steuerung in [54] ausgeführt, bei Vorgabe zusätzlicher Nebenbedingungen in Integralform in [47] und für punktweise Beschränkungen an den Zustand in [51].

Wir erläutern die Berücksichtigung stark aktiver Restriktionen für die Aufgabe der verteilten Steuerung (4.31)–(4.33),

$$\min J(y, u) := \int_{\Omega} \varphi(x, y(x)) \, dx + \int_{\Omega} \psi(x, u(x)) \, dx$$

bei

$$\boxed{\begin{array}{rcl} -\Delta y + d(x, y) & = & u \quad \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu} y & = & 0 \quad \text{auf } \Gamma \end{array}}$$

sowie

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \quad \text{f.ü. in } \Omega.$$

Wir nehmen an, dass eine Steuerung $\bar{u} \in U_{ad}$ mit zugehörigem Zustand \bar{y} gegeben ist, welche die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung erfüllt, d.h.

$$\int_{\Omega} (p(x) + \psi_u(x, \bar{u}(x))(u(x) - \bar{u}(x))) \, dx \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \quad (4.107)$$

Wir definieren für festes $\tau \geq 0$ die *stark aktive Menge*

$$A_{\tau}(\bar{u}) = \{x \in \Omega : |p(x) + \psi_u(x, \bar{u}(x))| > \tau\}$$

und den τ -kritischen Kegel $C_{\tau}(\bar{u}) = \{u \in L^{\infty}(\Omega) : u \text{ erfüllt (4.108)}\}$,

$$u(x) \begin{cases} = 0, & \text{falls } x \in A_{\tau}(\bar{u}) \\ \geq 0, & \text{falls } x \notin A_{\tau}(\bar{u}) \text{ und } \bar{u}(x) = u_a \\ \leq 0, & \text{falls } x \notin A_{\tau}(\bar{u}) \text{ und } \bar{u}(x) = u_b. \end{cases} \quad (4.108)$$

Als *hinreichende Bedingung zweiter Ordnung* fordern wir

$$\left. \begin{aligned} & \int_{\Omega} \{(\varphi_{yy}(x, \bar{y}) - p \, d_{yy}(x, \bar{y})) y^2 + \psi_{uu}(x, \bar{u}) u^2\} \, dx \geq \delta \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \text{für alle } u \in C_{\tau}(\bar{u}) \text{ und } y \in H^1(\Omega) \text{ mit} \\ & \begin{array}{rcl} -\Delta y + d_y(x, \bar{y}) y & = & u \\ \partial_{\nu} y & = & 0. \end{array} \end{aligned} \right\} \quad (4.109)$$

Satz 4.32 Die Voraussetzung 4.14 sei erfüllt und die Steuerung $\bar{u} \in U_{ad}$ genüge gemeinsam mit dem zugehörigen Zustand \bar{y} und dem adjungierten Zustand p der notwendigen Optimalitätsbedingung erster Ordnung aus Satz 4.20 auf S. 173. Erfüllt das Paar (\bar{y}, \bar{u}) für ein $\tau > 0$ zusätzlich die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung (4.109), dann existieren Konstanten $\varepsilon > 0$ und $\sigma > 0$, so dass die quadratische Wachstumsbedingung

$$J(y, u) \geq J(\bar{y}, \bar{u}) + \sigma \|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

für alle $u \in U_{ad}$ mit $\|u - \bar{u}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq \varepsilon$ und die zugehörigen $y = G(u)$ gilt. Folglich ist \bar{u} eine lokal optimale Steuerung im Sinne von $L^{\infty}(\Omega)$.

Die Aussage ist in [54] bewiesen, kann aber auch wie Satz 5.17 auf S. 231 zu parabolischen Problemen gezeigt werden. Deshalb verzichten wir hier auf den Beweis.

Die Problematik der Lücke zwischen notwendigen bzw. hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung wird auch im Buch von Bonnans und Shapiro [34] behandelt, wo auch vielfältige weitere Resultate zur Verwendung von Ableitungen zweiter Ordnung in der Optimierung zu finden sind. Außerdem verweisen wir auf Casas und Mateos [47] sowie [53] und [51] im Zusammenhang mit Zustandsbeschränkungen.

4.10.6 Fälle ohne Zwei-Norm-Diskrepanz

Bei der Herleitung hinreichender Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung haben wir bis jetzt zwei verschiedene Normen benutzt – die L^∞ -Norm zur Differentiation und die L^2 -Norm für die Bedingung der positiven Definitheit von $f''(\bar{u})$. Das ist nicht immer nötig. Wenn die Steuerung in der Gleichung nur linear vorkommt, die Steuerungs-Zustands-Abbildung G stetig von L^2 nach $C(\bar{\Omega})$ ist und das Zielfunktional in Bezug auf die Steuerung u in einem noch zu präzisierenden Sinne linear-quadratisch, dann spielt die Zwei-Norm-Diskrepanz keine Rolle. Ein entsprechendes Beispiel haben wir auf S. 185 behandelt. In folgenden Fällen kann man ausschließlich mit der L^2 -Norm arbeiten:

Verteilte Steuerung. Ist Ω ein beschränktes Lipschitzgebiet der Dimension $N \leq 3$ und die Voraussetzung 4.14 erfüllt, dann ist die Abbildung $G : u \mapsto y$ für die Aufgabe der verteilten Steuerung (4.31)–(4.33) auf S. 165 Lipschitz-stetig von $L^2(\Omega)$ nach $C(\bar{\Omega})$, vgl. Satz 4.16 auf S. 169. Deshalb bleibt Satz 4.24 über G'' auf S. 190 gültig, wenn man $L^\infty(\Omega)$ durch $L^2(\Omega)$ ersetzt – im Beweis ist einfach $L^\infty(\Omega)$ durch $L^2(\Omega)$ zu ersetzen und alle Schlüsse bleiben richtig (vgl. auch die Erläuterungen im nächsten Abschnitt für $r := 2$). Folglich ist G unter Voraussetzung 4.14 zweimal stetig differenzierbar von $L^2(\Omega)$ in $C(\bar{\Omega})$.

Es bleibt noch die Diskussion des Zielfunktional. Dazu setzen wir der Einfachheit halber voraus, dass ψ die Gestalt

$$\psi(x, u) = \gamma_1(x) u + \gamma_2(x) u^2 \quad (4.110)$$

mit Funktionen $\gamma_1, \gamma_2 \in L^\infty(\Omega)$ und $\gamma_2 \geq 0$ hat. Offenbar ist das Funktional

$$\int_{\Omega} (\gamma_1(x) u(x) + \gamma_2(x) u(x)^2) dx$$

zweimal stetig Fréchet-differenzierbar auf $L^2(\Omega)$.

Bemerkung. Man kann nachweisen, dass eine hinreichende Bedingung zweiter Ordnung nur dann erfüllt sein kann, wenn $\gamma_2(x) \geq \delta > 0$ für fast alle $x \in \Omega$ gilt; siehe z.B. [198].

Unter diesen Voraussetzungen kann man in den (strengen) hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung den Raum $L^\infty(\Omega)$ für die Steuerung durch $L^2(\Omega)$ ersetzen:

Satz 4.33 *Gegeben sei die Aufgabe (4.31)–(4.33) der verteilten Steuerung, die Voraussetzung 4.14 auf S. 164 sei erfüllt und die Steuerung $\bar{u} \in U_{ad} \subset L^2(\Omega)$ genüge gemeinsam mit dem zugehörigen Zustand $\bar{y} = G(\bar{u})$ und dem adjungierten Zustand p der notwendigen Optimalitätsbedingung erster Ordnung aus Satz 4.20 auf S. 173. Es sei $N \leq 3$ und die Funktion $\psi = \psi(u)$ habe die Form (4.110). Genügt das Paar (\bar{y}, \bar{u}) zusätzlich der hinreichenden Bedingung zweiter Ordnung (4.104) auf S. 196, dann existieren Konstanten $\varepsilon > 0$ und $\sigma > 0$, so dass die quadratische Wachstumsbedingung*

$$J(y, u) \geq J(\bar{y}, \bar{u}) + \sigma \|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

für alle $u \in U_{ad}$ mit $\|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$ und die zugehörigen Zustände $y = G(u)$ gilt. Folglich ist \bar{u} lokal optimale Steuerung im Sinne von $L^2(\Omega)$.

Randsteuerung. Ähnlich liegen die Dinge bei der Aufgabe der Randsteuerung (4.50)–(4.52) auf S. 174, falls Ω ein beschränktes zweidimensionales Lipschitzgebiet ist. Hier ist

$G : u \mapsto y$ zweimal stetig differenzierbar von $L^2(\Gamma)$ nach $H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Daher bleibt Satz 4.33 unter entsprechender Modifikation für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ gültig. Man erhält lokale Optimalität von \bar{u} im Sinne von $L^2(\Gamma)$.

4.10.7 Lokale Optimalität in $L^r(\Omega)$

Die bisher bewiesenen Sätze zur lokalen Optimalität haben bei Vorliegen der Zwei-Norm-Diskrepanz eine Schwachstelle. Sie sichern die lokale Optimalität von \bar{u} nur im Sinne des Raumes $L^\infty(\Omega)$ bzw. $L^\infty(\Gamma)$. Hat \bar{u} Sprungstellen, so müssen im Sinne der L^∞ -Norm benachbarte Funktionen gleiches Sprungverhalten wie \bar{u} aufweisen um zur L^∞ -Umgebung zu gehören, in der \bar{u} den (lokal) kleinsten Zielfunktionswert liefert. Das betrifft zumindest hinreichend kleine Umgebungen. Deshalb wäre es von Vorteil, lokale Optimalität von \bar{u} in der $L^r(\Omega)$ -Norm mit $r < \infty$ zu zeigen. Dann spielten solche Effekte keine Rolle.

Auf diese Problematik wollen wir kurz eingehen, exemplarisch für verteilte Steuerung. Hier wissen wir, dass G für alle $r > N/2$ stetig Fréchet-differenzierbar von $L^r(\Omega)$ in $C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ ist. Der im Beweis von Satz 4.24 auf S. 190 eingeführte lineare Lösungsoperator $R : u \mapsto y$ zum Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta y + y &= u \\ \partial_\nu y &= 0 \end{aligned}$$

ist ebenfalls stetig von $L^r(\Omega)$ nach $C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$. Die Gleichung (4.84),

$$y - R(u - \Phi(y)) = F(y, u) = 0$$

mit $\Phi(y) = d(\cdot, y) - y$ ist damit im Raumpaar $(C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)) \times L^r(\Omega)$ korrekt gestellt. Es gilt $F : (C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)) \times L^r(\Omega) \rightarrow C(\bar{\Omega})$ und der Satz über implizite Funktionen ist anwendbar. Deshalb ist der Lösungsoperator G zweimal stetig differenzierbar von $L^r(\Omega)$ nach $C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$.

Wir setzen jetzt wie im letzten Teilabschnitt $\psi(x, u) = \gamma_1(x)u + \gamma_2(x)\lambda u^2$ voraus. Geht man den Beweis der letzten Aussagen bis zu Satz 4.29 durch, dann wird deutlich, dass $\|h\|_{L^\infty(\Omega)}$ durch $\|h\|_{L^r(\Omega)}$ ersetzt werden kann, ohne die Richtigkeit der Abschätzungen zu verletzen. Analog bleibt der Beweis von Lemma 4.26 auf S. 193 richtig, wenn man dort die Norm $\|u - \bar{u}\|_{L^\infty(\Omega)}$ durch $\|u - \bar{u}\|_{L^r(\Omega)}$ ersetzt. Daraus folgt insgesamt eine L^r -Version von Satz 4.29:

Satz 4.34 Die Steuerung $\bar{u} \in U_{ad}$ genüge gemeinsam mit dem zugehörigen Zustand $\bar{y} = G(\bar{u})$ und dem adjungierten Zustand p der notwendigen Optimalitätsbedingung erster Ordnung aus Satz 4.20 auf S. 173. Die Funktion ψ habe mit $\gamma_i \in L^\infty(\Omega)$, $i = 1, 2$, die Form

$$\psi(x, u) = \gamma_1(x)u + \gamma_2(x)\lambda u^2$$

und es sei $r > N/2$ gegeben. Sind zusätzlich Voraussetzung 4.14 und die (strenge) hinreichende Bedingung zweiter Ordnung (4.105) auf S. 197 erfüllt, dann existieren Konstanten $\varepsilon > 0$ und $\sigma > 0$, so dass die quadratische Wachstumsbedingung

$$J(y, u) \geq J(\bar{y}, \bar{u}) + \sigma \|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

für alle $u \in U_{ad}$ mit $\|u - \bar{u}\|_{L^r(\Omega)} \leq \varepsilon$ und die zugehörigen Zustände $y = G(u)$ gilt. Folglich ist \bar{u} lokal optimale Steuerung im Sinne von $L^r(\Omega)$.

Bemerkung. Der Satz kann nicht ohne Weiteres auf Probleme übertragen werden, bei denen die Steuerung nichtlinear in der Differentialgleichung vorkommt oder das Zielfunktional nicht die geforderte quadratische Gestalt bezüglich u hat. In solchen Fällen müssen Zusatzvoraussetzungen getroffen werden, siehe [54]. Die L^r -Optimalität wurde ohne Berücksichtigung stark aktiver Restriktionen hergeleitet. Soll dies geschehen, dann wird die Analysis schwieriger, siehe z.B. [199] für den Fall von Navier-Stokes-Gleichungen.

4.11 Numerische Verfahren

4.11.1 Gradienten-Projektionsverfahren

Im Prinzip unterscheidet sich dieses Verfahren nicht von dem ab S. 134 für linear-quadratische parabolische Probleme beschriebenen. Die Nichtlinearität der Gleichung bereitet aber in Schritt 1 eine zusätzliche Schwierigkeit, die das Verfahren wenig attraktiv macht: Ausgehend von der aktuellen Steuerung u_n ist zur Bestimmung des Zustands y_n die semilineare Gleichung (4.51) zu lösen, wozu ein Iterationsverfahren benötigt wird, z.B. das Newtonverfahren. Daher ist es sinnvoller, statt des Gradienten-Projektionsverfahrens ein Verfahren vom Newton-Typ wie das SQP-Verfahren anzuwenden, das im nächsten Abschnitt behandelt wird.

Aufwändig ist auch die Wahl der Schrittweite, die selbst im Fall ohne Beschränkungen nicht mehr analytisch bestimmt werden kann. Hier muss man sich zufrieden geben, wenn eine Schrittweite s_n mit hinreichend großem Abstieg gefunden ist. Dies kann mit dem Halbierungsverfahren oder der Regel von Armijo geschehen, siehe Abschnitt 2.12.2.

4.11.2 Grundidee des SQP-Verfahrens

Zur Motivierung des SQP-Verfahrens, dem Verfahren der Sequentiellen Quadratischen Programmierung, diskutieren wir zuerst eine Aufgabe im Raum \mathbb{R}^n ,

$$\min f(u), \quad u \in C, \quad (4.111)$$

mit $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und einer nicht leeren, konvexen und abgeschlossenen Menge $C \subset \mathbb{R}^n$. Zu Beginn behandeln wir den Fall *ohne Nebenbedingungen*, d.h. den Fall $C = \mathbb{R}^n$. Dann lautet die notwendige Optimalitätsbedingung erster Ordnung für eine lokale Lösung \bar{u} von (4.111)

$$f'(\bar{u}) = 0. \quad (4.112)$$

Diese Gleichung kann man mit dem Newtonverfahren lösen, sofern dessen Konvergenzbedingungen erfüllt sind. Ausgehend von der aktuellen Iterierten u_n ergibt sich $u = u_{n+1}$ als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$f'(u_n) + f''(u_n)(u - u_n) = 0. \quad (4.113)$$

Für die eindeutige Lösbarkeit dieses System muss die Matrix $f''(u_n)$ regulär sein, also positiv definit im Fall eines lokalen Minimums. Folglich ist im lokalen Minimum die hinreichende Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung die natürliche Voraussetzung für die Konvergenz des Newtonverfahrens gegen eine lokale Minimumstelle.

Nun betrachten wir das Newtonverfahren aus anderer Sicht. Die Gleichung (4.113) ist die notwendige Optimalitätsbedingung erster Ordnung für die linear-quadratische Optimierungsaufgabe

$$\min \left\{ f'(u_n)^\top (u - u_n) + \frac{1}{2} (u - u_n)^\top f''(u_n) (u - u_n) \right\}. \quad (4.114)$$

Bei positiver Definitheit der Hesse-Matrix $f''(u_n)$ hat dieses Problem genau eine Lösung u_{n+1} , denn die Zielfunktion ist dann streng konvex. Es ist gleich, ob wir die quadratische Optimierungsaufgabe (4.114) oder das lineare Gleichungssystem (4.113) lösen. Beide sind äquivalent. Das Newtonverfahren zur Lösung des nichtlinearen Systems (4.112) kann deshalb alternativ durch Lösung der Folge von quadratischen Optimierungsaufgaben (4.114) ausgeführt werden, als *SQP-Verfahren*.

Das ist der Schlüssel zur Behandlung der Aufgabe *mit Nebenbedingungen*. An Stelle der Gleichung (4.112) gilt dann die Variationsungleichung

$$f'(\bar{u})^\top (u - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u \in C. \quad (4.115)$$

Eine direkte Anwendung des klassischen Newtonverfahrens ist nicht möglich. Aber wir können die Nebenbedingung $u \in C$ problemlos zur Aufgabe (4.114) hinzufügen. Wir lösen

$$\boxed{\min_{u \in C} \left\{ f'(u_n)^\top (u - u_n) + \frac{1}{2} (u - u_n)^\top f''(u_n) (u - u_n) \right\}} \quad (4.116)$$

und erhalten so die nächste Iterierte u_{n+1} .

Bei positiver Definitheit der Hesse-Matrix $f''(u_n)$ hat (4.116) genau eine Lösung. Die Lösung der Folge quadratischer Optimierungsaufgaben (4.116) kann als Newtonverfahren zur Lösung einer verallgemeinerten Gleichung interpretiert werden und dieses Verfahren ist wie das klassische Newtonverfahren lokal quadratisch konvergent. Hinreichend für die lokale Konvergenz gegen \bar{u} sind z.B. die positive Definitheit von $f''(\bar{u})$ und die Glattheitsforderung $f \in C^{2,1}$. Wir verweisen auf Alt [7], Robinson [177] und Spellucci [187]. Das Newtonverfahren für Gleichungen im Funktionenraum ist bei Deuffhard [60] sowie Kantorowitsch und Akilow [118] dargestellt. Für die Optimierung relevante Verallgemeinerungen auf Lipschitz-stetige Funktionen werden von Klatte und Kummer [124] behandelt.

Direkte Anwendung auf Optimalsteuerungsprobleme

Die eben beschriebene Grundidee kann man direkt auf den Fall eines Banachraums U an Stelle von \mathbb{R}^n übertragen, z.B. auf $U = L^\infty(\Gamma)$, $C = U_{ad}$ und das Funktional

$$f(u) = J(y(u), u) = \int_{\Omega} \varphi(x, y(x)) dx + \int_{\Gamma} \psi(x, u(x)) ds(x),$$

wobei $y = y(u)$ die Lösung der elliptischen Randwertaufgabe (4.51) ist,

$$\begin{aligned} -\Delta y &= 0 & \text{in } \Omega \\ \partial_\nu y + b(x, y) &= u & \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Die Ableitungen $f'(u_n)$ und $f''(u_n)$ werden wie in Formel (4.57) auf S. 175 bzw. wie in Satz 4.25 auf S. 193 über die Lagrangefunktion ermittelt. Ausgehend von $u_n \in U_{ad}$ ergibt sich $u = u_{n+1}$ als Lösung der quadratischen Optimalsteuerungsaufgabe

$$\min_{u \in U_{ad}} \left\{ f'(u_n)(u - u_n) + \frac{1}{2} f''(u_n)(u - u_n)^2 \right\}.$$

Allerdings besteht bei der Durchführung dieses „SQP“-Verfahrens ein kleiner, aber wesentlicher Unterschied zu dem aus der Literatur der nichtlinearen Optimierung bekannten SQP-Verfahren, weshalb das Verfahren ebenfalls *Newtonverfahren* genannt wird:

Ist die neue Iterierte u_{n+1} berechnet, dann wird der neue Zustand y_{n+1} als Lösung der semilinearen elliptischen Gleichung bestimmt, $y_{n+1} = y(u_{n+1}) = G(u_{n+1})$. Die Berechnung von y_{n+1} könnte wieder mit dem Newtonverfahren erfolgen. Dieser zusätzliche Aufwand wird umgangen, indem man an Stelle der Vorschrift $y_{n+1} = G(u_{n+1})$ deren Linearisierung

$$y_{n+1} = y_n + G'(u_n)(u_{n+1} - u_n)$$

verwendet und so nur eine lineare Gleichung löst. Das so aufgebaute SQP-Verfahren wird im nächsten Abschnitt behandelt.

4.11.3 Das SQP-Verfahren für elliptische Probleme

Wir diskutieren das Verfahren zur Abwechslung für die Aufgabe der verteilten Steuerung (4.31)–(4.33),

$$\min J(y, u) := \int_{\Omega} \varphi(x, y(x)) dx + \int_{\Omega} \psi(x, u(x)) dx$$

bei

$$\begin{array}{rcl} -\Delta y + d(x, y) & = & u \quad \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu} y & = & 0 \quad \text{auf } \Gamma \end{array}$$

sowie

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \quad \text{f.ü. in } \Omega.$$

Dabei fordern wir Voraussetzung 4.14 und gehen von der Bestimmung einer lokalen Referenzlösung (\bar{y}, \bar{u}) aus, welche die hinreichenden Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung (4.105) erfüllt. Mit p wird wie bisher der zugehörige adjungierte Zustand bezeichnet. Das Tripel (\bar{y}, \bar{u}, p) genügt dem *Optimalitätssystem*

$$\begin{array}{rcl} -\Delta y + d(x, y) & = & u \quad \quad \quad -\Delta p + d_y(x, y) p & = & \varphi_y(x, y) \\ \partial_{\nu} y & = & 0 \quad \quad \quad \partial_{\nu} p & = & 0 \end{array}$$

$$\int_{\Omega} (\psi_u(x, u) + p)(v - u) dx \geq 0 \quad \forall v \in U_{ad}.$$

Wie bei der Motivierung des SQP-Verfahrens betrachten wir zuerst den Fall ohne Restriktionen an u , also $U_{ad} = L^{\infty}(\Omega)$. Dann gilt an Stelle der Variationsungleichung die Gleichung $\psi_u(\cdot, u) + p = 0$, also das Optimalitätssystem

$$\begin{array}{rcl} -\Delta y + d(x, y) & = & u \quad \quad \quad -\Delta p + d_y(x, y) p & = & \varphi_y(x, y) \\ \partial_{\nu} y & = & 0 \quad \quad \quad \partial_{\nu} p & = & 0 \end{array}$$

$$\psi_u(x, u) + p = 0.$$

Dieses nichtlineare Gleichungssystem für (y, u, p) kann mit dem Newtonverfahren gelöst werden, siehe Deuffhard [60]. So seien schon $(y_1, u_1, p_1), \dots, (y_n, u_n, p_n)$ bestimmt worden. Dann berechnen wir die neue Iterierte $(y_{n+1}, u_{n+1}, p_{n+1})$ als Lösung des an der Stelle (y_n, u_n, p_n) linearisierten Optimalitätssystems.

Dazu lohnt sich eine kleine Nebenrechnung. Linearisierung einer Abbildung F heißt $F(y) \approx F(y_n) + F'(y_n)(y - y_n)$. Bei Anwendung auf die erste Gleichung erhalten wir

$$-\Delta y_n - \Delta(y - y_n) + d(x, y_n) + d_y(x, y_n)(y - y_n) - u_n - (u - u_n) = 0,$$

d.h.

$$-\Delta y + d(x, y_n) + d_y(x, y_n)(y - y_n) - u = 0.$$

Die linearen Anteile ändern sich also nicht. Für das Optimalitätssystem ergeben sich so zur Bestimmung von $(y, u, p) = (y_{n+1}, u_{n+1}, p_{n+1})$ die Gleichungen

$$\begin{array}{rcl} -\Delta y + d(x, y_n) + d_y(x, y_n)(y - y_n) & = & u \\ \partial_\nu y & = & 0 \\ -\Delta p + d_y(x, y_n)p + p_n d_{yy}(x, y_n)(y - y_n) & = & \varphi_y(x, y_n) + \\ & & + \varphi_{yy}(x, y_n)(y - y_n) \\ \partial_\nu p & = & 0 \\ \psi_u(x, u_n) + \psi_{uu}(x, u_n)(u - u_n) + p & = & 0. \end{array} \quad (4.117)$$

Das ist nichts anderes als das Optimalitätssystem der Aufgabe

$$\begin{aligned} \min \Big\{ & \int_{\Omega} (\varphi_y(x, y_n)(y - y_n) + \psi_u(x, u_n)(u - u_n)) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} p_n d_{yy}(x, y_n)(y - y_n)^2 dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\varphi_{yy}(x, y_n)(y - y_n)^2 + \psi_{uu}(x, u_n)(u - u_n)^2) dx \Big\} \end{aligned}$$

bei $u \in L^2(\Omega)$ und

$$\begin{array}{rcl} -\Delta y + d(x, y_n) + d_y(x, y_n)(y - y_n) & = & u \\ \partial_\nu y & = & 0. \end{array}$$

Diese Aufgabe ist äquivalent zum linear-quadratischen Problem

$$\min \left\{ J'(y_n, u_n)(y - y_n, u - u_n) + \frac{1}{2} \mathcal{L}''(y_n, u_n, p_n)(y - y_n, u - u_n)^2 \right\}$$

bei

$$\begin{array}{rcl} -\Delta y + d(x, y_n) + d_y(x, y_n)(y - y_n) & = & u \\ \partial_\nu y & = & 0. \end{array}$$

Wir können also an Stelle des Systems (4.117) auch dieses Problem lösen.

Während (4.117) als *Gleichungssystem* nicht direkt auf den Fall mit Beschränkungen $u \in U_{ad}$ übertragen werden kann, ist das für die obige Aufgabe ohne Weiteres möglich. Es sind nur die Nebenbedingungen hinzuzufügen. Mit Box-Restriktionen ist demnach im

n-ten Schritt die Aufgabe

$$\begin{array}{l}
 \min \left\{ J'(y_n, u_n)(y - y_n, u - u_n) + \frac{1}{2} \mathcal{L}''(y_n, u_n, p_n)(y - y_n, u - u_n)^2 \right\} \\
 \text{bei} \\
 (\text{QP}_n) \quad \begin{array}{lcl}
 -\Delta y + d(x, y_n) + d_y(x, y_n)(y - y_n) & = & u \\
 \partial_\nu y & = & 0 \\
 u_a \leq u \leq u_b.
 \end{array}
 \end{array}$$

zu lösen. Als Ergebnis erhält man die neue Steuerung u_{n+1} , den neuen Zustand y_{n+1} sowie danach den zugehörigen adjungierten Zustand p_{n+1} , dessen Differentialgleichung in Übungsaufgabe 4.10 zu bestimmen ist. Damit ist die Verfahrensvorschrift für das SQP-Verfahren beschrieben. Eine Reihe von Fragen ergibt sich: Hat (QP_n) eine Lösung (y_{n+1}, u_{n+1}) ? Ist diese Lösung eindeutig festgelegt? Konvergiert das Verfahren und, wenn ja, mit welcher Ordnung?

Satz 4.35 *Das Tripel (\bar{y}, \bar{u}, p) genüge den notwendigen Optimalitätsbedingungen für die Aufgabe mit verteilter Steuerung (4.31)–(4.33) und der hinreichenden Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung (4.105) auf S. 197. Die Voraussetzung 4.14 auf S. 164 sei erfüllt. Dann existiert ein Konvergenzradius $\varrho > 0$, so dass das SQP-Verfahren ausgehend von einer Startnäherung (y_0, u_0, p_0) mit*

$$\max \{ \|y_0 - \bar{y}\|_{C(\bar{\Omega})}, \|u_0 - \bar{u}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|p_0 - p\|_{C(\bar{\Omega})} \} < \varrho$$

eine eindeutig bestimmte Folge $\{(y_n, u_n, p_n)\}_{n=1}^\infty$ von Iterierten erzeugt. Es existiert eine Konstante $c_N > 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
 \|(y_{n+1}, u_{n+1}, p_{n+1}) - (\bar{y}, \bar{u}, p)\|_{C(\bar{\Omega}) \times L^\infty(\Omega) \times C(\bar{\Omega})} &\leq \\
 &\leq c_N \|(y_n, u_n, p_n) - (\bar{y}, \bar{u}, p)\|_{C(\bar{\Omega}) \times L^\infty(\Omega) \times C(\bar{\Omega})}^2.
 \end{aligned}$$

Das SQP-Verfahren ist also unter den getroffenen Voraussetzungen lokal quadratisch konvergent. Dabei wurden die schärferen hinreichenden Optimalitätsbedingungen (4.105) vorausgesetzt, bei denen keine stark aktiven Ungleichungsrestriktionen berücksichtigt sind. Das ist bei Konvergenzbeweisen für SQP-Verfahren allgemein üblich. Der auf dem Newtonverfahren für verallgemeinerte Gleichungen beruhende Beweis ist in [203] zu finden. Ein weitgehend analoger Beweis wird für den parabolischen Fall in [197] ausgeführt.

Bei **Randsteuerung** sind Struktur und Theorie des SQP-Verfahrens völlig analog zum Fall der verteilten Steuerung. Gleiches gilt für homogene Dirichlet-Randbedingungen an Stelle von Neumann-Randbedingungen.

Bemerkung. Die hier beschriebene Grundidee des SQP-Verfahrens erfordert bis zur Entwicklung von zuverlässigen Programmen noch zusätzlichen Aufwand. Zum Beispiel sind Techniken zur Globalisierung einzusetzen und die Lösung der quadratischen Unteraufgaben sinnvoll mit der äußeren Iteration zu verbinden, wir verweisen auf die Fachliteratur. Bei den in unserem Buch angegebenen akademischen Testbeispielen funktioniert die Grundvariante jedoch ausgezeichnet.

4.12 Übungsaufgaben

4.1 Beweisen Sie die Ungleichung

$$\|y\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq \|y\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \forall y \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

in beschränkten Lipschitzgebieten Ω .

Hinweis: $C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ ist dicht in $H^1(\Omega)$. Wählen Sie eine Folge $\{y_n\}$ von Funktionen aus $C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ mit $y_n \rightarrow y$ in $H^1(\Omega)$, $n \rightarrow \infty$, und projizieren sie diese auf $[-c, c]$ mit $c = \|y\|_{L^\infty(\Omega)}$. Die Projektion ist stetig in $H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Wenden Sie den Spursatz 2.1 auf S. 23 an.

4.2 Untersuchen Sie die semilineare elliptische Aufgabe (4.5) von S. 147 auf Eindeutigkeit der Lösung. Zeigen Sie, dass unter Voraussetzung 4.2 auf S. 148 in $H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ höchstens eine Lösung y existieren kann.

4.3 Es sei $E \subset \mathbb{R}^N$ eine beschränkte und messbare Menge. Für welche Räume $L^q(E)$ ist der Nemytskii-Operator $y(\cdot) \mapsto \sin(y(\cdot))$ Fréchet-differenzierbar von $L^2(E)$ nach $L^q(E)$?

4.4 (i) Beweisen Sie, dass der Nemytskii-Operator $y(\cdot) \mapsto \sin(y(\cdot))$ in keinem Raum $L^p(0, T)$ mit $1 \leq p < \infty$ Fréchet-differenzierbar ist. Hinweis: Die erforderliche Eigenschaft des Restglieds ist schon für Treppenfunktionen nicht erfüllt.

(ii) Zeigen Sie zusätzlich, dass dieser Operator Fréchet-differenzierbar von $L^{p_1}(0, T)$ nach $L^{p_2}(0, T)$ für alle $1 \leq p_2 < p_1 \leq \infty$ ist.

4.5 Bestätigen Sie ohne Rückgriff auf Lemma 4.11, dass die in (4.34) definierten Funktionale F und Q ,

$$F(y) = \int_{\Omega} \varphi(x, y(x)) \, dx, \quad Q(u) = \int_{\Omega} \psi(x, u(x)) \, dx$$

unter Voraussetzung 4.14 auf S. 164 Lipschitz-stetig auf ihren Definitionsgebieten sind. Weisen Sie außerdem die Konvexität von Q nach.

4.6 Es seien eine beschränkte und messbare Menge $E \subset \mathbb{R}^N$ sowie Funktionen u_a, u_b aus $L^\infty(E)$ mit $u_a(x) \leq u_b(x)$ fast überall in E gegeben. Verifizieren Sie, dass die Menge

$$U_{ad} = \{u \in L^r(E) : u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \text{ f.ü. in } E\}$$

nichtleer, abgeschlossen, konvex und beschränkt in $L^r(E)$ ist für alle $1 \leq r \leq \infty$.

4.7 Beweisen Sie die in Beziehung (4.41) verwendete Darstellung

$$\Phi(\tilde{y}) - \Phi(\bar{y}) = d(\cdot, \tilde{y}(\cdot)) - d(\cdot, \bar{y}(\cdot)) = d_y(\cdot, \tilde{y}(\cdot)) (\tilde{y}(\cdot) - \bar{y}(\cdot)) + r_d$$

mit einem Rest r_d , der $\|r_d\|_{C(\bar{\Omega})} / \|\tilde{y} - \bar{y}\|_{C(\bar{\Omega})} \rightarrow 0$ für $\|\tilde{y} - \bar{y}\|_{C(\bar{\Omega})} \rightarrow 0$ erfüllt.

4.8 Weisen Sie nach, dass $\bar{u}(x) \equiv 2$ für $\lambda \in (0, 1]$ und $y_\Omega = 9$ den notwendigen Optimalitätsbedingungen der auf S. 173 definierten Aufgabe „Supraleitung“ genügt. Sind hinreichende Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung erfüllt?

4.9 Zeigen Sie, dass das Funktional f ,

$$f(u) = \int_0^1 \cos(u(x)) \, dx,$$

im Raum $L^2(0, 1)$ nicht zweimal Fréchet-differenzierbar ist. Verwenden Sie den Hinweis aus Aufgabe 4.4. In welchen Räumen $L^p(0, 1)$ existiert die Fréchet-Ableitung zweiter Ordnung?

4.10 Leiten Sie die adjungierte Gleichung für den adjungierten Zustand p_{n+1} zu der auf S. 209 definierten linear-quadratischen Teilaufgabe (QP_n) her.

5 Steuerung semilinearer parabolischer Gleichungen

In diesem Kapitel behandeln wir analog zu Aufgaben der Optimalsteuerung semilinearer elliptischer Gleichungen den parabolischen Fall. Die Theorie der Existenz und Regularität von Lösungen parabolischer Gleichungen unterscheidet sich in mancher Hinsicht von der für elliptische Aufgaben. Die optimierungstheoretischen Aspekte weisen aber viele Parallelen auf. Daher braucht die Theorie der Optimalsteuerung parabolischer Gleichungen nicht in gleicher Ausführlichkeit wie in Kapitel 4 dargestellt zu werden. Wir diskutieren die Gleichungen relativ detailliert, kürzen aber die Optimierungstheorie ab, weil die Beweise fast identisch mit denen des elliptischen Falls sind.

5.1 Die semilineare parabolische Modellgleichung

Die Zustandsgleichungen in den nachfolgenden Abschnitten sind Spezialfälle des folgenden allgemeinen Anfangs-Randwertproblems

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y_t + \mathcal{A}y + d(x, t, y) & = & f \quad \text{in } Q \\ \partial_{\nu_{\mathcal{A}}} y + b(x, t, y) & = & g \quad \text{in } \Sigma \\ y(\cdot, 0) & = & y_0 \quad \text{in } \Omega, \end{array}} \quad (5.1)$$

mit analog zum elliptischen Fall definierten Funktionen d , b , Mengen $Q := \Omega \times (0, T)$ und $\Sigma := \Gamma \times (0, T)$; \mathcal{A} ist wieder der in (2.19) auf S. 30 definierte gleichmäßig elliptische Differentialoperator und $\partial_{\nu_{\mathcal{A}}}$ bezeichnet die zugehörige Konormalenableitung. Der Übersichtlichkeit halber unterdrücken wir wie in (5.1) meist die Angabe der Variablen x, t in der gesuchten Funktion y und in den gegebenen Daten.

In diesem Abschnitt werden die wesentlichen Aussagen über die Gleichung (5.1) skizziert. Hauptergebnisse sind das Lemma 7.12 über die Stetigkeit der Lösung des linearen Anfangs-Randwertproblems sowie Satz 5.5 über die Existenz und Eindeutigkeit einer stetigen schwachen Lösung von (5.1). Diese zuerst von Casas [46] sowie Raymond und Zidani [175] bewiesenen Sätze bilden die Grundlage für die zugehörige Theorie der Optimalsteuerung.

Wir benötigen folgende Grundvoraussetzungen:

Voraussetzung 5.1 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, sei ein beschränktes Lipschitzgebiet (für $N = 1$ ein beschränktes offenes Intervall). Die Funktion $d = d(x, t, y) : Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soll für

jedes feste $y \in \mathbb{R}$ in $(x, t) \in Q$ messbar sein. Analog erfülle $b = b(x, t, y) : \Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die gleiche Voraussetzung mit Σ an Stelle von Q . Zusätzlich seien d und b in y monoton wachsend für fast alle $(x, t) \in Q$ bzw. $(x, t) \in \Sigma$.

Als Standardräume zur Behandlung linearer parabolischer Gleichungen wurden bisher $W_2^{1,0}(Q)$ bzw. $W(0, T)$ verwendet. Für $y \in W(0, T)$ bzw. $y \in W_2^{1,0}(Q)$ können aber ohne weitere Vorkehrungen die Funktionen $d(x, t, y(x, t))$ bzw. $b(x, t, y(x, t))$ unbeschränkt sein und sind nicht notwendig integrierbar. Für den Beweis der Existenz und der Eindeutigkeit einer Lösung von (5.1) fügen wir deshalb zunächst eine weitere Voraussetzung hinzu:

Voraussetzung 5.2 Die Funktion $d = d(x, t, y) : Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gleichmäßig beschränkt und global Lipschitz-stetig in y für fast alle $(x, t) \in Q$: Es existieren $K > 0$ und $L > 0$, so dass für fast alle $(x, t) \in Q$ und alle $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$$|d(x, t, 0)| \leq K \quad (5.2)$$

$$|d(x, t, y_1) - d(x, t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad (5.3)$$

gilt. Die Funktion $b = b(x, t, y) : \Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle die gleiche Voraussetzung mit Σ an Stelle von Q .

Die für lineare Gleichungen aufgeschriebene schwache Formulierung (3.25) auf S. 112 wird wie folgt auf den nichtlinearen Fall erweitert:

Definition. Es seien die Voraussetzungen 5.1 und 5.2 erfüllt. Eine Funktion $y \in W_2^{1,0}(Q)$ heißt dann schwache Lösung von (5.1), wenn

$$\begin{aligned} - \iint_Q y v_t dx dt + \iint_Q \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_i y D_j v + d(x, t, y) v \right) dx dt + \iint_{\Sigma} b(x, t, y) v ds dt = \\ \iint_Q f v dx dt + \iint_{\Sigma} g v ds dt + \int_{\Omega} y_0 v(\cdot, 0) dx \end{aligned} \quad (5.4)$$

für alle $v \in W_2^{1,1}(Q)$ erfüllt ist, die der zusätzlichen Forderung $v(x, T) = 0$ genügen.

Die Beziehung (5.4) ist die schwache oder Variationsformulierung des Anfangs-Randwertproblems (5.1). Als parabolisches Gegenstück zu Lemma 4.4 auf S. 149 erhalten wir:

Lemma 5.3 Unter den Voraussetzungen 5.1 und 5.2 besitzt das Anfangs-Randwertproblem (5.1) für jedes Tripel von Daten $f \in L^2(Q)$, $g \in L^2(\Sigma)$, $y_0 \in L^2(\Omega)$ genau eine schwache Lösung $y \in W_2^{1,0}(Q)$.

Dieses Lemma wird in Abschnitt 7.3.1 ab S. 290 bewiesen. Die Voraussetzung 5.2 ist aber zu stark und schließt viele wichtige Anwendungen aus. Nichtlineare Funktionen wie $d(y) = y^n$, $n > 1$, erfüllen sie zum Beispiel nicht. Deshalb arbeitet man mit lokaler Beschränktheit und lokaler Lipschitzstetigkeit:

Voraussetzung 5.4 Die Funktion $d = d(x, t, y) : Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle auf $E = Q$ die Beschränktheitsbedingung (5.2) und sei für alle $(x, t) \in E$ lokal Lipschitz-stetig in y , d.h. für alle $M > 0$ existiert ein $L(M) > 0$, so dass

$$|d(x, t, y_1) - d(x, t, y_2)| \leq L(M) |y_1 - y_2| \quad (5.5)$$

für alle $y_i \in \mathbb{R}$ mit $|y_i| \leq M$, $i = 1, 2$ gilt. Die Funktion $b = b(x, t, y) : \Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genüge der gleichen Bedingung auf $E = \Sigma$.

Analog zu Satz 4.5 auf S. 151 kann ohne die starke Voraussetzung 5.2 gezeigt werden, dass bei Vorgaben f und g aus passenden L^p -Räumen genau eine Lösung in der Klasse der essentiell beschränkten Funktionen aus $W(0, T)$ existiert. Die Beschränktheit von d und b wird dazu nicht gebraucht. Man kommt also mit der schwächeren Voraussetzung 5.4 auf S. 212 aus und folgender Begriff der schwachen Lösung ist daher sinnvoll:

Definition. Eine Funktion $y \in W_2^{1,0}(Q) \cap L^\infty(Q)$ heißt schwache Lösung von (5.1), wenn die Variationsformulierung (5.4) für alle $v \in W_2^{1,1}(Q)$ erfüllt ist, die der zusätzlichen Forderung $v(x, T) = 0$ genügen.

Die entsprechenden Existenz- und Eindeigkeitsresultate wurden im Zusammenhang mit optimalen Steuerungsproblemen von Casas [46] bzw. Raymond und Zidani [176] bewiesen.

Satz 5.5 ([46],[176]) Unter den Voraussetzungen 5.1 und 5.4 besitzt das semilineare parabolische Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{aligned} y_t + \mathcal{A}y + d(x, t, y) &= f && \text{in } Q \\ \partial_{\nu_{\mathcal{A}}}y + b(x, t, y) &= g && \text{in } \Sigma \\ y(0) &= y_0 && \text{in } \Omega \end{aligned}$$

zu jedem Tripel $f \in L^r(Q)$, $g \in L^s(\Sigma)$, $y_0 \in C(\bar{\Omega})$, $r > N/2 + 1$, $s > N + 1$, genau eine schwache Lösung $y \in W(0, T) \cap L^\infty(Q)$. Diese ist stetig auf \bar{Q} und mit einer von d , b , f , g und y_0 unabhängigen Konstanten $c_\infty > 0$ gilt die Abschätzung

$$\|y\|_{W(0,T)} + \|y\|_{C(\bar{Q})} \leq c_\infty (\|f - d(\cdot, 0)\|_{L^r(Q)} + \|g - b(\cdot, 0)\|_{L^s(\Sigma)} + \|y_0\|_{C(\bar{\Omega})}). \quad (5.6)$$

Die Grundidee des Beweises ist die folgende: Mit Lemma 5.3 erhält man analog zum elliptischen Fall genau eine Lösung für die Aufgabe mit den abgeschnittenen Funktionen d_k und b_k . Dazu existiert eine von k unabhängige Schranke für $\|y_k\|_{L^\infty(Q)}$, die man mit Methoden aus [134] nachweist. Die Stetigkeit der Lösung folgt aus Lemma 7.12 auf S. 293, dem parabolischen Analogon zu Satz 4.8 auf S. 153. Zur Anwendung dieses Lemmas bringt man die beschränkten und messbaren Funktionen $d(x, t, y)$ und $b(x, t, y)$ auf die rechte Seite der Differentialgleichung bzw. der Randbedingung und hat dann Vorgaben aus $L^r(Q)$ bzw. $L^s(\Sigma)$. Die Abschätzung für $\|y\|_{W(0,T)}$ in (5.6) folgt aus Lemma 7.10.

Bemerkung. Für $y_0 \in L^\infty(\Omega)$ kann nicht mehr $y \in C(\bar{Q})$ erwartet werden. In diesem Fall erhält man $y \in C((0, T] \times \bar{\Omega}) \cap L^\infty(Q)$, siehe Raymond und Zidani [176]. Dies betrifft insbesondere die Regularität von adjungierten Zuständen, weil in deren Endbedingung eine nur beschränkte und messbare Funktion stehen kann. Dann ist in (5.6) die Maximumnorm $\|y_0\|_{C(\bar{\Omega})}$ durch die L^∞ -Norm $\|y_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ zu ersetzen.

5.2 Grundvoraussetzungen des Kapitels

Zur besseren Lesbarkeit treffen wir auch diesem Kapitel eine insgesamt zu starke Voraussetzung, die für alle weiteren Sätze ausreicht. In den einzelnen Sätzen ist dann mehr oder weniger offensichtlich, auf welche Teile der Voraussetzung man verzichten kann.

Außerdem beschränken wir uns der einfacheren Schreibweise halber immer auf den Differentialoperator $\mathcal{A} = -\Delta$. Alle weiteren Ergebnisse bleiben für den bisher betrachteten allgemeinen elliptischen Operator \mathcal{A} gültig.

Neben $d = d(x, t, y)$ und $b = b(x, t, y)$ treten folgende Größen auf: In den Zielfunktionalen die Funktionen $\phi = \phi(x, y)$, $\varphi = \varphi(x, t, y, v)$, $\psi = \psi(x, t, y, u)$ sowie in den Restriktionen an die Steuerungen die Schranken u_a, u_b, v_a, v_b , welche sämtlich von (x, t) abhängen. Die „Funktionsvariablen“ sind y , wo der Zustand $y(x, t)$ eingesetzt wird, sowie v, u für die Steuerungen $v(x, t), u(x, t)$. Sie können teilweise auch fehlen, was kein Widerspruch zu den folgenden Voraussetzungen ist.

Wir verwenden wieder die Mengen $Q = \Omega \times (0, T)$ und $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$.

Voraussetzung 5.6 (i) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ist ein beschränktes Lipschitzgebiet.

(ii) Die Funktionen $d = d(x, t, y) : Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi = \phi(x, y) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi = \varphi(x, t, y, v) : Q \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $b = b(x, t, y) : \Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi = \psi(x, t, y, u) : \Sigma \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ seien für feste reelle Variablen y, v, u messbar in (x, t) und für fast alle festen (x, t) aus Q bzw. Σ zweimal differenzierbar nach y, v, u . Sie genügen den Beschränktheits- und lokalen Lipschitzbedingungen (4.24)–(4.25) der Ordnung $k = 2$. Exemplarisch dargestellt bedeutet das für φ die Existenz einer Konstanten $K > 0$ und einer von $M > 0$ abhängigen Konstanten $L(M) > 0$, so dass mit den unten erläuterten Bezeichnungen $\nabla \varphi$ und φ'' für fast alle $(x, t) \in Q$ und alle $y_i, v_i \in [-M, M]$, $i = 1, 2$, Folgendes gilt:

$$\begin{aligned} |\varphi(x, t, 0, 0)| + |\nabla \varphi(x, t, 0, 0)| + |\varphi''(x, t, 0, 0)| &\leq K \\ |\varphi''(x, t, y_1, v_1) - \varphi''(x, t, y_2, v_2)| &\leq L(M) \{|y_1 - y_2| + |v_1 - v_2|\} \dots \end{aligned}$$

(iii) Zusätzlich ist $d_y(x, t, y) \geq 0$ für fast alle $(x, t) \in Q$ gefordert und $b_y(x, t, y) \geq 0$ für fast alle $(x, t) \in \Sigma$. Die Funktion y_0 sei aus $C(\bar{\Omega})$.

(iv) Die Schranken $u_a, u_b, v_a, v_b : E \rightarrow \mathbb{R}$ sind aus $L^\infty(E)$ für $E = Q$ bzw. $E = \Sigma$ und erfüllen $u_a(x, t) \leq u_b(x, t)$ bzw. $v_a(x, t) \leq v_b(x, t)$ für fast alle $(x, t) \in E$.

Bemerkungen. In (ii) stehen $\nabla \varphi$ bzw. φ'' für

$$\nabla \varphi = \begin{bmatrix} \varphi_y \\ \varphi_v \end{bmatrix}, \quad \varphi'' = \begin{bmatrix} \varphi_{yy} & \varphi_{yv} \\ \varphi_{vy} & \varphi_{vv} \end{bmatrix}.$$

Für diese Größen stellt $|\cdot|$ eine beliebige Norm im \mathbb{R}^2 bzw. $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ dar. Die Voraussetzung 5.6 erfüllen z.B. Funktionen $d, b \in C^3(\mathbb{R})$, die nur von der Funktionsvariablen abhängen wie $d(y) = y^k$, $k \in \mathbb{N}$ ungerade, $d(y) = \exp(y)$. Ein typisches Beispiel eines zulässigen φ ist

$$\varphi(x, t, y, v) = \alpha(x, t) (y - y_Q(x, t))^2 + \beta(x, t) (v - v_Q(x, t))^2$$

mit $\alpha, \beta, y_Q, v_Q \in L^\infty(Q)$, vgl. dazu auch die Bemerkungen zum elliptischen Fall nach Voraussetzung 4.14 auf S. 164.

5.3 Existenz optimaler Steuerungen

Wir beginnen die Behandlung parabolischer Optimalsteuerungsprobleme mit dem Nachweis der Existenz optimaler Steuerungen. Um viele denkbare Fälle gleichzeitig behandeln

zu können, betrachten wir eine Aufgabe, die sowohl verteilte als auch Randsteuerung einschließt sowie ein Zielfunktional mit Beobachtungen auf dem Rand, im Gebiet und zum Endzeitpunkt. Wir untersuchen die Aufgabe

$$\begin{aligned} \min J(y, v, u) &:= \int_{\Omega} \phi(x, y(x, T)) dx + \iint_Q \varphi(x, t, y(x, t), v(x, t)) dx dt \\ &+ \iint_{\Sigma} \psi(x, t, y(x, t), u(x, t)) ds dt \end{aligned} \quad (5.7)$$

bei

$$\begin{array}{rcl} y_t - \Delta y + d(x, t, y) &= & v \quad \text{in } Q \\ \partial_\nu y + b(x, t, y) &= & u \quad \text{in } \Sigma \\ y(0) &= & y_0 \quad \text{in } \Omega \end{array} \quad (5.8)$$

sowie

$$\begin{array}{rcl} v_a(x, t) \leq v(x, t) \leq v_b(x, t) & \text{f.ü. in } Q \\ u_a(x, t) \leq u(x, t) \leq u_b(x, t) & \text{f.ü. in } \Sigma. \end{array} \quad (5.9)$$

Soll eine der beiden Steuerungen nicht vorkommen, so kann durch die Festsetzung $v_a = v_b = 0$ reine Randsteuerung bzw. durch $u_a = u_b = 0$ rein verteilte Steuerung erzwungen werden. Als Mengen zulässiger Steuerungen definieren wir

$$\begin{aligned} V_{ad} &= \{v \in L^\infty(Q) : v_a(x, t) \leq v(x, t) \leq v_b(x, t) \quad \text{f.ü. in } Q\} \\ U_{ad} &= \{u \in L^\infty(\Sigma) : u_a(x, t) \leq u(x, t) \leq u_b(x, t) \quad \text{f.ü. in } \Sigma\}. \end{aligned}$$

Im Weiteren bezeichnet $y(v, u)$ den zu (v, u) gehörigen Zustand y .

Definition. Ein Paar von Steuerungen $(\bar{v}, \bar{u}) \in V_{ad} \times U_{ad}$ heißt *optimal* und $\bar{y} = y(\bar{v}, \bar{u})$ *optimaler Zustand*, wenn

$$J(y(\bar{v}, \bar{u}), \bar{v}, \bar{u}) \leq J(y(v, u), v, u)$$

für alle $(v, u) \in V_{ad} \times U_{ad}$ erfüllt ist. Es heißt *lokal optimal* im Sinne von $L^r(Q) \times L^s(\Sigma)$, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass die obige Ungleichung für alle $(v, u) \in V_{ad} \times U_{ad}$ mit $\|v - \bar{v}\|_{L^r(Q)} + \|u - \bar{u}\|_{L^s(\Sigma)} \leq \varepsilon$ gilt.

Im nächsten Satz wird die Konvexität von φ und ψ in der Steuerungsvariablen benötigt. Das heißt z.B. für φ

$$\varphi(x, t, y, \lambda v_1 + (1 - \lambda)v_2) \leq \lambda \varphi(x, t, y, v_1) + (1 - \lambda) \varphi(x, t, y, v_2)$$

für fast alle $(x, t) \in Q$, alle reellen $y, v_i, i = 1, 2$, und alle $\lambda \in (0, 1)$. Analog ist die Konvexität von ψ in der Steuerung zu verstehen.

Satz 5.7 Es sei Voraussetzung 5.6 erfüllt und φ sowie ψ seien konvex in v bzw. u . Dann besitzt die Aufgabe (5.7)–(5.9) mindestens ein Paar (\bar{v}, \bar{u}) optimaler Steuerungen mit zugehörigem optimalen Zustand $\bar{y} = y(\bar{v}, \bar{u})$.

Beweis: Der Beweis verläuft ähnlich dem von Satz 4.15 für elliptische Aufgaben. Deshalb straffen wir die Darstellung. Nach Satz 5.5 besitzt die Zustandsgleichung (5.8) für jedes Paar zulässiger Steuerungen genau einen Zustand $y = y(v, u) \in W(0, T) \cap C(\bar{Q})$. Die

Menge $V_{ad} \times U_{ad}$ ist beschränkt in $L^\infty(Q) \times L^\infty(\Sigma)$, damit erst recht in $L^r(Q) \times L^s(\Sigma)$ mit $r > N/2 + 1$, $s > N + 1$. Die Abschätzung (5.6) liefert deshalb mit einem $M > 0$ die gleichmäßige Beschränktheit

$$\|y(v, u)\|_{C(\bar{Q})} \leq M \quad \forall (v, u) \in V_{ad} \times U_{ad}. \quad (5.10)$$

Das Funktional J ist wegen Voraussetzung 5.6, der Beschränktheit von U_{ad} und V_{ad} sowie (5.10) nach unten beschränkt und hat deshalb ein endliches Infimum j . Wir können wegen Reflexivität von $L^r(Q) \times L^s(\Sigma)$ eine in diesem Raum schwach konvergente Minimalfolge $\{(v_n, u_n)\}_{n=1}^\infty$ mit schwachem Grenzwert in $V_{ad} \times U_{ad}$ auswählen,

$$v_n \rightharpoonup \bar{v}, \quad u_n \rightharpoonup \bar{u}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Wegen Konvexität und Abgeschlossenheit von $V_{ad} \times U_{ad}$ ist (\bar{v}, \bar{u}) ein Paar zulässiger Steuerungen. Nun ist die starke Konvergenz der Zustandsfolge in einem geeigneten Raum herzuleiten, was hier etwas aufwändiger ist als im elliptischen Fall. Zunächst können wir voraussetzen, dass Teilfolgen von $z_n(x, t) = -d(x, t, y_n(x, t))$ sowie von $w_n(x, t) = -b(x, t, y_n(x, t))$ in $L^r(Q)$ bzw. $L^s(\Sigma)$ schwach gegen gewisse z und w konvergieren, denn diese Funktionenfolgen sind mit y_n wegen Voraussetzung 5.6 fast überall gleichmäßig beschränkt. Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, dass diese Teilfolgen die Folgen $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ bzw. $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ selbst sind. Nun betrachten wir die parabolische semilineare Gleichung als lineares Problem mit rechten Seiten $z_n + v_n$ und $w_n + u_n$,

$$\begin{aligned} y_{n,t} - \Delta y_n &= z_n + v_n \\ \partial_\nu y_n &= w_n + u_n \\ y_n(0) &= y_0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Die rechten Seiten konvergieren schwach gegen $z + \bar{v}$ bzw. $w + \bar{u}$. Auf Grund der schwachen Stetigkeit der Lösungsabbildung $(v, u) \mapsto y(v, u)$ der linearen parabolischen Gleichung konvergiert die Zustandsfolge in $W(0, T)$ schwach gegen ein $\bar{y} \in W(0, T)$,

$$y_n \rightharpoonup \bar{y}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Gleichzeitig ist bekannt, dass bei homogener Anfangsbedingung $y_0 := 0$ die Abbildung $(v, u) \mapsto y(v, u)$ stetig von $L^r(Q) \times L^s(\Sigma)$ in den Raum Hölder-stetiger Funktionen $C^{0,\kappa}(\bar{Q})$ abbildet, $\kappa \in (0, 1)$, siehe [84], [85]. Es sei $\hat{y} \in C(\bar{Q})$ der feste Lösungsanteil von y_n zum inhomogenen Anfangswert y_0 bei homogener rechter Seite und homogener Randbedingung in (5.11). Die Folge $\{y_n - \hat{y}\}$ konvergiert schwach in $C^{0,\kappa}(\bar{Q})$. Wegen der kompakten Einbettung von $C^{0,\kappa}(\bar{Q})$ in $C(\bar{Q})$ konvergiert sie stark in $C(\bar{Q})$ und deshalb gilt wegen $\hat{y} \in C(\bar{Q})$ für $n \rightarrow \infty$

$$y_n \rightarrow \bar{y}$$

mit einem gewissen $\bar{y} \in C(\bar{Q})$. Da hier gleichmäßige Konvergenz vorliegt, sind die weiteren Schlüsse etwas einfacher als im elliptischen Fall (wo wir allerdings mit einfacheren Methoden arbeiten konnten).

Die lokale Lipschitzstetigkeit von d, b garantiert $d(\cdot, \cdot, y_n) \rightarrow d(\cdot, \cdot, \bar{y})$ bzw. $b(\cdot, \cdot, y_n) \rightarrow b(\cdot, \cdot, \bar{y})$ in $L^\infty(Q)$ bzw. $L^\infty(\Sigma)$, damit auch in $L^2(Q)$ bzw. $L^2(\Sigma)$. Die Folge $\{(v_n, u_n)\}_{n=1}^\infty$ konvergiert schwach gegen (\bar{v}, \bar{u}) in $L^2(Q) \times L^2(\Sigma)$. Wie im elliptischen Fall ersehen wir aus der Variationsformulierung der parabolischen Gleichung, dass \bar{y} die schwache Lösung zum Paar (\bar{v}, \bar{u}) ist, \bar{y} also den Zustand zu (\bar{v}, \bar{u}) darstellt:

Nach Definition gilt für beliebige aber feste Testfunktionen $w \in W_2^{1,1}(Q)$ mit $w(T) = 0$

$$\begin{aligned} - \iint_Q y_n w_t dxdt + \iint_Q (\nabla y_n \cdot \nabla w + d(x, t, y_n) w) dxdt + \iint_\Sigma b(x, t, y_n) w dsdt &= \\ = \iint_Q v_n w dxdt + \iint_\Sigma u_n w dsdt + \int_\Omega y_0 w(\cdot, 0) dx. \end{aligned}$$

Nach Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ folgt aus den genannten Konvergenzen

$$\begin{aligned} - \iint_Q \bar{y} w_t dxdt + \iint_Q (\nabla \bar{y} \cdot \nabla w + d(x, t, \bar{y}) w) dxdt + \iint_\Sigma b(x, t, \bar{y}) w dsdt &= \\ = \iint_Q \bar{v} w dxdt + \iint_\Sigma \bar{u} w dsdt + \int_\Omega y_0 w(\cdot, 0) dx. \end{aligned}$$

Aus der Beliebigkeit von w folgt, dass \bar{y} schwache Lösung ist. Schließlich wird noch die Optimalität von (\bar{v}, \bar{u}) bewiesen. Hier geht die schwache Unterhalbstetigkeit unseres Zielfunktional ein. Diese Argumente können aus dem Beweis zum elliptischen Fall übernommen werden. ■

Bemerkung. Offenbar benötigt man von Voraussetzung 5.6 die Beschränktheits- und Lipschitzbedingungen nur bis zur Ordnung $k = 0$.

5.4 Steuerungs-Zustands-Operator

Wir beweisen hier Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Steuerungs-Zustands-Abbildung und betrachten wieder Randsteuerung und verteilte Steuerung gleichzeitig durch Untersuchung der Aufgabe (5.8),

$\begin{aligned} y_t - \Delta y + d(x, t, y) &= v && \text{in } Q \\ \partial_\nu y + b(x, t, y) &= u && \text{in } \Sigma \\ y(0) &= y_0 && \text{in } \Omega. \end{aligned}$
--

Auch hier wird die Abbildung $(v, u) \mapsto y$ mit G bezeichnet, $G : V \times U := L^r(Q) \times L^s(\Sigma) \rightarrow Y := W(0, T) \times C(\bar{Q})$. Wir setzen generell $r > N/2 + 1$, $s > N + 1$ voraus.

Nach Lemma 4.12 auf S.161 sind die Nemytskii-Operatoren $y(\cdot) \mapsto d(\cdot, \cdot, y(\cdot))$ bzw. $y(\cdot) \mapsto b(\cdot, \cdot, y(\cdot))$ stetig differenzierbar von $C(\bar{Q})$ nach $L^\infty(Q)$ bzw. $L^\infty(\Sigma)$. Jedem Paar von Steuerungen $(v, u) \in V \times U$ ordnet die Steuerungs-Zustands-Abbildung G gemäß Satz 5.5 genau einen Zustand $y \in Y$ zu. Um ihre Differenzierbarkeit zu zeigen, beweisen wir zunächst die Lipschitzstetigkeit.

Satz 5.8 *Unter Voraussetzung 5.6 ist die Abbildung G für $r > N/2 + 1$, $s > N + 1$ Lipschitz-stetig von $L^r(Q) \times L^s(\Sigma)$ nach $W(0, T) \cap C(\bar{Q})$: Mit einem $L > 0$ gilt*

$$\|y_1 - y_2\|_{W(0, T)} + \|y_1 - y_2\|_{C(\bar{Q})} \leq L (\|v_1 - v_2\|_{L^r(Q)} + \|u_1 - u_2\|_{L^s(\Sigma)})$$

für alle $(v_i, u_i) \in L^r(Q) \times L^s(\Sigma)$ und die zugehörigen Zustände $y_i = G(v_i, u_i)$, $i = 1, 2$.

Beweis: Aus Satz 5.5 folgt $y_i \in C(\bar{Q})$, $i = 1, 2$. Subtraktion der partiellen Differentialgleichungen für y_1, y_2 ergibt für die Differenzen $y = y_1 - y_2$, $u = u_1 - u_2$, $v = v_1 - v_2$

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y + d(x, t, y_1) - d(x, t, y_2) &= v \\ \partial_\nu y + b(x, t, y_1) - b(x, t, y_2) &= u \\ y(0) &= 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Laut Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt für reelle y_1, y_2

$$d(x, t, y_1) - d(x, t, y_2) = \left(\int_0^1 d_y(x, t, y_2 + s(y_1 - y_2)) ds \right) (y_1 - y_2).$$

Nach Einsetzen von $y_i = y_i(x, t)$ in diese Darstellung wird das obige Integral zu einer nichtnegativen Funktion $\delta = \delta(x, t)$ aus $L^\infty(Q)$, denn d_y ist nichtnegativ. Eine analoge Darstellung gilt mit einem Integralterm $\beta = \beta(x, t) \geq 0$ für b . Folglich erhalten wir für unser gegebenes y das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y + \delta(x, t) y &= v \\ \partial_\nu y + \beta(x, t) y &= u \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

Die Funktionen δ und β hängen zwar von y_1, y_2 ab, das ist aber für die weiteren Schlüsse ohne Belang. Wegen Beschränktheit und Nichtnegativität von δ und β sind $\tilde{d}(x, t, y) := \delta(x, t) y$ und $\tilde{b}(x, t, y) := \beta(x, t) y$ monoton wachsend in y und verschwinden bei $y = 0$. Nach Satz 5.5 auf S. 213 existiert genau eine Lösung y , deren Norm nicht von δ und β abhängt. Aus Abschätzung (5.6) auf S. 213 folgt dann wegen $\tilde{d}(x, t, 0) = \tilde{b}(x, t, 0) = 0$ die behauptete Abschätzung

$$\|y\|_{W(0,T)} + \|y\|_{C(\bar{Q})} \leq L (\|v\|_{L^r(Q)} + \|u\|_{L^s(\Sigma)}).$$

■

Zum Nachweis der Differenzierbarkeit betrachten wir eine feste Stelle (\bar{v}, \bar{u}) . In den Anwendungen wird das ein Paar lokal optimaler Steuerungen sein.

Satz 5.9 *Unter Voraussetzung 5.6 auf S. 214 ist der Steuerungs-Zustands-Operator G für $r > N/2 + 1$ und $s > N + 1$ Fréchet-differenzierbar von $L^r(Q) \times L^s(\Sigma)$ in $W(0, T) \cap C(\bar{Q})$. Die Ableitung ergibt sich aus*

$$G'(\bar{v}, \bar{u})(v, u) = y,$$

wobei y die schwache Lösung des an der Stelle \bar{y} linearisierten Anfangs-Randwertproblems

$\begin{aligned} y_t - \Delta y + d_y(x, t, \bar{y}) y &= v && \text{in } Q \\ \partial_\nu y + b_y(x, t, \bar{y}) y &= u && \text{in } \Sigma \\ y(0) &= 0 && \text{in } \Omega \end{aligned}$	(5.13)
---	--------

ist und $\bar{y} = G(\bar{v}, \bar{u})$ der zu (\bar{v}, \bar{u}) gehörige Zustand.

Beweis: Wir subtrahieren die Differentialgleichung für $\bar{y} = G(\bar{v}, \bar{u})$ von der für $\tilde{y} = G(\bar{v} + v, \bar{u} + u)$ und erhalten

$$\begin{aligned}(\tilde{y} - \bar{y})_t - \Delta(\tilde{y} - \bar{y}) + d(x, t, \tilde{y}) - d(x, t, \bar{y}) &= v \\ \partial_\nu(\tilde{y} - \bar{y}) + b(x, t, \tilde{y}) - b(x, t, \bar{y}) &= u \\ (\tilde{y} - \bar{y})(0) &= 0.\end{aligned}$$

Die Nemytskii-Operatoren $\Phi : y \mapsto d(\cdot, \cdot, y(\cdot))$ und $\Psi : y \mapsto b(\cdot, \cdot, y(\cdot))$ sind nach Lemma 4.12 auf S. 161 Fréchet-differenzierbar in $L^\infty(Q)$ bzw. $L^\infty(\Sigma)$. Folglich gilt

$$\begin{aligned}\Phi(\tilde{y}) - \Phi(\bar{y}) &= d_y(\cdot, \cdot, \bar{y}(\cdot)) (\tilde{y}(\cdot) - \bar{y}(\cdot)) + r_d \\ \Psi(\tilde{y}) - \Psi(\bar{y}) &= b_y(\cdot, \cdot, \bar{y}(\cdot)) (\tilde{y}(\cdot) - \bar{y}(\cdot)) + r_b\end{aligned}$$

mit Resten r_d, r_b , die $\|r_d\|_{L^\infty(Q)} / \|\tilde{y} - \bar{y}\|_{L^\infty(Q)} \rightarrow 0$ für $\|\tilde{y} - \bar{y}\|_{L^\infty(Q)} \rightarrow 0$ bzw. $\|r_b\|_{L^\infty(\Sigma)} / \|\tilde{y} - \bar{y}\|_{L^\infty(\Sigma)} \rightarrow 0$ für $\|\tilde{y} - \bar{y}\|_{L^\infty(\Sigma)} \rightarrow 0$ erfüllen. Wir schreiben nun $\tilde{y} - \bar{y}$ mit einem Rest y_ρ in der Form

$$\tilde{y} - \bar{y} = y + y_\rho,$$

in der y wie in (5.13) definiert ist. Der Rest y_ρ genügt dem Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{aligned}y_{\rho,t} - \Delta y_\rho + d_y(\cdot, \cdot, \bar{y}) y_\rho &= -r_d \\ \partial_\nu y_\rho + b_y(\cdot, \cdot, \bar{y}) y_\rho &= -r_b \\ y_\rho(0) &= 0.\end{aligned}$$

An dieser Stelle kommt die eben bewiesene Lipschitzstetigkeit ins Spiel, denn wir wissen $\|\tilde{y} - \bar{y}\|_{C(\bar{Q})} \leq L \|(v, u)\|_{L^r(Q) \times L^s(\Sigma)} \rightarrow 0$. Der Beweis kann nun analog zum Beweis von Satz 4.17 auf S. 170 vervollständigt werden. ■

Folgerung. G ist Fréchet-differenzierbar von $L^\infty(Q) \times L^\infty(\Sigma)$ in $W(0, T) \cap C(\bar{Q})$.

Bemerkung. Der letzte Beweis hätte auch direkt mit dem Satz über implizite Funktionen ohne Bezug auf die Lipschitzstetigkeit von G geführt werden können. Diese Technik wird im Beweis von Satz 5.15 angewendet. Die obige Argumentation ist aber etwas weniger abstrakt, ist nicht wesentlich länger und liefert die Form der Ableitung G' gleich mit. Außerdem ist die Information interessant, dass G gleichmäßig Lipschitz-stetig ist.

Nichtlinear auftretende Steuerungen

Bei manchen Aufgabenstellungen erfordert der physikalische Hintergrund nichtlinear eingehende Steuerungen, zum Beispiel bei der Wärmeleitgleichung mit Stefan-Boltzmann-Randbedingung

$$\boxed{\begin{aligned}y_t - \Delta y &= 0 \\ \partial_\nu y + \beta(x, t) |y| y^3 &= u^4 \\ y(0) &= y_0.\end{aligned}} \quad (5.14)$$

Hier setzt sich die Abbildung G aus dem Nemytskii-Operator $u(\cdot) \mapsto u(\cdot)^4$ und dem Lösungsoperator zusammen, welcher der Funktion $\tilde{u} := u(\cdot)^4$ die Lösung der semilinearen Anfangs-Randwertaufgabe zuordnet. Die Abbildung $u(\cdot) \mapsto u(\cdot)^4$ ist nach Lemma 4.13 auf S. 161 Fréchet-differenzierbar in $L^\infty(\Sigma)$, damit erst recht von $L^\infty(\Sigma)$ in $L^r(\Sigma)$ für

jedes $r \geq 1$. Folglich ist die zusammengesetzte Abbildung $G : u \mapsto y$ differenzierbar von $L^\infty(\Sigma)$ nach $W(0, T) \cap C(\bar{Q})$.

Fordert man die Differenzierbarkeit dieser Abbildung mit Definitionsbereich $L^{\tilde{r}}(\Sigma)$ an Stelle von $L^\infty(\Sigma)$, dann ist $\tilde{r} > r > N/2 + 1$ hinreichend groß zu wählen, so dass die Abbildung $u \mapsto u^4$ differenzierbar von $L^{\tilde{r}}(\Sigma)$ nach $L^r(\Sigma)$ ist. Darauf wollen wir hier nicht eingehen, weil dann Wachstumsbedingungen wie in Abschnitt 4.3.3 erforderlich sind. Man erhält die Differenzierbarkeit einfacher mit Steuerungen aus $L^\infty(\Sigma)$. Das trifft insbesondere auf die Behandlung der Zwei-Norm-Diskrepanz im Zusammenhang mit hinreichenden Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung zu.

Spezialfälle

Der Kürze halber haben wir bis jetzt die Eigenschaften der Abbildung G für verteilte Steuerung und Randsteuerung gleichzeitig behandelt. Wir geben jetzt für jeden Fall ein Beispiel an, in dem die nötigen Voraussetzungen erfüllt sind.

Verteilte Steuerung. In der Aufgabe

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y + d_0(x, t) + d_1(x, t) y^3 &= v \\ \partial_\nu y + b_0(x, t) + b_1(x, t) y &= 0 \\ y(0) &= 0 \end{aligned} \tag{5.15}$$

seien $d_0 \in L^r(Q)$, $b_0 \in L^s(\Sigma)$ und fast überall nichtnegative Funktionen $d_1 \in L^\infty(Q)$, $b_1 \in L^\infty(\Sigma)$ gegeben. Dann erfüllen $d(x, t, y) := d_0(x, t) + d_1(x, t) y^3$ sowie $b(x, t, y) := b_0(x, t) + b_1(x, t) y$ die Voraussetzungen des obigen Satzes, so dass die Abbildung $v \mapsto y$ für $r > N/2 + 1$ Fréchet-differenzierbar von $L^r(Q)$ in $W(0, T) \cap C(\bar{Q})$ ist.

Randsteuerung. Unter analogen Voraussetzungen ist $G : u \mapsto y$ für die Aufgabe mit Randbedingung vom Strahlungstyp

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y + d_0(x, t) + d_1(x, t) y &= 0 \\ \partial_\nu y + b_0(x, t) + b_1(x, t) |y| y^3 &= u \\ y(0) &= 0 \end{aligned} \tag{5.16}$$

stetig Fréchet-differenzierbar von $L^s(\Sigma)$ nach $W(0, T) \cap C(\bar{Q})$, falls $s > N + 1$.

5.5 Notwendige Optimalitätsbedingungen

Wir behandeln wieder die Aufgabe (5.7)–(5.9) und leiten für ein lokal optimales Paar von Steuerungen (\bar{v}, \bar{u}) die notwendigen Bedingungen erster Ordnung ab. Es ist klar, dass dann \bar{v} die notwendigen Bedingungen für die Aufgabe der verteilten Steuerung mit variablem v erfüllen muss, bei der $u = \bar{u}$ fest gehalten wird. Analog erfüllt \bar{u} die notwendigen Bedingungen für die entsprechende Aufgabe mit Randsteuerung u und fixiertem \bar{v} . Deshalb können wir zunächst verteilte und Randsteuerung getrennt behandeln.

5.5.1 Verteilte Steuerung

Wir diskutieren die Aufgabe

$$\begin{aligned} \min J(y, v) &:= \int_{\Omega} \phi(x, y(x, T)) dx + \iint_Q \varphi(x, t, y(x, t), v(x, t)) dx dt \\ &+ \iint_{\Sigma} \psi(x, t, y(x, t)) ds dt \end{aligned} \quad (5.17)$$

bei den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcl} y_t - \Delta y + d(x, t, y) &= & v \quad \text{in } Q \\ \partial_{\nu} y + b(x, t, y) &= & 0 \quad \text{in } \Sigma \\ y(0) &= & y_0 \quad \text{in } \Omega \end{array} \quad (5.18)$$

sowie

$$v_a(x, t) \leq v(x, t) \leq v_b(x, t) \quad \text{f.ü. in } Q. \quad (5.19)$$

Der Zustand $y = y(v)$ ist Bild des Steuerungs-Zustands-Operators $G = G(v)$, $G : L^{\infty}(Q) \rightarrow W(0, T) \cap C(\bar{Q})$. Einsetzen in J ergibt die reduzierte Zielfunktion f

$$J(y, v) = J(G(v), v) = f(v).$$

Unter Voraussetzung 5.6 auf S. 214 ist f Fréchet-differenzierbar in $L^{\infty}(Q)$, denn J ist nach Lemma 4.12 auf S. 161 und G laut Satz 5.9 differenzierbar. Die Menge V_{ad} ist konvex. Ist \bar{v} lokal optimal und $v \in V_{ad}$ beliebig gegeben, so gilt für alle hinreichend kleinen $\lambda > 0$

$$f(\bar{v}) \leq f(\bar{v} + \lambda(v - \bar{v})).$$

Wie im elliptischen Fall folgt daraus nach Division durch λ und Grenzübergang $\lambda \downarrow 0$:

Lemma 5.10 *Ist Voraussetzung 5.6 auf S. 214 erfüllt, so genügt jede für die Aufgabe (5.17)–(5.19) lokal optimale Steuerung \bar{v} der Variationsungleichung*

$$f'(\bar{v})(v - \bar{v}) \geq 0 \quad \forall v \in V_{ad}. \quad (5.20)$$

Die Ableitung f' berechnet sich nach der Kettenregel,

$$\begin{aligned} f'(\bar{v})(v - \bar{v}) &= J_y(\bar{y}, \bar{v}) G'(\bar{v})(v - \bar{v}) + J_v(\bar{y}, \bar{v})(v - \bar{v}) = \\ &= \int_{\Omega} \phi_y(x, \bar{y}(x, T)) y(x, T) dx + \iint_Q \varphi_y(x, t, \bar{y}(x, t), \bar{v}(x, t)) y(x, t) dx dt \\ &+ \iint_{\Sigma} \psi_y(x, t, \bar{y}(x, t)) y(x, t) ds dt + \iint_Q \varphi_v(x, t, \bar{y}(x, t), \bar{v}(x, t)) \cdot \\ &\quad \cdot (v(x, t) - \bar{v}(x, t)) dx dt. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Dabei ist $y = G'(\bar{v})(v - \bar{v})$ nach Satz 5.9 die Lösung des linearisierten Problems

$$\begin{array}{rcl} y_t - \Delta y + d_y(x, t, \bar{y}) y &= & v - \bar{v} \\ \partial_{\nu} y + b_y(x, t, \bar{y}) y &= & 0 \\ y(0) &= & 0. \end{array} \quad (5.22)$$

Die Richtungsableitung $f'(\bar{v})(v - \bar{v})$ muss wegen lokaler Optimalität nichtnegativ sein. Mit einem adjungierten Zustand kann y in (5.21) eliminiert werden. Mit unseren Erfahrungen aus dem elliptischen Fall ist der adjungierte Zustand $p = p(x, t)$ leicht zu bestimmen. Er wird definiert als Lösung der *adjungierten Gleichung*

$$\begin{aligned} -p_t - \Delta p + d_y(x, t, \bar{y}) p &= \varphi_y(x, t, \bar{y}, \bar{v}) \\ \partial_\nu p + b_y(x, t, \bar{y}) p &= \psi_y(x, t, \bar{y}) \\ p(x, T) &= \phi_y(x, \bar{y}(x, T)) \end{aligned} \quad (5.23)$$

und gehört zu $W(0, T) \cap L^\infty(Q) \cap C([0, T], C(\bar{\Omega}))$. Existenz und Eindeutigkeit von $p \in W(0, T)$ folgen aus Lemma 3.17 auf S. 126. Die höhere Regularität von p ist eine Folgerung aus Lemma 7.12 auf S. 293 und der nachfolgenden Bemerkung zum L^∞ -Fall: Dazu ist die Zeittransformation $\tau := T - t$ anzuwenden. Ist $\phi_y(x, y)$ stetig in $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$, dann auch die Funktion $x \mapsto \phi_y(x, \bar{y}(x, T))$ in $\bar{\Omega}$. In diesem Fall gilt $p \in W(0, T) \cap C(\bar{Q})$.

Lemma 5.11 *Ist y die schwache Lösung der linearisierten Gleichung (5.22) und p die schwache Lösung von (5.23), dann gilt für alle $v \in L^2(Q)$*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi_y(x, \bar{y}(x, T)) y(x, T) dx + \iint_Q \varphi_y(x, t, \bar{y}(x, t), \bar{v}(x, t)) y(x, t) dx dt \\ + \iint_{\Sigma} \psi_y(x, t, \bar{y}(x, t)) y(x, t) ds(x) dt = \iint_Q p(x, t) (v(x, t) - \bar{v}(x, t)) dx dt. \end{aligned}$$

Beweis: Die Aussage folgt aus Satz 3.18 auf S. 127 mit $a_\Omega(x) = \phi_y(x, \bar{y}(x, T))$, $a_Q(x, t) = \varphi_y(x, t, \bar{y}(x, t), \bar{v}(x, t))$, $a_\Sigma(x, t) = \psi_y(x, t, \bar{y}(x, t))$. ■

Damit ergibt sich aus Formel (5.21) die folgende Gestalt der Ableitung $f'(\bar{v})$:

$$f'(\bar{v}) v = \iint_Q (p + \varphi_v(x, t, \bar{y}, \bar{v})) v dx dt. \quad (5.24)$$

Außerdem erhalten wir die gesuchte notwendige Optimalitätsbedingung:

Satz 5.12 *Unter Voraussetzung 5.6 auf S. 214 genügt jede lokal optimale Steuerung \bar{v} der Aufgabe (5.17)–(5.19) gemeinsam mit dem adjungierten Zustand $p \in W(0, T) \cap L^\infty(Q)$ aus der adjungierten Gleichung (5.23) der Variationsungleichung*

$$\iint_Q (p + \varphi_v(x, t, \bar{y}, \bar{v}))(v - \bar{v}) dx dt \geq 0 \quad \forall v \in V_{ad}. \quad (5.25)$$

Wie bei elliptischen Problemen kann man die Variationsungleichung in Form eines Minimumprinzips aufschreiben:

Folgerung. *Ist \bar{v} lokal optimal für (5.7)–(5.9) und p der adjungierte Zustand, dann wird unter den Voraussetzungen von Satz 5.12 das Minimum der Aufgabe*

$$\min_{v_a(x, t) \leq v \leq v_b(x, t)} (p(x, t) + \varphi_v(x, t, \bar{y}(x, t), \bar{v}(x, t))) v \quad (5.26)$$

für fast alle $(x, t) \in Q$ durch $v = \bar{v}(x, t)$ angenommen.

Spezialfall: $\varphi(x, t, y, v) := \varphi(x, t, y) + \frac{\lambda}{2} v^2$ mit $\lambda > 0$.

Hier gilt $\varphi_v(x, t, y, v) = \lambda v$, also wird das Minimum der Aufgabe

$$\min_{v_a(x,t) \leq v \leq v_b(x,t)} (p(x, t) + \lambda \bar{v}(x, t)) v$$

für fast alle $(x, t) \in Q$ durch $v = \bar{v}(x, t)$ angenommen. Daraus ergibt sich bei $\lambda > 0$ wie in Formel (2.58) auf S. 56 für fast alle $(x, t) \in Q$ die Projektionsbeziehung

$$\bar{v}(x, t) = \mathbb{P}_{[v_a(x,t), v_b(x,t)]} \left\{ -\frac{1}{\lambda} p(x, t) \right\}.$$

Sind die Funktionen v_a und v_b stetig, so folgt daraus die Regularität $\bar{v} \in C(\bar{Q})$, wenn p eine stetige Funktion ist (hinreichend dafür ist die Stetigkeit von $\phi_y(x, y)$). In diesem Fall muss jede lokal optimale Steuerung \bar{v} eine stetige Funktion sein.

Beispiel. Wir diskutieren die bereits im stationären Fall behandelte Aufgabe „Supraleitung“ jetzt instationär und mit etwas anderem Zielfunktional:

$$\min J(y, v) := \frac{1}{2} \|y(\cdot, T) - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|y - y_\Sigma\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|v\|_{L^2(Q)}^2$$

bei

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y + y^3 &= v \\ \partial_\nu y + \beta(x, t) y &= 0 \\ y(\cdot, 0) &= y_0 \end{aligned}$$

sowie

$$-1 \leq v(x, t) \leq 1.$$

Sie ist ein Spezialfall von (5.7)–(5.9) auf S. 215 mit

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \frac{1}{2} (y - y_\Omega(x))^2, & \varphi(x, t, y, v) &= \frac{\lambda}{2} v^2 \\ \psi(x, t, y) &= \frac{1}{2} (y - y_\Sigma(x, t))^2, & d(x, t, y) &= y^3, & b(x, t, y) &= \beta(x, t) y. \end{aligned}$$

Setzen wir $0 \leq \beta \in L^\infty(\Sigma)$, $y_\Omega \in C(\bar{\Omega})$ sowie $y_\Sigma \in L^\infty(\Sigma)$ voraus, dann sind alle geforderten Voraussetzungen (Messbarkeit in (x, t) , Beschränktheit, Differenzierbarkeit, Monotonie von d , Konvexität von φ in v) erfüllt. Die Existenz mindestens einer (global) optimalen Steuerung \bar{v} folgt aus Satz 5.7. Die adjungierte Gleichung für p lautet

$$\begin{aligned} -p_t - \Delta p + 3\bar{y}^2 p &= 0 \\ \partial_\nu p + \beta p &= \bar{y} - y_\Sigma \\ p(\cdot, T) &= \bar{y}(\cdot, T) - y_\Omega. \end{aligned}$$

Mit deren Lösung $p \in W(0, T) \cap C(\bar{Q})$ muss \bar{v} der Variationsungleichung

$$\iint_Q (\lambda \bar{v} + p)(v - \bar{v}) dx dt \geq 0 \quad \forall v \in V_{ad}$$

genügen. Im Fall $\lambda > 0$ ergibt sich daraus die übliche Projektionsbeziehung und $\bar{v} \in C(\bar{Q})$. Für $\lambda = 0$ folgt $\bar{v}(x, t) = -\text{sign } p(x, t)$. \diamond

5.5.2 Randsteuerung

Analog werden die notwendigen Bedingungen für das entsprechende Randsteuerungsproblem hergeleitet:

$$\begin{aligned} \min J(y, u) := & \int_{\Omega} \phi(x, y(x, T)) dx + \iint_Q \varphi(x, t, y(x, t)) dx dt \\ & + \iint_{\Sigma} \psi(x, t, y(x, t), u(x, t)) ds dt \end{aligned} \quad (5.27)$$

bei

$$\boxed{\begin{aligned} y_t - \Delta y + d(x, t, y) &= 0 & \text{in } Q \\ \partial_{\nu} y + b(x, t, y) &= u & \text{in } \Sigma \\ y(0) &= y_0 & \text{in } \Omega \end{aligned}} \quad (5.28)$$

sowie

$$u_a(x, t) \leq u(x, t) \leq u_b(x, t) \quad \text{in } \Sigma. \quad (5.29)$$

Hier bildet der Steuerungs-Zustands-Operator $G = G(u) : u \mapsto y(u)$ von $L^{\infty}(\Sigma)$ nach $W(0, T) \cap C(\bar{Q})$ ab, da y_0 stetig auf $\bar{\Omega}$ ist. Die weiteren Schritte verlaufen wie beim Fall der verteilten Steuerung. Für das reduzierte Funktional $f(u) = J(G(u), u)$ berechnet sich die Ableitung gemäß

$$f'(\bar{u}) u = \iint_{\Sigma} (p + \psi_u(x, t, \bar{y}, \bar{u})) u ds dt, \quad (5.30)$$

wobei $p \in W(0, T) \cap L^{\infty}(Q)$ die Lösung der adjungierten Gleichung

$$\begin{aligned} -p_t - \Delta p + d_y(x, t, \bar{y}) p &= \varphi_y(x, t, \bar{y}) \\ \partial_{\nu} p + b_y(x, t, \bar{y}) p &= \psi_y(x, t, \bar{y}, \bar{u}) \\ p(x, T) &= \phi_y(x, \bar{y}(x, T)) \end{aligned} \quad (5.31)$$

ist. Analog zu Satz 5.12 erhalten wir:

Satz 5.13 *Ist Voraussetzung 5.6 auf S. 214 erfüllt, so genügt jede lokal optimale Steuerung \bar{u} des Randsteuerungsproblems (5.27)–(5.29) gemeinsam mit dem adjungierten Zustand $p \in W(0, T) \cap L^{\infty}(Q)$ aus Gleichung (5.31) der Variationsungleichung*

$$\iint_{\Sigma} (p + \psi_u(x, t, \bar{y}, \bar{u}))(u - \bar{u}) ds dt \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \quad (5.32)$$

Das Minimum der Aufgabe

$$\min_{u_a(x, t) \leq u \leq u_b(x, t)} (p(x, t) + \psi_u(x, t, \bar{y}(x, t), \bar{u}(x, t))) u \quad (5.33)$$

wird für fast alle $(x, t) \in \Sigma$ durch $u = \bar{u}(x, t)$ angenommen.

Beispiel. Gegeben ist die Aufgabe

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \|y(\cdot, T) - y_{\Omega}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|y - y_Q\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Sigma)}^2$$

bei

$$\begin{array}{rcl} y_t - \Delta y & = & 0 \\ \partial_\nu y + y^3 |y| & = & u \\ y(0) & = & y_0 \end{array}$$

sowie

$$0 \leq u(x, t) \leq 1.$$

Sie ist ein Spezialfall des obigen Problems mit

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \frac{1}{2} (y - y_\Omega(x))^2, & \varphi(x, t, y) &= \frac{1}{2} (y - y_Q(x, t))^2 \\ \psi(x, t, y, u) &= \frac{\lambda}{2} u^2, & b(x, t, y) &= y^3 |y|. \end{aligned}$$

Die Randbedingung ist vom Stefan-Boltzmann-Typ, denn für nichtnegative y gilt $y^3 |y| = y^4$. Im Gegensatz zur Funktion y^4 ist aber $y^3 |y|$ monoton. Auch hier setzen wir $y_\Omega \in C(\bar{\Omega})$ voraus. Voraussetzung 5.6 sowie die Konvexität von ψ in u sind erfüllt. Deshalb existiert nach Satz 5.7 mindestens eine optimale Steuerung \bar{u} .

Die Ableitung von b ist $b_y(y) = 4y^2 |y|$ und die adjungierte Gleichung lautet damit

$$\begin{aligned} -p_t - \Delta p &= \bar{y} - y_Q \\ \partial_\nu p + 4\bar{y}^2 |\bar{y}| p &= 0 \\ p(\cdot, T) &= \bar{y}(\cdot, T) - y_\Omega. \end{aligned}$$

Mit deren Lösung $p \in W(0, T) \cap C(\bar{Q})$ erfüllt \bar{u} die Variationsungleichung

$$\iint_{\Sigma} (\lambda \bar{u} + p)(u - \bar{u}) \, ds dt \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}$$

und für $\lambda > 0$ die Projektionsbeziehung

$$\bar{u}(x, t) = \mathbb{P}_{[0,1]} \left\{ -\frac{1}{\lambda} p(x, t) \right\}$$

für fast alle $(x, t) \in \Sigma$. Mit p ist auch \bar{u} stetig in $\bar{\Sigma}$. ◇

Der allgemeine Fall

Durch Zusammenfassung der Ergebnisse für die Fälle verteilte Steuerung/Randsteuerung ergibt sich schließlich die folgende Optimalitätsbedingung, in welcher der adjungierte Zustand p als Lösung der folgenden adjungierten Gleichung definiert ist:

$$\begin{array}{rcl} -p_t - \Delta p + d_y(x, t, \bar{y}) p & = & \varphi_y(x, t, \bar{y}, \bar{v}) \quad \text{in } Q \\ \partial_\nu p + b_y(x, t, \bar{y}) p & = & \psi_y(x, t, \bar{y}, \bar{u}) \quad \text{in } \Sigma \\ p(x, T) & = & \phi_y(x, \bar{y}(x, T)) \quad \text{in } \Omega. \end{array} \tag{5.34}$$

Satz 5.14 *Unter Voraussetzung 5.6 auf S. 214 genügt jedes Paar lokal optimaler Steuerungen (\bar{v}, \bar{u}) des Problems (5.7)–(5.9) auf S. 215 gemeinsam mit dem adjungierten Zustand $p \in W(0, T) \cap L^\infty(Q)$ aus Gleichung (5.34) den Variationsungleichungen (5.25), (5.32) bzw. den Minimumbedingungen (5.26), (5.33).*

Beweis: Die notwendige Bedingung für v folgt daraus, dass \bar{v} die allgemeine Aufgabe (5.7)–(5.9) mit fest gehaltenem $u = \bar{u}$ lösen muss. Diese ist ein Spezialfall der Aufgabe (5.17)–(5.19) mit verteilter Steuerung, wenn wir $b(x, t, y) := b(x, t, y) - \bar{u}(x, t)$ setzen. In gleicher Weise muss \bar{u} die allgemeine Aufgabe mit festem \bar{v} lösen. So erhält man das komplette Optimalitätssystem. ■

Bemerkung. Für alle notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung dieses Kapitels benötigt man in Voraussetzung 5.6 die Beschränktheits- und Lipschitzbedingungen offensichtlich nur bis zur Ordnung $k = 1$.

5.6 Pontrjaginsches Maximumprinzip *

Wir erläutern das Pontrjaginsche Maximumprinzip für die folgende Aufgabe mit nichtlinear auftretenden Steuerfunktionen:

$$\begin{aligned} \min J(y, v, u) \quad := \quad & \int_{\Omega} \phi(x, y(x, T)) dx + \iint_Q \varphi(x, t, y(x, t), v(x, t)) dx dt \\ & + \iint_{\Sigma} \psi(x, t, y(x, t), u(x, t)) ds(x) dt \end{aligned} \quad (5.35)$$

bei

$$\boxed{\begin{aligned} y_t - \Delta y + d(x, t, y, v) &= 0 && \text{in } Q \\ \partial_\nu y + b(x, t, y, u) &= 0 && \text{in } \Sigma \\ y(0) &= y_0 && \text{in } \Omega \end{aligned}} \quad (5.36)$$

sowie

$$\begin{aligned} v_a(x, t) \leq v(x, t) \leq v_b(x, t) & \quad \text{f.ü. in } Q \\ u_a(x, t) \leq u(x, t) \leq u_b(x, t) & \quad \text{f.ü. in } \Sigma. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Analog zum elliptischen Fall definiert man Hamiltonfunktionen:

Definition. Als Hamiltonfunktionen werden die folgenden Funktionen $H^Q : Q \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $H^\Sigma : \Sigma \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ und $H^\Omega : \Omega \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet:

$$\begin{aligned} H^Q(x, t, y, v, q_0, q) &= q_0 \varphi(x, t, y, v) - q d(x, t, y, v) \\ H^\Sigma(x, t, y, u, q_0, q) &= q_0 \psi(x, t, y, u) - q b(x, t, y, u) \\ H^\Omega(x, y, q_0, q) &= q_0 \phi(x, y). \end{aligned}$$

Ferner definieren wir als adjungierten Zustand die Lösung q der adjungierten Gleichung

$$\begin{aligned} -q_t - \Delta q + d_y(x, t, \bar{y}, \bar{v}) q &= q_0 \varphi_y(x, t, \bar{y}, \bar{v}) \\ \partial_\nu q + b_y(x, t, \bar{y}, \bar{u}) q &= q_0 \psi_y(x, t, \bar{y}, \bar{u}) \\ q(x, T) &= q_0 \phi_y(x, \bar{y}(\cdot, T)). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Der adjungierte Zustand q stimmt mit $-p$ aus (5.34) überein, wenn $q_0 = -1$ gesetzt wird. Unter Verwendung der oben eingeführten Hamiltonfunktionen lässt sich das adjungierte System mit $q_0 := -1$ wie folgt darstellen:

$$\begin{array}{rcl} -q_t - \Delta q & = & D_y H^Q(x, t, \bar{y}, \bar{v}, -1, q) \quad \text{in } Q \\ \partial_\nu q & = & D_y H^\Sigma(x, t, \bar{y}, \bar{u}, -1, q) \quad \text{in } \Sigma \\ q(\cdot, T) & = & D_y H^\Omega(x, \bar{y}(\cdot, T), -1, q) \quad \text{in } \Omega. \end{array} \quad (5.39)$$

Definition. Die Steuerungen \bar{v}, \bar{u} erfüllen das Pontrjaginsche Maximumprinzip, wenn mit $q_0 = -1$ die Maximumbedingungen

$$\begin{aligned} \max_{v_a(x,t) \leq v \leq v_b(x,t)} H^Q(x, t, \bar{y}(x, t), v, q_0, q(x, t)) &= H^Q(x, t, \bar{y}(x, t), \bar{v}(x, t), q_0, q(x, t)), \\ \max_{u_a(x,t) \leq u \leq u_b(x,t)} H^\Sigma(x, t, \bar{y}(x, t), u, q_0, q(x, t)) &= H^\Sigma(x, t, \bar{y}(x, t), \bar{u}(x, t), q_0, q(x, t)) \end{aligned}$$

für fast alle $(x, t) \in Q$ bzw. fast alle $(x, t) \in \Sigma$ erfüllt sind, wobei q der in (5.39) definierte adjungierte Zustand ist.

Die Maxima von H^Q und H^Σ sind also für fast alle betreffenden (x, t) durch $\bar{v}(x, t)$ bzw. $\bar{u}(x, t)$ anzunehmen. Man kann unter natürlichen Bedingungen erwarten, dass (global) optimale Steuerungen dem Maximumprinzip genügen, siehe zum Beispiel die in der Literaturübersicht zum Maximumprinzip zu Beginn des Abschnitts 4.8.1 erwähnten Arbeiten [46], [142], [176], [210, 211].

5.7 Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung

5.7.1 Ableitungen zweiter Ordnung

Wir betrachten wieder die Aufgabe (5.7)–(5.9) von S. 215.

Satz 5.15 *Unter Voraussetzung 5.6 ist die Steuerungs-Zustands-Abbildung $G : (v, u) \mapsto y$ zur Gleichung (5.8) zweimal stetig Fréchet-differenzierbar von $L^\infty(Q) \times L^\infty(\Sigma)$ in $W(0, T) \times C(\bar{Q})$.*

Beweis. Analog zum elliptischen Fall wird der Satz über implizite Funktionen angewendet. Wir leiten zunächst eine Operatorgleichung für $y = G(v, u)$ her. Dazu schreiben wir die Gleichung für y um,

$$\begin{array}{rcl} y_t - \Delta y & = & v - d(x, t, y) \quad \text{in } Q \\ \partial_\nu y & = & u - b(x, t, y) \quad \text{in } \Sigma \\ y(0) & = & y_0 \quad \text{in } \Omega. \end{array}$$

Den links stehenden linearen Anteil erfassen wir durch lineare und stetige Lösungsoperatoren $G_Q : L^\infty(Q) \rightarrow Y := W(0, T) \cap C(\bar{Q})$, $G_\Sigma : L^\infty(\Sigma) \rightarrow Y$ und $G_0 : C(\bar{\Omega}) \rightarrow Y$, die zur linearen Aufgabe

$$\begin{array}{rcl} y_t - \Delta y & = & v \quad \text{in } Q \\ \partial_\nu y & = & u \quad \text{in } \Sigma \\ y(0) & = & w \quad \text{in } \Omega \end{array}$$

gehören: Wir haben $y = G_Q v$ für $u = 0, w = 0$; $y = G_\Sigma u$ für $v = 0, w = 0$ und $y = G_0 w$ für $u = 0, v = 0$. Diese Operatoren fassen wir im Weiteren mit Bildraum $C(\bar{Q})$ auf. Die Lösung y der nichtlinearen Gleichung hat so die Darstellung

$$y = G_Q(v - d(\cdot, y)) + G_\Sigma(u - b(\cdot, y)) + G_0 y_0 \quad (5.40)$$

bzw.

$$0 = y - G_Q(v - d(\cdot, y)) - G_\Sigma(u - b(\cdot, y)) - G_0 y_0 =: F(y, v, u).$$

Auf diese Weise umgehen wir die Diskussion von Differentialoperatoren sowie den Raum $W(0, T)$. Offenbar ist F zweimal stetig Fréchet-differenzierbar von $C(\bar{Q}) \times L^\infty(Q) \times L^\infty(\Sigma)$ nach $C(\bar{Q})$, denn G_Q, G_Σ, G_0 sind linear und stetig und die Nemytskii-Operatoren $y \mapsto d(\cdot, y)$ sowie $y \mapsto b(\cdot, y)$ sind zweimal stetig Fréchet-differenzierbar von $C(\bar{Q})$ in $L^\infty(Q)$ bzw. $L^\infty(\Sigma)$.

Die partielle Fréchet-Ableitung $F_y(y, v, u)$ ist invertierbar in $C(\bar{Q})$, Übungsaufgabe 5.1. Laut Satz über implizite Funktionen gibt es daher in einer Umgebung einer beliebig gewählten festen Stelle $(\bar{y}, \bar{v}, \bar{u})$ lokal genau eine Lösung $y = y(v, u)$ der Gleichung $F(y, v, u) = 0$. Außerdem besagt dieser Satz, und das ist das Wesentliche, dass die Abbildung $(v, u) \mapsto y$ zweimal stetig differenzierbar ist. Da wir mit $y = G(v, u)$ eine Lösung kennen, bekommen wir die zweimalige Differenzierbarkeit von G als Nebenergebnis. ■

Satz 5.16 *Unter Voraussetzung 5.6 auf S. 214 ist die zweite Ableitung von G durch*

$$G''(v, u)[(v_1, u_1), (v_2, u_2)] = z$$

gegeben, wobei z die eindeutig bestimmte schwache Lösung der mit $y = G(v, u)$ definierten parabolischen Anfangs-Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} z_t - \Delta z + d_y(x, t, y) z &= -d_{yy}(x, t, y) \{y_1 y_2 + y_1 w_2 + w_1 y_2 + w_1 w_2\} \\ \partial_\nu z + b_y(x, t, y) z &= -b_{yy}(x, t, y) \{y_1 y_2 + y_1 w_2 + w_1 y_2 + w_1 w_2\} \\ z(0) &= 0 \end{aligned}$$

ist und die Funktionen $y_i, w_i \in W(0, T)$, $i = 1, 2$, durch folgende linearisierte Anfangs-Randwertprobleme definiert sind:

$$\begin{aligned} \partial_t y_i - \Delta y_i + d_y(x, t, y) y_i &= 0 & \partial_t w_i - \Delta w_i + d_y(x, t, y) w_i &= v_i \\ \partial_\nu y_i + b_y(x, t, y) y_i &= u_i & \partial_\nu w_i + b_y(x, t, y) w_i &= 0 \\ y_i(0) &= 0, & w_i(0) &= 0. \end{aligned}$$

Beweis: Die Abbildung $G''(v, u)$ wird durch partielle zweite Ableitungen dargestellt,

$$G''(v, u)[(u_1, v_1), (u_2, v_2)] = G_{uu}[u_1, u_2] + G_{uv}[u_1, v_2] + G_{vu}[v_1, u_2] + G_{vv}[v_1, v_2],$$

wobei die Operatoren $G_{uu}, G_{uv}, G_{vu}, G_{vv}$ durch passende Kombinationen der Richtungen u_i, v_i bestimmt werden können. Durch die Wahl $v_1 = v_2 = 0$ bestimmen wir beispielsweise G_{uu} . Wie im letzten Beweis gehen wir dazu von der Darstellung (5.40) aus,

$$(y =) G(v, u) = G_Q(v - d(\cdot, \cdot, G(v, u))) + G_\Sigma(u - b(\cdot, \cdot, G(v, u))) + G_0 y_0.$$

Wir differenzieren die linke und rechte Seite getrennt nach u in Richtung u_1 und erhalten

$$G_u(v, u) u_1 = -G_Q d_y(\cdot, \cdot, G(v, u)) G_u(v, u) u_1 + G_\Sigma u_1 - G_\Sigma b_y(\cdot, \cdot, G(v, u)) G_u(v, u) u_1.$$

Nach einer weitere Differentiation in Richtung u_2 entsteht

$$\begin{aligned} G_{uu}(v, u)[u_1, u_2] &= -G_Q \{d_{yy}(\cdot, \cdot, G(v, u)) (G_u(v, u) u_1) (G_u(v, u) u_2) \\ &\quad + d_y(\cdot, \cdot, G(v, u)) G_{uu}(v, u)[u_1, u_2]\} \\ &\quad - G_\Sigma \{b_{yy}(\cdot, \cdot, G(v, u)) (G_u(v, u) u_1) (G_u(v, u) u_2) \\ &\quad + b_y(\cdot, \cdot, G(v, u)) G_{uu}(v, u)[u_1, u_2]\}. \end{aligned}$$

In diese Beziehung setzen wir $y = G(v, u)$, $y_i = G_u(v, u) u_i$ und $z_{uu} := G_{uu}(v, u)[u_1, u_2]$ ein. Dann lautet die letzte Gleichung

$$z_{uu} = -G_Q \{d_{yy}(\cdot, \cdot, y) y_1 y_2 + d_y(\cdot, \cdot, y) z_{uu}\} - G_\Sigma \{b_{yy}(\cdot, \cdot, y) y_1 y_2 + b_y(\cdot, \cdot, y) z_{uu}\}.$$

Dabei lösen y_1 und y_2 nach Satz 5.9 die in der Behauptung definierten Anfangs-Randwertprobleme. Laut Definition von G_Q , G_Σ und G_0 genügt z_{uu} den Gleichungen

$$\begin{aligned} z_t - \Delta z + d_y(x, t, y) z &= -d_{yy}(x, t, y) y_1 y_2 \\ \partial_\nu z + b_y(x, t, y) z &= -b_{yy}(x, t, y) y_1 y_2 \\ z(0) &= 0. \end{aligned}$$

So haben wir den ersten Anteil z_{uu} aus der im Satz formulierten Darstellung für z erhalten. Die anderen drei Bestandteile ergeben sich aus der gleichen Prozedur: $G_{uv}[u_1, v_2]$ mit $u_2 = 0$, $v_1 = 0$, $G_{vu}[v_1, u_2]$ analog mit $u_1 = 0$, $v_2 = 0$ und $G_{vv}[v_1, v_2]$ mit $u_1 = u_2 = 0$. Durch Superposition dieser Anteile ergibt sich schließlich das in der Behauptung des Satzes angegebene z und die Form von G'' . ■

Damit sind die Grundlagen geschaffen, hinreichende Optimalitätsbedingungen aufzustellen und deren Hinlänglichkeit für lokale Optimalität zu beweisen. Dies könnte für verteilte Steuerung und Randsteuerung gleichzeitig geschehen, aber dann würde die Darstellung recht unübersichtlich. Deshalb behandeln wir beide Fälle getrennt, führen den Beweis nur für verteilte Steuerung und verzichten wegen völliger Analogie auf den Beweis des Satzes für Randsteuerung.

5.7.2 Verteilte Steuerung

Wir betrachten wieder die Aufgabe (5.17)–(5.19) auf S. 221. Es sei $\bar{v} \in V_{ad}$ eine Steuerung, die den entsprechenden notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung genügt und p der zugehörige adjungierte Zustand, definiert durch Gleichung (5.23). Dann ist mit p die Variationsungleichung (5.25) erfüllt,

$$\iint_Q (p + \varphi_v(x, t, \bar{y}, \bar{v}))(v - \bar{v}) dx dt \geq 0 \quad \forall v \in V_{ad}.$$

Notwendige Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung erhält man analog zum elliptischen Fall. Wir gehen hier darauf nicht ein. Zur Formulierung der hinreichenden Bedingung zweiter Ordnung verwendet man am einfachsten die Lagrangefunktion. Sie lautet für die Aufgabe (5.17)–(5.19) auf S. 221

$$\mathcal{L}(y, v, p) = J(y, v) - \iint_Q ((y_t + d(x, t, y) - v) p + \nabla y \cdot \nabla p) dx dt - \iint_\Sigma b(x, t, y) p ds dt.$$

Der explizite Ausdruck für die zweite Ableitung von \mathcal{L} ist

$$\mathcal{L}''(\bar{y}, \bar{v}, p)(y, v)^2 = J''(\bar{y}, \bar{v})(y, v)^2 - \iint_Q p d_{yy}(x, t, \bar{y}) y^2 dx dt - \iint_{\Sigma} p b_{yy}(x, t, \bar{y}) y^2 ds dt$$

mit

$$\begin{aligned} J''(\bar{y}, \bar{v})(y, v)^2 &= \int_{\Omega} \phi_{yy}(x, \bar{y}(x, T)) y(x, T)^2 dx + \iint_{\Sigma} \psi_{yy}(x, t, \bar{y}) y^2 ds dt \\ &\quad + \iint_Q \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}^{\top} \begin{bmatrix} \varphi_{yy}(x, t, \bar{y}, \bar{v}) & \varphi_{yv}(x, t, \bar{y}, \bar{v}) \\ \varphi_{vy}(x, t, \bar{y}, \bar{v}) & \varphi_{vv}(x, t, \bar{y}, \bar{v}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} dx dt. \end{aligned}$$

Für elliptische Aufgaben haben wir aus methodischen Gründen mit hinreichenden Optimalitätsbedingungen begonnen, die keine stark aktiven Restriktionen berücksichtigen und daher in der Regel zu starke Forderungen sind. Erst danach sind wir auf schwächere Bedingungen eingegangen. Hier gehen wir diesen Umweg nicht und betrachten von vornherein stark aktive Restriktionen, die wir analog zum elliptischen Fall definieren:

Definition. Für gegebenes $\tau \geq 0$ heißt

$$A_{\tau}(\bar{v}) = \{(x, t) \in Q : |p(x, t) + \varphi_v(x, t, \bar{y}(x, t), \bar{v}(x, t))| > \tau\}$$

Menge stark aktiver Restriktionen für \bar{v} .

In $A_{\tau}(\bar{v})$ ist es nicht sinnvoll, positive Definitheit der zweiten Ableitung der Lagrange-funktion zu fordern. Das wurde bereits auf S. 199 für eine Optimierungsaufgabe in \mathbb{R} erläutert. Auf $A_{\tau}(\bar{v})$ baut der τ -kritische Kegel auf, der wie im elliptischen Fall definiert ist. Das ist die Menge der Steuerungen, für die man die positive Definitheit von \mathcal{L}'' fordert, wenn man sie gemeinsam mit der Lösung y der folgenden linearisierten Gleichung in \mathcal{L}'' einsetzt:

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y + d_y(x, t, \bar{y}) y &= v & \text{in } Q \\ \partial_{\nu} y + b_y(x, t, \bar{y}) y &= 0 & \text{in } \Sigma \\ y(0) &= 0 & \text{in } \Omega. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Definition. Unter dem τ -kritischen Kegel $C_{\tau}(\bar{v})$ verstehen wir die Menge aller $v \in L^{\infty}(Q)$, die folgenden Relationen genügen:

$$v(x, t) \begin{cases} = 0, & \text{falls } (x, t) \in A_{\tau}(\bar{v}) \\ \geq 0, & \text{falls } \bar{v}(x, t) = v_a \text{ und } (x, t) \notin A_{\tau}(\bar{v}) \\ \leq 0, & \text{falls } \bar{v}(x, t) = v_b \text{ und } (x, t) \notin A_{\tau}(\bar{v}). \end{cases} \quad (5.42)$$

Je nach Vorzeichen von $p + \varphi_v$ gilt auf $A_{\tau}(\bar{v})$ entweder $\bar{v} = v_a$ oder $\bar{v} = v_b$ und daraus leiten sich die obigen Vorzeichenbedingungen ab. Es kann v dort null gesetzt werden, wo der Gradient der Zielfunktion, also die Funktion $p + \varphi_v(x, t, \bar{y}, \bar{v})$ mindestens den Betrag τ hat. Dabei muss τ positiv sein. Im endlichdimensionalen Fall ist diese Einschränkung nicht nötig. Dort sind diejenigen Komponenten der Vektoren des kritischen Kegels null, bei denen die zugehörige Komponente des Gradienten nicht verschwindet. Das ist im Funktionenraum so nicht möglich. Ein entsprechendes Gegenbeispiel hat J. Dunn [63] konstruiert. Daher formuliert man die hinreichende Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung wie folgt:

Es existieren $\delta > 0$ und $\tau > 0$, so dass folgende Definitheitsbedingung erfüllt ist:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}''(\bar{y}, \bar{v}, p)(y, v)^2 &\geq \delta \|v\|_{L^2(Q)}^2 \\ \text{für alle } v \in C_\tau(\bar{v}) \text{ und } y \in W(0, T) \text{ aus (5.41).} \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

Satz 5.17 *Es sei Voraussetzung 5.6 erfüllt und das Paar (\bar{y}, \bar{v}) genüge den notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung von Satz 5.12 sowie allen in der Aufgabe (5.17)–(5.19) geforderten Nebenbedingungen. Außerdem sollen Zahlen $\delta > 0$, $\tau > 0$ existieren, mit denen die Definitheitsbedingung (5.43) erfüllt ist. Dann gibt es Zahlen $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$, so dass alle $v \in V_{ad}$ mit $\|v - \bar{v}\|_{L^\infty(Q)} \leq \varepsilon$ und die zugehörige Lösung $y(v)$ von (5.18) auf S. 221 der Bedingung des quadratischen Wachstums*

$$J(y, v) \geq J(\bar{y}, \bar{v}) + \sigma \|v - \bar{v}\|_{L^2(Q)}^2$$

genügen. Folglich ist \bar{v} im Sinne von $L^\infty(Q)$ lokal optimal.

Beweis: (i) *Vorbemerkungen*

Wie bisher ist $G : v \mapsto y$ die Steuerungs-Zustands-Abbildung, $G : L^\infty(Q) \rightarrow W(0, T) \cap C(\bar{Q})$. Wir wissen bereits, dass G zweimal stetig Fréchet-differenzierbar ist und setzen $f(v) := J(y(v), v) = J(G(v), v)$. Analog zu Satz 4.25 auf S. 193 gilt auch hier

$$f''(\bar{v})[v_1, v_2] = \mathcal{L}''(\bar{y}, \bar{v}, p)[(y_1, v_1), (y_2, v_2)], \quad (5.44)$$

wobei p der zu (\bar{y}, \bar{v}) gehörige adjungierte Zustand ist und $y_i := G'(\bar{v})v_i$ die Lösungen der linearisierten Gleichung mit rechter Seite v_i , $i = 1, 2$ sind. Damit lässt sich $f''(\bar{v})$ wie folgt gegen die L^2 -Norm der Inkremente abschätzen:

$$\begin{aligned} |f''(\bar{v})[v_1, v_2]| &\leq |\mathcal{L}''(\bar{y}, \bar{v}, p)[(y_1, v_1), (y_2, v_2)]| \\ &\leq c \{ \|y_1\|_{W(0, T)} \|y_2\|_{W(0, T)} + \|y_1\|_{W(0, T)} \|v_2\|_{L^2(Q)} \\ &\quad + \|y_2\|_{W(0, T)} \|v_1\|_{L^2(Q)} + \|v_1\|_{L^2(Q)} \|v_2\|_{L^2(Q)} \} \\ &\leq c \|v_1\|_{L^2(Q)} \|v_2\|_{L^2(Q)}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Zuletzt wurde die Stetigkeit des Operators $G'(\bar{v})$ von $L^2(Q)$ in $W(0, T)$ in der Darstellung $y_i = G'(\bar{v})v_i$ ausgenutzt und c ist eine generische Konstante. Die eben hergeleitete Abschätzung werden wir unter (iii) mehrmals verwenden.

Für die Ableitung $f'(\bar{v})$ haben wir mit $g = p + \varphi_v(\cdot, \cdot, \bar{y}, \bar{v})$ die Darstellung

$$f'(\bar{v})h = \iint_Q g(x, t) h(x, t) dx dt.$$

(ii) *Taylor-Entwicklung*

Es sei $v(\cdot) \in V_{ad}$ mit $\|v - \bar{v}\|_{L^\infty(Q)} \leq \varepsilon$ beliebig gewählt. Für fast alle $(x, t) \in Q$ gilt die punktweise Variationsungleichung

$$g(x, t)(v - \bar{v}(x, t)) \geq 0 \quad \forall v \in [v_a(x, t), v_b(x, t)].$$

Deshalb folgt mit $h(x, t) = v(x, t) - \bar{v}(x, t)$

$$\begin{aligned} f(v) - f(\bar{v}) &= f'(\bar{v})h + \frac{1}{2}f''(\bar{v})h^2 + r_2^f \\ &\geq \iint_{A_\tau(\bar{v})} g(x, t) h(x, t) dx dt + \frac{1}{2}f''(\bar{v})h^2 + r_2^f \\ &\geq \tau \iint_{A_\tau(\bar{v})} |h(x, t)| dx dt + \frac{1}{2}f''(\bar{v})h^2 + r_2^f. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $r_2^f = r_2^f(\bar{v}, h)$ das Restglied zweiter Ordnung der Taylor-Entwicklung von f . Jetzt zerlegen wir die Funktion h in einen Anteil h_0 , der im kritischen Kegel liegt,

$$h_0(x, t) := \begin{cases} h(x, t), & \text{falls } (x, t) \notin A_\tau \\ 0, & \text{falls } (x, t) \in A_\tau, \end{cases}$$

und einen Rest $h_1 := h - h_0$. Nach Konstruktion liegt h_0 in $C_\tau(\bar{v})$, denn h_0 erfüllt auch die Vorzeichenbedingungen des kritischen Kegels. Mit diesen Funktionen gilt

$$f(v) - f(\bar{v}) \geq \tau \iint_{A_\tau(\bar{v})} |h(x, t)| \, dx dt + \frac{1}{2} f''(\bar{v}) (h_0 + h_1)^2 + r_2^f. \quad (5.46)$$

(iii) *Abschätzung von $f''(\bar{v}) (h_0 + h_1)^2$*

Wir erhalten wegen (5.43), $h_0 \in C_\tau(\bar{v})$ und der Darstellung (5.44)

$$\frac{1}{2} f''(\bar{v}) h_0^2 \geq \frac{\delta}{2} \|h_0\|_{L^2(Q)}^2.$$

Durch Anwendung der Youngschen Ungleichung folgt aus (5.45) mit einer generischen Konstanten $c > 0$

$$\begin{aligned} |f''(\bar{v})[h_0, h_1]| &\leq c \|h_0\|_{L^2(Q)} \|h_1\|_{L^2(Q)} \leq \frac{\delta}{4} \|h_0\|_{L^2(Q)}^2 + c \|h_1\|_{L^2(Q)}^2 \\ &\leq \frac{\delta}{4} \|h_0\|_{L^2(Q)}^2 + c \|h_1\|_{L^1(Q)} \|h_1\|_{L^\infty(Q)} \\ &\leq \frac{\delta}{4} \|h_0\|_{L^2(Q)}^2 + c_1 \varepsilon \|h_1\|_{L^1(Q)} \end{aligned}$$

wegen $\|h\|_{L^\infty(Q)} \leq \varepsilon$. Analog gilt

$$\left| \frac{1}{2} f''(\bar{v}) h_1^2 \right| \leq c \|h_1\|_{L^2(Q)}^2 \leq c_2 \varepsilon \|h_1\|_{L^1(Q)}.$$

Insgesamt ergibt sich nach Einsetzen aller Ungleichungen in $\frac{1}{2} f''(\bar{v}) (h_0 + h_1)^2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} f''(\bar{v}) (h_0 + h_1)^2 &\geq \frac{\delta}{2} \|h_0\|_{L^2(Q)}^2 - \left(\frac{\delta}{4} \|h_0\|_{L^2(Q)}^2 + (c_1 + c_2) \varepsilon \|h_1\|_{L^1(Q)} \right) \\ &\geq \frac{\delta}{4} \|h_0\|_{L^2(Q)}^2 - (c_1 + c_2) \varepsilon \|h_1\|_{L^1(Q)}. \end{aligned}$$

Wir wählen ε so klein, dass $\varepsilon (c_1 + c_2) \leq \tau/2$ erfüllt ist. Wegen $h_1 = 0$ auf $\Omega \setminus A_\tau$ folgt

$$\|h_1\|_{L^1(Q)} = \iint_{A_\tau(\bar{v})} |h_1| \, dx dt$$

und nach Einsetzen der Abschätzungen in (5.46)

$$\begin{aligned} f(v) - f(\bar{v}) &\geq \tau \iint_{A_\tau(\bar{v})} |h| \, dx dt - \frac{\tau}{2} \iint_{A_\tau(\bar{v})} |h| \, dx dt + \frac{\delta}{4} \|h_0\|_{L^2(Q)}^2 + r_2^f \\ &\geq \frac{\tau}{2} \iint_{A_\tau(\bar{v})} |h| \, dx dt + \frac{\delta}{4} \|h_0\|_{L^2(Q)}^2 + r_2^f. \end{aligned}$$

Es sei zusätzlich $\varepsilon \leq 1$, was gegebenenfalls durch weiteres Verkleinern von ε erreicht werden kann. Dann gilt $|h(x, t)| \geq h(x, t)^2$. Wegen

$$\|h_0\|_{L^2(Q)}^2 = \iint_{Q \setminus A_\tau(\bar{v})} h^2 dx dt$$

folgt schließlich

$$\begin{aligned} f(v) - f(\bar{v}) &\geq \frac{\tau}{2} \iint_{A_\tau(\bar{v})} h^2 dx dt + \frac{\delta}{4} \|h\|_{L^2(Q \setminus A_\tau)}^2 + r_2^f \\ &\geq \min \left\{ \frac{\tau}{2}, \frac{\delta}{4} \right\} \|h\|_{L^2(Q)}^2 + r_2^f. \end{aligned}$$

Das Restglied $r_2^f(\bar{v}, h)$ hat die Eigenschaft

$$\frac{r_2^f(\bar{v}, h)}{\|h\|_{L^2(Q)}^2} \rightarrow 0 \quad \text{für } \|h\|_{L^\infty(Q)} \rightarrow 0.$$

Das beweist man analog zu (4.80) auf S. 189 auch hier, Übungsaufgabe 5.2. Deshalb folgt für hinreichend kleines ε schließlich

$$f(v) - f(\bar{v}) \geq \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{\tau}{2}, \frac{\delta}{4} \right\} \|h\|_{L^2(Q)}^2 = \sigma \|h\|_{L^2(Q)}^2,$$

also die behauptete quadratische Wachstumsbedingung. ■

Bemerkungen. (i) Der Satz gilt natürlich erst recht, wenn man die Definitheitsbedingung (5.43) für die größere Menge aller (y, v) fordert, welche der linearisierten Gleichung (5.42) und den Vorzeichenbedingungen in (5.42) genügen, nicht aber $v = 0$ auf $A_\tau(\bar{v})$. Diese strengere Form hinreichender Bedingungen zweiter Ordnung wird gern als Voraussetzung für den Konvergenzbeweis numerischer Verfahren verwendet. Wir haben sie bereits bei elliptischen Aufgaben benutzt.

(ii) Eine etwas elegantere Formulierung der hinreichenden Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung, welche die Konstanten δ und τ vermeidet, findet man in Casas et al. [51]. Diese andere Bedingung ist jedoch äquivalent zu der hier formulierten.

5.7.3 Randsteuerung

Wegen Analogie geben wir die hinreichenden Bedingungen für die Randsteuerung ohne Beweis an und betrachten dazu Aufgabe (5.27)–(5.29) auf S. 224. Die Lagrangefunktion wird analog zum Fall der verteilten Steuerung definiert,

$$\mathcal{L}(y, v, p) = J(y, v) - \iint_Q ((y_t + d(x, t, y))p + \nabla y \cdot \nabla p) dx dt - \iint_\Sigma (b(x, t, y) - u)p ds dt.$$

Ihre zweite Ableitung ist

$$\mathcal{L}''(\bar{y}, \bar{u}, p)(y, v)^2 = J''(\bar{y}, \bar{u})(y, u)^2 - \iint_Q p d_{yy}(x, t, \bar{y}) y^2 dx dt - \iint_\Sigma p b_{yy}(x, t, \bar{y}) y^2 ds dt$$

mit

$$\begin{aligned} J''(\bar{y}, \bar{u})(y, u)^2 &= \int_\Omega \phi_{yy}(x, \bar{y}(x, T)) y(x, T)^2 dx + \iint_Q \varphi_{yy}(x, t, \bar{y}) y^2 dx dt \\ &\quad + \iint_\Sigma \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \psi_{yy}(x, t, \bar{y}, \bar{u}) & \psi_{yu}(x, t, \bar{y}, \bar{u}) \\ \psi_{uy}(x, t, \bar{y}, \bar{u}) & \psi_{uu}(x, t, \bar{y}, \bar{u}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} ds dt. \end{aligned}$$

Die Steuerung $\bar{u} \in U_{ad}$ soll den notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung für diese Aufgabe genügen. Dabei ist p der zugehörige adjungierte Zustand, definiert durch Gleichung (5.31) auf S. 224. Mit p ist die Variationsungleichung (5.32) erfüllt,

$$\iint_{\Sigma} (p + \psi_u(x, t, \bar{y}, \bar{u}))(u - \bar{u}) \, ds dt \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}.$$

Zu gegebenem $\tau \geq 0$ heißt

$$A_{\tau}(\bar{u}) = \{(x, t) \in \Sigma : |p(x, t) + \psi_u(x, t, \bar{y}(x, t), \bar{u}(x, t))| > \tau\}$$

Menge stark aktiver Restriktionen für \bar{u} . Die linearisierte Gleichung lautet

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y + d_y(x, t, \bar{y}) y &= 0 & \text{in } Q \\ \partial_{\nu} y + b_y(x, t, \bar{y}) y &= u & \text{in } \Sigma \\ y(0) &= 0 & \text{in } \Omega \end{aligned} \quad (5.47)$$

und der τ -kritische Kegel $C_{\tau}(\bar{u})$ besteht aus allen $u \in L^{\infty}(\Sigma)$ mit

$$u(x, t) \begin{cases} = 0, & \text{falls } (x, t) \in A_{\tau}(\bar{u}) \\ \geq 0, & \text{falls } \bar{u}(x, t) = u_a \text{ und } (x, t) \notin A_{\tau}(\bar{u}) \\ \leq 0, & \text{falls } \bar{u}(x, t) = u_b \text{ und } (x, t) \notin A_{\tau}(\bar{u}). \end{cases} \quad (5.48)$$

Als *hinreichende Bedingung zweiter Ordnung* fordern wir wieder

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}''(\bar{y}, \bar{u}, p)(y, u)^2 &\geq \delta \|u\|_{L^2(\Sigma)}^2 \\ \text{für alle } u \in C_{\tau}(\bar{u}) \text{ und } y \in W(0, T) &\text{ aus (5.47)}. \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

Satz 5.18 *Das Paar (\bar{y}, \bar{u}) genüge den notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung von Satz 5.13 auf S. 224 und allen in der Aufgabe der Randsteuerung formulierten Nebenbedingungen. Voraussetzung 5.6 sei erfüllt und es sollen $\delta > 0$, $\tau > 0$ existieren, mit denen die Definitheitsbedingung (5.49) gilt. Dann gibt es Konstanten $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$, so dass für alle $u \in U_{ad}$ mit $\|u - \bar{u}\|_{L^{\infty}(\Sigma)} \leq \varepsilon$ und die zugehörigen Zustände y die Bedingung des quadratischen Wachstums*

$$J(y, u) \geq J(\bar{y}, \bar{u}) + \sigma \|u - \bar{u}\|_{L^2(\Sigma)}^2$$

erfüllt ist. Folglich ist \bar{u} lokal optimal.

5.7.4 Ein Fall ohne Zwei-Norm-Diskrepanz

Auch bei parabolischen Aufgaben tritt die Zwei-Norm-Diskrepanz nicht auf, wenn bei L^2 -Steuerungen die Regularität des Zustands und die Differenzierbarkeit der Nichtlinearitäten zueinander passen. Das trifft beispielsweise auf Nichtlinearitäten zu, die in gewissem Sinne quadratisch sind, so dass das Restglied zweiter Ordnung verschwindet. Ein solches Beispiel ist die Steuerung von Navier-Stokes-Gleichungen in Abschnitt 5.10.2. Auch beim Phasenfeldmodell in Abschnitt 5.10.1 mit kubischer Nichtlinearität gibt es keine Zwei-Norm-Diskrepanz.

Bei der Aufgabe (5.7)–(5.9) auf S. 215 mit den sehr allgemein gehaltenen Nichtlinearitäten $d(x, t, y)$ und $b(x, t, y)$ kann die Zwei-Norm-Diskrepanz für folgende Konstellation ausgeschlossen werden: Verteilte Steuerung mit passendem Zielfunktional und eindimensionalem Ortsgebiet $\Omega = (0, \ell)$. Wir nehmen als Beispiel die Aufgabe

$$\min \left(\int_0^\ell \phi(x, y(x, T)) dx + \int_0^T [\psi_1(t, y(0, t)) + \psi_2(t, y(\ell, t))] dt + \int_0^\ell \int_0^T \varphi(x, t, y, v) dx dt \right)$$

bei

$y_t(x, t) - y_{xx}(x, t) + d(x, t, y(x, t))$	$=$	$v(x, t)$	in $(0, \ell) \times (0, T)$
$-y_x(0, t) + b_1(t, y(0, t))$	$=$	0	in $(0, T)$
$y_x(\ell, t) + b_2(t, y(\ell, t))$	$=$	0	in $(0, T)$
$y(x, 0)$	$=$	$y_0(x)$	in $(0, \ell)$

und den Steuerungsbeschränkungen

$$v_a(x, t) \leq v(x, t) \leq v_b(x, t).$$

Damit die Zwei-Norm-Diskrepanz nicht ins Spiel kommt, muss die Zielfunktion bezüglich v linear-quadratisch sein. Deshalb fordern wir von φ folgende Form:

$$\varphi(x, t, y, v) = \varphi_1(x, t, y) + \varphi_2(x, t, y) v + \lambda(x, t) v^2. \quad (5.50)$$

Für $d = 0$ sowie $b_1 = b_2 = 0$, also für die lineare parabolische Gleichung, werden rechte Seiten v der Differentialgleichung aus $L^r(Q)$ nach $W(0, T) \cap C(\bar{Q})$ abgebildet, falls $r > N/2 + 1$ gilt und y_0 stetig ist. Für $N = 1$ und $r = 2$ ist das erfüllt. Deshalb kann man durch leichte Modifikation des Beweises von Satz 5.15 auf S. 227 zeigen, dass die Steuerungs-Zustands-Abbildung G zweimal stetig Fréchet-differenzierbar von $L^2(Q)$ nach $W(0, T) \cap C(\bar{Q})$ ist. (Die dort verwendeten linearen Operatoren werden definiert als $G_Q : L^2(Q) \rightarrow Y$, $G_\Sigma : L^\infty(\Sigma) \rightarrow Y$ und $G_\Omega : C(\bar{\Omega}) \rightarrow Y$.)

Folglich kann bei verteilter Steuerung und eindimensionalem Ortsgebiet mit Steuerungen aus $L^2(Q)$ gearbeitet werden. Für Randsteuerung trifft das leider nicht zu.

Durch sinnngemäße Modifikation von Voraussetzung 5.6 von S. 214 auf den hier gegebenen eindimensionalen Fall findet der Leser leicht die Glattheitsbedingungen, welchen die Funktionen ϕ , φ_i , ψ_i genügen müssen, damit das Zielfunktional zweimal stetig Fréchet-differenzierbar in $C(\bar{Q}) \times L^2(Q)$ ist, Übungsaufgabe 5.3. Insbesondere muss λ beschränkt und messbar sein und $\lambda(x, t) \geq \delta > 0$ gefordert werden, denn sonst ist eine hinreichende Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung nicht erfüllbar. Es gilt dann die Aussage von Satz 5.17 mit $L^2(Q)$ an Stelle von $L^\infty(Q)$.

5.8 Testaufgaben

Wir diskutieren zwei Testaufgaben für nichtlineare parabolische Steuerungsprobleme, bei denen hinreichende Optimalitätsbedingungen für die konstruierte Lösung erfüllt sind. Dazu gehen wir nach dem gleichen Prinzip wie bei elliptischen Aufgaben vor: Die optimalen

Größen \bar{u} , \bar{y} und der zugehörige adjungierte Zustand p werden a priori festgelegt. Danach passt man gewisse lineare Anteile am Zielfunktional und konstante Terme in der Gleichung so an, dass das Optimalitätssystem nebst einer hinreichenden Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung erfüllt ist.

Das erste Testbeispiel ist so konstruiert, dass die hinreichende Bedingung im gesamten Steuerungs-Zustands-Raum gilt. Im zweiten, komplizierteren Beispiel sind die hinreichenden Bedingungen nicht überall erfüllt, sondern nur dort, wo die Steuerungsrestriktionen nicht stark aktiv sind. Außerdem ist eine integrale Zustandsrestriktion vorgegeben.

5.8.1 Testaufgabe mit Steuerungsrestriktionen

Wir definieren die Aufgabe in $Q = (0, \ell) \times (0, T)$,

$$\begin{aligned} \min J(y, u) := & \frac{1}{2} \int_0^\ell (y(x, T) - y_\Omega(x))^2 dx - \int_0^T a_y(t) y(\ell, t) dt \\ & + \int_0^T (a_u(t) u(t) + \frac{\lambda}{2} u(t)^2) dt \end{aligned} \quad (5.51)$$

bei

$y_t(x, t) - y_{xx}(x, t) = 0$	in $(0, \ell) \times (0, T)$	(5.52)
$-y_x(0, t) = 0$	in $(0, T)$	
$y_x(\ell, t) + y(\ell, t) = b(t) + u(t) - \varphi(y(\ell, t))$	in $(0, T)$	
$y(x, 0) = a(x)$	in $(0, \ell)$	

und

$$0 \leq u(t) \leq 1. \quad (5.53)$$

Dabei sind folgende Größen vorgegeben:

$$\begin{aligned} \ell = \frac{\pi}{4}, \quad T = 1, \quad \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} (e^{2/3} - e^{1/3}), \quad \varphi(y) = y |y|^3 \\ y_\Omega(x) = (e + e^{-1}) \cos(x), \quad a_y(t) = e^{-2t}, \quad a_u(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{1/3}, \\ a(x) = \cos(x), \quad b(t) = \frac{1}{4} e^{-4t} - \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, \frac{e^t - e^{1/3}}{e^{2/3} - e^{1/3}} \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Das ist eine Optimalsteuerungsaufgabe für die eindimensionale Wärmeleitgleichung mit Stefan-Boltzmann-Randbedingung. Es ist leicht nachzuprüfen, dass folgende Funktionen gemeinsam die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung erfüllen:

$$\begin{aligned} \bar{u}(t) &= \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, \frac{e^t - e^{1/3}}{e^{2/3} - e^{1/3}} \right\} \right\} \\ \bar{y}(x, t) &= e^{-t} \cos(x), \quad p(x, t) = -e^t \cos(x). \end{aligned}$$

Der adjungierte Zustand p ist als Lösung der adjungierten Gleichung

$$\begin{aligned} -p_t(x, t) - p_{xx}(x, t) &= 0 \\ p_x(0, t) &= 0 \\ p_x(\ell, t) + [1 + \varphi'(\bar{y}(\ell, t))] p(\ell, t) &= -a_y(t) \\ p(x, T) &= \bar{y}(x, T) - y_\Omega(x) \end{aligned} \quad (5.54)$$

definiert. Die notwendigen Optimalitätsbedingungen sind in Übungsaufgabe 5.4 zu verifizieren. Insbesondere ist die Projektionsbeziehung für u zu überprüfen. Weitere Details kann man in [16] nachlesen, woraus diese Aufgabe stammt.

Welche Idee liegt der Konstruktion von \bar{u} zugrunde? Eine interessante optimale Steuerung sollte sowohl die untere als auch die obere Schranke annehmen und diese beiden glatt verbinden. Laut Projektionsbeziehung muss \bar{u} auf inneren Teilstücken ein Vielfaches des adjungierten Zustands p sein. Exponentialfunktionen der Zeit eignen sich gut für explizite Lösungen der Wärmeleitungsgleichung, insbesondere für p . Das führt nach Anpassung von Konstanten zur obigen Wahl von \bar{u} . Diese Funktion ist auf S. 246 graphisch dargestellt.

Zum Nachweis der lokalen Optimalität zeigen wir, dass eine hinreichende Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung erfüllt ist. Die Lagrangefunktion lautet formal

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & J(y, u) - \int_0^T \int_0^\ell (y_t - y_{xx}) p \, dx dt - \int_0^\ell (y(x, 0) - a(x)) p(x, 0) \, dx \\ & + \int_0^T y_x(0, t) p(0, t) \, dt - \int_0^T (y_x(\ell, t) + y(\ell, t) - b(t) - u(t)) p(\ell, t) \, dt \\ & - \int_0^T \varphi(y(\ell, t)) p(\ell, t) \, dt\end{aligned}$$

und ist ein Spezialfall der für allgemeinere Randsteuerungsaufgaben auf S. 233 eingeführten Funktion. Hier ist Γ die zweielementige Menge $\{0, 1\}$ und deshalb gilt

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma} p \partial_\nu y \, ds dt &= \int_0^T (p(0, t) \partial_\nu y(0, t) + p(\ell, t) \partial_\nu y(\ell, t)) \, dt \\ &= \int_0^T (-p(0, t) y_x(0, t) + p(\ell, t) y_x(\ell, t)) \, dt.\end{aligned}$$

Wir erhalten wegen $\varphi''(y) = 12y^2$

$$\mathcal{L}''(\bar{y}, \bar{u}, p)(y, u)^2 = \|y(T)\|_{L^2(0, \ell)}^2 + \lambda \|u\|_{L^2(0, T)}^2 - 12 \int_0^T p(\ell, t) \bar{y}(\ell, t)^2 y(\ell, t)^2 \, dt.$$

Aus $p(x, t) \leq 0$ folgt

$$\mathcal{L}''(\bar{y}, \bar{u}, p)(y, u)^2 \geq \lambda \|u\|_{L^2(0, T)}^2 \quad (5.55)$$

für alle quadratisch integrierbaren Funktionen y, u . Aus Satz 5.18 folgt deshalb zunächst die lokale Optimalität von \bar{u} im Sinne von $L^\infty(0, T)$. Die hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung sind aber in einer sehr starken Form erfüllt. Daher verwundert die folgende Aussage nicht:

Satz 5.19 *Das oben definierte Paar (\bar{y}, \bar{u}) ist (global) optimal für (5.51)–(5.53).*

Beweis: Es sei (y, u) irgendein anderes zulässiges Paar. Für das reduzierte Funktional f haben wir dann unter Beachtung der Variationsungleichung mit einem $\theta \in (0, 1)$

$$f(u) \geq f(\bar{u}) + \frac{1}{2} f''(\bar{u} + \theta(u - \bar{u}))(u - \bar{u})^2.$$

Wie in Formel (5.44) auf S. 231 gilt

$$\begin{aligned} f''(\bar{u} + \theta(u - \bar{u}))(u - \bar{u})^2 &= \mathcal{L}''(y_\theta, u_\theta, p_\theta)(y, u - \bar{u})^2 \\ &\geq - \int_0^T p_\theta(\ell, t) \varphi''(y_\theta(\ell, t)) y(\ell, t)^2 dt, \end{aligned}$$

wobei $u_\theta = \bar{u} + \theta(u - \bar{u})$ ist, y_θ der zugehörige Zustand, p_θ der adjungierte Zustand und y die Lösung der bei y_θ linearisierten Gleichung zur Steuerung $u - \bar{u}$. Die Behauptung des Satzes, $f(u) \geq f(\bar{u})$, folgt aus der Nichtnegativität von φ'' und der Eigenschaft, dass alle möglichen adjungierten Zustände p_θ nichtpositiv sind.

Wir skizzieren die erforderlichen Details: Ist u_θ eine beliebige Steuerung aus U_{ad} , dann gilt für den zugehörigen Zustand y_θ die Ungleichung

$$y_\theta(x, T) - y_\Omega(x) < 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Zunächst sieht man $y_\Omega \geq (e + e^{-1}) \cos(\pi/4) > 3\sqrt{2}/2 > 2$, $b(t) + u_\theta(t) \leq 1.25$, $y_0(x) = \cos(x) \leq 1$. Außerdem findet man aus Vergleichsprinzipien wie in [176], dass wegen Nichtnegativität aller vorgegebenen Daten der Zustand y_θ nichtnegativ ist, daher $y_\theta^3|y_\theta| = y_\theta^4 \geq 0$. Daraus folgt $(y_{\theta,x} + y_\theta)(\ell, t) = b(t) + u(t) - y_\theta^4(\ell, t) \leq 1.25$. Das Maximum der Lösung der linearen parabolischen Randwertaufgabe mit Randbedingung $y_{\theta,x} + y_\theta = 1.25$ kann nur auf dem Rand oder am Anfang angenommen werden. Daher gilt $y_\theta \leq \max(1, 1.25) = 1.25$ und somit $y_\theta(x, T) - y_\Omega \leq 1.25 - 2 < 0$.

Setzt man diese Informationen mit y_θ an Stelle von \bar{y} in (5.54) ein, dann stehen auf der rechten Seite nichtpositive Funktionen und es gilt $1 + \varphi'(y_\theta) \geq 0$ in der Randbedingung. Daher muss die Lösung p_θ der adjungierten Gleichung nichtpositiv sein. ■

5.8.2 Aufgabe mit integraler Zustandsrestriktion *

In [163] wurde folgendes Optimalsteuerungsproblem numerisch auf hinreichende Bedingungen zweiter Ordnung untersucht:

$$\begin{aligned} \min J(y, u) &:= \frac{1}{2} \iint_Q \alpha(x, t) (y(x, t) - y_Q(x, t))^2 dx dt + \frac{\lambda}{2} \int_0^T u^2(t) dt \\ &+ \int_0^T (a_y(t) y(\ell, t) + a_u(t) u(t)) dt \end{aligned} \quad (5.56)$$

bei

$y_t(x, t) - y_{xx}(x, t)$	$= e_Q$	in Q
$y_x(0, t)$	$= 0$	in $(0, T)$
$y_x(\ell, t) + y(\ell, t)^2$	$= e_\Sigma(t) + u(t)$	in $(0, T)$
$y(x, 0)$	$= 0$	in $(0, \ell)$

(5.57)

sowie Beschränkungen an Steuerung und Zustand

$$0 \leq u(t) \leq 1 \quad \text{f.ü. in } (0, T), \quad (5.58)$$

$$\iint_Q y(x, t) dx dt \leq 0. \quad (5.59)$$

Dabei sind $T > 0$ und $\lambda > 0$ fixiert, $Q = (0, \ell) \times (0, T)$. Die Funktionen $\alpha, y_Q, e_Q \in L^\infty(Q)$ sowie $a_y, a_u, e_\Sigma \in L^\infty(0, T)$ sind vorgegeben. Wie bisher bezeichnet

$$U_{ad} = \{u \in L^\infty(0, T) : 0 \leq u(t) \leq 1 \quad \text{f.ü. in } (0, T)\}$$

die Menge der zulässigen Steuerungen. Die Nichtlinearität y^2 ist nicht monoton. Wir könnten diese Schwierigkeit durch die Betrachtung der Funktion $y|y|$ umgehen, um Existenz und Eindeutigkeit des Zustands y zu garantieren. Da wir aber eine nichtnegative Lösung konstruieren, ist das hier ohne Belang.

Notwendige Bedingungen erster Ordnung

Die Steuerung \bar{u} sei lokal optimal für die obige Aufgabe, \bar{y} der zugehörige Zustand. Hier ist zusätzlich zu den Restriktionen an die Steuerfunktion noch eine Zustandsbeschränkung gegeben. Deshalb sind die bisher behandelten notwendigen Optimalitätsbedingungen auf diese Aufgabe nicht direkt anwendbar. Wir werden im letzten Kapitel die sogenannten Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen herleiten, die unter einer Regularitätsvoraussetzung gelten. Die Testlösung wird so konstruiert, dass diese Bedingungen erfüllt sind: Es existieren nach Satz 6.3 auf S. 260 ein adjungierter Zustand $p \in W(0, T) \cap C(\bar{Q})$ und ein nichtnegativer Lagrangescher Multiplikator $\mu \in \mathbb{R}$ so dass die adjungierte Gleichung

$$\begin{aligned} -p_t - p_{xx} &= \alpha(\bar{y} - y_Q) + \mu && \text{in } Q \\ p_x(0, t) &= 0 && \text{in } (0, T) \\ p_x(\ell, t) + 2\bar{y}(\ell, t)p(\ell, t) &= a_y(t) && \text{in } (0, T) \\ p(x, T) &= 0 && \text{in } (0, \ell) \end{aligned} \quad (5.60)$$

sowie die Variationsungleichung

$$\int_0^T (\lambda \bar{u}(t) + p(\ell, t) + a_u(t)) (u(t) - \bar{u}(t)) dt \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad} \quad (5.61)$$

erfüllt sind. Zusätzlich muss die *komplementäre Schlupfbedingung*

$$\mu \iint_Q \bar{y}(x, t) dx dt = 0 \quad (5.62)$$

gelten, siehe [47]. Die Aussage ergibt sich auch durch Anwendung von Satz 6.3 auf S. 260. Die Variationsungleichung (5.61) ist äquivalent zu

$$\bar{u}(t) = \mathbb{P}_{[0,1]} \left\{ -\frac{1}{\lambda} (p(\ell, t) + a_u(t)) \right\}, \quad (5.63)$$

wobei $\mathbb{P}_{[0,1]} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ die punktweise Projektion auf $[0, 1]$ bezeichnet. Auch diese Optimalitätsbedingungen können aus dem formalen Lagrangeprinzip hergeleitet werden. Die Lagrangefunktion lautet hier

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y, u, p, \mu) &= J(y, u) - \iint_Q (y_t - y_{xx} - e_Q) p dx dt + \iint_Q \mu y(x, t) dx dt \\ &\quad - \int_0^T (y_x(\ell, t) + y(\ell, t)^2 - u(t) - e_\Sigma(t)) p(\ell, t) dt. \end{aligned}$$

Diese Definition geht davon aus, dass die homogenen Anfangs- und Randbedingungen an y im Zustandsraum verankert sind. Dann folgen die Bedingungen (5.60)–(5.61) aus $D_y \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, p, \mu) y = 0$ für alle zulässigen Inkremente y und $D_u \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, p, \mu) (u - \bar{u}) \geq 0$ für alle u aus U_{ad} .

Zur Konstruktion des Testbeispiels werden die Daten wie folgt fixiert: $T = 1$, $\ell = \pi$, $\lambda = 0.004$,

$$\begin{aligned} \alpha(x, t) &= \begin{cases} \alpha_0 \in \mathbb{R}, & t \in [0, 1/4] \\ 1, & t \in (1/4, 1], \end{cases} \\ y_Q(x, t) &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha(x, t)} (1 - (2 - t) \cos x), & t \in [0, 1/2] \\ \frac{1}{\alpha(x, t)} (1 - (2 - t - \alpha(x, t) (t - 1/2)^2)) \cos x, & t \in (1/2, 1], \end{cases} \\ a_y(t) &= \begin{cases} 0, & t \in [0, 1/2] \\ 2(t - 1/2)^2(1 - t), & t \in (1/2, 1], \end{cases} \quad a_u(t) = \lambda + 1 - (1 + 2\lambda)t, \\ e_Q(t) &= \begin{cases} 0, & t \in [0, 1/2] \\ (t^2 + t - 3/4) \cos x, & t \in (1/2, 1], \end{cases} \\ e_\Sigma(t) &= \begin{cases} 0, & t \in [0, 1/2] \\ (t - 1/2)^4 - (2t - 1), & t \in (1/2, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

Satz 5.20 *Mit den obigen Festlegungen genügen die Größen*

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \max\{0, 2t - 1\}, \quad \bar{y} = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1/2] \\ (t - 1/2)^2 \cos x, & t \in (1/2, 1] \end{cases} \\ p &= (1 - t) \cos x, \quad \mu = 1 \end{aligned}$$

den notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung für die Aufgabe (5.56)–(5.59).

Beweis: Dass Zustandsgleichung und adjungierte Gleichung erfüllt sind, ist leicht nachzurechnen. Ungleichung (5.59) ist aktiv, weil das Integral von $\cos x$ über $[0, \pi]$ verschwindet. Deshalb ist die Komplementaritätsbedingung (5.62) erfüllt. Außerdem ist \bar{u} zulässig. Es bleibt die Variationsungleichung (5.61) zu überprüfen. Mit (5.63) finden wir

$$-\frac{1}{\lambda} (p(\pi, t) + a_u(t)) = 2t - 1 = \begin{cases} < 0, & t \in [0, 1/2] \\ > 0, & t \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

Folglich gilt

$$\mathbb{P}_{[0,1]} \left\{ -\frac{1}{\lambda} (p(\pi, t) + a_u(t)) \right\} = \max\{0, 2t - 1\} = \bar{u}(t).$$

Die Behauptung ergibt sich aus der Äquivalenz zwischen Variationsungleichung und dieser Projektionsbeziehung. ■

Hinreichende Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung

Um stark aktiver Restriktionen zu berücksichtigen, führen wir zu gegebenem $\tau > 0$ die Menge

$$A_\tau(\bar{u}) = \{t \in (0, T) : |\lambda \bar{u}(t) + p(\ell, t) + a_u(t)| > \tau\}$$

ein. Wegen der Variationsungleichungen muss auf $A_\tau(\bar{u})$ je nach Vorzeichen von $\bar{u}(t) + p(\ell, t) + a_u(t)$ eine der Gleichungen $\bar{u}(t) = 0$ oder $\bar{u}(t) = 1$ gelten. Die zweite Ableitung \mathcal{L}'' ist

$$\mathcal{L}''(\bar{y}, \bar{u}, p, \mu)(y, u)^2 = \iint_Q \alpha y^2 dx dt + \int_0^T (-2p(\ell, t) y(\ell, t)^2 + \lambda u^2(t)) dt. \quad (5.64)$$

Wir nehmen weiter an, dass die Zustandsrestriktion (5.59) wie im Beispiel aktiv ist. Anderenfalls ist diese Nebenbedingung bedeutungslos und die hinreichenden Bedingungen fallen mit denen für reine Steuerungsrestriktionen zusammen. Die hinreichende Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung lautet: Es existieren $\delta > 0$ und $\tau > 0$, so dass

$$\mathcal{L}''(\bar{y}, \bar{u}, p, \mu)(y, u)^2 \geq \delta \int_0^T u^2 dt \quad (5.65)$$

für alle $y \in W(0, T)$, $u \in L^2(0, T)$ gilt, die folgenden Beziehungen genügen:

$$\begin{aligned} y_t - y_{xx} &= 0 \\ y_x(0, t) &= 0 \\ y_x(\ell, t) + 2\bar{y}(\ell, t) y(\ell, t) &= u(t) \\ y(x, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (5.66)$$

$$\begin{aligned} u(t) &= 0, & \text{falls } t \in A_\tau(\bar{u}) \\ u(t) &\geq 0, & \text{falls } \bar{u}(t) = 0 \text{ und } t \notin A_\tau(\bar{u}) \\ u(t) &\leq 0, & \text{falls } \bar{u}(t) = 1 \text{ und } t \notin A_\tau(\bar{u}), \end{aligned} \quad (5.67)$$

$$\iint_Q y(x, t) dx dt = 0.$$

Wir fordern (5.65) für alle (y, u) mit (5.66)–(5.67).

Hinreichende Bedingungen im Testbeispiel

Unsere Testlösung (\bar{y}, \bar{u}) erfüllt diese Bedingungen. Nach Konstruktion nimmt \bar{u} auf $[0, 1/2)$ die untere Grenze 0 an und ist dort stark aktiv, denn für $b < 1/2$ und $t \in [0, b]$ gilt

$$\lambda \bar{u}(t) + p(\pi, t) + a_u(t) = p(\pi, t) + a_u(t) = -\lambda(2t - 1) > -\lambda(2b - 1).$$

Daraus folgt $[0, b] \subset A_\tau(\bar{u})$ für $\tau = |\lambda(2b - 1)|$. Zur Überprüfung der hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung genügt der Nachweis der Definitheitsbedingung (5.65) für alle (y, u) , welche die linearisierte Gleichung (5.66) erfüllen sowie $u = 0$ auf $[0, b]$, $0 < b < 1/2$ beliebig aber fest. Die Wahl von α steht uns noch frei. Wir setzen

$$\alpha(x, t) = \begin{cases} \alpha_0, & 0 \leq t \leq b \\ 1, & b < t \leq 1. \end{cases} \quad (5.68)$$

Satz 5.21 *Es sei α nach (5.68) gewählt mit $b \in [0, 1/2)$. Dann wird die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung für beliebiges $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ durch $(\bar{y}, \bar{u}, p, \mu)$ erfüllt.*

Beweis: Wir wählen (y, u) so, dass u auf $[0, b]$ verschwindet und y Gleichung (5.66) genügt. Dann haben wir $y(x, t) = 0$ auf $[0, b]$. Für \mathcal{L}'' erhalten wir deshalb

$$\begin{aligned}\mathcal{L}''(\bar{y}, \bar{u}, p, \mu)(y, u)^2 &= \int_0^\pi \int_b^1 y^2 dx dt + \lambda \int_0^1 u^2 dt - 2 \int_0^1 p(\pi, t) y(\pi, t)^2 dt \\ &\geq \lambda \int_0^1 u^2 dt - 2 \int_0^1 (-(1-t)) y(\pi, t)^2 dt \geq \lambda \int_0^1 u^2 dt,\end{aligned}\tag{5.69}$$

woraus die Definitheitsbedingung (5.65) folgt. ■

Wir haben α_0 nicht als positiv vorausgesetzt. Für $\alpha_0 \geq 0$ wäre \mathcal{L}'' auf ganz $W(0, 1) \times L^2(0, 1)$ gleichmäßig positiv und damit die Definitheitsbedingung in einem sehr starken Sinn erfüllt. Jetzt wählen wir α_0 teilweise negativ, so dass \mathcal{L}'' indefinit wird.

Satz 5.22 *Ist $\alpha_0 < 0$ hinreichend klein, dann existiert ein Paar (y, u) mit folgenden Eigenschaften: $u \geq 0$, y löst die linearisierte Gleichung (5.66), und es gilt*

$$\mathcal{L}''(\bar{y}, \bar{u}, p, \mu)(y, u)^2 < 0.\tag{5.70}$$

Beweis: Wir fixieren $b \in (0, 1/2)$ und setzen

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{auf } [0, b] \\ 0 & \text{auf } (b, 1]. \end{cases}$$

Dann kann y nicht identisch verschwinden, also gilt $\int_0^\pi \int_0^b y^2 dx dt > 0$. Es folgt

$$\alpha_0 \int_0^\pi \int_0^b y^2 dx dt \rightarrow -\infty\tag{5.71}$$

für $\alpha_0 \rightarrow -\infty$. Der Ausdruck (5.69) wird negativ für hinreichend kleines α_0 , weil zum ersten Integral der Ausdruck (5.71) hinzukommt. ■

Für numerische Zwecke braucht man eine grobe Abschätzung, wie klein α_0 zu wählen ist, damit $\mathcal{L}''(\bar{y}, \bar{u}, p, \mu)(y, u)^2$ negativ wird, d.h.

$$\alpha_0 \int_0^\pi \int_0^b y^2 dx dt + \int_0^\pi \int_b^1 y^2 dx dt + \int_0^1 2(1-t) y^2(\pi, t) dt + \lambda \int_0^1 u^2 dt < 0.$$

Wir fordern daher

$$|\alpha_0| > \frac{\int_0^\pi \int_b^1 y^2 dx dt + \int_0^1 2(1-t) y^2(\pi, t) dt + \lambda \int_0^1 u^2 dt}{\int_0^\pi \int_0^b y^2 dx dt} = \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_0}.\tag{5.72}$$

Hier kann $b \in [0, 1/2)$ beliebig gewählt werden, z.B. $b = 1/4$. In diesem Fall werten wir die Integrale I_j aus für

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{auf } [0, 1/4] \\ 0 & \text{auf } (1/4, 1]. \end{cases}$$

Der Zustand y löst mit (5.66) die homogene Wärmeleitgleichung mit homogener Anfangsbedingung, homogener Randbedingung bei $x = 0$ und

$$y_x(\pi, t) = \begin{cases} 1 & \text{auf } [0, 1/4] \\ -2\bar{y}(\pi, t) & \text{auf } (1/4, 1]. \end{cases}$$

Eine numerische Auswertung der Integrale I_j , $j = 0, \dots, 3$, bringt $I_0 = 0.0103271$, $I_1 = 0.0401844$, $I_2 = 0.0708107$, $I_3 = 0.001$ und damit

$$\frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_0} = 10.845.$$

In diesem Beispiel sind die hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung erfüllt, obwohl die Bilinearform $\mathcal{L}''(\bar{y}, \bar{u}, p, \mu)$ nicht im ganzen Raum der Definitheitsbedingung genügt. Es existieren Bereiche negativer Definitheit, in denen aber die Steuerungsrestriktionen stark aktiv sind. Hier wurde das durch eine analytische Konstruktion gesichert.

Es stellt sich die Frage, ob man hinreichende Bedingungen zweiter Ordnung numerisch nachprüfen kann, denn die Lösung ist in der Regel nicht analytisch zu ermitteln. Eine numerische Lösung der Aufgabe muss mit Hilfe einer Diskretisierung erfolgen, z.B. mit finiten Differenzen für die Zeit- und finiten Elementen für die Ortsvariable.

Für die diskretisierte Aufgabe kann man die sogenannte reduzierte Hesse-Matrix bestimmen (das ist die Hesse-Matrix des Zielfunktional in Bezug auf die diskrete Steuerung u , wenn y mit Hilfe der diskretisierten linearisierten Gleichung eliminiert wird. Sie berücksichtigt gleichzeitig die aktiven Restriktionen, siehe Kelley [120]). Sind die Eigenwerte dieser Matrix hinreichend positiv, dann kann man erwarten, dass die hinreichenden Bedingungen erfüllt sind. Allerdings liefert diese Methode keinen Beweis, dass dies wirklich so ist. Numerisch getestet wurde dieses Verfahren in [163].

5.9 Numerische Verfahren

Alle in diesem Abschnitt behandelten numerische Methoden beziehen sich auf die Aufgabe (5.7)–(5.9),

$$\begin{aligned} \min J(y, v, u) &:= \int_{\Omega} \phi(x, y(x, T)) dx + \iint_Q \varphi(x, t, y(x, t), v(x, t)) dx dt \\ &+ \iint_{\Sigma} \psi(x, t, y(x, t), u(x, t)) ds dt, \end{aligned}$$

$y_t - \Delta y + d(x, t, y)$	$=$	v	in Q
$\partial_{\nu} y + b(x, t, y)$	$=$	u	in Σ
$y(0)$	$=$	y_0	in Ω ,

$$v_a(x, t) \leq v(x, t) \leq v_b(x, t) \quad \text{in } Q$$

$$u_a(x, t) \leq u(x, t) \leq u_b(x, t) \quad \text{in } \Sigma.$$

Wir schreiben die Verfahren nur formal auf. Alle gegebenen Funktionen und Daten seien so glatt, dass die im Weiteren aufgeschriebenen Terme korrekt definiert sind.

5.9.1 Gradientenverfahren

Zuerst diskutieren wir das in Kapitel 2 eingeführte Gradienten-Projektionsverfahren und definieren dazu die reduzierte Zielfunktion $f(v, u) = J(y(v, u), v, u)$. Die Ableitung von

f berechnet man an einer festen Stelle (v_n, u_n) mit dem adjungierten Zustand p_n gemäß

$$f'(v_n, u_n)(v, u) = \iint_Q (\varphi_v(x, t, y_n, v_n) + p_n) v \, dx dt + \iint_\Sigma (\psi_u(x, t, y_n, u_n) + p_n) u \, ds dt.$$

Dabei ist p_n der adjungierte Zustand, die Lösung von

$$\begin{aligned} -p_t - \Delta p + d_y(x, t, y_n) p &= \varphi_y(x, t, y_n, v_n) \\ \partial_\nu p + b_y(x, t, y_n) p &= \psi_y(x, t, y_n, u_n) \\ p(x, T) &= \phi_y(x, y_n(x, T)). \end{aligned} \quad (5.73)$$

Die Steuerungen $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$ seien bereits bestimmt. Das nächste Paar von Steuerungen (v_{n+1}, u_{n+1}) ergibt sich wie folgt:

S1 Berechne den Zustand $y_n = y(v_n, u_n)$ als Lösung von

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y + d(x, t, y) &= v_n \\ \partial_\nu y + b(x, t, y) &= u_n \\ y(0) &= y_0. \end{aligned}$$

S2 Bestimme den adjungierten Zustand p_n aus der adjungierten Gleichung (5.73).

S3 *Abstiegsrichtungen:* $h_n := -(\varphi_v(\cdot, y_n, v_n) + p_n)$, $r_n := -(\psi_u(\cdot, y_n|_\Sigma, u_n) + p_n|_\Sigma)$

S4 *Schrittweitenbestimmung:* Bestimme s_n aus

$$\min_{s>0} f(\mathbb{P}_V(v_n + s h_n), \mathbb{P}_U(u_n + s r_n)).$$

Hier bezeichnen \mathbb{P}_V bzw. \mathbb{P}_U die bereits mehrmals verwendeten punktweisen Projektionsoperatoren auf die zulässigen Mengen V_{ad} bzw. U_{ad} , d.h. $\mathbb{P}_V = \mathbb{P}_{[v_a, v_b]}$, $\mathbb{P}_U = \mathbb{P}_{[u_a, u_b]}$.

S5 (*Neue Steuerungen*)

$$(v_{n+1}, u_{n+1}) := (\mathbb{P}_V(u_n + s_n h_n), \mathbb{P}_U(v_n + s_n r_n)),$$

$n := n + 1$; gehe zu S1.

Bemerkungen. Im Gegensatz zum entsprechenden Verfahren für semilineare elliptische Gleichungen lässt sich die nichtlineare Gleichung in Schritt **S1** relativ leicht numerisch lösen. Hier bieten sich semi-explizite Verfahren an: Für eine äquidistante Zerlegung $t_i = i \tau$ mit $\tau = T/k$, $i = 0, \dots, k$, bezeichne $w_i(x)$ die zu berechnende Näherung von $y_n(x, t_i)$. Man bestimmt $w_{i+1}(x)$ aus der linearen elliptischen Gleichung

$$\begin{aligned} w_{i+1} - \tau \Delta w_{i+1} &= w_i - \tau d(x, t_{i+1}, w_i) + \tau v_n(\cdot, t_{i+1}) && \text{in } \Omega \\ \partial_\nu w_{i+1} &= -b(x, t_{i+1}, w_i) + u_n(\cdot, t_{i+1}) && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

für $i = 0, \dots, k - 1$. Damit sind k lineare elliptische Gleichungen zu lösen.

5.9.2 Das SQP-Verfahren

Das SQP-Verfahren läuft analog zum elliptischen Fall ab. Deshalb werden die einzelnen Schritte ohne ausführliche Erläuterung beschrieben. Das Verfahren bezieht sich wieder auf die eben behandelte Aufgabe (5.7)–(5.9).

Die zuletzt bestimmten Iterierten seien v_n, u_n, y_n, p_n . Dann ist im nächsten Schritt das folgende quadratische Optimalsteuerungsproblem zu lösen:

$$\begin{aligned} \min \tilde{J}(y, v, u) &:= J'(y_n, v_n, u_n)(y - y_n, v - v_n, u - u_n) \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathcal{L}''(y_n, v_n, u_n, p_n)(y - y_n, v - v_n, u - u_n)^2 \end{aligned} \quad (5.74)$$

bei

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y + d(x, t, y_n) + d_y(x, t, y_n)(y - y_n) &= v & \text{in } Q \\ \partial_\nu y + b(x, t, y_n) + b_y(x, t, y_n)(y - y_n) &= u & \text{in } \Sigma \\ y(0) &= y_0 & \text{in } \Omega, \end{aligned} \quad (5.75)$$

sowie

$$\begin{aligned} v_a(x, t) &\leq v(x, t) \leq v_b(x, t) & \text{in } Q \\ u_a(x, t) &\leq u(x, t) \leq u_b(x, t) & \text{in } \Sigma. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Die Lagrangefunktion schreiben wir der Kürze halber formal auf,

$$\mathcal{L} = J - \iint_Q (y_t - \Delta y - d(x, t, y) - v) p \, dx dt - \iint_\Sigma (\partial_\nu y + b(x, t, y) - u) p \, ds dt.$$

Nach Bildung der zweiten Ableitung fallen die nur formal richtigen Terme $y_t, -\Delta y$ und $\partial_\nu y$ ohnehin weg. Die quadratische Zielfunktion \tilde{J} ergibt sich nach etwas Rechnung als

$$\begin{aligned} \tilde{J}(y, v, u) &= \\ &\int_\Omega \left\{ \phi_y(x, y_n(\cdot, T))(y(\cdot, T) - y_n(\cdot, T)) + \frac{1}{2} \phi_{yy}(x, y_n(\cdot, T))(y(\cdot, T) - y_n(\cdot, T))^2 \right\} dx \\ &+ \iint_Q \left\{ \begin{bmatrix} \varphi_y \\ \varphi_v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y - y_n \\ v - v_n \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} y - y_n \\ v - v_n \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \varphi_{yy} & \varphi_{yv} \\ \varphi_{vy} & \varphi_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y - y_n \\ v - v_n \end{bmatrix} \right\} dx dt \\ &+ \iint_\Sigma \left\{ \begin{bmatrix} \psi_y \\ \psi_u \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y - y_n \\ u - u_n \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} y - y_n \\ u - u_n \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \psi_{yy} & \psi_{yu} \\ \psi_{uy} & \psi_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y - y_n \\ u - u_n \end{bmatrix} \right\} ds dt \\ &- \frac{1}{2} \iint_Q p_n d_{yy}(x, t, y_n)(y - y_n)^2 dx dt - \frac{1}{2} \iint_\Sigma p_n b_{yy}(x, t, y_n)(y - y_n)^2 ds dt, \end{aligned}$$

wobei die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von φ und ψ ebenfalls von den Variablen (x, t, y_n, v_n) bzw. (x, t, y_n, u_n) abhängen.

Als Lösung der quadratischen Aufgabe (5.74)–(5.76) erhält man $(y_{n+1}, v_{n+1}, u_{n+1})$. Diese Funktionen setzt man in die adjungierte Gleichung ein, aus der $p = p_{n+1}$ bestimmt wird: Die Ableitung von \tilde{J} nach y steht dort auf der rechten Seite, geordnet nach Integrationsgebieten. Die adjungierte Gleichung lautet deshalb

$$\begin{aligned} -p_t - \Delta p + d_y(x, t, y_n) p &= \varphi_y(x, t, y_n, v_n) + \varphi_{yy}(x, t, y_n, v_n)(y - y_n) \\ &\quad - p_n d_{yy}(x, t, y_n)(y - y_n) \\ \partial_\nu p + b_y(x, t, y_n) p &= \psi_y(x, t, y_n, u_n) + \psi_{yy}(x, t, y_n, u_n)(y - y_n) \\ &\quad - p_n b_{yy}(x, t, y_n)(y - y_n) \\ p(T) &= \phi_y(x, y_n(\cdot, T)) + \phi_{yy}(x, y_n(\cdot, T))(y(\cdot, T) - y_n(\cdot, T)). \end{aligned}$$

Dieser adjungierte Zustand fällt bei Anwendung des numerischen Verfahrens oft als Nebenprodukt mit an, so dass diese Gleichung nicht zusätzlich zu lösen ist. Das eben beschriebene SQP-Verfahren konvergiert lokal quadratisch im Sinne der L^∞ -Normen von

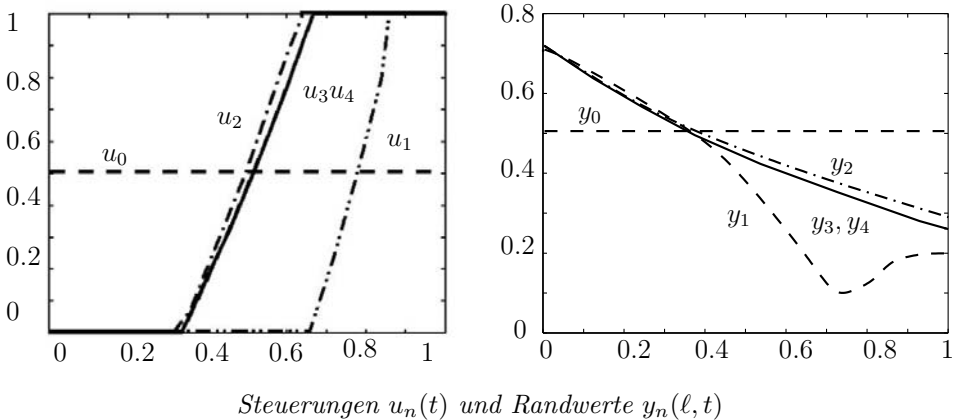
y, v, u, p gegen eine lokale Referenzlösung, sofern diese die hinreichenden Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung erfüllt, siehe [197] und weitere dort zitierte Arbeiten.

Beispiel. Die Testaufgabe (5.51)–(5.53) auf S. 236 wurde mit folgenden Startfunktionen gerechnet:

$$u_0(t) \equiv y_0(x, t) \equiv p_0(x, t) \equiv 0.5.$$

Die numerische Lösung der parabolischen Gleichung erfolgte durch ein implizites Differenzenverfahren bei Approximation der Randbedingung mit der Ordnung 2. Als Zeit- und Ortschaftweite wurde $1/200$ gewählt und die Steuerfunktionen als stückweise konstant auf dem Zeitgitter angesetzt.

Die Folgen der Steuerungen $u_n(t)$ sowie der Randwerte $y_n(\ell, t)$ sind in der Abbildung unten dargestellt. Bereits nach 4 Schritten war die Genauigkeit höher als die numerisch für die partiellen Differentialgleichung zu erwartende. Eine weitere Verfeinerung ergab graphisch keine Verbesserung mehr.



Steuerungen $u_n(t)$ und Randwerte $y_n(\ell, t)$

Literaturhinweise. Zur Konvergenzanalyse des projizierten Gradientenverfahrens verweisen wir auf [90] und [120]. Weitere gängige Methoden zur Lösung diskretisierter Optimalsteuerungsprobleme sind detailliert in [90] dargestellt. Parabolische Aufgaben mit Box-Restriktionen an die Steuerung können sehr effizient mit dem *projizierten Newtonverfahren* gelöst werden, vgl. zum Beispiel [108], [121], [122]; siehe auch [96].

Über die Anwendung des SQP-Verfahrens berichten zahlreiche Arbeiten, insbesondere im parabolischen Fall, [80], [133], [141]. Schur-Komplement-Methoden zur effektiven Anwendung von SQP-Verfahren auf diskretisierte parabolische Probleme sind in [186], [149] dargestellt. Neben SQP-Verfahren gewinnen auch Trust-Region- und Innere-Punkte-Methoden sowie davon abgeleitete hybride Techniken zunehmend an Bedeutung für die Lösung nichtlinearer parabolischer Aufgaben. Stellvertretend für eine Vielzahl anderer Literaturstellen seien [202], [201], [207] genannt. Weitere Literaturverweise findet man z.B. im Übersichtsartikel [100].

Bei nichtlinearen parabolischen Aufgaben in mehrdimensionalen Ortsgebieten ist die Dimension der diskretisierten Probleme sehr hoch. Durch Modellreduktion kann man reduzierte Aufgaben wesentlich kleinerer Dimension aufstellen, die wichtige Eigenschaften des Ausgangsproblems widerspiegeln und dennoch relativ genau sind. Dazu gehört insbesondere die POD-Methode (POD für „proper orthogonal decomposition“), die insbesondere bei Strömungsvorgängen eine wichtige Hilfe ist. Diese Technik wird zum Beispiel in [3], [110], [131], [132] oder [205] angewendet.

Eine weitere, insbesondere für lineare Gleichungen gängige Methode der Modellreduktion ist „balanced truncation“, siehe z.B. Antoulas [11] sowie das zugehörige Literaturverzeichnis.

5.10 Weitere parabolische Probleme *

In diesem Abschnitt wird die Anwendbarkeit der bisher entwickelten Methoden auf allgemeinere semilineare parabolische Aufgaben skizziert. Dabei geht es nur um die prinzipielle Herangehensweise, ohne die theoretischen Details auszuarbeiten, die in Originalarbeiten nachzulesen sind und den vorgesehenen Rahmen dieses Buches sprengen würden. Die beiden Beispiele sollen auch verdeutlichen, dass letzten Endes jede Klasse nichtlinearer partieller Differentialgleichungen mit speziell auf sie zugeschnittenen Methoden behandelt werden muss.

5.10.1 Phasensfeldmodell

Wir diskutieren hier ein Optimalsteuerungsproblem zum Phasensfeldmodell aus Abschnitt 1.3.2 und stellen das Optimalitätssystem mit der formalen Lagrangetechnik auf. Ziel des Optimierungsprozesses soll die Approximation eines gewünschten Temperaturverlaufs $u_Q(x, t)$ und Erstarrungsverlaufs $\varphi_Q(x, t)$ sein:

$$\min J(u, \varphi, f) := \frac{\alpha}{2} \iint_Q (u - u_Q)^2 dxdt + \frac{\beta}{2} \iint_Q (\varphi - \varphi_Q)^2 dxdt + \frac{\lambda}{2} \iint_Q f^2 dxdt \quad (5.77)$$

bei

$$\begin{array}{lll} u_t + \frac{\ell}{2} \varphi_t & = & \kappa \Delta u + f & \text{in } Q \\ \tau \varphi_t & = & \xi^2 \Delta \varphi + g(\varphi) + 2u & \text{in } Q \\ \partial_\nu u & = & 0, \quad \partial_\nu \varphi = 0, & \text{in } \Sigma \\ u(\cdot, 0) & = & u_0, \quad \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0 & \text{in } \Omega \end{array} \quad (5.78)$$

und den Box-Restriktionen

$$f_a(x, t) \leq f(x, t) \leq f_b(x, t) \quad \text{f.ü. in } Q. \quad (5.79)$$

Gegeben sind $u_Q, \varphi_Q \in L^2(Q)$, Konstanten $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \lambda \geq 0$, positive Konstanten ℓ, κ, τ, ξ , Funktionen $u_0, \varphi_0 \in L^2(\Omega)$ und ein Polynom $g = g(z) = az + bz^2 - cz^3$ mit beschränkten Koeffizientenfunktionen $a(x, t), b(x, t)$ sowie $c(x, t) \geq \bar{c} > 0$.

Das Ortsgebiet Ω sei ein beschränktes C^2 -Gebiet mit Dimension $N \in \{2, 3\}$. Die Anfangsdaten u_0 und φ_0 sollen zu $W^{2,\infty}(\Omega)$ gehören und den Kompatibilitätsbedingungen $\partial_\nu \varphi_0 = \partial_\nu u_0 = 0$ auf $\Gamma = \partial\Omega$ genügen.

Die Steuerung ist die Temperaturquelle $f \in L^\infty(Q)$, Zustände sind die Temperatur u und die Phasenfunktion φ . Die Zustände werden in Räumen

$$W_p^{2,1}(Q) = \left\{ u \in L^p(Q) : u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial u}{\partial t} \in L^p(Q), i, j = 1, \dots, N \right\}$$

definiert, versehen mit einer entsprechenden Norm.

In [109] wurde gezeigt, dass das System parabolischer Gleichungen (5.78) für $q \geq 2$ zu jedem $f \in L^q(Q)$, genau ein Paar von Zuständen $(\varphi, u) \in W_q^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q)$ mit

$$p = \begin{cases} \frac{5q}{5-2q}, & 2 \leq q < 5/2 \text{ und } N = 3 \\ \text{beliebig in } \mathbb{R}_+, & 5/2 \leq q \text{ und } N = 3 \text{ oder } q \geq 2 \text{ und } N = 2 \end{cases}$$

besitzt. Die Abbildung $G : f \mapsto (u, \varphi)$ ist zweimal stetig Fréchet-differenzierbar von $F := L^2(Q)$ in $Y := W_2^{1,2}(Q) \times W_2^{1,2}(Q)$, [99]. Das liegt daran, dass der Nemytskii-Operator $\varphi(\cdot, \cdot) \mapsto g(\varphi(\cdot, \cdot))$ zweimal stetig differenzierbar von $W_2^{1,2}(Q)$ nach $L^2(Q)$ ist. Diese Eigenschaft folgt aus der Einbettung $W_2^{1,2}(Q) \hookrightarrow L^6(Q)$ für $N \leq 3$ und aus der speziellen Form von g als Polynom dritten Grades in φ .

Zur Herleitung der notwendigen Optimalitätsbedingungen führen wir die Lagrangefunktion nach dem im Abschnitt 3.1 erläuterten Prinzip ein:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u, \varphi, f, p, \psi) &:= J(u, \varphi, f) - \iint_Q \left((u_t + \frac{\ell}{2} \varphi_t - f) p + \kappa \nabla u \cdot \nabla p \right) dx dt \\ &\quad - \iint_Q ((\tau \varphi_t - g(\varphi) - 2u) \psi + \xi^2 \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) dx dt. \end{aligned}$$

Die homogenen Neumann-Randbedingungen sind hier bereits berücksichtigt. Wir definieren

$$F_{ad} = \{f \in L^2(Q) : f_a(x, t) \leq f(x, t) \leq f_b(x, t) \quad \text{f.ü. in } Q\}$$

als Menge der zulässigen Steuerungen und erhalten mit der Lagrangetechnik folgende notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} D_u \mathcal{L}(\bar{u}, \bar{\varphi}, \bar{f}, p, \psi) u &= 0 & \forall u : u(0) = 0, \\ D_\varphi \mathcal{L}(\bar{u}, \bar{\varphi}, \bar{f}, p, \psi) \varphi &= 0 & \forall \varphi : \varphi(0) = 0, \\ D_f \mathcal{L}(\bar{u}, \bar{\varphi}, \bar{f}, p, \psi)(f - \bar{f}) &\geq 0 & \forall f \in F_{ad}. \end{aligned}$$

Die homogenen Anfangsbedingungen für die Richtungen u und φ gibt man vor, damit $\bar{u} + s u$ sowie $\bar{\varphi} + s \varphi$ für $s \in \mathbb{R}$ ebenfalls die Anfangsbedingungen erfüllen. Die erste Bedingung ergibt nach partieller Integration in Bezug auf t

$$\iint_Q (\alpha (\bar{u} - u_Q) u - p u_t - \kappa \nabla u \cdot \nabla p + 2 \psi u) dx dt = 0$$

für alle u mit $u(0) = 0$. Das ist die schwache Formulierung der Gleichung

$$\begin{aligned} -p_t &= \kappa \Delta p + 2 \psi + \alpha (\bar{u} - u_Q) & \text{in } Q \\ \partial_\nu p &= 0 & \text{in } \Sigma \\ p(T) &= 0 & \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

Analog folgt aus der zweiten Bedingung

$$\begin{aligned} -\frac{\ell}{2} p_t - \tau \psi_t &= \xi^2 \Delta \psi + g'(\bar{\varphi}) \psi + \beta (\bar{\varphi} - \varphi_Q) & \text{in } Q \\ \partial_\nu \psi &= 0 & \text{in } \Sigma \\ \psi(T) &= 0 & \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

Die dritte Bedingung liefert die Variationsungleichung

$$\iint_Q (\lambda \bar{f} + p)(f - \bar{f}) \, dxdt \geq 0 \quad \forall f \in F_{ad}.$$

Davon können wieder punktweise Minimumprinzipien oder Projektionsbeziehungen abgeleitet werden. Weitere Details sind in Originalarbeiten nachzulesen.

Literaturhinweise. Die Existenz optimaler Steuerungen und notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung wurden in [109] hergeleitet, die Anwendung des Gradientenverfahrens zur numerischen Lösung des Problems in [56] beschrieben. Hinreichende Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung sowie die Konvergenz des SQP-Verfahrens werden in [99] behandelt. Die Zwei-Norm-Diskrepanz tritt dabei nicht auf, weil die Nichtlinearität g nur ein Polynom dritten Grades ist. Es kann also im Raum $Y := W_2^{1,2}(Q) \times W_2^{1,2}(Q) \times L^2(Q)$ gearbeitet werden. Die numerische Lösung eines konkreten optimal gesteuerten Erstarrungsproblems ist in [97] sowie [98] dargestellt. Mit der Modellreduktion einer solchen Aufgabe befasst sich [205]. Die optimale Steuerung eines allgemeineren (thermodynamisch konsistenten) Phasenfeldmodells behandeln z.B. [188] und [140].

5.10.2 Instationäre Navier-Stokes-Gleichungen

Problemstellung und Definitionen

Die Beeinflussung von Strömungen ist ein wichtiges und sehr aktives Forschungsgebiet, sowohl in der Mathematik als auch in den Ingenieurwissenschaften. Das große Interesse an solchen Aufgaben erwächst aus weitreichenden Anwendungen. Zum Beispiel lässt sich die Umströmung von Tragflügeln durch gesteuertes Einblasen oder Absaugen von Luft an deren Oberfläche verbessern. Mit Strömungskontrolle kann man dem Abreißen der Wasserströmung um das Ruder eines Schiffes vorbeugen oder den von Düsentriebwerken erzeugten Lärm vermindern. Durch optimale Formgebung von Herzklappen lassen sich die Strömungsverhältnisse in künstlichen Herzen verbessern.

Wir betrachten hier exemplarisch eine sehr vereinfachte Aufgabenstellung, bei der ein optimales Geschwindigkeitsfeld in einem Ortsgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ durch in Ω wirkende steuerbare Kräfte erzielt werden soll. Aufgaben dieses Typs treten zum Beispiel bei der Strömungskontrolle magneto-hydrodynamischer Prozesse auf. Mathematisch lautet die Aufgabe

$$\min J(u, f) := \frac{1}{2} \iint_Q |u(x, t) - u_Q(x, t)|^2 \, dxdt + \frac{\lambda}{2} \iint_Q |f(x, t)|^2 \, dxdt \quad (5.80)$$

bei

$$\begin{aligned} u_t - \frac{1}{\text{Re}} \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p &= f && \text{in } Q \\ \operatorname{div} u &= 0 && \text{in } Q \\ u &= 0 && \text{in } \Sigma \\ u(\cdot, 0) &= u_0 && \text{in } \Omega \end{aligned} \quad (5.81)$$

und den Beschränkungen an die Steuerung f

$$f_{a,i}(x, t) \leq f_i(x, t) \leq f_{b,i}(x, t) \quad \text{f.ü. in } Q, \quad i = 1, 2. \quad (5.82)$$

Wir beschränken uns dabei auf ein zweidimensionales Ortsgebiet Ω , weil nur hier Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung u von (5.81) in befriedigender Weise geklärt sind. Gegeben sind zweidimensionale Vektorfunktionen $u_Q, f_a, f_b \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^2)$ mit $f_a(x, t) \leq f_b(x, t)$, ein divergenzfreies Vektorfeld $u_0 \in L^2(\Omega)^2$ sowie Konstanten $T > 0$, $\lambda \geq 0$, $\text{Re} > 0$. Die Kraftdichte $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^2)$ ist die Steuerung, während der zugehörige Zustand u physikalisch ein Geschwindigkeitsfeld darstellt. Die reellwertige Funktion p bezeichnet jetzt den Druck. In den Anwendungen ist die *Reynoldszahl* Re sehr groß, was die numerische Lösung von (5.81) sehr erschwert. Die Menge aller Steuerungen $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^2)$, welche die obigen Restriktionen erfüllen, fassen wir wie bisher zur Menge der zulässigen Steuerungen F_{ad} zusammen.

Im Weiteren werden die Räume $V = \{v \in H^1(\Omega)^2 : \text{div } v = 0\}$ mit Skalarprodukt

$$(u, v) = \sum_{i=1}^2 \nabla u_i \cdot \nabla v_i$$

sowie $H = \{v \in L^2(\Omega)^2 : \text{div } v = 0\}$ verwendet. Die Forderung $\text{div } v = 0$ ist im Sinne von $(v, \nabla z) = 0$ für alle $z \in H^1(\Omega)^2$ zu verstehen. Der Punkt \cdot kennzeichnet wie bisher das Skalarprodukt in \mathbb{R}^2 . Die abstrakte Formulierung der Zustandsgleichung erfolgt durch Einführung der *Trilinearform* $b : V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$,

$$b(u, v, w) = ((u \cdot \nabla) v, w)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 u_i w_j D_i v_j dx.$$

Es gilt $b(u, v, w) = -b(u, w, v)$ sowie

$$|b(u, v, w)| \leq C \|u\|_{L^4(\Omega)^2} \|v\|_{H^1(\Omega)^2} \|w\|_{L^4(\Omega)^2},$$

Temam [191]. Aus der ersten Beziehung folgt $b(u, v, v) = 0$. Wir verwenden den Raum

$$\mathcal{W}[0, T] := \{v = (v_1, v_2) \in W(0, T)^2 : \text{div } v_i = 0, i = 1, 2\}.$$

Weiterhin bezeichnet ν wie bisher die Richtung der äußeren Normalen an Γ . In der Strömungsmechanik steht diese aber für die Viskosität $1/\text{Re}$. Da ν im Buch bereits für die Normale vergeben ist, verwenden wir zur Bezeichnung der Viskosität den Buchstaben κ , also $\kappa := 1/\text{Re}$.

Analog zu der in Abschnitt 2.13.1 beschriebenen Weise erzeugt $Au := -\Delta u$ eine lineare stetige Abbildung von $L^2(0, T; V)$ in $L^2(0, T; V^*)$. Außerdem ist der Operator B , definiert durch

$$\int_0^T (B(u)(t), w(t))_{V^*, V} dt := \int_0^T b(u(t), u(t), w(t)) dt,$$

eine Abbildung von $L^2(0, T; V)$ in $L^1(0, T; V^*)$.

Definition. Eine Funktion $u \in L^2(0, T; V)$ mit $u_t \in L^1(0, T; V^*)$ heißt *schwache Lösung des Anfangs-Randwertproblems (5.81)*, wenn sie folgenden Gleichungen im Sinne von $L^1(0, T; V^*)$ genügt:

$$\begin{aligned} u_t + \kappa Au + B(u) &= f \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Satz 5.23 ([191]) *Zu jedem Paar $f \in L^2(0, T; V^*)$, $u_0 \in H$ existiert genau eine schwache Lösung u der Gleichungen (5.81) in $\mathcal{W}(0, T)$.*

Der Satz liefert also mehr als die geforderte Regularität $u_t \in L^1(0, T; V^*)$. Man kann zeigen, dass die Steuerungs-Zustands-Abbildung $G : f \mapsto u$, $G : L^2(0, T; V^*) \rightarrow \mathcal{W}(0, T)$, zweimal Fréchet-differenzierbar ist.

Optimalitätsbedingungen

Die Herleitung von Optimalitätsbedingungen erster und zweiter Ordnung kann nun prinzipiell mit den Methoden aus Kapitel 5 erfolgen. Dazu ist insbesondere die Lösbarkeit der linearisierten Gleichung und die Regularität ihrer Lösung zu klären und eine adjungierte Gleichung zu behandeln. Die entsprechende Theorie ist in Arbeiten zu finden, die am Ende des Abschnitts angegeben sind. An Stelle einer exakten Herleitung bedienen wir uns nochmals der formalen Lagrangetechnik, um die zu erwartenden notwendigen Bedingungen erster Ordnung herzuleiten. Diese stimmen mit den in der Literatur bewiesenen Bedingungen überein. Dazu definieren wir die Lagrangefunktion wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u, p, f, w, q) &:= J(u, f) - \iint_Q (u_t - \kappa \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p - f) \cdot w \, dxdt \\ &\quad + \iint_Q q \operatorname{div} u \, dxdt. \end{aligned}$$

Die homogene Randbedingung für u führen wir der Kürze halber implizit mit, jedoch nicht die Bedingung der Divergenzfreiheit (was auch möglich wäre). Nach dem formalen Lagrangeprinzip erwarten wir für \mathcal{L} an der Stelle $(\bar{u}, \bar{p}, \bar{f}, w, q)$ die Beziehungen $D_u \mathcal{L} = 0$ für alle zum Anfangszeitpunkt verschwindenden u , $D_p \mathcal{L} = 0$ sowie $D_f \mathcal{L}(f - \bar{f}) \geq 0$ für alle f aus F_{ad} . Aus der zweiten Gleichung folgt

$$0 = D_p \mathcal{L}(\bar{u}, \bar{p}, \bar{f}, w, q) p = - \iint_Q w \cdot \nabla p \, dxdt = - \iint_{\Sigma} p w \cdot \nu \, dsdt + \iint_Q p \operatorname{div} w \, dxdt$$

für alle hinreichend glatten p . Wählen wir $p = 0$ auf dem Rand, sonst aber beliebig, so folgt daraus

$$\operatorname{div} w = 0 \quad \text{in } Q.$$

Die zusätzlich auf Σ folgende Beziehung $w \cdot \nu = 0$ wird wegen der unten erhaltenen Gleichung $w|_{\Sigma} = 0$ erfüllt sein. Aus $D_u \mathcal{L} = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 = D_u \mathcal{L}(\bar{u}, \bar{p}, \bar{f}, w, q) u &= \iint_Q (\bar{u} - u_Q) \cdot u \, dxdt - \iint_Q w \cdot u_t \, dxdt \\ &\quad + \iint_Q q \operatorname{div} u \, dxdt + \iint_Q \kappa w \cdot \Delta u - \iint_Q ((\bar{u} \cdot \nabla) u + (u \cdot \nabla) \bar{u}) \cdot w \, dxdt \end{aligned} \quad (5.83)$$

für alle hinreichend glatten u mit $u(0) = 0$ und $u|_{\Sigma} = 0$. Mit der dritten Greenschen Formel folgt wegen $u|_{\Sigma} = 0$

$$\iint_Q w \cdot \Delta u \, dxdt = \iint_Q \sum_{i=1}^2 w_i \Delta u_i \, dxdt = \iint_{\Sigma} \sum_{i=1}^2 w_i \partial_{\nu} u_i \, dsdt + \iint_Q u \cdot \Delta w \, dxdt.$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
 \iint_Q ((\bar{u} \cdot \nabla) u + (u \cdot \nabla) \bar{u}) \cdot w \, dxdt &= b(\bar{u}, u, w) + b(u, \bar{u}, w) \\
 &= -b(\bar{u}, w, u) + b(u, \bar{u}, w) \\
 &= \iint_Q \sum_{i,j=1}^2 (-\bar{u}_i (D_i w_j) u_j + u_i (D_i \bar{u}_j) w_j) \, dxdt \\
 &= \iint_Q \left(-((\bar{u} \cdot \nabla) w) \cdot u + ((\nabla \bar{u})^\top w) \cdot u \right) \, dxdt
 \end{aligned}$$

mit der Matrix $\nabla \bar{u} := (\nabla \bar{u}_1 \, \nabla \bar{u}_2)^\top$ und wegen $u(0) = 0$

$$\iint_Q w \cdot u_t \, dxdt = \int_\Omega w(x, T) u(x, T) \, dx - \iint_Q u \cdot w_t \, dxdt.$$

Nach Berücksichtigung aller Umformungen ergibt sich aus (5.83)

$$\begin{aligned}
 0 &= \iint_Q \left\{ \bar{u} - u_Q + w_t + \kappa \Delta w - (\nabla \bar{u})^\top w + (\bar{u} \cdot \nabla) w - \nabla q \right\} \cdot u \, dxdt \\
 &\quad + \iint_\Sigma \sum_{i=1}^2 w_i \partial_\nu u_i \, dsdt - \int_\Omega w(x, T) u(x, T) \, dx
 \end{aligned}$$

für alle entsprechenden u . Wie bisher folgt daraus wegen der Freiheit der Wahl von u , $u(T)$ bzw. ∂_ν in Q , Ω bzw. Σ die *adjungierte Gleichung*

$ \begin{aligned} -w_t - \kappa \Delta w + (\nabla \bar{u})^\top w - (\bar{u} \cdot \nabla) w + \nabla q &= \bar{u} - u_Q && \text{in } Q \\ \operatorname{div} w &= 0 && \text{in } Q \\ w &= 0 && \text{in } \Sigma \\ w(T) &= 0 && \text{in } \Omega. \end{aligned} $

Aus der Ableitung von \mathcal{L} nach f folgt schließlich die *Variationsungleichung*

$$\iint_Q (\lambda \bar{f} + w) \cdot (f - \bar{f}) \, dxdt \geq 0 \quad \forall f \in F_{ad}.$$

Die Lösung (w, q) der adjungierten Gleichung ist als schwache Lösung erklärt. Dabei ist w weniger regulär als bisweilen angenommen wird. Man erhält den adjungierten Zustand w in $W^{4/3}(0, T; V)$ mit

$$W^{4/3}(0, T; V) = \{w \in L^2(0, T, V) : w_t \in L^{4/3}(0, T, V^*)\}.$$

Die Regularität $w \in C([0, T], H)$ ergibt sich nur unter Zusatzannahmen.

Literaturhinweise. Theorie und Numerik der optimalen Strömungskontrolle stellen ein zur Zeit sehr aktives Forschungsgebiet dar. Entsprechend groß ist die Zahl von Arbeiten zu dieser Thematik. Eine der ersten grundlegenden Arbeiten zur Theorie notwendiger Optimalitätsbedingungen erster Ordnung wurde für diese Problemklasse war [1]. Neuere Arbeiten sind zum Beispiel [45], [92], [93], [104], [106], [180]. Zu nennen sind auch der Übersichtsband [94] sowie

die Monographie [91] zu numerischen Methoden. Den technisch schwierigeren Fall der Randsteuerung behandelt [107]. Hinreichende Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung werden im Zusammenhang mit numerischen Methoden zum Beispiel in [104] sowie [106] verwendet und bei stationären Aufgaben zum Nachweis der Lipschitzstetigkeit optimaler Steuerungen in Bezug auf Störungen durch [181]. Eine Abschwächung der Bedingungen zweiter Ordnung unter Berücksichtigung stark aktiver Steuerungsrestriktionen wird in [199] angegeben. Mit Modellreduktion durch POD-Methoden befassen sich [3], [132]. Verfahren zweiter Ordnung wie das SQP-Verfahren sind z.B. bei [104], [107] dargestellt. Neue Methoden der Gitteranpassung werden in [21] sowie im Übersichtsartikel [22] vorgeschlagen. Zahlreiche weitere Beiträge zur numerischen Analysis von Optimalsteuerungsproblemen werden in [108] dargestellt bzw. zitiert.

5.11 Übungsaufgaben

- 5.1 Weisen Sie nach, dass die im Beweis von Satz 5.15 auf S. 227 definierte partielle Fréchet-Ableitung $F_y(y, v, u)$ in $C(\bar{Q})$ stetig invertierbar ist.
- 5.2 Zeigen Sie für die in Satz 5.17 auf S. 231 verwendete Funktion $f(u) := J(y(u), u)$ die folgende Eigenschaft des Restglieds r_2^f zweiter Ordnung:

$$\frac{r_2^f(\bar{v}, h)}{\|h\|_{L^2(Q)}^2} \rightarrow 0 \quad \text{für } \|h\|_{L^\infty(Q)} \rightarrow 0.$$

- 5.3 Beweisen Sie, dass das Funktional

$$J = \int_0^\ell \phi(x, y(x, T)) dx + \int_0^T \{ \psi_1(t, y(0, t)) + \psi_2(t, y(\ell, t)) \} dt + \int_0^\ell \int_0^T \varphi(x, t, y, v) dx dt$$

zweimal stetig Fréchet-differenzierbar in $C([0, \ell] \times [0, T]) \times L^2(0, T)$ ist, falls φ die Form

$$\varphi(x, t, y, v) = \varphi_1(x, t, y) + \varphi_2(x, t, y) v + \lambda(x, t) v^2$$

hat, die Funktionen ψ_i und φ_i hinreichend glatt sind und λ beschränkt und messbar ist.

- 5.4 Verifizieren Sie, dass die in Testaufgabe (5.51)–(5.53) auf S. 236 definierten Funktionen \bar{u} , \bar{y} , p gemeinsam die Zustandsgleichung (5.52), die adjungierte Gleichung (5.54) sowie die entsprechende Projektionsbeziehung für \bar{u} erfüllen.
- 5.5 Untersuchen Sie den Nemytskii-Operator $\Phi : y \mapsto y^3$ von $H^1(\Omega)$ nach $L^2(\Omega)$ auf Existenz der ersten bzw. zweiten Fréchet-Ableitung. Verwenden Sie dabei die Ergebnisse aus Abschnitt 4.3.3.

6 Optimierungsaufgaben im Banachraum

6.1 Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen

6.1.1 Konvexe Aufgaben

Regel der Lagrangeschen Multiplikatoren

Die in den vorangegangenen Abschnitten mehrfach erprobte formale Lagrangetechnik beruht auf einer mathematisch exakten Grundlage. Hier werden Grundzüge dieser Theorie skizziert, so weit sie zum Verständnis der Behandlung von Aufgaben mit Zustandsbeschränkungen nötig sind. Beweise und weitere Sätze sind in Büchern zur Optimierung in allgemeinen Räumen zu finden. Die Theorie konvexer Aufgaben ist in Balakrishnan [18], Barbu und Precupanu [20], Ekeland und Temam [64] oder Göpfert [81] dargestellt. Nichtkonvexe differenzierbare Probleme behandeln zum Beispiel Ioffe und Tichomirov [112], Jahn [116], Luenberger [147] oder Tröltzsch [196].

Zu endlichdimensionalen nichtlinearen Optimierungsproblemen gibt es eine Vielzahl von Büchern, in denen die Theorie und numerische Verfahren im differenzierbaren Fall behandelt werden. Wir verweisen auf Alt [7], Gill et al. [74], Grossmann und Terno [88], Krabs [126], Kelley [120], Luenberger [148], Nocedal und Wright [169] oder Wright [212], um nur einige zu nennen.

Im Weiteren seien U und Z reelle Banachräume, $G : U \rightarrow Z$ eine im Allgemeinen nichtlineare Abbildung und $C \subset U$ eine nichtleere konvexe Menge.

Definition. Eine konvexe Menge $K \subset Z$ heißt konvexer Kegel, wenn mit jedem Element $z \in K$ für alle positiven $\lambda \in \mathbb{R}$ auch λz zu K gehört,

$$\forall \lambda > 0 : z \in K \Rightarrow \lambda z \in K.$$

Durch konvexe Kegel kann man Halbordnungsrelationen \geq_K wie folgt einführen:

Definition. Es sei $K \subset Z$ ein konvexer Kegel. Wir schreiben $z \geq_K 0$ genau dann, wenn $z \in K$. Analog ist $z \leq_K 0$ durch $-z \in K$ definiert.

Die Elemente aus K werden als „nichtnegativ“ angesehen. Die obige Definition lässt aber auch zu, dass Nichtnegativität im obigen Sinne nicht mit der natürlichen Nichtnegativität übereinstimmt.

Beispiel. Es sei $Z = \mathbb{R}^3$ und $K = \{z \in \mathbb{R}^3 : z_1 = 0, z_2 \leq 0, z_3 \geq 0\}$. Offenbar ist K

ein konvexer Kegel, aber $z \geq_K 0$ bedeutet nur für z_3 Nichtnegativität. \diamond

Die nächste Definition ermöglicht es, auch in dualen Räumen den Begriff der „Nichtnegativität“ einzuführen. Eine solche Konstruktion wird für Lagrangesche Multiplikatoren benötigt, weil sie Elemente dualer Räume sind.

Definition. Es sei $K \subset Z$ ein konvexer Kegel. Als den zu K dualen Kegel bezeichnet man die Menge

$$K^+ = \{z^* \in Z^* : \langle z^*, z \rangle_{Z^*, Z} \geq 0 \quad \forall z \in K\}.$$

Beispiele.

(i) Es sei $Z = L^2(\Omega)$ mit einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ und

$$K = \{z \in L^2(\Omega) : z(x) \geq 0 \text{ für fast alle } x \in \Omega\}.$$

Hier gilt $Z = Z^*$ nach dem Rieszschen Satz und $K^+ = K$, Übungsaufgabe 6.1.

(ii) Z sei ein beliebiger Banachraum und $K = \{0\}$. Dann gilt $z \geq_K 0 \Leftrightarrow z = 0$ und man erhält $K^+ = Z^*$, denn für jedes $z^* \in Z^*$ gilt $\langle z^*, 0 \rangle_{Z^*, Z} = 0 \geq 0$.

(iii) Bei $K = Z$ sind alle Elemente von Z nichtnegativ. Daraus folgt mit dem Nullfunktional $0 \in Z^*$ die Beziehung $K^+ = \{0\}$. \diamond

Wir betrachten im Weiteren die Optimierungsaufgabe im Banachraum

$$\boxed{\begin{array}{l} \min f(u) \\ G(u) \leq_K 0, \quad u \in C. \end{array}} \quad (6.1)$$

Die Restriktionen in (6.1) fassen wir unterschiedlich auf – als eine „komplizierte“ Ungleichung $G(u) \leq_K 0$, die durch einen Lagrangeschen Multiplikator eliminiert werden soll, und eine „einfache“ Restriktion $u \in C$, die explizit berücksichtigt wird. Davon leitet sich die folgende Definition ab:

Definition. Die Funktion $L : U \times Z^* \rightarrow \mathbb{R}$,

$$L(u, z^*) = f(u) + \langle z^*, G(u) \rangle_{Z^*, Z}, \quad (6.2)$$

heißt *Lagrangefunktion*. Ein Punkt $(\bar{u}, z^*) \in U \times K^+$ wird *Sattelpunkt* von L genannt, wenn die Ungleichungskette

$$L(\bar{u}, v^*) \leq L(\bar{u}, z^*) \leq L(u, z^*) \quad \forall u \in C, \forall v^* \in K^+ \quad (6.3)$$

erfüllt ist. In diesem Falle heißt z^* zu \bar{u} gehöriger *Lagrangescher Multiplikator*.

In den vorangegangenen Abschnitten zur optimalen Steuerung partieller Differentialgleichungen haben wir die Lagrangefunktion mit \mathcal{L} bezeichnet. Zur Unterscheidung verwenden wir hier den Buchstaben L . Die Existenz von Sattelpunkten ist am leichtesten für konvexe Optimierungsaufgaben zu beweisen.

Definition. Ein Operator G , der einen Banachraum U in einen durch \geq_K halbgeordneten Banachraum Z abbildet, heißt *konvex bezüglich \leq_K* , wenn Folgendes gilt:

$$G(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq_K \lambda G(u) + (1 - \lambda)G(v) \quad \forall u, v \in U, \forall \lambda \in (0, 1).$$

Jeder lineare Operator ist konvex. Im Weiteren bedeutet die echte Ungleichung $z <_K 0$, dass $-z$ ein *innerer Punkt* von K ist: $z <_K 0 \Leftrightarrow -z \in \text{int } K$.

Satz 6.1 *Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ein konvexes Funktional, $G : U \rightarrow Z$ ein konvexer Operator und \bar{u} eine Lösung der Aufgabe (6.1). Ferner existiere ein Element $\tilde{u} \in C$ mit der Eigenschaft $G(\tilde{u}) <_K 0$, d.h.*

$$-G(\tilde{u}) \in \text{int } K. \quad (6.4)$$

Dann gibt es ein Element $z^ \in K^+$, so dass (\bar{u}, z^*) ein Sattelpunkt der Lagrangefunktion L ist. Außerdem ist die folgende komplementäre Schlupfbedingung erfüllt:*

$$\langle z^*, G(\bar{u}) \rangle_{Z^*, Z} = 0. \quad (6.5)$$

Den Beweis findet man z.B. in Luenberger [147]. Die Bedingung (6.4) wird in der Literatur als *Slaterbedingung* bezeichnet. Sie kann nur dann erfüllt werden, wenn der Kegel K ein Inneres besitzt. Das schließt beispielsweise den Fall $K = \{0\}$ aus, der für die Gleichungsrestriktion $G(u) = 0$ von Bedeutung ist. In diesem Fall ist der Satz nicht anwendbar, aber es stehen andere Existenzaussagen über Lagrangesche Multiplikatoren zur Verfügung. Schwerwiegender ist das Fehlen innerer Punkte in folgendem Fall:

Beispiel. Wir betrachten den natürlichen nichtnegativen Kegel in $Z = L^2(0, 1)$,

$$K = \{z(\cdot) \in L^2(0, 1) : z(x) \geq 0 \text{ fast überall in } (0, 1)\}.$$

Hier gilt $\text{int } K = \emptyset$. Woran liegt das? Man könnte annehmen, dass etwa die Funktion $z(x) \equiv 1$ ein innerer Punkt von K ist. Leider trifft das nicht zu, denn die Folge der Funktionen

$$v_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{in } [0, 1 - 1/n) \\ -1 & \text{in } [1 - 1/n, 1] \end{cases}$$

gehört nicht zu K , konvergiert aber in der L^2 -Norm gegen z . Damit kann z nicht im Inneren von K liegen. Das liegt an der Eigenart der L^2 -Norm, nicht den betragsgrößten Wert einer Funktion zu messen, sondern eine integrale Größe. Der gleiche Effekt tritt in allen L^p -Räumen mit $1 \leq p < \infty$ auf und stellt eine wesentliche Schwierigkeit bei der Behandlung von Optimierungsaufgaben in Funktionenräumen dar. \diamond

Satz 6.2 *Sind in Satz 6.1 die Größen f und G an der Stelle \bar{u} Gâteaux-differenzierbar, dann erfüllt \bar{u} die Variationsungleichung*

$$D_u L(\bar{u}, z^*)(u - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u \in C.$$

Dabei und im Folgenden bezeichnet D_u wieder die partielle Gâteaux- bzw. Fréchet-Ableitung nach u . Der Satz folgt unmittelbar daraus, dass \bar{u} wegen der Sattelpunktsbedingung (6.3) eine Lösung der Aufgabe ohne die Restriktion $G(u) \leq_K 0$ ist,

$$L(\bar{u}, z^*) = \min_{u \in C} L(u, z^*).$$

Die zugehörige Variationsungleichung lautet ausgeschrieben

$$f'(\bar{u})(u - \bar{u}) + \langle z^*, G'(\bar{u})(u - \bar{u}) \rangle_{Z^*, Z} \geq 0 \quad \forall u \in C$$

bzw.

$$\langle f'(\bar{u}) + G'(\bar{u})^* z^*, u - \bar{u} \rangle_{U^*, U} \geq 0 \quad \forall u \in C.$$

Im Falle $C = U$ (keine Restriktionen) folgt daraus eine Gleichung im Bildraum U^* :

$$f'(\bar{u}) + G'(\bar{u})^* z^* = 0.$$

Beispiele

Wir illustrieren die Anwendung des Satzes und seine Grenzen an einfachen Beispielen ohne Bezug zur Steuerung von partiellen Differentialgleichungen.

Einseitige Box-Beschränkung in $L^2(0, 1)$. Wir betrachten die Aufgabe

$$\min f(u) := \frac{1}{2} \int_0^1 (u(x) - u_d(x))^2 dx \quad \text{bei} \quad u(x) \leq 0 \quad (6.6)$$

für fast alle $x \in [0, 1]$. Dabei ist eine Funktion $u_d \in L^2(0, 1)$ gegeben. Die Aufgabe ordnet sich in Problem (6.1) mit $U = Z = L^2(0, 1)$ und $G = I$ (identische Abbildung) ein. Der Kegel K ist die Menge aller fast überall nichtnegativen Funktionen von $L^2(0, 1)$ und C ist der ganze Raum U .

Die Aufgabe besitzt genau eine (optimale) Lösung \bar{u} , nämlich

$$\bar{u}(x) = \min\{u_d(x), 0\}.$$

Zu dieser untersuchen wir die Existenz eines Lagrangeschen Multiplikators. Die zugehörige Lagrangefunktion ist

$$L(u, \mu) = f(u) + (\mu, G(u))_{L^2(0,1)} = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} (u(x) - u_d(x))^2 + \mu(x) u(x) \right) dx.$$

Dabei wurde das Funktional $z^* \in Z^*$ nach dem Rieszschen Satz mit einer Funktion $\mu \in L^2(0, 1)$ identifiziert. Gesucht ist ein Lagrangescher Multiplikator $\mu \in L^2(0, 1)$. Satz 6.1 ist dazu nicht anwendbar, denn K hat keine inneren Punkte. Wir finden einen Lagrangeschen Multiplikator durch folgende punktweise Konstruktion:

Lemma 2.21 auf S. 50 ergibt die Variationsungleichung

$$\int_0^1 (\bar{u}(x) - u_d(x))(u(x) - \bar{u}(x)) dx \geq 0 \quad \forall u(\cdot) \leq 0.$$

Das kann nur dann gelten, wenn die Implikationen $\bar{u}(x) < 0 \Rightarrow \bar{u}(x) - u_d(x) = 0$ und $\bar{u}(x) = 0 \Rightarrow \bar{u}(x) - u_d(x) \leq 0$ fast überall erfüllt sind. Damit kann $\bar{u}(x) - u_d(x)$ nirgends positiv sein. Diskussionen dieser Art haben wir in Kapitel 2 mehrfach durchgeführt, so dass wir das hier nicht weiter erläutern. Wir setzen fest

$$\mu(x) := -f'(\bar{u})(x) = -(\bar{u}(x) - u_d(x)).$$

Dann gilt wegen der obigen Implikationen $\mu \geq 0$ und außerdem

$$\mu(x) \bar{u}(x) = 0 \quad \text{für fast alle } x \in (0, 1).$$

Das ist die punktweise aufgeschriebene komplementäre Schlupfbedingung (6.5). Schließlich folgt aus der Definition von μ die Gleichung $\mu = -f'(\bar{u})$, also

$$f'(\bar{u}) + \mu = 0.$$

Diese Beziehung ist äquivalent zur Gleichung $D_u L(\bar{u}, \mu) = 0$ und damit ist mit μ ein Lagrangescher Multiplikator gefunden. \diamond

Zweiseitige Box-Beschränkung in $L^2(0, 1)$. Jetzt betrachten wir die Aufgabe mit dem gleichen Funktional f wie in (6.6), aber mit Beschränkungen nach oben und unten,

$$\min f(u) \quad \text{bei} \quad -1 \leq u(x) \leq 1 \quad (6.7)$$

für fast alle $x \in [0, 1]$. Wir setzen wieder $C = U = L^2(0, 1)$ und schreiben die Nebenbedingungen in der Form

$$u(x) - 1 \leq 0, \quad -u(x) - 1 \leq 0$$

auf. Daher ist $Z = L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$, $K = L^2(0, 1)_+ \times L^2(0, 1)_+$ festzulegen, wobei $L^2(0, 1)_+$ die Menge der f.ü. nichtnegativen Funktionen von $L^2(0, 1)$ bezeichnet. Der konvexe Operator $G : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ wird durch

$$G(u) = \begin{pmatrix} u(\cdot) - 1 \\ -u(\cdot) - 1 \end{pmatrix}$$

definiert. Obwohl die Funktion $\tilde{u}(x) \equiv 0$ beide Ungleichungen echt erfüllt, ist Satz 6.1 wegen $\text{int } K = \emptyset$ wieder nicht anwendbar. Aber die gleiche Konstruktion wie in Kapitel 1, Abschnitt 1.4.7 führt zum Ziel. Die Lagrangefunktion ist jetzt durch

$$L(u, \mu) = L(u, \mu_a, \mu_b) = \frac{1}{2} \|u - u_d\|_{L^2(0,1)}^2 + (-u - 1, \mu_a)_{L^2(0,1)} + (u - 1, \mu_b)_{L^2(0,1)}$$

gegeben. Wir definieren punktweise

$$\begin{aligned} \mu_a(x) &= (f'(x))_+ = (\bar{u}(x) - u_d(x))_+ \\ \mu_b(x) &= (f'(x))_- = (\bar{u}(x) - u_d(x))_- \end{aligned} \quad (6.8)$$

mit $z_+ = (z + |z|)/2$ und $z_- = (|z| - z)/2$. Offenbar sind μ_a und μ_b nichtnegativ. Auch hier verifiziert man leicht

$$D_u L(\bar{u}, \mu) = f'(\bar{u}) + \mu_b - \mu_a = 0$$

sowie die Schlupfbedingungen

$$(-\bar{u} - 1, \mu_a)_{L^2(0,1)} = (\bar{u} - 1, \mu_b)_{L^2(0,1)} = 0,$$

Übungsaufgabe 6.2 (die Argumente aus Abschnitt 1.4.7 lassen sich fast wörtlich übertragen). Damit sind μ_a und μ_b zu \bar{u} gehörige Lagrangesche Multiplikatoren.

Wird $u_d \in L^\infty(0, 1)$ vorausgesetzt, dann liegen beide Multiplikatoren in $L^\infty(0, 1)$. Dieses schöne Nebenergebnis der punktweisen Konstruktion folgt aus $\bar{u} - u_d \in L^\infty(0, 1)$. \diamond

Bemerkung. Die Aufgabe mit zweiseitiger Restriktion könnte man auch in $L^\infty(0, 1)$ betrachten, denn hier ist jede zulässige Funktion u automatisch beschränkt und messbar. Außerdem besitzt der Kegel K der nichtnegativen Funktionen aus $L^\infty(0, 1)$ innere Punkte und $\tilde{u}(x) \equiv 0$ erfüllt die Slaterbedingung. Damit liefert Satz 6.1 die Existenz Lagrangescher Multiplikatoren μ_a und μ_b aus $(L^\infty(0, 1))^*$. Das hat jedoch nur wenig Wert, weil der Raum $(L^\infty(0, 1))^*$ ein Raum linearer stetiger Funktionale ist, die nicht notwendig Maße darstellen.

6.1.2 Differenzierbare Aufgaben

Lagrangesche Multiplikatorenregel und Regularitätsbedingungen

Wir betrachten jetzt die Aufgabe (6.1) ohne Konvexitätsvoraussetzung an f und G , also

$$\min f(u), \quad G(u) \leq_K 0, \quad u \in C,$$

wobei C nach wie vor eine konvexe Menge ist. An Stelle der Konvexität fordern wir Fréchet-Differenzierbarkeit von f und G . Es wird die gleiche Lagrangefunktion $L = L(u, z^*)$ wie in Abschnitt 6.1.1 verwendet. Für nichtkonvexe Aufgaben kann man aber in der Regel keine Sattelpunkteigenschaft erwarten. Deshalb werden Lagrangesche Multiplikatoren etwas anders definiert.

Definition. Ein Element \bar{u} heißt lokale Lösung der Aufgabe (6.1), wenn \bar{u} den entsprechenden Restriktionen genügt und mit einem $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$f(\bar{u}) \leq f(u)$$

für alle $u \in C$ mit $G(u) \leq_K 0$ und $\|u - \bar{u}\|_U \leq \varepsilon$ erfüllt ist.

Definition. Ist \bar{u} eine lokale Lösung der Aufgabe (6.1), dann heißt $z^* \in K^+$ zugehöriger Lagrangescher Multiplikator, wenn die folgenden Beziehungen gelten:

$$D_u L(\bar{u}, z^*)(u - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u \in C \quad (6.9)$$

$$\langle z^*, G(\bar{u}) \rangle_{Z^*, Z} = 0. \quad (6.10)$$

Für die Existenz eines solchen Lagrangeschen Multiplikators benötigt man eine *Regularitätsbedingung* (constraint qualification). Sie kann meist nicht ohne Kenntnis der optimalen Lösung nachgeprüft werden, da sie von \bar{u} abhängt. Es gibt verschiedene Regularitätsbedingungen. Recht allgemein und für unsere Zwecke ausreichend ist die Bedingung von Zowe und Kurcyusz [218]:

Definition. Es sei $\bar{u} \in C$ mit $G(\bar{u}) \leq_K 0$ gegeben. Die Mengen

$$C(\bar{u}) = \{\alpha(u - \bar{u}) : \alpha \geq 0, u \in C\}, \quad K(\bar{z}) = \{\beta(z - \bar{z}) : \beta \geq 0, z \in K\}$$

heißten Kegelhüllen an C bzw. K in \bar{u} bzw. \bar{z} . Die Bedingung

$G'(\bar{u})C(\bar{u}) + K(-G(\bar{u})) = Z$

(6.11)

wird Regularitätsbedingung von Zowe und Kurcyusz genannt.

Die Regularitätsbedingung ist äquivalent dazu, dass für jedes $z \in Z$ die Gleichung

$$\alpha G'(\bar{u})(u - \bar{u}) + \beta(v + G(\bar{u})) = z \quad (6.12)$$

mit Elementen $u \in C$, $v \geq_K 0$ sowie nichtnegativen Werten α und β lösbar ist. Wir erwähnen noch einmal die Schreibweise $v \geq_K 0 \Leftrightarrow v \in K$.

Satz 6.3 *Es sei \bar{u} eine lokale Lösung der Aufgabe (6.1) und f sowie G seien stetig Fréchet-differenzierbar in einer offenen Umgebung von \bar{u} . Ist die Regularitätsbedingung (6.11) erfüllt, so existiert ein zu \bar{u} gehöriger Lagrangescher Multiplikator $z^* \in Z^*$. Die Menge der Lagrangeschen Multiplikatoren zu \bar{u} ist beschränkt.*

Der Beweis dieser Multiplikatorenregel ist bei Zowe und Kurcyusz [218] ausgeführt. Aus (6.9) folgt

$$\langle f'(\bar{u}) + G'(\bar{u})^* z^*, u - \bar{u} \rangle_{Z^*, Z} \geq 0 \quad \forall u \in C. \quad (6.13)$$

Bemerkung. Bisweilen ist es nicht einfach oder nicht sinnvoll, die konkrete Form von $G'(\bar{u})^*$ anzugeben. Dann verwendet man statt (6.13) vorteilhafter die äquivalente Ungleichung

$$f'(\bar{u})(u - \bar{u}) + \langle z^*, G'(\bar{u})(u - \bar{u}) \rangle_{Z^*, Z} \geq 0 \quad \forall u \in C.$$

Beispiel. Von besonderem Interesse ist die Aufgabe mit Gleichungs- und Mengenrestriktion,

$$\min f(u), \quad G(u) = 0, \quad u \in C, \quad (6.14)$$

wobei f, G und C wie bisher definiert sind. Die Regularitätsbedingung (6.11) lautet in diesem Spezialfall

$$G'(\bar{u})C(\bar{u}) = Z. \quad (6.15)$$

Ist sie erfüllt, dann existiert ein Lagrangescher Multiplikator $z^* \in Z^*$, so dass die Variationsungleichung (6.13) gilt. Die komplementäre Schlupfbedingung (6.10) ist bei Gleichungsrestriktionen bedeutungslos.

In Abschnitt 6.1.3 wenden wir das auf den Spezialfall $G(u) = Ay - Bv = 0$ an, wobei $A: Y \rightarrow Y^*$ stetig invertierbar ist und für einen elliptischen Differentialoperator steht, y den Zustand bezeichnet und $v \in V_{ad} \subset V$ die Steuerung.

In diesem Fall gilt $Z := Y^*$, $U := Y \times V$ und $C := Y \times V_{ad}$. Die Regularitätsbedingung ist hier stets erfüllt, denn die Gleichung

$$G'(\bar{u})(u - \bar{u}) = A(y - \bar{y}) + B(v - \bar{v}) = z$$

ist für jedes $z \in Z = Y^*$ lösbar mit $v = \bar{v}$ sowie $y = A^{-1}z + \bar{y}$. Das Element $u - \bar{u} = (y - \bar{y}, v - \bar{v})$ gehört zum Kegel $C(\bar{u})$. \diamond

Diskussion der Regularitätsbedingung von Zowe und Kurcyusz

Im Weiteren wird die Wirkungsweise der Bedingung (6.11) an verschiedenen Typen von Restriktionen erläutert, zunächst im allgemeinen Rahmen und dann bei punktwisen Ungleichungen im Funktionenraum.

Reine Gleichungsrestriktion $G(u) = 0$. Hier setzt man $C = U$ und $K = \{0\}$ und (6.11) nimmt die Form

$$G'(\bar{u})U = Z \quad (6.16)$$

an. Der Operator $G'(\bar{u})$ muss also surjektiv sein. Diese Surjektivitätsbedingung ist aus der klassischen Lagrangeschen Multiplikatorenregel für Gleichungsrestriktionen bekannt. Die Beziehung (6.13) lautet

$$f'(\bar{u}) + G'(\bar{u})^* z^* = 0. \quad (6.17)$$

Ungleichungsrestriktion. Die Restriktionen seien wie in (6.1) gegeben. Gilt im Optimum $G(\bar{u}) <_K 0$, d.h. $-G(\bar{u}) \in \text{int } K$, dann ist die Regularitätsbedingung (6.11) erfüllt, Übungsaufgabe 6.3. Dieser Fall ist aber uninteressant, denn die Restriktion wird gar nicht wirksam.

Die folgende *linearisierte Slaterbedingung* ist hinreichend für die Bedingung (6.11) von Zowe und Kurcysz:

$$\exists \tilde{u} \in C : G(\bar{u}) + G'(\bar{u})(\tilde{u} - \bar{u}) <_K 0. \quad (6.18)$$

Das ist leicht einzusehen: Die Zowe-Kurcysz-Bedingung fordert zu jedem $z \in Z$ die Existenz von Konstanten $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ sowie Elementen $k \in K$ und $u \in C$, so dass die Gleichung

$$\alpha(G'(\bar{u})(u - \bar{u}) + \beta(k + G(\bar{u})) = z$$

erfüllt ist. Wir setzen $\alpha = \beta$, $u = \tilde{u}$ und $\bar{z} = G(\bar{u}) + G'(\bar{u})(\tilde{u} - \bar{u})$. Dann reduziert sich die obige Gleichung auf $\alpha(\bar{z} + k) = z$ und, weil K ein Kegel ist, zu

$$\alpha\bar{z} + q = z$$

mit $q \in K$. Nun wählen wir zuerst α so groß, dass $z - \alpha\bar{z} \geq_K 0$ gilt. Das ist möglich, weil \bar{z} nach (6.18) im Inneren von $-K$ liegt. Danach setzen wir $q = z - \alpha\bar{z} \geq_K 0$.

Wenn K und C innere Punkte besitzen, dann ist (6.18) äquivalent zu folgender Bedingung, Penot [171]:

$$\exists h \in \text{int } C(\bar{u}) : G(\bar{u}) + G'(\bar{u})h <_K 0. \quad (6.19)$$

Gleichungs- und Ungleichungsrestriktion. Haben die Restriktionen die Form

$$G_1(u) = 0, \quad G_2(u) \leq_K 0, \quad u \in C,$$

dann ist folgende Bedingung hinreichend für (6.11): $G'_1(\bar{u})$ ist surjektiv und

$$\exists h \in C(\bar{u}) : G'_1(\bar{u})h = 0, \quad G_2(\bar{u}) + G'_2(\bar{u})h <_K 0, \quad (6.20)$$

vgl. [108], Lemma 1.14. Eine ausführliche Diskussion gängiger Regularitätsbedingungen der Optimierungstheorie in endlichdimensionalen Räumen findet man in Alt [7].

Im Funktionenraum ist die Anwendbarkeit der Regularitätsbedingung von Zowe und Kurcysz auf Ungleichungsrestriktionen mehr oder weniger auf Kegel nichtnegativer Funktionen mit nichtleerem Inneren beschränkt. Die folgenden Beispiele verdeutlichen diesen Sachverhalt.

Einseitige Box-Restriktion an u . Zuerst betrachten wir eine Aufgabe mit einseitiger Restriktion,

$$\min f(u) := \int_{\Omega} \psi(x, u(x)) dx, \quad u(x) \leq u_b(x) \quad \text{f.ü. in } \Omega. \quad (6.21)$$

Dabei ist u_b aus $L^\infty(\Omega)$ gegeben. Die Funktion ψ sei hinreichend glatt und erfülle eine Wachstumsbedingung, damit das gegebene Integralfunktional f stetig differenzierbar in $U = L^2(\Omega)$ ist. Die Optimierungsaufgabe hat die Form

$$\min f(u), \quad G(u) \leq_K 0$$

mit $G(u)(x) := u(x) - u_b(x)$. Als affin-linearer stetiger Operator ist auch G differenzierbar von U nach $Z = U$. Der Kegel K ist die Menge aller fast überall nichtnegativen Funktionen aus $L^2(\Omega)$.

Hier ist die Regularitätsbedingung (6.11) von Zowe und Kurcyusz erfüllt: Aus $C = L^2(\Omega)$ folgt $C(\bar{u}) = L^2(\Omega)$. Somit existiert zu jedem $z \in L^2(\Omega)$ ein $u \in L^2(\Omega) = C(\bar{u})$, so dass

$$G'(\bar{u})u = z$$

gilt, denn $G'(\bar{u})$ ist der Einheitsoperator. Man wählt einfach $u = z$. Folglich ist Satz 6.3 im Raum $L^2(\Omega)$ anwendbar. Dabei kann jedes Element $z^* \in L^2(\Omega)^*$ nach dem Rieszschen Satz mit einer Funktion $\mu \in L^2(\Omega)$ identifiziert werden. Zu jeder lokalen Lösung \bar{u} existiert deshalb ein fast überall nichtnegativer Multiplikator $\mu \in L^2(\Omega)$ mit $f'(\bar{u}) + G'(\bar{u})^* \mu = 0$. Wir können $f'(\bar{u})$ mit der Funktion $\psi_u(\cdot, \bar{u}(\cdot))$ aus $L^2(\Omega)$ identifizieren und $G'(\bar{u})^*$ ist der Einheitsoperator in $L^2(\Omega)$. Daher ergibt sich

$$\psi_u(x, \bar{u}(x)) + \mu(x) = 0, \quad \mu(x) \geq 0.$$

Hier war die Zowe-Kurcyusz-Bedingung anwendbar, obwohl der Kegel der nichtnegativen Funktionen von $L^2(\Omega)$ ein leeres Inneres besitzt. Das ist aber in gewissem Sinne ein Ausnahmefall. Alternativ hätten wir den Multiplikator wie in (6.8) durch die Festsetzung $\mu(x) = (\psi_u(x, \bar{u}(x)))_-$ direkt konstruieren können.

Zweiseitige Box-Restriktion an u . Wir betrachten die gleiche Aufgabe wie eben, jetzt aber mit beidseitigen Schranken an die Steuerung,

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x),$$

und beschränkten und messbaren Funktionen $u_a \leq u_b$. Diese Nebenbedingungen ordnen sich durch folgenden Operator G in die abstrakte Aufgabe (6.1) ein:

$$G(u) = \begin{pmatrix} u_a - u \\ u - u_b \end{pmatrix}.$$

Jetzt ist G stetig differenzierbar von $L^2(\Omega)$ nach $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Die Zowe-Kurcyusz-Bedingung ist jedoch in ihrer Form (6.11) nicht direkt erfüllbar, wie man mit etwas Aufwand feststellt. Hier wirkt sich wieder aus, dass das Innere des Kegels der nichtnegativen Funktionen in $L^2(\Omega)$ leer ist. Das Arbeiten in $L^\infty(\Omega)$ ist kein Ausweg, wir würden bestenfalls Maße als Multiplikatoren zu den Steuerungsrestriktionen erhalten. Wie in (6.8) besteht ein Ausweg darin, Lagrangesche Multiplikatoren durch

$$\mu_a(x) := \psi_u(x, \bar{u}(x))_+, \quad \mu_b(x) := \psi_u(x, \bar{u}(x))_-,$$

festzulegen, mit denen die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen erfüllt werden. So erhalten wir beschränkte und messbare Funktionen als Multiplikatoren.

Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung

Karush-Kuhn-Tucker-Theorie in Banachräumen umfasst auch notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung. Wir behandeln zu ihrer Erläuterung nur die Aufgabe (6.14),

$$\min f(u), \quad G(u) = 0, \quad u \in C$$

und setzen f und G zusätzlich als zweimal stetig Fréchet-differenzierbar voraus. Das Element \bar{u} genüge mit $z^* \in Z^*$ der notwendigen Bedingung erster Ordnung

$$f'(\bar{u})(u - \bar{u}) + \langle z^*, G'(\bar{u})(u - \bar{u}) \rangle_{Z^*, Z} \geq 0 \quad \forall u \in C. \quad (6.22)$$

Außerdem existiere ein $\delta > 0$ mit

$$L''(\bar{u}, z^*)[u, u] := f''(\bar{u})[u, u] + \langle z^*, G''(\bar{u})[u, u] \rangle_{Z^*, Z} \geq \delta \|u\|_U^2 \quad (6.23)$$

für alle $u \in C(\bar{u})$ mit

$$G'(\bar{u})u = 0. \quad (6.24)$$

Lemma 6.4 *Genügt \bar{u} den Nebenbedingungen der Aufgabe (6.14) und sind die Bedingungen (6.22)–(6.24) erfüllt, dann ist \bar{u} lokal optimal für (6.14).*

Diese hinreichende Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung folgt aus den allgemeinen Resultaten von Maurer und Zowe [159] oder Maurer [156]. Das Lemma kann nur auf Probleme angewendet werden, bei denen die Zwei-Norm-Diskrepanz nicht auftritt. Da wir über die Struktur von C keine weiteren Informationen gegeben haben, können wir hier keine stark aktiven Restriktionen definieren und berücksichtigen. So sind die obigen Forderungen etwas zu streng. Bei Ungleichungsrestriktionen der Form $G(u) \leq_K 0$ kann man auch hinreichende Optimalitätsbedingungen erster Ordnung ausnutzen, siehe [159] oder [51] im Fall partieller Differentialgleichungen. Im konkreten Funktionenraum werden bei punktwisen Restriktionen zu diesem Zweck meist stark aktive Mengen nach Dontchev et al. [62] verwendet.

6.1.3 Eine semilineare elliptische Aufgabe

Wir betrachten das semilineare Problem mit rechter Seite $v \in L^2(\Omega)$ und $\dim(\Omega) \leq 3$

$$\begin{aligned} -\Delta y + y + y^3 &= v & \text{in } \Omega \\ \partial_\nu y &= 0 & \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Auf S. 145 wurde erläutert, dass dieses Problem im Zustandsraum $Y = H^1(\Omega)$ einfach zu behandeln ist. Mit dem durch $-\Delta + I$ erzeugten Operator $A : Y \rightarrow Y^*$, dem Nemytskii-Operator $\Phi : y(\cdot) \mapsto y(\cdot)^3$, $\Phi : Y \rightarrow V = L^2(\Omega)$ und dem Einbettungsoperator $B : L^2(\Omega) \rightarrow Y^*$ nimmt das obige Randwertproblem die Form $Ay + B\Phi(y) = Bv$ an.

Wir zeigen im Weiteren, wie Satz 6.3 und Lemma 6.4 auf eine entsprechende Optimalsteuerungsaufgabe angewendet werden und untersuchen dazu die Minimierung von

$$J(y, v) := \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2$$

bei $-1 \leq v(x) \leq 1$ sowie der obigen elliptischen Zustandsgleichung. Mit dem Einbettungsoperator $E_Y : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ und

$$V_{ad} = \{v \in L^2(\Omega) : -1 \leq v(x) \leq 1 \text{ f.ü. in } \Omega\}$$

ergibt sich die Aufgabe

$$\min J(y, v) := \frac{1}{2} \|E_Y y - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (6.25)$$

bei

$$A y + B (\Phi(y) - v) = 0, \quad v \in V_{ad}. \quad (6.26)$$

Sie ist ein Spezialfall des Problems (6.14),

$$\min J(u), \quad G(u) = 0, \quad u \in C,$$

mit $U := Y \times V$, $u := (y, v)$, $G : Y \rightarrow Y^*$ definiert durch $G(u) := A y + B (\Phi(y) - v)$ und $C := Y \times V_{ad}$.

Notwendige Bedingungen erster Ordnung. Der Operator G ist stetig Fréchet-differenzierbar von Y nach Y^* , weil der Nemytskii-Operator Φ stetig differenzierbar von $H^1(\Omega)$ nach $L^2(\Omega)$ ist, siehe Abschnitt 4.3.3. Außerdem ist $G'(\bar{u})$ für jedes $\bar{u} = (\bar{y}, \bar{v}) \in U$ aus folgenden Gründen surjektiv: Es gilt $G'(\bar{u})(y, v) = A y + B (\Phi'(\bar{y}) y - v)$. In der linearen Gleichung mit beliebiger rechter Seite $z \in V^*$,

$$A y + B (\Phi'(\bar{y}) y - v) = z, \quad (6.27)$$

steht auf der linken Seite der Differentialoperator \tilde{A} ,

$$\tilde{A} y = -\Delta y + y + 3 \bar{y}^2 y.$$

Aus Satz 4.7 auf S. 153 folgt, dass \bar{y} stetig ist, insbesondere beschränkt. Daher ist der Koeffizient $c_0(x) = 1 + 3 \bar{y}(x)^2$ positiv und beschränkt, so dass die \tilde{A} zugeordnete Bilinearform $a[\cdot, \cdot]$ die Voraussetzungen des Lemmas von Lax und Milgram erfüllt. Folglich ist Gleichung (6.27) für jedes $z \in Z = Y^*$ mit $v = 0$ und der eindeutig bestimmten Lösung $y \in V$ von $A y + B \Phi'(\bar{y}) y = z$ lösbar.

Somit ist $G'(\bar{u})$ surjektiv und auch die Regularitätsbedingung (6.15) auf S. 260 ist erfüllt, Übungsaufgabe 6.5. Satz 6.3 sichert die Existenz eines Lagrangeschen Multiplikators $z^* \in Z^* = (Y^*)^* = Y$; wir setzen $p := -z^*$. Die zugehörige Lagrangefunktion lautet dann

$$L(u, p) = L(y, v, p) = J(y, v) - (A y + B (\Phi'(\bar{y}) y - v), p)_{Y^*, Y}.$$

Das erste Minuszeichen wird gebraucht, damit eine adjungierte Gleichung wie in den anderen Kapiteln entsteht. Ist $\bar{u} = (\bar{y}, \bar{v})$ lokal optimal, d.h. \bar{v} lokal optimale Steuerung, dann gilt nach Satz 6.3 die Variationsungleichung

$$D_{(y,v)} L(\bar{y}, \bar{v}, p)(y - \bar{y}, v - \bar{v}) \geq 0 \quad \forall (y, v) \in C.$$

In Bezug auf y ergibt das $D_y L(\bar{y}, \bar{v}, p) y = 0 \quad \forall y \in Y$, d.h.

$$(\bar{y} - y_\Omega, y) - (A^* p, y) - (B^* p, \Phi'(\bar{y}) y) = 0 \quad \forall y \in H^1(\Omega).$$

B^* ist identisch mit E_Y . Außerdem gilt $A^* = A$. Deshalb folgt

$$\bar{y} - y_\Omega - A p - \Phi'(\bar{y})^* B^* p = 0,$$

also ist der Lagrangesche Multiplikator p die eindeutig bestimmte Lösung der adjungierten Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta p + p + 3 \bar{y}^2 p &= \bar{y} - y_\Omega && \text{in } \Omega \\ \partial_\nu p &= 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Für \bar{v} folgt $D_v L(\bar{y}, \bar{v}, p)(v - \bar{v}) \geq 0 \quad \forall v \in V_{ad}$ und schließlich die Variationsungleichung

$$(p + \lambda \bar{v}, v - \bar{v})_{L^2(\Omega)} \geq 0 \quad \forall v \in V_{ad}.$$

Diese Optimalitätsbedingungen ergaben sich auch aus der Theorie für die Aufgabe (4.31)–(4.33) auf S. 165 die im Zustandsraum $H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ausgeführt wurde. Die hier dargestellte Methode hat den Vorteil, dass sie direkt aus der Optimierungstheorie im Banachraum abgeleitet werden kann. Sie funktioniert in dieser einfachen Weise dann, wenn die gegebene Nichtlinearität im Raum $H^1(\Omega)$ differenzierbar ist. Wegen $H^1(\Omega) \not\subset C(\bar{\Omega})$ für $N \geq 2$ scheidet sie für Aufgaben mit punkweisen Zustandsbeschränkungen aus.

Bemerkung. Die Anwendung des allgemeinen Satzes 6.3 wird in Funktionenräumen meist durch folgende Zwänge erschwert: Um die Regularitätsbedingung zu erfüllen und gleichzeitig die Differenzierbarkeit der Nichtlinearitäten zu sichern, darf der Bildraum Z nicht zu groß gewählt werden. Andererseits muss er groß genug sein. Sonst ist sein Dualraum zu umfangreich und enthält Funktionen zu geringer Regularität. Diese können dann nicht als (schwach differenzierbare) Lösungen adjungierter Gleichungen interpretiert werden.

Hinreichende Bedingungen zweiter Ordnung. Das Funktional J und der Nemytskii-Operator Φ sind in $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ bzw. $H^1(\Omega)$ zweimal stetig Fréchet-differenzierbar, deshalb auch die Lagrangefunktion. Nach Lemma 6.4 ist deshalb folgende Bedingung hinreichend für lokale Optimalität: Das Paar (\bar{u}, \bar{v}) soll die notwendigen Bedingungen erster Ordnung erfüllen sowie die Definitheitsbedingung

$$L''(\bar{y}, \bar{v}, p)[(y, v), (y, v)] \geq \delta (\|y\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2)$$

für alle Paare (y, v) mit

$$\begin{aligned} -\Delta y + y + 3\bar{y}^2 y &= v && \text{in } \Omega \\ \partial_\nu y &= 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Dann ist \bar{v} lokal optimal im Sinne der Norm von $L^2(\Omega)$. Die obige Definitheitsbedingung gilt mit angepasstem δ schon dann, wenn nur

$$L''(\bar{y}, \bar{v}, p)[(y, v), (y, v)] \geq \delta \|v\|_{L^2(\Omega)}^2$$

erfüllt ist. Der Ausdruck für die zweite Ableitung L'' ist

$$L''(\bar{y}, \bar{v}, p)[(y, v), (y, v)] = \|y\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 - 6 \int_{\Omega} p \bar{y} y^2 dx.$$

6.2 Steuerprobleme mit Zustandsbeschränkungen

Zustandsrestriktionen treten bei vielen Anwendungen in natürlicher Weise auf. Ein typisches Beispiel sind Aufheizungsprobleme, bei denen die Temperatur bestimmte Schranken nicht über- oder unterschreiten soll. Solche Aufgaben werfen interessante und teilweise noch offene Fragen auf. Hier werden nur einige Grundideen angesprochen, um den Anschluss an die aktuelle Literatur zu ermöglichen. Der Einfachheit halber diskutieren wir nur elliptische Aufgaben, parabolische werden aus theoretischer Sicht analog behandelt.

Die in Weiteren bewiesenen notwendigen Optimalitätsbedingungen kann man auch aus dem Pontrjaginschen Maximumprinzip für elliptische Aufgaben mit Zustandsbeschränkungen herleiten, indem man die Maximumbedingung in eine Variationsungleichung überführt. Für den Fall der Randsteuerung wurde das entsprechende Maximumprinzip durch Alibert und Raymond [5] sowie Casas [44] bewiesen. Gleiches gilt für parabolische Aufgaben mit Zustandsbeschränkungen, die durch Casas [46] oder Raymond und Zidani [176] behandelt wurden. Der Beweis des Pontrjaginschen Maximumprinzips ist jedoch sehr technisch und die hier dargestellten Optimalitätsbedingungen können über das Lagrangeprinzip im Banachraum einfacher erhalten werden. Diese Technik ist auch in Casas [42] oder Tröltzsch [196] dargestellt. Wir wenden sie im Weiteren beim Beweis notwendiger Bedingungen erster Ordnung an. Auf hinreichende Bedingungen zweiter Ordnung gehen wir nicht ein und verweisen auf [55], [174] und [51]. Hinreichende Bedingungen zweiter Ordnung konnten für Aufgaben mit punktweisen Zustandsrestriktionen bisher nur bei eingeschränkter Raumdimension bewiesen werden.

6.2.1 Konvexe Aufgaben

Elliptische Aufgabe mit punktweiser Zustandsbeschränkung

Betrachtet wird die Aufgabe der optimalen Steuerung

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (6.28)$$

bei der elliptischen Zustandsgleichung

$$\boxed{\begin{array}{rcl} -\Delta y + y & = & u \quad \text{in } \Omega \\ \partial_\nu y & = & 0 \quad \text{auf } \Gamma \end{array}} \quad (6.29)$$

sowie den Beschränkungen

$$\begin{aligned} u_a(x) &\leq u(x) \leq u_b(x) && \text{f.ü in } \Omega, \\ y(x) &\leq 0 && \forall x \in \bar{\Omega}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Gegeben sind $y_\Omega \in L^2(\Omega)$, $\lambda \geq 0$ sowie $u_a \leq u_b \in L^\infty(\Omega)$. Das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ist wieder ein beschränktes Lipschitzgebiet. Hier ist neben den Box-Beschränkungen an die Steuerfunktion auch eine *punktweise Zustandsbeschränkung* an y gefordert. Nach Lemma 4.6 auf S. 152 besitzt die elliptische Gleichung (6.29) zu jedem $u \in L^r(\Omega)$, $r > N/2$, genau eine schwache Lösung $y \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Deshalb wählen wir für u den Raum $U = L^r(\Omega)$ mit beliebig fixiertem $r > N/2$.

Die Lösungsabbildung $G : u \mapsto y$ wird in zwei verschiedenen Raumpaaren betrachtet: Im Zielfunktional tritt y als L^2 -Funktion auf. Dort definieren wir $y = Su = E_Y G u$ mit dem Einbettungsoperator E_Y von $H^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$. Damit gilt $S : L^r(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$.

In der Zustandsbeschränkung (6.30) wird die Stetigkeit von y ausgenutzt, weil der Kegel K der nichtnegativen stetigen Funktionen innere Punkte besitzt. Hier wird $u \mapsto y$ als Abbildung von $L^r(\Omega)$ in $C(\bar{\Omega})$ angesehen. Um nicht noch weitere Bezeichnungen einführen

zu müssen, bezeichnen wir diese ebenfalls mit G , obwohl wir für G den Bildraum $H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ definiert hatten. Das führt zu keinen Problemen.

Damit ist die Aufgabe (6.28)–(6.30) ein Spezialfall der Optimierungsaufgabe (6.1) mit $U = L^r(\Omega)$, $Z = C(\bar{\Omega})$, $K = \{y \in C(\bar{\Omega}) : y(x) \geq 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}\}$. Sie lautet

$$\min f(u) := \frac{1}{2} \|Su - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

bei

$$G(u) \leq_K 0, \quad u \in C,$$

mit $C := U_{ad} = \{u \in L^r(\Omega) : u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \text{ f.ü. in } \Omega\}$.

Der duale Raum Z^* kann durch die Darstellung

$$\langle z^*, y \rangle_{Z^*, Z} = \int_{\bar{\Omega}} y(x) d\mu(x)$$

mit dem Raum $M(\bar{\Omega})$ aller regulären, auf $\bar{\Omega}$ definierten Borelmaße μ identifiziert werden, vgl. Alt [6]. (Wegen Kompaktheit von $\bar{\Omega}$ ist der ebenfalls oft verwendete Begriff „Radon-Maß“ äquivalent mit dem des regulären Borelmaßes.) Wir identifizieren also z^* mit $\mu \in M(\bar{\Omega})$. Nichtnegativität $z^* \geq_{K^+} 0$ bedeutet

$$\int_{\bar{\Omega}} y(x) d\mu(x) \geq 0 \quad \forall y(\cdot) \geq 0,$$

also Nichtnegativität des Maßes μ . Die Lagrangefunktion ist

$$L(u, \mu) = f(u) + \int_{\bar{\Omega}} (Gu)(x) d\mu(x) = \frac{1}{2} \|Su - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\bar{\Omega}} y(x) d\mu(x).$$

Für die Existenz eines Lagrangeschen Multiplikators fordern wir eine Slaterbedingung. Wir setzen die Existenz einer Steuerung $\tilde{u} \in U_{ad}$ voraus, deren zugehöriger Zustand $\tilde{y} = G\tilde{u}$ die echte Ungleichung

$$\tilde{y}(x) < 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega} \quad (6.31)$$

erfüllt. Wegen Stetigkeit von \tilde{y} gilt dann sogar $\tilde{y}(x) \leq \delta < 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}$. Die Funktion $-\tilde{y}$ gehört zum Inneren von K , deshalb ist die in Satz 6.1 formulierte Slaterbedingung erfüllt. Deshalb existiert zu einer Lösung \bar{u} unseres Problems ein zugehöriger Lagrangescher Multiplikator $\mu \in M(\bar{\Omega})$, so dass (\bar{u}, μ) ein Sattelpunkt der Lagrangefunktion ist. Aus Satz 6.2 folgt

$$D_u L(\bar{u}, \mu)(u - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad},$$

also

$$f'(\bar{u})(u - \bar{u}) + \int_{\bar{\Omega}} G'(\bar{u})(u - \bar{u}) d\mu \geq 0. \quad (6.32)$$

Der erste Anteil wird wie in Kap. 4 durch einen adjungierten Zustand p_1 zu

$$f'(\bar{u})(u - \bar{u}) = \int_{\Omega} (p_1 + \lambda \bar{u})(u - \bar{u}) dx$$

umgeformt. Hierbei ist $p_1 \in H^1(\Omega)$ die schwache Lösung von

$$\begin{array}{rcl} -\Delta p_1 + p_1 & = & \bar{y} - y_\Omega \quad \text{in } \Omega \\ \partial_\nu p_1 & = & 0 \quad \text{auf } \Gamma. \end{array} \quad (6.33)$$

Mit dem zweiten Anteil wollen wir ähnlich verfahren. Wir wissen, dass $G'(\bar{u})$ stetig von $L^r(\Omega)$ in $C(\bar{\Omega})$ abbildet, sein dualer Operator $G'(\bar{u})^*$ also von $M(\bar{\Omega})$ in $L^r(\Omega)^*$. Wegen $L^r(\Omega)^* = L^{r'}(\Omega)$, $r' = r/(r-1)$, existiert eine Funktion $p_2 \in L^{r'}(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\Omega}} G'(\bar{u})(u - \bar{u}) d\mu &= \langle \mu, G'(\bar{u})(u - \bar{u}) \rangle_{M(\bar{\Omega}), C(\bar{\Omega})} \\ &= \langle G'(\bar{u})^* \mu, u - \bar{u} \rangle_{L^{r'}(\Omega), L^r(\Omega)} = \int_{\Omega} p_2 (u - \bar{u}) dx. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Wir zerlegen μ durch $\mu = \mu_{\Omega} + \mu_{\Gamma}$, wobei die Träger von μ_{Ω} und μ_{Γ} wie angedeutet in Ω bzw. Γ enthalten sind. Aus der Linearität von G folgt $G'(\bar{u})(u - \bar{u}) = G(u - \bar{u}) = y - \bar{y}$ mit den zu u und \bar{u} gehörigen Zuständen y und \bar{y} . Daher erfüllt p_2 die Beziehung

$$\int_{\bar{\Omega}} (y - \bar{y}) d\mu = \int_{\Omega} (y - \bar{y}) d\mu_{\Omega} + \int_{\Gamma} (y - \bar{y}) d\mu_{\Gamma} = \int_{\Omega} p_2 (u - \bar{u}) dx.$$

Ein Vergleich mit der Variationsungleichung (2.67) auf S. 58 zeigt, wie die Funktion p_2 definiert sein müsste: Wir schreiben zunächst nur formal

$$\begin{aligned} -\Delta p_2 + p_2 &= \mu_{\Omega} && \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu} p_2 &= \mu_{\Gamma} && \text{auf } \Gamma \end{aligned} \quad (6.35)$$

auf und meinen damit eine Funktion p , welche die Variationsformulierung

$$\int_{\Omega} (\nabla p \cdot \nabla v + p v) dx + \int_{\Gamma} p v ds = \int_{\Omega} v d\mu_{\Omega} + \int_{\Gamma} v d\mu_{\Gamma}$$

für alle $v \in H^1(\Omega)$ erfüllt, die zusätzlich hinreichend glatt sind, damit alle obigen Integrale erklärt sind. Auf diese Weise sind wir zu einer elliptischen Gleichung mit einem Maß auf der rechten Seite gelangt. Das Maß μ erzeugt ein Funktional, das im Allgemeinen nicht in $H^1(\Omega)^*$ liegt. Die Funktionen v aus $H^1(\Omega)$ sind nicht notwendig stetig, so dass nicht jedes Funktional aus $C(\bar{\Omega})^*$ auf v anwendbar ist. Außerdem müssen die Grade der Integrierbarkeit der Gradienten ∇p und ∇y zueinander passen. Die Definition einer Lösung von (6.35) bedarf also einer etwas anderen Formulierung. Wir verweisen auf Satz 7.7 auf S. 284 über die eindeutige Lösbarkeit von (6.35) in einem geeigneten Sinne. Mit $p = p_1 + p_2$ erhält man so folgendes Resultat:

Satz 6.5 *Die Steuerung \bar{u} mit Zustand \bar{y} sei optimal für die Aufgabe (6.28)–(6.30) und die Slaterbedingung (6.31) erfüllt. Dann existieren ein reguläres Borelmaß $\mu \in M(\bar{\Omega})$ der Form $\mu = \mu_{\Omega} + \mu_{\Gamma}$, $\mu_{\Omega} := \mu|_{\Omega}$, $\mu_{\Gamma} := \mu|_{\Gamma}$, und ein zugehöriger adjungierter Zustand $p \in W^{1,s}(\Omega) \forall s \in [1, N/(N-1))$, so dass die adjungierte Gleichung (6.36), die Variationsungleichung (6.37) sowie die Komplementaritätsbedingung (6.38) erfüllt sind:*

$$\begin{aligned} -\Delta p + p &= \bar{y} - y_{\Omega} + \mu_{\Omega} && \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu} p &= \mu_{\Gamma} && \text{auf } \Gamma, \end{aligned} \quad (6.36)$$

$$\int_{\Omega} (\lambda \bar{u} + p) (u - \bar{u}) dx \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad} \quad (6.37)$$

$$\mu \geq 0, \quad \int_{\bar{\Omega}} \bar{y}(x) d\mu(x) = 0. \quad (6.38)$$

Beweis. Die Variationsungleichung folgt mit $p = p_1 + p_2$ aus den Beziehungen (6.32)–(6.34). Die Darstellung von p als Lösung der adjungierten Gleichung erhält man, weil p_2 nach Satz 7.7 der Gleichung (6.35) genügt. Die Komplementaritätsbedingung ergibt sich aus Beziehung (6.5) der Lagrangeschen Multiplikatorenregel. ■

In diesem Satz wurde nur die Zustandsrestriktion mit einem Lagrangeschen Multiplikator eliminiert, während die Box-Restriktionen an die Steuerung mit der der Variationsungleichung berücksichtigt sind. Durch Anwendung der punktweisen Konstruktion (6.8) können wir auch diese Restriktionen mit Multiplikatoren $\mu_a, \mu_b \in L^s(\Omega)$ einbeziehen. Wir setzen

$$\mu_a(x) := (\lambda \bar{u}(x) + p(x))_+, \quad \mu_b(x) := (\lambda \bar{u}(x) + p(x))_-.$$

Dann ergibt sich nach Definition $\mu_a, \mu_b \geq 0$, $\lambda \bar{u} + p + \mu_b - \mu_a = 0$ und aus der üblichen punktweisen Diskussion der Variationsungleichung (6.37) folgen für fast alle x aus Ω die Komplementaritätsbedingungen

$$(u_a(x) - \bar{u}(x)) \mu_a(x) = 0, \quad (\bar{u}(x) - u_b(x)) \mu_b(x) = 0.$$

Insgesamt erhalten wir das folgende Optimalitätssystem für u, y, μ_a, μ_b, μ :

$$\begin{array}{ll} -\Delta y + y &= u & -\Delta p + p &= y - y_\Omega + \mu_\Omega \\ \partial_\nu y &= 0, & \partial_\nu p &= \mu_\Gamma, \\ \lambda u + p + \mu_b - \mu_a &= 0, \\ \mu &\geq 0, \quad \int_{\bar{\Omega}} y(x) d\mu(x) = 0, \\ \mu_a(x) &\geq 0, \quad (u_a(x) - u(x)) \mu_a(x) = 0 \quad \text{f.ü. in } \Omega, \\ \mu_b(x) &\geq 0, \quad (u(x) - u_b(x)) \mu_b(x) = 0 \quad \text{f.ü. in } \Omega. \end{array}$$

Bemerkung. Auch hier gelangt man mit der formalen Lagrangetechnik zum richtigen Ergebnis. Man definiert als Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(u, y, p, \mu_a, \mu_b, \mu) := J(y, u) - \int_{\Omega} \{ \nabla y \cdot \nabla p - (y - u) p - (u_a - u) \mu_a - (u - u_b) \mu_b \} dx + \int_{\bar{\Omega}} y d\mu.$$

Die Gleichung $D_y \mathcal{L} = 0$ führt auf die adjungierte Gleichung, während $D_u \mathcal{L} = 0$ zusammen mit den üblichen Komplementaritätsbedingungen die anderen Beziehungen liefert.

Minimierung des Zustands in einem Punkt

Bei der nächsten konvexen Aufgabe sind keine Zustandsbeschränkungen gegeben. Wir sehen aber, dass bereits einfache lineare Optimalsteuerungsprobleme mit Box-Restriktionen an die Steuerung zu adjungierten Differentialgleichungen mit Maßen führen, wenn das Zielfunktional nicht die übliche Integralform hat. Deshalb passt sie in dieses Kapitel. Zur Abwechslung betrachten wir ein Randsteuerungsproblem.

Gegeben seien wieder ein beschränktes Lipschitzgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, sowie Funktionen $\alpha \geq 0$ und $u_a \leq u_b$ aus $L^\infty(\Gamma)$. Wir ändern die Aufgabe der optimalen stationären

Temperaturverteilung etwas ab, indem die Temperatur y an einer festen Stelle $x_0 \in \Omega$ minimiert werden soll:

$$\min J(y) := y(x_0) \quad (6.39)$$

bei

$$\boxed{\begin{array}{lll} -\Delta y + y & = & 0 \quad \text{in } \Omega \\ \partial_\nu y + \alpha y & = & u \quad \text{auf } \Gamma, \end{array}} \quad (6.40)$$

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \quad \text{f.ü. in } \Gamma. \quad (6.41)$$

Diese Aufgabe scheint einfacher als die in Kapitel 2 behandelten linear-quadratischen Steuerungsprobleme zu sein, denn (6.39)–(6.41) ist eine *lineare* Aufgabe der optimalen Steuerung. Aus theoretischer Sicht ist sie aber ebenso schwierig.

Wir betrachten y im Zustandsraum $Y = H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, damit der Wert $y(x_0)$ wohldefiniert ist. Dann ist es leicht, die Existenz mindestens einer optimalen Steuerung \bar{u} nachzuweisen. Der Existenzsatz 4.15 bleibt für die gestellte lineare Optimalsteuerungsaufgabe richtig. Das Zielfunktional ist zwar kein Integralfunktional wie in (4.31) auf S. 165), diese Eigenschaft wurde im Beweis des Satzes aber nicht verwendet, sondern nur die Stetigkeit des Zielfunktional. Sie ist hier offenbar gegeben. Dabei betrachten wir die Menge der zulässigen Steuerungen U_{ad} im Raum $L^p(\Gamma)$ für $p > N - 1$, denn wir wissen dann $y \in C(\bar{\Omega})$.

Schwierigkeiten treten erst bei notwendigen Optimalitätsbedingungen auf, weil das Zielfunktional kein Integralfunktional ist. Will man die formale Lagrangetechnik zum Finden der adjungierten Gleichung anwenden, dann scheitert man zunächst. Das kann der Leser selbst ausprobieren. Durch Verwendung des Diracmaßes $\mu = \delta_{x_0}$ können wir aber das Zielfunktional auf die Integralform

$$y(x_0) = f(y) = \int_{\Omega} y(x) d\mu(x)$$

bringen. Dieses Funktional f ist auf Y stetig.

Wir gehen nun wie im letzten Abschnitt vor und verwenden den Lösungsoperator $G : u \mapsto y$, der linear und stetig von $L^p(\Gamma)$ in Y abbildet. Dann erhalten wir

$$f'(\bar{u})(u - \bar{u}) = \int_{\Omega} (y - \bar{y}) d\mu = \int_{\Omega} G(u - \bar{u}) d\mu \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}.$$

Diese Ungleichung ist von gleicher Form wie (6.32), nur hat μ jetzt nicht die Bedeutung eines Multiplikators sondern steht für die Ableitung von J . Die weiteren Schritte sind analog zu denen der letzten Aufgabe. Wir definieren $p \in W^{1,s}(\Omega)$ als Lösung der adjungierten Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta p + p &= \delta_{x_0} \\ \partial_\nu p + \alpha p &= 0. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Mit p ergibt sich nach Satz 7.7 auf S. 284

$$\int_{\Omega} (y - \bar{y}) d\mu = \int_{\Gamma} p(u - \bar{u}) ds.$$

Folglich muss \bar{u} der Variationsungleichung

$$\int_{\Gamma} p(u - \bar{u}) ds \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad} \quad (6.43)$$

genügen. Die Beziehungen (6.42), (6.43) sind die notwendigen Optimalitätsbedingungen.

Bestmögliche Approximation in der Maximumnorm

Wir diskutieren noch eine konvexe Aufgabe mit nichtglattem Zielfunktional, die man in eine konvexe differenzierbare Aufgabe mit Zustandsbeschränkungen umformen kann. Der Abstand zur gewünschten Funktion y_{Ω} soll nicht in der L^2 -Norm, sondern in der Maximumnorm gemessen werden. Wir betrachten also das Problem

$$\min J(y, u) := \|y - y_{\Omega}\|_{C(\bar{\Omega})} + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 \quad (6.44)$$

bei

$\begin{aligned} -\Delta y + y &= 0 && \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu} y + \alpha y &= u && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \quad \text{f.ü. in } \Gamma.$$

Hier ist y_{Ω} aus $C(\bar{\Omega})$ vorgegeben. Alle anderen Daten sind wie in (6.39)–(6.41) gewählt und λ ist nichtnegativ, kann also auch verschwinden. Das Zielfunktional (6.44) ist nicht differenzierbar. Außerdem ist es im Raum $H^1(\Omega)$ nicht wohldefiniert, denn Funktionen aus $H^1(\Omega)$ brauchen nicht stetig zu sein. Damit sich automatisch $y \in C(\bar{\Omega})$ ergibt, setzen wir $u_a, u_b \in L^{\infty}(\Gamma)$ voraus. Dann ist u beschränkt und messbar und Satz 4.7 auf S. 153 sichert die gewünschte Stetigkeit von y .

Durch einen einfachen und oft angewendeten Trick formen wir die gegebene Aufgabe in eine linear-quadratische – und damit differenzierbare – Optimierungsaufgabe um. Wir setzen

$$\eta = \max_{x \in \Omega} |y(x) - y_{\Omega}(x)|.$$

Offenbar gilt

$$-\eta \leq y(x) - y_{\Omega}(x) \leq \eta,$$

so dass wir die Aufgabe äquivalent so aufschreiben können:

$$\min \left\{ \eta + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right\} \quad (6.45)$$

bei $\eta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} -\Delta y + y &= 0 && \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu} y + \alpha y &= u && \text{auf } \Gamma, \end{aligned} \quad (6.46)$$

den Restriktionen an die Steuerfunktion

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \quad (6.47)$$

für fast alle $x \in \Gamma$ und den *Zustandsbeschränkungen*

$$\begin{aligned} y(x) &\leq y_\Omega(x) + \eta \\ -y(x) &\leq -y_\Omega(x) + \eta \end{aligned} \quad (6.48)$$

für alle x aus $\bar{\Omega}$. Wir haben die Nichtdifferenzierbarkeit beseitigt, uns dafür aber punktweise Zustandsbeschränkungen eingehandelt. Wie wir damit umgehen können, das wurde anhand der Aufgabe (6.28)–(6.30) erläutert. Die saubere Herleitung der notwendigen Optimalitätsbedingungen für obiges Problem soll in Übungsaufgabe 6.3 erfolgen. Dabei ist zu beachten, dass hier die Slaterbedingung (6.4) mit hinreichend großem η stets erfüllt werden kann.

Formale Herleitung der Optimalitätsbedingungen. Der Einfachheit halber und zur Abwechslung verwenden wir die formale Lagrangetechnik, die zum richtigen Ergebnis führt: Wir eliminieren zunächst nur die Zustandsbeschränkungen durch Lagrangesche Multiplikatoren, nicht die elliptische Gleichung und auch nicht die Box-Restriktionen an die Steuerung. Auf diese Weise formen wir das zustandsbeschränkte Problem in eines um, das nur noch Steuerungsrestriktionen hat und deshalb formal mit der Theorie von Kapitel 2 behandelt werden kann. Dazu führen wir als Lagrangefunktion

$$L(y, u, \eta, \mu_1, \mu_2) = \eta + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \int_{\bar{\Omega}} (y - y_\Omega - \eta) d\mu_1 + \int_{\bar{\Omega}} (-y + y_\Omega - \eta) d\mu_2$$

mit regulären Borelmaßen μ_1, μ_2 ein. Dahinter steckt die folgende Interpretation unserer Aufgabe: Wir minimieren das Zielfunktional (6.45) bei den Zustandsbeschränkungen (6.48) und der konvexen Nebenbedingung $(y, u, \eta) \in C$ mit

$$C := \{(y, u, \eta) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Gamma) \times \mathbb{R} : y \text{ und } u \text{ erfüllen (6.46) und (6.47)}\}.$$

Die zugehörige Lagrangesche Multiplikatorenregel liefern die Sätze 6.1 und 6.2 gegeben. Die geforderte Regularitätsbedingung ist mit hinreichend großem η erfüllt, so dass Lagrangesche Multiplikatoren $\mu_1, \mu_2 \in M(\bar{\Omega})$ existieren. Sie eliminieren die Zustandsrestriktionen und es folgt die Sattelpunkteigenschaft (6.3), deren rechte Hälfte wir ausnutzen; $(\bar{y}, \bar{u}, \bar{\eta})$ löst nach (6.3) die Hilfsaufgabe ohne Zustandsbeschränkungen

$$\min \tilde{J}(y, u, \eta) := L(y, u, \eta, \mu_1, \mu_2)$$

bei

$$\begin{aligned} -\Delta y + y &= 0 && \text{in } \Omega \\ \partial_\nu y + \alpha y &= u && \text{auf } \Gamma, \end{aligned}$$

$$\eta \in \mathbb{R}, \quad u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x).$$

Steuerungen sind die Variable $\eta \in \mathbb{R}$ sowie die Funktion $u \in U_{ad} = \{u \in L^2(\Gamma) : u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \text{ f.ü. auf } \Gamma\}$. Die neue Aufgabe hat nur Box-Restriktionen an die Steuerung. Die zugehörige Theorie wurde in Kapitel 2 behandelt. Wenden wir die notwendigen Optimalitätsbedingungen für Aufgaben mit Integralfunktionalen formal an, dann steht auf der rechten Seite der adjungierten Gleichung für p die Ableitung des Zielfunktionals nach y . In der elliptischen Gleichung selbst steht deren Anteil auf Ω , in der Randbedingung der auf Γ . Folglich haben wir bei fest gegebenen Multiplikatoren μ_i die Ableitung $D_y J$

zu bilden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 = D_y \tilde{J}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{\eta}) y &= \int_{\bar{\Omega}} y(x) (d\mu_1(x) - d\mu_2(x)) \\ &= \int_{\Omega} y (d\mu_1 - d\mu_2)|_{\Omega} + \int_{\Gamma} y (d\mu_1 - d\mu_2)|_{\Gamma} \end{aligned}$$

und gelangen zur adjungierten Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta p + p &= (\mu_1 - \mu_2)|_{\Omega} && \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu} p + \alpha p &= (\mu_1 - \mu_2)|_{\Gamma} && \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Nach Satz 7.7 auf S. 284 hat diese genau eine Lösung \bar{p} in $W^{1,s}(\Omega)$, $s \in [1, N/(N-1))$. Zum Aufstellen der weiteren notwendigen Bedingungen benutzen wir vorteilhaft die Lagrangefunktion \mathcal{L} zur obigen Aufgabe der Minimierung von \tilde{J} :

$$\mathcal{L}(y, u, \eta) = \tilde{J}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{\eta}) - \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla p \, dx - \int_{\Omega} y p \, dx - \int_{\Gamma} (\alpha y - u) p \, ds.$$

Dann muss $D_u \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{\eta})(u - \bar{u}) \geq 0$ für alle $u \in U_{ad}$ gelten, d.h.

$$\int_{\Gamma} (\lambda \bar{u} + p)(u - \bar{u}) \, dx \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}, \quad (6.50)$$

und aus $D_{\eta} \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{\eta}) = 0$ folgt

$$\int_{\Omega} d\mu_1 + d\mu_2 = 1. \quad (6.51)$$

Die letzte Beziehung ergibt sich mit

$$D_{\eta} \mathcal{L} = D_{\eta} L = 1 - \int_{\bar{\Omega}} d\mu_1 - \int_{\bar{\Omega}} d\mu_2 = 0.$$

Insgesamt erhalten wir folgendes durch $(\bar{y}, \bar{u}, \bar{\eta})$ zu erfüllendes Optimalitätssystem: Es besteht aus der Zustandsgleichung (6.46), der adjungierten Gleichung (6.49), den Restriktionen (6.47) und (6.48), den komplementären Schlupfbedingungen

$$\int_{\bar{\Omega}} (\bar{y} - y_{\Omega} - \bar{\eta}) \, d\mu_1 = \int_{\bar{\Omega}} (-\bar{y} + y_{\Omega} - \bar{\eta}) \, d\mu_2 = 0,$$

der Variationsungleichung (6.50) sowie der Gleichung (6.51).

Diese Herleitung war etwas formal, denn wir sind mit dem Integralfunktional \tilde{J} so umgegangen, als wäre es ein in y lineares stetiges Funktional auf $L^2(\Omega)$. Gehen wir wie bei der Aufgabe des Punktmaßes vor, dann gelangen wir durch Minimierung von \tilde{J} ohne Zustandsbeschränkungen mathematisch strenger zu diesem Ergebnis.

6.2.2 Eine nichtkonvexe Aufgabe

Wir demonstrieren die Anwendung von Satz 6.3 noch an einem Beispiel mit semilinear elliptischer Gleichung,

$$\min J(y, u) := \int_{\Omega} \varphi(x, y(x)) \, dx + \int_{\Omega} \psi(x, u(x)) \, dx \quad (6.52)$$

bei

$$\boxed{\begin{array}{rcl} -\Delta y + d(x, y) & = & u \quad \text{in } \Omega \\ \partial_\nu y & = & 0 \quad \text{auf } \Gamma \end{array}} \quad (6.53)$$

sowie Box- und Zustandstrektionen

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x), \quad \text{f.ü. in } \Omega, \quad (6.54)$$

$$y(x) \leq 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (6.55)$$

Die Voraussetzung 4.14 auf S. 164 soll erfüllt sein. Diese Aufgabe ist nichtkonvex. Sie wäre es auch, wenn an Stelle des nichtlinearen Funktional (6.52) ein konvex-quadratisches gewählt würde. Das liegt an der Nichtlinearität der Abbildung $G : u \mapsto y$. Sie ist nach Satz 4.17 auf S. 170 stetig differenzierbar von $L^r(\Omega)$ in $H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ für $r > N/2$. Wir fixieren zunächst ein solches r und setzen $f(u) = J(G(u), u)$. Dadurch wird die obige Aufgabe zum Optimierungsproblem im Banachraum,

$$\min f(u), \quad u \in C, \quad G(u) \leq_K 0 \quad (6.56)$$

mit

$$\begin{aligned} C &= \{u \in L^r(\Omega) : u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \quad \text{f.ü. in } \Omega\} \\ K &= \{y \in C(\bar{\Omega}) : y(x) \geq 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}\} \end{aligned}$$

Diese Aufgabe ordnet sich in (6.1) ein mit $U = L^r(\Omega)$, $Z = C(\bar{\Omega})$. K hat in Z ein nichtleeres Inneres, so dass es sinnvoll ist, die linearisierte Slaterbedingung (6.18) auf S. 261 zu fordern: Es sollen ein $\varepsilon > 0$ und ein $\tilde{u} \in C$ existieren, so dass mit $y = G'(\bar{u})(\tilde{u} - \bar{u})$ und $\bar{y} = G(\bar{u})$

$$\bar{y}(x) + y(x) \leq -\varepsilon \quad \forall x \in \bar{\Omega} \quad (6.57)$$

gilt. Das so definierte y ist Lösung der linearisierten Gleichung

$$\begin{array}{rcl} -\Delta y + d_y(x, \bar{y}) y & = & \tilde{u} - \bar{u} \quad \text{in } \Omega \\ \partial_\nu y & = & 0 \quad \text{auf } \Gamma. \end{array}$$

Wir setzen also voraus, dass die Regularitätsbedingung (6.57) erfüllt ist, die wie erwähnt (6.11) von S. 259 impliziert. Der Multiplikator z^* zur Beschränkung $y \leq 0$ kann mit einem $\mu \in M(\bar{\Omega})$ identifiziert werden. Die Lagrangefunktion L zur Aufgabe (6.56) ist

$$L(u, \mu) = f(u) + \int_{\bar{\Omega}} G(u) d\mu = f(u) + \int_{\Omega} G(u) d\mu_{\Omega} + \int_{\Gamma} G(u) d\mu_{\Gamma},$$

wobei μ_{Ω} und μ_{Γ} die Restriktionen von $\mu \in M(\bar{\Omega})$ auf Ω bzw. Γ sind. Satz 6.3 ergibt folgende notwendige Optimalitätsbedingung:

Lemma 6.6 *Ist \bar{u} lokale Lösung von (6.56), welche die Regularitätsbedingung (6.57) erfüllt, dann existiert ein nichtnegatives reguläres Borelmaß $\mu \in M(\bar{\Omega})$, so dass folgende Beziehungen erfüllt sind:*

$$\begin{aligned} D_u L(\bar{u}, \mu)(u - \bar{u}) &\geq 0 \quad \forall u \in C \\ \int_{\bar{\Omega}} \bar{y}(x) d\mu(x) &= 0. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Nach Einsetzen der Ableitung $D_u L$ der obigen Lagrangefunktion in (6.58) folgt

$$f'(\bar{u})(u - \bar{u}) + \int_{\Omega} G'(\bar{u})(u - \bar{u}) d\mu_{\Omega} + \int_{\Gamma} G'(\bar{u})(u - \bar{u}) d\mu_{\Gamma} \geq 0 \quad (6.59)$$

für alle $u \in C$. Daraus folgt:

Lemma 6.7 *Unter den gegebenen Voraussetzungen löst \bar{u} das lineare Optimalsteuerungsproblem*

$$\begin{aligned} \min j(y, u) := & \int_{\Omega} \varphi_y(x, \bar{y}(x)) y(x) dx + \int_{\Omega} \psi_u(x, \bar{u}(x)) u(x) dx \\ & + \int_{\Omega} y(x) d\mu_{\Omega}(x) + \int_{\Gamma} y(x) d\mu_{\Gamma}(x), \\ -\Delta y + d_y(x, \bar{y}) y = & u, \quad u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x), \\ \partial_{\nu} y = & 0. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Beweis: Die Aussage folgt aus der Bildungsvorschrift für $G'(\bar{u})$ und Umstellen von (6.59) nach \bar{u} . ■

Damit löst \bar{u} eine konvexe Aufgabe, die nur noch Box-Restriktionen an die Steuerung enthält. Optimalitätsbedingungen können jetzt wie im letzten Teilabschnitt abgeleitet werden. Wir definieren den adjungierten Zustand p durch

$$\boxed{\begin{aligned} -\Delta p + d_y(x, \bar{y}) p &= \varphi_y(x, \bar{y}) + \mu_{\Omega} && \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu} p &= \mu_{\Gamma} && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}} \quad (6.61)$$

Nach Satz 7.7 existiert genau eine Lösung $p \in W^{1,s}(\Omega)$ für alle $s < N/(N-1)$. Mit p ist die folgende Variationsungleichung erfüllt:

$$\int_{\Omega} (p(x) + \psi_u(x, \bar{u}(x))) (u(x) - \bar{u}(x)) dx \geq 0 \quad \forall u(\cdot) \in C. \quad (6.62)$$

Damit sind die notwendigen Optimalitätsbedingungen in Form einer Variationsungleichung für \bar{u} hergeleitet. Alternativ kann man die Variationsungleichung (6.62) durch Lagrangesche Multiplikatoren in Gleichungsform überführen und alle Optimalitätsbedingungen als Karush-Kuhn-Tucker-System aufschreiben:

Lagrangesche Multiplikatoren μ_a, μ_b zu den Box-Restriktionen an u ergeben sich durch

$$\mu_a(x) = (p(x) + \psi_u(x, \bar{u}(x)))_+, \quad \mu_b(x) = (p(x) + \psi_u(x, \bar{u}(x)))_-.$$

Nach dem Einbettungssatz 7.1 auf S.277 sind diese punktweise definierten Multiplikator-Funktionen aus $L^q(\Omega)$, $q < N/(N-2)$. Nun formen wir die Variationsungleichung in der bereits mehrfach vorgeführten Weise in eine Gleichung nebst komplementären Schlupfbedingungen um, Übungsaufgabe 6.4. Insgesamt ergibt sich dann:

Satz 6.8 *Es sei \bar{u} eine lokal optimale Steuerung für die Aufgabe (6.52)–(6.55) mit zugehörigem Zustand \bar{y} und die Regularitätsbedingung (6.57) sei erfüllt. Dann existieren $\mu_a, \mu_b \in L^q(\Omega)$ für alle $q < N/(N-2)$, $\mu \in M(\bar{\Omega})$ und ein adjungierter Zustand $p \in W^{1,s}(\Omega)$ für alle $s < N/(N-1)$, so dass $u = \bar{u}$, $y = \bar{y}$, p , μ_a , μ_b , μ dem folgenden Optimalitätssystem genügen:*

$$\begin{aligned}
-\Delta y + d(x, y) &= u & -\Delta p + d_y(x, y) p &= \varphi_y(x, y) + \mu_\Omega \\
\partial_\nu y &= 0 & \partial_\nu p &= \mu_\Gamma \\
p + \psi_u(x, u) + \mu_b - \mu_a &= 0 \\
\mu &\geq 0, \quad \int_{\bar{\Omega}} y(x) d\mu(x) = 0 \\
\mu_a(x) &\geq 0, \quad (u_a(x) - u(x)) \mu_a(x) = 0 & f. \ddot{u}. \text{ in } \Omega, \\
\mu_b(x) &\geq 0, \quad (u(x) - u_b(x)) \mu_b(x) = 0 & f. \ddot{u}. \text{ in } \Omega.
\end{aligned}$$

Literaturhinweise. Zustandsbeschränkungen sind durch vielfältige Anwendungen sehr wichtig und finden daher großes Interesse. Wir erwähnen exemplarisch nur einige der zahlreichen Arbeiten. Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung für elliptische Aufgaben behandeln [5], [32], [33], [42], [44], Bedingungen zweiter Ordnung [47], [52], [55], [162]. Zahlreiche elliptische Probleme mit Zustandsbeschränkungen findet man in [164]. Im parabolischen Fall verweisen wir auf [46], [150], [151], [153], [175], [176], [196] für Optimalitätsbedingungen erster Ordnung und auf [79], [174], [51] für solche zweiter Ordnung. Die Struktur Lagrangescher Multiplikatoren für Zustandsbeschränkungen wird in [27] diskutiert. Fehlerabschätzungen bei FEM-Approximationen und Zustandsbeschränkungen untersuchen [48], [193]; siehe auch die ausführlichere Darstellung dieser Thematik in [108]. Numerische Techniken zur Lösung elliptischer zustandsbeschränkter Aufgaben bringen [27], [28], [89], [161], [162], [158], [157]. Parabolische Aufgaben behandeln [8], [9], [141], [195]. Numerische Verfahren der Optimalsteuerung partieller Differentialgleichungen werden detailliert in [108] und [115] besprochen.

Weiterführende Literatur zur Optimalsteuerung. Die Theorie der Optimalsteuerung linear-quadratischer elliptischer, parabolischer und hyperbolischer Aufgaben wird umfassend im Standardwerk [144] entwickelt. Verschiedene praktische Anwendungen sind in [39], [40] dargestellt. Nichtlineare Aufgaben behandeln z.B. [19], [108], [143], [165], [164], [192] sowie, bezogen auf Strömungsprobleme, [91]. Die Verwendung stark stetiger Halbgruppen an Stelle von schwachen Lösungen für parabolische Probleme ist bei [24], [25], [68], [138], [139] zu finden. Riccati-Techniken zur Lösung des sogenannten Regelproblems sowie Resultate zur Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit behandeln [138], [139] sowie [137]. Die Verwendung von Riccati-Operatoren ist auch in [24], [25] und Lions [144] dargestellt. Steuerbarkeit und Stabilisierbarkeit nichtlinearer partieller Differentialgleichungen sind der Gegenstand von [59].

6.3 Übungsaufgaben

- 6.1 Bestimmen Sie den dualen Kegel K^+ zum Kegel K der fast überall nichtnegativen Funktionen in $L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$.
- 6.2 Weisen Sie nach, dass die in Beziehung (6.8) auf S. 258 definierten Funktionen μ_1 und μ_2 Lagrangesche Multiplikatoren zur optimalen Steuerung \bar{u} der Aufgabe (6.7) sind.
- 6.3 Leiten Sie die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung für die auf S. 271 definierte Optimalsteuerungsaufgabe mit Maximumnorm-Funktional her.
- 6.4 Leiten Sie das in Satz 6.8 auf S. 275 angegebene Optimalitätssystem mit Hilfe der Variationsungleichung (6.62) auf S. 275 her.
- 6.5 Weisen Sie nach, dass die elliptische Aufgabe (6.25)–(6.26) auf S. 263 für jede Lösung (\bar{y}, \bar{u}) die Regularitätsbedingung (6.15) auf S. 260 erfüllt.

7 Ergänzungen zu partiellen Differentialgleichungen

7.1 Einbettungssätze

Das Arbeiten mit Sobolewräumen wird wesentlich durch Einbettungs- und Spursätze bestimmt, die wir hier bereitstellen. Dabei halten wir uns an Adams [2].

Satz 7.1 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitzrand, $1 < p < \infty$ sowie m eine nichtnegative ganze Zahl. Dann sind die folgenden Einbettungen definiert und stetig:*

- Für $mp < N$: $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, falls $1 \leq q \leq \frac{Np}{N - mp}$;
- für $mp = N$: $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, falls $1 \leq q < \infty$;
- für $mp > N$: $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$.

In Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ gilt damit $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für alle $1 \leq q < \infty$ und für $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ folgt $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$. Die Glattheit von Randwerten klärt folgender Satz:

Satz 7.2 *Es sei $m \geq 1$ ganz und Γ ein $C^{m-1,1}$ -Rand. Dann ist für $mp < N$ der Spuroperator τ stetig von $W^{m,p}(\Omega)$ in $L^r(\Gamma)$, falls $1 \leq r \leq \frac{(N-1)p}{N-mp}$. Bei $mp = N$ ist er für alle $1 \leq r < \infty$ stetig.*

Diese beiden Sätze folgen aus [2], Sätze 5.4 und 5.22. Wir verweisen auch auf [67] und [209]. Zusammenfassungen von Aussagen zu Sobolewräumen findet man in [71], [72]. Zur Erweiterung der obigen Sätze auf nichtganze m verweisen wir auf [2], Sätze 7.57, 7.53 und Bemerkung 7.56 sowie auf die umfassende Darstellung [194]. Durch Sobolewräume gebrochener Ordnung erhält man eine genauere Charakterisierung der Spurabbildung. Mit Satz 7.53 aus [2] folgt für ganzes $m \geq 1$:

Satz 7.3 *Ist Ω ein C^m -Gebiet und $1 < p < \infty$, dann ist die Spurabbildung τ stetig von $W^{m,p}(\Omega)$ auf $W^{m-1/p,p}(\Gamma)$.*

Damit gilt für die Spurabbildung τ speziell $\tau : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$; τ ist sogar surjektiv. Beim Existenzbeweis für optimale Steuerungen wendeten wir folgendes Resultat an:

Satz 7.4 (Rellich) *Ist Ω ein beschränktes Lipschitzgebiet, $1 \leq p < \infty$ und $m \geq 1$, dann sind beschränkte Mengen aus $W^{m,p}(\Omega)$ präkompakt in $W^{m-1,p}(\Omega)$.*

Diese Eigenschaft bezeichnet man als *kompakte Einbettung*. Damit sind beschränkte Mengen aus $H^1(\Omega)$ präkompakt in $L^2(\Omega)$. Die obigen Sätze gelten teilweise unter etwas schwächeren Forderungen an den Rand Γ als angegeben (reguläre Ränder, Ränder mit Kegelbedingungen), siehe z.B. [2], [72] oder [86].

7.2 Elliptische Gleichungen

Wir erläutern hier zunächst den Beweis von Lemma 4.6 für den Fall nichtglatter Koeffizienten des Differentialoperators in Lipschitzgebieten. Dann reichen wir die in Abschnitt 4.2 verwendeten Aussagen zur essentiellen Beschränktheit der Lösung des semilinearen elliptischen Randwertproblems (4.5) nach und stellen schließlich einen Existenzsatz für elliptische Gleichungen mit Maßen als Daten bereit.

7.2.1 Elliptische Regularität und Stetigkeit von Lösungen

Nach Lemma 4.6 ist die schwache Lösung y des linearen elliptischen Randwertproblems

$$\begin{aligned} \mathcal{A}y + y &= f \\ \partial_{\nu_{\mathcal{A}}}y &= g \end{aligned}$$

für gegebene Daten $f \in L^r(\Omega)$ sowie $g \in L^s(\Gamma)$ mit $r > N/2$, $s > N - 1$ stetig in $\bar{\Omega}$, gehört also zu $H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Das Lemma wurde auf Seite 152 unter der vereinfachenden Zusatzannahme bewiesen, dass sowohl die Koeffizienten a_{ij} als auch der Rand Γ von Ω hinreichend glatt sind.

Es bleibt aber auch für den auf Seite 30 eingeführten elliptischen Differentialoperator \mathcal{A} mit Koeffizienten $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ in beschränkten Lipschitzgebieten Ω richtig. Das lässt sich mit folgenden, mir von Herrn J. Griepentrog übermittelten Informationen nachvollziehen:

Es sei eine fast überall nichtnegative Funktion $c_0 \in L^\infty(\Omega)$ mit $\|c_0\|_{L^\infty(\Omega)} \neq 0$ gegeben. Im Weiteren setzen wir $V := H^1(\Omega)$ und $G := \bar{\Omega}$. Ferner definieren wir einen elliptischen Operator $L \in \mathcal{L}(V; V^*)$ durch

$$\langle Ly, v \rangle_{V^*, V} = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) D_i y(x) D_j v(x) + c_0(x) y(x) v(x) \right) dx.$$

Dann hat das lineare elliptische Neumann-Randwertproblem $Lu = F$ für jedes Funktional $F \in V^*$ genau eine Lösung $y \in V$.

In Theorem 4.12 aus [83] wird gezeigt, dass man für $\omega \in [0, N]$ zwei Raumskalen von Sobolew-Campanato-Räumen $W_0^{1,2,\omega}(G) \subset V$ und $Y^{-1,2,\omega}(G) \subset V^*$ mit folgender Eigenschaft finden kann: Es existiert eine Konstante $\bar{\omega} = \bar{\omega}(\Omega) \in (N - 2, N)$, so dass die Einschränkung von L auf $W_0^{1,2,\omega}(G)$ für jedes $\omega \in [0, \bar{\omega})$ ein linearer Isomorphismus von $W_0^{1,2,\omega}(G)$ auf $Y^{-1,2,\omega}(G)$ ist.

Hierbei (d.h. im Falle homogener Neumann-Daten) stimmt $W_0^{1,2,\omega}(G)$ mit dem Sobolew-Campanato-Raum

$$W^{1,2,\omega}(\Omega) = \{u \in V : |\nabla u| \in \mathcal{L}^{2,\omega}(\Omega)\}$$

von Funktionen aus V überein, deren schwache Ableitungen zum Campanato-Raum $\mathcal{L}^{2,\omega}(\Omega)$ gehören. Besonders interessant und entscheidend ist für uns an dem oben genannten Regularitätssatz, dass der Raum $W_0^{1,2,\omega}(G)$ für $\omega \in (N-2, N)$ und $\kappa = (N-\omega)/2$ stetig in den Hölder-Raum $C^{0,\kappa}(G)$ eingebettet ist. Wir müssen uns nur davon überzeugen, dass f und g unter den gegebenen Voraussetzungen in $Y^{-1,2,\omega}(G)$ liegen. Wir brauchen also $\omega \in (N-2, N)$ für diese Eigenschaft.

Nach Theorem 3.9 aus [83] gehören zum Raum $Y^{-1,2,\omega}(G)$ für jedes $\omega \in [0, N)$ all jene Funktionale $F \in V^*$, die sich in der Form

$$\langle F, \varphi \rangle_{V^*, V} = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m f_i(x) D_i \varphi(x) dx + \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx + \int_{\Gamma} g(x) \varphi(x) ds(x)$$

darstellen lassen, wobei

$$f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}^{2,\omega}(\Omega), \quad f \in \mathcal{L}^{2N/(N+2), \omega N/(N+2)}(\Omega), \quad g \in \mathcal{L}^{2(N-1)/nN, \omega(N-1)/N}(\Gamma),$$

gilt und die Zuordnung $(f_1, \dots, f_n, f, g) \mapsto F$ eine lineare stetige Abbildung vermittelt.

Zur Anwendung benötigen wir den Zusammenhang zwischen den Campanato-Räumen und den üblichen Lebesgue-Räumen, siehe hierzu auch Bemerkung 3.10 aus [83]:

(i) Für $q \geq 2$ und $\omega_q = N(1-2/q)$ ist $L^q(\Omega)$ in $\mathcal{L}^{2,\omega_q}(\Omega)$ stetig eingebettet. Insbesondere gilt $\omega_q > N-2$, falls $q > N$.

(ii) Im Fall $r \geq 2N/(N+2)$ und $\omega_r = 2 + N(1-2/r)$ erhalten wir die stetige Einbettung von $L^r(\Omega)$ in $\mathcal{L}^{2N/(N+2), \omega_r N/(N+2)}(\Omega)$. Insbesondere folgt aus $r > N/2$ stets $\omega_r > N-2$.

(iii) Für $s \geq 2(N-1)/N$ und $\omega_s = 1 + (N-1)(1-2/s)$ bettet $L^s(\Gamma)$ stetig in $\mathcal{L}^{2(N-1)/N, \omega_s(N-1)/N}(\Gamma)$ ein. Daher folgt aus $s > N-1$ stets $\omega_s > N-2$.

Die letzten beiden Bedingungen, also $r > N/2$ und $s > N-1$ sind die Voraussetzungen unseres Lemmas 4.6.

7.2.2 Methode von Stampacchia

Wir beweisen Satz 4.5 von S.151, also die Beschränktheit der Lösung des elliptischen Problems (4.5) auf S.147,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}y + c_0(x)y + d(x,y) &= f && \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu_A} y + \alpha(x)y + b(x,y) &= g && \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Die dazu verwendete Stampacchia-Methode benutzt folgenden Hilfssatz, siehe Kinderlehrer und Stampacchia [123], Lemma B.1.:

Lemma 7.5 *Es sei φ eine auf $[k_0, \infty)$ definierte nichtnegative und monoton nicht wachsende Funktion mit folgender Eigenschaft: Für alle $h > k \geq k_0$ gelte*

$$\varphi(h) \leq \frac{C}{(h-k)^a} \varphi(k)^b$$

mit Konstanten $C > 0$, $a > 0$ sowie $b > 1$. Dann ist $\varphi(k_0 + \delta) = 0$ erfüllt mit

$$\delta^a = C \varphi(k_0)^{b-1} 2^{\frac{ab}{b-1}}. \quad (7.2)$$

Beweis von Satz 4.5. Wir passen einen in [189] bzw. [123] für homogene Dirichlet-Randbedingungen ausgeführten Beweis auf den hier gegeben Fall an.

(i) *Vorbetrachtungen*

Existenz und Eindeutigkeit von $y \in H^1(\Omega)$ folgen aus Satz (4.4) auf S. 149. Es sind noch die Beschränktheit sowie die Abschätzung (4.10) auf S. 151 nachzuweisen. Man testet dazu die Lösung y von (4.5) in der Variationsformulierung mit dem Anteil, der betragsmäßig größer als k ist und zeigt, dass dieser für hinreichend großes k verschwindet.

Im Satz wurden für f bzw. g gewisse Integrabilitätsordnungen vorausgesetzt, die wir hier an Stelle von r und s mit \tilde{r} bzw. \tilde{s} bezeichnen wollen. Wir haben also $f \in L^{\tilde{r}}(\Omega)$ und $g \in L^{\tilde{s}}(\Gamma)$ mit $\tilde{r} > N/2$, $\tilde{s} > N - 1$.

Zunächst setzen wir $N \geq 3$ voraus und erläutern am Ende des Beweises die Anpassungen im Fall $N = 2$. Wir fixieren ein $\lambda > 1$ hinreichend nahe an eins, so dass

$$\tilde{r} > r := \frac{N}{N - \lambda(N - 2)}, \quad \tilde{s} > s := \frac{N - 1}{N - 1 - \lambda(N - 2)}$$

gilt. Haben wir den Satz für r und s bewiesen, dann bleibt er auch für alle $\tilde{r} > r$ und $\tilde{s} > s$ richtig. Für die zu r und s konjugierten Exponenten r' und s' ergibt sich

$$\frac{1}{r'} = 1 - \frac{1}{r} = \lambda \frac{N - 2}{N}, \quad \frac{1}{s'} = 1 - \frac{1}{s} = \lambda \frac{N - 2}{N - 1}. \quad (7.3)$$

Unten verwenden wir die Einbettungen

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^p(\Omega)} &\leq c \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N} = \frac{N-2}{2N} = \frac{1}{2\lambda r'}, \\ \|v\|_{L^q(\Gamma)} &\leq c \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(N-1)} = \frac{N-2}{2(N-1)} = \frac{1}{2\lambda s'} \end{aligned} \quad (7.4)$$

und haben damit z.B. $\|v\|_{L^{2r'}(\Omega)} \leq c \|v\|_{H^1(\Omega)}$ wegen $2r' \leq p$. Analog folgt $\|v\|_{L^{2s'}(\Gamma)} \leq c \|v\|_{H^1(\Omega)}$.

Weiter definieren wir für beliebiges $k > 0$ die von y abhängige Funktion

$$v(x) = \begin{cases} y(x) - k, & \text{falls } y(x) \geq k \\ 0, & \text{falls } |y(x)| < k \\ y(x) + k, & \text{falls } y(x) \leq -k \end{cases}$$

und zeigen, dass sie für hinreichend großes k fast überall verschwindet, also ist y dann beschränkt. Dazu werden die Mengen

$$\Omega(k) = \{x \in \Omega : |y(x)| \geq k\}, \quad \Gamma(k) = \{x \in \Gamma : |\tau y(x)| \geq k\},$$

eingeführt, wobei τ wieder die Spur von y auf Γ bezeichnet.

(ii) *Folgerungen aus der Monotonievoraussetzung*

Wir leiten aus der Monotonie die Ungleichung (7.6) her. Zunächst ergibt sich

$$\int_{\Omega} d(x, y) v \, dx \geq 0, \quad \int_{\Gamma} b(x, y) v \, ds \geq 0. \quad (7.5)$$

Beispielsweise erhält man auf $\Omega_+(k) = \{x : y(x) > k\}$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_+(k)} d(x, y) v \, dx &= \int_{\Omega_+(k)} d(x, y) (y - k) \, dx = \int_{\Omega_+(k)} d(x, y - k + k) (y - k) \, dx \\ &\geq \int_{\Omega_+(k)} d(x, y - k) (y - k) \, dx \geq 0 \end{aligned}$$

wegen Monotonie von d bezüglich y und $d(x, 0) = 0$. Gleiches zeigt man für $\Omega_-(k) = \{x : y(x) < -k\}$ und behandelt analog das Integral über Γ . Aus der Variationsformulierung für y folgt mit der in (4.7) auf S. 148 definierten Bilinearform $a[y, v]$

$$a[y, v] + \int_{\Omega} d(x, y) v \, dx + \int_{\Gamma} b(x, y) v \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma} g v \, ds$$

und wegen (7.5)

$$a[y, v] \leq \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma} g v \, ds. \quad (7.6)$$

Hier sieht man bereits, dass die Nichtlinearitäten d und b keinen Einfluss auf die Abschätzung haben werden.

(iii) *Abschätzung von $\|v\|_{H^1(\Omega)}$*

Wir haben

$$a[v, v] \leq a[y, v]. \quad (7.7)$$

Für die differentiellen Anteile in der Bilinearform folgt nämlich

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) D_i y D_j v \, dx = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) D_i v D_j v \, dx,$$

weil $D_i y = D_j v$ auf $\Omega(k)$ und $v = 0$ auf $\Omega \setminus \Omega(k)$ erfüllt ist. Außerdem ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c_0 y v \, dx &= \int_{\Omega_+(k)} c_0 y (y - k) \, dx + \int_{\Omega_-(k)} c_0 y (y + k) \, dx \\ &= \int_{\Omega_+(k)} c_0 [(y - k)^2 + (y - k)k] \, dx + \int_{\Omega_-(k)} c_0 [(y + k)^2 - (y + k)k] \, dx \\ &\geq \int_{\Omega} c_0 v^2 \, dx, \end{aligned}$$

wenn wir $y - k > 0$ bzw. $y + k < 0$ auf $\Omega_+(k)$ bzw. $\Omega_-(k)$ sowie $v = 0$ auf $\Omega \setminus \Omega(k)$ beachten. Analog wird $\int_{\Gamma} \alpha y v \, ds$ behandelt. Aus (7.6), (7.7) und der Koerzivität von $a[\cdot, \cdot]$ folgt schließlich mit $\beta > 0$

$$\beta \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma} g v \, ds. \quad (7.8)$$

(iv) *Abschätzung beider Seiten in (7.8)*

Wir schätzen die rechte Seite mit einer generischen Konstanten c wie folgt ab:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f v \, dx \right| &\leq \|f\|_{L^r(\Omega)} \|v\|_{L^{r'}(\Omega)} \leq \|f\|_{L^r(\Omega)} \left(\left(\int_{\Omega(k)} |v|^{2r'} \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega(k)} 1 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{r'}} \\ &\leq \|f\|_{L^r(\Omega)} \|v\|_{L^{2r'}(\Omega)} |\Omega(k)|^{\frac{1}{2r'}} \leq c \|f\|_{L^r(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} |\Omega(k)|^{\frac{1}{2r'}} \\ &\leq c \|f\|_{L^r(\Omega)}^2 |\Omega(k)|^{\frac{1}{r'}} + \varepsilon \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = c \|f\|_{L^r(\Omega)}^2 |\Omega(k)|^{\lambda \frac{2}{p}} + \varepsilon \|v\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Dabei wurde die obere Einbettung von (7.4) benutzt. Die Zahl ε wählt man so klein, dass $\varepsilon \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$ durch die linke Seite von (7.8) absorbiert wird. Analog erhält man für das Randintegral

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} g v \, ds \right| &\leq \|g\|_{L^s(\Gamma)} \|v\|_{L^{s'}(\Gamma)} \leq \|g\|_{L^s(\Gamma)} \|v\|_{L^{2s'}(\Gamma)} |\Gamma(k)|^{\frac{1}{2s'}} \\ &\leq c \|g\|_{L^s(\Gamma)}^2 |\Gamma(k)|^{\lambda \frac{2}{q}} + \varepsilon \|v\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Auf der linken Seite von (7.8) spalten wir das Quadrat der $H^1(\Omega)$ -Norm in zwei gleiche Teile auf. Aus (7.8) und den beiden Abschätzungen aus (7.4) folgt dann

$$\left(\int_{\Omega(k)} |v|^p dx \right)^{\frac{2}{p}} + \left(\int_{\Gamma(k)} |v|^q ds \right)^{\frac{2}{q}} \leq c \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$$

und mit der Definition von v

$$\left(\int_{\Omega(k)} (|y| - k)^p dx \right)^{\frac{2}{p}} + \left(\int_{\Gamma(k)} (|y| - k)^q dx \right)^{\frac{2}{q}} \leq c \|v\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (7.9)$$

(v) *Anwendung von Lemma 7.5*

Es sei $h > k$ vorausgesetzt. Dann gilt $\Omega(h) \subset \Omega(k)$ sowie $\Gamma(h) \subset \Gamma(k)$ und deshalb $|\Omega(h)| \leq |\Omega(k)|$ sowie $|\Gamma(h)| \leq |\Gamma(k)|$. Es ergibt sich

$$\left(\int_{\Omega(k)} (|y| - k)^p dx \right)^{\frac{2}{p}} \geq \left(\int_{\Omega(h)} (|y| - k)^p dx \right)^{\frac{2}{p}} \geq \left(\int_{\Omega(h)} (h - k)^p dx \right)^{\frac{2}{p}} = (h - k)^2 |\Omega(h)|^{\frac{2}{p}}.$$

Analog schätzt man das Randintegral ab. Schließlich folgt aus (7.9), (7.8)

$$\begin{aligned} (h - k)^2 \left(|\Omega(h)|^{\frac{2}{p}} + |\Gamma(h)|^{\frac{2}{q}} \right) &\leq \\ &\leq c \left(\|f\|_{L^r(\Omega)}^2 + \|g\|_{L^s(\Gamma)}^2 \right) \left(|\Omega(k)|^{\lambda \frac{2}{p}} + |\Gamma(k)|^{\lambda \frac{2}{q}} \right) \\ &\leq c \left(\|f\|_{L^r(\Omega)}^2 + \|g\|_{L^s(\Gamma)}^2 \right) \left(|\Omega(k)|^{\frac{2}{p}} + |\Gamma(k)|^{\frac{2}{q}} \right)^\lambda. \end{aligned}$$

Hier wurde die für alle $a \geq 0$, $b \geq 0$ und $\lambda \geq 1$ gültige Ungleichung $a^\lambda + b^\lambda \leq (a + b)^\lambda$ benutzt. Wir haben damit für $\varphi(h) = |\Omega(h)|^{\frac{2}{p}} + |\Gamma(h)|^{\frac{2}{q}}$ die Beziehung

$$(h - k)^2 \varphi(h) \leq c \left(\|f\|_{L^r(\Omega)}^2 + \|g\|_{L^s(\Gamma)}^2 \right) \varphi(k)^\lambda$$

für alle $h > k \geq 0$. Nun wird Lemma 7.5 mit den Größen

$$a = 2, b = \lambda > 1, k_0 = 0, C = c \left(\|f\|_{L^r(\Omega)}^2 + \|g\|_{L^s(\Gamma)}^2 \right)$$

angewendet. Wir erhalten $\delta^2 = \tilde{c} \left(\|f\|_{L^r(\Omega)}^2 + \|g\|_{L^s(\Gamma)}^2 \right)$ und damit die Behauptung, denn $\varphi(\delta) = 0$ heißt $|y(x)| \leq \delta$ für fast alle $x \in \Omega$ sowie $|\tau y(x)| \leq d$ für fast alle $x \in \Gamma$.

(vi) *Modifikation im Fall $N = 2$*

Hier seien $r > N/2 = 1$ und $s > N - 1 = 1$ die im Satz angegebenen Integrabilitätsordnungen von f und g . Für $N = 2$ sind die Einbettungen (7.4) für alle $p < \infty$ und $q < \infty$ gültig. Wir definieren deshalb p und q mit $\lambda > 1$ durch

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2\lambda r'}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{2\lambda s'}$$

und übernehmen dann alle weiteren Schlüsse des Falls $N \geq 3$ ab Beziehung (7.4). ■

Bemerkung. Die Beschränktheit der Randwerte von y auf Γ wurde hier direkt mitbewiesen. Sie folgt aber wegen $\|y\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq \|y\|_{L^\infty(\Omega)}$ schon aus der Beschränktheit von y , Aufgabe 4.1.

Für die Gleichung $-\Delta y + y^k = f$ mit Neumannscher Randbedingung, k ungerade, führt die eben beschriebene Methodik nicht direkt zum Erfolg. Wir diskutieren nun noch eine

von E. Casas gefundene Erweiterung der Methode von Stampacchia, die auf Randwertaufgaben der Form (4.15) auf S. 154,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}y + d(x, y) &= 0 & \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu_{\mathcal{A}}}y + b(x, y) &= 0 & \text{auf } \Gamma\end{aligned}$$

anwendbar ist.

Satz 7.6 *Unter den Voraussetzungen 4.9 auf S. 154 genügt die Lösung y_n der Gleichung*

$$\begin{aligned}\mathcal{A}y + n^{-1}y + d(x, y) &= 0 & \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu_{\mathcal{A}}}y + b(x, y) &= 0 & \text{auf } \Gamma\end{aligned}$$

für alle $n > 0$ mit einer von n unabhängigen Konstanten $K > 0$ der Abschätzung

$$\|y_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K.$$

Beweis. Wir erläutern nur die nötigen Änderungen des letzten Beweises. Da jetzt die Funktionen f und g nicht explizit gegeben sind, können wir nicht zusätzlich $d(x, 0) = 0$ und $b(x, 0) = 0$ annehmen. Um auf den im letzten Beweis behandelten Fall zu kommen, schneiden wir d und b bei $k \in \mathbb{N}$ bzw. $-k$ ab und erhalten die auf Seite 153 definierten Funktionen d_k und b_k . Dann setzen wir $f(x) := -d_k(x, 0)$, $g(x) := -b_k(x, 0)$, $\tilde{d}(x, y) := d_k(x, y) - d_k(x, 0)$ und definieren \tilde{b} analog. Dann haben wir wie im letzten Beweis $\tilde{d}(x, 0) = 0$ sowie $\tilde{b}(x, 0) = 0$, $f \in L^r(\Omega)$, $g \in L^s(\Gamma)$.

Wir nehmen an, dass in Voraussetzung 4.9 die Ungleichung (i) für d erfüllt ist. Gilt statt dessen (ii), dann arbeiten wir analog mit b .

Folgende einfache Beziehungen sind grundlegend für die Methode: In $\Omega \setminus E_d$ ergibt die Monotonie von d wie im letzten Beweis

$$\tilde{d}(x, y(x))v(x) = \begin{cases} (\tilde{d}(x, y(x)) - \tilde{d}(x, 0))(y - k) \geq 0, & x \in \Omega_+(k) \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega(k) \\ (\tilde{d}(x, y(x)) - \tilde{d}(x, 0))(y + k) \geq 0, & x \in \Omega_-(k). \end{cases}$$

Somit haben wir $\tilde{d}(x, y(x))v(x) \geq 0$ für alle $x \in \Omega \setminus E_d$. Für alle $x \in E_d$ gilt

$$\tilde{d}(x, y(x))v(x) \begin{cases} \geq \lambda_d |y(x)|v(x) = \lambda_d v^2(x), & |y(x)| \geq k \\ = \tilde{d}(x, y(x)) \cdot 0 = \lambda_d v^2(x), & |y(x)| < k. \end{cases} \quad (7.10)$$

Die Schlüsse zwischen (7.5) und (7.6) des letzten Beweises können deshalb wie folgt abgeändert werden:

$$\begin{aligned}a[y, v] &\geq \int_{\Omega} (\gamma_0 |\nabla v|^2 + n^{-1}v^2) dx + \int_{\Omega} \tilde{d}(x, y)v dx + \int_{\Gamma} \tilde{b}(x, y)v ds \\ &\geq \int_{\Omega} \gamma_0 |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} \tilde{d}(x, y)v dx \\ &\geq \int_{\Omega} \gamma_0 |\nabla v|^2 dx + \int_{E_d} \lambda_d v^2 dx.\end{aligned}$$

Nach der verallgemeinerten Poincaréschen Ungleichung (2.15) auf S. 28 stellt aber der letzte Ausdruck eine zur H^1 -Norm äquivalente Norm dar. So kommen wir schließlich mit dieser Argumentation auch zur Ungleichung (7.8) des letzten Beweises und alle anderen Schlüsse bleiben unverändert. Wir erhalten eine von n unabhängige Schranke δ für die L^∞ -Norm von y und setzen $K := \delta$. ■

7.2.3 Elliptische Gleichungen mit Maßen

Da bei punktwisen Zustandsbeschränkungen Maße als rechte Seiten adjungierter Gleichungen auftreten, benötigen wir entsprechende Erweiterungen der Theorie elliptischer bzw. parabolischer Gleichungen. Diese Grundlagen gehen für elliptische Gleichungen auf Casas [42], [44] sowie Alibert und Raymond [5] zurück und im parabolischen Fall auf Casas [46] sowie Raymond und Zidani [176]. Wir zitieren hier ein solches Resultat für das Randwertproblem

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}p + c_0 p & = & \mu_\Omega \quad \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu_{\mathcal{A}}} p + \alpha p & = & \mu_\Gamma \quad \text{auf } \Gamma. \end{array} \quad (7.11)$$

Hier sind μ_Ω bzw. μ_Γ Borelmaße mit Träger in Ω bzw. Γ , die Restriktionen eines regulären Borelmaßes $\mu \in M(\bar{\Omega})$ darstellen, d.h. $\mu = \mu_\Omega + \mu_\Gamma$; \mathcal{A} ist der in (2.19) auf S. 30 eingeführte elliptische Differentialoperator mit Koeffizienten $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, die der Elliptizitätsbedingung (2.20) und (nur der Einfachheit halber) der Symmetriebedingung $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ genügen. Außerdem sind $c_0 \in L^\infty(\Omega)$, $\alpha \in L^\infty(\Gamma)$ mit $c_0 \geq 0$, $\alpha \geq 0$ und $\|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma)} + \|c_0\|_{L^\infty(\Omega)} > 0$ gegeben. Wir ordnen der Gleichung die Bilinearform

$$a[p, v] = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) D_i p(x) D_j v(x) + c_0(x) p(x) v(x) \right) dx + \int_{\Gamma} \alpha(x) p(x) v(x) ds(x)$$

zu; $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ist ein beschränktes Lipschitzgebiet. Für $r > N/2$, $s > N - 1$ wird

$$V^{r,s} = \{v \in H^1(\Omega) : \mathcal{A}v \in L^r(\Omega), \partial_{\nu_{\mathcal{A}}} v \in L^s(\Gamma)\}$$

definiert, wobei $\mathcal{A}v$ distributionell zu verstehen und $\partial_{\nu_{\mathcal{A}}} v$ wie in [44] erklärt ist.

Definition. Eine Funktion $p \in W^{1,\sigma}(\Omega)$ mit $\sigma \geq 1$ heißt schwache Lösung von (7.11), wenn sie der folgenden Variationsgleichung genügt:

$$a[p, v] = \int_{\Omega} v(x) d\mu_\Omega(x) + \int_{\Gamma} v(x) d\mu_\Gamma(x) \quad \forall v \in C^1(\bar{\Omega}). \quad (7.12)$$

Satz 7.7 Unter den obigen Voraussetzungen besitzt das Randwertproblem (7.11) genau eine schwache Lösung p mit $p \in W^{1,\sigma}(\Omega)$ für alle $\sigma \in [1, N/(N-1))$, die zusätzlich für alle $v \in V^{r,s}$ die folgende Formel der partiellen Integration erfüllt:

$$\int_{\Omega} p(\mathcal{A}v + c_0 v) dx + \int_{\Sigma} p(\partial_{\nu_{\mathcal{A}}} v + \alpha v) ds = \int_{\Omega} v d\mu_\Omega + \int_{\Gamma} v d\mu_\Gamma \quad \forall v \in V^{r,s}.$$

Es existiert eine von μ unabhängige Konstante c_σ mit

$$\|p\|_{W^{1,\sigma}(\Omega)} \leq c_\sigma \|\mu\|_{M(\bar{\Omega})}.$$

Der Satz folgt aus einer allgemeineren, in Casas [44] bewiesenen Aussage.

Bemerkungen. Schwache Lösungen von (7.11) müssen nicht eindeutig sein, vgl. dazu die ausführliche Darstellung in [5]. Die Eindeutigkeit wird erst durch die Formel der partiellen Integration (Greensche Formel) gesichert. Eine Definition von $\partial_{\nu_{\mathcal{A}}} p$ wird in [44] eingeführt, vgl. auch [5]. Zur Definition der Norm $\|\mu\|_{M(\bar{\Omega})}$ siehe [6].

7.3 Parabolische Gleichungen

7.3.1 Lösungen in $W(0, T)$

Die lineare Gleichung

Hier halten wir uns im Wesentlichen an die Monographie von Ladyzhenskaya et al. [134], und führen deshalb die folgenden, in [134] verwendeten Räume ein:

Definition. Mit $V_2(Q)$ wird der Raum $W_2^{1,0}(Q) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ bezeichnet, versehen mit der Norm

$$\|y\|_{V_2(Q)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \|y(t)\|_{L^2(\Omega)} + \left(\iint_Q |\nabla_x y(x, t)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

und mit $V_2^{1,0}(Q)$ der Raum $W_2^{1,0}(Q) \cap C([0, T], L^2(\Omega))$, versehen mit der Norm

$$\|y\|_{V_2^{1,0}(Q)} = \max_{t \in [0, T]} \|y(t)\|_{L^2(\Omega)} + \left(\iint_Q |\nabla_x y(x, t)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Bei Durchschnitten wie $W_2^{1,0}(Q) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ sind die Funktionen aus $W_2^{1,0}(Q)$ zunächst mit abstrakten Funktionen aus $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ zu identifizieren, sonst wären reellwertige mit abstrakten Funktionen zu vergleichen. Zur besseren Lesbarkeit schreiben wir das interessierende Anfangsrandwertproblem (3.23) nochmals auf:

$$\begin{array}{lll} y_t + \mathcal{A}y + c_0 y & = & f \quad \text{in } Q = \Omega \times (0, T) \\ \partial_{\nu_{\mathcal{A}}} y + \alpha y & = & g \quad \text{in } \Sigma = \Gamma \times (0, T) \\ y(x, 0) & = & y_0(x) \quad \text{in } \Omega. \end{array} \quad (7.13)$$

Dabei ist der gleichmäßig elliptische Differentialoperator \mathcal{A} wie in (2.19) auf S. 30 definiert.

Satz 7.8 *Es seien ein beschränktes Lipschitzgebiet Ω sowie Funktionen $c_0 \in L^\infty(Q)$, $\alpha \in L^\infty(\Sigma)$ mit $\alpha(x, t) \geq 0$, $y_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(Q)$ und $g \in L^2(\Sigma)$ gegeben. Der Differentialoperator \mathcal{A} habe Koeffizienten $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ mit $a_{ij} = a_{ji}$ und genüge der Bedingung der gleichmäßigen Elliptizität (2.20) auf S. 30. Dann besitzt das Anfangs-Randwertproblem (7.13) eine Lösung im Raum $V_2(Q)$.*

Beweis. Die Aussage folgt aus Satz 5.1, Kapitel III in [134]. In dessen Begründung sind die Änderungen erläutert, die gegenüber dem Beweis von Satz 4.1, Kap. III, für homogene Dirichlet-Randbedingungen vorzunehmen sind. Wir folgen dem Beweis aus [134] und skizzieren die Anpassungen an Randbedingungen dritter Art, die zum Verständnis des Beweises von Lemma 5.3 über unsere semilineare Gleichung nötig sind.

Wir setzen o.B.d.A. $c_0(x, t) \geq 0$ fast überall auf Q voraus. Ist diese Eigenschaft nicht erfüllt, dann substituiert man $y(x, t) = e^{\lambda t} \tilde{y}(x, t)$. In der neuen Gleichung für \tilde{y} steht dann an Stelle von $c_0 y$ der Term $(\lambda + c_0) \tilde{y}$, der für hinreichend großes λ nichtnegativ ist.

(i) *Galerkin-Approximation*

Wir setzen $V = H^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ und wählen eine Basis $\{v_1, v_2, \dots\}$ von Elementen $v_i \in V$ für den Raum V . Diese existiert, weil V ein separabler Hilbertraum ist. Dabei können wir nach einer Orthogonalisierung im Raum H annehmen, dass die v_i orthonormal in H sind. Damit ist $\{v_i\}_{i=1}^\infty$ ein vollständiges Orthonormalsystem in H . Man bestimmt für beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ Näherungsfunktionen $y_n = y_n(x, t)$ durch den Ansatz

$$y_n(x, t) = \sum_{i=1}^n u_i^n(t) v_i(x) \quad (7.14)$$

mit unbekannten Funktionen $u_i^n : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Im Weiteren bezeichnen (\cdot, \cdot) bzw. $\|\cdot\|$ das Skalarprodukt bzw. die Norm von H sowie $(\cdot, \cdot)_\Gamma$ das Skalarprodukt von $L^2(\Gamma)$. Zur Abkürzung verwenden wir die Bilinearform

$$\begin{aligned} a[t; y, v] &= \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) D_i y(x) D_j v(x) + c_0(x, t) y(x) v(x) \right\} dx \\ &+ \int_{\Gamma} \alpha(x, t) y(x) v(x) ds(x). \end{aligned}$$

Wir betrachten $y_n = y_n(\cdot, t)$ als abstrakte Funktion mit Werten in $H^1(\Omega)$. Nach Multiplikation der parabolischen Gleichung mit v_j , Integration über Ω und nachfolgende partielle Integration erhalten wir

$$\left(\frac{d}{dt} y_n(t), v_j \right) + a[t; y_n(t), v_j] = (f(t), v_j) + (g(t), v_j)_\Gamma \quad (7.15)$$

für fast alle $t \in [0, T]$. Die Anfangsbedingung für y ist äquivalent zu $(y(\cdot, 0), v) = (y_0, v)$ $\forall v \in V$. Dementsprechend fordert man für y_n die Beziehung

$$(y_n(\cdot, 0), v_j) = (y_0, v_j) \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (7.16)$$

Einsetzen des Ansatzes (7.14) in (7.15) ergibt unter Beachtung der Orthonormalität

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_j^n(t) + \sum_{i=1}^n u_i^n(t) a[t; v_i, v_j] &= b_j(t), \\ u_j^n(0) &= (y_0, v_j) \end{aligned} \quad (7.17)$$

$j = 1, \dots, n$, mit gegebenen Funktionen $b_j(t) = (f(t), v_j) + (g(t), v_j)_\Gamma$. Das ist ein System linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen auf $[0, T]$ für die gesuchte Vektorfunktion $u^n = (u_1^n, \dots, u_n^n)^\top$. Es besitzt genau eine absolutstetige Lösung $u^n \in (H^1(0, T))^n$, die das Differentialgleichungssystem fast überall auf $[0, T]$ erfüllt. Multiplikation von (7.15) mit $u_j(t)$ und Summation dieser Gleichungen von $j = 1$ bis $j = n$ liefert f.ü. auf $[0, T]$

$$\left(\frac{d}{dt} y_n(t), y_n(t) \right) + a[t; y_n(t), y_n(t)] = (f(t), y_n(t)) + (g(t), y_n(t))_\Gamma. \quad (7.18)$$

Wegen $u^n \in H^1(0, T)^n$ ist $y_n : [0, T] \rightarrow L^2(\Omega)$ f.ü. differenzierbar nach t .

(ii) *Abschätzungen von y_n*

Für beliebiges aber festes $\tau \in (0, T]$ gilt die Identität

$$\int_0^\tau \left(\frac{d}{dt} y_n(t), y_n(t) \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \|y_n(t)\|^2 dt = \frac{1}{2} \|y_n(\tau)\|^2 - \frac{1}{2} \|y_n(0)\|^2.$$

Nach Integration von (7.18) folgt deshalb

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|y_n(\tau)\|^2 + \int_0^\tau a[t; y_n(t), y_n(t)] dt \\ = \frac{1}{2} \|y_n(0)\|^2 + \int_0^\tau \left\{ (f(t), y_n(t)) + (g(t), y_n(t))_\Gamma \right\} dt. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Für den Anfangswert gilt mit der Besselschen Ungleichung

$$\|y_n(0)\|^2 = \sum_{j=1}^n u_j^n(0)^2 = \sum_{j=1}^n (y_0, v_j)^2 \leq \|y_0\|^2. \quad (7.20)$$

Außerdem folgt aus $c_0(x, t) \geq 0$ und $\alpha(x, t) \geq 0$

$$a[t; v, v] \geq \gamma_0 \|\nabla v\|^2 \quad \forall v \in V \quad (7.21)$$

mit γ_0 gemäß (2.20) auf S. 30. Aus (7.19) und (7.20) erhält man mit einer Reihe von Standardabschätzungen nach Anwendung des bekannten Bellman-Gronwallschen Lemmas

$$\max_{t \in [0, T]} \|y_n(t)\| \leq c (\|y_0\| + \|f\|_{L^2(Q)} + \|g\|_{L^2(\Sigma)}). \quad (7.22)$$

Diese Abschätzung für y_n in $C([0, T], H)$ kann in (7.19) eingesetzt werden und ergibt unter Beachtung von (7.21) für $\tau = T$ mit einer von n unabhängigen Konstanten K

$$\|y_n\|_{C([0, T], H)} + \|y_n\|_{W_2^{1,0}(Q)} \leq K \quad (7.23)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt insbesondere $\|y_n(t)\|_H^2 \leq K^2$ und wegen Orthonormalität

$$\sum_{i=1}^n u_i^n(t)^2 \leq K^2 \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (7.24)$$

(iii) *Konvergenz der Folgen $\{u_j^n\}$ und $\{y_n\}$*

Aus (7.24) folgt $|u_j^n(t)| \leq K$, für alle betreffenden t, j, n . Die Menge dieser $u_j^n(\cdot)$ besteht daher für jedes feste j aus gleichgradig stetigen Funktionen, was aus Integration von (7.15) folgt. Durch Anwendung des Satzes von Arzèla-Ascoli und Auswahl einer Diagonalfolge kann man schließlich eine Teilfolge $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ finden, so dass im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_j^{n_k}(t) = u_j(t)$$

für jedes $j \in \mathbb{N}$ gilt. Man kann dazu so vorgehen: Zuerst ergibt sich eine konvergente Teilfolge $\{u_1^{n_\ell}\}$, $\ell = 1, 2, \dots$. Wir wählen für alle j als erstes Glied das Element $u_j^{n_1}$ aus und betrachten als nächstes die Folge $\{u_2^{n_\ell}\}$, $\ell = 2, 3, \dots$. Wegen gleichgradiger Stetigkeit finden wir eine konvergente Teilfolge $\{u_2^{n_{\ell_m}}\}$. Die Folge $\{u_1^{n_{\ell_m}}\}$ konvergiert als Teilfolge

von $\{u_1^{n_\ell}\}$ ebenfalls. Jetzt wird für alle j als zweites Glied $u_j^{n_{\ell_1}}$ ausgewählt, man setzt also $n_2 := n_{\ell_1}$ und setzt diesen Prozess fort, als nächstes mit $j = 3$. Es ist leicht einzusehen, dass auf diese Weise eine Indexfolge $\{n_k\}$ derart konstruiert wird, dass alle Folgen $\{u_j^{n_k}\}$ konvergieren. Man beachte, dass in jeder Folge $\{u_j^{n_k}\}$ höchstens die ersten $j - 1$ Elemente nicht zu den ausgewählten konvergenten Teilfolgen gehören.

Mit den so gegebenen Funktionen u_j wird y durch

$$y(x, t) := \sum_{i=1}^{\infty} u_i(t) v_i(x)$$

definiert. Weiter wird unter Benutzung dieses Resultats bewiesen, dass für jedes $t \in [0, T]$ die Folge $\{y_{n_k}(t)\}$ schwach in $L^2(\Omega)$ gegen $y(t)$ konvergiert, gleichmäßig in t . Abschätzung (7.23) und die schwache Unterhalbstetigkeit der Norm ergeben

$$\|y(t)\| \leq K,$$

also $y \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. Für $y_{n_k}(0)$ bekommt man sogar starke Konvergenz gegen y_0 , denn für $k \rightarrow \infty$ gilt

$$\|y_{n_k}(0) - y_0\| = \left\| \sum_{i=1}^{n_k} u_i^{n_k}(0) v_i - \sum_{i=1}^{\infty} (y_0, v_i) v_i \right\| = \left\| \sum_{i=n_k+1}^{\infty} u_i(0) v_i \right\| \rightarrow 0$$

wegen $\sum_{i=1}^{\infty} u_i^2(0) < \infty$ nach (7.24). Alle obigen Schlüsse sind ausführlicher in [134] nachzulesen.

(iv) y ist schwache Lösung

Wegen (7.23) ist die Folge der y_n beschränkt in $W^{1,0}(Q)$, daher konvergiert o.B.d.A. $\{y_{n_k}\}$ schwach in $W^{1,0}(Q)$ gegen y . Wir können in (7.15) mit beliebigen $\alpha_j \in C^1[0, T]$, $\alpha_j(T) = 0$ für $m \leq n$ die Funktionen $v_m(x, t) = \sum_{j=1}^m \alpha_j(t) v_j(x)$ als Testfunktion einsetzen. So ergibt sich aus (7.18)

$$\left(\frac{d}{dt} y_{n_k}(t), v_m(t) \right) + a[t; y_{n_k}(t), v_m(t)] = (f(t), v_m(t)) + (g(t), v_m(t))_{\Gamma}.$$

Nach partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \left(y_{n_k}(t), \frac{d}{dt} v_m(t) \right) dt + \int_0^T a[t; y_{n_k}(t), v_m(t)] dt \\ & = \iint_Q f v_m dx dt + \iint_{\Sigma} g v_m ds dt + (y_{n_k}(\cdot, 0), v_m(\cdot, 0)). \end{aligned}$$

Für fixiertes m wird jetzt der Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ vollzogen. Wegen der schwachen Konvergenz von y_{n_k} in $W_2^{1,0}(Q)$ und $y_{n_k}(0) \rightarrow y_0$ in $L^2(\Omega)$ ergibt sich in der Grenze

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \left(y(t), \frac{d}{dt} v_m(t) \right) dt + \int_0^T a[t; y(t), v_m(t)] dt \\ & = \iint_Q f v_m dx dt + \iint_{\Sigma} g v_m ds dt + \int_{\Omega} y_0 v_m(\cdot, 0) dx. \end{aligned}$$

Die Menge aller v_m des obigen Typs ist dicht in der Menge aller Funktionen aus $W_2^{1,1}(Q)$ mit homogenen Endwerten, [134] Kap. II, Lemma 4.12. Deshalb erfüllt y die Variationsformulierung für eine schwache Lösung. ■

Bemerkung. Auf die Voraussetzung der Nichtnegativität von α kann verzichtet werden, siehe z.B. Raymond und Zidani [175].

Der Nachweis der Eindeutigkeit der Lösung ist aus formalen Gründen etwas technisch. Grundlage des Beweises ist die Energiebilanzgleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|y(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^\tau a[t; y(t), y(t)] dt \\ = \frac{1}{2} \|y(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^\tau \left[(f(t), y(t))_{L^2(\Omega)} + (g(t), y(t))_{L^2(\Gamma)} \right] dt, \end{aligned} \quad (7.25)$$

die man aus der Variationsformulierung für y erhält, indem man als Testfunktion y selbst einsetzt. Das ist aber nicht zulässig, denn es gilt nicht notwendig $y \in W_2^{1,1}(Q)$ und auch nicht $y(T) = 0$. Beide Eigenschaften werden aber von Testfunktionen verlangt. In [134] wird durch Übergang zu sogenannten Mittelungsfunktionen gezeigt, dass diese Bilanzgleichung trotzdem richtig ist, wenn die höhere Regularität $y \in V_2^{1,0}(Q)$ vorliegt. Deshalb existiert unter den Voraussetzungen von Satz 7.8 eine von f , g und y_0 unabhängige Konstante c_P , so dass die folgende Abschätzung gilt, falls y eine Lösung aus $V_2^{1,0}(Q)$ ist:

$$\max_{t \in [0, T]} \|y(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|y\|_{W_2^{1,0}(Q)} \leq c_P \left(\|f\|_{L^2(Q)} + \|g\|_{L^2(\Sigma)} + \|y_0\|_{L^2(\Omega)} \right). \quad (7.26)$$

Die Energiebilanzgleichung (7.25) hat die gleiche Form wie (7.19). Die Ungleichung (7.26) kann daraus in gleicher Weise hergeleitet werden wie die Abschätzungen (7.22) und (7.23) für y_n aus (7.19).

Mit Hilfe ähnlicher Abschätzungen wird dann bewiesen, dass es in $W_2^{1,0}(Q)$ höchstens eine Lösung geben kann, vgl. [134], Kap. III, Thm. 3.3. Das liegt daran, dass die Differenz zweier verschiedener Lösungen die Gleichung mit homogenen und damit glatten Vorgaben erfüllt. So kann eine zu (7.25) ähnliche Abschätzung verwendet werden, die schließlich für die Differenz der Lösungen null ergibt ([134], Kap. III, Thm. 3.2).

Mit Satz 7.8 wissen wir, dass es eine Lösung in $V_2(Q)$ gibt und in [134], Thm. 4.2, Kap. III, wird gezeigt, dass jede schwache Lösung aus $V_2(Q)$ sogar zu $V_2^{1,0}(Q)$ gehört. Wegen Eindeutigkeit in $W_2^{1,0}(Q)$ folgt daraus, dass die eindeutig bestimmte Lösung y in $V_2^{1,0}(Q)$ liegt. Diese Information gestattet es, die Abschätzung (7.26) für die Lösung anzugeben.

Bemerkung. Die aus [134] zitierten Sätze sind dort für homogene Dirichlet-Randbedingungen bewiesen und auf den Fall von Randbedingungen dritter Art übertragbar.

Insgesamt ergibt sich das folgende Hauptresultat:

Satz 7.9 *Es seien ein beschränktes Lipschitzgebiet Ω sowie Funktionen $c_0 \in L^\infty(Q)$, $\alpha \in L^\infty(\Sigma)$, $y_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(Q)$ und $g \in L^2(\Sigma)$ gegeben. Der Differentialoperator A erfülle die in Satz 7.8 formulierten Bedingungen. Dann besitzt das Anfangs-Randwertproblem (7.13) im Raum $W_2^{1,0}(Q)$ genau eine Lösung, die dem Raum $V_2^{1,0}(Q)$ angehört. Diese genügt der Abschätzung (7.26) mit einer von f , g , y_0 unabhängigen Konstanten c_P .*

Bemerkung. Der Satz ergibt sich einfacher, wenn man von vornherein im Raum $W(0, T)$ arbeitet, Lions [144] oder Wloka [209]. Wir sind nach Ladyzhenskaya et al. [134] vorgegangen, um

zunächst in Analogie zu schwachen Lösungen im elliptischen Fall den Raum $W_2^{1,0}(Q)$ einführen zu können.

Die semilineare Gleichung

Im Weiteren geht es um das semilineare parabolische Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{array}{rcl} y_t + \mathcal{A}y + d(x, t, y) & = & f \quad \text{in } Q \\ \partial_{\nu_{\mathcal{A}}} y + b(x, t, y) & = & g \quad \text{in } \Sigma \\ y(\cdot, 0) & = & y_0 \quad \text{in } \Omega. \end{array} \quad (7.27)$$

Hier folgen wir teilweise dem Beweis im linearen Fall, verwenden aber auch Ideen aus Gajewski et al. [72] sowie Wloka [209]. Zu Beginn arbeiten wir mit der starken Voraussetzung gleichmäßiger Beschränktheit und gleichmäßiger Lipschitzstetigkeit von d und b bezüglich y . Wir beweisen das auf Seite 212 formulierte Lemma 5.3:

Lemma 5.3 *Unter den Voraussetzungen 5.1 und 5.2 auf S. 212 und den in Satz 7.8 angegebenen Voraussetzungen an \mathcal{A} besitzt das Anfangs-Randwertproblem (7.27) für jedes Tripel von Daten $f \in L^2(Q)$, $g \in L^2(\Sigma)$, $y_0 \in L^2(\Omega)$ genau eine schwache Lösung $y \in W(0, T)$.*

Beweis: (i) *Galerkin-Approximation*

Wir verwenden die gleichen Bezeichnungen wie im Beweis von Satz 7.8 und gehen von der Orthonormalbasis $\{v_1, v_2, \dots\}$ sowie dem Ansatz $y_n(x, t) = \sum_{i=1}^n u_i^n(t) v_i(x)$ aus. Die Bilinearform a bezieht sich jetzt nur auf den elliptischen Differentialoperator,

$$a[y, v] := \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) D_i y D_j v \, dx.$$

Wie im Beweis von Satz 7.8 entsteht aus der parabolischen Gleichung das folgende nicht-lineare System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_j^n(t) + \sum_{i=1}^n u_i^n(t) a[v_i, v_j] + \Phi_j(t, u^n(t)) &= b_j(t), \\ u_j^n(0) &= (y_0, v_j), \end{aligned} \quad (7.28)$$

$j = 1, \dots, n$. Dabei wurde $b_j(t) = (f(t), v_j) + (g(t), v_j)_{\Gamma}$ und

$$\Phi_j(t, u) = \left(d(\cdot, t, \sum_{i=1}^n u_i v_i), v_j \right) + \left(b(\cdot, t, \sum_{i=1}^n u_i v_i), v_j \right)_{\Gamma}$$

gesetzt. Nach Voraussetzung ist die Abbildung $\Phi : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gleichmäßig Lipschitz-stetig und gleichmäßig beschränkt. Daher besitzt das obige nichtlineare System gewöhnlicher Differentialgleichungen für jedes n genau eine absolutstetige Lösung $u^n(\cdot)$. Analog zum linearen Fall ergibt sich fast überall auf $[0, T]$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} y_n(t), y_n(t) \right) + a[y_n(t), y_n(t)] + (d(\cdot, t, y_n(t)), y_n(t)) + (b(\cdot, t, y_n(t)), y_n(t))_{\Gamma} &= \\ &= (f(t), y_n(t)) + (g(t), y_n(t))_{\Gamma}. \end{aligned} \quad (7.29)$$

(ii) Abschätzungen von y_n

Wir können die Beziehungen $d(\cdot, \cdot, 0) = b(\cdot, \cdot, 0) = 0$ voraussetzen (anderenfalls ziehen wir diese Werte vorher auf beiden Seiten von (7.27) ab). Aus der Monotonie von d, b folgen dann wie bei der Herleitung von (7.19)

$$(d(\cdot, t, y_n), y_n) = (d(\cdot, t, y_n) - d(\cdot, t, 0), y_n - 0) \geq 0$$

und eine analoge Beziehung für b . Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|y_n(\tau)\|^2 + \int_0^\tau a[t; y_n(t), y_n(t)] dt \\ \leq \frac{1}{2} \|y_n(0)\|^2 + \int_0^\tau \left\{ (f(t), y_n(t)) + (g(t), y_n(t))_\Gamma \right\} dt \end{aligned} \quad (7.30)$$

sowie die Abschätzung (7.20) für $y_n(0)$. Wir erhalten also an Stelle der Gleichung (7.19) eine analoge Ungleichung. Da wir im weiteren Beweis von Satz 7.8 ohnehin nach oben abgeschätzt hatten, gelangen wir auch hier mit identischen Schlüssen zur Abschätzung (7.23),

$$\|y_n\|_{C([0,T],H)} + \|y_n\|_{W_2^{1,0}(Q)} \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(iii) Schwache Konvergenz von y_n gegen y

Auf Grund der letzten Abschätzung können wir davon ausgehen, dass eine Teilfolge von $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ in $W_2^{1,0}(Q)$ schwach gegen ein $y \in W_2^{1,0}(Q)$ konvergiert. O.B.d.A. sei das die Folge $\{y_n\}$ selbst. Wegen der vorliegenden Nichtlinearität ist daraus nicht ohne Weiteres zu schließen, dass $d(\cdot, y_n)$ bzw. $b(\cdot, y_n)$ schwach gegen $d(\cdot, y)$ bzw. $b(\cdot, y)$ konvergieren. Wir wissen aber, dass beide Folgen beschränkt im Raum $L^2(Q)$ sind. Daher konvergieren entsprechende Teilfolgen schwach gegen $D \in L^2(Q)$ bzw. $B \in L^2(\Sigma)$. Wieder nehmen wir der Einfachheit halber an, dass die gesamten Folgen schwach konvergieren,

$$d(\cdot, y_n) \rightharpoonup D \text{ in } L^2(Q), \quad b(\cdot, y_n) \rightharpoonup B \text{ in } L^2(\Sigma). \quad (7.31)$$

Nach Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ zeigt sich, dass y schwache Lösung für ein lineares Hilfsproblem ist: Wie im linearen Fall folgt mit den Funktionen $v_m(\cdot, t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) v_i(\cdot)$

$$\begin{aligned} - \int_0^T \left(y(t), \frac{d}{dt} v_m(t) \right) dt + \int_0^T \left\{ a[y(t), v_m(t)] + (D(t), v_m(t)) + (B(t), v_m(t))_\Gamma \right\} dt \\ = \iint_Q f v_m dx dt + \iint_\Sigma g v_m ds dt + \int_\Omega y_0 v_m(\cdot, 0) dx \end{aligned}$$

für alle v_m der obigen Form mit $\alpha_i \in C^1$ und $\alpha_i(T) = 0$. Wegen Dichtheit der Menge so konstruierter Funktionen v_m in $W^{1,1}(Q)$, [134] Kap. II, Lemma 4.12, gelangt man zu

$$\begin{aligned} - \int_0^T \left(y(t), \frac{d}{dt} v(t) \right) dt + \int_0^T \left\{ a[y(t), v(t)] + (D(t), v(t)) + (B(t), v(t))_\Gamma \right\} dt \\ = \iint_Q f v dx dt + \iint_\Sigma g v ds dt + \int_\Omega y_0 v(\cdot, 0) dx \end{aligned}$$

für alle $v \in W^{1,1}(Q)$ mit $v(T) = 0$. Das ist die Variationsgleichung für eine schwache Lösung y mit Anfangsbedingung $y(0) = y_0$. Wenn jetzt noch $D(x, t) = d(x, t, y(x, t))$

sowie $B(x, t) = b(x, t, y(x, t))$ gezeigt wird, dann ist y als schwache Lösung nachgewiesen und der Beweis vollständig. Zunächst haben wir mit $Y := L^2(0, T; V)$ und $Y^* = L^2(0, T; V^*)$

$$y' + w = F \quad (7.32)$$

im Raum Y^* , wobei $F \in Y^*$ durch

$$\langle F, v \rangle_{Y^*, Y} = \iint_Q f v \, dx dt + \iint_{\Sigma} g v \, ds dt$$

definiert ist und $w \in Y^*$ durch

$$\langle w, v \rangle_{Y^*, Y} = \int_0^T \left\{ a[y(t), v(t)] + (D(t), v(t)) + (B(t), v(t))_{\Gamma} \right\} dt.$$

(iv) y ist schwache Lösung der nichtlinearen Gleichung

Wir gehen hier vor wie in [72], Kap. VI, Beweis von Satz 1.1. Nach Konstruktion gehören alle y_n dem Raum $W(0, T)$ an. Wie im Beweis von Satz 4.4, Beweisteil (i), definieren wir einen monotonen Operator $A : W(0, T) \rightarrow L^2(0, T; V^*)$ durch $A = A_1 + A_2 + A_3$ mit $A_i : W(0, T) \rightarrow L^2(0, T; V^*)$, $A_i : y \mapsto z_i$, $i = 1, 2, 3$, wobei

$$z_1(t) = a[y(t), \cdot], \quad z_2(t) = d(\cdot, t, y(t)), \quad z_3(t) = b(\cdot, t, y(t)).$$

Aus (7.29) folgt

$$\int_0^T (y'_n(t), y_n(t))_{V^*, V} dt + \int_0^T (A(y_n)(t), y_n(t))_{V^*, V} dt = \iint_Q f y_n \, dx dt + \iint_{\Sigma} g y_n \, ds dt$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Formel (3.30) auf S. 119 und die Definition von F ergeben

$$\int_0^T (A(y_n)(t), y_n(t))_{V^*, V} dt = \langle F, y_n \rangle_{Y^*, Y} + \frac{1}{2} \|y_n(0)\|_H^2 - \frac{1}{2} \|y_n(T)\|_H^2.$$

Wir wissen $y_n(0) \rightarrow y_0$ und $y_n(T) \rightharpoonup y(T)$ in $H = L^2(\Omega)$ (die zweite Beziehung wegen $y_n \rightharpoonup y$ in $W(0, T)$ und der Stetigkeit des linearen Operators $y \mapsto y(T)$ in $W(0, T)$). Folglich gilt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|y_n(T)\|_H \geq \|y(T)\|_H,$$

somit nochmals wegen (3.30)

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle A(y_n), y_n \rangle_{Y^*, Y} &\leq \langle F, y \rangle_{Y^*, Y} + \frac{1}{2} \|y(0)\|_H^2 - \frac{1}{2} \|y(T)\|_H^2 \\ &= \langle F, y \rangle_{Y^*, Y} - \langle y', y \rangle_{Y^*, Y} \\ &= \langle w, y \rangle_{Y^*, Y} \end{aligned}$$

nach (7.32). Damit haben wir $y_n \rightharpoonup y$, $A(y_n) \rightharpoonup w$ und $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle A(y_n), y_n \rangle \leq \langle w, y \rangle$. Jetzt folgt mit dem unten angegebenen Lemma 7.11 die Beziehung $A(y) = w$, und schließlich $D = d(\cdot, y)$ und $B = b(\cdot, y)$. Eine andere Variante zum Abschluss dieses Beweises findet man bei Lions [143]. ■

Die vorausgesetzte gleichmäßige Beschränktheit der Nichtlinearitäten ist eine zu starke Forderung. Daher ist dieser Satz nur bedingt anwendbar und eigentlich nur ein Hilfssatz. In Satz 5.5 wird diese Einschränkung aufgehoben. Dafür stellen wir noch folgende Abschätzung bereit:

Lemma 7.10 *Die nach Lemma 5.3, S. 293 existierende Lösung $y \in W(0, T)$ genügt der Abschätzung*

$$\|y\|_{W(0,T)} \leq c_P (\|f - d(\cdot, 0)\|_{L^2(Q)} + \|g - b(\cdot, 0)\|_{L^2(\Sigma)} + \|y_0\|_{L^2(\Omega)}) \quad (7.33)$$

mit einer von f und g unabhängigen Konstanten $c_P > 0$.

Beweis: Wegen $y \in W(0, T)$ darf man die nichtlineare Gleichung mit y selbst testen. Das ergibt das nichtlineare Analogon zur Bilanzgleichung (7.25),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|y(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^\tau \left\{ a[y(t), y(t)] + (d(\cdot, t, y(t)), y(t)) + (b(\cdot, t, y(t)), y(t))_\Gamma \right\} dt \\ = \frac{1}{2} \|y(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^\tau \left\{ (f(t), y(t))_{L^2(\Omega)} + (g(t), y(t))_{L^2(\Gamma)} \right\} dt. \end{aligned}$$

Aus der Monotonie von b, d folgt (7.33) nach Abspalten von $d(x, t, 0)$ sowie $b(x, t, 0)$, falls diese Terme nicht null sind. Diese Terme werden den rechten Seiten zugeschlagen. ■

Wir reichen noch das im letzten Beweis verwendete Lemma nach, vgl. [72], Kap. III, Lemma 1.3. oder auch [217]:

Lemma 7.11 *Es sei A ein monotoner und demistetiger Operator, der einen reflexiven Banachraum Y in seinen Dualraum Y^* abbildet. Dann folgt aus $n \rightarrow \infty$,*

$$y_n \rightharpoonup y \text{ in } Y, \quad A(y_n) \rightharpoonup w \text{ in } Y^* \quad \text{und} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle A(y_n), y_n \rangle_{Y^*, Y} \leq \langle w, y \rangle_{Y^*, Y}$$

die Beziehung $A(y) = w$.

7.3.2 Stetige Lösungen

Im Folgenden ist \mathcal{A} weiterhin der in (2.19) auf S. 30 eingeführte gleichmäßig elliptische Differentialoperator mit Koeffizienten aus $L^\infty(\Omega)$. Die nun folgende Stetigkeitsaussage folgt aus Satz 6.8 von Griepentrog [84] zur maximalen parabolischen Regularität. Dessen Verständnis erfordert Kenntnisse über die in [85] definierten Sobolew-Morrey-Räume und deren Einbettungseigenschaften. Deshalb werden die Resultate von Griepentrog im nächsten Teilabschnitt kurz erläutert.

Lemma 7.12 *Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Lipschitzgebiet und sind $f \in L^r(Q)$, $g \in L^s(\Sigma)$, $y_0 \in C(\bar{\Omega})$, $r > N/2 + 1$, $s > N + 1$, gegeben, dann gehört die schwache Lösung y der linearen parabolischen Anfangs-Randwertaufgabe mit Neumannscher Randbedingung*

$$\begin{aligned} y_t + \mathcal{A}y &= f & \text{in } Q \\ \partial_{\nu, \mathcal{A}} y &= g & \text{in } \Sigma \\ y(0) &= y_0 & \text{in } \Omega \end{aligned}$$

dem Raum $W(0, T) \cap C(\bar{Q})$ an. Es existiert eine von f, g und y_0 unabhängige Konstante $c(r, s) > 0$, so dass die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\|y\|_{W(0,T)} + \|y\|_{C(\bar{Q})} \leq c(r, s) (\|f\|_{L^r(Q)} + \|g\|_{L^s(\Sigma)} + \|y_0\|_{C(\bar{\Omega})}).$$

Beweis. Bei der Umsetzung der Beweisidee hat mich Herr J. Griepentrog unterstützt.

(i) Für $y_0 = 0$ folgt die Aussage des Lemmas aus Satz 6.8 in [84]. Dies wird im nächsten Teilabschnitt erläutert. Nach dem Superpositionsprinzip ist deshalb nur noch die Stetigkeit der Lösung y zu den Vorgaben $f = 0$, $g = 0$ sowie $y_0 \in C(\bar{\Omega})$ zu beweisen. Die Abschätzung folgt aus der Stetigkeit der entsprechenden Lösungsabbildungen.

Wir verwenden die Notation aus [84, 85] und setzen $S := (0, T)$ sowie $V := H^1(\Omega)$. Ferner definieren wir einen linearen stetigen Operator $A : L^2(S; V) \rightarrow L^2(S; V^*)$ durch

$$\int_S \langle (Ay)(t), v(t) \rangle_{V^*, V} dt = \int_S \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) D_i y(x, t) D_j v(x, t) dx dt. \quad (7.34)$$

Dann nimmt unser lineares Anfangsrandwertproblem die Form

$$y_t + Ay = 0, \quad y(0) = y_0 \quad (7.35)$$

mit homogenen Neumann-Randbedingungen an. Die Aufgabe (7.35) hat für jeden Anfangswert $y_0 \in L^2(\Omega)$ genau eine Lösung $y \in W(0, T)$. Im Weiteren werden wir $W(0, T)$ wie in [84, 85] mit $W(S; V)$ bezeichnen. Wir zeigen, dass die Lösung y für $y_0 \in C(\bar{\Omega})$ zum Raum $C(\bar{S}; C(\bar{\Omega})) = C(\bar{Q})$ gehört.

Es sei y_* das Minimum und y^* das Maximum von y_0 in $\bar{\Omega}$. Das Maximumprinzip für parabolische Gleichungen liefert aufgrund der positiven Struktur des Operators A für die Lösung y von (7.35) die Schranken

$$y_* \leq y(x, t) \leq y^* \quad \text{für fast alle } (x, t) \in \Omega \times S. \quad (7.36)$$

Um dies einzusehen, kann man in der Variationsformulierung von (7.35) mit den beiden Funktionen $v = (y - y^*)_+ \in L^2(S; V)$ sowie $v = (y_* - y)_+ \in L^2(S; V)$ testen. Das ist ein nicht trivialer, aber gängiger Schluss in der Theorie parabolischer Gleichungen. Deshalb gehen wir darauf nicht weiter ein.

(ii) Wir approximieren y_0 durch eine Folge glatter Anfangswerte $y_{0,k}$ und zeigen, dass dazu stetige Lösungen y_k gehören:

Da jede Funktion aus $C(\bar{\Omega})$ zu einer Funktion aus $C(\mathbb{R}^n)$ fortgesetzt werden kann, existiert eine Folge von Anfangswerten $y_{0,k} \in C^\infty(\bar{\Omega})$, die für $k \rightarrow \infty$ in $\bar{\Omega}$ gleichmäßig gegen y_0 konvergiert. Nach Satz 2.4 aus [85] konvergieren die Lösungen $y_k \in W(S; V)$ des Problems (7.35) zum regularisierten Anfangswert $y_{0,k}$ für $k \rightarrow \infty$ in $W(S; V)$ gegen die Lösung y des Problems (7.35) zum Anfangswert y_0 . Wir zeigen nun, dass alle y_k stetig auf $\bar{\Omega} \times \bar{S}$ sind.

Dazu führen wir durch $v_k(t) = y_{0,k}$ für alle $t \in \bar{S}$, $k \in \mathbb{N}$, zeitlich konstante und im Ort glatte Funktionen v_k ein und betrachten die entsprechenden Lösungen $w_k \in W(S; V)$ des Problems

$$(w_k)_t + Aw_k = -Av_k, \quad w_k(0) = 0. \quad (7.37)$$

Nach Satz 5.6 aus [85] gehört Av_k für alle $k \in \mathbb{N}$ dem Sobolew-Morrey-Raum $L_2^{N+2}(S; V^*)$ von Funktionalen an. Aufgrund der maximalen parabolischen Regularität für Probleme vom Typ (7.37), vgl. Satz 6.8 aus [84], existiert ein Exponent $\omega \in (N, N+2)$, so dass die Lösung w_k des Problems (7.37) für jedes $k \in \mathbb{N}$ zum Sobolew-Morrey-Raum $W^\omega(S; V)$ gehört. Nach den Sätzen 3.4 und 6.8 aus [85] ist dieser Raum in $C(\bar{S}; C(\bar{\Omega}))$ stetig eingebettet. Somit gehört mit w_k auch $y_k = w_k + v_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ zum Raum $C(\bar{S}; C(\bar{\Omega}))$.

(iii) Nun ist die Stetigkeit von y leicht nachzuweisen. Für jedes k und $\ell \in \mathbb{N}$ ist die Differenz $y_k - y_\ell \in W(S; V)$ die Lösung des Problems (7.35) zum Anfangswert $y_{0,k} - y_{0,\ell}$. Nach Schritt (ii) liegt $y_k - y_\ell$ im Raum $C(\bar{S}; C(\bar{\Omega}))$, woraus mit (7.36), angewendet auf $y_k - y_\ell$ die Abschätzung

$$\min_{x \in \bar{\Omega}} (y_{0,k}(x) - y_{0,\ell}(x)) \leq y_k(x, t) - y_\ell(x, t) \leq \max_{x \in \bar{\Omega}} (y_{0,k}(x) - y_{0,\ell}(x)) \quad (7.38)$$

für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$ und alle $(x, t) \in \bar{\Omega} \times \bar{S}$ folgt. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $y_{0,k}$ gegen y_0 ist $\{y_{0,k}\}_{k=1}^\infty$ eine Cauchyfolge in $C(\bar{\Omega})$. Mit (7.38) ist deshalb die Folge der zugehörigen Lösungen y_k eine Cauchyfolge in $C(\bar{S}; C(\bar{\Omega}))$. Aufgrund der Konvergenz dieser Folge in $W(S; V)$ gegen die Lösung y des ursprünglichen Problems (7.35) zum Anfangswert y_0 muss der Grenzwert y in $C(\bar{S}; C(\bar{\Omega}))$ liegen. ■

Das Lemma ist bereits in [46] zu finden. In [176] wurde der Beweis unter strengeren Voraussetzungen an die Glattheit der Koeffizienten des Differentialoperators und des Randes Γ mit Hilfe von stark stetigen Halbgruppen ausgeführt.

Inzwischen schließen die Arbeiten [85, 84] zur maximalen parabolischen Regularität diese Aussage als Spezialfall ein. Dabei kann Ω sogar ein beschränktes Lipschitzgebiet im Sinne von Grisvard [86] sein. Das ist durchaus wichtig, denn zwei über Kreuz aufeinander gelegte dreidimensionale Quader definieren ein Lipschitzgebiet im Sinne von Grisvard, aber kein Lipschitzgebiet im Sinne von Nečas [167], also kein reguläres Gebiet gemäß unserer Definition aus Abschnitt 2.2.2.

Bemerkungen. (i) Sind die Koeffizienten von \mathcal{A} sowie der Rand Γ hinreichend glatt, so dass die Greensche Funktion $G(x, \xi, t)$ zur obigen linearen Anfangs-Randwertaufgabe existiert, dann lässt sich Lemma 7.12 recht einfach zeigen. In diesem Falle hat y die Darstellung

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \int_0^t \int_{\Omega} G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma} G(x, \xi, t - \tau) g(\xi, \tau) ds(\xi) d\tau \\ &\quad + \int_{\Omega} G(x, \xi, t) y_0(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Das örtlich eindimensionale Analogon haben wir mit Formel (3.13) auf S.101 schon kennen gelernt. Die Funktion G genügt für $t > 0$ und $x, \xi \in \bar{\Omega}$ mit $x \neq \xi$ der Abschätzung

$$|G(x, \xi, t)| \leq c_1 t^{-N/2} \exp\left(-c_2 \frac{|x - \xi|^2}{t}\right)$$

mit positiven Konstanten c_1, c_2 . Damit lässt sich das Lemma direkt durch Abschätzung beweisen, siehe [196], Lemma 5.6.6.

(ii) Die Stetigkeit der Abbildung $y_0 \mapsto y$ von $C(\bar{\Omega})$ in $C(\bar{Q})$ liegt insbesondere dann vor, wenn der elliptische Differentialoperator eine stetige Halbgruppe in $C(\bar{\Omega})$ erzeugt. Für den Laplace-Operator und homogene variationelle Randbedingungen wurde diese Eigenschaft in [206] bewiesen, für den obigen Operator \mathcal{A} in [168]. Inhomogene Dirichlet-Randdaten werden in [17] behandelt.

Maximale Regularität parabolischer Gleichungen

In [85, 84] werden parabolische Gleichungen des Typs $u' + Au + Bu = F$ bei homogener Anfangsbedingung behandelt. Für uns ist deren Spezialfall

$$u' + Au = F, \quad u(0) = 0. \quad (7.39)$$

ausreichend, denn das parabolische Anfangs-Randwertproblem aus Lemma 7.12 kann bei homogenem Anfangswert $y_0 = 0$ in der Form (7.39) aufgeschrieben werden. Dazu wird der in (7.34) auf S. 294 eingeführte Operator $A : L^2(0, T; V) \rightarrow L^2(0, T; V^*)$ benutzt. Wir betrachten (7.39) im Zeitintervall $S = (0, T)$ und in $V = H^1(\Omega)$.

Folgende Räume sind dabei von Interesse: Zunächst die in [85] definierten *Morrey-Räume* $L_2^\omega(S; L^2(\Omega))$, $L_2^\omega(S; L^2(\Gamma))$ sowie $L_2^\omega(S; V^*)$, die wir nicht weiter präzisieren. Ihre Beschreibung würde den beabsichtigten Rahmen dieses Abschnitts übersteigen. Vielmehr geht es hier um ihre Einbettungseigenschaften und die Sätze zur Regularität von Lösungen von (7.39). Weiterhin spielt der Raum

$$L_2^\omega(S; V) = \{u \in L^2(S; V) : u \in L_2^\omega(S; L^2(\Omega)), |\nabla u| \in L_2^\omega(S; L^2(\Omega))\}$$

eine Rolle. Schließlich wird in dem für uns wichtigen Fall der Dualitätsabbildung $E : V \rightarrow V^*$ der *Sobolew-Morrey-Raum*

$$W^\omega(S; V) = \{u \in L_2^\omega(S; V) : u' \in L_2^\omega(S; V^*)\}$$

eingeführt, vgl. Def. 6.1 in [85] mit $X = Y = V$. Der Leser findet eine ausführliche Beschreibung all dieser Sobolew-Morrey-Räume und ihrer Eigenschaften in [85].

Bemerkung. In [84] wird mit $G = \Omega \cup \Gamma \subset \mathbb{R}^N$ die Bezeichnung $H_0^1(G)$ für den Teilraum von $H^1(\Omega)$ mit homogenen Dirichletschen Randwerten auf dem Komplement des Neumann-Randstückes Γ verwendet. In unserem Fall $\Gamma = \partial\Omega$ gibt es keinen Dirichlet-Rand, also gilt $H_0^1(G) = H^1(\Omega)$ und $H^{-1}(G) = H^1(\Omega)^* = V^*$.

Folgende Fakten werden das Verständnis der Sätze aus [84] zur maximalen parabolischen Regularität und ihrer Anwendung auf den Beweis von Lemma 7.12 erleichtern:

(i) Nach Satz 6.8 aus [84] existiert ein $\bar{\omega} \in (N, N+2]$, so dass die Einschränkung des parabolischen Differentialoperators

$$P : u \mapsto u' + Au$$

auf $\{u \in W^\omega(S; V) : u(0) = 0\}$ für alle ω aus $[0, \bar{\omega})$ ein linearer Isomorphismus von $\{u \in W^\omega(S; V) : u(0) = 0\}$ auf $L_2^\omega(S; V^*)$ ist.

(ii) Eine besonders wichtige Eigenschaft des Raumes $W^\omega(S; V)$ ist, dass er für $\omega > N$ stetig in einen Raum $C^{0, \kappa}(\bar{Q})$ Hölder-stetiger Funktionen eingebettet ist, siehe Remark 6.1 aus [84]. Lemma 7.12 folgt nun für $y_0 = 0$ daraus, dass unter unseren Voraussetzungen an r und s die Abbildung $(f, g) \mapsto y$ mit einem $\omega \in (N, \bar{\omega})$ stetig von $L^r(Q) \times L^s(\Sigma)$ in $W^\omega(S; V)$ ist. Das ergibt sich wie folgt aus [85]:

(iii) Laut Theorem 5.6 aus [85] gehören zum Raum $L_2^\omega(S; V^*)$ für $\omega \in [0, N]$ all jene Funktionale $F \in L^2(S; V^*)$, die sich in der Form

$$\begin{aligned} \int_S \langle F(t), \varphi(t) \rangle_{V^*, V} dt &= \int_S \int_\Omega \sum_{i=1}^m f_i(x, t) D_i \varphi(x, t) dx dt \\ &\quad + \int_S \int_\Omega f(x, t) \varphi(x, t) dx dt + \int_S \int_\Gamma g(x, t) \varphi(x, t) ds(x) dt \end{aligned}$$

darstellen lassen, wobei

$$f_1, \dots, f_N \in L_2^\omega(S; L^2(\Omega)), \quad f \in L_2^{\omega-2}(S; L^2(\Omega)), \quad g \in L_2^{\omega-1}(S; L^2(\Gamma))$$

gilt und die Zuordnung $(f_1, \dots, f_N, f, g) \mapsto F$ eine lineare stetige Abbildung vermittelt. Den Zusammenhang zwischen diesen Morrey-Räumen und den üblichen Lebesgue-Räumen, in denen unsere Voraussetzungen an die Daten f und g formuliert sind, stellen wir mittels Remark 3.4 und Remark 3.7 in [85] her:

Für $q \geq 2$ und $\omega_q = (N+2)(1-2/q)$ ist $L^q(Q)$ in $L_2^\omega(S; L^2(\Omega))$ stetig eingebettet, und es gilt $\omega_q > N$, falls $q > N+2$.

Im Falle $r \geq 2$ und $\omega_r = 2 + (N+2)(1-2/r)$ erhalten wir die stetige Einbettung von $L^r(Q)$ in $L_2^{\omega_r-2}(S, L^2(\Omega))$. Insbesondere folgt aus $r > N/2 + 1$ stets $\omega_r > N$.

Für $s \geq 2$ und $\omega_s = 1 + (N+1)(1-2/s)$ bettet $L^s(\Sigma)$ stetig in $L_2^{\omega_s-1}(S, L^2(\Gamma))$ ein. Somit folgt aus $s > N+1$ stets $\omega_s > N$.

Offenbar entsprechen die beiden letzten Bedingungen, also $r > N/2 + 1$ und $s > N+1$ gerade den in Lemma 7.12 gestellten Voraussetzungen an f und g .

Index

- Abbildung
 - stetige, 32
- Ableitung
 - Fréchet, 46
 - Gâteaux, 45
 - schwache, 22
- Abstiegsrichtung, 74
- Aktive-Mengen-Strategie, 81, 85

- Banachraum, 18
- Bang-Bang-
 - Prinzip, 107
 - Steuerung, 55, 64
- Bedingung erster Ordnung
 - hinreichende, 199
- Bedingung zweiter Ordnung
 - hinreichende, 197–199, 202–204, 209, 231, 234, 237, 241
 - notwendige, 196
- Beobachtungsoperator, 123, 130
- Beschränktheitsbedingung, 157
 - der Ordnung k , 158
- Bilinearform, 25, 132, 181
- Bochner-Integral, 115
- Borelmaß
 - reguläres, 268

- c (generische Konstante), 29
- $C[a, b]$, 17
- $C([a, b], X)$, 114
- $C_0^\infty(\Omega)$, 20
- Carathéodory-Bedingung, 157, 162
- constraint qualification, 259

- ds , 3
- D_i, D_x , 10
- Differentialoperator
 - elliptischer, 30
 - in Divergenzform, 30, 131
- Differenzenverfahren, 77
- Diracmaß, 270
- Distribution
 - vektorwertige, 117
- ∂_ν , 25
- ∂_{ν_A} , 30

- Einbettung
 - kompakte, 278
 - stetige, 277
- Elliptizität
 - gleichmäßige, 30
- E_Y , 39

- Fehleranalysis, 84
- Formulierung
 - schwache, 25
- Fréchet-Ableitung
 - eines Nemytskii-Operators, 161, 163
 - erster Ordnung, 218
 - stetige, 161
 - zweiter Ordnung, 181, 182, 184, 190, 193, 228
- Funktion
 - abstrakte, 113
 - Greensche, 101, 109, 295
 - messbare abstrakte, 114
- Funktional, 32
 - konvexes, 37
 - lineares, 32
 - reduziertes, 40
 - schwach nach unten halbstetiges, 38
 - streng konvexes, 37

- Γ , 2
- Gebiet, 20
 - der Klasse $C^{k,1}$, 21
 - Lipschitz-, 21
- Gelfandscher Dreier, 118
- Gleichung
 - adjungierte, 11, 53, 60, 98, 128, 131, 133, 172, 175, 222, 268
 - semilineare, 6
 - semilineare elliptische, 6
 - semilineare parabolische, 7, 8
 - verallgemeinerte, 206
- Gradient, 10, 46
 - reduzierter, 12, 58, 61, 70
- Gradientenverfahren
 - bedingtes, 73
 - projiziertes, 76, 135, 243

- $H^k(\Omega)$, $H_0^k(\Omega)$, 23
- $H^s(\Gamma)$, 90
- Halbgruppe, 109
- Halbierungsverfahren, 205
- Halbordnungsrelation \geq_K , 254
- Hamiltonfunktion, 179, 226
- Hauptsatz
 - über monotone Operatoren, 148
- Hilbertraum, 19
- Index
 - konjugierter, 35
- Integraloperator, 32, 49
 - adjungierter, 103
- Karush-Kuhn-Tucker-
 - Bedingungen, 15
 - System, 57, 275
- Kegel
 - τ -kritischer, 234
 - dualer, 255
 - konvexer, 254
 - kritischer, 195
- Kettenregel, 47, 172
- Konormale, 30
- Konvergenz
 - schwache, 35
 - starke, 18
- $L^p(a, b; X)$, 114
- $L^p(E)$, 19
- $\mathcal{L}(U, V)$, 33
- Lösung
 - schwache, 25, 112, 132, 149, 152, 212, 213, 250, 284
 - verallgemeinerte, 101
- Lagrangefunktion, 13, 15, 69, 71, 96, 177, 255, 264
- Lax u. Milgram
 - Lemma von, 26
- lineares Funktional, 26
- Lipschitzbedingung
 - lokale, der Ordnung k , 158
- Lipschitzgebiet, 21
- Lipschitzstetigkeit
 - lokale, 157
- $M(\bar{\Omega})$, 267
- $M(\bar{\Omega})$, 284
- Massematrix, 83
- Maximumbedingung, 180
- Maximumnorm, 17, 89
 - Minimierung, 271
- Maximumprinzip
 - Pontrjaginsches, 180, 227
- Menge
 - konvexe, 37
 - schwach folgenabgeschlossene, 37
 - stark aktive, 200, 202, 230, 234
- Minimumprinzip, 55, 61, 129
 - schwaches, 55
- Multiplikator
 - Lagrangescher, 14, 15, 58, 68, 88, 255, 258, 259, 275
- Multiplikatorenregel, 13, 260
- ν , 3
- Navier-Stokes-Gleichungen
 - instationäre, 8, 249
 - stationäre, 6
- Nemytskii-Operator, 156, 157
- Neumannproblem, 152
- Newtonverfahren, 205–207
 - projiziertes, 85
- Norm, 17
 - eines linearen Operators, 33
- Normalenableitung, 25
- Normalenvektor, 3
- Oberflächenelement, 3
- Oberflächenmaß
 - Lebesguesches, 21
- Ω , 2
- Operator
 - adjungierter, 48
 - beschränkter, 32
 - dualer, 48
 - konvexer, 255
 - monotoner, 147
 - stetiger, 32
- Optimalitätssystem, 12, 53, 57, 129, 269, 275
- Optimierungsaufgabe
 - quadratische, im Hilbertraum, 40
- partielle Integration, 21, 119
- Phasenfeldmodell, 7, 247
- Poissongleichung, 24
- Problem
 - reduziertes, 9, 78, 135
- Projektionsformel, 56, 62, 105, 106, 129, 131, 173, 223, 225
- Punktfunktional, 89
 - Minimierung, 270
- Q , 4

- Randbedingung
 - dritter Art, 27
 - inhomogene Dirichlet-, 31
 - Neumann, 65, 90, 91, 99, 100, 152
 - Robin, 27
 - Stefan-Boltzmann, 6, 7, 175, 178, 219, 225, 236
- Randbeobachtung, 44, 124
- Randsteuerung, 3
- Raum
 - bidualer, 34
 - dualer, 33
 - normierter, 17
 - reflexiver, 34
 - vollständiger, 18
- Regularisierungsparameter, 3, 125
- Regularitätsbedingung, 259
 - von Zowe und Kurcyusz, 259
- Restglied, 189
 - in Integralform, 188
- Restriktion
 - stark aktive, 186, 200, 230, 234
- Richtungsableitung, 44
- S , 40
- Sattelpunkt, 255
- Satz von
 - Browder und Minty, 148
 - Rellich, 277
 - Riesz, 34
 - Taylor, 181
- Schrittweite
 - Armijo, 76, 205
 - exakte, 75
 - Halbierungsverfahren, 76, 205
- schwach
 - folgenabgeschlossen, 37
 - folgenkompakt, 37
 - folgenstetig, 36
 - konvergent, 35
- Σ , 4
- Skalarprodukt, 18
- Slaterbedingung, 256, 258
 - linearisierte, 261
- Sobolew-Slobodetskii-Raum, 90
- Sobolewraum, 23
- Spuroperator, 24
 - Stetigkeit, 277
- Spursatz, 24
- SQP-Verfahren, 206, 207, 209, 244
- Steifigkeitsmatrix, 83
- Steuerung
 - Bang-Bang, 55, 64
 - lokal optimale, 165, 215
 - optimale, 39, 165, 215
 - verteilte, 4
 - zulässige, 39
- Steuerungs-Zustands-Operator, 39
- Supraleitung, 6, 173, 223
- τ , 23, 24, 277
- Temperaturquelle, 3
- Testfunktion, 25, 112, 113
- Treppenfunktion, 79, 114, 135
- Umschaltpunkt, 107
- Ungleichung
 - Friedrichs'sche, 26
 - Höldersche, 35
 - Poincarésche, 28
 - Cauchy-Schwarz, 19
 - verallgemeinerte Friedrichs'sche, 28
 - verallgemeinerte Poincarésche, 28
- V -elliptisch, 26, 86
- Variationsformulierung, 25, 212
- Variationsgleichung, 112, 132
- Variationsungleichung, 11, 50, 51, 172, 173, 175, 221, 222, 224
 - im Hilbertraum, 50
 - punktweise, 54
- $W(0, T)$, 118
- $W^{k,p}(\Omega)$, $W_0^{k,p}(\Omega)$, 22
- $W_2^{1,0}(Q)$, 111
- $W_2^{1,1}(Q)$, 111
- Wachstumsbedingung, 162
 - quadratische, 185, 189, 197, 199, 202–204, 231, 234
- y_t , 5
- Zielfunktional, 3
- Zustand
 - adjungierter, 11, 53
 - optimaler, 165
- Zustandsbeschränkung
 - integrale, 238
 - punktweise, 89, 265, 266, 272, 274
- Zustandsgleichung, 3
- Zwei-Norm-Diskrepanz, 188, 203, 204, 234

Literaturverzeichnis

- [1] Abergel, F. und R. Temam: *On some control problems in fluid mechanics*. Theoret. Comput. Fluid Dynamics, 1:303–325, 1990.
- [2] Adams, R. A.: *Sobolev Spaces*. Academic Press, Boston, 1978.
- [3] Afanasiev, K. und M. Hinze: *Adaptive control of a wake flow using proper orthogonal decomposition*. In: *Shape Optimization & Optimal Design*, Band 216 der Reihe *Lect. Notes in Pure and Appl. Math.*, Seiten 317–332. Marcel Dekker, 2001.
- [4] Ahmed, N. U. und K. L. Teo: *Optimal Control of Distributed Parameter Systems*. North Holland, New York, 1981.
- [5] Alibert, J.-J. und J.-P. Raymond: *Boundary control of semilinear elliptic equations with discontinuous leading coefficients and unbounded controls*. Numer. Funct. Anal. and Optimization, 3&4:235–250, 1997.
- [6] Alt, H. W.: *Lineare Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [7] Alt, W.: *Nichtlineare Optimierung*. Vieweg, Wiesbaden, 2002.
- [8] Alt, W. und U. Mackenroth: *On the numerical solution of state constrained coercive parabolic optimal control problems*. In: Hoffmann, K.-H. und W. Krabs (Herausgeber): *Optimal Control of Partial Differential Equations*, Band 68 der Reihe *ISNM*, Seiten 44–62. Birkhäuser Verlag, 1984.
- [9] Alt, W. und U. Mackenroth: *Convergence of finite element approximations to state constrained convex parabolic boundary control problems*. SIAM J. Control and Optimization, 27:718–736, 1989.
- [10] Alt, W. und K. Malanowski: *The Lagrange-Newton Method for Nonlinear Optimal Control Problems*. Computational Optimization and Applications, 2:77–100, 1993.
- [11] Antoulas, A. C.: *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*. SIAM, Philadelphia, 2005.
- [12] Appell, J.: *The superposition operator in function spaces – a survey*. Expositiones Math., 6:209–270, 1988.
- [13] Appell, J. und P. P. Zabrejko: *Nonlinear Superposition Operators*. Cambridge University Press, 1990.
- [14] Arada, N., E. Casas und F. Tröltzsch: *Error estimates for the numerical approximation of a semilinear elliptic control problem*. Computational Optimization and Applications, 23:201–229, 2002.
- [15] Arada, N., H. El Fekih und J.-P. Raymond: *Asymptotic analysis of some control problems*. Asymptotic Analysis, 24:343–366, 2000.
- [16] Arada, N., J.-P. Raymond und F. Tröltzsch: *On an augmented Lagrangian SQP method for a class of optimal control problems in Banach spaces*. Computational Optimization and Applications, 22:369–398, 2002.
- [17] Arendt, C., C. Batty, M. Hieber und F. Neubrander: *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*. Birkhäuser, Basel, 2001.

- [18] Balakrishnan, A. V.: *Optimal Control in Banach Spaces*. SIAM J. Control, 3:152–180, 1965.
- [19] Barbu, V.: *Analysis and control of nonlinear infinite dimensional systems*. Academic Press, Boston, 1993.
- [20] Barbu, V. und Th. Precupanu: *Convexity and Optimization in Banach Spaces*. Editura Academiei, Sijthoff & Noordhoff, Leyden, 1978.
- [21] Becker, R., H. Kapp und R. Rannacher: *Adaptive finite element methods for optimal control of partial differential equations: Basic concepts*. SIAM J. Control and Optimization, 39:113–132, 2000.
- [22] Becker, R. und R. Rannacher: *An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods*. Acta Numerica, 10:1–102, 2001.
- [23] Ben Belgacem, F., H. El Fekih und J.-P. Raymond: *A penalized Robin approach for solving a parabolic equation with nonsmooth Dirichlet boundary condition*. Asymptotic Analysis, 34:121–136, 2003.
- [24] Bensoussan, A., G. Da Prato, M. C. Delfour und S. K. Mitter: *Representation and Control of Infinite Dimensional Systems, Vol. I*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.
- [25] Bensoussan, A., G. Da Prato, M. C. Delfour und S. K. Mitter: *Representation and Control of Infinite Dimensional Systems, Vol. II*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.
- [26] Bergounioux, M., K. Ito und K. Kunisch: *Primal-dual strategy for constrained optimal control problems*. SIAM J. Control and Optimization, 37:1176–1194, 1999.
- [27] Bergounioux, M. und K. Kunisch: *On the structure of the Lagrange multiplier for state-constrained optimal control problems*. Systems and Control Letters, 48:16–176, 2002.
- [28] Bergounioux, M. und K. Kunisch: *Primal-dual active set strategy for state-constrained optimal control problems*. Computational Optimization and Applications, 22:193–224, 2002.
- [29] Bertsekas, D. M.: *Projected Newton methods for optimization problems with simple constraints*. SIAM J. Control and Optimization, 20:221–246, 1982.
- [30] Betts, J. T.: *Practical Methods for Optimal Control Using Nonlinear Programming*. SIAM, Philadelphia, 2001.
- [31] Bittner, L.: *On optimal control of processes governed by abstract functional, integral and hyperbolic differential equations*. Math. Operationsforsch. Statistik, 6:107–134, 1975.
- [32] Bonnans, F. und E. Casas: *Une principe de Pontryagine pour le contrôle des systèmes semilinéaires elliptiques*. J. Diff. Equations, 90:288–303, 1991.
- [33] Bonnans, F. und E. Casas: *An extension of Pontryagin's principle for state constrained optimal control of semilinear elliptic equations and variational inequalities*. SIAM J. Control and Optimization, 33:274–298, 1995.
- [34] Bonnans, F. und A. Shapiro: *Perturbation Analysis of Optimization Problems*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [35] Borzi, A.: *Multigrid methods for parabolic distributed optimal control problems*. J. Comp. Appl. Math., 157:365–382, 2003.
- [36] Borzi, A. und K. Kunisch: *A multigrid method for optimal control of time-dependent reaction diffusion processes*. In: Hoffmann, K. H., R. Hoppe und V. Schulz (Herausgeber): *Fast Solution of Discretized Optimization Problems*, Band 138 der Reihe ISNM, Seiten 513–524. Birkhäuser Verlag, 2001.
- [37] Braess, D.: *Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitäts-*

- theorie*. Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [38] Brenner, S. C. und L. R. Scott: *The mathematical theory of finite element methods*. Springer-Verlag, New York, 1994.
 - [39] Butkovskii, A. G.: *Distributed control systems*. American Elsevier, New York, 1969.
 - [40] Butkovskii, A. G.: *Methods for the Control of Distributed Parameter Systems (in Russian)*. Isd. Nauka, Moscow, 1975.
 - [41] Cartan, H.: *Calcul différentiel. Formes différentielles*. Hermann, Paris, 1967.
 - [42] Casas, E.: *Control of an elliptic problem with pointwise state constraints*. SIAM J. Control and Optimization, 4:1309–1322, 1986.
 - [43] Casas, E.: *Introduccion a las ecuaciones en derivadas parciales*. Universidad de Cantabria, Santander, 1992.
 - [44] Casas, E.: *Boundary control of semilinear elliptic equations with pointwise state constraints*. SIAM J. Control and Optimization, 31:993–1006, 1993.
 - [45] Casas, E.: *Optimality conditions for some control problems of turbulent flow*. In: Gunzburger, M. D. (Herausgeber): *Flow Control*, Seiten 127–147, New York, 1995. Springer-Verlag.
 - [46] Casas, E.: *Pontryagin's principle for state-constrained boundary control problems of semilinear parabolic equations*. SIAM J. Control and Optimization, 35:1297–1327, 1997.
 - [47] Casas, E. und M. Mateos: *Second order sufficient optimality conditions for semilinear elliptic control problems with finitely many state constraints*. SIAM J. Control and Optimization, 40:1431–1454, 2002.
 - [48] Casas, E. und M. Mateos: *Uniform convergence of the FEM. Applications to state constrained control problems*. J. of Computational and Applied Mathematics, 21:67–100, 2002.
 - [49] Casas, E., M. Mateos und F. Tröltzsch: *Error estimates for the numerical approximation of boundary semilinear elliptic control problems*. Computational Optimization and Applications, 31:193–220, 2005.
 - [50] Casas, E. und J.-P. Raymond: *Error estimates for the numerical approximation of Dirichlet boundary control for semilinear elliptic equations*. SIAM J. Control and Optimization, 45:1586–1611, 2006.
 - [51] Casas, E., J. C. De los Reyes und F. Tröltzsch: *Sufficient second-order optimality conditions for semilinear control problems with pointwise state constraints*. SIAM J. on Optimization, 19(2):616–643, 2008.
 - [52] Casas, E. und F. Tröltzsch: *Second-order necessary optimality conditions for some state-constrained control problems of semilinear elliptic equations*. Applied Math. and Optimization, 39:211–227, 1999.
 - [53] Casas, E. und F. Tröltzsch: *Second order necessary and sufficient optimality conditions for optimization problems and applications to control theory*. SIAM J. on Optimization, 13:406–431, 2002.
 - [54] Casas, E., F. Tröltzsch und A. Unger: *Second order sufficient optimality conditions for a nonlinear elliptic control problem*. Z. für Analysis und ihre Anwendungen (ZAA), 15:687–707, 1996.
 - [55] Casas, E., F. Tröltzsch und A. Unger: *Second order sufficient optimality conditions for some state-constrained control problems of semilinear elliptic equations*. SIAM J. Control and Optimization, 38(5):1369–1391, 2000.
 - [56] Chen, Z. und K. H. Hoffmann: *Numerical solutions of the optimal control problem governed by a phase field model*. In: Desch, W., F. Kappel und K. Kunisch (Herausgeber): *Estimation*

- and *Control of Distributed Parameter Systems*, Band 100 der Reihe *ISNM*, Seiten 79–97. Birkhäuser Verlag, 1991.
- [57] Ciarlet, P.G.: *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, Amsterdam, 1978.
 - [58] Conway, J.B.: *A course in Functional Analysis*. Wiley & Sons, Warsaw/Dordrecht, 1990.
 - [59] Coron, J.-M.: *Control and Nonlinearity*. American Mathematical Society, Providence, 2007.
 - [60] Deuffhard, P.: *Newton Methods for Nonlinear Problems. Affine Invariance and Adaptive Algorithms*, Band 35 der Reihe *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
 - [61] Dharmo, V. und F. Tröltzsch: *Some aspects of reachability for parabolic boundary control problems with control constraints*. Erscheint in ESAIM COCV.
 - [62] Dontchev, A. L., W. W. Hager, A. B. Poore und B. Yang: *Optimality, stability, and convergence in nonlinear control*. Applied Math. and Optimization, 31:297–326, 1995.
 - [63] Dunn, J. C.: *On second order sufficient optimality conditions for structured nonlinear programs in infinite-dimensional function spaces*. In: Fiacco, A. (Herausgeber): *Mathematical Programming with Data Perturbations*, Seiten 83–107. Marcel Dekker, 1998.
 - [64] Ekeland, I. und R. Temam: *Analyse convexe et problèmes variationnels*. Dunod, Gauthier-Villars, 1974.
 - [65] Emmrich, E.: *Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen*. Vieweg, Wiesbaden, 2004.
 - [66] Eppler, K. und F. Tröltzsch: *On switching points of optimal controls for coercive parabolic boundary control problems*. Optimization, 17:93–101, 1986.
 - [67] Evans: *Partial Differential Equations*, Band 19 der Reihe *Graduate Studies in Mathematics*. American Math. Society, Providence, Rhode Island, 1998.
 - [68] Fattorini, H. O.: *Infinite Dimensional Optimization and Control Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
 - [69] Forster, O.: *Analysis 3*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2008.
 - [70] Friedman, A.: *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964.
 - [71] Fursikov, A. V.: *Optimal Control of Distributed Systems. Theory and Applications*. American Math. Society, Providence, Rhode Island, 1999.
 - [72] Gajewski, H., K. Gröger und K. Zacharias: *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*. Akademie-Verlag, Berlin, 1974.
 - [73] Galdi, P., G.: *An Introduction to the Navier-Stokes Equations*. Springer-Verlag, New York, 1994.
 - [74] Gill, P. E., W. Murray und M. H. Wright: *Practical Optimization*. Academic Press, London, 1981.
 - [75] Glashoff, K. und E. W. Sachs: *On theoretical and numerical aspects of the bang-bang principle*. Numerische Mathematik, 29:93–113, 1977.
 - [76] Glashoff, K. und N. Weck: *Boundary control of parabolic differential equations in arbitrary dimensions – supremum-norm problems*. SIAM J. Control and Optimization, 14:662–681, 1976.
 - [77] Goebel, M.: *Continuity and Fréchet-differentiability of Nemytskij operators in Hölder*

- spaces*. Monatshefte f. Mathematik, 113:107–119, 1992.
- [78] Goldberg, H., W. Kampowsky und F. Tröltzsch: *On Nemytskij Operators in L_p -spaces of abstract functions*. Math. Nachr., 155:127–140, 1992.
- [79] Goldberg, H. und F. Tröltzsch: *Second order sufficient optimality conditions for a class of non-linear parabolic boundary control problems*. SIAM J. Control and Optimization, 31:1007–1025, 1993.
- [80] Goldberg, H. und F. Tröltzsch: *On a SQP-multigrid technique for nonlinear parabolic boundary control problems*. In: Hager, W. W. und P.M. Pardalos (Herausgeber): *Optimal Control: Theory, Algorithms and Applications*, Seiten 154–177, Dordrecht, 1997. Kluwer Academic Publishers.
- [81] Göpfert, A.: *Mathematische Optimierung in allgemeinen Vektorräumen*. Teubner-Verlag, Leipzig, 1973.
- [82] Göring, H., H.-G. Roos und L. Tobiska: *Finite-Element-Methode*. Akademie Verlag/Verlag Harri Deutsch, Berlin/Thun, 1989.
- [83] Griepentrog, J. A.: *Linear elliptic boundary value problems with non-smooth data: Campanato spaces of functionals*. Mathematische Nachrichten, 243:19–42, 2002.
- [84] Griepentrog, J. A.: *Maximal regularity for nonsmooth parabolic problems in Sobolev–Morrey spaces*. Adv. Differential Equations, 12:1031–1078, 2007.
- [85] Griepentrog, J. A.: *Sobolev–Morrey spaces associated with evolution equations*. Adv. Differential Equations, 12:781–840, 2007.
- [86] Grisvard, P.: *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Pitman, Boston, 1985.
- [87] Grossmann, C. und H.-G. Roos: *Numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen*. Teubner-Verlag, Wiesbaden, 2005.
- [88] Grossmann, C. und J. Terno: *Numerik der Optimierung*. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1997.
- [89] Grund, T. und A. Rösch: *Optimal control of a linear elliptic equation with a supremum-norm functional*. Optimization Methods and Software, 15:299–329, 2001.
- [90] Gruver, W. A. und E. W. Sachs: *Algorithmic Methods in Optimal Control*. Pitman, London, 1980.
- [91] Gunzburger, M. D.: *Perspectives in Flow Control and Optimization*. SIAM, Philadelphia, 2003.
- [92] Gunzburger, M. D. und S. Manservigi: *The velocity tracking problem for Navier-Stokes flows with bounded distributed controls*. SIAM J. Control and Optimization, 37:1913–1945, 1999.
- [93] Gunzburger, M. D. und S. Manservigi: *Analysis and approximation of the velocity tracking problem for Navier-Stokes flows with distributed control*. SIAM J. Numer. Analysis, 37:1481–1512, 2000.
- [94] Gunzburger Ed., M. D.: *Flow Control*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [95] Haller-Dintelmann, R., C. Meyer, J. Rehberg und A. Schiela: *Hölder continuity and optimal control for nonsmooth elliptic problems*. Applied Math. Optim., DOI 10.1007/s00245-009-9077-x.
- [96] Heinkenschloss, M.: *Projected sequential quadratic programming methods*. SIAM J. on Optimization, 6:373–417, 1996.
- [97] Heinkenschloss, M.: *The numerical solution of a control problem governed by a phase field model*. Optimization Methods and Software, 7:211–263, 1997.

- [98] Heinkenschloss, M. und E. W. Sachs: *Numerical solution of a constrained control problem for a phase field model*. In: Desch, W., F. Kappel und K. Kunisch (Herausgeber): *Control and Estimation of Distributed Parameter Systems*, Band 118 der Reihe *ISNM*, Seiten 171–188. Birkhäuser Verlag, 1994.
- [99] Heinkenschloss, M. und F. Tröltzsch: *Analysis of the Lagrange-SQP-Newton method for the control of a phase field equation*. *Control and Cybernetics*, 28(2):178–211, 1999.
- [100] Heinkenschloss, M. und L. N. Vicente: *Analysis of inexact trust-region SQP algorithms*. *SIAM J. on Optimization*, 12:283–302, 2001.
- [101] Heuser, H.: *Funktionalanalysis*. Teubner-Verlag, Wiesbaden, 2006.
- [102] Heuser, H.: *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2008.
- [103] Hille, E. und R. S. Phillips: *Functional Analysis and Semigroups*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Providence, 1957.
- [104] Hinze, M.: *Optimal and instantaneous control of the instationary Navier-Stokes equations*. Habilitationsschrift, TU Berlin, 1999.
- [105] Hinze, M.: *A variational discretization concept in control constrained optimization: the linear-quadratic case*. *J. Computational Optimization and Applications*, 30:45–63, 2005.
- [106] Hinze, M. und K. Kunisch: *Second order methods for optimal control of time-dependent fluid flow*. *SIAM J. Control and Optimization*, 40:925–946, 2001.
- [107] Hinze, M. und K. Kunisch: *Second order methods for boundary control of the instationary Navier-Stokes system*. *ZAMM*, 84:171–187, 2004.
- [108] Hinze, M., R. Pinnau, M. Ulbrich und S. Ulbrich: *Optimization with PDE Constraints*, Band 23. Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [109] Hoffmann, K.-H. und L. Jiang: *Optimal control problem of a phase field model for solidification*. *Numer. Funct. Anal.*, 13:11–27, 1992.
- [110] Hömberg, D. und S. Volkwein: *Control of laser surface hardening by a reduced-order approach using proper orthogonal decomposition*. *Mathematical and Computer Modeling*, 38:1003–1028, 2003.
- [111] Ioffe, A. D.: *Necessary and sufficient conditions for a local minimum 3: Second order conditions and augmented duality*. *SIAM J. Control and Optimization*, 17:266–288, 1979.
- [112] Ioffe, A. D. und V. M. Tichomirov: *Theorie der Extremalaufgaben*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1979.
- [113] Ito, K. und K. Kunisch: *Augmented Lagrangian-SQP methods for nonlinear optimal control problems of tracking type*. *SIAM J. Control and Optimization*, 34:874–891, 1996.
- [114] Ito, K. und K. Kunisch: *Augmented Lagrangian methods for nonsmooth, convex optimization in Hilbert spaces*. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 41:591–616, 2000.
- [115] Ito, K. und K. Kunisch: *Lagrange Multiplier Approach to Variational Problems and Applications*. SIAM, Philadelphia, 2008.
- [116] Jahn, J.: *Introduction to the Theory of Nonlinear Optimization*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [117] Jerison, D. S. und C. E. Kenig: *The Neumann problem on Lipschitz domains*. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 4:203–207, 1981.
- [118] Kantorowitsch, L. W. und G. P. Akilow: *Funktionalanalysis in normierten Räumen*. Akademie-Verlag, Berlin, 1978.

- [119] Karafiat, A.: *The problem of the number of switches in parabolic equations with control*. Ann. Polish Math., XXXIV:289–316, 1977.
- [120] Kelley, C. T.: *Iterative Methods for Optimization*. SIAM, Philadelphia, 1999.
- [121] Kelley, C. T. und E. W. Sachs: *Multilevel algorithms for constrained compact fixed point problems*. SIAM J. Scientific Computing, 15:645–667, 1994.
- [122] Kelley, C. T. und E. W. Sachs: *Solution of optimal control problems by a pointwise projected Newton method*. SIAM J. Control and Optimization, 33:1731–1757, 1995.
- [123] Kinderlehrer, D. und G. Stampacchia: *An Introduction to Variational Inequalities and their Applications*. Academic Press, New York, 1980.
- [124] Klatte, D. und B. Kummer: *Nonsmooth Equations in Optimization: Regularity, Calculus, Methods and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.
- [125] Knowles, G.: *Über das Bang-Bang-Prinzip bei Kontrollproblemen aus der Wärmeleitung*. Arch. Math., 29:300–309, 1977.
- [126] Krabs, W.: *Einführung in die lineare und nichtlineare Optimierung für Ingenieure*. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1983.
- [127] Krabs, W.: *Optimal Control of Undamped Linear Vibrations*. Heldermann Verlag, Lemgo, 1995.
- [128] Krasnoselskii, M. A., P. P. Zabreiko, E. I. Pustyl'nik und P. E. Sobolevskii: *Integral Operators in Spaces of Summable Functions*. Noordhoff, Leyden, 1976.
- [129] Kunisch, K. und A. Rösch: *Primal-dual active set strategy for a general class of constrained optimal control problems*. SIAM J. on Optimization, 13:321–334, 2002.
- [130] Kunisch, K. und B. Vexler: *Constrained Dirichlet boundary control in L^2 for a class of evolution equations*. SIAM J. Control Optimization, 46:1726–1753, 2007.
- [131] Kunisch, K. und S. Volkwein: *Galerkin proper orthogonal decomposition methods for parabolic problems*. Numerische Mathematik, 90:117–148, 2001.
- [132] Kunisch, K. und S. Volkwein: *Galerkin proper orthogonal decomposition methods for a general equation in fluid dynamics*. SIAM J. Numerical Analysis, 40:492–515, 2002.
- [133] Kupfer, F.-S. und E. W. Sachs: *Numerical solution of a nonlinear parabolic control problem by a reduced SQP method*. Computational Optimization and Applications, 1:113–135, 1992.
- [134] Ladyzhenskaya, O. A., V. A. Solonnikov und N. N. Ural'ceva: *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*. American Math. Society, Providence, R.I., 1968.
- [135] Ladyzhenskaya, O. A. und N. N. Ural'ceva: *Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type (in Russian)*. Izdat. "Nauka", Moscow, 1973.
- [136] Lagnese, J. E., G. Leugering und E. J. P. G. Schmidt: *Modeling, Analysis and Control of Dynamic Elastic Multi-Link Structures*. Birkhäuser Verlag, Boston, 1994.
- [137] Lasiecka, I.: *Mathematical control theory of coupled PDEs*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, 2002.
- [138] Lasiecka, I. und R. Triggiani: *Control Theory for Partial Differential Equations: Continuous and Approximation Theories. 1: Abstract Parabolic Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [139] Lasiecka, I. und R. Triggiani: *Control Theory for Partial Differential Equations: Continuous and Approximation Theories. 2: Abstract Hyperbolic-Like Systems over a Finite Time Horizon*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [140] Lefter, C. und J. Sprekels: *Optimal boundary control of a phase field system modeling*

- nonisothermal phase transitions*. Adv. Math. Sci. Appl., 17:181–194, 2007.
- [141] Leibfritz, F. und E. W. Sachs: *Inexact SQP interior point methods and large scale optimal control problems*. SIAM J. Control and Optimization, 38:272–293, 2000.
 - [142] Li, X. und J. Yong: *Optimal Control Theory for Infinite Dimensional Systems*. Birkhäuser Verlag, Boston, 1995.
 - [143] Lions, J. L.: *Quelques méthodes des résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, Gauthier–Villars, Paris, 1969.
 - [144] Lions, J. L.: *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1971.
 - [145] Lions, J. L. und E. Magenes: *Nonhomogeneous Boundary Value Problems and Applications*, Band 1–3. Springer-Verlag, Berlin, 1972.
 - [146] Ljusternik, L. A. und W. I. Sobolew: *Elemente der Funktionalanalysis*. Akademie-Verlag, Berlin, 1999.
 - [147] Luenberger, D. G.: *Optimization by Vector Space Methods*. Wiley, New York, 1969.
 - [148] Luenberger, D. G.: *Linear and Nonlinear Programming*. Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1984.
 - [149] Maar, B. und V. Schulz: *Interior point multigrid methods for topology optimization*. Structural Optimization, 19:214–224, 2000.
 - [150] Mackenroth, U.: *Time-optimal parabolic boundary control problems with state constraints*. Num. Funct. Anal. Opt., 3:285–300, 1981.
 - [151] Mackenroth, U.: *Convex parabolic boundary control problems with state constraints*. J. Math. Anal. Appl., 87:256–277, 1982.
 - [152] Mackenroth, U.: *Some remarks on the numerical solution of bang–bang type optimal control problems*. Num. Funct. Anal. Optim., 22:477–500, 1982–83.
 - [153] Mackenroth, U.: *On a parabolic distributed optimal control problem with restrictions on the gradient*. Appl. Math. Optim., 10:69–95, 1983.
 - [154] Macki, J. und A. Strauss: *Introduction to Optimal Control Theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1982.
 - [155] Malanowski, K.: *Convergence of approximations vs. regularity of solutions for convex, control-constrained optimal control problems*. Applied Math. Optimization, 8:69–95, 1981.
 - [156] Maurer, H.: *First and second order sufficient optimality conditions in mathematical programming and optimal control*. Math. Programming Study, 14:163–177, 1981.
 - [157] Maurer, H. und H. D. Mittelman: *Optimization techniques for solving elliptic control problems with control and state constraints. I: Boundary control*. J. of Computational and Applied Mathematics, 16:29–55, 2000.
 - [158] Maurer, H. und H. D. Mittelman: *Optimization techniques for solving elliptic control problems with control and state constraints. II: Distributed control*. J. of Computational and Applied Mathematics, 18:141–160, 2001.
 - [159] Maurer, H. und J. Zowe: *First- and second-order conditions in infinite-dimensional programming problems*. Math. Programming, 16:98–110, 1979.
 - [160] Meyer, C. und A. Rösch: *Superconvergence properties of optimal control problems*. SIAM J. Control and Optimization, 43:970–985, 2004.
 - [161] Meyer, C., A. Rösch und F. Tröltzsch: *Optimal control of PDEs with regularized pointwise state constraints*. Computational Optimization and Applications, 33:209–228, 2006.

- [162] Meyer, C. und F. Tröltzsch: *On an elliptic optimal control problem with pointwise mixed control-state constraints*. In: Seeger, A. (Herausgeber): *Recent Advances in Optimization. Proceedings of the 12th French-German-Spanish Conference on Optimization held in Avignon, September 20-24, 2004*, Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer-Verlag, to appear 2005.
- [163] Mittelman, H. D. und F. Tröltzsch: *Sufficient optimality in a parabolic control problem*. In: Siddiqi, A. H. und M. Kocvara (Herausgeber): *Trends in Industrial and Applied Mathematics*, Seiten 305–316, Dordrecht, 2002. Kluwer Academic Publishers.
- [164] Neittaanmäki, P., J. Sprekels und D. Tiba: *Optimization of Elliptic Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [165] Neittaanmäki, P. und D. Tiba: *Optimal Control of Nonlinear Parabolic Systems: Theory, Algorithms, and Applications*. Marcel Dekker, New York, 1994.
- [166] Neitzel, I., U. Prüfert und T. Slawig: *Strategies for time-dependent PDE control with inequality constraints using an integrated modeling and simulation environment*. Numerical Algorithms, 50(3):241–269, 2009.
- [167] Nečas, J.: *Les méthodes directes en théorie des equations elliptiques*. Academia, Prague, 1967.
- [168] Nittka, Robin: *Regularity of solutions of linear second order elliptic and parabolic boundary value problems on Lipschitz domains*. arXiv:0906.5285v1, Juni 2009.
- [169] Nocedal, J. und S. J. Wright: *Numerical Optimization*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [170] Pazy, A.: *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [171] Penot, J.-P.: *On regularity conditions in mathematical programming*. Mathematical Programming Study, 19:167–199, 1982.
- [172] Polak, E.: *Optimization: algorithms and consistent approximations*, Band 124. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [173] Pontryagin, L. S., V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze und E. F. Mishchenko: *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Wiley, New York, 1962.
- [174] Raymond, J.-P. und F. Tröltzsch: *Second order sufficient optimality conditions for nonlinear parabolic control problems with state constraints*. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 6:431–450, 2000.
- [175] Raymond, J.-P. und H. Zidani: *Pontryagin's principle for state-constrained control problems governed by parabolic equations with unbounded controls*. SIAM J. Control and Optimization, 36:1853–1879, 1998.
- [176] Raymond, J.-P. und H. Zidani: *Hamiltonian Pontryagin's Principles for control Problems governed by Semilinear Parabolic Equations*. Applied Math. and Optimization, 39:143–177, 1999.
- [177] Robinson, S. M.: *Strongly regular generalized equations*. Mathematics of Operations Research, 5:43–62, 1980.
- [178] Rösch, A.: *Error estimates for parabolic optimal control problems with control constraints*. Z. für Analysis und ihre Anwendungen (ZAA), 23:353–376, 2004.
- [179] Rösch, A. und D. Wachsmuth: *Numerical verification of optimality conditions*. SIAM J. Control Optimization, 47(5):2557–2581, 2008.
- [180] Roubíček, T.: *Optimization of steady-state flow of incompressible fluids*. In: Barbu, V., I. Lasiecka, D. Tiba und C. Varsan (Herausgeber): *Analysis and Optimization of Differential Systems*, Seiten 357–368, Boston, 2002. Kluwer Academic Publishers.

- [181] Roubíček, T. und F. Tröltzsch: *Lipschitz stability of optimal controls for the steady state Navier-Stokes equations*. Control and Cybernetics, 32:683–705, 2003.
- [182] Sachs, E. W.: *A parabolic control problem with a boundary condition of the Stefan-Boltzmann type*. ZAMM, 58:443–449, 1978.
- [183] Schittkowski, K.: *Numerical solution of a time-optimal parabolic boundary-value control problem*. JOTA, 27:271–290, 1979.
- [184] Schmidt, E. J. P. G.: *The bang-bang-principle for the time-optimal problem in boundary control of the heat equation*. SIAM J. Control and Optimization, 18:101–107, 1980.
- [185] Schmidt, E. J. P. G.: *Boundary control for the heat equation with non-linear boundary condition*. J. Diff. Equations, 78:89–121, 1989.
- [186] Schulz, V. und G. Wittum: *Multigrid optimization methods for stationary parameter identification problems in groundwater flow*. In: Hackbusch, W. und G. Wittum (Herausgeber): *Multigrid Methods V*, Band 3 der Reihe *Lect. Notes in Comput. Sci. and Engineering*, Seiten 276–288. Springer-Verlag, 1998.
- [187] Spellucci, P.: *Numerische Verfahren der nichtlinearen Optimierung*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.
- [188] Sprekels, J. und S. Zheng: *Optimal control problems for a thermodynamically consistent model of phase-field type for phase transitions*. Advances in Math. Sci. and Appl., 1:113–125, 1992.
- [189] Stampacchia, G.: *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 15:189–258, 1965.
- [190] Tanabe, H.: *Equations of evolution*. Pitman, London, 1979.
- [191] Temam, R.: *Navier-Stokes Equations*. North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [192] Tiba, D.: *Optimal Control of Nonsmooth Distributed Parameter Systems*, Band 1459 der Reihe *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [193] Tiba, D. und F. Tröltzsch: *Error estimates for the discretization of state constrained convex control problems*. Num. Funct. Anal. Optim., 17:1005–1028, 1996.
- [194] Triebel, H.: *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*. J. A. Barth Verlag, Heidelberg-Leipzig, 1995.
- [195] Tröltzsch, F.: *The generalized bang-bang-principle and the numerical solution of a parabolic boundary-control problem with constraints on the control and the state*. ZAMM, 64:551–557, 1984.
- [196] Tröltzsch, F.: *Optimality conditions for parabolic control problems and applications*, Band 62 der Reihe *Teubner Texte zur Mathematik*. Teubner-Verlag, Leipzig, 1984.
- [197] Tröltzsch, F.: *On the Lagrange-Newton-SQP method for the optimal control of semilinear parabolic equations*. SIAM J. Control and Optimization, 38:294–312, 1999.
- [198] Tröltzsch, F.: *Lipschitz stability of solutions of linear-quadratic parabolic control problems with respect to perturbations*. Dyn. Contin. Discrete Impulsive Syst., 7:289–306, 2000.
- [199] Tröltzsch, F. und D. Wachsmuth: *Second-order sufficient optimality conditions for the optimal control of Navier-Stokes equations*. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 12:93–119, 2006.
- [200] Tychonoff, A. N. und A. A. Samarski: *Differentialgleichungen der mathematischen Physik*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1959.
- [201] Ulbrich, M. und S. Ulbrich: *Superlinear convergence of affine-scaling interior point Newton methods for infinite-dimensional nonlinear problems with pointwise bounds*. SIAM J.

- Control and Optimization, 38:1938–1984, 2000.
- [202] Ulbrich, M., S. Ulbrich und M. Heinkenschloss: *Global convergence of trust-region interior-point algorithms for infinite-dimensional nonconvex minimization subject to pointwise bounds*. SIAM J. Control and Optimization, 37:731–764, 1999.
- [203] Unger, A.: *Hinreichende Optimalitätsbedingungen 2. Ordnung und Konvergenz des SQP-Verfahrens für semilineare elliptische Randsteuerprobleme*. Doktorarbeit, Technische Universität Chemnitz, 1997.
- [204] Vexler, B.: *Finite element approximation of elliptic Dirichlet optimal control problems*. Numer. Funct. Anal. Optim., 28:957–973, 2007.
- [205] Volkwein, S.: *Optimal control of a phase-field model using proper orthogonal decomposition*. ZAMM, 81:83–97, 2001.
- [206] Warma, M.: *The Robin and Wentzell-Robin Laplacians on Lipschitz domains*. Semigroup Forum, 73(1):10–30, 2006.
- [207] Weiser, M. und A. Schiela: *Function space interior point methods for PDE constrained optimization*. PAMM, 4:43–46, 2004.
- [208] Werner, D.: *Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [209] Wloka, J.: *Partielle Differentialgleichungen*. Teubner-Verlag, Leipzig, 1982.
- [210] Wolfersdorf, L. v.: *Optimal control for processes governed by mildly nonlinear differential equations of parabolic type I*. ZAMM, 56:531–538, 1976.
- [211] Wolfersdorf, L. v.: *Optimal control for processes governed by mildly nonlinear differential equations of parabolic type II*. ZAMM, 57:11–17, 1977.
- [212] Wright, S. J.: *Primal-Dual Interior-Point Methods*. SIAM, Philadelphia, 1993.
- [213] Yosida, K.: *Functional Analysis*. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [214] Zeidler, E.: *Nonlinear Functional Analysis and its Application I: Fixed-point theorems*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [215] Zeidler, E.: *Nonlinear Functional Analysis and its Application II/A: Linear Monotone Operators*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [216] Zeidler, E.: *Nonlinear Functional Analysis and its Application II/B: Nonlinear Monotone Operators*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [217] Zeidler, E.: *Applied Functional Analysis and its Applications. Main Principles and their Applications*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [218] Zowe, J. und S. Kurcyusz: *Regularity and stability for the mathematical programming problem in Banach spaces*. Appl. Math. Optimization, 5:49–62, 1979.