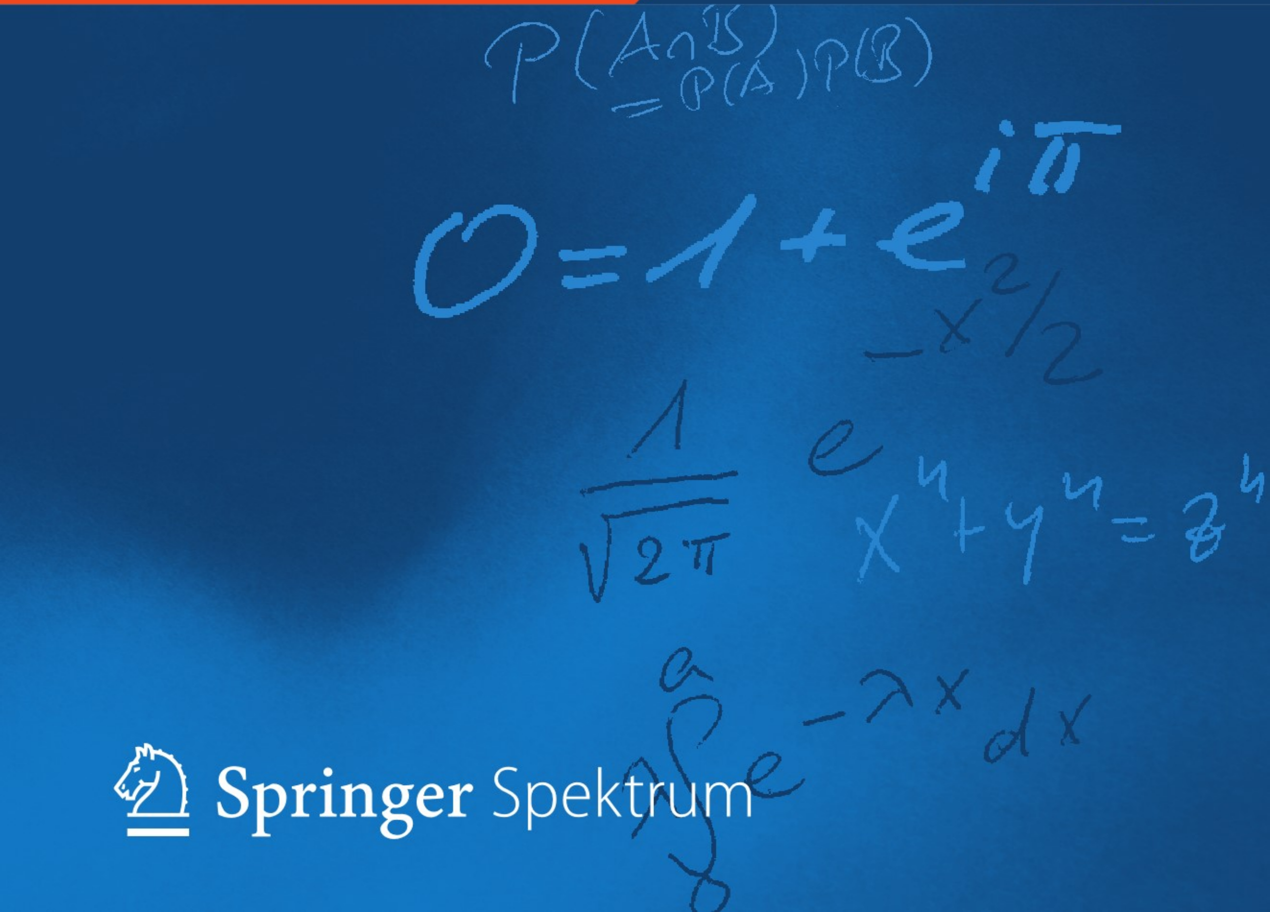
Otto Forster

Analysis 3

Maß- und Integrationstheorie, Integralsätze im $\mathbb{R}^n$ und Anwendungen

7. Auflage

STUDIUM



Springer Spektrum

Aufbaukurs Mathematik

Herausgegeben von

Martin Aigner
Peter Gritzmann
Volker Mehrmann
Gisbert Wüstholz

Otto Forster

Analysis 3

Maß- und Integrationstheorie, Integralsätze im IRn und Anwendungen

7., überarbeitete Auflage

Springer Spektrum

Prof. Dr. Otto Forster
Ludwigs-Maximilians-Universität München
forster@mathematik.uni-muenchen.de
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/ forster/

ISSN 12357
ISBN 978-3-8348-2373-1 ISBN 978-3-8348-2374-8 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-8348-2374-8

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung und Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch, Barbara Gerlach
Einbandentwurf: KünkelLopka GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE.
Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-spektrum.de

Vorwort zur 6. Auflage

Das vorliegende Buch stellt den dritten Teil eines Analysis-Kurses für Studierende der Mathematik und Physik dar, und widmet sich der Maß- und Integrationstheorie, den Integralsätzen im $\mathbb{R}^n$ und ihren Anwendungen.

Von der ersten Auflage, die 1981 erschien, bis zur 5. Auflage blieb der Text, bis auf kleinere Korrekturen, im Wesentlichen unverändert. Für die jetzige Neuauflage wurde das Buch weitgehend umgearbeitet. Die wesentliche Änderung bezieht sich darauf, dass das Lebesguesche Integral jetzt auf der Grundlage der abstrakten Maß- und Integrationstheorie dargestellt wird, während in den früheren Auflagen der Ausgangspunkt das Integral für stetige Funktionen mit kompaktem Träger auf dem $\mathbb{R}^n$ war, das sukzessive auf allgemeinere Funktionenklassen erweitert wurde. Ich habe mich auf mehrfachen Wunsch zu dieser Änderung des Aufbaus entschlossen, da in den heutigen Studienplänen für Mathematik von der Vorlesung Analysis 3 meist erwartet wird, dass sie die Grundlagen der Maß- und Integrationstheorie bereitstellt. Die Vorlesung Analysis 3 sollte nach meiner Meinung aber nicht zu einem Kurs über Maß- und Integrationstheorie entarten. Ein wesentlicher Teil bleibt die Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ mit den Integralsätzen und deren zahlreichen Anwendungen.

Das Buch beginnt mit einer Einführung in die Maßtheorie. Der §3 behandelt die Fortsetzung eines Prämaßes zu einem Maß. Insbesondere wird das Lebesgue-Maß auf der σ-Algebra der Borelschen Mengen im $\mathbb{R}^n$ konstruiert. Danach wird der Integral-Begriff auf abstrakten Maßräumen entwickelt und in §5 werden die wichtigsten Konvergenzsätze der Lebesgueschen Integrationstheorie bewiesen, nämlich die Sätze von der monotonen und von der majorisierten Konvergenz, sowie die Vollständigkeit von L^1. Der §7 ist dem Satz von Fubini im $\mathbb{R}^n$ gewidmet, und es können jetzt die ersten mehrdimensionalen Integrale und Volumina berechnet werden. Um die Durststrecke bis dahin nicht zu verlängern, beschränken wir uns hier auf den $\mathbb{R}^n$ und verzichten auf eine allgemeine Theorie der Produkt-Maße. Der nächste Paragraph über rotationssymmetrische Funktionen dient ebenso dem Ziel, möglichst bald interessante Integrale zu berechnen und Beispiel-Material zur Verfügung zu haben. In §9 beweisen wir die Transformationsformel über das Verhalten von Integralen bei stetig differenzierbarem Koordinatenwechsel, was wesentlich für die Integrationstheorie auf Mannigfaltigkeiten ist. Im Paragraphen über Fourier-Integrale kommen fast alle bis dahin gelernten Sätze der Integrations-Theorie zur Anwendung.

Der nächste Teil des Buches ist dem Gaußschen Integralsatz und seinen Anwendungen gewidmet. Dabei haben wir aus didaktischen Gründen zunächst davon abgesehen, diesen Satz im Differentialformenkalkül zu formulieren, sondern beweisen ihn in seiner klassischen Form. Der Gaußsche Satz wird dann in §16 zur Behandlung der Potentialgleichung benutzt. Wir leiten dabei insbesondere die Poissonsche Integralformel zur

Lösung des Dirichletschen Randwertproblems für die Kugel ab. In §17 erfolgt eine kurze Einführung in die Theorie der Distributionen, in deren Rahmen wir Fundamental-Lösungen für die Potentialgleichung, die Helmholtzsche Schwingungsgleichung und die Wärmeleitungsgleichung bestimmen.

Die letzten vier Paragraphen (§§ 18–21) führen schließlich den Kalkül der Differentialformen ein, mit deren Hilfe der allgemeine Stokessche Integralsatz bewiesen wird. Dabei haben wir uns, um die Abstraktion in Grenzen zu halten, auf den $\mathbb{R}^n$ und seine Untermannigfaltigkeiten beschränkt. Als Anwendungen beweisen wir u.a. den Brouwerschen Fixpunktsatz sowie Integralsätze für holomorphe Funktionen einer und mehrerer Veränderlichen.

Der Umfang des dargestellten Stoffes ist mehr, als in einer einsemestrigen Vorlesung behandelt werden kann. Als eine Auswahl-Möglichkeit bietet sich an, die Integrationstheorie bis zum Gaußschen Integralsatz und seinen Anwendungen zu bringen (§ 1 – 10 und 14 – 16). Falls ein mehrdimensionales Integral schon zur Verfügung steht (nicht notwendig die volle Lebesguesche Integrationstheorie), kann man auch beim Differentialformenkalkül (§ 18 und 19) einsteigen und unter Benutzung von §9 und §14 mit §20 und §21 zum Stokesschen Integralsatz gelangen. Dieser kann dann in die klassische Form des Gaußschen Integralsatzes zurückübersetzt werden und steht so für Anwendungen in §16 und §17 zur Verfügung.

Im Zuge der Neubearbeitung erhielt das Buch durch TEX-Satz auch eine neue äußere Form. Hierfür geht mein herzlicher Dank an Frau YOSHIDA Kuniko, die den Großteil des Textes mit LATEX gesetzt und die Figuren (mit `pstricks`) erstellt hat.

München, September 2010

Otto Forster

Vorwort zur 7. Auflage

Bei der Überarbeitung für die 7. Auflage wurde der Text geringfügig ergänzt und es kamen einige neue Aufgaben und Abbildungen hinzu. Außerdem wurde ein Symbolverzeichnis erstellt.

Besonderer Dank gebührt einigen sorgfältigen Lesern der 6. Auflage, durch deren Hilfe eine ganze Reihe von Druckfehlern beseitigt werden konnte.

München, Februar 2012 O.F.

Inhaltsverzeichnis

Webseite

Für die Analysis 3 gibt es eine Webseite, die über die Homepage des Verfassers

`http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~forster`

erreichbar ist. Dort wird eine Liste der bekannt gewordenden *Errata* abgelegt.

Ich bin allen Leserinnen und Lesern dankbar, die mir per Email an

`forster@mathematik.uni-muenchen.de`

Fehlermeldungen oder sonstige Kommentare zusenden.

Otto Forster

§ 1 Mengenalgebren

In diesem Paragraphen führen wir Mengenringe, Mengenalgebren und σ-Algebren ein, das sind gewisse Systeme von Teilmengen einer Grundmenge. Sie dienen als Definitionsbereich von Inhalten und Maßen, die im nächsten Paragraph eingeführt werden. Mengenalgebren sind abgeschlossen gegenüber Komplementbildung sowie endlichen Vereinigungen und Durchschnitten. In σ-Algebren sind sogar Vereinigungen und Durchschnitte von abzählbaren Familien möglich. Wichtig für das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^n$ ist der Mengenring der endlichen Quadersummen sowie die davon erzeugte σ-Algebra der Borelschen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

Operationen auf Mengen. Sei Ω eine beliebige Menge. Wir bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}(\Omega)$ die *Potenzmenge* von Ω, das ist die Menge aller Teilmengen $A \subset \Omega$. Für Elemente $A, B \in \mathfrak{P}(\Omega)$ hat man die Verknüpfungen *Vereinigung* $A \cup B$, *Durchschnitt* $A \cap B$ und *mengentheoretische Differenz*

$$A \smallsetminus B := \{x \in A : x \notin B\}.$$

Man beachte, dass hier nicht verlangt wird, dass B eine Teilmenge von A ist. Die Differenz $\Omega \smallsetminus A$ heißt das *Komplement* von A und wird oft mit A^c abgekürzt. Mit dieser Bezeichnung gilt $A \smallsetminus B = A \cap B^c$. Vereinigung und Durchschnitt sind auch für beliebige Familien $A_i \in \mathfrak{P}(\Omega)$, $i \in I$, definiert:

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \in \Omega : \exists j \in I \text{ mit } x \in A_j\}, \quad \bigcap_{i \in I} A_i := \{x \in \Omega : x \in A_j \text{ für alle } j \in I\}.$$

Dabei ist I eine beliebige Indexmenge, sie kann endlich oder unendlich (abzählbar oder überabzählbar) sein. Für die leere Indexmenge vereinbart man (in Übereinstimmung mit den obigen Formeln)

$$\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset, \qquad \bigcap_{i \in \emptyset} A_i = \Omega.$$

Die *symmetrische Differenz* zweier Teilmengen $A, B \subset \Omega$ ist definiert durch

$$A \triangle B := (A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A).$$

$A \triangle B$ besteht aus allen Punkten $x \in \Omega$, die in genau einer der Mengen A, B enthalten sind, siehe Bild 1.1.

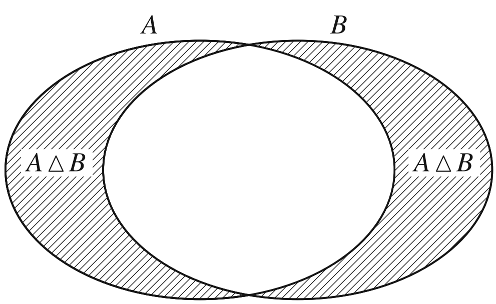


Bild 1.1

O. Forster, *Analysis 3*, Aufbaukurs Mathematik,
DOI 10.1007/978-3-8348-2374-8_1, © Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden 2012

Wir stellen einige Rechenregeln für die symmetrische Differenz zusammen.

Satz 1. *Seien A,B,C,X,Y sowie X_i,A_i, $i \in I$, beliebige Teilmengen von Ω. Dann gilt*

(1) $A \vartriangle \emptyset = A, \quad A \vartriangle A = \emptyset$,

(2) $A \vartriangle B = B \vartriangle A$,

(3) $(A \vartriangle B) \vartriangle C = A \vartriangle (B \vartriangle C)$,

(4) $(A \vartriangle B) \cap C = (A \cap C) \vartriangle (B \cap C)$,

(5) $A \cap B = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad A \vartriangle B = A \cup B$,

(6) $B \subset A \quad \Longrightarrow \quad A \vartriangle B = A \setminus B$,

(7) $X \cap Y = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad A \cap B \subset (X \vartriangle A) \cup (Y \vartriangle B)$,

(8) $\Big(\bigcup_{i\in I} X_i\Big) \vartriangle \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \subset \bigcup_{i\in I}(X_i \vartriangle A_i)$.

Diese Regeln sind einfach zu beweisen. Wir zeigen als Beispiele nur die Regeln (7) und (8), da wir sie später benutzen werden.

Zu (7). Sei vorausgesetzt, dass $X \cap Y = \emptyset$ und sei $z \in A \cap B$ beliebig. Falls $z \in X$, folgt $z \notin Y$, also $z \in Y \vartriangle B$. Falls aber $z \notin X$, folgt $z \in X \vartriangle A$, also in jedem Fall

$$z \in (X \vartriangle A) \cup (Y \vartriangle B), \qquad \text{q.e.d.}$$

Zu (8). Sei $z \in (\bigcup X_i) \vartriangle (\bigcup A_i)$. Falls $z \in \bigcup X_i$, folgt $z \notin \bigcup A_i$. Dann liegt z also in mindestens einem X_i, aber in keinem A_i, d.h. $z \in \bigcup (X_i \vartriangle A_i)$. Falls aber $z \notin \bigcup X_i$, folgt $z \in \bigcup A_i$, und man schließt analog, dass $z \in \bigcup (X_i \vartriangle A_i)$.

Definition (Mengenalgebra)**.** Sei Ω eine Menge. Ein System $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ von Teilmengen von Ω heißt *Mengenalgebra* auf Ω, falls es folgende Eigenschaften hat:

(i) $\emptyset \in \mathfrak{A}$,

(ii) $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{A}$,

(iii) $A,B \in \mathfrak{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{A}$.

Eine Mengenalgebra $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ enthält immer die Gesamtmenge $\Omega = \emptyset^c$. Aufgrund der de Morganschen Regeln

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c, \qquad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

kann man das Axiom (iii) ersetzen durch

(iii)′ $A,B \in \mathfrak{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{A}$.

Die einfachsten Beispiele von Mengenalgebren auf Ω sind $\mathfrak{A} := \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathfrak{A} := \mathfrak{P}(\Omega)$.

Manchmal braucht man eine Abschwächung des Begriffs der Mengenalgebra.

Definition (Mengenring)**.** Sei Ω eine Menge. Ein System $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ von Teilmengen von Ω heißt *Mengenring* auf Ω, falls es folgende Eigenschaften hat:

(i) $\emptyset \in \mathfrak{R}$,

(ii) $A, B \in \mathfrak{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathfrak{R}$,

(iii) $A, B \in \mathfrak{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{R}$.

Ein Mengenring $\mathfrak{R}$ enthält mit je zwei Mengen $A, B \in \mathfrak{R}$ auch deren Durchschnitt, denn

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B).$$

Es ist klar, dass jede Mengenalgebra auch ein Mengenring ist. Ein Mengenring $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ ist genau dann eine Mengenalgebra, falls $\Omega \in \mathfrak{R}$. Ist Ω nicht leer, so ist das nur aus der leeren Menge bestehende System $\mathfrak{R} := \{\emptyset\}$ ein Mengenring, aber keine Mengenalgebra auf Ω.

Satz 2. *Eine Teilmenge $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ ist genau dann ein Mengenring, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

(i) $\emptyset \in \mathfrak{R}$,

(ii) $A, B \in \mathfrak{R} \Rightarrow A \bigtriangleup B \in \mathfrak{R}$,

(iii) $A, B \in \mathfrak{R} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{R}$.

Beweis. Dass ein Mengenring die Eigenschaften (i) bis (iii) hat, ist klar. Die Umkehrung ergibt sich aus den Formeln

$$A \setminus B = (A \cap B) \bigtriangleup A \qquad \text{und} \qquad A \cup B = (A \bigtriangleup B) \bigtriangleup (A \cap B),$$

deren (einfacher) Beweis der Leserin überlassen sei.

Satz 2 ist deswegen interessant, weil $\mathfrak{R}$ mit den Verknüpfungen $\bigtriangleup$ als Addition und $\cap$ als Multiplikation einen kommutativen Ring im Sinne der Algebra bildet, siehe Aufgabe 1.1. Falls $\Omega \in \mathfrak{R}$, spielt es die Rolle eines Einselements.

Beispiele von Mengenringen und Mengenalgebren

(1.1) Für jede Menge Ω ist das System $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ aller endlichen Teilmengen $A \subset \Omega$ ein Mengenring. $\mathfrak{R}$ ist genau dann eine Mengenalgebra, falls Ω endlich ist.

(1.2) Sei Ω eine beliebige Menge. $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ bestehe aus allen Teilmengen $A \subset \Omega$, so dass A oder A^c endlich ist. Dann ist $\mathfrak{A}$ eine Mengenalgebra.

(1.3) *Intervallsummen auf der Zahlengeraden.*

Sei $\Omega = \mathbb{R}$. Wir betrachten halboffene Intervalle der Gestalt

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}, \qquad (a, b \in \mathbb{R}, a < b).$$

Im Folgenden bedeute halboffenes Intervall stets ein rechts offenes und links abgeschlossenes Intervall.

Die halboffenen Intervalle werden deshalb benutzt, weil sie sich besser zum Zerlegen und Zusammensetzen eignen. Natürlich hätte man ebenso gut links offene und rechts abgeschlossene Intervalle wählen können.

Mit $\mathfrak{Q}(\mathbb{R})$ bezeichnen wir das System aller Teilmengen $A \subset \mathbb{R}$, die sich als endliche Vereinigung solcher Intervalle darstellen lassen:

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} [a_i, b_i[\,.$$

Behauptung. $\mathfrak{Q}(\mathbb{R})$ ist ein Mengenring.

Beweis. Die leere Menge gehört zu $\mathfrak{Q}(\mathbb{R})$ (Vereinigung einer leeren Menge von Intervallen); außerdem ist $\mathfrak{Q}(\mathbb{R})$ trivialerweise abgeschlossen gegenüber Vereinigungen.

Es ist also nur noch zu zeigen: $A, B \in \mathfrak{Q}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \smallsetminus B \in \mathfrak{Q}(\mathbb{R})$.

Dies sieht man so: Sind I, J zwei halboffene Intervalle, so ist $I \smallsetminus J$ entweder leer, selbst ein halboffenes Intervall oder die Vereinigung von zwei halboffenen Intervallen. Daraus folgt für $A = \bigcup_{k=1}^{m} I_k \in \mathfrak{Q}(\mathbb{R})$

$$\Big(\bigcup_{k=1}^{m} I_k\Big) \smallsetminus J = \bigcup_{k=1}^{m} (I_k \smallsetminus J) \in \mathfrak{Q}(\mathbb{R}).$$

Ist $B = \bigcup_{\ell=1}^{t} J_\ell \in \mathfrak{Q}(\mathbb{R})$ und setzt man $B_s = \bigcup_{\ell=1}^{s} J_\ell$, so folgt durch Induktion

$$A \smallsetminus B_s = (A \smallsetminus B_{s-1}) \smallsetminus J_s \in \mathfrak{Q}(\mathbb{R}) \quad \text{für } s = 1, \ldots, t\,,$$

also $A \smallsetminus B \in \mathfrak{Q}(\mathbb{R})$, q.e.d.

Wir bezeichnen $\mathfrak{Q}(\mathbb{R})$ kurz als den Mengenring der endlichen Intervallsummen in $\mathbb{R}$.

Da die Vereinigung zweier halboffener Intervalle, die nicht punktfremd sind, wieder ein halboffenes Intervall ist, besteht $\mathfrak{Q}(\mathbb{R})$ aus allen endlichen Vereinigungen *disjunkter* halboffener Intervalle von $\mathbb{R}$.

(1.4) *Produkte von Mengenringen.*

Seien Ω_1 und Ω_2 Mengen und $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega_1)$ bzw. $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}(\Omega_2)$ Mengenringe. Daraus kann man einen Mengenring $\mathfrak{R} := \mathfrak{A} \boxtimes \mathfrak{B}$ auf $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$ wie folgt konstruieren: $\mathfrak{A} \boxtimes \mathfrak{B}$ besteht aus allen endlichen Vereinigungen

$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i \times B_i \quad \text{mit } A_i \in \mathfrak{A},\ B_i \in \mathfrak{B}.$$

Behauptung. Dies ist tatsächlich ein Mengenring.

Beweis. Als einzige nicht-triviale Tatsache ist zu zeigen:

$$X, Y \in \mathfrak{A} \boxtimes \mathfrak{B} \quad \Longrightarrow \quad X \smallsetminus Y \in \mathfrak{A} \boxtimes \mathfrak{B}.$$

Seien zunächst X, Y von der speziellen Gestalt

$$X = A \times B, \quad Y = A' \times B' \quad \text{mit } A, A' \in \mathfrak{A},\ B, B' \in \mathfrak{B}.$$

Dann ist $A \times B$ die disjunkte Vereinigung der vier Mengen

$$\begin{array}{ll} (A \cap A') \times (B \cap B'), & (A \cap A') \times (B \setminus B'), \\ (A \setminus A') \times (B \cap B'), & (A \setminus A') \times (B \setminus B'), \end{array}$$

von denen einige auch leer sein können, vgl. Bild 1.2.

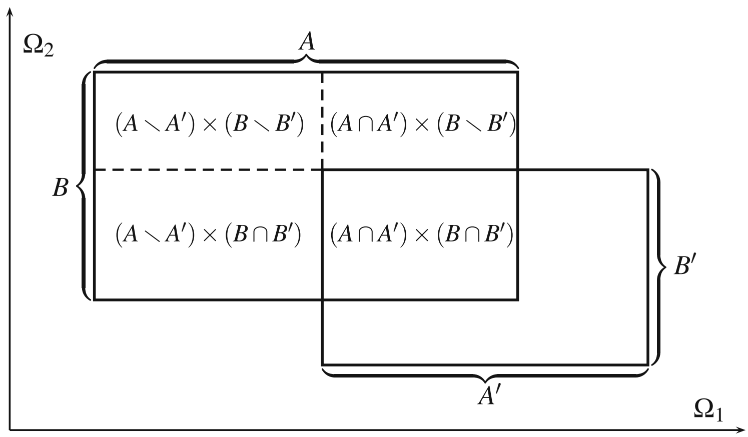


Bild 1.2

Da

$$X \cap Y = (A \cap A') \times (B \cap B'),$$

folgt daraus

$$X \setminus Y = ((A \cap A') \times (B \setminus B')) \cup ((A \setminus A') \times (B \cap B')) \cup ((A \setminus A') \times (B \setminus B')).$$

Dies ist aber ein Element von $\mathfrak{A} \boxtimes \mathfrak{B}$. Falls $X = \bigcup_{i=1}^m A_i \times B_i$, ist

$$X \setminus (A' \times B') = \bigcup_{i=1}^m \big((A_i \times B_i) \setminus (A' \times B')\big) \in \mathfrak{A} \boxtimes \mathfrak{B}.$$

Ist schließlich $Y = \bigcup_{\ell=1}^t A'_\ell \times B'_\ell$, so beweist man ähnlich wie in (1.3) durch Induktion nach t, dass $X \setminus Y \in \mathfrak{A} \boxtimes \mathfrak{B}$, q.e.d.

Betrachtet man die Konstruktion genauer, so sieht man, dass man jedes Element von $\mathfrak{A} \boxtimes \mathfrak{B}$ sogar als *disjunkte* Vereinigung von endlich vielen Produkten $A_i \times B_i$ mit $A_i \in \mathfrak{A}$, $B_i \in \mathfrak{B}$ darstellen kann.

Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Mengenalgebren, so ist auch $\mathfrak{A} \boxtimes \mathfrak{B}$ eine Mengenalgebra.

Für Leser, die den Begriff des Tensorprodukts aus der Algebra kennen, sei noch angemerkt, dass $\mathfrak{A} \boxtimes \mathfrak{B}$ das Tensorprodukt der Ringe $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist.

(1.5) *Quadersummen im* $\mathbb{R}^n$.

Sei jetzt $\Omega = \mathbb{R}^n$. Im $\mathbb{R}^n$ betrachten wir halboffene Quader der Gestalt

$$Q = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_\nu \leqslant x_\nu < b_\nu \text{ für } \nu = 1, \ldots, n\}, \quad a_\nu, b_\nu \in \mathbb{R}, a_\nu < b_\nu.$$

Im Folgenden bedeute halboffener Quader stets einen Quader dieser Gestalt.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)$ das System aller Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$, die sich als Vereinigung von endlich vielen halboffenen Quadern darstellen lassen. Für $n = 1$ stimmt dies mit dem in (1.3) definierten Mengenring der Intervallsummen in $\mathbb{R}$ überein. Für $n > 1$ lässt sich jeder n-dimensionale halboffene Quader Q als Produkt

$$Q = I \times Q'$$

eines halboffenen Intervalls $I \subset \mathbb{R}$ und eines $(n-1)$-dimensionalen halboffenen Quaders $Q' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ schreiben. Daraus folgt durch Induktion nach n, dass

$$\mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n) = \mathfrak{Q}(\mathbb{R}) \boxtimes \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^{n-1})$$

gilt, insbesondere dass $\mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)$ ein Mengenring ist. Wir nennen $\mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)$ den Mengenring der endlichen Quadersummen im $\mathbb{R}^n$.

Es ergibt sich auch, dass jedes Element $X \in \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)$ sich als disjunkte Vereinigung von endlich vielen halboffenen Quadern darstellen lässt. Denn nach (1.4) ist X disjunkte Vereinigung von endlich vielen Mengen der Gestalt $A \times B$ mit $A \in \mathfrak{Q}(\mathbb{R})$ und $B \in \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^{n-1})$. Nun ist A Vereinigung endlich vieler disjunkter halboffener Intervalle I_k, und B nach Induktions-Voraussetzung Vereinigung endlich vieler disjunkter $(n-1)$-dimensionaler halboffener Quader Q'_ℓ. Daraus folgt

$$A \times B = \bigcup_{k,\ell} (I_k \times Q'_\ell),$$

und die Quader $I_k \times Q'_\ell$ sind paarweise punktfremd.

Bemerkung. Der Mengenring $\mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)$ ist keine Mengenalgebra, da der Gesamtraum $\mathbb{R}^n$ nicht in $\mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)$ liegt.

σ-Algebren

Wir kommen jetzt zu den für die Maßtheorie wichtigsten Mengensystemen, den σ-Algebren.

Definition. Sei Ω eine Menge. Ein System $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ von Teilmengen von Ω heißt σ-*Algebra* auf Ω, falls es folgende Eigenschaften hat:

(i) $\emptyset \in \mathfrak{A}$,

(ii) $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{A}$,

(iii) Für jede Folge $A_k \in \mathfrak{A}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ gilt $\bigcup_{k=1}^\infty A_k \in \mathfrak{A}$.

Natürlich kann man die Bedingung (iii) durch die duale Bedingung ersetzen, dass für jede Folge von Elementen von $\mathfrak{A}$ auch deren Durchschnitt zu $\mathfrak{A}$ gehört.

Jede σ-Algebra ist eine Mengenalgebra, denn $A \cup B$ ist auch Vereinigung der Folge

$$A, B, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \ldots .$$

Die Umkehrung gilt aber nicht (ein einfaches Gegenbeispiel ist die Mengenalgebra aus Beispiel (1.2), wenn Ω unendlich ist).

Wir führen folgende oft bequeme Notation ein: Sei X_k, $k \geqslant 1$, eine Folge von Teilmengen von Ω. Wir schreiben

$$X_k \uparrow X \qquad \text{oder genauer} \qquad X_k \uparrow_{k=1}^{\infty} X,$$

falls $(X_k)_{k\geqslant 1}$ eine aufsteigende Folge von Mengen mit Limes X ist, d.h.

$$X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_k \subset X_{k+1} \subset \ldots \qquad \text{und} \qquad X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k.$$

Eine entsprechende Notation gilt für absteigende Folgen $Y_k \downarrow Y$. Dies bedeutet

$$Y_1 \supset Y_2 \supset \ldots \supset Y_k \supset Y_{k+1} \supset \ldots \qquad \text{und} \qquad Y = \bigcap_{k=1}^{\infty} Y_k.$$

Satz 3. *Eine Mengenalgebra $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ ist genau dann eine σ-Algebra, wenn für jede aufsteigende Folge von Elementen $A_k \in \mathfrak{A}$, $k \geqslant 1$, mit $A_k \uparrow A$, auch der Limes $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ zu $\mathfrak{A}$ gehört.*

Denn sei $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ eine beliebige abzählbare Vereinigung mit $A_k \in \mathfrak{A}$. Dann gilt $\widetilde{A}_m \uparrow A$ mit $\widetilde{A}_m := A_1 \cup \ldots \cup A_m \in \mathfrak{A}$.

Beispiele von σ-Algebren

(1.6) Triviale Beispiele von σ-Algebren sind $\{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathfrak{P}(\Omega)$.

(1.7) Sei $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra auf Ω und $\Omega_1 \subset \Omega$ eine Teilmenge. Wir definieren

$$\mathfrak{A} \cap \Omega_1 := \{A \cap \Omega_1 : A \in \mathfrak{A}\}.$$

Dann ist $\mathfrak{A} \cap \Omega_1$ eine σ-Algebra auf Ω_1. Sie heißt die *Spur* von $\mathfrak{A}$ auf Ω_1.

Falls $\Omega_1 \in \mathfrak{A}$, gilt

$$\mathfrak{A} \cap \Omega_1 = \{A \in \mathfrak{A} : A \subset \Omega_1\}.$$

(1.8) Sei $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra auf Ω. Außerdem sei eine weitere Menge Ω_1 und eine Abbildung

$$\phi : \Omega_1 \to \Omega$$

gegeben. Dann ist das Mengensystem

$$\mathfrak{A}_1 := \phi^{-1}(\mathfrak{A}) := \{\phi^{-1}(A) : A \in \mathfrak{A}\}$$

eine σ-Algebra auf Ω_1. Dies folgt aus den Rechenregeln für das Urbild

$$\phi^{-1}(\Omega \smallsetminus A) = \Omega_1 \smallsetminus \phi^{-1}(A) \quad \text{und} \quad \phi^{-1}\Big(\bigcup_i A_i\Big) = \bigcup_i \phi^{-1}(A_i).$$

Beispiel (1.7) ist ein Spezialfall von (1.8): Sei $\Omega_1 \subset \Omega$ und $\iota : \Omega_1 \hookrightarrow \Omega$ die Einbettungsabbildung. Dann ist

$$\mathfrak{A} \cap \Omega_1 = \iota^{-1}(\mathfrak{A}).$$

Erzeugendensysteme von σ-Algebren. Es ist im Allgemeinen schwierig, σ-Algebren explizit anzugeben. Deshalb definiert man σ-Algebren meist durch Erzeugendensysteme. Ist $\mathfrak{A}_i \subset \mathfrak{P}(\Omega)$, $i \in I$, eine beliebige Familie von σ-Algebren auf Ω, so ist auch der Durchschnitt

$$\mathfrak{A} := \bigcap_{i \in I} \mathfrak{A}_i \subset \mathfrak{P}(\Omega)$$

eine σ-Algebra, wie unmittelbar aus der Definition folgt. Deshalb gilt: Ist $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ irgend ein System von Teilmengen von Ω, so gibt es eine kleinste σ-Algebra, die $\mathfrak{E}$ umfasst, nämlich den Durchschnitt aller σ-Algebren $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ mit $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{A}$. Dieser Durchschnitt heißt die von $\mathfrak{E}$ erzeugte σ-Algebra. Wir bezeichnen sie mit $\langle \mathfrak{E} \rangle^\sigma$.

Ein für die Maß- und Integrationstheorie wichtiges Beispiel ist die *Borelsche σ-Algebra* eines topologischen Raumes. Diese ist wie folgt definiert: Sei Ω ein topologischer Raum, (z.B. $\Omega = \mathbb{R}^n$) und $\mathfrak{O}$ das System aller offenen Mengen $U \subset \Omega$. Dann heißt

$$\mathcal{B}(\Omega) := \langle \mathfrak{O} \rangle^\sigma$$

die Borelsche σ-Algebra (kurz Borel-Algebra) von Ω. Die Mengen $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ heißen die Borelschen Teilmengen von Ω.

Da σ-Algebren abgeschlossen gegenüber Komplementbildung sind und die abgeschlossenen Mengen genau die Komplemente der offenen Mengen sind, gilt auch: Die Borel-Algebra $\mathcal{B}(\Omega)$ wird erzeugt vom System aller abgeschlossenen Teilmengen von Ω.

Satz 4. *Die Borel-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ wird erzeugt vom Mengenring der endlichen Quadersummen:*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \langle \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n) \rangle^\sigma.$$

Es gilt sogar: Sei $\mathfrak{Q}_{\text{rat}} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ die (abzählbare) Menge aller Quader mit rationalen Eckpunkten, d.h. Quader der Gestalt

$$Q = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_\nu \leqslant x_\nu < b_\nu,\ \nu = 1, \dots, n\}$$

mit rationalen a_ν, b_ν. *Dann ist*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \langle \mathfrak{Q}_{\text{rat}} \rangle^\sigma.$$

Beweis. Jeder halboffene Quader $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : a_\nu \leqslant x_\nu < b_\nu\}$ ist Durchschnitt einer abzählbaren Familie von offenen Quadern $Q_i := \{x \in \mathbb{R}^n : a_\nu - 2^{-i} < x_\nu < b_\nu\}$, $i \in \mathbb{N}$. Bezeichnet $\mathfrak{O}$ das System aller offenen Mengen im $\mathbb{R}^n$, bedeutet das

$$\mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n) \subset \langle \mathfrak{O} \rangle^\sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \quad \text{also auch} \quad \langle \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n) \rangle^\sigma \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Andrerseits folgt aus dem nachfolgenden Lemma, dass

$$\mathfrak{O} \subset \langle \mathfrak{Q}_{\mathrm{rat}} \rangle^\sigma \quad \text{also auch} \quad \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \langle \mathfrak{O} \rangle^\sigma \subset \langle \mathfrak{Q}_{\mathrm{rat}} \rangle^\sigma.$$

Damit hat man eine Kette von Inklusionen

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \langle \mathfrak{Q}_{\mathrm{rat}} \rangle^\sigma \subset \langle \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n) \rangle^\sigma \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

die nur bestehen kann, wenn überall das Gleichheitszeichen gilt.

Lemma 1. *Jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist disjunkte Vereinigung abzählbar vieler halboffener Würfel mit rationalen Eckpunkten.*

Das Lemma wird durch Bild 1.3 veranschaulicht.

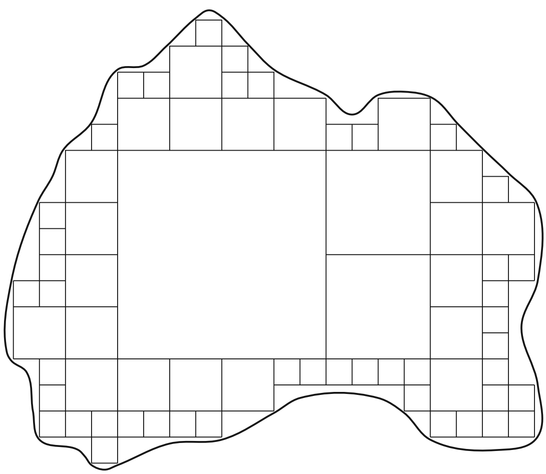


Bild 1.3

Beweis. Für eine ganze Zahl $k \geqslant 0$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{W}_k$ die abzählbare Menge aller Würfel der Gestalt

$$\left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \frac{m_i}{2^k} \leqslant x_i < \frac{m_i + 1}{2^k}\right\} \quad \text{mit} \quad m_i \in \mathbb{Z}.$$

Die Würfel aus $\mathfrak{W}_k$ bilden eine disjunkte Überdeckung des $\mathbb{R}^n$. Für $k' \geqslant k$ sind zwei Würfel $W \in \mathfrak{W}_k$, $W' \in \mathfrak{W}_{k'}$ entweder punktfremd oder es gilt $W' \subset W$.

Wir konstruieren nun die gesuchte Menge von Würfeln induktiv: Sei M_0 die Menge aller Würfel $W \in \mathfrak{W}_0$, die ganz in U enthalten sind. Für $k \geqslant 1$ sei M_k die Menge aller

Würfel $W \in \mathfrak{W}_k$, die ganz in U liegen, aber in keinem der Würfel aus $\bigcup\limits_{\nu<k} M_\nu$ enthalten sind.

Wir setzen

$$M := \bigcup_{k=0}^{\infty} M_k.$$

Nach Konstruktion sind zwei verschiedene Würfel aus M disjunkt. Man überlegt sich leicht, dass die Vereinigung aller Würfel aus M gleich U ist: Denn sei $a \in U$ ein beliebiger Punkt. Da U offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$B(a,\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| < \varepsilon\} \subset U.$$

Der Durchmesser der Würfel aus $\mathfrak{W}_k$ ist $2^{-k}\sqrt{n}$, also gibt es für genügend großes k einen Würfel $W \in \mathfrak{W}_k$ mit $a \in W \subset B(a,\varepsilon) \subset U$. Nun ist entweder $W \in M_k$, oder es gibt einen Würfel $W' \in M_{k'}$, $k' < k$, mit $a \in W \subset W' \subset U$. Daraus folgt

$$\bigcup_{W\in M} W = U, \qquad \text{q.e.d.}$$

(1.9) *Produkte von σ-Algebren.* Seien $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega_1)$ und $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}(\Omega_2)$ zwei σ-Algebren auf Ω_1 bzw. Ω_2. Dann ist die in (1.4) konstruierte Mengenalgebra $\mathfrak{A} \boxtimes \mathfrak{B}$ auf $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$ nicht notwendig eine σ-Algebra. Als Produkt der σ-Algebren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bezeichnet man die von $\mathfrak{A} \boxtimes \mathfrak{B}$ erzeugte σ-Algebra

$$\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} := \langle \mathfrak{A} \boxtimes \mathfrak{B} \rangle^\sigma.$$

$\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ ist die kleinste σ-Algebra auf $\Omega_1 \times \Omega_2$, die alle Produktmengen $A \times B$ mit $A \in \mathfrak{A}$ und $B \in \mathfrak{B}$ enthält. Offenbar gilt

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{k+m}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m).$$

Wir führen jetzt noch einen weiteren technischen Begriff ein, der für manche Beweise in der Maßtheorie nützlich ist.

Definition (Monotone Klasse)**.** Eine nichtleere Teilmenge $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt *monotone Klasse*, wenn $\mathfrak{M}$ abgeschlossen gegenüber aufsteigenden und absteigenden monotonen Limiten ist, d.h.

a) Sei $X_k \in \mathfrak{M}$, $k \geqslant 1$, mit $X_k \uparrow X$. Dann folgt $X \in \mathfrak{M}$.

b) Sei $Y_k \in \mathfrak{M}$, $k \geqslant 1$, mit $Y_k \downarrow Y$. Dann folgt $Y \in \mathfrak{M}$.

Jede σ-Algebra eine monotone Klasse. Eine monotone Klasse, die gleichzeitig eine Mengenalgebra ist, ist eine σ-Algebra. Es gibt aber auch monotone Klassen, die keine σ-Algebren sind. Sei beispielsweise $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{R}_+)$ die Menge aller Intervalle

$$[0,a[\text{ mit } 0 \leqslant a \leqslant \infty \quad \text{und} \quad [0,a] \text{ mit } 0 \leqslant a < \infty.$$

Dann ist $\mathfrak{M}$ eine monotone Klasse, aber kein Mengenring.

Ist $\mathfrak{M}_i \subset \mathfrak{P}(\Omega)$, $i \in I$, irgend eine Familie von monotonen Klassen, so ist auch der Durchschnitt $\bigcap_{i\in I} \mathfrak{M}_i$ wieder eine monotone Klasse. Deshalb gibt es zu jeder nichtleeren Menge $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ eine kleinste monotone Klasse $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{E}$. Dieses $\mathfrak{M}$ heißt dann die von $\mathfrak{E}$ *erzeugte monotone Klasse*.

Satz 5. *Sei $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Mengenring und $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ die von $\mathfrak{A}$ erzeugte monotone Klasse. Dann ist $\mathfrak{M}$ selbst ein Mengenring.*

Beweis. Wir definieren für $X \in \mathfrak{P}(\Omega)$ die Menge

$$\kappa(\mathfrak{M}, X) := \{Y \in \mathfrak{P}(\Omega) : X \smallsetminus Y \in \mathfrak{M},\ Y \smallsetminus X \in \mathfrak{M},\ X \cup Y \in \mathfrak{M}\}.$$

Da die Definition von $\kappa(\mathfrak{M}, X)$ symmetrisch in X, Y ist, gilt $Y \in \kappa(\mathfrak{M}, X)$ genau dann, wenn $X \in \kappa(\mathfrak{M}, Y)$.

Offenbar ist $\mathfrak{M}$ ein Mengenring genau dann, wenn

$$(*) \quad \mathfrak{M} \subset \kappa(\mathfrak{M}, X) \quad \text{für alle } X \in \mathfrak{M}.$$

Um $(*)$ zu verifizieren, stellen wir zunächst fest, dass $\kappa(\mathfrak{M}, X)$ eine monotone Klasse ist, denn aus $Y_k \uparrow Y$ folgt

$$(X \smallsetminus Y_k) \downarrow (X \smallsetminus Y), \quad (Y_k \smallsetminus X) \uparrow (Y \smallsetminus X), \quad (X \cup Y_k) \uparrow (X \cup Y)$$

und entsprechendes gilt für absteigende monotone Limiten $Y_k \downarrow Y$.

Sei nun speziell $A \in \mathfrak{A}$. Da $\mathfrak{A}$ ein Mengenring ist, folgt

$$\mathfrak{A} \subset \kappa(\mathfrak{M}, A),$$

und da $\mathfrak{M}$ die kleinste monotone Klasse ist, die $\mathfrak{A}$ umfasst, sogar

$$\mathfrak{M} \subset \kappa(\mathfrak{M}, A).$$

Daher gilt für alle $X \in \mathfrak{M}$

$$X \in \kappa(\mathfrak{M}, A), \quad \text{also} \quad A \in \kappa(\mathfrak{M}, X).$$

Da $A \in \mathfrak{A}$ beliebig war, folgt

$$\mathfrak{A} \subset \kappa(\mathfrak{M}, X), \quad \text{also auch} \quad \mathfrak{M} \subset \kappa(\mathfrak{M}, X).$$

Daher ist die Bedingung $(*)$ erfüllt, also $\mathfrak{M}$ ein Mengenring, q.e.d.

Corollar. *Sei $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ eine Mengenalgebra und $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ eine monotone Klasse mit $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}$. Dann ist auch die von $\mathfrak{A}$ erzeugte σ-Algebra in $\mathfrak{M}$ enthalten: $\langle\mathfrak{A}\rangle^\sigma \subset \mathfrak{M}$.*

AUFGABEN

1.1. Sei Ω eine nicht-leere Menge und $R := \mathbb{F}_2^\Omega$ die Menge aller Abbildungen

$$f : \Omega \to \mathbb{F}_2$$

von Ω in den Körper $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$. Man zeige:

a) R ist mit den Verknüpfungen

$$(f \oplus g)(x) := f(x) \oplus g(x) \quad \text{(Addition in } \mathbb{F}_2)$$
$$(fg)(x) := f(x)g(x)$$

ein kommutativer Ring mit Einselement.

b) Die Abbildung

$$\mathfrak{P}(\Omega) \to R, \quad A \mapsto \chi_A,$$

die einer Teilmenge $A \subset \Omega$ ihre charakteristische Funktion

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \in \Omega \setminus A, \end{cases}$$

zuordnet, ist bijektiv und es gilt

$$\chi_{A \triangle B} = \chi_A \oplus \chi_B, \qquad \chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$$

für alle $A, B \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Daher wird $\mathfrak{P}(\Omega)$ ein zu R isomorpher Ring, wenn man $\triangle$ als Addition und $\cap$ als Multiplikation einführt.

c) Eine Teilmenge $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ ist genau dann ein Mengenring, wenn $\mathfrak{A}$ ein Unterring von $\mathfrak{P}(\Omega)$ bzgl. der oben eingeführten Ringstruktur ist.

1.2. Sei Ω eine nicht-leere Menge. Dann ist für endlich viele Teilmengen $A_1, \dots, A_m \subset \Omega$ die Menge

$$S := A_1 \triangle A_2 \triangle \dots \triangle A_m$$

wegen des Assoziativgesetzes (Satz 1 (3)) unabhängig von der speziellen Klammerung eindeutig definiert. Man zeige:

Ein Punkt $x \in \Omega$ gehört genau zu S, wenn x in einer ungeraden Anzahl der A_k liegt, d.h. wenn die Anzahl der Indizes $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ mit $x \in A_k$ ungerade ist.

1.3. Sei Ω ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $X \subset \Omega$ heißt G_δ-*Menge*, wenn sie Durchschnitt einer abzählbaren Familie von offenen Teilmengen $U_k \subset \Omega$, $k \geqslant 1$, ist. Eine Teilmenge $Y \subset \Omega$ heißt F_σ-*Menge*, wenn sie Vereinigung abzählbaren Familie von abgeschlossenen Teilmengen $A_k \subset \Omega$, $k \geqslant 1$, ist. Man zeige:

a) Jede G_δ-Menge und jede F_σ-Menge ist eine Borelsche Teilmenge von Ω.

b) Im Fall $\Omega = \mathbb{R}^n$ ist jede endliche Quadersumme $S \in \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)$ sowohl eine G_δ-Menge als auch eine F_σ-Menge.

§ 2 Inhalte, Prämaße, Maße

Ein Inhalt ist eine nicht-negative numerische Funktion auf einem Mengenring mit der Eigenschaft, dass der Inhalt einer Vereinigung zweier punktfremder Mengen gleich der Summe der Inhalte der einzelnen Mengen ist. Wichtig für die Integrations-Theorie ist eine Verschärfung dieser Eigenschaft, die σ-Additivität. Ein Inhalt heißt σ-additiv, wenn der Inhalt einer abzählbaren Vereinigung punktfremder Mengen gleich der Summe der Inhalte der einzelnen Mengen ist. Der elementar-geometrische Inhalt auf dem Mengenring der Quadersummen im $\mathbb{R}^n$ hat diese Eigenschaft. Sie ist wesentlich dafür, dass man diesen Inhalt zu einem Maß auf der Borel-Algebra des $\mathbb{R}^n$ fortsetzen kann, was im nächsten Paragraphen durchgeführt wird. Ein Maß ist dabei ein σ-additiver Inhalt, der auf einer σ-Algebra definiert ist.

Die erweiterte Zahlengerade $\overline{\mathbb{R}}$. In der Maß- und Integrationstheorie ist es oft nützlich, auch Funktionen zu betrachten, die die Werte $+\infty$ oder $-\infty$ annehmen können. Wir benutzen folgende Bezeichnungen:

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = [-\infty, \infty],\\
&\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} = [0, \infty].
\end{aligned}$$

Die Ordnung von $\mathbb{R}$ wird auf $\overline{\mathbb{R}}$ forgesetzt durch

$$-\infty < a < +\infty \qquad \text{für alle } a \in \mathbb{R}.$$

Außerdem führt man folgende Konventionen für Addition und Multiplikation mit den Symbolen $\pm\infty$ ein:

$$\begin{aligned}
a + (\pm\infty) &= \pm\infty + a = \pm\infty && \text{für alle } a \in \mathbb{R},\\
a \cdot (\pm\infty) &= (\pm\infty) \cdot a = \pm\infty && \text{für alle } a \text{ mit } 0 < a \leqslant \infty,\\
a \cdot (\pm\infty) &= (\pm\infty) \cdot a = \mp\infty && \text{für alle } a \text{ mit } -\infty \leqslant a < 0,\\
0 \cdot (\pm\infty) &= (\pm\infty) \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Ausdrücklich *nicht* definiert ist $\infty + (-\infty)$ oder $-\infty + \infty$.

Diese Konventionen sind so gewählt, dass folgendes gilt: Sei (c_k) eine Folge reeller Zahlen, die uneigentlich gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$) konvergiert. Dann gilt für alle $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
a + \lim_{k\to\infty} c_k &= \lim_{k\to\infty} (a + c_k),\\
a \cdot \lim_{k\to\infty} c_k &= \lim_{k\to\infty} (a \cdot c_k).
\end{aligned}$$

Auf $\overline{\mathbb{R}}_+$ sind Addition und Multiplikation stets definiert; diese Operationen genügen dem Assoziativ-Gesetz. Jedoch gilt für Verknüpfungen, in denen das Symbol $\pm\infty$ vorkommt, nicht die Kürzungsregel, da z.B. $1 + \infty = 2 + \infty$ und $1 \cdot \infty = 2 \cdot \infty$.

O. Forster, *Analysis 3*, Aufbaukurs Mathematik,
DOI 10.1007/978-3-8348-2374-8_2, © Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden 2012

Definition. Sei $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Mengenring. Unter einem *Inhalt* auf $\mathfrak{R}$ versteht man eine Funktion

$$\mu : \mathfrak{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, falls $A, B \in \mathfrak{R}$ disjunkte Mengen sind.

Bemerkungen.

1) Ist μ reellwertig, d.h. nimmt μ den Wert ∞ nicht an, folgt i) aus ii), denn nach ii) ist $\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset)$. Falls $\mu(\emptyset) \in \mathbb{R}$, ist dann notwendig $\mu(\emptyset) = 0$.

2) Ein Inhalt ist immer *monoton*, d.h.

$$A \subset B \quad \Longrightarrow \quad \mu(A) \leqslant \mu(B),$$

denn $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ und $\mu(B \setminus A) \geqslant 0$.

3) Seien $A, B \in \mathfrak{R}$ nicht notwendig disjunkte Mengen. Da

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A) \quad \text{und} \quad B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

jeweils punktfremde Zerlegungen sind, gilt

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \quad \text{und} \quad \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A).$$

Falls $\mu(A \cap B) < \infty$, folgt daraus

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

4) Durch vollständige Induktion zeigt man: Ist $\mu : \mathfrak{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein Inhalt und sind

$$A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathfrak{R}$$

paarweise punktfremd, so gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^m A_i\Big) = \sum_{i=1}^m \mu(A_i).$$

Dies gilt aber nicht notwendig für abzählbar unendliche Familien disjunkter Mengen $A_i \in \mathfrak{R}$. Dies führt zum Begriff der σ-Additivität:

Definition. Ein Inhalt $\mu : \mathfrak{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ auf einem Mengenring $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt σ-*additiv*, falls für jede Folge von paarweise disjunkten Mengen $A_k \in \mathfrak{R}$, $k \geqslant 1$, deren Vereinigung $A := \bigcup_{k=1}^\infty A_k$ ebenfalls in $\mathfrak{R}$ liegt, gilt

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k).$$

Ein σ-additiver Inhalt heißt *Prämaß*. Unter einem *Maß* versteht man einen σ-additiven Inhalt, der auf einer σ-Algebra definiert ist.

Der Inhalt μ heißt *endlich*, falls $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathfrak{R}$. Schließlich heißt μ *σ-endlich*, falls es eine Folge von Mengen $\Omega_m \in \mathfrak{R}$ gibt mit

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m = \Omega \quad \text{und} \quad \mu(\Omega_m) < \infty \quad \text{für alle } m \geqslant 1.$$

Satz 1. *Sei $\mu : \mathfrak{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein Inhalt auf dem Mengenring $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$. Man betrachte folgende Aussagen über μ:*

a) *μ ist σ-additiv.*

b) *μ ist* σ-subadditiv, *d.h. für jede Folge $A_k \in \mathfrak{R}$, $k \geqslant 1$ mit $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k =: A \in \mathfrak{R}$ gilt*

$$\mu(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

c) *μ ist* stetig von unten, *d.h. für jede aufsteigende Folge $A_k \in \mathfrak{R}$, $k \geqslant 1$, mit $A_k \uparrow A \in \mathfrak{R}$ gilt*

$$\mu(A_k) \uparrow \mu(A).$$

d) *μ ist* stetig von oben, *d.h. für jede absteigende Folge $B_k \in \mathfrak{R}$, $k \geqslant 1$, mit $B_k \downarrow B \in \mathfrak{R}$ und $\mu(B_1) < \infty$ gilt*

$$\mu(B_k) \downarrow \mu(B).$$

Dann gelten die Implikationen

$$a) \Longleftrightarrow b) \Longleftrightarrow c) \Longrightarrow d)$$

Ist der Inhalt μ endlich, so sind sogar alle vier Aussagen a) bis d) äquivalent.

Dabei bedeutet die Schreibweise $\mu(A_k) \uparrow \mu(A)$, dass $\mu(A)$ der Limes für $k \to \infty$ der monoton wachsenden Folge $\mu(A_k)$ ist; analog ist $\mu(B_k) \downarrow \mu(B)$ zu verstehen.

Beweis. Wir beweisen zunächst die Äquivalenz von a), b), c) nach dem Schema

$$\text{b)} \Rightarrow \text{a)} \Rightarrow \text{c)} \Rightarrow \text{b)}$$

b) ⇒ a). Sei $A_k \in \mathfrak{R}$, $k \geqslant 1$, eine Folge von paarweise disjunkten Mengen mit $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R}$. Da μ endlich additiv und monoton ist, gilt für jedes $m \geqslant 1$

$$\sum_{k=1}^{m} \mu(A_k) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\Big) \leqslant \mu(A),$$

also durch Grenzübergang $m \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leqslant \mu(A).$$

Wegen b) gilt hier auch die umgekehrte Ungleichung, also die Gleichheit. Damit ist a) bewiesen.

a) $\Rightarrow$ c). Sei $A_k \in \mathfrak{R}$, $k \geqslant 1$ eine Folge von Mengen mit $A_k \uparrow A \in \mathfrak{R}$. Setzt man $A'_1 := A_1$ und $A'_k := A_k \setminus A_{k-1}$ für $k \geqslant 2$, so sind die A'_k paarweise disjunkt mit $\bigcup_{k=1}^m A'_k = A_m$ für alle $m \geqslant 1$ und $\bigcup_{k=1}^\infty A'_k = A$. Da μ endlich additiv ist, gilt

$$\sum_{k=1}^m \mu(A'_k) = \mu(A_m).$$

Wegen a) ist

$$\mu(A) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^m \mu(A'_k) = \lim_{m\to\infty} \mu(A_m),$$

also ist c) bewiesen.

c) $\Rightarrow$ b). Sei $A_k \in \mathfrak{R}$, $k \geqslant 1$, eine Folge von Mengen mit $A := \bigcup_{k=1}^\infty A_k \in \mathfrak{R}$. Wir definieren

$$\widetilde{A}_m := \bigcup_{k=1}^m A_k.$$

Da $\widetilde{A}_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)$, gilt $\mu(\widetilde{A}_2) \leqslant \mu(A_1) + \mu(A_2)$, und durch Induktion nach m zeigt man, dass

$$\mu(\widetilde{A}_m) \leqslant \sum_{k=1}^m \mu(A_k) \qquad \text{für alle } m \geqslant 1.$$

Da $\widetilde{A}_m \uparrow A$, folgt aus der Voraussetzung c), dass $\mu(\widetilde{A}_m) \uparrow \mu(A)$, also

$$\mu(A) \leqslant \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k),$$

d.h. die Eigenschaft b).

Damit ist die Äquivalenz von a), b), c) gezeigt. Nun beweisen wir die Implikationen c) $\Rightarrow$ d), und unter der Voraussetzung der Endlichkeit von μ, auch d) $\Rightarrow$ c)

c) $\Rightarrow$ d). Sei $B_k \in \mathfrak{R}$, $k \geqslant 1$, eine Folge mit $\mu(B_1) < \infty$ und $B_k \downarrow B \in \mathfrak{R}$. Wir definieren

$$A_k := B_1 \setminus B_k \in \mathfrak{R}.$$

Für die Folge A_k gilt $A_k \uparrow B_1 \setminus B$. Aus c) folgt

$$\mu(A_k) \uparrow \mu(B_1 \setminus B) = \mu(B_1) - \mu(B).$$

Da aber $\mu(A_k) = \mu(B_1) - \mu(B_k)$, folgt daraus $\mu(B_k) \downarrow \mu(B)$.

d) $\Rightarrow$ c). Es werde vorausgesetzt, dass $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathfrak{R}$. Sei $A_k \in \mathfrak{R}$, $k \geqslant 1$, eine aufsteigende Folge mit $A_k \uparrow A \in \mathfrak{R}$. Die Mengen $B_k := A \setminus A_k$ bilden dann eine absteigende Folge mit $B_k \downarrow \emptyset$. Nach d) gilt $\mu(B_k) \downarrow 0$. Da aber

$$\mu(B_k) = \mu(A) - \mu(A_k),$$

folgt daraus $\mu(A_k) \uparrow \mu(A)$, q.e.d.

Beispiele von Inhalten und Maßen

(2.1) Sei Ω eine beliebige Menge und $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ der Mengenring aller endlichen oder abzählbar unendlichen Teilmengen von Ω. Definiert man $\mu(A)$ als Anzahl der Elemente von A, so ist μ ein σ-additiver Inhalt auf $\mathfrak{R}$. Genau dann ist μ σ-endlich, wenn Ω höchstens abzählbar unendlich ist.

(2.2) Sei Ω eine beliebige nichtleere Menge, $a \in \Omega$ ein Punkt und $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra. Definiert man $\varepsilon_a : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}_+$ durch

$$\varepsilon_a(A) := \begin{cases} 1, & \text{falls } a \in A, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

so erhält man, wie man leicht nachprüft, ein Maß auf $\mathfrak{A}$. Man nennt ε_a die Einheitsmasse im Punkt a, oder auch *Diracmaß* in a.

(2.3) Sei $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra und seien $\mu_1, \ldots, \mu_k : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ Maße und $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}_+$ nichtnegative Konstanten. Dann ist auch

$$\mu := \sum_{i=1}^{k} c_i \mu_i : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+, \qquad A \mapsto \mu(A) := \sum_{i=1}^{k} c_i \mu_i(A),$$

ein Maß. Dasselbe gilt auch für abzählbare Linear-Kombinationen von Maßen, vgl. Aufgabe 2.2.

(2.4) Wir geben jetzt noch ein Beispiel für einen endlichen Inhalt, der nicht σ-additiv ist. Sei Ω eine abzählbar unendliche Menge und $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ die Mengenalgebra aller $A \subset \Omega$, so dass entweder A oder das Komplement A^c endlich ist, vgl. Beispiel (1.2). Sei $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}_+$ definiert durch

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ endlich,} \\ 1, & \text{falls } A^c \text{ endlich.} \end{cases}$$

Dann ist μ, wie man leicht nachprüft, ein Inhalt, der aber nicht σ-additiv ist, denn Ω ist die abzählbare disjunkte Vereinigung aller einpunktigen Mengen, die jeweils den Inhalt 0 haben, während Ω den Inhalt 1 hat.

(2.5) Das Lebesguesche Prämaß

Wir hatten in (1.5) den Mengenring $\mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)$ der endlichen Quadersummen im $\mathbb{R}^n$ definiert. Wir definieren jetzt einen Inhalt

$$\lambda^n : \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+$$

mit Hilfe des elementar-geometrischen Inhalts von Quadern. Für einen Quader

$$Q := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_\nu \leqslant x_\nu < b_\nu\}, \quad a_\nu, b_\nu \in \mathbb{R},\, a_\nu < b_\nu,$$

sei

$$\lambda^n(Q) := \mathrm{Vol}_n(Q) := \prod_{\nu=1}^{n} (b_\nu - a_\nu).$$

Ein beliebiges Element $A \in \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)$ lässt sich schreiben als endliche disjunkte Vereinigung von halboffenen Quadern Q_i,

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} Q_i.$$

Man setzt dann

$$\lambda^n(A) := \sum_{i=1}^{m} \lambda^n(Q_i) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Vol}_n(Q_i).$$

Dabei stellt sich aber ein Problem: Eine Menge $A \in \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)$ lässt sich auf verschiedene Weisen als disjunkte Vereinigung von Quadern darstellen, und es muss die Wohldefiniertheit gezeigt werden, d.h. dass $\lambda^n(A)$ unabhängig von der Zerlegung von A in disjunkte Quader ist. Wir beginnen mit folgendem

Hilfssatz 1. *Sei Q ein halboffener Quader im $\mathbb{R}^n$, der die disjunkte Vereinigung von endlich vielen halboffenen Quadern $Q_1, \ldots, Q_m$ ist: $Q = \bigcup_{i=1}^{m} Q_i$. Dann gilt*

$$\mathrm{Vol}_n(Q) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Vol}_n(Q_i).$$

Die Aussage des Hilfssatzes ist zwar anschaulich klar (sofern man im n-dimensionalen Raum überhaupt von Anschauung sprechen kann), bedarf aber dennoch eines Beweises.

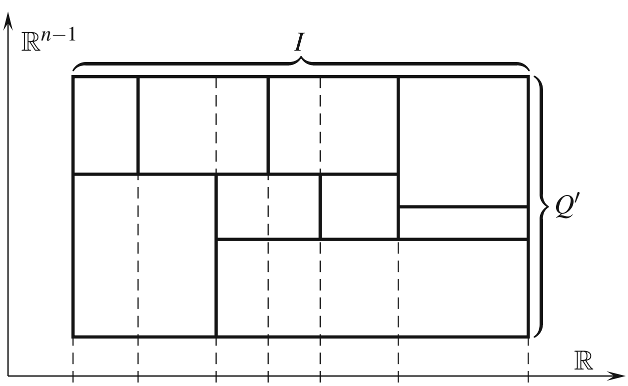


Bild 2.1

Beweis durch Induktion nach n.

Induktionsanfang $n = 1$. In diesem Fall sind $Q = [a,b[$ und alle $Q_i = [a_i,b_i[$ Intervalle. Nach evtl. Umnumerierung dürfen wir annehmen, dass $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$. Da das Intervall Q die punktfremde Vereinigung der Intervalle Q_i ist, gilt dann

$$a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = a_3 < \ldots < b_{m-1} = a_m < b_m = b,$$

also $\mathrm{Vol}_1(Q) = b - a = \sum_{i=1}^m (b_i - a_i) = \sum_{i=1}^m \mathrm{Vol}_1(Q_i)$.

Induktionsschritt $n-1 \to n$, (siehe auch Bild 2.1). Die Quader Q und Q_i lassen sich zerlegen als

$$Q = I \times Q', \quad Q_i = I_i \times Q'_i$$

mit halboffenen Intervallen I, I_i und $(n-1)$-dimensionalen halboffenen Quadern Q', Q'_i. Nach Definition gilt

$$\mathrm{Vol}_n(Q) = \mathrm{Vol}_1(I)\mathrm{Vol}_{n-1}(Q'), \qquad \mathrm{Vol}_n(Q_i) = \mathrm{Vol}_1(I_i)\mathrm{Vol}_{n-1}(Q'_i).$$

Die endlich vielen Intervalle I_i haben als Vereinigung das Intervall I, sind aber nicht notwendig punktfremd. Indem man die Anfangs- und Endpunkte aller Intervalle I_i der Größe nach ordnet, bekommt man endlich viele disjunkte halboffene Intervalle J_k, $1 \leqslant k \leqslant s$, deren Vereinigung gleich I ist, so dass jedes Intervall I_i die (disjunkte) Vereinigung einiger der Intervalle J_k ist. Sei etwa

$$I_i = J_{k(i,1)} \cup \ldots \cup J_{k(i,r_i)}.$$

Dann ist Q_i die disjunkte Vereinigung der $J_{k(i,j)} \times Q'_i$. Da $\mathrm{Vol}_1(I_i) = \sum_j \mathrm{Vol}_1(J_{k(i,j)})$, gilt

$$\mathrm{Vol}_n(Q_i) = \sum_{j=1}^{r_i} \mathrm{Vol}_n(J_{k(i,j)} \times Q'_i)$$

Die Behauptung des Hilfssatzes ist deshalb gleichbedeutend mit

$$(*) \qquad \mathrm{Vol}_n(Q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_i} \mathrm{Vol}_n(J_{k(i,j)} \times Q'_i)$$

Wir ordnen die Quader $J_{k(i,j)} \times Q'_i$ nach gleichem ersten Faktor J_k. Sei $\iota(k)$ die Menge aller Indizes i, so dass ein $j \in \{1, \ldots, r_i\}$ existiert mit $k = k(i,j)$. Dann ist

$$\bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{r_i} J_{k(i,j)} \times Q'_i = \bigcup_{k=1}^{s} \bigcup_{i \in \iota(k)} J_k \times Q'_i$$

und es gilt $\bigcup_{i \in \iota(k)} Q'_i = Q'$ für alle k. Nach Induktions-Voraussetzung ist

$$\sum_{i \in \iota(k)} \mathrm{Vol}_{n-1}(Q'_i) = \mathrm{Vol}_{n-1}(Q').$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_i} \mathrm{Vol}_n(J_{k(i,j)} \times Q'_i) &= \sum_{k=1}^{s} \sum_{i \in \iota(k)} \mathrm{Vol}_n(J_k \times Q'_i) \\
&= \sum_{k=1}^{s} \mathrm{Vol}_1(J_k) \sum_{i \in \iota(k)} \mathrm{Vol}_{n-1}(Q'_i) = \sum_{k=1}^{s} \mathrm{Vol}_1(J_k)\mathrm{Vol}_{n-1}(Q') \\
&= \mathrm{Vol}_1(I)\mathrm{Vol}_{n-1}(Q') = \mathrm{Vol}_n(Q).
\end{aligned}$$

Damit ist $(*)$ und gleichzeitig der Hilfssatz bewiesen.

Nun zum *Beweis der Wohldefiniertheit* von $\lambda^n : \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+$.

Sei $A \in \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)$ und seien

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} Q_i = \bigcup_{j=1}^{s} \tilde{Q}_j$$

zwei Darstellungen von A als disjunkte Vereinigungen von halboffenen Quadern Q_i bzw. $\tilde{Q}_j$. Es muss gezeigt werden, dass

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Vol}_n(Q_i) = \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Vol}_n(\tilde{Q}_j)$$

Nach Hilfssatz 1 gilt

$$\mathrm{Vol}_n(Q_i) = \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Vol}_n(Q_i \cap \tilde{Q}_j) \quad \text{und} \quad \mathrm{Vol}_n(\tilde{Q}_j) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Vol}_n(\tilde{Q}_j \cap Q_i)$$

Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Vol}_n(Q_i) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Vol}_n(Q_i \cap \tilde{Q}_j) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Vol}_n(Q_i \cap \tilde{Q}_j) = \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Vol}_n(\tilde{Q}_j),$$

was zu beweisen war.

Nachdem nun die Wohldefiniertheit von λ^n gezeigt ist, folgt die Additivität direkt aus der Definition, d.h. $\lambda^n : \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+$ ist ein Inhalt.

Hilfssatz 2. *Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein halboffener Quader. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ halboffene Quader Q' und Q'' mit*

$$\overline{Q'} \subset Q \subset \mathring{Q}'' \quad \textit{und} \quad \mathrm{Vol}_n(Q') \geqslant (1-\varepsilon)\mathrm{Vol}_n(Q),\ \mathrm{Vol}_n(Q'') \leqslant (1+\varepsilon)\mathrm{Vol}_n(Q).$$

Dabei wird für eine Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ mit $\overline{B}$ die abgeschlossene Hülle und mit $\mathring{B}$ das Innere von B bezeichnet (vgl. An. 2, §1).

Beweis. Ist

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : a_\nu \leqslant x_\nu < b_\nu\}, \quad a_\nu, b_\nu \in \mathbb{R}, a_\nu < b_\nu,$$

so wähle man

$$Q' := \{x \in \mathbb{R}^n : a_\nu \leqslant x_\nu < b_\nu - \delta\}, \quad Q'' := \{x \in \mathbb{R}^n : a_\nu - \delta \leqslant x_\nu < b_\nu\}$$

mit genügend kleinem $\delta > 0$.

Satz 2. *Der oben definierte Inhalt $\lambda^n : \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+$ ist σ-additiv, d.h. ein Prämaß. Außerdem ist λ^n σ-endlich.*

Man nennt $\lambda^n : \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+$ das *Lebesguesche Prämaß.*

Falls klar ist, in welcher Dimension n man arbeitet, lässt man auch den oberen Index n weg und schreibt kurz λ statt λ^n.

Beweis.

1) Sei $A \in \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)$ und $A_k \in \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)$, $k \geqslant 1$, eine Folge von Quadersummen mit

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Nach Hilfssatz 2 existieren zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ Elemente $A', A''_k \in \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\overline{A'} \subset A, \quad A_k \subset \mathring{A}''_k \qquad \text{und}$$

$$\lambda^n(A') \geqslant (1-\varepsilon)\lambda^n(A), \quad \lambda^n(A''_k) \leqslant (1+\varepsilon)\lambda^n(A_k).$$

Da $\overline{A'}$ kompakt ist und

$$\overline{A'} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{A}''_k,$$

gibt es nach dem Heine-Borelschen Überdeckungs-Satz endlich viele $\mathring{A}''_k$, $k = 1, \ldots, m$, die $\overline{A'}$ überdecken, also insbesondere

$$A' \subset \bigcup_{k=1}^{m} A''_k,$$

woraus folgt

$$(1-\varepsilon)\lambda^n(A) \leqslant \lambda^n(A') \leqslant \sum_{k=1}^{m} \lambda^n(A''_k) \leqslant (1+\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(A_k).$$

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt

$$\lambda^n(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(A_k).$$

Dies zeigt, dass der Inhalt λ^n σ-subadditiv ist, also nach Satz 1 sogar σ-additiv.

2) Zum Beweis der σ-*Endlichkeit* von λ^n genügt es zu bemerken, dass $\mathbb{R}^n$ die Vereinigung der Folge der halboffenen Würfel

$$\Omega_m := \{x \in \mathbb{R}^n : -m \leqslant x_\nu < m\}, \quad m \geqslant 1,$$

ist.

Damit ist Satz 2 bewiesen.

Im nächsten Paragraphen werden wir dann das Lebesguesche Prämaß zu einem Maß auf der σ-Algebra aller Borelschen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ fortsetzen.

AUFGABEN

2.1. Sei $\mu : \mathfrak{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt auf dem Mengenring $\mathfrak{R} \subset \Omega$. Man zeige:

Seien $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathfrak{R}$ mit $\mu(A_i) < \infty$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) \;=\; & \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i) - \sum_{i<j} \mu(A_i \cap A_j) \\ & + \sum_{i<j<k} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) \\ & - \sum_{i_1<i_2<i_3<i_4} \mu(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}) \\ & + - \;\ldots \\ & + (-1)^{m-1} \mu(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m).\end{aligned}$$

2.2. Sei $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Mengenring und sei $\mu_k : \mathfrak{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $k \geqslant 1$, eine Folge von Inhalten. Weiter sei $c_k \in \mathbb{R}_+$, $k \geqslant 1$, eine Folge nicht-negativer reeller Zahlen. Man zeige:

$$\mu := \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mu_k$$

ist ein Inhalt auf $\mathfrak{R}$. Sind alle μ_k σ-additiv, so auch μ.

2.3. Sei $\Omega := \{1, 2, 3, \ldots\}$ die Menge aller positiven ganzen Zahlen und $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ die Mengenalgebra aller $A \subset \Omega$, so dass entweder A oder das Komplement A^c endlich ist. Sei $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}_+$ definiert durch

$$\mu(A) := \sum_{n \in A} \frac{1}{n^2}, \quad \text{falls } A \text{ endlich,} \quad \text{und}$$

$$\mu(A) := 2 - \sum_{n \notin A} \frac{1}{n^2}, \quad \text{falls } A^c \text{ endlich.}$$

Man zeige:

a) μ ist ein Inhalt.

b) μ ist nicht σ-additiv.

2.4. Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion (d.h. $x \leqslant y \Rightarrow F(x) \leqslant F(y)$). Man zeige:

a) Es gibt genau einen Inhalt $\mu_F : \mathfrak{Q}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit

$$\mu_F(I) := F(b) - F(a) \quad \text{für ein Intervall } I := [a, b[\, \in \mathfrak{Q}(\mathbb{R}).$$

b) Der Inhalt μ_F ist genau dann σ-additiv, wenn F von links stetig ist, d.h.

$$\lim_{\xi \nearrow x} F(\xi) = F(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

§ 3 Fortsetzung eines Prämaßes zu einem Maß

Wir haben im vorigen Paragraphen das Lebesguesche Prämaß in Anlehnung an den elementargeometrischen Inhalt auf dem Mengenring der endlichen Quadersummen im $\mathbb{R}^n$ definiert. Wir zeigen jetzt, dass man dieses Prämaß eindeutig zu einem Maß auf die σ-Algebra aller Borelschen Mengen fortsetzen kann, so dass also insbesondere jeder kompakten Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ eine wohldefinierte Maßzahl (Volumen) zugeordnet werden kann. Dieser Fortsetzungsprozess funktioniert allgemeiner für beliebige σ-endliche Prämaße auf einem Mengenring eines abstrakten Raumes. Ein solches Prämaß kann eindeutig zu einem Maß auf der von dem Mengenring erzeugten σ-Algebra fortgesetzt werden.

In diesem Paragraphen gehen wir aus von einem Mengenring $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ auf einer nichtleeren Menge Ω und einem σ-endlichen Prämaß

$$\mu : \mathfrak{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

Unser Ziel ist, das Prämaß fortzusetzen zu einem Maß

$$\tilde{\mu} : \langle\mathfrak{A}\rangle^\sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

auf der von $\mathfrak{A}$ erzeugten σ-Algebra $\langle\mathfrak{A}\rangle^\sigma$. Das Standard-Beispiel, das dem Leser stets zur Veranschaulichung dienen kann, ist der Mengenring der endlichen Quadersummen im $\mathbb{R}^n$ mit dem Lebesgueschen Prämaß.

Erste Erweiterung auf $\mathfrak{A}^\uparrow$

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{A}^\uparrow$ die Menge aller $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$, die sich als monotoner Limes

$$A_k \uparrow A$$

einer aufsteigenden Folge von Mengen $A_k \in \mathfrak{A}$ darstellen lassen. Da für eine beliebige Folge $B_k \in \mathfrak{A}$, $k \geqslant 1$, gilt

$$\bigcup_{k=1}^{m} B_k \quad \Big\uparrow_{m=1}^{\infty} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k,$$

kann man $\mathfrak{A}^\uparrow$ auch definieren als die Menge aller $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$, die sich als Vereinigung einer abzählbaren Familie von Elementen aus $\mathfrak{A}$ darstellen lassen. Da wir das Prämaß $\mu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ als σ-endlich vorausgesetzt haben, ist auch $\Omega \in \mathfrak{A}^\uparrow$.

Natürlich gilt

$$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}^\uparrow \subset \langle\mathfrak{A}\rangle^\sigma$$

Falls sich das Prämaß μ überhaupt zu einem Maß $\tilde{\mu}$ auf $\langle\mathfrak{A}\rangle^\sigma$ fortsetzen lässt, muss insbesondere für $A \in \mathfrak{A}^\uparrow$ gelten

O. Forster, *Analysis 3*, Aufbaukurs Mathematik,
DOI 10.1007/978-3-8348-2374-8_3, © Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden 2012

$$(*) \qquad \tilde{\mu}(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k), \qquad \text{falls} \quad A_k \uparrow A, \quad A_k \in \mathfrak{A}.$$

Da die Folge $(\mu(A_k))_{k\geqslant 1}$ monoton wachsend ist, existiert der Limes stets eigentlich oder uneigentlich als Element von $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Wir verwenden deshalb $(*)$ als Definition von $\tilde{\mu}(A)$ für $A \in \mathfrak{A}^\uparrow$. Dazu muss noch gezeigt werden, dass die Definition unabhängig von der Wahl der Folge $A_k \in \mathfrak{A}$ mit $A_k \uparrow A$ ist.

Beweis hierfür. Seien $A_k \uparrow A$ und $B_k \uparrow A$, $A_k, B_k \in \mathfrak{A}$, zwei monotone Folgen, die gegen $A \in \mathfrak{A}^\uparrow$ konvergieren. Für festes k gilt

$$B_j \cap A_k \uparrow_{j=1}^{\infty} A_k,$$

also wegen der σ-Additivität des Prämaßes μ

$$\lim_{j\to\infty} \mu(B_j \cap A_k) = \mu(A_k).$$

Da $\mu(B_j \cap A_k) \leqslant \mu(B_j)$, folgt $\lim\limits_{j\to\infty} \mu(B_j) \geqslant \mu(A_k)$, und weiter

$$\lim_{j\to\infty} \mu(B_j) \geqslant \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

Aus Symmetriegründen gilt auch die umgekehrte Ungleichung, also die Gleichheit. Daher ist $\tilde{\mu}(A)$ für $A \in \mathfrak{A}^\uparrow$ wohldefiniert.

Falls $A \in \mathfrak{A}$ gilt $\mu(A) = \tilde{\mu}(A)$, denn man hat $A_k \uparrow A$ mit $A_k = A$ für alle k. Dies bedeutet, dass $\tilde{\mu}$ eine Fortsetzung von μ auf $\mathfrak{A}^\uparrow$ ist. Wir können deshalb von nun an ohne Zweideutigkeit wieder $\mu(A)$ statt $\tilde{\mu}(A)$ für alle $A \in \mathfrak{A}^\uparrow$ schreiben.

Wir stellen jetzt einige Eigenschaften von $\mathfrak{A}^\uparrow$ und $\mu : \mathfrak{A}^\uparrow \to \overline{\mathbb{R}}_+$ zusammen.

Satz 1. *Das dem Mengenring $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ zugeordnete Mengensystem $\mathfrak{A}^\uparrow$ hat folgende Eigenschaften:*

a) *Der Durchschnitt endlich vieler Elemente von $\mathfrak{A}^\uparrow$ gehört wieder zu $\mathfrak{A}^\uparrow$.*

b) *Die Vereinigung abzählbar vieler Elemente von $\mathfrak{A}^\uparrow$ gehört wieder zu $\mathfrak{A}^\uparrow$.*

c) *Aus $A \in \mathfrak{A}^\uparrow$ und $B \in \mathfrak{A}$ folgt $A \setminus B \in \mathfrak{A}^\uparrow$.*

Bemerkung. Man beachte, dass $\mathfrak{A}^\uparrow$ im Allgemeinen kein Mengenring ist, denn aus $A, B \in \mathfrak{A}^\uparrow$ folgt nicht notwendig $A \setminus B \in \mathfrak{A}^\uparrow$.

Beweis. a) Seien $A, B \in \mathfrak{A}^\uparrow$ und $A_k \uparrow A$, $B_k \uparrow B$ mit aufsteigenden Folgen $A_k \in \mathfrak{A}$, $B_k \in \mathfrak{A}$, $k \geqslant 1$. Dann ist auch $A_k \cap B_k \in \mathfrak{A}$ und es gilt $A_k \cap B_k \uparrow A \cap B$. Daraus folgt $A \cap B \in \mathfrak{A}^\uparrow$.

b) Dies folgt daraus, dass die Vereinigung einer abzählbaren Familie von abzählbaren Mengen wieder abzählbar ist, vgl. An. 1, §9, Satz 1.

c) Aus $A_k \uparrow A$, $A_k \in \mathfrak{A}$, folgt $A_k \setminus B \in \mathfrak{A}$ und $A_k \setminus B \uparrow A \setminus B$, also $A \setminus B \in \mathfrak{A}^\uparrow$.

Satz 2. *Für die Fortsetzung* $\mu : \mathfrak{A}^{\uparrow} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *des Prämaßes* $\mu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *gilt:*

a) (Monotonie) *Seien* $A, B \in \mathfrak{A}^{\uparrow}$ *mit* $A \subset B$. *Dann ist* $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.

b) (Additivität) *Sind* $A, B \in \mathfrak{A}^{\uparrow}$ *punktfremd, so folgt*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

c) (Stetigkeit von unten) *Ist* $A_k \in \mathfrak{A}^{\uparrow}$, $k \geqslant 1$, *eine Folge von Mengen mit* $A_k \uparrow A$, *so folgt*

$$\mu(A_k) \uparrow \mu(A)$$

d) (σ-Subadditivität) *Ist* $(A_k)_{k \geqslant 1}$ *eine beliebige Folge von Elementen aus* $\mathfrak{A}^{\uparrow}$, *so gilt*

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Beweis. a) Sei $A_i \uparrow A$ und $B_i \uparrow B$ mit $A_i, B_i \in \mathfrak{A}$. Da $A \subset B$, gilt dann auch $A_i \cup B_i \uparrow B$. Daraus folgt

$$\mu(A) = \lim_i \mu(A_i) \leqslant \lim_i \mu(A_i \cup B_i) = \mu(B).$$

b) Sind $A, B \in \mathfrak{A}^{\uparrow}$ punktfremd und $A_i \uparrow A$, $B_i \uparrow B$ mit $A_i, B_i \in \mathfrak{A}$, so sind auch A_i und B_i punktfremd, also

$$\mu(A_i \cup B_i) = \mu(A_i) + \mu(B_i).$$

Da $A_i \cup B_i \uparrow A \cup B$, folgt durch Grenzübergang $i \to \infty$ die Gleichung

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

c) Sei $A := \bigcup_k A_k$. Für jedes k gibt es eine aufsteigende Folge $(A_{ki})_{i \geqslant 1}$ von Elementen $A_{ki} \in \mathfrak{A}$ mit $A_{ki} \uparrow_{i=1}^{\infty} A_k$. Setzt man für $m \geqslant 1$

$$\tilde{A}_m := \bigcup_{k,i \leqslant m} A_{ik},$$

so gilt $\tilde{A}_m \in \mathfrak{A}$ und $\tilde{A}_m \uparrow A$, also $\mu(A) = \lim\limits_{m \to \infty} \mu(\tilde{A}_m)$. Sei M irgend eine reelle Zahl mit $M < \mu(A)$. Dann existiert ein $m \geqslant 1$ mit

$$M < \mu(\tilde{A}_m).$$

Wegen $\tilde{A}_m \subset \bigcup_{k=1}^{m} A_k \subset A$ folgt

$$M < \mu(\tilde{A}_m) \leqslant \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\Big) \leqslant \mu(A).$$

Da $M < \mu(A)$ beliebig war, ergibt sich

$$\lim_{m \to \infty} \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\Big) = \mu(A), \quad \text{q.e.d.}$$

d) Ähnlich wie in b) beweist man $\mu(A_1 \cup A_2) \leqslant \mu(A_1) + \mu(A_2)$, und durch vollständige Induktion

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{m} \mu(A_k)$$

für alle $m \geqslant 1$. Durch Limes-Bildung $m \to \infty$ erhält man wegen c) die Behauptung.

Äußeres Maß

Nachdem wir das Prämaß $\mu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ auf $\mathfrak{A}^\uparrow$ fortgesetzt haben, definieren wir jetzt damit ein sog. *äußeres Maß* μ^* für *alle* Teilmengen $X \subset \Omega$ durch

$$\mu^*(X) := \inf\Big\{\mu(A) : A \supset X,\, A \in \mathfrak{A}^\uparrow\Big\}$$

Da $\Omega \in \mathfrak{A}^\uparrow$, ist die Menge, über die das Infimum gebildet wird, nicht leer. Aus Satz 2 a) folgt: Für alle $A \in \mathfrak{A}^\uparrow$ (insbesondere alle $A \in \mathfrak{A}$) gilt

$$\mu^*(A) = \mu(A).$$

Satz 3. *Das dem Prämaß $\mu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ zugeordnete äußere Maß $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ hat folgende Eigenschaften:*

a) $\mu^*(\emptyset) = 0.$

b) (Monotonie) $X \subset Y \Rightarrow \mu^*(X) \leqslant \mu^*(Y).$

c) (σ-Subadditivität) *Ist $(X_i)_{i\in I}$ irgend eine endliche oder abzählbar unendliche Familie von Teilmengen $X_i \subset \Omega$, so gilt*

$$\mu^*\Big(\bigcup_{i\in I} X_i\Big) \leqslant \sum_{i\in I} \mu^*(X_i).$$

Beweis. Die Eigenschaften a) und b) sind trivial.

Zu c). Falls $\mu^*(X_i) = \infty$ für mindestens ein $i \in I$, ist die Behauptung trivial. Wir können also voraussetzen, dass $\mu^*(X_i) < \infty$ für alle $i \in I$.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt dann $\varepsilon_i > 0$ mit $\sum_{i\in I} \varepsilon_i \leqslant \varepsilon$. Nach Definition von μ^* gibt es Mengen $B_i \in \mathfrak{A}^\uparrow$ mit $X_i \subset B_i$ und

$$\mu^*(X_i) \leqslant \mu(B_i) \leqslant \mu^*(X_i) + \varepsilon_i.$$

Es ist dann $\bigcup X_i \subset \bigcup B_i$, also unter Benutzung von Satz 2 d)

$$\mu^*\Big(\bigcup_{i\in I} X_i\Big) \leqslant \mu\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) \leqslant \sum_{i\in I} \mu(B_i) \leqslant \sum_{i\in I} \mu^*(X_i) + \varepsilon.$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt die Behauptung.

(3.1) Das Lebesguesche äußere Maß. Als Beispiel betrachten wir das dem Lebesgueschen Prämaß $\lambda^n : \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+$ zugeordnete äußere Maß, das wir mit λ^* bezeichnen. Das Mengensystem $\mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)^\uparrow$ besteht aus allen abzählbaren Vereinigungen von halboffenen Quadern. Nach Definition gilt

$$\lambda^*(X) = \inf\{\lambda^n(A) : A \in \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)^\uparrow \text{ mit } A \supset X\}.$$

Aus § 1, Lemma 1 folgt, dass alle offenen Mengen zu $\mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)^\uparrow$ gehören. Wir wollen zeigen, dass für alle $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ sogar gilt

$$\lambda^*(X) = \inf\{\lambda^n(U) : U \text{ offen mit } U \supset X\}.$$

Zum Beweis bezeichnen wir vorübergehend mit $\lambda^*_{\text{off}}(X)$ die rechte Seite. Es gilt auf jeden Fall $\lambda^*(X) \leqslant \lambda^*_{\text{off}}(X)$, da bei $\lambda^*(X)$ das Infimum über eine größere Menge, nämlich über alle abzählbaren Quadersummen A mit $A \supset X$ genommen wird. Aus § 2, Hilfssatz 2 folgt aber, dass für jedes $\varepsilon > 0$ jede abzählbare Quadersumme A in einer offenen Menge U mit $\lambda^n(U) \leqslant (1+\varepsilon)\lambda^n(A)$ enthalten ist. Damit ergibt sich

$$\lambda^*(X) \leqslant \lambda^*_{\text{off}}(X) \leqslant (1+\varepsilon)\lambda^*(X).$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt die Gleichheit, q.e.d.

Definition. Man nennt allgemein eine Abbildung $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein *äußeres Maß*, wenn $\mu^*(\emptyset) = 0$ gilt und μ^* monoton und σ-subadditiv ist, d.h. wenn μ^* die Eigenschaften a) – c) aus Satz 3 hat. (Es wird nicht verlangt, dass μ^* aus einem Prämaß konstruiert wurde.)

Satz 4. *Sei $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein äußeres Maß.*

a) *Für beliebige Teilmengen $X, Y, Z \subset \Omega$ gilt*

$$\mu^*(X \vartriangle Z) \leqslant \mu^*(X \vartriangle Y) + \mu^*(Y \vartriangle Z).$$

b) *Seien $X, Y \subset \Omega$ Teilmengen mit $\mu^*(X) < \infty$ und $\mu^*(Y) < \infty$. Dann gilt*

$$|\mu^*(X) - \mu^*(Y)| \leqslant \mu^*(X \vartriangle Y)$$

Beweis. a) Wegen $Y \vartriangle Y = \emptyset$ ist

$$X \vartriangle Z = X \vartriangle Y \vartriangle Y \vartriangle Z \subset (X \vartriangle Y) \cup (Y \vartriangle Z).$$

Aus der Monotonie und Sub-Additivität von μ^* folgt nun die Behauptung.

b) Da $X \cup Y = (X \cap Y) \cup (X \vartriangle Y)$, gilt $\mu^*(X \cup Y) \leqslant \mu^*(X \cap Y) + \mu^*(X \vartriangle Y)$, also

$$0 \leqslant \mu^*(X \cup Y) - \mu^*(X \cap Y) \leqslant \mu^*(X \vartriangle Y).$$

Da $X \cap Y \subset X, Y \subset X \cup Y$, liegen $\mu^*(X), \mu^*(Y)$ beide im Intervall

$$[\mu^*(X \cap Y), \mu^*(X \cup Y)] \subset \mathbb{R}$$

der Länge $\leqslant \mu^*(X \triangle Y)$. Daraus folgt die Behauptung.

Pseudometrik auf $\mathfrak{P}(\Omega)$. Den Inhalt von Satz 4 kann man so interpretieren: Für $X, Y \in \mathfrak{P}(\Omega)$ definiere man einen „Abstand" $d = d_{\mu^*}$ durch

$$d(X,Y) := \mu^*(X \triangle Y).$$

Dann ist d eine Pseudometrik auf $\mathfrak{P}(\Omega)$, es gilt

i) $X = Y \Rightarrow d(X,Y) = 0$.

ii) (Symmetrie) $d(X,Y) = d(Y,X)$.

iii) (Dreiecks-Ungleichung) Für $X,Y,Z \in \mathfrak{P}(\Omega)$ hat man

$$d(X,Z) \leqslant d(X,Y) + d(Y,Z).$$

Dies sind fast die Axiome einer Metrik (vgl. An. 2, §2). Nur folgt hier aus $d(X,Y) = 0$ nicht notwendig $X = Y$, und d kann den Wert ∞ annehmen.

Sei $X \in \mathfrak{P}(\Omega)$ und $Y_k \in \mathfrak{P}(\Omega)$, $k = 1,2,3,\ldots$ eine Folge von Mengen. Wir schreiben

$$Y_k \underset{\mu^*}{\longrightarrow} X, \quad \text{falls} \quad \lim_{k\to\infty} d_{\mu^*}(Y_k, X) = 0.$$

Aus Teil b) des Satzes folgt dann, dass die Funktion μ^* stetig bzgl. dieses Konvergenzbegriffes ist, d.h.

$$Y_k \underset{\mu^*}{\longrightarrow} X \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \mu^*(Y_k) = \mu^*(X).$$

Diese Eigenschaft werden wir zur Fortsetzung des Prämaßes ausnutzen. Dazu führen wir den Begriff der $\mathfrak{A}$-approximierbaren Mengen ein.

Definition. Sei $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Mengenring, $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}_+$ ein Prämaß und

$$\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

das zugehörige äußere Maß. Eine Teilmenge $X \subset \Omega$ heißt $\mathfrak{A}$-*approximierbar* (bzgl. μ^*), falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $A \in \mathfrak{A}$ existiert mit

$$\mu^*(X \triangle A) < \varepsilon.$$

Mit den oben eingeführten Bezeichnungen lässt sich das auch so ausdrücken: $X \in \mathfrak{P}(\Omega)$ ist genau dann $\mathfrak{A}$-approximierbar, wenn es eine Folge von Mengen $A_k \in \mathfrak{A}$, $k \geqslant 1$, gibt mit

$$A_k \underset{\mu^*}{\longrightarrow} X.$$

In Bild 3.1 ist die Approximation einer Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ durch eine endliche Quadersumme veranschaulicht.

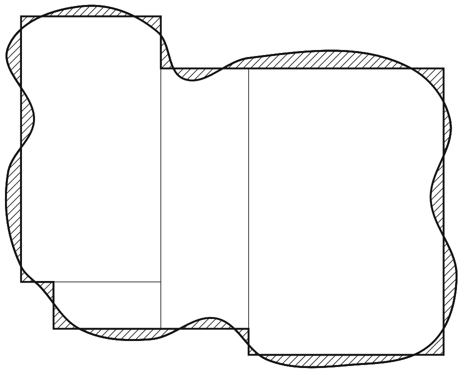


Bild 3.1

Wir bezeichnen mit $\widetilde{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ die Menge aller $X \subset \Omega$, die $\mathfrak{A}$-approximierbar sind.

Wir werden sehen, dass zumindest im Fall $\mu(\Omega) < \infty$ das System $\widetilde{\mathfrak{A}}$ eine σ-Algebra bildet und $\tilde{\mu} := \mu^* \mid \widetilde{\mathfrak{A}}$ ein Maß ist, welches das gegebene Prämaß μ fortsetzt. Der Fall eines σ-endlichen Prämaßes wird später durch Ausschöpfung auf den endlichen Fall zurückgeführt.

Satz 5. *Sei $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ eine Mengenalgebra, $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}_+$ ein endliches Prämaß und $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \mathbb{R}_+$ das zugeordnete äußere Maß. Dann ist das Mengensystem*

$$\widetilde{\mathfrak{A}} := \{X \in \mathfrak{P}(\Omega) : X \text{ ist } \mathfrak{A}\text{-approximierbar bzgl. } \mu^*\}$$

eine σ-Algebra auf Ω.

Bemerkung. Da trivialerweise $\mathfrak{A} \subset \widetilde{\mathfrak{A}}$, gilt dann

$$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}^{\uparrow} \subset \langle\mathfrak{A}\rangle^{\sigma} \subset \widetilde{\mathfrak{A}}.$$

Beweis. 1) $X \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ impliziert $X^c = \Omega \smallsetminus X \in \widetilde{\mathfrak{A}}$.

Dies folgt daraus, dass ganz allgemein gilt

$$X \triangle A = X^c \triangle A^c.$$

Wird also X durch die Folge $A_k \in \mathfrak{A}$, $k \geqslant 1$, approximiert, so X^c durch $A_k^c \in \mathfrak{A}$.

2) Es ist noch zu zeigen, dass für eine unendliche Folge $X_1, X_2, X_3, \ldots \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ auch ihre Vereinigung $X := \bigcup X_k$ zu $\widetilde{\mathfrak{A}}$ gehört.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt dann $A_k \in \mathfrak{A}$ mit

$$\mu^*(X_k \triangle A_k) < \varepsilon/2^k \qquad \text{für alle } k \geqslant 1.$$

Wir setzen $\tilde{A}_m := \bigcup\limits_{k \leqslant m} A_k \in \mathfrak{A}$ und $A := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{A}^{\uparrow}$. Da $\tilde{A}_m \uparrow A$, gilt nach Satz 2 c)

$$\mu(\tilde{A}_m) \uparrow \mu(A) < \infty.$$

Wir wählen m so groß, dass $\mu(A) - \mu(\tilde{A}_m) < \varepsilon$ und setzen

$$A' := A \smallsetminus \tilde{A}_m = \bigcup_{k>m} A_k \in \mathfrak{A}^{\uparrow}.$$

Da $A = A' \cup \tilde{A}_m$ eine punktfremde Vereinigung ist, gilt nach Satz 2 b)

$$\mu(A) = \mu(A') + \mu(\tilde{A}_m) \quad \Longrightarrow \quad \mu(A') < \varepsilon.$$

Nun ist

$$X \triangle \tilde{A}_m = X \triangle (A \triangle A') = (X \triangle A) \triangle A' \subset (X \triangle A) \cup A'.$$

Nach der Rechenregel (8) aus § 1, Satz 1 gilt $X \triangle A \subset \bigcup_k (X_k \triangle A_k)$, also

$$X \triangle \tilde{A}_m \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (X_k \triangle A_k) \cup A',$$

woraus wegen der σ-Subadditivität von μ^* folgt

$$\mu^*(X \triangle \tilde{A}_m) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(X_k \triangle A_k) + \mu^*(A') < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Also kann X beliebig genau durch Elemente aus $\mathfrak{A}$ approximiert werden, d.h. $X \in \widetilde{\mathfrak{A}}$. Damit ist gezeigt, dass $\widetilde{\mathfrak{A}}$ eine σ-Algebra ist.

Satz 6. *Sei $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ eine Mengenalgebra, $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}_+$ ein endliches Prämaß, und $\widetilde{\mathfrak{A}}$ die σ-Algebra der $\mathfrak{A}$-approximierbaren Mengen.*

Dann lässt sich μ eindeutig zu einem Maß $\tilde{\mu} : \widetilde{\mathfrak{A}} \to \mathbb{R}_+$ fortsetzen. Es gilt

$$\tilde{\mu} = \mu^* \mid \widetilde{\mathfrak{A}},$$

wobei $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \mathbb{R}_+$ das dem Prämaß μ zugeordnete äußere Maß ist.

Beweis. 1) Zur Eindeutigkeit der Fortsetzung:

Seien $\mu_1, \mu_2 : \widetilde{\mathfrak{A}} \to \mathbb{R}_+$ zwei Maße, die $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}_+$ fortsetzen. Dann gilt auch

$$\mu_1(B) = \mu_2(B) = \mu(B) \qquad \text{für alle } B \in \mathfrak{A}^{\uparrow}.$$

Sei $X \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ beliebig vorgegeben. Nach Definition der Approximierbarkeit existieren zu jedem $\varepsilon > 0$ Mengen $A \in \mathfrak{A}$ und $B \in \mathfrak{A}^{\uparrow}$ mit

$$X \triangle A \subset B \quad \text{und} \quad \mu(B) < \varepsilon.$$

Daraus folgt $A \smallsetminus B \subset X \subset A \cup B$, also

$$\mu_i(A \smallsetminus B) \leqslant \mu_i(X) \leqslant \mu_i(A \cup B).$$

Nun ist

$$\mu_i(A \smallsetminus B) \geqslant \mu_i(A) - \mu_i(B) = \mu(A) - \mu(B) > \mu(A) - \varepsilon$$

und

$$\mu_i(A \cup B) \leqslant \mu_i(A) + \mu_i(B) = \mu(A) + \mu(B) < \mu(A) + \varepsilon.$$

Aus diesen Ungleichungen folgt insgesamt

$$\mu(A) - \varepsilon < \mu_i(X) < \mu(A) + \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |\mu_1(X) - \mu_2(X)| < 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt $\mu_1(X) = \mu_2(X)$. Damit ist die Eindeutigkeit der Fortsetzung gezeigt.

Es ist also nur noch zu beweisen, dass $\mu^* \mid \widetilde{\mathfrak{A}}$ ein Maß ist.

2) Seien $X, Y \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ punktfremde Mengen. Wir wollen zeigen $\mu^*(X \cup Y) = \mu^*(X) + \mu^*(Y)$. Dazu wählen wir Folgen $A_k, B_k \in \mathfrak{A}$, $k \geqslant 1$, mit

$$A_k \underset{\mu^*}{\longrightarrow} X, \quad B_k \underset{\mu^*}{\longrightarrow} Y, \quad \text{also} \quad \mu^*(X) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k), \quad \mu^*(Y) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k).$$

Da $(X \cup Y) \vartriangle (A_k \cup B_k) \subset (X \vartriangle A_k) \cup (Y \vartriangle B_k)$, folgt

$$\mu^*((X \cup Y) \vartriangle (A_k \cup B_k)) \leqslant \mu^*(X \vartriangle A_k) + \mu^*(Y \vartriangle B_k) \longrightarrow 0 \quad \text{für } k \to \infty,$$

woraus folgt

$$\mu^*(X \cup Y) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k \cup B_k).$$

Zwar sind X, Y punktfremd, dies gilt aber nicht notwendig für A_k, B_k. Jedoch hat man nach § 1, Satz 1 (7)

$$A_k \cap B_k \subset (X \vartriangle A_k) \cup (Y \vartriangle B_k),$$

also

$$\mu(A_k \cap B_k) \leqslant \mu^*(X \vartriangle A_k) + \mu^*(Y \vartriangle B_k) \longrightarrow 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Daher gilt

$$\lim_k \mu(A_k \cup B_k) = \lim_k(\mu(A_k) + \mu(B_k) - \mu(A_k \cap B_k)) = \lim_k \mu(A_k) + \lim_k \mu(B_k),$$

woraus folgt $\mu^*(X \cup Y) = \mu^*(X) + \mu^*(Y)$.

3) Da $\mu^* \mid \widetilde{\mathfrak{A}}$ nach 2) additiv ist und als äußeres Maß auch σ-subadditiv, folgt aus § 2, Satz 1, dass μ^* auf $\widetilde{\mathfrak{A}}$ sogar σ-additiv, also ein Maß ist, q.e.d.

Wir kommen jetzt zum Hauptsatz dieses Paragraphen.

Satz 7. *Sei $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Mengenring auf Ω und $\mu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein σ-endliches Prämaß. Dann kann μ auf genau eine Weise zu einem Maß $\tilde{\mu}$ auf der σ-Algebra $\mathfrak{B} := \langle \mathfrak{A} \rangle^\sigma$ fortgesetzt werden und zwar gilt $\tilde{\mu} = \mu^* \mid \mathfrak{B}$, wobei $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ das dem Prämaß μ zugeordnete äußere Maß ist.*

Beweis. Da μ σ-endlich ist, gibt es eine aufsteigende Folge $\Omega_m \uparrow \Omega$ von Elementen $\Omega_m \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(\Omega_m) < \infty$. Wir setzen

$$\mathfrak{A}_m := \mathfrak{A} \cap \Omega_m \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}_m := \mathfrak{B} \cap \Omega_m.$$

$\mathfrak{A}_m$ ist eine Mengenalgebra auf Ω_m und es gilt $\mathfrak{B}_m = \langle \mathfrak{A}_m \rangle^\sigma$. Die Einschränkung $\mu \mid \mathfrak{A}_m$ ist ein endliches Prämaß. Sei $\tilde{\mu}_m : \mathfrak{B}_m \to \mathbb{R}_+$ die nach Satz 6 existierende eindeutige Fortsetzung von $\mu \mid \mathfrak{A}_m$. Wegen der Eindeutigkeit ist $\tilde{\mu}_m \mid \mathfrak{B}_{m-1} = \tilde{\mu}_{m-1}$.

Für jedes $X \in \mathfrak{B} = \langle \mathfrak{A} \rangle^\sigma$ gilt

$$(X \cap \Omega_m) \uparrow X.$$

Falls es überhaupt eine Fortsetzung $\tilde{\mu} : \mathfrak{B} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ von μ gibt, muss gelten

$$(*) \qquad \tilde{\mu}(X) = \sup_m \tilde{\mu}_m(X \cap \Omega_m).$$

Die Eindeutigkeit der Fortsetzung (im Falle der Existenz) ist also klar. Wir nehmen deshalb $(*)$ als Definition von $\tilde{\mu}$ und müssen noch zeigen, dass dieses $\tilde{\mu}$ tatsächlich ein Maß ist.

1) Wir zeigen zunächst, dass $\tilde{\mu}(X) = \mu^*(X)$.

Dazu setzen wir

$$X_m := X \cap \Omega_m, \qquad Y_1 := X_1 \quad \text{und} \quad Y_m := X_m \smallsetminus X_{m-1} \text{ für } m \geqslant 2.$$

Wegen Satz 6 ist $\mu^*(X_m) = \tilde{\mu}_m(X_m)$ und $\mu^*(Y_m) = \tilde{\mu}_m(Y_m)$ für alle $m \geqslant 1$.

Es gilt $X_m = \bigcup_{k=1}^m Y_k$ (punktfremde Vereinigung) und $X = \bigcup_{m=1}^\infty Y_m$. Unter Benutzung der σ-Subadditivität von μ^* erhalten wir

$$\mu^*(X) \leqslant \sum_{m=1}^\infty \mu^*(Y_m) = \sup_m \sum_{k=1}^m \mu^*(Y_k) = \sup_m \sum_{k=1}^m \tilde{\mu}_m(Y_k) = \sup_m \tilde{\mu}_m(X_m) = \tilde{\mu}(X).$$

Andrerseits ist

$$\tilde{\mu}(X) = \sup_m \tilde{\mu}_m(X_m) = \sup_m \mu^*(X_m) \leqslant \mu^*(X).$$

Beide Ungleichungen zusammen ergeben $\mu^*(X) = \tilde{\mu}(X)$. Damit ist 1) bewiesen.

2) Wir zeigen jetzt, dass $\tilde{\mu}$ additiv ist.

Seien $X, Y \in \mathfrak{B}$ punktfremd und $X_m := X \cap \Omega_m$, $Y_m := Y \cap \Omega_m$. Nach Definition gilt

$$\tilde{\mu}_m(X_m) \uparrow \tilde{\mu}(X), \quad \tilde{\mu}_m(Y_m) \uparrow \tilde{\mu}(Y) \quad \text{und} \quad \tilde{\mu}_m(X_m \cup Y_m) \uparrow \tilde{\mu}(X \cup Y).$$

Da $\tilde{\mu}_m$ ein Maß ist, gilt $\tilde{\mu}_m(X_m \cup Y_m) = \tilde{\mu}_m(X_m) + \tilde{\mu}_m(Y_m)$. Daraus folgt

$$\tilde{\mu}(X \cup Y) = \tilde{\mu}(X) + \tilde{\mu}(Y),$$

d.h. $\tilde{\mu}$ ist additiv, also ein Inhalt.

3) Da das äußere Maß μ^* σ-subadditiv ist, ist auch $\tilde{\mu} = \mu^* \mid \mathfrak{B}$ σ-subadditiv, also nach § 2, Satz 1 σ-additiv, d.h. ein Maß.

Damit ist Satz 7 vollständig bewiesen.

Zusatz. *Mit den obigen Bezeichnungen gilt: Jedes $X \in \mathfrak{B} = \langle \mathfrak{A} \rangle^\sigma$ mit $\tilde{\mu}(X) < \infty$ ist $\mathfrak{A}$-approximierbar, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $A \in \mathfrak{A}$ mit*

$$\mu^*(X \bigtriangleup A) < \varepsilon.$$

Das ist klar, falls $X \subset \Omega_m$ für ein $m \geqslant 1$. Andernfalls betrachte man die Folge $X_m := X \cap \Omega_m$, $m \geqslant 1$. Da $\tilde{\mu}(X_m) \uparrow \tilde{\mu}(X)$, gibt es ein $m \geqslant 1$ mit

$$\tilde{\mu}(X) - \tilde{\mu}(X_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da $X \smallsetminus X_m = X \bigtriangleup X_m$, folgt $\mu^*(X \bigtriangleup X_m) < \varepsilon/2$. Da $X_m \subset \Omega_m$, gibt es ein $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu^*(X_m \bigtriangleup A) < \varepsilon/2$. Daraus folgt

$$\mu^*(X \bigtriangleup A) \leqslant \mu^*(X \bigtriangleup X_m) + \mu^*(X_m \bigtriangleup A) < \varepsilon, \quad \text{q.e.d.}$$

Das Lebesgue-Borelsche Maß. Satz 7 kann insbesondere auf das Lebesguesche Prämaß $\lambda^n : \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+$ angewendet werden. Die eindeutig bestimmte Fortsetzung von λ^n auf die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \langle \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n) \rangle^\sigma$, die wir wieder mit λ^n oder kurz mit λ bezeichnen, ist das Lebesguesche Maß oder genauer Lebesgue-Borelsche Maß

$$\lambda^n : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Da λ^n aus dem elementar-geometrischen Volumen konstruiert wurde, schreiben wir für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ häufig suggestiver $\mathrm{Vol}_n(B)$ statt $\lambda^n(B)$. Somit ist nun insbesondere für jede abgeschlossene oder offene Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ das Volumen definiert. Falls B beschränkt ist (aber nicht nur dann), ist $\mathrm{Vol}_n(B) < \infty$. Wie man das Volumen in konkreten Fällen berechnen kann, werden wir in § 7 untersuchen.

Nochmals äußeres Maß. Wir hatten einem Prämaß $\mu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ auf einem Mengenring $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ ein äußeres Maß $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ zugeordnet. Sei $\tilde{\mu} : \mathfrak{B} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ die Fortsetzung von μ auf die von $\mathfrak{A}$ erzeugte σ-Algebra $\mathfrak{B} := \langle \mathfrak{A} \rangle^\sigma$. Diesem Maß $\tilde{\mu}$ kann man nun ebenso ein äußeres Maß

$$\tilde{\mu}^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

zuordnen. Wir wollen zeigen, dass beide äußeren Maße übereinstimmen. Da $\mathfrak{A}^\uparrow \subset \mathfrak{B}$, gilt für $X \in \mathfrak{P}(\Omega)$

$$\mu^*(X) = \inf\{\tilde{\mu}(B) : B \supset X, B \in \mathfrak{A}^\uparrow\}.$$

Andrerseits gilt wegen $\mathfrak{B}^\uparrow = \mathfrak{B}$

$$\tilde{\mu}^*(X) = \inf\{\tilde{\mu}(B) : B \supset X, B \in \mathfrak{B}\}.$$

Da das Infimum über eine größere Menge gebildet wird, folgt also

$$\tilde{\mu}^*(X) \leqslant \mu^*(X).$$

Wäre $\tilde{\mu}^*(X) < \mu^*(X)$, gäbe es ein $B \in \mathfrak{B}$ mit $B \supset X$ und $\tilde{\mu}(B) < \mu^*(X)$. Da aber nach Satz 7 gilt $\tilde{\mu}(B) = \mu^*(B)$, erhielte man den Widerspruch

$$\mu^*(B) < \mu^*(X), \quad \text{aber} \quad X \subset B.$$

Also gilt doch $\mu^* = \tilde{\mu}^*$. Das äußere Maß hängt also nur vom Maß ab, und nicht von dem speziellen Prämaß, mit dem das Maß konstruiert wurde.

Wir führen noch folgende nützliche Bezeichnungen ein:

Definition (Messraum, Maßraum). Ein *Messraum* (oder messbarer Raum) ist ein Paar $(\Omega, \mathfrak{A})$, bestehend aus einer Menge Ω und einer σ-Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$. Die Mengen $A \in \mathfrak{A}$ heißen die messbaren Teilmengen des Messraums.

Unter einem *Maßraum* versteht man ein Tripel $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, wobei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein Messraum und $\mu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein Maß ist.

So hat man z.B. für jeden topologischen Raum X den Borelschen Messraum $(X, \mathcal{B}(X))$ und in jeder Dimension $n \geqslant 1$ den Lebesgue-Borelschen Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda^n)$

In der Wahrscheinlichkeitstheorie arbeitet man mit Maßräumen $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, wobei P ein Maß mit $P(\Omega) = 1$ ist. Solche Maßräume heißen Wahrscheinlichkeitsräume.

Nullmengen

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ das zugehörige äußere Maß.

Eine Teilmenge $S \subset \Omega$ heißt *μ-Nullmenge*, falls $\mu^*(S) = 0$.
Im Falle des Lebesgueschen Maßes spricht man von Lebesgue-Nullmengen.

Aus Satz 3 c) folgt, dass die Vereinigung von abzählbar vielen Nullmengen wieder eine Nullmenge ist.

Natürlich ist die leere Menge stets eine Nullmenge, aber auch nicht-leere Mengen können das äußere Maß 0 haben.

Beispiele

(3.2) Wir betrachten den 1-dimensionalen Lebesgue-Borelschen Maßraum

$$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda).$$

Hier ist jede einpunktige Teilmenge $\{a\} \subset \mathbb{R}$ eine Nullmenge, denn ein Punkt ist in Intervallen beliebig kleiner Länge $\varepsilon > 0$ enthalten. Daraus folgt, dass auch jede abzählbare Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ eine Nullmenge ist.

Folgerung. *Die Menge* $\mathbb{R}$ *der reellen Zahlen ist überabzählbar.*

Beweis. Wir zeigen, dass sogar das Intervall $[0,1[$ überabzählbar ist. Wäre $[0,1[$ abzählbar, hätte es das äußere Lebesgue-Maß 0, was im Widerspruch zu $\lambda([0,1[) = 1$ steht.

Bemerkung. Dies ist ein neuer Beweis der schon in An. 1, §9, Satz 2, bewiesenen Tatsache. Der damalige Beweis benutzte das Cantorsche Diagonalverfahren, der jetzige Beweis beruht auf der σ-Additivität des Lebesgueschen Prämaßes.

(3.3) Wir legen jetzt den n-dimensionalen Lebesgue-Borelschen Maßraum

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda^n)$$

zugrunde. Wir zeigen zunächst: Für jeden kompakten Quader

$$R := \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : a_\nu \leqslant x_\nu \leqslant b_\nu\}, \qquad a_\nu, b_\nu \in \mathbb{R},\ a_\nu \leqslant b_\nu,\ 1 \leqslant \nu \leqslant n,$$

($a_\nu = b_\nu$ ist zugelassen), gilt

$$\lambda^n(R) = \prod_{\nu=1}^{n} (b_\nu - a_\nu).$$

Dies folgt daraus, dass R der Durchschnitt der absteigenden Folge von halboffenen Quadern

$$Q_k := \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : a_\nu \leqslant x_\nu < b_\nu + 1/k\}, \quad k \geqslant 1,$$

ist, und $\lim_{k\to\infty} \lambda^n(Q_k) = \prod (b_\nu - a_\nu)$.

Insbesondere ist jeder entartete kompakte Quader (mit mindestens einer Seitenlänge gleich null) eine Nullmenge. Daraus ergibt sich:

Jede Hyperebene der Gestalt

$$H_i(c) := \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = c\} \qquad (i \in \{1,\dots,n\}, c \in \mathbb{R} \text{ fest})$$

ist eine Nullmenge. Denn $H_i(c)$ ist aufsteigender Limes einer Folge von entarteten kompakten Quadern R_m, $m \geqslant 1$, deren i-te Seite die einpunktige Menge $\{c\}$ und deren andere Seiten gleich dem Intervall $[-m, m]$ sind.

Wir geben jetzt eine elementare Charakterisierung von Lebesgueschen Nullmengen.

Satz 8. *Eine Teilmenge* $A \subset \mathbb{R}^n$ *ist genau dann eine Lebesguesche Nullmenge, wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine Folge* W_k, $k \geqslant 1$, *von kompakten Würfeln* $W_k \subset \mathbb{R}^n$ *gibt mit*

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k \quad \textit{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Vol}_n(W_k) < \varepsilon.$$

Beweis. Es ist klar, dass die Bedingung hinreichend ist.

Zur Notwendigkeit: Sei vorausgesetzt, dass A eine Nullmenge ist. Nach (3.1) gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $A \subset U$ und $\lambda^n(U) < \varepsilon$. Nach § 1, Lemma 1 ist U disjunkte Vereinigung von abzählbar vielen halboffenen Würfeln Q_k; es gilt also

$$\lambda^n(U) = \sum_k \mathrm{Vol}_n(Q_k) < \varepsilon.$$

Setze $W_k := \overline{Q}_k$. Da Q_k und W_k gleiches Volumen haben, folgt die Behauptung.

Satz 9. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann ist für jede Nullmenge $A \subset U$ das Bild $F(A)$ eine Nullmenge.*

Beweis. Es genügt zu zeigen: Ist $K \subset U$ ein kompakter Quader, so ist $F(A \cap K)$ eine Nullmenge. Denn U läßt sich als Vereinigung abzählbar vieler kompakter Quader darstellen.

Da die partiellen Ableitungen von F auf K beschränkt sind, gibt es eine Konstante $C \in \mathbb{R}_+$, so dass

$$\|F(x) - F(y)\| \leqslant C\|x - y\| \quad \text{für alle} \quad x, y \in K,$$

(vgl. An. 2, §6, Corollar zu Satz 5.) Daraus folgt: Ist W ein Würfel mit Seitenlänge a, so ist $F(W \cap K)$ in einem Würfel der Seitenlänge $\sqrt{n}Ca$ enthalten, es gilt also

$$\mathrm{Vol}_n(F(W \cap K)) \leqslant n^{n/2} C^n \mathrm{Vol}_n(W).$$

Da A in einer Vereinigung von Würfeln beliebig kleinen Gesamtvolumens enthalten ist, folgt die Behauptung.

(3.4) Aus Satz 9 und (3.3) folgt z.B., dass eine beliebige Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge ist, denn sie ist Bild der Hyperebene $H_1(0)$ unter einer affin-linearen Abbildung. Daraus folgt weiter, dass der Rand jedes Polyeders $P \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge ist.

Vervollständigung eines Maßraums

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine μ-Nullmenge $S \subset \Omega$ muss nicht notwendig zu $\mathfrak{A}$ gehören. Es gibt aber stets ein $A \in \mathfrak{A}$ mit $S \subset A$ und $\mu(A) = 0$. Denn wegen $\mu^*(S) = 0$ existiert eine Folge $A_k \in \mathfrak{A}$, $k \geqslant 1$, von Mengen mit $S \subset A_k$ und $\mu(A_k) < 1/k$. Dann ist $A := \bigcap_k A_k \in \mathfrak{A}$ mit $S \subset A$ und $\mu(A) = 0$.

Ein Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ heißt *vollständig*, wenn jede μ-Nullmenge $S \subset \Omega$ bereits zu $\mathfrak{A}$ gehört. Ist der Maßraum nicht vollständig, so kann man ihn durch Vergrößerung der σ-Algebra vervollständigen. Sei $\overline{\mathfrak{A}}^\mu \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ wie folgt definiert:

$$\overline{\mathfrak{A}}^\mu := \{A \cup S : A \in \mathfrak{A},\ S \subset \Omega \text{ mit } \mu^*(S) = 0\}.$$

Man rechnet leicht nach, dass $\overline{\mathfrak{A}}^\mu$ tatsächlich eine σ-Algebra ist und μ durch

$$\mu(A \cup S) := \mu(A) \quad \text{für } A \in \mathfrak{A} \text{ und } \mu^*(S) = 0$$

zu einem auf $\overline{\mathfrak{A}}^{\mu}$ definierten Maß fortgesetzt werden kann. Der Maßraum $(\Omega, \overline{\mathfrak{A}}^{\mu}, \mu)$ ist die Vervollständigung von $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$.

Die Vervollständigung des Lebesgue-Borelschen Maßraums $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda^n)$ ist der *Lebesguesche Maßraum* $(\mathbb{R}^n, \overline{\mathcal{B}}^{\lambda}(\mathbb{R}^n), \lambda^n)$. Die Elemente $X \in \overline{\mathcal{B}}^{\lambda}(\mathbb{R}^n)$ heißen die *Lebesgue-messbaren* Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. In diesem Zusammenhang nennt man die Borelmengen $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ auch die Borel-messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

AUFGABEN

3.1. Jede abgeschlossene Teilmenge des $A \subset \mathbb{R}^n$ ist Borelsch, also des Lebesguesche Maß $\lambda^n(A) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ definiert.

Man untersuche, ob folgende Funktion $\eta : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein äußeres Maß ist:

$$\eta(A) := \lambda^n(\overline{A}).$$

Dabei bezeichnet $\overline{A}$ die abgeschlossene Hülle von A.

3.2. Sei $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein äußeres Maß. Eine Teilmenge $A \subset \Omega$ heißt *Carathéodory-messbar* bzgl. μ^*, falls

$$(*) \qquad \mu^*(X) = \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \setminus A) \quad \text{für alle } X \in \mathfrak{P}(\Omega).$$

Man zeige:

Ist $\mu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ und $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ das zugeordnete äußere Maß, so ist jedes $A \in \mathfrak{A}$ Carathéodory-messbar bzgl. μ^*.

Hinweis. Es genügt die Bedingung $(*)$ für den Fall nachzuprüfen, dass $\mu^*(X) < \infty$.

3.3. Das *Cantorsche Diskontinuum* wird folgendermaßen konstruiert: Aus dem Intervall $[0,1]$ entferne man das mittlere Drittel $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$. Es bleibt die Menge

$$A_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Aus den beiden Teilintervallen von A_1 entferne man jeweils wieder das mittlere Drittel; der Rest ist die Menge

$$A_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

So fortfahrend, erhält man im k-ten Schritt eine Menge A_k, die Vereinigung von 2^k disjunkten kompakten Intervallen ist. Durch Wegnahme der mittleren Drittel dieser Teilintervalle entsteht A_{k+1}. Das Cantorsche Diskontinuum ist definiert als

$$C := \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Man zeige, dass C eine Nullmenge, aber überabzählbar ist.

3.4. Eine beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Jordan-messbar*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Quadersummen $X, Y \in \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)$ gibt mit

$$X \subset A \subset Y \quad \text{und} \quad \mathrm{Vol}_n(Y) - \mathrm{Vol}_n(X) < \varepsilon.$$

Der gemeinsame Wert

$$\begin{aligned} J(A) &:= \sup\{\mathrm{Vol}_n(X) : X \subset A,\, X \in \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)\} \\ &= \inf\{\mathrm{Vol}_n(Y) : Y \supset A,\ Y \in \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)\} \end{aligned}$$

heißt dann der Jordan-Inhalt von A. Man zeige:

a) Das System aller Jordan-messbaren Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ bildet einen Mengenring $\mathfrak{J}(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ und $J : \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ ist ein Inhalt.

b) Jede Jordan-messbare Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist auch Lebesgue-messbar (bzgl. des vervollständigten Lebesgueschen Maßraums $(\mathbb{R}^n, \overline{\mathcal{B}}^{\lambda}(\mathbb{R}^n), \lambda^n)$) und es gilt $J(A) = \lambda^n(A)$.

c) Eine beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn ihr Rand ∂A eine Lebesgue-Nullmenge ist.

3.5. Man beweise: Zu jeder Borelschen Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ existiert eine F_σ-Menge X und eine G_δ-Menge Y mit $X \subset B \subset Y$, so dass $Y \setminus X$ eine Lebesguesche Nullmenge ist. (Die F_σ- und G_δ-Mengen wurden in Aufgabe 1.3 definiert.)

§ 4 Integration messbarer Funktionen

Nachdem wir nunmehr Maße zu Verfügung haben, insbesondere das Lebesguesche Maß, können wir Integrale definieren. Damit eine auf einem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ definierte numerische Funktion f integrierbar ist, ist zunächst einmal Voraussetzung, dass f messbar ist, d.h. dass für jede reelle Zahl c die Menge $\{x \in \Omega : f(x) \geqslant c\}$ zur σ-Algebra $\mathfrak{A}$ gehört. Insbesondere ist die charakteristische Funktion χ_A einer Teilmenge $A \subset \Omega$ genau dann messbar, wenn $A \in \mathfrak{A}$. In diesem Fall ist das Integral $\int \chi_A d\mu$ definitionsgemäß gleich $\mu(A)$. Verlangt man noch die Linearität sowie die Vertauschbarkeit des Integrals mit monotonen Limiten, so ergibt sich die allgemeine Definition des Integrals fast automatisch.

Messbare Abbildungen

Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein Messraum, d.h. Ω eine Menge und $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra auf Ω. Ist nun ein weiterer Messraum $(\Omega', \mathfrak{B})$ gegeben, so nennt man eine Abbildung

$$f : \Omega \to \Omega'$$

messbar, genauer $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-messbar, wenn

$$f^{-1}(B) \in \mathfrak{A} \qquad \text{für alle } B \in \mathfrak{B}.$$

Um anzudeuten, dass die Messbarkeit von den σ-Algebren abhängt, schreibt man auch

$$f : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega', \mathfrak{B})$$

für eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-messbare Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$. Die Komposition zweier messbarer Abbildungen

$$(\Omega, \mathfrak{A}) \xrightarrow{f} (\Omega', \mathfrak{B}) \xrightarrow{g} (\Omega'', \mathfrak{C})$$

ist wieder messbar. Dies folgt daraus, dass $(g \circ f)^{-1}(Z) = f^{-1}(g^{-1}(Z))$ für alle Teilmengen $Z \subset \Omega''$.

Sei $\mathfrak{E}$ ein Erzeugenden-System von $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}(\Omega')$, d.h. $\mathfrak{B} = \langle \mathfrak{E} \rangle^\sigma$. Um nachzuweisen, dass eine Abbildung

$$f : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega', \mathfrak{B})$$

messbar ist, genügt es offenbar zu verlangen, dass

$$f^{-1}(E) \in \mathfrak{A} \qquad \text{für alle } E \in \mathfrak{E},$$

denn für alle $X, X_i \in \mathfrak{P}(\Omega')$ gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(\bigcup X_i) &= \bigcup f^{-1}(X_i), \\ f^{-1}(\bigcap X_i) &= \bigcap f^{-1}(X_i), \\ f^{-1}(\Omega' \smallsetminus X) &= \Omega \smallsetminus f^{-1}(X). \end{aligned}$$

O. Forster, *Analysis 3*, Aufbaukurs Mathematik,
DOI 10.1007/978-3-8348-2374-8_4, © Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden 2012

(4.1) *Beispiel: Stetige Abbildungen*

Seien Ω und Ω' topologische Räume, (z.B. $\Omega = \mathbb{R}^n$ und $\Omega' = \mathbb{R}^m$). Wir versehen Ω und Ω' jeweils mit den σ-Algebren der Borelschen Mengen. Dann definiert jede stetige Abbildung

$$f : \Omega \to \Omega'$$

eine messbare Abbildung $f : (\Omega, \mathcal{B}(\Omega)) \to (\Omega', \mathcal{B}(\Omega'))$. Denn nach Definition der Stetigkeit sind die Urbilder der offenen Teilmengen von Ω' offen in Ω und die offenen Mengen bilden ein Erzeugenden-System der σ-Algebra der Borelschen Mengen.

Messbare reelle und numerische Funktionen

Ein besonders wichtiger Spezialfall ist $\Omega' = \mathbb{R}$, versehen mit der σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ aller Borelschen Teilmengen von $\mathbb{R}$. Eine messbare Abbildung

$$f : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

nennt man kurz eine $\mathfrak{A}$-*messbare reelle Funktion*. Im Fall $(\Omega, \mathfrak{A}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ spricht man von Borel-messbaren Funktionen.

(4.2) *Beispiel: Charakteristische Funktion*

Sei $S \subset \Omega$ eine beliebige Teilmenge. Die Funktion $\chi_S : \Omega \to \mathbb{R}$, die durch

$$\chi_S(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in S, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

definiert ist, heißt charakteristische Funktion der Teilmenge $S \subset \Omega$. Offenbar ist χ_S genau dann $\mathfrak{A}$-messbar, wenn S zu $\mathfrak{A}$ gehört, denn für eine Teilmenge $B \subset \mathbb{R}$ ist $\chi_S^{-1}(B)$ eine der Mengen $\emptyset, S, S^c, \Omega$.

Funktionen $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ mit Werten in der erweiterten Zahlengeraden $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ nennt man auch *numerische Funktionen* auf Ω. Um die Messbarkeit numerischer Funktionen definieren zu können, brauchen wir die Borel-Algebra von $\overline{\mathbb{R}}$. Man definiert $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ als kleinste σ-Algebra, die alle Borelschen Teilmengen von $\mathbb{R}$ und außerdem die einpunktigen Mengen $\{\infty\}$ und $\{-\infty\}$ enthält. $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ besteht aus allen Mengen der Gestalt

$$B, \quad B \cup \{\infty\}, \quad B \cup \{-\infty\}, \quad B \cup \{-\infty, \infty\} \quad \text{mit } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Eine messbare Abbildung

$$f : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$$

heißt $\mathfrak{A}$-*messbare numerische Funktion* auf Ω. Eine reelle Funktion auf Ω ist genau dann $\mathfrak{A}$-messbar, wenn sie aufgefasst als numerische Funktion $\mathfrak{A}$-messbar ist.

Für eine Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ führen wir folgende bequeme Bezeichnung ein: Für $c \in \mathbb{R}$ sei

$$\{f > c\} := \{x \in \Omega : f(x) > c\} = f^{-1}(]c, \infty]),$$

und analog seien die Mengen $\{f \geqslant c\}$, $\{f < c\}$, $\{f \leqslant c\}$ u.s.w. definiert.

Satz 1. *Sei* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *ein Messraum. Eine numerische Funktion*

$$f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$$

ist genau dann $\mathfrak{A}$*-messbar, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*

(1) $\{f > c\} \in \mathfrak{A}$ *für alle* $c \in \mathbb{R}$,

(2) $\{f \geqslant c\} \in \mathfrak{A}$ *für alle* $c \in \mathbb{R}$,

(3) $\{f < c\} \in \mathfrak{A}$ *für alle* $c \in \mathbb{R}$,

(4) $\{f \leqslant c\} \in \mathfrak{A}$ *für alle* $c \in \mathbb{R}$.

Beweis. Die vier Bedingungen sind untereinander äquivalent, denn

$$\{f \geqslant c\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f > c - \tfrac{1}{k}\}, \quad \{f > c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f \geqslant c + \tfrac{1}{k}\}$$

und $\{f < c\} = \Omega \smallsetminus \{f \geqslant c\}$, $\{f \leqslant c\} = \Omega \smallsetminus \{f > c\}$.

Der Satz ist also bewiesen, wenn wir die Äquivalenz von (2) mit der Messbarkeit von f zeigen. Da

$$\{f \geqslant c\} = f^{-1}([c, \infty]),$$

genügt es dazu zu zeigen, dass das System der Intervalle

$$\mathfrak{E} := \{[c, \infty] \subset \overline{\mathbb{R}} : c \in \mathbb{R}\}$$

die σ-Algebra $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ erzeugt. Zunächst gilt

$$\{\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} [k, \infty] \quad \text{und} \quad \{-\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} (\overline{\mathbb{R}} \smallsetminus [-k, \infty]).$$

Außerdem enhält $\langle \mathfrak{E} \rangle^{\sigma}$ alle halboffenen Intervalle

$$[a, b[= [a, \infty] \smallsetminus [b, \infty] \subset \mathbb{R},$$

also $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \langle \mathfrak{E} \rangle^{\sigma}$. Damit folgt $\langle \mathfrak{E} \rangle^{\sigma} = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, q.e.d.

Satz 2. *Sei* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *ein Messraum und seien* $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *zwei* $\mathfrak{A}$*-messbare Funktionen. Dann liegen die Mengen* $\{f > g\}$, $\{f \geqslant g\}$, $\{f = g\}$ *und* $\{f \neq g\}$ *in* $\mathfrak{A}$.

Beweis. Da $f(x) > g(x)$ genau dann, wenn eine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ existiert mit $f(x) > r > g(x)$, und die Mengen $\{f > r\}$ und $\{r > g\}$ in $\mathfrak{A}$ liegen, folgt

$$\{f > g\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{f > r\} \cap \{r > g\}) \in \mathfrak{A}.$$

Daraus folgt weiter

$$\begin{aligned}
\{f \geqslant g\} &= \{g > f\}^c \in \mathfrak{A}, \\
\{f = g\} &= \{f \geqslant g\} \smallsetminus \{f > g\} \in \mathfrak{A}, \\
\{f \neq g\} &= \{f = g\}^c \in \mathfrak{A}, \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Satz 3. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein Messraum und seien $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ zwei $\mathfrak{A}$-messbare Funktionen. Dann sind auch folgende Funktionen messbar:*

i) cf *für alle $c \in \mathbb{R}$,*

ii) $|f|^p$ *für alle $p \in \mathbb{R}_+^*$,*

iii) $f + g$, *falls überall auf Ω definiert,*

iv) fg.

Beweis. i) und ii) folgen daraus, dass die Abbildungen $x \mapsto cx$ und $x \mapsto |x|^p$ von $\overline{\mathbb{R}}$ in sich messbar sind.

Zu iii) Ist g messbar, so auch $-g$ und $c - g$ für jedes $c \in \mathbb{R}$. Die Behauptung folgt aus

$$\{f + g > c\} = \{f > c - g\}$$

und Satz 2.

Zu iv). Sei $\Omega_0 := \{|f| = \infty\} \cup \{|g| = \infty\}$. Es ist leicht zu sehen, dass $\Omega_0 \in \mathfrak{A}$, und die Beschränkung von fg auf Ω_0 messbar (bzgl. $\mathfrak{A} \cap \Omega_0$) ist. Es genügt deshalb, die Messbarkeit von fg auf $\Omega_1 := \Omega \smallsetminus \Omega_0$ zu zeigen. Auf Ω_1 sind aber f und g reellwertig und es gilt dort

$$fg = \tfrac{1}{2}(|f+g|^2 - |f|^2 - |g|^2).$$

Die Behauptung folgt deshalb aus Teil i) bis iii).

Supremum, Infimum. Für zwei numerische Funktionen $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ definiert man die Funktionen $\sup(f,g)$, $\inf(f,g) : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ durch

$$\sup(f,g)(x) := \max(f(x), g(x)), \quad \inf(f,g)(x) := \min(f(x), g(x))$$

für alle $x \in \Omega$. Allgemeiner wird für eine Folge von Funktionen $f_k : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $k \geqslant 1$, die obere bzw. untere Einhüllende $\sup_k f_k$, $\inf_k f_k : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ definiert durch

$$(\sup_k f_k)(x) := \sup\{f_k(x) : k \geqslant 1\} \quad \text{bzw.} \quad (\inf_k f_k)(x) := \inf\{f_k(x) : k \geqslant 1\}.$$

Weiter definiert man die Funktionen $\limsup f_k$, $\liminf f_k : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ durch

$$\limsup_k f_k := \inf_m \Big(\sup_{k \geqslant m} f_k \Big) \qquad \text{und} \qquad \liminf_k f_k := \sup_m \Big(\inf_{k \geqslant m} f_k \Big).$$

Positiv- und Negativteil $f_+, f_- : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ einer Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ sind definiert durch

$$f_+ := \sup(f, 0), \qquad f_- := \sup(-f, 0).$$

Es gilt $f = f_+ - f_-$.

Satz 4. *Sei* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *ein Messraum und seien* $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, *sowie* $f_k : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $k \geqslant 1$, $\mathfrak{A}$*-messbare Funktionen. Dann sind auch folgende Funktionen messbar:*

$$\sup(f, g), \quad \inf(f, g), \quad \sup_k f_k, \quad \inf_k f_k, \quad \limsup_k f_k, \quad \liminf_k f_k.$$

Beweis. Dies folgt daraus, dass

$$\{\sup_{k\geqslant 1} f_k \leqslant c\} = \bigcap_{k\geqslant 1} \{f_k \leqslant c\} \quad \text{und} \quad \{\inf_{k\geqslant 1} f_k \geqslant c\} = \bigcap_{k\geqslant 1} \{f_k \geqslant c\}.$$

Corollar. *Eine Funktion* $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *auf einem Messraum* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *ist genau dann messbar, wenn* f_+ *und* f_- *messbar sind.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 4 und Satz 3, da $f_+ = \sup(f, 0)$, $f_- = \inf(-f, 0)$ und $f = f_+ - f_-$.

Einfache Funktionen

Unter einer *einfachen Funktion* auf einem Messraum $(\Omega, \mathfrak{A})$ verstehen wir eine $\mathfrak{A}$-messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, die nur endlich viele Werte annimmt. Sind $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ die verschiedenen Werte, die f annimmt, so liegen die Mengen $A_i := f^{-1}(c_i)$ in $\mathfrak{A}$, und es gilt

$$f = \sum_{i=1}^{m} c_i \chi_{A_i}.$$

Umgekehrt ist jede endliche reelle Linearkombination von charakteristischen Funktionen messbarer Mengen eine einfache Funktion.[1]

Die Bedeutung der einfachen Funktionen liegt unter anderem darin, dass sich jede nicht-negative messbare numerische Funktion als Limes einer aufsteigenden Folge von einfachen Funktionen darstellen lässt.

Satz 5. *Sei* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *ein Messraum und* $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *eine nicht-negative messbare numerische Funktion. Dann gibt es eine aufsteigende Folge*

$$0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \ldots \leqslant \varphi_k \leqslant \varphi_{k+1} \leqslant \ldots$$

von einfachen Funktionen $\varphi_k : \Omega \to \mathbb{R}_+$ *mit* $\varphi_k \uparrow f$.

[1] Einfache Funktionen werden manchmal auch Treppenfunktionen genannt. Wir werden diesen Begriff jedoch für etwas speziellere Funktionen reservieren, die in § 5 eingeführt werden.

Beweis. Für $k \geqslant 1$ sei $C_k := \{f \geqslant k\}$ und

$$A_{k\nu} := \{\nu \cdot 2^{-k} \leqslant f < (\nu+1) \cdot 2^{-k}\} \quad \text{für } 0 \leqslant \nu < k \cdot 2^k.$$

Definiere

$$\varphi_k := \sum_{0 \leqslant \nu < k \cdot 2^k} \nu \cdot 2^{-k} \chi_{A_{k\nu}} + k \cdot \chi_{C_k}.$$

Da $A_{k\nu} = A_{k+1,2\nu} \,\dot{\cup}\, A_{k+1,2\nu+1}$ (punktfremde Vereinigung), folgt $\varphi_k \leqslant \varphi_{k+1}$. Außerdem gilt

$$0 \leqslant f(x) - \varphi_k(x) < 2^{-k}, \text{ falls } f(x) < k \quad \text{und} \quad \varphi_k(x) = k, \text{ falls } f(x) \geqslant k.$$

Daraus folgt $\varphi_k \uparrow f$, q.e.d.

Integrale

In den bisherigen Untersuchungen dieses Paragraphen brauchten wir zwar Messräume, aber noch kein Maß. Um jedoch Integrale von Funktionen auf Ω zu definieren, ist ein Maß auf Ω nötig. Wir legen deshalb von jetzt ab einen Maßraum

$$(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$$

zugrunde. Für gewisse Klassen messbarer reeller oder numerischer Funktionen auf Ω soll ein Integral $\int f d\mu$ mit Werten in $\mathbb{R}$ (oder $\overline{\mathbb{R}}$) erklärt werden. Dieses Integral sollte zumindest folgende Eigenschaften haben:

(i) $\displaystyle\int \chi_A d\mu = \mu(A) \quad \text{für } A \in \mathfrak{A}$ (Normierung),

(ii) $\displaystyle\int (c_1 f + c_2 g) d\mu = c_1 \int f d\mu + c_2 \int g d\mu$ (Linearität),

(iii) $\displaystyle f \leqslant g \quad \Rightarrow \quad \int f d\mu \leqslant \int g d\mu$ (Monotonie).

Außerdem erwarten wir vom Integral eine Stetigkeits-Eigenschaft: Für konvergente Funktionenfolgen (wobei der Konvergenzbegriff noch zu präzisieren ist) soll gelten:

(iv) $\displaystyle\lim_k f_k = f \quad \Rightarrow \quad \lim_k \int f_k d\mu = \int f d\mu.$

Zur Schreibweise: Statt $\int f d\mu$ schreibt man auch ausführlicher

$$\int_\Omega f d\mu \quad \text{oder noch genauer} \quad \int_\Omega f(x) d\mu(x).$$

Die letzte Schreibweise ist insbesondere dann angebracht, wenn die Funktion f noch von zusätzlichen Parametern abhängt. Sei z.B. $f : \Omega \times T \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto f(x,t)$. Falls für jedes feste $t \in T$ die Funktion $x \mapsto f(x,t)$ über Ω integrierbar ist, kann man durch

$$F(t) := \int_\Omega f(x,t)\, d\mu(x)$$

eine Funktion F auf T definieren.

Wir werden das Integral in mehreren Schritten einführen. Ausgehend von den einfachen Funktionen wird das Integral zunächst für nicht-negative Funktionen definiert und dann der allgemeine Fall darauf zurückgeführt.

Integral für nicht-negative messbare Funktionen

A. In einem ersten Schritt definieren wir das Integral einer nicht-negativen einfachen Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}_+$. Sei

$$(*) \qquad \varphi = \sum_{i=1}^{m} c_i \chi_{A_i}$$

eine Darstellung von φ mit messbaren Mengen $A_i \in \mathfrak{A}$ und reellen Koeffizienten $c_i \geqslant 0$. Man setzt

$$\int_\Omega \varphi\, d\mu := \sum_{i=1}^{m} c_i \mu(A_i) \;\in\; \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Zwar ist die Darstellung $(*)$ nicht eindeutig. Man kann sich aber überlegen, dass das Integral unabhängig von der Wahl der Darstellung ist.

Satz 6. *Sei* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein Maßraum.*

a) *Sind* $\varphi, \psi : \Omega \to \mathbb{R}_+$ *einfache Funktionen und* $c \in \mathbb{R}_+$, *so gilt:*

(i) $\displaystyle \int_\Omega (c\varphi)\, d\mu = c \int_\Omega \varphi\, d\mu,$

(ii) $\displaystyle \int_\Omega (\varphi + \psi)\, d\mu = \int_\Omega \varphi\, d\mu + \int_\Omega \psi\, d\mu,$

(iii) $\displaystyle \varphi \leqslant \psi \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega \varphi\, d\mu \leqslant \int_\Omega \psi\, d\mu.$

b) *Sind* $\varphi_k : \Omega \to \mathbb{R}_+$, $k \geqslant 1$, *und* $\psi : \Omega \to \mathbb{R}_+$ *einfache Funktionen mit* $\varphi_k \uparrow \psi$, *so gilt*

(iv) $\displaystyle \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi_k\, d\mu = \int_\Omega \psi\, d\mu.$

Beweis. a) (i) und (ii) sind trivial, und (iii) folgt aus (ii), da $\varphi_1 := \psi - \varphi$ ebenfalls eine nicht-negative einfache Funktion ist.

b) Zum Beweis von (iv) müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1. Fall: $\int \psi \, d\mu = \infty$.

In diesem Fall gibt es ein $c > 0$ und eine Menge $A \in \mathfrak{A}$ mit

$$\psi \geqslant c\chi_A \quad \text{und} \quad \mu(A) = \infty.$$

Wir definieren

$$A_k := \{x \in A : \varphi_k(x) \geqslant c/2\} \in \mathfrak{A}.$$

Da $\varphi_k \uparrow \psi$, folgt $A_k \uparrow A$, also $\lim \mu(A_k) = \infty$. Nun ist $\varphi_k \geqslant \frac{c}{2}\chi_{A_k}$, also

$$\int \varphi_k \, d\mu \geqslant \frac{c}{2}\mu(A_k) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k \, d\mu = \infty.$$

2. Fall: $\int \psi \, d\mu < \infty$.

Wir definieren $\psi_k := \psi - \varphi_k$. Es gilt $\psi_k \downarrow 0$. Die Behauptung (iv) ist gleichbedeutend mit

$$\lim_{k\to\infty} \int \psi_k \, d\mu = 0.$$

Sei $M := \sup\{\psi_1(x) : x \in \Omega\} \in \mathbb{R}_+$ und

$$S := \{x \in \Omega : \psi_1(x) > 0\}.$$

Da $\int \psi_1 d\mu < \infty$, folgt $\mu(S) < \infty$. Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben und

$$S_k := \{x \in S : \psi_k(x) \leqslant \varepsilon\}$$

Wegen $\psi_k \downarrow 0$ folgt $S_k \uparrow S$, also $\mu(S_k) \uparrow \mu(S)$. Es gilt dann

$$\psi_k(x) \begin{cases} = 0 & \text{für } x \in \Omega \setminus S, \\ \leqslant M & \text{für } x \in S \setminus S_k, \\ \leqslant \varepsilon & \text{für } x \in S_k, \end{cases}$$

also

$$\int \psi_k \, d\mu \leqslant \varepsilon\mu(S_k) + M(\mu(S) - \mu(S_k)) \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \int \psi_k \, d\mu \leqslant \varepsilon\mu(S).$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt die Behauptung.

B. Im zweiten Schritt definieren wir jetzt das Integral einer beliebigen nicht-negativen messbaren Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Nach Satz 5 gibt es eine aufsteigende Folge von nicht-negativen einfachen Funktionen $\varphi_k : \Omega \to \mathbb{R}_+$ mit $\varphi_k \uparrow f$. Wir setzen

$$\int_\Omega f \, d\mu := \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi_k \, d\mu \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Da die Folge $\int \varphi_k \, d\mu$, $k \geqslant 1$, monoton wachsend ist, existiert der Limes immer eigentlich oder uneigentlich als Element von $\overline{\mathbb{R}}_+$. Es ist aber noch zu zeigen, dass die Definition unabhängig von der Folge der einfachen Funktionen ist, die gegen f konvergiert.

Beweis der Wohldefiniertheit. Sei $\psi_k : \Omega \to \mathbb{R}_+$, $k \geqslant 1$, eine zweite Folge nicht-negativer einfacher Funktionen mit $\psi_k \uparrow f$. Aus Symmetriegründen genügt es zu zeigen, dass

$$\lim_{k\to\infty} \int \varphi_k \, d\mu \geqslant \lim_{m\to\infty} \int \psi_m \, d\mu.$$

Für $m \geqslant 1$ und $k \geqslant 1$ sei $\varphi_{mk} := \inf(\varphi_k, \psi_m)$. Für festes m gilt $\varphi_{mk} \uparrow_{k=1}^{\infty} \psi_m$, also nach Satz 6 (iv)

$$\lim_{k\to\infty} \int \varphi_k \, d\mu \geqslant \lim_{k\to\infty} \int \varphi_{mk} \, d\mu = \int \psi_m \, d\mu.$$

Da dies für alle m gilt, folgt die Behauptung.

Satz 7. *Sei* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein Maßraum.*

a) *Sind* $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *messbare Funktionen und* $c \in \mathbb{R}_+$, *so gilt:*

(i) $\displaystyle\int_\Omega (cf) d\mu = c \int_\Omega f \, d\mu,$

(ii) $\displaystyle\int_\Omega (f+g) d\mu = \int_\Omega f \, d\mu + \int_\Omega g \, d\mu,$

(iii) $\displaystyle f \leqslant g \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega f \, d\mu \leqslant \int_\Omega g \, d\mu.$

b) *Seien* $f_k : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $k \geqslant 1$, *und* $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *messbare Funktionen mit* $f_k \uparrow g$, *so gilt*

(iv) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \, d\mu = \int_\Omega g \, d\mu.$

Beweis. Der (einfache) Beweis von a) sei der Leserin überlassen.

b) Für jedes k gibt es eine aufsteigende Folge von einfachen Funktionen $\varphi_{kj} : \Omega \to \mathbb{R}_+$, $j \geqslant 1$, mit

$$\varphi_{kj} \uparrow_{j=1}^{\infty} f_k.$$

Setzt man $\psi_m := \sup\{\varphi_{kj} : k, j \leqslant m\}$, so folgt $\psi_m \uparrow g$, also nach Definition

$$\lim_{m\to\infty} \int \psi_m d\mu = \int g d\mu.$$

Andrerseits ist $\psi_m \leqslant f_m \leqslant g$ für alle $m \geqslant 1$, also

$$\int \psi_m d\mu \leqslant \int f_m d\mu \leqslant \int g d\mu.$$

Daraus folgt (iv), q.e.d.

Integrierbarkeit

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine numerische Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ist bekanntlich (nach Corollar zu Satz 4) genau dann messbar (bzgl. $\mathfrak{A}$), wenn die beiden nicht-negativen Funktionen f_+ und f_- messbar sind. Es gilt $f = f_+ - f_-$.

Die Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt *μ-integrierbar* (oder kurz integrierbar), wenn f messbar ist, und für die beiden Funktionen $f_+, f_- : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ gilt

$$\int_\Omega f_+ d\mu < \infty \quad \text{und} \quad \int_\Omega f_- d\mu < \infty.$$

Man setzt dann

$$\int_\Omega f d\mu := \int_\Omega f_+ d\mu - \int_\Omega f_- d\mu \in \mathbb{R}.$$

Ist $\mu = \lambda^n$ das Lebesguesche Maß, so sagt man statt λ^n-integrierbar auch *Lebesgue-integrierbar.*

Man beachte: Wir hatten für jede nicht-negative messbare Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ das Integral $\int f d\mu \in \overline{\mathbb{R}}_+$ definiert. f heißt aber nur dann integrierbar, wenn $\int f d\mu < \infty$.

Satz 8. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine $\mathfrak{A}$-messbare Funktion.*

a) *f ist genau dann integrierbar, wenn* $\int_\Omega |f| d\mu < \infty$.

b) *Es gebe nicht-negative messbare Funktionen $f_1, f_2 : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mit $f = f_1 - f_2$ und*

$$\int_\Omega f_k d\mu < \infty \quad \textit{für } k = 1, 2.$$

(Es wird natürlich vorausgesetzt, dass die Differenz $f_1 - f_2$ auf ganz Ω definiert ist, d.h. f_1 und f_2 nehmen in keinem Punkt x gleichzeitig den Wert ∞ an.)
Dann ist f integrierbar mit

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f_1 d\mu - \int_\Omega f_2 d\mu.$$

Beweis. a) Die Behauptung folgt daraus, dass $|f| = f_+ + f_-$ und $f_+ \leqslant |f|$, $f_- \leqslant |f|$.

b) Da $|f| \leqslant f_1 + f_2$, folgt $\int |f| d\mu < \infty$, also ist f nach Teil a) integrierbar. Außerdem gilt $f_1 \geqslant f_+$, also ist

$$g := f_1 - f_+ = f_2 - f_-$$

eine nicht-negative messbare Funktion mit $\int g d\mu < \infty$. Es folgt unter Benutzung von Satz 7 a) (ii)

$$\begin{aligned} \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu &= \int (f_+ + g) d\mu - \int (f_- + g) d\mu \\ &= \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu = \int f d\mu, \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Satz 9. *Seien $f,g:\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ integrierbare Funktionen auf dem Maßraum $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$.*

i) *Für jedes $c\in\mathbb{R}$ ist die Funktion cf integrierbar mit*
$$\int_\Omega (cf)d\mu = c\int_\Omega f d\mu.$$

ii) *Ist $f+g$ auf ganz Ω definiert, so ist auch $f+g$ integrierbar mit*
$$\int_\Omega (f+g)d\mu = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu.$$

iii) *Aus $f\leqslant g$ folgt* $\displaystyle\int_\Omega f d\mu \leqslant \int_\Omega g d\mu.$

iv) *Man hat die Abschätzung* $\displaystyle\left|\int_\Omega f d\mu\right| \leqslant \int_\Omega |f| d\mu.$

Beweis. i) Für $c=0$ ist die Behauptung trivial, für $c>0$ folgt sie aus $(cf)_+ = cf_+$ und $(cf)_- = cf_-$, und für $c<0$ aus $(cf)_+ = cf_-$ und $(cf)_- = cf_+$.

ii) Aus $F := f+g$ folgt $F = (f_+ + g_+) - (f_- + g_-)$. Nach Satz 8 b) ist deshalb $F = f+g$ integrierbar und es gilt
$$\begin{aligned}\int (f+g)d\mu &= \int (f_+ + g_+)d\mu - \int (f_- + g_-)d\mu\\ &= \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu + \int g_+ d\mu - \int g_- d\mu\\ &= \int f d\mu + \int g d\mu.\end{aligned}$$

iii) Falls $f\leqslant g$, folgt $f_+\leqslant g_+$ und $f_-\geqslant g_-$. Daraus ergibt sich
$$\int f d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu \leqslant \int g_+ d\mu - \int g_- d\mu = \int g d\mu, \quad \text{q.e.d.}$$

iv) Dies folgt aus iii), da $-|f|\leqslant f\leqslant |f|$.

Integration komplexwertiger Funktionen. Die Definition der Integrierbarkeit einer komplexwertigen Funktion
$$f:\Omega\to\mathbb{C}$$
wird auf den reellen Fall zurückgeführt. Sei $f = f_1 + if_2$ die Zerlegung in Real- und Imaginärteil. f heißt integrierbar, falls f_1 und f_2 integrierbar sind und man setzt dann
$$\int_\Omega f d\mu := \int_\Omega f_1 d\mu + i\int_\Omega f_2 d\mu.$$

Bezeichnung. Man bezeichnet mit $\mathcal{L}^1(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$, und kürzer auch $\mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$ oder $\mathcal{L}^1(\mu)$ die Menge aller auf dem Maßraum $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ integrierbaren Funktionen
$$f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}.$$

(Der Buchstabe $\mathcal{L}$ erinnert an Lebesgue.)

Satz 9 besagt, dass $\mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$ ein reeller Vektorraum ist und die Abbildung

$$I : \mathcal{L}^1(\Omega,\mu) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto I(f) := \int_\Omega f d\mu$$

ein lineares, monotones Funktional auf $\mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$.

Im Fall des Lebesgue-Borelschen Maßes schreibt man statt $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\lambda^n)$ kurz $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)d^n x \quad \text{oder} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \quad \text{statt} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x)d\lambda^n(x).$$

Satz 10. *Sei $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ ein Maßraum.*

a) *Für eine $\mathfrak{A}$-messbare numerische Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ gilt*

$$\int_\Omega |f|d\mu = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\} \text{ ist Nullmenge.}$$

b) *Ist $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine μ-integrierbare Funktion, so ist*

$$\{x \in \Omega : f(x) = \pm\infty\}$$

eine Nullmenge.

c) *Seien $f,g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ zwei $\mathfrak{A}$-messbare Funktionen, so dass*

$$\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}$$

eine Nullmenge ist. Dann ist f genau dann integrierbar, wenn g integrierbar ist und es gilt in diesem Fall

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega g d\mu.$$

Beweis. a) Wir setzen $S := \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$. Da f messbar ist, liegt S in $\mathfrak{A}$.

Sei zunächst vorausgesetzt, dass $\int |f|d\mu = 0$. Für jede natürliche Zahl $k \geqslant 1$ definieren wir

$$\varphi_k := \inf\{k|f|, \chi_S\}.$$

Dann gilt $\varphi_k \uparrow \chi_S$. Da $\varphi_k \leqslant k|f|$, ist $\int \varphi_k d\mu = 0$, woraus folgt $\int \chi_S d\mu = 0$. Also ist S eine Nullmenge.

Sei umgekehrt vorausgesetzt, dass S eine Nullmenge ist. Wir definieren

$$\psi_k := \inf\{k\chi_S, |f|\}.$$

Dann gilt $\psi_k \uparrow |f|$. Da $\int \psi_k d\mu = 0$ für alle $k \geqslant 1$, folgt $\int |f|d\mu = 0$.

b) Da f integrierbar ist, folgt $\int |f|d\mu =: M < \infty$. Sei $S := \{f = \pm\infty\}$. Für alle $k \geqslant 1$ gilt $k\chi_S \leqslant |f|$. Daraus folgt $\int \chi_S d\mu \leqslant M/k$ für alle k, also $\int \chi_S d\mu = \mu(S) = 0$.

c) Sei $S := \{f \neq g\} \in \mathfrak{A}$. Wir definieren $h : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ durch

$$h(x) := \begin{cases} f(x) = g(x), & \text{falls } x \in \Omega \setminus S, \\ 0, & \text{falls } x \in S, \end{cases}$$

und $f_1 := f\chi_S$. Die Funktionen h und f_1 sind messbar und nach a) gilt $\int |f_1| d\mu = 0$. Da $f = h + f_1$, ist f genau dann integrierbar, wenn h integrierbar ist. Ebenso ist g genau dann integrierbar, wenn h es ist. Daraus folgt die Behauptung.

Sprechweise *"fast überall"*. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und P eine Aussage über die Punkte $x \in \Omega$ (d.h. eine Abbildung $P : \Omega \to \{\texttt{true}, \texttt{false}\}$). Man sagt, P gelte *μ-fast überall*, falls die Menge der Punkte $x \in \Omega$, für die $P(x)$ falsch ist, eine Nullmenge ist. Im Falle des Lebesgue-Maßes λ sagt man statt λ-fast überall auch *Lebesgue-fast überall*.

Damit lässt sich der Inhalt von Satz 10 so ausdrücken:

a) $\int |f| d\mu = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ fast überall.

b) f integrierbar $\Rightarrow |f| < \infty$ fast überall.

c) $f = g$ fast überall $\Rightarrow \int f d\mu = \int g d\mu$.

Satz 10 zeigt, dass es keine große Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet, nur solche integrierbare Funktionen zu betrachten, die überall endlich sind. Denn sei $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine integrierbare Funktion, die nicht überall endlich ist. Dann ist $N := \{f = \pm\infty\} \in \mathfrak{A}$ eine Nullmenge. Ändert man f ab zu

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in \Omega \setminus N, \\ 0, & \text{falls } x \in N, \end{cases}$$

so erhält man eine überall endliche integrierbare Funktion $\tilde{f} : \Omega \to \mathbb{R}$, die fast überall gleich f ist, also auch dasselbe Integral besitzt.

Integration über Teilmengen

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $Z \subset \Omega$ eine messbare Teilmenge (d.h. $Z \in \mathfrak{A}$). Eine messbare Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt über Z integrierbar, wenn die Funktion $\chi_Z f$ integrierbar ist und man setzt dann

$$\int_Z f d\mu := \int_\Omega \chi_Z f d\mu.$$

Ist f über Z integrierbar und ist $Y \subset Z$ eine messbare Teilmenge, so ist f auch über Y integrierbar, denn $|\chi_Y f| \leqslant |\chi_Z f|$. Ist f über die messbaren Teilmengen $Z_1, Z_2 \subset \Omega$ integrierbar, so auch über $Z_1 \cup Z_2$. Dies folgt aus $|\chi_{Z_1 \cup Z_2} f| \leqslant |\chi_{Z_1} f| + |\chi_{Z_2} f|$.

Ist die Funktion $g : Z \to \overline{\mathbb{R}}$ nur auf Z definiert, so heißt sie über Z integrierbar, wenn die trivial auf Ω fortgesetzte Funktion

$$\tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x), & \text{falls } x \in Z, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

über Ω integrierbar ist und man setzt

$$\int_Z g d\mu := \int_\Omega \tilde{g} d\mu. \qquad \text{(Bemerkung: Es gilt } \tilde{g} = \chi_Z \tilde{g}.)$$

Dies ist äquivalent zu folgender Bedingung: Man betrachte den Maßraum

$$(Z, \mathfrak{A} \cap Z, \mu \mid \mathfrak{A} \cap Z),$$

vgl. Beispiel (1.7). Die *Spur* $\mathfrak{A}_Z := \mathfrak{A} \cap Z = \{A \in \mathfrak{A} : A \subset Z\}$ ist eine σ-Algebra auf Z und $\mu \mid \mathfrak{A}_Z$ ist ein Maß. g ist genau dann über Z integrierbar, wenn es $(\mu \mid \mathfrak{A}_Z)$-integrierbar ist.

Wir verwenden gelegentlich folgende Sprechweise: Eine messbare Teilmenge $A \subset \Omega$ heißt *integrierbar*, wenn die charakteristische Funktion χ_A integrierbar ist. Das bedeutet: $A \subset \Omega$ ist genau dann integrierbar, wenn A messbar ist mit $\mu(A) < \infty$.

Maße mit Dichten

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\varphi : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ eine nicht-negative messbare Funktion. Für jede Menge $A \in \mathfrak{A}$ ist dann auch $\chi_A \varphi$ eine nicht-negative messbare Funktion, also das Integral

$$\nu(A) := \int_A \varphi d\mu := \int_\Omega \chi_A \varphi d\mu \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

definiert (der Wert ∞ kann vorkommen).

Satz 11. *Sei* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* $\varphi : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *eine messbare Funktion. Dann ist die Abbildung*

$$\nu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+, \quad A \mapsto \int_A \varphi d\mu,$$

ein Maß auf $\mathfrak{A}$.

Dieses Maß heißt *Maß mit Dichte* φ bzgl. μ und wird auch mit $\nu = \varphi \cdot \mu$ bezeichnet.

Beweis. i) $\nu(\emptyset) = 0$ ist klar.

ii) Seien $A, B \in \mathfrak{A}$ punktfremd. Dann gilt $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$, woraus folgt

$$\int_{A \cup B} \varphi d\mu = \int_A \varphi d\mu + \int_B \varphi d\mu,$$

also $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$.

iii) Es ist noch zu zeigen, dass ν stetig von unten ist (§ 2, Satz 1). Sei $A_k \in \mathfrak{A}$, $k \geqslant 1$, eine Folge mit $A_k \uparrow A$. Daraus folgt $\chi_{A_k} \uparrow \chi_A$, also auch $\chi_{A_k} \varphi \uparrow \chi_A \varphi$. Nach Satz 7 ergibt sich damit

$$\lim_{k \to \infty} \int_{A_k} \varphi d\mu = \int_A \varphi d\mu,$$

also $\nu(A_k) \uparrow \nu(A)$, q.e.d.

Aufgaben

4.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\Omega) < \infty$ und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine messbare, beschränkte Funktion, und zwar gelte $A \leqslant f(x) < B$ für alle $x \in \Omega$ mit Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$. Sei

$$A = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = B$$

eine Unterteilung des Intervalls $[A, B]$ und $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$ eine beliebige Zwischenstelle. Das Symbol

$$\mathcal{Z} := \big((t_k)_{0 \leqslant k \leqslant m}, (\xi_k)_{1 \leqslant k \leqslant m}\big)$$

bezeichne die Zusammenfassung der Teilpunkte und Zwischenstellen. Dann heißt

$$S(\mathcal{Z}, f) := \sum_{k=1}^{m} \xi_k \cdot \mu(\{t_{k-1} \leqslant f < t_k\})$$

Lebesguesche Summe der Funktion f bzgl. $\mathcal{Z}$. Die *Feinheit* (oder *Maschenweite*) von $\mathcal{Z}$ ist definiert als

$$\mu(\mathcal{Z}) := \max_{1 \leqslant k \leqslant m} (t_k - t_{k-1}) \,.$$

Man beweise:

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{\mu(\mathcal{Z}) \to 0} S(\mathcal{Z}, f).$$

Vgl. dazu auch den Begriff der Riemannschen Summen in An. 1, §18, Satz 8.

4.2. Man zeige: Jede monoton wachsende (oder fallende) Funktion $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ ist Borel-messbar.

4.3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine μ-integrierbare Funktion.

Man zeige: Für jede beschränkte messbare Funktion $g : \Omega \to \mathbb{R}$ ist das Produkt fg wieder μ-integrierbar.

4.4. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f_k : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $k \geqslant 1$, eine Folge nicht-negativer messbarer Funktionen. Man beweise:

$$\int_\Omega (\liminf_{k \to \infty} f_k) d\mu \leqslant \liminf_{k \to \infty} \int_\Omega f_k d\mu$$

(Lemma von Fatou).

§ 5 Konvergenz- und Approximations-Sätze

Der Vorteil der Lebesgueschen Integrationstheorie gegenüber der Riemannschen ist vorallem durch die stärkeren Konvergenzsätze begründet. Wir beweisen hier die zwei wichtigsten Konvergenzsätze, den Satz von der monotonen Konvergenz und den Satz von der majorisierten Konvergenz. Der letztere Satz sagt aus, dass bei einer Folge (f_k) von integrierbaren Funktionen, die punktweise gegen eine Funktion f konvergiert, Integration und Limesbildung vertauscht werden kann, falls nur alle Funktionen $|f_k|$ eine gemeinsame integrierbare Majorante besitzen. Außerdem zeigen wir in diesem Paragraphen, dass jede integrierbare Funktion beliebig genau (im Sinne der sog. L^1-Norm) durch Treppenfunktionen approximiert werden kann. Auf dem $\mathbb{R}^n$ ist eine solche Approximation auch durch stetige Funktionen mit kompaktem Träger möglich.

Satz 1 (Satz von der monotonen Konvergenz von B. Levi)**.** *Sei* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein Maßraum und*

$$f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots \leqslant f_k \leqslant f_{k+1} \leqslant \ldots$$

eine monoton wachsende Folge von integrierbaren Funktionen $f_k : \Omega \to \mathbb{R}$. *Es gebe eine Schranke* $M < \infty$ *mit*

$$\int f_k d\mu \leqslant M \quad \textit{für alle } k \geqslant 1.$$

Dann ist auch die Funktion $f := \lim_k f_k : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *integrierbar und es gilt*

$$\int f d\mu = \lim_{k\to\infty} \int f_k d\mu.$$

Eine analoge Aussage gilt natürlich auch für monoton fallende Folgen integrierbarer Funktionen.

Beweis. Wir definieren die Funktionen $g_k := f_k - f_1$. Dann bilden die $g_k : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $k \geqslant 1$, eine monoton wachsende Folge nicht-negativer messbarer Funktionen. Jedes g_k ist integrierbar mit

$$\int g_k d\mu = \int f_k d\mu - \int f_1 d\mu \leqslant M - \int f_1 d\mu =: M_1 < \infty$$

Aus § 4, Satz 4 und Satz 7 (iv) folgt, dass $g := \lim_k g_k$ eine nicht-negative messbare Funktion ist mit

$$\int g d\mu = \lim_k \int g_k d\mu \leqslant M_1$$

Also ist g auch integrierbar und durch Addition von $\int f_1 d\mu$ auf beiden Seiten folgt die Behauptung.

O. Forster, *Analysis 3*, Aufbaukurs Mathematik,
DOI 10.1007/978-3-8348-2374-8_5, © Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden 2012

Riemannsches und Lebesguesches Integral

Wir hatten in An. 1, §18 das Riemannsche Integral für gewisse beschränkte Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf einem kompakten Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ definiert. Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung (An. 1, §18, Satz 3) erlaubt es in vielen Fällen, das Integral explizit auszurechnen. Es ist deshalb nützlich, den Zusammenhang zwischen dem Riemannschen und Lebesgueschen Integral zu untersuchen. Für das Lebesguesche Integral legen wir den Maßraum $([a,b], \mathcal{B}[a,b], \lambda)$ zugrunde. Dabei sei

$$\mathcal{B}[a,b] = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [a,b] = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A \subset [a,b]\}$$

die σ-Algebra der Borelschen Teilmengen des Intervalls $[a,b]$ und $\lambda : \mathcal{B}[a,b] \to \mathbb{R}$ die Einschränkung des Lebesgue-Borelschen Maßes $\lambda^1 : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}$ auf $\mathcal{B}[a,b]$.

1) Zunächst stellen wir fest: Es gibt Lebesgue-integrierbare beschränkte Funktionen auf $[a,b]$, die nicht Riemann-integrierbar sind. Ein einfaches Beispiel dafür ist die Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$g(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion ist nicht Riemann-integrierbar, vgl. An. 1, Beispiel (18.2), aber Lebesgue-integrierbar mit

$$\int_{[a,b]} g(x)d\lambda(x) = 0,$$

da die Menge $[a,b] \cap \mathbb{Q}$ eine Nullmenge ist.

2) Sei nun umgekehrt vorausgesetzt, dass $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion ist. Nach Definition des Riemannschen Integrals gibt es dann zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ und

$$\int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx < \varepsilon.$$

Dabei ist eine Treppenfunktion φ im Sinne der Riemannschen Intergrationstheorie wie folgt definiert: Es gibt eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ des Intervalls und reelle Konstanten c_i so dass $\varphi \mid]t_{i-1}, t_i[= c_i$ für $1 \leqslant i \leqslant m$. (Die Werte der Treppenfunktion in den Teilpunkten sind beliebig reell.) Das Integral von φ ist definiert als

$$\int_a^b \varphi(x)dx := \sum_{i=1}^m c_i(t_i - t_{i-1})$$

Eine solche Treppenfunktion ist eine einfache Funktion auf dem Messraum $([a,b], \mathcal{B}[a,b])$ und das Lebesguesche Integral $\int_{[a,b]} \varphi(x)d\lambda(x)$ stimmt mit dem Riemannschen Integral von φ überein.

Wir wählen nun für alle $k \geqslant 1$ Treppenfunktionen φ_k, ψ_k mit $\varphi_k \leqslant f \leqslant \psi_k$ und

$$\int_a^b \psi_k(x)dx - \int_a^b \varphi_k(x)dx < \frac{1}{k}.$$

Wir können annehmen, dass die Folge der φ_k monoton wachsend ist (anderfalls ersetze man φ_k durch $\tilde{\varphi}_k := \sup(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$) und die Folge der ψ_k monoton fallend. Nach Definition des Riemannschen Integrals gilt dann

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_k \int_a^b \varphi_k(x)dx = \lim_k \int_a^b \psi_k(x)dx.$$

Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz konvergiert die Folge der φ_k gegen eine Borel-messbare Funktion $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ und es gilt

$$\int_{[a,b]} \varphi(x)d\lambda(x) = \lim_k \int_{[a,b]} \varphi_k(x)d\lambda(x)$$

Ebenso konvergiert die Folge der ψ_k gegen eine Borel-messbare Funktion $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$\int_{[a,b]} \psi(x)d\lambda(x) = \lim_k \int_{[a,b]} \psi_k(x)d\lambda(x)$$

Da aber das Lebesguesche und Riemannsche Integral für die Funktionen φ_k, ψ_k übereinstimmen, folgt

$$\int_{[a,b]} \varphi(x)d\lambda(x) = \int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} \psi(x)d\lambda(x)$$

Da $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$, ist $\psi - \varphi \geqslant 0$. Aus

$$\int_{[a,b]} (\psi(x) - \varphi(x))d\lambda(x) = 0$$

folgt nun mit § 4, Satz 10, dass $\varphi = \psi$ fast überall, also auch $f = \varphi$ fast überall. Damit haben wir folgendes Resultat:

Satz 2. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion auf dem kompakten Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Dann ist f nach evtl. Abänderung auf einer Lebesgueschen Nullmenge Borel-messbar und das Riemannsche Integral stimmt mit dem Lebesgueschen Integral überein:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)d\lambda(x).$$

Dieser Satz rechtfertigt auch die von uns schon in § 4 vereinbarte Schreibweise $\int f(x)dx$ statt $\int f(x)d\lambda(x)$.

Wir hatten schon in der Analysis 1 beim Riemannschen Integral gesehen, dass man bei punktweiser Konvergenz im Allgemeinen Limesbildung und Integration nicht vertauschen darf.

Wir zeigen jetzt im Rahmen der Lebesgueschen Integrationstheorie, dass unter der Zusatzbedingung, dass die Funktionenfolge eine integrierbare Majorante besitzt, die Vertauschbarkeit von Limesbildung und Integration gewährleistet ist.

Satz 3 (Satz von der majorisierten Konvergenz von H. Lebesgue)**.** *Sei* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* $f_k : \Omega \to \mathbb{R}$*,* $k \geqslant 1$*, eine Folge integrierbarer Funktionen, die punktweise* μ*-fast überall gegen eine Funktion* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *konvergiere. Es gebe eine integrierbare Funktion* $F : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$*, so dass*

$$|f_k| \leqslant F \qquad \text{für alle } k \geqslant 1.$$

Dann ist f *(nach evtl. Abänderung auf einer Nullmenge) integrierbar und es gilt*

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k d\mu.$$

Außerdem gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |f - f_k|\, d\mu = 0.$$

Bemerkung. Ist der Maßraum vollständig, so ist natürlich keine Abänderung von f nötig.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$, so dass $f(x) = \lim_k f_k(x)$ für alle $x \in \Omega \smallsetminus N$. Indem wir alle Funktionen mit $\chi_{\Omega \smallsetminus N}$ multiplizieren, dürfen wir annehmen, dass

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \qquad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Man kann schreiben

$$f = \limsup_k f_k = \inf_k g_k \quad \text{mit} \quad g_k := \sup\{f_i : i \geqslant k\}.$$

Die Funktion g_k ist monoton wachsender Limes der integrierbaren Funktionen

$$g_{k\nu} := \sup\{f_i : k \leqslant i \leqslant \nu\}.$$

Da $\int g_{k\nu} d\mu \leqslant \int F d\mu =: M < \infty$ für alle $\nu \geqslant k$, ist die Funktion g_k nach dem Satz von der monotonen Konvergenz integrierbar. Die Folge $(g_k)_{k\geqslant 1}$ konvergiert monoton fallend gegen f. Wegen $\int g_k d\mu \geqslant -\int F d\mu = -M$ kann man wieder den Satz von der monotonen Konvergenz anwenden und erhält, dass f integrierbar ist mit

$$\int f d\mu = \lim_{k\to\infty} \int g_k d\mu.$$

Ebenso gilt

$$f = \liminf_k f_k = \sup_k h_k \quad \text{mit} \quad h_k := \inf\{f_i : i \geqslant k\}.$$

Wie oben schließt man, dass die Funktionen h_k, $k \geqslant 1$, integrierbar sind und

$$\int f d\mu = \lim_{k\to\infty} \int h_k d\mu.$$

Da $h_k \leqslant f_k \leqslant g_k$ für alle k, folgt

$$\int f d\mu = \lim_{k\to\infty} \int f_k d\mu.$$

Außerdem folgt

$$|f - f_k| \leqslant g_k - h_k,$$

also

$$\lim_k \int |f - f_k| d\mu \leqslant \lim_k \Big(\int g_k d\mu - \int h_k d\mu \Big) = 0.$$

Damit ist Satz 3 vollständig bewiesen.

Eine oft nützliche Folgerung aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz ist der folgende Ausschöpfungssatz.

Satz 4. *Sei* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* $\Omega_m \subset \Omega$, $m \geqslant 1$, *eine Folge von messbaren Teilmengen mit* $\Omega_m \uparrow \Omega$. *Weiter sei* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *eine messbare Funktion, die über jedes* Ω_m *integrierbar ist. Falls*

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\Omega_m} |f| d\mu < \infty,$$

so ist f *auch über ganz* Ω *integrierbar und es gilt*

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_{\Omega_m} f d\mu.$$

Beweis. Wir setzen $f_m := f\chi_{\Omega_m}$. Dann gilt

$$\lim_m f_m(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Weiter sei $F := |f|$ und $F_m := |f_m|$. Dann gilt $F_m \uparrow F$. Da die Folge der Integrale

$$\int_\Omega F_m d\mu = \int_{\Omega_m} |f| d\mu, \qquad m \geqslant 1,$$

nach Voraussetzung beschränkt ist, ergibt sich aus dem Satz von der monotonen Konvergenz, dass F integrierbar ist. Da $|f_m| \leqslant F$ für alle m, lässt sich nun auf die Folge (f_m) der Satz von der majorisierten Konvergenz anwenden und man erhält, dass f auf Ω integrierbar ist. Außerdem gilt

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_m \int_\Omega f_m d\mu = \lim_m \int_{\Omega_m} f d\mu, \quad \text{q.e.d.}$$

Bemerkung. Man kann die Voraussetzung $\Omega_m \uparrow \Omega$ abschwächen zu $\Omega_m \uparrow \Omega \smallsetminus N$, wobei N eine Nullmenge ist, denn $\int_N |f| d\mu = 0$.

Lokal-integrierbare Funktionen. Satz 4 ist insbesondere in folgender Situation anwendbar. Es sei der n-dimensionale Lebesguesche Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda^n)$ zugrunde gelegt. Eine messbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *lokal-integrierbar*, falls jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung U besitzt, so dass f über U integrierbar ist. Wegen des Heine-Borelschen Überdeckungssatzes ist dies genau dann der Fall, wenn f über jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar ist. Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ die Menge aller lokal-integrierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Beispielsweise gehört jede auf $\mathbb{R}^n$ stetige Funktion zu $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Aus Satz 4 folgt nun: Eine lokal-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist genau dann über ganz $\mathbb{R}^n$ integrierbar, wenn

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{\|x\|\leqslant m} |f(x)| d^n x < \infty.$$

Uneigentliche Riemannsche Integrale

Man kann Satz 4 verwenden, um zu untersuchen, welche uneigentlichen Riemannschen Integrale auch als Lebesgue-Integrale existieren. Betrachten wir etwa folgende Situation: Sei

$$f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann ist für jedes $0 < \varepsilon < R < \infty$ die Beschränkung $f \mid [\varepsilon, R]$ Riemann-integrierbar, also auch Lebesgue-integrierbar. Das uneigentliche Riemann-Integral von f über das Intervall $]0,\infty[$ ist definiert als der Limes (falls existent)

$$\int_0^\infty f(x)dx := \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_\varepsilon^R f(x)dx.$$

Ist $f \geqslant 0$ und existiert der Limes, so ist f nach Satz 4 Lebesgue-integrierbar und das uneigentliche Riemann-Integral ist gleich dem Lebesgue-Integral. Im Allgemeinen reicht aber die Existenz des Limes nicht für die Lebesgue-Integrierbarkeit aus. Wir geben hierfür ein Beispiel.

(5.1) Sei $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \frac{\sin x}{x}.$$

Behauptung. Die Funktion f ist über das Intervall $]0,\infty[$ nicht Lebesgue-integrierbar, jedoch existiert das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Beweis. Wäre die Funktion f Lebesgue-integrierbar, so müsste nach § 4, Satz 8 auch die Funktion $|f|$ integrierbar sein. Nun ist aber für jede natürliche Zahl $k > 0$

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geqslant \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{k\pi},$$

also

$$\int_0^{k\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geqslant \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{k} \frac{1}{\nu}.$$

Da die harmonische Reihe divergiert, ist $\int_{\mathbb{R}_+} |f(x)|dx = \infty$, also f nicht Lebesgue-integrierbar. Jedoch ist f uneigentlich Riemann-integrierbar, d.h. es existiert der Grenzwert

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx =: \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \in \mathbb{R}.$$

Dies ergibt sich z.B. aus dem Leibnizschen Konvergenzkriterium für alternierende Reihen (An. 1, §7, Satz 4), da

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \quad \text{für alle } k > 0.$$

Wir werden den Wert

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

des uneigentlichen Riemann-Integrals in (13.12) mithilfe der Theorie der Fourier-Integrale ermitteln.

(5.2) Für jede reelle Zahl $s > 0$ existiert das uneigentliche Riemannsche Integral für die Gamma-Funktion

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx,$$

vgl. An. 1, §20. Da der Integrand positiv ist, existiert das Integral auch im Sinne von Lebesgue.

Für jede natürliche Zahl $k \geqslant 1$ erhält man mit der Substitution $t = kx$

$$\int_\varepsilon^R e^{-kx} x^{s-1} dx = \frac{1}{k^s} \int_{k\varepsilon}^{kR} e^{-t} t^{s-1} dt.$$

Durch Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ und $R \to \infty$ ergibt sich

$$\frac{\Gamma(s)}{k^s} = \int_0^\infty e^{-kx} x^{s-1} dx.$$

Auch dieses Integral existiert als Lebesguesches Integral.

(5.3) Wir wollen mit Hilfe von (5.2) und dem Satz von der monotonen Konvergenz die Formel

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(s)\zeta(s) \quad \text{für} \quad s > 1.$$

beweisen. Dabei ist

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s},$$

die Zeta-Reihe, die für $s > 1$ konvergiert, vgl. An. 1, Beispiel (20.6).

Wir entwickeln den Integranden für $x > 0$ in eine geometrische Reihe (man beachte $|e^{-x}| < 1$):

$$\frac{x^{s-1}}{e^x - 1} = \frac{x^{s-1}e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx} x^{s-1}.$$

Die einzelnen Summanden

$$f_k(x) := e^{-kx} x^{s-1}$$

sind nicht-negative Funktionen auf $\mathbb{R}_+$, die Lebesgue-integrierbar sind. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{R}_+} f_k(x) dx = \Gamma(s) \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^s}.$$

Da dies für $m \to \infty$ beschränkt bleibt, folgt aus dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_k(x) dx = \Gamma(s)\zeta(s), \quad \text{q.e.d.}$$

Dieses Resultat hatten wir bereits in An. 1, Beispiel (21.6) auf mühsamere Weise abgeleitet.

Die L^1-Norm

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Für eine messbare Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ definiert man eine Pseudonorm durch

$$\|f\|_{L^1} := \int_{\Omega} |f| d\mu \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Statt $\|f\|_{L^1}$ schreibt man zur Präzisierung auch $\|f\|_{L^1(\Omega)}$.

Wir notieren einige einfach zu beweisende Eigenschaften von $\| \, . \, \|_{L^1}$:

i) $\|f\|_{L^1} = 0 \iff f = 0$ fast überall,

ii) $\|cf\|_{L^1} = |c| \cdot \|f\|_{L^1}$ für alle $c \in \mathbb{R}$,

iii) $\|f + g\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}$, falls $f + g$ überall definiert.

Auf dem Vektorraum $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ nimmt $\|f\|_{L^1}$ nur reelle Werte an, ist also eine Seminorm

$$\| \, . \, \|_{L^1} : \mathcal{L}^1(\Omega, \mu) \to \mathbb{R}_+.$$

Das Integral

$$I : \mathcal{L}^1(\Omega, \mu) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto I(f) := \int_{\Omega} f \, d\mu$$

ist bzgl. $\| \, . \, \|_{L^1}$ stetig, d.h.

iv) $\lim\limits_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{L^1} = 0 \implies \lim\limits_{k\to\infty} \int_{\Omega} f_k d\mu = \int_{\Omega} f \, d\mu$

für $f, f_k \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$, $k \geqslant 1$. Dies folgt aus § 4, Satz 9 iv).

Da aus $\|f\|_{L^1} = 0$ nicht notwendig folgt $f = 0$, ist $\|\,.\,\|_{L^1}$ keine Norm. Dem kann man folgendermaßen abhelfen: Sei

$$\mathcal{N} := \{f \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mu) : \|f\|_{L^1} = 0\}.$$

Dies ist ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$. Nun betrachtet man den Quotienten-Vektorraum

$$L^1(\Omega,\mu) := \mathcal{L}^1(\Omega,\mu)/\mathcal{N}.$$

$L^1(\Omega,\mu)$ entsteht aus $\mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$ durch Identifikation von Funktionen, die fast überall gleich sind. Da fast überall gleiche Funktionen das gleiche Integral besitzen, ist das Integral für Elemente aus $L^1(\Omega,\mu)$ wohldefiniert und die Seminorm $\|\,.\,\|_{L^1}$ auf $\mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$ induziert eine Norm auf $L^1(\Omega,\mu)$, für die man dieselbe Bezeichnung verwendet.

Der Bequemlichkeit halber werden wir statt mit Äquivalenzklassen $[f] \in L^1(\Omega,\mu)$ mit deren Repräsentanten $f \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$ rechnen und z.B. von der L^1-Norm $\|f\|_{L^1}$ sprechen, obwohl es sich nur um eine Seminorm handelt.

Treppenfunktionen

Wir betrachten jetzt folgende Situation: Sei $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$ ein Mengenring mit $\mathfrak{A} = \langle\mathfrak{A}_0\rangle^\sigma$, so dass $\mu \mid \mathfrak{A}_0$ endlich ist. Ein Beispiel dafür ist der Lebesgue-Borelsche Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda^n)$, wobei $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)$ der Mengenring der endlichen Quadersummen ist.

Wir definieren nun den Vektorraum $\mathfrak{T}(\Omega) = \mathfrak{T}(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ der *Treppenfunktionen* als die Menge aller einfachen μ-integrierbaren Funktionen auf Ω. Dies sind alle endlichen Linearkombinationen

$$\varphi = \sum_{k=1}^{m} c_k\chi_{A_k}, \qquad c_k \in \mathbb{R}, \quad A_k \in \mathfrak{A} \text{ mit } \mu(A_k) < \infty.$$

Das Integral auf $\mathfrak{T}(\Omega)$ hat die einfache Gestalt

$$\mathfrak{T}(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad \varphi = \sum_{k=1}^{m} c_k\chi_{A_k} \mapsto \int \varphi d\mu := \sum_{k=1}^{m} c_k\mu(A_k)$$

und ist ein reelles lineares Funktional.

Der Vektorraum $\mathfrak{T}_0(\Omega) := \mathfrak{T}(\Omega,\mathfrak{A}_0,\mu)$ der *elementaren Treppenfunktionen* ist definiert als die Menge aller endlichen Linearkombinationen

$$\varphi = \sum_{k=1}^{m} c_k\chi_{S_k}, \qquad c_k \in \mathbb{R}, \quad S_k \in \mathfrak{A}_0.$$

$\mathfrak{T}_0(\Omega)$ ist ein Untervektorraum von $\mathfrak{T}(\Omega)$. Man hat also die Inklusionen

$$\mathfrak{T}_0(\Omega) \subset \mathfrak{T}(\Omega) \subset \mathcal{L}^1(\Omega,\mu).$$

Es gilt nun

Satz 5. *Der Vektorraum* $\mathfrak{T}_0(\Omega)$ *liegt bzgl. der* L^1*-Norm dicht in* $\mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$*, d.h. zu jeder integrierbaren Funktion* $f:\Omega\to\mathbb{R}$ *und jedem* $\varepsilon>0$ *gibt es eine elementare Treppenfunktion* $\varphi\in\mathfrak{T}_0(\Omega)$ *mit* $\|f-\varphi\|_{L^1}<\varepsilon$.

Beweis. Wir zeigen als erstes, dass $\mathfrak{T}(\Omega)$ dicht in $\mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$ liegt, und dann in einem zweiten Schritt, dass sich jede Treppenfunktion beliebig genau durch elementare Treppenfunktionen approximieren lässt.

1) Da jede integrierbare Funktion die Differenz zweier nicht-negativer integrierbaren Funktionen ist, brauchen wir die Aussage nur für den Fall $f\geqslant 0$ zu beweisen. Nach Definition der Integrierbarkeit gibt es dann eine Folge von nicht-negativen einfachen Funktionen $\varphi_k:\Omega\to\mathbb{R}_+$ mit $\varphi_k\uparrow f$ und

$$\int\varphi_k d\mu \quad \Big\uparrow_{k=1}^{\infty} \quad \int f d\mu.$$

Da $\int f d\mu<\infty$, sind die einfachen Funktionen φ_k integrierbar, also Treppenfunktionen und für genügend großes k gilt

$$\int f d\mu-\int\varphi_k d\mu=\int|f-\varphi_k|d\mu=\|f-\varphi_k\|_{L^1}<\varepsilon,\quad \text{q.e.d.}$$

2) Jetzt muss noch gezeigt werden, dass sich jede Treppenfunktion beliebig genau durch elementare Treppenfunktionen approximieren lässt. Da diese Funktionen endliche Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen sind, genügt es zu zeigen:

Zu jedem $A\in\mathfrak{A}$ mit $\mu(A)<\infty$ jedem $\varepsilon>0$ existiert ein $S\in\mathfrak{A}_0$ mit

$$\|\chi_A-\chi_S\|_{L^1}<\varepsilon.$$

Beweis hierfür: Es gilt $|\chi_A-\chi_S|=\chi_{A\triangle S}$, also

$$\|\chi_A-\chi_S\|_{L^1}=\int\chi_{A\triangle S}d\mu=\mu(A\triangle S).$$

Das Maß $\mu(A\triangle S)$ kann aber nach § 3, Zusatz zu Satz 7, durch geeignetes $S\in\mathfrak{A}_0$ beliebig klein gemacht werden, q.e.d.

(5.4) Beispiel. Wir betrachten den Lebesgue-Borelschen Maßraum $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\lambda^n)$ und den Mengenring der endlichen Quadersummen; es gilt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)=\langle\mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)\rangle^\sigma$. Der Vektorraum der elementaren Treppenfunktionen

$$\mathfrak{T}_0(\mathbb{R}^n):=\mathfrak{T}(\mathbb{R}^n,\mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n),\lambda^n).$$

besteht daher aus allen endlichen Linearkombinationen

$$\varphi=\sum_{k=1}^m c_k\chi_{Q_k}$$

von charakteristischen Funktionen halboffener Quader Q_k.

Satz 5 sagt also, dass sich jede Lebesgue-integrierbare Funktion $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ bzgl. der L^1-Norm beliebig genau durch solche elementare Treppenfunktionen $\varphi\in\mathfrak{T}_0(\mathbb{R}^n)$ approximieren lässt.

Stetige Funktionen mit kompaktem Träger

Für einen topologischen Raum X bezeichnen wir mit $C(X)$ den Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$. Unter dem *Träger* einer Funktion $f \in C(X)$ versteht man die abgeschlossene Hülle der Menge aller Punkte, in denen die Funktion von Null verschieden ist. Der Träger von f wird mit $\mathrm{Supp}(f)$ bezeichnet (von engl. und frz. support). Es gilt also

$$\mathrm{Supp}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

Sei nun speziell $X = U$ eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen mit $C_c(U)$ die Menge aller Funktionen $f \in C(U)$, deren Träger eine kompakte Teilmenge von U ist. Für jede Funktion $f \in C_c(U)$ gehört die durch 0 trivial fortgesetzte Funktion

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in U, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

zu $C_c(\mathbb{R}^n)$. Also lässt sich $C_c(U)$ in natürlicher Weise als Teilmenge von $C_c(\mathbb{R}^n)$ auffassen.

Wir brauchen noch eine technische Aussage über stetige Funktionen mit kompaktem Träger.

Lemma 1. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere offene Menge. Dann gibt es eine Folge von Funktionen $\beta_m \in C_c(U)$, $m \geqslant 1$, mit*

$$0 \leqslant \beta_m \leqslant 1 \quad \textit{und} \quad \beta_m \uparrow 1.$$

Beweis. 1) Wir zeigen zunächst: Zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset U$ gibt es eine Funktion $\beta \in C_c(U)$ mit $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ und $\beta \mid K = 1$.

Dies sieht man so: Falls $U = \mathbb{R}^n$, sei $r := 1$, andernfalls sei r der Randabstand von K in U, d.h.

$$r := \mathrm{dist}(K, \mathbb{R}^n \smallsetminus U) = \inf\{\|x - y\| : x \in K,\ y \in \mathbb{R}^n \smallsetminus U\}.$$

Da K kompakt ist, gilt $r > 0$, vgl. An. 2, Beispiel (3.5). Für $x \in U$ sei

$$\alpha(x) := \tfrac{2}{r}\,\mathrm{dist}(x, K).$$

Die Funktion α ist nach An. 2, Beispiel (3.5) stetig; es gilt $\alpha \mid K = 0$ und die Menge

$$\{x \in U : \alpha(x) \leqslant 1\} = \{x \in U : \mathrm{dist}(x, K) \leqslant \tfrac{r}{2}\}$$

ist kompakt. Deshalb kann man das gesuchte β als

$$\beta(x) := \max\{0, 1 - \alpha(x)\} \quad \text{für alle } x \in U$$

definieren.

2) Die Menge U ist σ-kompakt, d.h. es gibt eine Folge K_m von kompakten Teilmengen von U mit $K_m \uparrow U$. Dies ist klar für $U = \mathbb{R}^n$; andernfalls wähle man

$$K_m := \{x \in U : \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^n \smallsetminus U) \geqslant 1/m\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant m\}.$$

Zu jedem K_m gibt es eine Funktion $\beta_m \in C_c(U)$ gemäß Teil 1). Indem man nötigenfalls β_m durch $\sup\{\beta_m, \beta_{m-1}\}$ ersetzt, kann man annehmen, dass $\beta_m \geqslant \beta_{m-1}$ für alle $m \geqslant 2$. Die so konstruierte Folge β_m hat die gewünschten Eigenschaften. Damit ist das Lemma bewiesen.

Da jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ endliches Lebesgue-Maß hat, folgt, dass jede Funktion $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue-integrierbar ist. Wir werden nun umgekehrt beweisen, dass jede Lebesgue-integrierbare Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$ bzgl. der L^1-Norm sich beliebig genau durch stetige Funktionen mit kompaktem Träger approximieren lässt.

Satz 6. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\mathcal{L}^1(U) = \mathcal{L}^1(U, \mathcal{B}(U), \lambda^n)$ der Vektorraum der Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf U. Dann liegt $C_c(U)$ bzgl. der L^1-Norm dicht in $\mathcal{L}^1(U)$.*

Beweis. 1) Wir behandeln zunächst den Fall $U = \mathbb{R}^n$. Da nach Satz 5 die elementaren Treppenfunktionen dicht in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ liegen, ist nur zu zeigen, dass sich die charakteristische Funktion jeden Quaders Q beliebig genau bzgl. der L^1-Norm durch stetige Funktionen mit kompaktem Träger approximieren lässt. Der Quader ist ein Produkt von Intervallen, $Q = \prod_{\nu=1}^{n} I_\nu$, also

$$\chi_Q(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{\nu=1}^{n} \chi_{I_\nu}(x_\nu)$$

Die charakteristischen Funktionen χ_{I_ν} einer Veränderlichen lassen sich beliebig genau durch stetige Funktionen φ_ν mit kompaktem Träger approximieren, siehe Bild 5.1. Das Produkt $\prod_\nu \varphi_\nu(x_\nu)$ approximiert dann χ_Q.

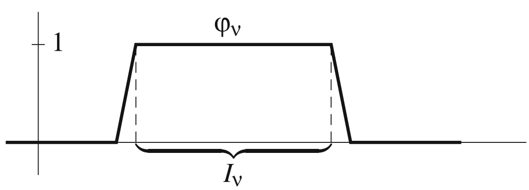


Bild 5.1

2) Sei jetzt $U \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige offene Teilmenge und $f \in \mathcal{L}^1(U)$. Wir setzen f durch 0 trivial zu einer Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ fort. Nach Teil 1) gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $G \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|\tilde{f} - G\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon/2.$$

Für die Beschränkung $g := (G \mid U) \in C(U) \cap \mathcal{L}^1(U)$ gilt dann

$$\|f - g\|_{L^1(U)} < \varepsilon/2.$$

Es genügt also, eine Funktion $h \in C_c(U)$ zu finden mit

$$\|g - h\|_{L^1(U)} < \varepsilon/2.$$

Dazu wählen wir eine Folge $\beta_m \in C_c(U)$ mit $\beta_m \uparrow 1$ nach Lemma 1. Dann gilt $\beta_m g \in C_c(U)$, $|\beta_m g| \leqslant |g|$ für alle m, und

$$\lim_{m\to\infty} \beta_m(x)g(x) = g(x) \quad \text{für alle } x \in U.$$

Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz (Satz 3) gilt

$$\lim_{m\to\infty} \int_U |g - \beta_m g| d^n x = 0.$$

Für genügend großes m ist also

$$\|g - \beta_m g\|_{L^1(U)} = \int_U |g - \beta_m g| d^n x < \varepsilon/2.$$

Wir können deshalb $h := \beta_m g$ setzen und Satz 6 ist bewiesen.

Vergleich verschiedener Konvergenzbegriffe

Zugrunde gelegt sei ein Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$. Wir untersuchen jetzt den Zusammenhang verschiedener Konvergenzbegriffe für Funktionenfolgen auf Ω.

a) *Konvergenz fast überall.* Eine Folge von Funktionen $f_m : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $m \geqslant 1$, heißt μ-fast überall konvergent gegen die Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, in Zeichen

$$f_m \underset{\text{f.ü.}}{\longrightarrow} f,$$

falls es eine μ-Nullmenge $N \subset \Omega$ gibt, so dass

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega \smallsetminus N.$$

b) L^1*-Konvergenz.* Die Folge von Funktionen $f_m \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$, $m \geqslant 1$, heißt L^1-konvergent gegen die Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$, in Zeichen

$$f_m \underset{L^1}{\longrightarrow} f,$$

falls $\lim\limits_{m\to\infty} \|f - f_m\|_{L^1} = 0$.

c) L^1*-Cauchyfolgen.* Die Folge $f_m \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$, $m \geqslant 1$, heißt L^1-Cauchyfolge, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $m_0 = m_0(\varepsilon)$ existiert, so dass

$$\|f_m - f_k\|_{L^1} < \varepsilon \quad \text{für alle } m, k \geqslant m_0.$$

Wir stellen zunächst einige einfache Eigenschaften dieser Konvergenzbegriffe zusammen:

(1) $\quad f_m \underset{\text{f.ü.}}{\longrightarrow} f$ und $f_m \underset{\text{f.ü.}}{\longrightarrow} g \quad \Longrightarrow \quad f = g$ fast überall.

Denn ist $\lim f_m(x) = f(x)$ für alle $x \in \Omega \smallsetminus N_1$ und $\lim f_m(x) = g(x)$ für alle $x \in \Omega \smallsetminus N_2$, mit Nullmengen N_1, N_2, so folgt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \Omega \smallsetminus (N_1 \cup N_2)$.

(2) $\quad f_m \xrightarrow[L^1]{} f$ und $f_m \xrightarrow[L^1]{} g \quad \Longrightarrow \quad f = g$ fast überall.

Beweis. Nach der Dreiecks-Ungleichung gilt für alle $m \geqslant 1$

$$\|f - g\| \leqslant \|f - f_m\| + \|f_m - g\|$$

Dies strebt für $m \to \infty$ gegen 0, also muss $\|f - g\| = 0$ sein, d.h. $f = g$ fast überall.

(3) $\quad f_m \xrightarrow[L^1]{} f \quad \Longrightarrow \quad (f_m)$ Cauchyfolge

Dies beweist man wie für Folgen reeller Zahlen, vgl. An. 1, §5, Satz 1.

(4) Eine weniger triviale Aussage folgt aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz (Satz 3): Sei $F : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ integrierbar. Dann gilt

$$f_m \xrightarrow[\text{f.ü.}]{} f \text{ und } |f_m| \leqslant F \text{ für alle } m \geqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad f_m \xrightarrow[L^1]{} f.$$

Es stellen sich z.B. folgende Probleme:

- Ist eine L^1-Cauchyfolge L^1-konvergent?
- Impliziert die L^1-Konvergenz die Konvergenz fast überall?

Um diese Probleme zu untersuchen, beweisen wir zur Vorbereitung folgendes Lemma.

Lemma 2. *Sei $g_k \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$, $k \geqslant 1$, eine Funktionenfolge mit*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{L^1} =: M < \infty.$$

Dann konvergiert die Folge der Partialsummen $\left(\sum_{k=1}^m g_k\right)_{m \geqslant 1}$ fast überall gegen eine Funktion $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ und es gilt

$$\lim_{m \to \infty} \left\| g - \sum_{k=1}^m g_k \right\|_{L^1} = 0.$$

Beweis. Wir setzen

$$G_m := \sum_{k=1}^m |g_k|, \quad G := \sum_{k=1}^{\infty} |g_k|.$$

Es gilt $G_m \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$, und

$$\int G_m d\mu = \sum_{k=1}^m \|g_k\|_{L^1} \leqslant M \qquad \text{für alle } m \geqslant 1.$$

Da $G_m \uparrow G$, folgt aus dem Satz von der monotonen Konvergenz, dass G integrierbar ist. Deshalb gibt es eine Nullmenge $N \subset \Omega$, so dass

$$G(x) < \infty \quad \text{für alle} \quad x \in \Omega \smallsetminus N.$$

Für alle $x \in \Omega \setminus N$ existiert deshalb der Limes

$$g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) \in \mathbb{R}$$

bei absoluter Konvergenz. Wir setzen $g(x) := 0$ für alle $x \in N$. Für die Partialsummen gilt die Majorisierung

$$\Big| \sum_{l=1}^{m} g_k \Big| \leqslant G_m \leqslant G,$$

also folgt die Behauptung aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz (Satz 3).

Satz 7. *In $\mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$ konvergiert jede L^1-Cauchyfolge $(f_m)_{m\geqslant 1}$, d.h. es gibt eine Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$ mit*

$$\lim_{m\to\infty} \|f - f_m\|_{L^1} = 0.$$

Außerdem existiert eine Teilfolge $(f_{m_k})_{k\geqslant 1}$ mit $f_{m_k} \underset{\text{f.ü.}}{\longrightarrow} f$.

Da jede konvergente Folge eine Cauchyfolge ist, ergibt sich daraus:

Corollar. *Sei $f_m \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$, $m \geqslant 1$, eine Folge von Funktionen, die bzgl. der L^1-Norm gegen die Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$ konvergiert. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{m_k})_{k\geqslant 1}$ mit*

$$\lim_{k\to\infty} f_{m_k}(x) = f(x) \quad \textit{für } \mu\textit{-fast alle } x \in \Omega.$$

Beweis von Satz 7. Nach Definition der Cauchyfolge gibt es eine Indexfolge $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$, so dass

$$\|f_{m_k} - f_{m_{k+1}}\|_{L^1} \leqslant 2^{-k} \quad \text{für alle} \quad k \geqslant 1.$$

Auf die Reihe

$$f_{m_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{m_{k+1}} - f_{m_k})$$

mit den Partialsummen f_{m_ℓ} kann deshalb Lemma 2 angewendet werden. Man erhält die Existenz einer Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$ mit $f_{m_k} \to f$ fast überall und

$$\lim_{k\to\infty} \|f_{m_k} - f\|_{L^1} = 0.$$

Da (f_m) eine L^1-Cauchyfolge ist, folgt daraus

$$\lim_{m\to\infty} \|f_m - f\|_{L^1} = 0, \qquad \text{q.e.d.}$$

Bemerkung. Satz 7 sagt, dass der normierte Vektorraum $L^1(\Omega,\mu) = \mathcal{L}^1(\Omega,\mu)/\mathcal{N}$ vollständig, also ein Banachraum ist.

Im Fall des n-dimensionalen Lebesgueschen Maßes kann man den Vektorraum $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ als Teilmenge von $L^1(\mathbb{R}^n)$ betrachten, denn zwei stetige Funktionen, die Lebesgue-fast überall gleich sind, sind identisch. Die Dichtigkeits-Aussage von Satz 6 bedeutet, dass man $L^1(\mathbb{R}^n)$ als die Vervollständigung von $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ bzgl. der L^1-Norm auffassen kann. Dasselbe gilt für eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ anstelle von $\mathbb{R}^n$.

Aufgaben

5.1. Man beweise:

In $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gibt es eine abzählbare, bzgl. der L^1-Norm dichte Teilmenge.

Anleitung. Man betrachte elementare Treppenfunktionen der Gestalt

$$f = \sum_{k=1}^{m} c_k \chi_{Q_k},$$

mit rationalen c_k und Quadern Q_k mit rationalen Eckpunkten.

5.2. Für welche Parameter $\alpha > 0$ ist die Funktion

$$f_\alpha(x) := \left(\frac{\sin x}{x}\right)^\alpha, \quad x > 0,$$

auf $\mathbb{R}_+^*$ uneigentlich Riemann-integrierbar, für welche α Lebesgue-integrierbar?

5.3. Man beweise:

a) Für jedes $\alpha > 1$ ist die Funktion

$$g_\alpha(x) := \sin(x^\alpha), \quad x \geqslant 0,$$

auf $\mathbb{R}_+$ uneigentlich Riemann-integrierbar, aber nicht Lebesgue-integrierbar.

b) Für jedes $\varepsilon > 0$ und $\alpha > 1$ ist die Funktion $x \mapsto e^{-\varepsilon x} g_\alpha(x)$ auf $\mathbb{R}_+$ Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\varepsilon x} \sin(x^\alpha) dx = \int_0^\infty \sin(x^\alpha) dx,$$

wobei auf der rechten Seite das uneigentliche Riemann-Integral steht.

§ 6 Bewegungs-Invarianz des Lebesgueschen Maßes

Das Lebesguesche Maß im $\mathbb{R}^n$ wurde ausgehend vom elementar-geometrischen Volumen achsen-paralleler Quader konstruiert. Diese Definition hängt scheinbar vom gewählten Koordinaten-System ab. Wir werden aber in diesem Paragraphen zeigen, dass das Lebesguesche Maß nur von der Euklidischen Metrik abhängt, d.h. invariant gegenüber längentreuen Abbildungen ist. Allgemeiner untersuchen wir das Verhalten unter beliebigen linearen Transformationen. Es zeigt sich, dass dabei das Maß mit einem Faktor multipliziert wird, der gleich dem Absolutbetrag der Determinante der linearen Transformation ist. Daraus leiten wir noch das Transformations-Verhalten des Lebesgueschen Integrals bei linearen Abbildungen ab.

Für $a \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit τ_a die Translations-Abbildung

$$\tau_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \tau_a(x) := a + x.$$

Offensichtlich ist τ_a eine bijektive Abbildung des $\mathbb{R}^n$ auf sich mit Umkehrabbildung τ_{-a}. Für jeden achsen-parallelen Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ ist $\tau_a(Q)$ ein parallel-verschobener Quader mit denselben Seitenlängen, also auch demselben elementar-geometrischen Inhalt. Da τ_a auch die σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ der Borelschen Mengen auf sich abbildet, folgt, dass das Lebesgue-Borelsche Maß

$$\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

translations-invariant ist, d.h.

$$\lambda(\tau_a(B)) = \lambda(B) \qquad \text{für alle } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \text{ und alle } a \in \mathbb{R}^n.$$

Bemerkung. Da Translationen von Nullmengen im $\mathbb{R}^n$ wieder Nullmengen sind, gilt die Translations-Invarianz auch für den vervollständigten Lebesgueschen Maßraum $(\mathbb{R}^n, \overline{\mathcal{B}}^\lambda(\mathbb{R}^n), \lambda)$.

Wir werden nun die erstaunliche Tatsache beweisen, dass λ durch die Eigenschaft der Translations-Invarianz bis auf einen Normierungsfaktor schon eindeutig bestimmt ist.

Satz 1. *Sei $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein translations-invariantes Maß auf den Borelschen Mengen des $\mathbb{R}^n$, d.h. ein Maß mit*

$$\mu(\tau_a(B)) = \mu(B) \qquad \textit{für alle } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \textit{ und alle } a \in \mathbb{R}^n.$$

Es gebe eine beschränkte Menge $B_0 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit nicht-leerem Inneren, so dass $0 < \mu(B_0) < \infty$. Dann stimmt μ bis auf einen konstanten Faktor mit dem Lebesgueschen Maß λ überein, d.h. es gibt eine Konstante $c_0 \in \mathbb{R}_+^*$, so dass

$$\mu(B) = c_0 \lambda(B) \qquad \textit{für alle } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

O. Forster, *Analysis 3*, Aufbaukurs Mathematik,
DOI 10.1007/978-3-8348-2374-8_6, © Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden 2012

Bemerkung. Die Bedingung über $\mu(B_0)$ schließt das Null-Maß sowie den pathologischen Fall aus, dass $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(B) = \infty$ für alle $B \neq \emptyset$.

Beweis. Für eine ganze Zahl $q > 0$ sei $W_q \subset \mathbb{R}^n$ der Würfel mit

$$W_q := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant x_\nu < \tfrac{1}{q} \text{ für } \nu = 1, \ldots, n\}.$$

Falls q genügend groß ist, ist ein geeignetes Translat $\tau_a(W_q)$ Teilmenge von B_0, also $\mu(W_q) \leqslant \mu(B_0) < \infty$. Andrerseits lässt sich das beschränkte B_0 durch endlich viele Translate von W_q überdecken, woraus folgt $\mu(W_q) > 0$. Da der Einheitswürfel W_1 die punktfremde Vereinigung von q^n Translaten von W_q ist, folgt

$$\mu(W_1) = q^n \mu(W_q) =: c_0 \in \mathbb{R}_+^*.$$

Weiter folgt $\mu(W_q) = q^{-n} c_0$ für *alle* ganzen Zahlen $q > 0$. Sei nun

$$Q(r_1, \ldots, r_n) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant x_\nu < r_\nu \text{ für } 1 \leqslant \nu \leqslant n\}$$

ein Quader mit rationalen Seitenlängen $r_\nu > 0$. Es gibt dann positive ganze Zahlen q, $p_1, \ldots, p_n$ mit

$$r_\nu = \frac{p_\nu}{q} \quad \text{für } \nu = 1, \ldots, n.$$

Der Quader $Q(r_1, \ldots, r_n)$ ist punktfremde Vereinigung von $p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ Translaten von W_q, also

$$\mu(Q(r_1, \ldots, r_n)) = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n \cdot \mu(W_q) = r_1 \cdot \ldots \cdot r_n \cdot c_0 = c_0 \cdot \lambda(Q(r_1, \ldots, r_n)).$$

Da jeder halboffene Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ mit beliebigen reellen Seitenlängen $s_\nu \in \mathbb{R}_+^*$ Vereinigung einer aufsteigenden Folge von Quadern mit rationalen Seitenlängen ist, folgt aus der σ-Additivität von μ und λ

$$\mu(Q) = c_0 \lambda(Q),$$

also auch $\mu(B) = c_0 \lambda(B)$ für alle Quadersummen $B \in \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)$. Sei $\mu_1 := c_0^{-1} \mu$. Dann sind

$$\lambda, \mu_1 : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

zwei Maße, die auf $\mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)$ übereinstimmen. Aus der Eindeutigkeit der Fortsetzung eines Prämaßes (§ 3, Satz 7) folgt $\mu_1 = \lambda$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, d.h. $\mu(B) = c_0 \lambda(B)$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, q.e.d.

Bemerkung. Ein translations-invariantes Maß

$$\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

mit $\mu(K) < \infty$ für alle Kompakta $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Haarsches Maß* auf dem $\mathbb{R}^n$. Satz 1 sagt, dass es auf dem $\mathbb{R}^n$ bis auf einen konstanten Faktor genau ein Haarsches Maß gibt. Haarsche Maße lassen sich in viel allgemeinerem Zusammenhang, auf sog. lokalkompakten Gruppen definieren. Siehe dazu z.B. die in den Literaturhinweisen zitierten Lehrbücher von Elstrodt, Kap. VIII, §3, oder Cohn, Chap. 9.

Aus der Translations-Invarianz des Lebesgueschen Maßes werden wir jetzt die Bewegungs-Invarianz und allgemeiner das Verhalten bei linearen Abbildungen ableiten. Dabei identifizieren wir eine nicht-singuläre $n \times n$-Matrix $T \in GL(n,\mathbb{R})$ mit der zugeordneten bijektiven linearen Abbildung

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad x \mapsto Tx.$$

(Die Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ werden dabei als Spaltenvektoren aufgefasst.)

Da T und T^{-1} stetig sind, werden durch T offene Mengen des $\mathbb{R}^n$ bijektiv auf offene Mengen abgebildet, also auch Borelsche Mengen auf Borelsche Mengen.

Hilfssatz 1. *Sei $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ das Lebesgue-Borelsche Maß und $T \in GL(n,\mathbb{R})$ eine nicht-singuläre Matrix. Die Abbildung $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ werde definiert durch*

$$\mu(B) := \lambda(T(B)) \qquad \textit{für alle } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Dann ist μ ein translations-invariantes Maß.

Beweis. Es ist klar, dass μ wieder ein Maß ist, denn sind $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $k \geqslant 1$, paarweise punktfremd, so sind auch $T(B_k) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ paarweise punktfremd und

$$\mu\Big(\bigcup_k B_k\Big) = \lambda\Big(T\Big(\bigcup_k B_k\Big)\Big) = \lambda\Big(\bigcup_k T(B_k)\Big) = \sum_k \lambda(T(B_k)) = \sum_k \mu(B_k).$$

Zur Translations-Invarianz: Für $a,x \in \mathbb{R}^n$ ist $T(a+x) = Ta + Tx$, d.h. $T \circ \tau_a = \tau_{Ta} \circ T$, also

$$\mu(\tau_a(B)) = \lambda(T(\tau_a(B))) = \lambda(\tau_{Ta}(T(B))) = \lambda(T(B)) = \mu(B), \quad \text{q.e.d.}$$

Unter einer *Bewegung* des $\mathbb{R}^n$ versteht man eine längentreue Abbildung $\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bzgl. der Euklidischen Metrik. Eine solche hat bekanntlich die Gestalt $x \mapsto a + Sx$ mit einem Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ und einer orthogonalen Matrix $S \in O(n)$. Eine orthogonale $n \times n$-Matrix lässt sich dadurch charakterisieren, dass die Spaltenvektoren eine Orthonormal-Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden. $O(n)$ bezeichnet die Gruppe aller orthogonalen $n \times n$-Matrizen; es gilt

$$O(n) = \{S \in M(n \times n,\mathbb{R}) : S^\top S = E\}.$$

Dabei bezeichnet $S^\top$ die Transponierte der Matrix S. Für eine orthogonale Matrix S ist $S^{-1} = S^\top$ und $\det S = \pm 1$.

Satz 2 (Bewegungs-Invarianz des Lebesgueschen Maßes)**.** *Sei*

$$\beta : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \beta(x) = a + Sx, \quad S \in O(n),$$

eine Bewegung des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\lambda(\beta(B)) = \lambda(B) \qquad \textit{für alle } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Beweis. Wegen der Translations-Invarianz des Lebesgueschen Maßes λ können wir annehmen, dass $a = 0$. Wir definieren

$$\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \mu(B) := \lambda(S(B)).$$

Nach Hilfssatz 1 ist μ ein translations-invariantes Maß. Daher gibt es nach Satz 1 eine Konstante $c_0 \in \mathbb{R}_+$, so dass

$$\mu(B) = c_0\lambda(B) \qquad \text{für alle } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Um die Konstante c_0 zu bestimmen, wählen wir als B speziell die Einheitskugel

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$$

Da $S(K) = K$, gilt $\mu(K) = \lambda(S(K)) = \lambda(K)$. Andrerseits ist $\mu(K) = c_0\lambda(K)$. Daher muss $c_0 = 1$ sein, q.e.d.

Um das Verhalten des Lebesgueschen Maßes bei beliebigen linearen Abbildungen zu studieren, brauchen wir einen Hilfssatz aus der linearen Algebra.

Hilfssatz 2. *Jede Matrix $A \in GL(n,\mathbb{R})$ lässt sich schreiben als*

$$A = S_1 D S_2,$$

wobei S_1 und S_2 orthogonale Matrizen und D eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonalelementen ist.

Beweis. Die Matrix $A^\top A$ ist symmetrisch, lässt sich also orthogonal auf Diagonalgestalt transformieren, d.h., es gibt eine Diagonalmatrix

$$D_1 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & & 0 \\ & \gamma_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_n \end{pmatrix}, \qquad \gamma_k \in \mathbb{R},$$

und eine orthogonale Matrix $S \in O(n)$, so dass

$$S^\top (A^\top A) S = D_1.$$

Sei $e_k \in \mathbb{R}^n$ der k-te Einheitsvektor. Dann gilt

$$\gamma_k = e_k^\top D_1 e_k = e_k^\top S^\top A^\top A S e_k = \|ASe_k\|^2 > 0.$$

Sei $c_k := \sqrt{\gamma_k}$ die (positive) Wurzel aus γ_k und

$$D := \begin{pmatrix} c_1 & & & 0 \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & c_n \end{pmatrix}.$$

Es gilt $D^2 = D_1$, also

$$D^{-1} S^\top A^\top A S D^{-1} = E.$$

Setzt man $S_1 := ASD^{-1}$, so ist

$$S_1^\top S_1 = (D^{-1}S^\top A^\top)(ASD^{-1}) = E,$$

also S_1 orthogonal. Die Matrix $S_2 := S^{-1}$ ist ebenfalls orthogonal und aus der Gleichung $S_1 = ASD^{-1}$ folgt die behauptete Darstellung

$$A = S_1 D S_2.$$

Satz 3 (Transformation des Lebesgueschen Maßes bei linearen Abbildungen)**.**
Sei $T \in GL(n,\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\lambda(T(B)) = |\det T| \cdot \lambda(B) \qquad \textit{für alle } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Beweis. a) Wir behandeln zunächst den speziellen Fall, dass

$$T = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n)$$

eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonalelementen $t_i \in \mathbb{R}_+^*$ ist. Ähnlich wie in Satz 2 definieren wir ein Maß $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ durch

$$\mu(B) := \lambda(T(B)),$$

welches translations-invariant ist. Es gibt deshalb eine Konstante $c_0 \in \mathbb{R}_+^*$ mit $\mu(B) = c_0\lambda(B)$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Um die Konstante c_0 zu bestimmen, betrachten wir diesmal den Einheitswürfel

$$W := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant x_\nu < 1, \text{ für } 1 \leqslant \nu \leqslant n\}.$$

Es ist

$$T(W) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant x_\nu < t_\nu, \text{ für } 1 \leqslant \nu \leqslant n\},$$

also

$$\mu(W) = \lambda(T(W)) = t_1 \cdot \ldots \cdot t_n = |\det T| = |\det T| \cdot \lambda(W),$$

d.h. $c_0 = |\det T|$, womit die Behauptung für diese speziellen T bewiesen ist.

b) Im allgemeinen Fall schreiben wir T nach Hilfssatz 2 als

$$T = S_1 D S_2$$

mit orthogonalen Matrizen S_1, S_2 und einer Diagonalmatrix D mit positiven Diagonalelementen. Es gilt $|\det T| = |\det D|$. Nach Teil a) und Satz 2 erhalten wir

$$\lambda(T(B)) = \lambda(S_1 D S_2(B)) = \lambda(D S_2(B)) = |\det D| \cdot \lambda(S_2(B)) = |\det T| \cdot \lambda(B)$$

für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, q.e.d.

Beispiele

(6.1) *Verhalten bei Homothetien*

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Borelsche Teilmenge und $r \in \mathbb{R}_+^*$. Bezeichnet rB das Bild von B unter der Homothetie $x \mapsto rx$, so gilt

$$\mathrm{Vol}_n(rB) = r^n \mathrm{Vol}_n(B).$$

Dies folgt daraus, dass die Determinante der linearen Abbildung $x \mapsto rx$ gleich r^n ist.

(6.2) *Volumen eines Parallelotops*

Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^n$. Unter dem von $a_1, \ldots, a_n$ aufgespannten Parallelotop versteht man die Menge

$$P := \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i a_i : 0 \leqslant t_i \leqslant 1 \text{ für } i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Behauptung.

$$\mathrm{Vol}_n(P) = |\det(a_1, \ldots, a_n)|.$$

Beweis. Sei A die von den Spaltenvektoren $a_1, \ldots, a_n$ gebildete Matrix. Dann ist P das Bild des Einheitswürfels $W := [0,1]^n$ unter der linearen Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, also

$$\mathrm{Vol}_n(P) = |\det A| \mathrm{Vol}_n(W) = |\det(a_1, \ldots, a_n)|.$$

(6.3) *Eine nicht Lebesgue-messbare Menge*

Auf der Translations-Invarianz des Lebesgueschen Maßes beruht ein von G. Vitali stammendes Beispiel einer Teilmenge $V \subset [0,1] \subset \mathbb{R}$, die nicht Lebesgue-messbar ist.

Wir führen auf dem Intervall $[0,1]$ folgende Äquivalenz-Relation ein:

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}$$

Sei $\mathfrak{K} := [0,1]/\sim$ die Menge der Äquivalenz-Klassen. Wir wählen aus jeder Äquivalenz-Klasse $K \in \mathfrak{K}$ genau einen Repräsentanten $v \in K$. Es sei $V \subset [0,1]$ die Menge dieser Repräsentanten.

Behauptung. V ist nicht Lebesgue-messbar.

Beweis. 1) Wir stellen zunächst fest: Sind q, q' verschiedene rationale Zahlen, so ist

$$(q+V) \cap (q'+V) = \emptyset.$$

Andernfalls gäbe es zwei verschiedene Elemente $v, v' \in V$ mit

$$q + v = q' + v' \quad \Rightarrow \quad v' - v \in \mathbb{Q}.$$

Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass die Elemente von V paarweise inäquivalent sind.

2) Sei $T := [-1,1] \cap \mathbb{Q}$. Die Menge T ist abzählbar und es gilt

$$[0,1] \subset \bigcup_{q \in T} (q+V) \subset [-1,2].$$

Denn zu jedem $x \in [0,1]$ gibt es eine rationale Zahl q und ein $v \in V$ mit $x = q + v$. Daraus folgt $|q| \leqslant 1$, also $[0,1] \subset \bigcup_{q \in T}(q+V) \subset [-1,2]$.

3) Wäre V Lebesgue-messbar, so wären wegen der Translations-Invarianz des Lebesgueschen Maßes auch alle $(q+V)$ Lebesgue-messbar mit $\lambda(V) = \lambda(q+V)$. Auch die abzählbare Vereinigung $\bigcup_{q \in T}(q+V)$ wäre Lebesgue-messbar.

Falls $\lambda(V) = 0$, folgt $\lambda(\bigcup_{q \in T}(q+V)) = 0$.

Falls aber $\lambda(V) > 0$, folgt $\lambda(\bigcup_{q \in T}(q+V)) = \infty$.

Beides steht im Widerspruch zu

$$1 \leqslant \lambda\Big(\bigcup\nolimits_{q \in T}(q+V)\Big) \leqslant 3.$$

Also kann V nicht Lebesgue-messbar sein. A fortiori ist V auch keine Borelsche Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Ebenso kann man nicht Lebesgue-messbare Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ konstruieren.

Bildmaße

Wir wollen das Transformations-Verhalten des Lebesgue-Maßes bei linearen Abbildungen in einen allgemeineren Zusammenhang stellen.

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(\Omega', \mathfrak{B})$ ein Messraum und

$$T : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega', \mathfrak{B})$$

eine messbare Abbildung. Dann kann man ein Maß $\nu : \mathfrak{B} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ wie folgt definieren:

$$\nu(B) := \mu(T^{-1}(B)) \quad \text{für alle } B \in \mathfrak{B}.$$

Die Axiome eines Maßes für ν sind leicht zu verifizieren. Denn sind $B_k \in \mathfrak{B}$, $k \geqslant 1$, paarweise punktfremd, so sind auch die Urbilder $T^{-1}(B_k)$ punktfremd, und

$$T^{-1}\Big(\bigcup_k B_k\Big) = \bigcup_k T^{-1}(B_k), \quad \text{also}$$

$$\nu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-1}(B_k)\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(T^{-1}(B_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(B_k).$$

Das so definierte Maß heißt das *Bildmaß* von μ unter der Abbildung T und wird mit $\nu = T_*\mu$ bezeichnet.

(6.4) Beispiel. Sei jetzt speziell $\Omega = \Omega' = \mathbb{R}^n$ und $T \in GL(n,\mathbb{R})$. Dann definiert T eine messbare Abbildung $T : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ und für das Bildmaß des Lebesgueschen Maßes $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ gilt nach Satz 3

$$(T_*\lambda)(B) = \lambda(T^{-1}B) = \frac{1}{|\det T|}\lambda(B) \quad \text{für alle } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Das bedeutet, dass $T_*\lambda$ ein Maß mit konstanter Dichte $\frac{1}{|\det T|}$ bzgl. λ ist.

Etwas allgemeiner sei $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die affin-lineare Abbildung mit

$$\phi(x) := Tx + t, \qquad (t \in \mathbb{R}^n \text{ konstanter Vektor}).$$

Da $\phi^{-1}(x) = T^{-1}x - T^{-1}t$, und das Lebesgue-Maß translations-invariant ist, folgt

$$\phi_*\lambda = T_*\lambda = \frac{1}{|\det T|} \cdot \lambda.$$

Mit dem Bildmaß kann man eine nützliche Transformations-Formel für Integrale herleiten.

Satz 4 (Integration bzgl. des Bildmaßes)**.** *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(\Omega', \mathfrak{B})$ ein Messraum und $T : \Omega \to \Omega'$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-messbare Abbildung.*

Damit gilt: Eine messbare numerische Funktion $f : \Omega' \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann integrierbar bzgl. des Bildmaßes $T_*\mu$, wenn die Funktion $f \circ T : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrierbar ist, und dann ist

$$\int_\Omega (f \circ T) d\mu = \int_{\Omega'} f \, d(T_*\mu).$$

Beweis. 1) Ist $f = \chi_B$ die charakteristische Funktion einer messbaren Menge $B \in \mathfrak{B}$, so gilt $f \circ T = \chi_{T^{-1}(B)}$ und die Aussage des Satzes folgt direkt aus der Definition des Bildmaßes.

2) Es folgt, dass der Satz auch für nicht-negative einfache Funktionen auf Ω' gilt, denn diese sind endliche Linearkombinationen

$$f = \sum_{k=1}^{m} c_m \chi_{B_k}, \qquad c_k \in \mathbb{R}_+, \, B_k \in \mathfrak{B}.$$

3) Sei nun $f : \Omega' \to \overline{\mathbb{R}}_+$ eine beliebige nicht-negative messbare Funktion. Dann gibt es eine aufsteigende Folge von nicht-negativen einfachen Funktionen mit $\varphi_m \uparrow f$. Dann gilt $\varphi_m \circ T \uparrow f \circ T$. Aus $\int_\Omega (\varphi_m \circ T) d\mu = \int_{\Omega'} \varphi_m \, d(T_*\mu)$ folgt

$$\int_\Omega (f \circ T) d\mu = \int_{\Omega'} f \, d(T_*\mu) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Die rechte Seite ist genau dann $< \infty$, d.h. f integrierbar bzgl. $T_*\mu$, wenn die linke Seite endlich, d.h. $f \circ T$ integrierbar bzgl. μ ist.

4) Der allgemeine Fall folgt durch Zerlegung von $f = f_+ - f_-$ in Positiv- und Negativ-Teil.

Wendet man Satz 4 auf das Bildmaß des Lebesgueschen Maßes unter einer affin-linearen Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ an, vgl. (6.4), erhält man

Satz 5. *Sei $T \in GL(n,\mathbb{R})$ und $t \in \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn die Funktion $x \mapsto f(Tx+t)$ Lebesgue-integrierbar ist und es gilt dann*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(Tx+t)d^n x = \frac{1}{|\det T|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)d^n x.$$

Da eine Permutations-Matrix die Determinte ± 1 hat, folgt insbesondere für jede Permutation π von $\{1,2,\ldots,n\}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_{\pi(1)},x_{\pi(2)},\ldots,x_{\pi(n)})d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)d^n x.$$

AUFGABEN

6.1. Für $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, $i \neq j$, und $c \in \mathbb{R}$ sei $T_{ij}(c)$ die wie folgt definierte lineare Abbildung

$$T_{ij}(c) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto x' := T_{ij}(c)x$$

mit

$$\begin{aligned} x'_k &:= x_k \quad \text{für } k \neq i, \\ x'_i &:= x_i + cx_j. \end{aligned}$$

a) Man konstruiere eine kompakte Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ mit nicht-leerem Inneren, so dass $B := T_{ij}(c)(A)$ kongruent zu A ist, d.h. $B = \beta(A)$ mit einer Bewegung β.

b) Man beweise: Jede lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ der Determinante 1 ist Produkt von Abbildungen der Form $T_{ij}(c)$.

c) Man gebe mittels b) einen anderen Beweis von Satz 3 ohne Benutzung von Hilfssatz 2.

6.2. Seien $(\Omega_i,\mathfrak{A}_i)$, $i = 1,2,3$ drei Messräume und

$$T' : (\Omega_1,\mathfrak{A}_1) \to (\Omega_2,\mathfrak{A}_2), \qquad T'' : (\Omega_2,\mathfrak{A}_2) \to (\Omega_3,\mathfrak{A}_3)$$

messbare Abbildungen. Man zeige:

Für jedes Maß $\mu : \mathfrak{A}_1 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ gilt

$$(T'' \circ T')_* \mu = T''_*(T'_* \mu)$$

§ 7 Cavalierisches Prinzip, Satz von Fubini

Das Cavalierische Prinzip erlaubt es, das Volumen einer messbaren Menge im $\mathbb{R}^n$ auf das Volumen von $(n-1)$-dimensionalen Schnittmengen und ein eindimensionales Integral zurückzuführen; allgemeiner auf das Volumen $(n-k)$-dimensionaler Schnittmengen und ein k-dimensionales Integral. Wir werden dieses Prinzip benutzen, um das Volumen einiger einfacher Körper im $\mathbb{R}^n$, insbesondere der n-dimensionalen Einheits-Kugel, explizit zu berechnen. Allgemeiner als das Cavalierische Prinzip ist der Satz von Fubini, bei dem ein Integral über den $\mathbb{R}^n$ auf $(n-k)$-dimensionale Integrale und ein Integral über den $\mathbb{R}^k$ zurückgeführt wird. Durch Induktion ergibt sich, dass man ein n-dimensionales Integral mittels lauter eindimensionaler Integrale berechnen kann.

Schnittmengen. Sei $n = k + \ell$ mit natürlichen Zahlen $k, \ell \geqslant 1$. Dann hat man eine Produktzerlegung $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell$. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist nicht notwendig das Produkt zweier Teilmengen von $\mathbb{R}^k$ bzw. $\mathbb{R}^n$. Aber A ist vollständig bestimmt durch eine ℓ-dimensionale Familie von *Schnittmengen*

$$A_y := \{x \in \mathbb{R}^k : (x,y) \in A\}, \quad y \in \mathbb{R}^\ell.$$

Man kann A_y mit dem Durchschnitt von A mit der k-dimensionalen Ebene $\mathbb{R}^k \times \{y\} \subset \mathbb{R}^n$ identifizieren, siehe Bild 7.1.

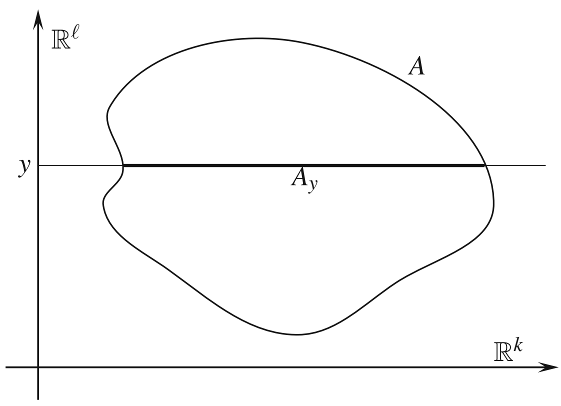


Bild 7.1

Der folgende Satz zeigt, wie man für eine Borelsche Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ das n-dimensionale Volumen aus den k-dimensionalen Volumina der Schnittmengen A_y berechnen kann.

Satz 1. *Seien $k, \ell \geqslant 1$ natürliche Zahlen, $n := k + \ell$ und $A \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell$ eine Borelsche Teilmenge. Dann gilt*

O. Forster, *Analysis 3*, Aufbaukurs Mathematik,
DOI 10.1007/978-3-8348-2374-8_7, © Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden 2012

a) *Für jedes* $y \in \mathbb{R}^\ell$ *ist die Schnittmenge*

$$A_y := \{x \in \mathbb{R}^k : (x,y) \in A\}$$

eine Borelsche Teilmenge von $\mathbb{R}^k$.

b) *Die Funktion* $F_A : \mathbb{R}^\ell \to \overline{\mathbb{R}}_+$, *die durch*

$$y \mapsto F_A(y) := \mathrm{Vol}_k(A_y)$$

definiert ist, ist eine Borel-messbare Funktion auf $\mathbb{R}^\ell$.

c) *Es gilt*

$$\mathrm{Vol}_n(A) = \int_{\mathbb{R}^\ell} \mathrm{Vol}_k(A_y) d^\ell y.$$

Beweis. a) Wir überlegen uns zunächst, dass es genügt, den Satz für *beschränkte* Borelsche Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell$ zu beweisen. Denn seien für $m \geqslant 1$

$$\Omega_m := \{(x,y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell : -m \leqslant x_i < m,\ -m \leqslant y_j < m\} \quad \text{und} \quad A_m := A \cap \Omega_m.$$

Dann gilt $A_m \uparrow A$, also $\mathrm{Vol}_n(A_m) \uparrow \mathrm{Vol}_n(A)$, sowie

$$\begin{array}{ll} A_{m,y} \uparrow A_y & \text{für alle } y \in \mathbb{R}^\ell \quad \text{und} \\ F_{A_m} \uparrow F_A & \Longrightarrow \quad \int F_{A_m}(y)dy \uparrow \int F_A(y)dy. \end{array}$$

Gilt also der Satz für alle A_m, so auch für A.

b) Es genügt also, den Satz für alle Borelschen Teilmengen von Ω_m zu beweisen.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{P}(\Omega_m)$ die Menge aller $A \subset \Omega_m$, für die die Aussagen a), b), c) des Satzes gelten. Wir zeigen:

i) Alle halboffenen Quader $Q \in \mathfrak{Q}(\Omega_m) = \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n) \cap \mathfrak{P}(\Omega_m)$ gehören zu $\mathfrak{M}$. Denn

$$Q = Q' \times Q'' \quad \text{mit Quadern } Q' \subset \mathbb{R}^k,\ Q'' \subset \mathbb{R}^\ell.$$

Für die Schnittmengen gilt

$$Q_y = \begin{cases} Q', & \text{falls } y \in Q'', \\ \emptyset, & \text{falls } y \notin Q'', \end{cases}$$

und es folgt $F_Q = \mathrm{Vol}_k(Q') \cdot \chi_{Q''}$, also

$$\int F_Q(y) d^\ell y = \mathrm{Vol}_k(Q') \int \chi_{Q''}(y) d^\ell y = \mathrm{Vol}_k(Q') \mathrm{Vol}_\ell(Q'') = \mathrm{Vol}_n(Q).$$

Deshalb gelten für Q die Aussagen a), b), c), d.h. $Q \in \mathfrak{M}$. Da jedes $A \in \mathfrak{Q}(\Omega_m)$ punktfremde Vereinigung von endlich vielen Quadern ist, gilt auch $\mathfrak{Q}(\Omega_m) \subset \mathfrak{M}$.

ii) $\mathfrak{M}$ ist abgeschlossen gegen monoton aufsteigende und monoton absteigende Limiten. Dies beweist man wie in a). $\mathfrak{M}$ ist also eine monotone Klasse. Nach dem Corollar zu § 1, Satz 5, umfasst $\mathfrak{M}$ die von $\mathfrak{Q}(\Omega_m)$ erzeugte σ-Algebra, enthält also alle Borelmengen $A \subset \Omega_m$, q.e.d.

Bemerkung. Satz 1 gilt natürlich auch mit vertauschten Rollen der Faktoren $\mathbb{R}^k$ und $\mathbb{R}^\ell$.

Wir formulieren noch eine unmittelbare Folgerung, mit deren Hilfe man manchmal bequem Volumina berechnen kann.

Corollar (Cavalierisches Prinzip)**.** *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum. Für $t \in \mathbb{R}$ bezeichne K_t die $(n-1)$-dimensionale Schnittmenge*

$$K_t := \left\{(x_1,\ldots,x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : (x_1,\ldots,x_{n-1},t) \in K\right\}.$$

Dann ist die Funktion

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \mathrm{Vol}_{n-1}(K_t)$$

integrierbar und es gilt

$$\mathrm{Vol}_n(K) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Vol}_{n-1}(K_t)dt.$$

Bemerkungen. 1) Statt für Kompakta gilt das Corollar natürlich allgemeiner auch für beschränkte Borelsche Mengen.

2) Das klassische Cavalierische Prinzip macht folgende Aussage, die ein Spezialfall des Corollars ist: Seien zwei Kompakta $K, L \subset \mathbb{R}^n$ vorgegeben. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gelte

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(K_t) = \mathrm{Vol}_{n-1}(L_t).$$

Dann haben K und L gleiches Volumen.

Beispiele

(7.1) Volumen eines Zylinders

Sei $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ eine kompakte Menge. Unter dem n-dimensionalen Zylinder mit Basis B und Höhe $h \geqslant 0$ verstehen wir die Menge

$$Z := B \times [0,h] \subset \mathbb{R}^n.$$

Für die Schnittmengen erhält man

$$Z_t = \begin{cases} B & \text{für } 0 \leqslant t \leqslant h, \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also folgt

$$\mathrm{Vol}_n(Z) = \int_0^h \mathrm{Vol}_{n-1}(B)dt = h \cdot \mathrm{Vol}_{n-1}(B).$$

Das Volumen eines n-dimensionalen Zylinders ist also gleich dem Produkt aus der Höhe und dem $(n-1)$-dimensionalen Volumen der Basis.

(7.2) Volumen eines Kegels

Sei $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ eine kompakte Menge und h eine positive reelle Zahl. Wir definieren

$$C_h(B) := \left\{((1-\lambda)\xi, \lambda h) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : \xi \in B,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\right\}.$$

$C_h(B)$ ist ein Kegel mit Basis B und Höhe h (siehe Bild 7.2).

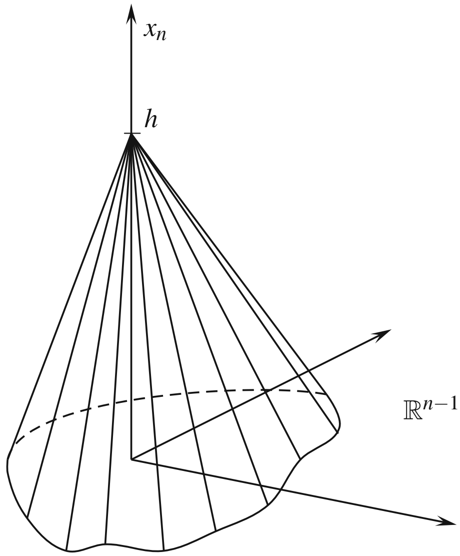


Bild 7.2

Die Schnittmengen

$$C_h(B)_t = \left\{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : (x', t) \in C_h(B)\right\}$$

sind leer für $t < 0$ oder $t > h$ und es gilt

$$C_h(B)_t = \left(1 - \frac{t}{h}\right) B \quad \text{für} \quad 0 \leqslant t \leqslant h.$$

Also gilt für $0 \leqslant t \leqslant h$

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(C_h(B)_t) = \left(1 - \frac{t}{h}\right)^{n-1} \mathrm{Vol}_{n-1}(B),$$

und aus dem Cavalierischen Prinzip folgt

$$\mathrm{Vol}_n(C_h(B)) = \mathrm{Vol}_{n-1}(B) \cdot \int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right)^{n-1} dt = \frac{h}{n} \cdot \mathrm{Vol}_{n-1}(B),$$

da

$$\int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right)^{n-1} dt = \int_0^1 (1-u)^{n-1} h\, du = \frac{h}{n}.$$

Das Volumen eines n-dimensionalen Kegels mit Basis B und Höhe h ist also gleich dem n-ten Teil des Volumens eines Zylinders mit Basis B und Höhe h.

(7.3) Volumen eines Simplex

Seien $a_0, a_1, \cdots, a_n$ Vektoren des $\mathbb{R}^n$. Unter dem von diesen Vektoren aufgespannten Simplex versteht man die Menge

$$S(a_0, \cdots, a_n) := \Big\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i : \lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \Big\}, \qquad \text{(siehe Bild 7.3).}$$

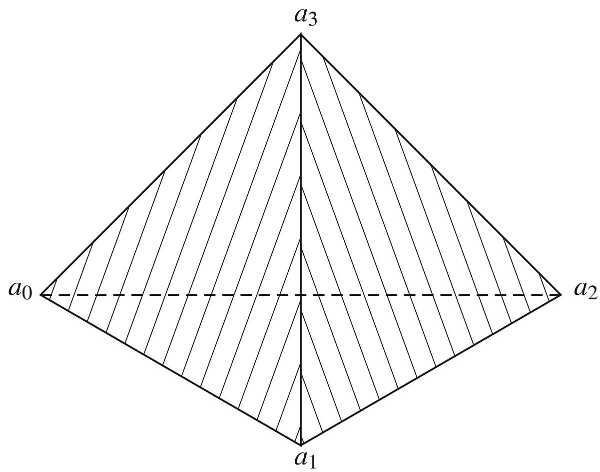


Bild 7.3

Behauptung. Es gilt die Formel

$$\mathrm{Vol}_n(S(a_0, \cdots, a_n)) = \frac{1}{n!} |\det(a_1 - a_0, \cdots, a_n - a_0)|.$$

Beweis. Wegen der Translationsinvarianz des Volumens genügt es, den Fall $a_0 = 0$ zu behandeln.

Seien $e_1, \cdots, e_n$ die kanonischen Basisvektoren des $\mathbb{R}^n$.
Das Volumen von $S(0, e_1, \cdots, e_n)$ kann durch Induktion nach n bestimmt werden.

Für $n = 1$ ist $S(0, e_1)$ das Intervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, also

$$\mathrm{Vol}_1(S(0, e_1)) = 1.$$

Allgemein ist $S(0, e_1, \cdots, e_n)$ der Kegel mit Höhe 1 über der Basis $S(0, e_1, \cdots, e_{n-1})$. Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(S(0, e_1, \cdots, e_{n-1})) = \frac{1}{(n-1)!},$$

also nach Beispiel (7.2)

$$\mathrm{Vol}_n(S(0, e_1, \cdots, e_n)) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{n!}.$$

Für beliebige Vektoren $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$S(0, a_1, \cdots, a_n) = A \cdot S(0, e_1, \cdots, e_n),$$

wobei A die $n \times n$-Matrix mit den Spalten $a_1, \cdots, a_n$ ist. Nach § 6, Satz 3 gilt also

$$\mathrm{Vol}(S(0, a_1, \cdots, a_n)) = \frac{1}{n!} |\det(a_1, \cdots, a_n)|, \quad \text{q.e.d.}$$

(7.4) Volumen der n-dimensionalen Kugel

Wir bezeichnen mit

$$K_n(r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant r\}$$

die n-dimensionale abgeschlossene Kugel mit Radius $r \geqslant 0$. Da nach Beispiel (6.1)

$$\mathrm{Vol}(K_n(r)) = r^n \mathrm{Vol}(K_n(1)),$$

genügt es, das Volumen

$$\tau_n := \mathrm{Vol}(K_n(1))$$

der n-dimensionalen Einheitskugel zu berechnen.

Die eindimensionale Kugel ist ein Intervall, $K_1(1) = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$. Daher gilt $\tau_1 = 2$.

Für $n > 1$ führen wir mittels des Cavalierischen Prinzips die Berechnung von τ_n auf die von τ_{n-1} zurück. Für die Schnittmengen gilt (vgl. Bild 7.4):

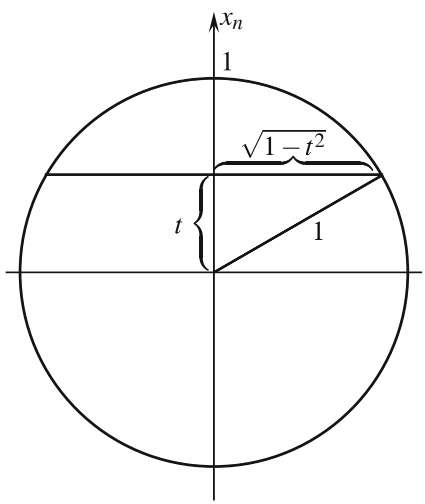


Bild 7.4

$$K_n(1)_t = \begin{cases} K_{n-1}(\sqrt{1-t^2}), & \text{falls } |t| \leqslant 1, \\ \emptyset, & \text{falls } |t| > 1, \end{cases}$$

also

$$\begin{aligned}\tau_n &= \mathrm{Vol}_n(K_n(1)) = \int_{-1}^{1} \mathrm{Vol}_{n-1}(K_{n-1}(\sqrt{1-t^2}))dt \\ &= \tau_{n-1}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}dt = c_n\tau_{n-1}\end{aligned}$$

mit

$$c_n := \int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}dt = \int_0^{\pi}\sin^n x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx.$$

Dieses Integral hatten wir bereits in An. 1, Beispiel (19.22), mittels partieller Integration ausgewertet. Es ist

$$c_{2k} = \pi\prod_{m=1}^{k}\frac{2m-1}{2m}, \quad c_{2k+1} = 2\prod_{m=1}^{k}\frac{2m}{2m+1}.$$

Für jede natürliche Zahl n gilt deshalb

$$c_n c_{n-1} = \frac{2\pi}{n},$$

man erhält also die Rekursionsformel

$$\tau_n = \frac{2\pi}{n}\tau_{n-2}.$$

Damit kann man schließlich alle τ_n berechnen; man erhält

$$\tau_{2k} = \frac{1}{k!}\pi^k,$$

$$\tau_{2k+1} = \frac{2^{k+1}}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k+1)}\pi^k.$$

Spezielle Werte sind

$$\tau_1 = 2, \qquad \tau_2 = \pi, \qquad \tau_3 = \frac{4\pi}{3}, \qquad \tau_4 = \frac{\pi^2}{2}, \qquad \tau_5 = \frac{8}{15}\pi^2.$$

Eine einheitliche Formel für gerade und ungerade Dimensionen kann man mit Hilfe der Gamma-Funktion aufstellen. Es ist nämlich (vgl. An. 1, §20)

$$\Gamma(k+1) = k!,$$

$$\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right) = \left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \left(\prod_{m=0}^{k}\frac{2m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Deshalb ist

$$\tau_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \quad \text{für alle} \quad n \geqslant 1.$$

(7.5) Volumen der Kugel nach Archimedes

Die Formel für das Volumen der dreidimensionalen Kugel war schon Archimedes bekannt. Er führte die Berechnung des Kugel-Volumens auf die Berechnung des Volumens eines Zylinders und eines Kreiskegels zurück mit einer Überlegung, die das Cavalierische Prinzip vorwegnimmt.

Wir betrachten folgende drei Körper (siehe Bild 7.5):

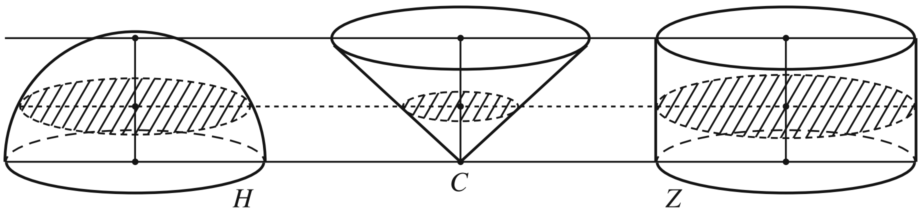


Bild 7.5

1) Die Halbkugel vom Radius $r > 0$.

$$H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant r^2, \quad z \geqslant 0\}.$$

2) Den auf die Spitze gestellten Kegel der Höhe r, dessen Basis ein Kreis mit Radius r ist.

$$C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant z^2, \quad 0 \leqslant z \leqslant r\}.$$

3) Den Zylinder mit Radius r und Höhe r.

$$Z := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant r^2, \quad 0 \leqslant z \leqslant r\}.$$

Der Schnitt dieser drei Körper mit der Ebene $\{z = h\}$, $0 \leqslant h \leqslant r$, ist jeweils ein Kreis

$$\begin{aligned} H_h &:= \{x^2 + y^2 \leqslant r^2 - h^2\}, \\ C_h &:= \{x^2 + y^2 \leqslant h^2\}, \\ Z_h &:= \{x^2 + y^2 \leqslant r^2\}. \end{aligned}$$

Die Flächeninhalte dieser Kreise sind

$$\mathrm{Vol}_2(H_h) = \pi(r^2 - h^2), \qquad \mathrm{Vol}_2(C_h) = \pi h^2, \qquad \mathrm{Vol}_2(Z_h) = \pi r^2,$$

insbesondere gilt $\mathrm{Vol}_2(H_h) + \mathrm{Vol}_2(C_h) = \mathrm{Vol}_2(Z_h)$. Mit dem Cavalierischen Prinzip folgt daraus

$$\mathrm{Vol}_3(H) + \mathrm{Vol}_3(C) = \mathrm{Vol}_3(Z),$$

die Summe der Voluminia der Halbkugel und des Kegels ist also gleich dem Volumen des Zylinders. Aus den bekannten Werten

$$\mathrm{Vol}_3(Z) = \pi r^3, \qquad \mathrm{Vol}_3(C) = \tfrac{1}{3}\pi r^3,$$

vgl. (7.1) und (7.2), ergibt sich das Volumen der Halbkugel als $\mathrm{Vol}_3(H) = \frac{2}{3}\pi r^3$, das Volumen der Vollkugel vom Radius r ist daher

$$\mathrm{Vol}_3(K_3(r)) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

(7.6) Nullmengen

Aus Satz 1 folgt: Eine Borelsche Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell$ ist genau dann eine Nullmenge, wenn für (λ^k-)fast alle $x \in \mathbb{R}^k$ die Schnittmenge

$$A_x := \{y \in \mathbb{R}^\ell : (x,y) \in A\}$$

eine (λ^ℓ-)Nullmenge in $\mathbb{R}^\ell$ ist.

Dazu geben wir folgendes Beispiel: Sei $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ eine Borelsche Teilmenge und $f : B \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Dann ist der Graph

$$\Gamma_f := \{(x_1,\dots,x_{n-1},y) \in B \times \mathbb{R} : y = f(x_1,\dots,x_{n-1})\}$$

eine Borelsche Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Dies folgt daraus, dass die Funktion

$$(x_1,\dots,x_{n-1},y) \mapsto f(x_1,\dots,x_{n-1}) - y$$

eine messbare Funktion auf $B \times \mathbb{R}$ ist. Für jedes feste $x \in B$ ist die Schnittmenge

$$\{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in \Gamma_f\} = \{f(x)\}$$

einpunktig, also eine Nullmenge. Daraus folgt, dass der Graph Γ_f eine Nullmenge ist.

Daraus folgt z.B., dass der Rand einer Kugel im $\mathbb{R}^n$ eine Nullmenge ist, denn der Rand lässt sich lokal als der Graph einer stetigen Funktion darstellen.

Der Satz von Fubini

Der Satz von Fubini ist eine Verallgemeinerung des Cavalierischen Prinzips. Der Satz erlaubt es, das Integral einer auf $\mathbb{R}^{k+\ell}$ definierten Funktion durch sukzessive Integrationen über den $\mathbb{R}^k$ und den $\mathbb{R}^\ell$ zu berechnen, wobei noch die Reihenfolge der Integrationen vertauschbar ist.

Im Folgenden sei unter einer integrierbaren Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$ immer eine bzgl. des Lebesgue-Borelschen Maßraums $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda^n)$ integrierbare Funktion verstanden. Häufig bezeichnen wir bei einer Produktzerlegung $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell$, $(n = k + \ell)$, die Koordinaten eines Punktes des $\mathbb{R}^n$ mit (x,y), $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^\ell$. Das Lebesguesche Integral einer Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$ wird dann mit $\int f(x,y)d^n(x,y)$ bezeichnet.

Wir beginnen mit einem technischen Lemma, das auch unter dem Namen Satz von Tonelli bekannt ist.

Lemma 1 (Tonelli)**.** *Seien $k, \ell \geqslant 1$ natürliche Zahlen und $f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell \to \overline{\mathbb{R}}_+$ eine messbare, nicht-negative numerische Funktion. Dann ist für jedes $y \in \mathbb{R}^\ell$ die Funktion $x \mapsto f(x,y)$ eine messbare Funktion auf dem $\mathbb{R}^k$, also das Integral*

$$\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)d^k x \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

definiert (der Wert ∞ kann vorkommen). Die Funktion

$$F : \mathbb{R}^\ell \to \overline{\mathbb{R}}_+, \quad y \mapsto F(y) := \int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)d^k x,$$

ist messbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{k+\ell}} f(x,y)d^{k+\ell}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^\ell} F(y)d^\ell y = \int_{\mathbb{R}^\ell} \Big(\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)d^k x \Big) d^\ell y.$$

Beweis. 1) Ist f die charakteristische Funktion einer Borelschen Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^{k+\ell}$, so reduziert sich die Aussage des Lemmas auf Satz 1.

2) Eine nicht-negative einfache Funktion ist eine endliche Linearkombination mit positiven Koeffizienten von charakteristischen Funktionen Borelscher Mengen, also gilt das Lemma auch für solche Funktionen.

3) Im allgemeinen Fall ist f der aufsteigende Limes einer Folge von nicht-negativen einfachen Funktionen $\varphi_m \uparrow f$. Da der aufsteigende Limes einer Folge messbarer Funktionen wieder messbar ist (§ 4, Satz 4) und wegen § 4, Satz 7 (iv) vererbt sich die Gültigkeit des Lemmas für die Funktionen φ_m auf die Funktion f.

Corollar. *Eine messbare Funktion $f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann integrierbar, wenn*

$$\int_{\mathbb{R}^\ell} \Big(\int_{\mathbb{R}^k} |f(x,y)| d^k x \Big) d^\ell y < \infty.$$

Dies folgt aus dem Lemma zusammen mit § 4, Satz 8 a).

(7.7) *Beispiel.* Seien $f : \mathbb{R}^k \to \overline{\mathbb{R}}$ und $g : \mathbb{R}^\ell \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbare Funktionen. Dann ist auch die Funktion

$$F : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell \to \overline{\mathbb{R}}, \quad (x,y) \mapsto F(x,y) := f(x)g(y),$$

integrierbar. Denn

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^\ell} \Big(\int_{\mathbb{R}^k} |f(x)g(y)| d^k x \Big) d^\ell y &= \int_{\mathbb{R}^\ell} |g(y)| \Big(\int_{\mathbb{R}^\ell} |f(x)| d^k x \Big) d^\ell y \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} |f(x)| d^k x \int_{\mathbb{R}^\ell} |g(y)| d^\ell y < \infty. \end{aligned}$$

Satz 2 (Fubini)**.** *Seien $k, \ell \geqslant 1$ natürliche Zahlen, $n := k + \ell$ und*

$$f : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \qquad (x,y) \mapsto f(x,y)$$

eine integrierbare Funktion. Dann gibt es eine (Borelsche) Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^\ell$, so dass für jedes feste $y \in \mathbb{R}^\ell \smallsetminus N$ die Funktion

$$\mathbb{R}^k \to \overline{\mathbb{R}}, \quad x \mapsto f(x,y)$$

integrierbar ist. Setzt man

$$F(y) := \int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)d^k x \quad \textit{für} \quad y \in \mathbb{R}^\ell \smallsetminus N$$

und definiert $F(y)$ für $y \in N$ beliebig (z.B. $F(y) := 0$), so ist die Funktion $F : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$ integrierbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{k+\ell}} f(x,y)d^n(x,y) = \int_{\mathbb{R}^\ell} F(y)d^\ell y.$$

Bemerkung. Man benützt hierfür auch die prägnante Schreibweise

$$\int_{\mathbb{R}^{k+\ell}} f(x,y)d^n(x,y) = \int_{\mathbb{R}^\ell}\Big(\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)d^k x\Big)d^\ell y.$$

Da die Vertauschung der Variablen $(x,y) \mapsto (y,x)$ ein linearer Automorphismus des $\mathbb{R}^{k+\ell}$ mit Determinante ± 1 ist, folgt zusammen mit § 6, Satz 5

$$\int_{\mathbb{R}^\ell}\Big(\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)d^k x\Big)d^\ell y = \int_{\mathbb{R}^k}\Big(\int_{\mathbb{R}^\ell} f(x,y)d^\ell y\Big)d^k x.$$

Beweis. Da eine Funktion genau dann integrierbar ist, wenn ihr Positivteil und ihr Negativteil integrierbar sind, genügt es, den Fall $f \geqslant 0$ zu behandeln. Aus Lemma 1 folgt dann, dass die Funktion $y \mapsto F(y)$ messbar ist und

$$\int_{\mathbb{R}^\ell} F(y)d^\ell y = \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)d^n(x,y) < \infty.$$

Also ist F auf $\mathbb{R}^\ell$ integrierbar. Nach § 4, Satz 10 b) gibt es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^\ell$, so dass $F(y) < \infty$ für alle $y \in \mathbb{R}^\ell \smallsetminus N$, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)d^k x < \infty \quad \text{für } \; y \in \mathbb{R}^\ell \smallsetminus N.$$

Für diese y ist also $x \mapsto f(x,y)$ auf $\mathbb{R}^k$ integrierbar. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Bemerkungen. 1) Durch wiederholte Anwendung von Satz 2 erhält man für eine integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)d^n x = \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}\Big(\ldots\Big(\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}} f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\Big)dx_2\Big)\ldots\Big)dx_{n-1}\Big)dx_n.$$

Dabei liefert die innerste Klammer eine fast überall auf $\mathbb{R}^{n-1}$ definierte Funktion von $(x_2,\ldots,x_n)$, die zweit-innerste eine fast überall auf $\mathbb{R}^{n-2}$ definierte Funktion von $(x_3,\ldots,x_n)$, u.s.w.

Die Reihenfolge der Ausführung der eindimensionalen Integrale kann man beliebig vertauschen (§ 6, Satz 5), d.h. für jede Permutation π von $\{1,2,\ldots,n\}$ gilt auch

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)d^nx = \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}\Big(\ldots\Big(\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}} f(x_1,\ldots,x_n)dx_{\pi(1)}\Big)dx_{\pi(2)}\Big)\ldots\Big)dx_{\pi(n-1)}\Big)dx_{\pi(n)}.$$

2) Der Satz von Fubini kann natürlich auch auf Funktionen angewendet werden, die auf einer Borelschen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell$ definiert und integrierbar sind. Man denke sich diese Funktionen trivial durch 0 auf ganz $\mathbb{R}^{k+\ell}$ fortgesetzt.

(7.8) Beispiel. Wir wollen mit Hilfe des Satzes von Fubini den Wert

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-x}x^{-1/2}dx$$

berechnen. Dies Integral existiert als uneigentliches Riemannsches und als Lebesguesches Integral, vgl. Beispiel (5.2). Nach (7.7) ist

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})^2 = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-x}x^{-1/2}dx \cdot \int_{\mathbb{R}_+} e^{-y}y^{-1/2}dy = \int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-(x+y)}x^{-1/2}y^{-1/2}dxdy.$$

Wir führen nun die lineare Variablen-Transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit Determinante 2 durch. Der Bereich $\{x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$ der x-y-Ebene geht dabei in den Winkelbereich $W := \{s \leqslant t,\ s \geqslant -t\}$ der s-t-Ebene über. Wir erhalten nach § 6, Satz 5

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})^2 = \int_W e^{-t}(t+s)^{-1/2}(t-s)^{-1/2}\,ds\,dt = \int_0^\infty e^{-t}\Big(\int_{-t}^t \frac{1}{\sqrt{t^2-s^2}}ds\Big)dt.$$

Das Integral $\int\limits_{-t}^{t} \frac{1}{\sqrt{t^2-s^2}}ds$, (für das t eine Konstante ist), geht durch die Substitution $s = tx$ über in

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \pi,$$

vgl. An. 1, Beispiel (20.4). Somit ergibt sich

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})^2 = \pi\int_0^\infty e^{-t}dt = \pi, \qquad \text{also} \qquad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Eine noch elegantere Methode zur Berechnung von

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-t}t^{-1/2}dt = 2\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

werden wir in § 8 kennen lernen.

Faltung von Funktionen

Nun können wir mit Hilfe des Satzes von Fubini die Faltung von Funktionen definieren.

Seien $f,g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gehört die Funktion $(x,y) \mapsto f(x)g(y)$ zu $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{2n})$, siehe (7.7). Nach § 6, Satz 5 ist auch die Funktion

$$(x,y) \mapsto f(x)g(y-x)$$

über $\mathbb{R}^{2n}$ integrierbar. Nach dem Satz von Fubini existiert das Integral

$$(f*g)(y) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y-x)dx$$

für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit Ausnahme einer Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$. Definiert man $(f*g)(y)$ für $y \in N$ beliebig, z.B. gleich 0, so erhält man eine integrierbare Funktion $f*g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und es gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(y)dy &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x)g(y-x)dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x)g(y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} g(y)dy.\end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung für das Integral von $|f*g|$ ergibt die Abschätzung

$$\|f*g\|_{L_1} \leqslant \|f\|_{L_1}\|g\|_{L_1}.$$

Man nennt die Funktion $f*g$, die bis auf Gleichheit fast überall eindeutig bestimmt ist, die Faltung von f und g. Die Faltung definiert eine Abbildung

$$L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n), \quad (f,g) \mapsto f*g.$$

Wir zeigen noch, dass die Faltung kommutativ ist. Nach Definition ist

$$(g*f)(y) = \int g(x)f(y-x)dx \quad \text{fast überall.}$$

Durch die Substitution $\xi = y-x$ erhält man nach § 6, Satz 5

$$(g*f)(y) = \int g(y-\xi)f(\xi)d\xi = \int f(\xi)g(y-\xi)d\xi.$$

Das letzte Integral ist aber nach Definition gleich $(f*g)(y)$. Also gilt $f*g = g*f$ fast überall.

AUFGABEN

7.1. Es sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Borelsche Menge und $f : B \to \mathbb{R}_+$ eine nicht-negative messbare Funktion.

Man zeige: Die Menge

$$V := \{(x,y) \in B \times \mathbb{R} : 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

ist eine messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+1}$. Genau dann ist f über B integrierbar, wenn das $(n+1)$-dimensionale Lebesguesche Maß von V endlich ist und es gilt

$$\mathrm{Vol}_{n+1}(V) = \int_B f(x)d^n x.$$

7.2. (Volumen von Rotationskörpern). Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ eine stetige Funktion und

$$K := \left\{(x,y,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leqslant f(x)^2\right\}.$$

Man zeige:

$$\mathrm{Vol}_3(K) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

7.3. Sei

$$P := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ax^2 + 2bxy + cy^2 \leqslant z \leqslant 1\right\},$$

wobei $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ eine positiv-definite Matrix ist. Man berechne das Volumen von P.

7.4. Sei $0 < r < R < \infty$ und $T \subset \mathbb{R}^3$ der Volltorus, der durch Rotation der Kreisscheibe

$$K := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, (x-R)^2 + z^2 \leqslant r^2\right\}$$

um die z-Achse entsteht. Man berechne das Volumen von T.

7.5. Es sei $K \subset \mathbb{R}^3$ der Durchschnitt der beiden Zylinder

$$Z_1 := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leqslant 1\right\},$$

$$Z_2 := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leqslant 1\right\}.$$

Man berechne das Volumen von K.

7.6. Es sei K der Kegel

$$K := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant z \leqslant 1,\ x^2 + y^2 \leqslant (1-z)^2\right\}$$

und H der Halbraum

$$H := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \leqslant \alpha x + \beta\right\}, \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Für welche Werte von α, β ist der Durchschnitt $A := K \cap H$ nichtleer? Man berechne jeweils das Volumen von A.

7.7. Man berechne das Volumen des der Einheitskugel einbeschriebenen regulären Dodekaeders.

Anleitung. Man berechne zunächst die Länge einer Seite. Dazu beachte man, dass geeignete 8 unter 20 Ecken des Dodekaeders die Ecken eines Würfels bilden, vgl. Bild 7.6

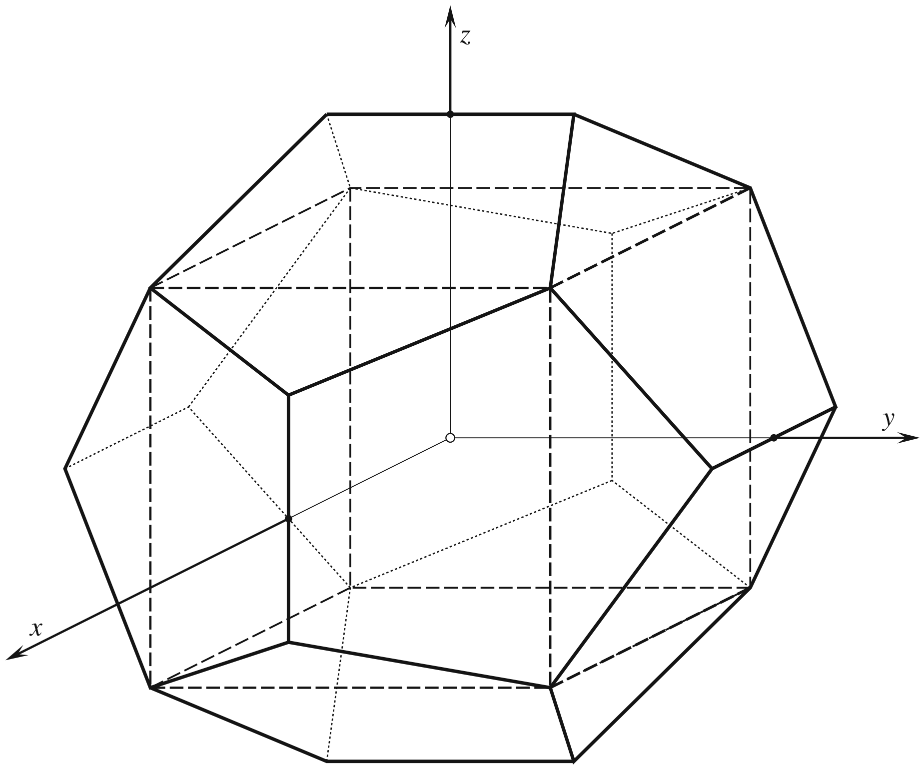


Bild 7.6 Dodekaeder mit eingeschriebenem Würfel

7.8. Lässt sich der Trick von Archimedes auch zur Berechnung des Volumens einer 4-dimensionalen Kugel benutzen?

7.9. Für $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ berechne man das Integral

$$f(\xi, \eta) := \int_{x^2+y^2<1} \frac{e^{i(x\xi+y\eta)}}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy.$$

Hinweis. Durch eine Drehung des Koordinatensystems kann man sich auf den Fall $\eta = 0$ beschränken.

7.10. Seien $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Man zeige

a) $(f+g)*h = f*h+g*h$,

b) $(f*g)*h = f*(g*h)$.

7.11. Es sei $f = \chi_{[0,1]}$ die charakteristische Funktion des Einheitsintervalls $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Man berechne explizit die Funktionen $g := f*f$ und $h := f*f*f$.

§ 8 Rotationssymmetrische Funktionen

In diesem Paragraphen untersuchen wir die Integration rotationssymmetrischer Funktionen im $\mathbb{R}^n$, die man auf die Integration von Funktionen einer Veränderlichen zurückführen kann. Obwohl dies nur ein Spezialfall eines allgemeineren Satzes ist, den wir in § 14 beweisen werden, behandeln wir diesen einfachen Fall schon jetzt. Er liefert uns Beispielmaterial für spätere Paragraphen und ist zugleich eine schöne Illustration der Integration nach einem Bildmaß.

Eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt rotationssymmetrisch, wenn $F(x)$ nur von $\|x\| \in \mathbb{R}_+$ abhängt, also eine Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ existiert mit $F(x) = f(\|x\|)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Dies lässt sich auch so ausdrücken: Sei T die Abbildung

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto T(x) := \|x\|.$$

Dann liefert die Zuordnung $f \mapsto f \circ T$ eine bijektive Beziehung zwischen den numerischen Funktionen auf $\mathbb{R}_+$ und den rotationssymmetrischen numerischen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Wir werden sehen, dass man die Integration rotationssymmetrischer Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ auf die Integration von Funktionen auf $\mathbb{R}_+$ zurückführen kann. Dazu ist eine Untersuchung des Bildmaßes des Lebesgueschen Maßes λ^n auf dem $\mathbb{R}^n$ unter der (messbaren) Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ nötig.

Dieses Bildmaß $\mu := T_*\lambda^n$ ist (siehe § 6) definiert durch

$$\mu(B) := \lambda^n(T^{-1}(B)) = \lambda^n(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \in B\}) \quad \text{für alle } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+).$$

Es lässt sich gemäß dem folgenden Lemma berechnen.

Lemma. *Sei $B \subset \mathbb{R}_+$ eine Borelsche Teilmenge und*

$$A := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \in B\}.$$

Dann gilt für das Lebesguesche Maß von A

$$\lambda^n(A) = n\tau_n \int_B r^{n-1} dr.$$

Dabei bezeichnet $\tau_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel.

Beweis. Sei zunächst $B := [a,b[\subset \mathbb{R}_+$ ein halboffenes Intervall. Dann ist

$$T^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}^n : a \leqslant \|x\| < b\} = \mathring{K}(b) \smallsetminus \mathring{K}(a)$$

die Differenz zweier offener Kugeln um den Nullpunkt mit den Radien b bzw. a. Nach Beispiel (7.4) gilt $\mathrm{Vol}_n(\mathring{K}(r)) = \tau_n r^n$ (denn der Rand der Kugel ist eine Nullmenge). Daraus folgt

$$\lambda^n(T^{-1}(B)) = \tau_n(b^n - a^n).$$

O. Forster, *Analysis 3*, Aufbaukurs Mathematik,
DOI 10.1007/978-3-8348-2374-8_8, © Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden 2012

Andrerseits berechnet man

$$n\tau_n \int\limits_{[a,b[} r^{n-1} dr = \tau_n(b^n - a^n).$$

Daraus folgt, dass die Aussage des Lemmas für $B = [a,b[$, also auch für alle endlichen Intervallsummen

$$S \in \mathfrak{Q}(\mathbb{R}_+) = \mathfrak{Q}(\mathbb{R}) \cap \mathbb{R}_+$$

gilt.

Die Borel-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ wird von $\mathfrak{Q}(\mathbb{R}_+)$ erzeugt. Man betrachte nun auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ folgende zwei Maße: Einmal das Bildmaß $T_*\lambda^n$ und andrerseits das Maß

$$B \mapsto n\tau_n \int_B r^{n-1} dr.$$

Dass letzteres tatsächlich ein Maß ist, folgt aus § 4, Satz 11. Da beide Maße auf $\mathfrak{Q}(\mathbb{R}_+)$ übereinstimmen, sind sie nach § 3, Satz 7 überhaupt identisch.

Satz 1. *Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Borel-messbare Funktion. Dann ist die rotationssymmetrische Funktion*

$$\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}, \quad x \mapsto f(\|x\|)$$

genau dann über $\mathbb{R}^n$ (Lebesgue-)integrierbar, wenn die Funktion

$$\mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}, \quad r \mapsto f(r) r^{n-1}$$

über $\mathbb{R}_+$ integrierbar ist, und es gilt dann

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\|x\|) d^n x = n\tau_n \int_{\mathbb{R}_+} f(r) r^{n-1} dr.$$

Dabei ist

$$\tau_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel, vgl. (7.4).

Beweis. Das vorangehende Lemma sagt, dass für die Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \|x\|$, das Bildmaß $T_*\lambda^n$ ein Maß mit Dichte (vgl. § 4) bzgl. des 1-dimensionalen Lebesgue-Maßes ist, nämlich

$$T_*\lambda^n = g \cdot \lambda^1 \quad \text{mit} \quad g(r) := \begin{cases} n\tau_n r^{n-1} & \text{für } r \geqslant 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 1 folgt deshalb unmittelbar aus § 6, Satz 4.

Bemerkung. Wir werden Satz 1 später noch einmal als Spezialfall eines viel allgemeineren Satzes erhalten, vgl. Beispiel (14.10).

Beispiele

(8.1) Sei α eine beliebige reelle Zahl. Dann gilt für $0 < \rho < R < \infty$

$$\int\limits_{\rho \leqslant \|x\| \leqslant R} \|x\|^{-\alpha} d^n x = n\tau_n \int_\rho^R r^{n-\alpha-1} dr.$$

Damit ergibt sich

$$\int\limits_{\rho \leqslant \|x\| \leqslant R} \|x\|^{-\alpha} d^n x = \frac{n\tau_n}{n-\alpha}\left(R^{n-\alpha} - \rho^{n-\alpha}\right) \quad \text{für } \alpha \neq n,$$

$$\int\limits_{\rho \leqslant \|x\| \leqslant R} \|x\|^{-n} d^n x = n\tau_n(\log R - \log \rho).$$

Durch Grenzübergang $\rho \to 0$ bzw. $R \to \infty$ ergibt sich daraus:

(i) Die Funktion $x \mapsto \|x\|^{-\alpha}$ ist genau dann über $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$ integrierbar, wenn $\alpha < n$.

(ii) Die Funktion $x \mapsto \|x\|^{-\alpha}$ ist genau dann über $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \geqslant 1\}$ integrierbar, wenn $\alpha > n$.

(8.2) Sei R eine positive reelle Zahl und $1 \leqslant i \leqslant n$. Wir wollen das Integral

$$c_i := \int\limits_{\|x\| \leqslant R} x_i^2 d^n x$$

berechnen. Zwar ist die Funktion $x \mapsto x_i^2$ nicht rotationssymmetrisch, aber durch einen kleinen Trick lässt sich das Integral auf den rotationssymmetrischen Fall zurückführen. Aus Symmetriegründen ist nämlich

$$c_i = c_j \text{ für alle } i, j,$$

(vgl. § 6, Satz 5). Daher ist

$$\begin{aligned} nc_i &= \sum_{j=1}^n c_j = \sum_{j=1}^n \int\limits_{\|x\| \leqslant R} x_j^2 d^n x \\ &= \int\limits_{\|x\| \leqslant R} \|x\|^2 d^n x = n\tau_n \int_0^R r^{n+1} dr = \frac{n\tau_n}{n+2} R^{n+2}, \end{aligned}$$

d.h.

$$\int\limits_{\|x\| \leqslant R} x_i^2 d^n x = \frac{\tau_n}{n+2} R^{n+2}.$$

(8.3) Trägheitsmoment einer Kugel

Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ ein Kompaktum und $m : K \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, die als spezifische Dichte des Körpers K interpretiert werde. Weiter sei $L \subset \mathbb{R}^3$ eine Gerade. Für einen Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ bezeichne $\rho(x,L)$ den euklidischen Abstand von x zur Geraden L. Dann versteht man unter dem Trägheitsmoment des Körpers K bzgl. der Achse L das Integral

$$\Theta := \int_K \rho(x,L)^2 m(x) d^3x.$$

Sei nun speziell

$$K := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leqslant R \right\}, \quad R > 0,$$

eine Kugel mit konstanter Dichte $m > 0$. Sei L eine Gerade durch den Mittelpunkt der Kugel. Aus Symmetriegründen können wir annehmen, dass $L = \mathbb{R} \times 0 \times 0$. Dann ist

$$\rho(x,L)^2 = x_2^2 + x_3^2.$$

Also ergibt sich mit (8.2) für das Trägheitsmoment der Kugel K bzgl. L

$$\Theta = \int\limits_{\|x\| \leqslant R} (x_2^2 + x_3^2) m d^3x = 2 \cdot \frac{\tau_3}{5} R^5 m.$$

Sei M die Masse der Kugel, also

$$M = \int\limits_{\|x\| \leqslant R} m d^3x = \tau_3 R^3 m.$$

Damit erhält man für das Trägheitsmoment der Kugel bzgl. einer Achse durch den Mittelpunkt

$$\Theta = \frac{2}{5} R^2 M.$$

(8.4) Wir geben mit Hilfe von Satz 1 einen eleganten Beweis der schon in (7.8) auf andere Weise hergeleiteten Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Sei γ der Wert des Integrals. Dann ist (wegen $\tau_2 = \pi$)

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = \quad [\text{Substitution } t = r^2] \\ &= \pi \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \pi, \end{aligned}$$

also $\gamma = \sqrt{\pi}$.

(8.5) Wir wenden jetzt Satz 1 auf das Integral

$$\gamma_n := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} d^n x$$

an und erhalten

$$\gamma_n = n\tau_n \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dr = \frac{n\tau_n}{2} \int_0^\infty e^{-t} t^{n/2-1} dt = \frac{n\tau_n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \tau_n \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right).$$

Andrerseits folgt aus dem Satz von Fubini

$$\gamma_n = \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-x_k^2} dx_k = \gamma_1^n = \pi^{n/2} \quad \text{nach (8.4).}$$

Setzt man hierin den oben berechneten Wert $\gamma_n = \tau_n \Gamma(\frac{n}{2}+1)$ ein, erhält man einen neuen Beweis der schon in (7.4) hergeleiteten Formel

$$\tau_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

für das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel.

Aufgaben

8.1. Man berechne die Masse und das Trägheitsmoment bzgl. der x-Achse von folgenden Körpern (Zylinder, Ellipsoid, Kugelschale):

a) $Z := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leqslant a,\ y^2+z^2 \leqslant r^2\}, \quad (a > 0, r > 0).$

b) $E := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leqslant 1\right\}, \quad (a,b,c > 0).$

c) $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : r^2 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2\}, \quad (0 < r < R).$

Dabei sei vorausgesetzt, dass die Körper eine konstante Dichte $m > 0$ haben.

8.2. Es sei $K \subset \mathbb{R}^3$ ein Kompaktum und $m : K \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so dass

$$M := \int_K m(x) d^3x > 0.$$

Der Schwerpunkt $s = (s_1, s_2, s_3)$ von K bzgl. der Dichte m ist definiert durch

$$s_i := \frac{1}{M} \int_K x_i m(x) d^3x, \quad i = 1,2,3.$$

Sei $L \subset \mathbb{R}^3$ eine Gerade durch den Schwerpunkt und L' eine zu L parallele Gerade im Abstand d. Seien Θ_L bzw. $\Theta_{L'}$ die Trägheitsmomente von K bzgl. dieser Achsen. Man beweise den *Satz von Steiner:*

$$\Theta_{L'} = \Theta_L + Md^2.$$

8.3. Es sei

$$E := \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\right\}$$

die offene Einheitskreisscheibe. Man berechne das Integral

$$\int_E \frac{d^2x}{\sqrt{1-\|x\|^2}}.$$

8.4. Für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$q(x) := \sum_{i,j} c_{ij} x_i x_j,$$

wobei (c_{ij}) eine symmetrische, positiv definite reelle 2×2-Matrix sei. Man berechne das Integral

$$\int_{\{q(x)<1\}} \frac{d^2x}{\sqrt{1-q(x)}}.$$

Anleitung: Man führe das Integral mittels einer linearen Koordinaten-Transformation auf Aufgabe 8.3 zurück.

8.5. Sei $0 \leqslant r < R$. Man berechne die Integrale

a) $$\int\limits_{r \leqslant \|x\| \leqslant R} \exp(-\|x\|^2) d^4x,$$

b) $$\int\limits_{r \leqslant \|x\| \leqslant R} x_i^2 \exp(-\|x\|^2) d^4x, \quad (i = 1, \ldots, 4).$$

8.6. Für $0 < r < R$ berechne man das Integral

$$\int\limits_{r \leqslant \|x\| \leqslant R} \log \|x\| d^nx.$$

§ 9 Die Transformationsformel

Die Transformationsformel für Integrale von Funktionen mehrerer Veränderlichen ist die Verallgemeinerung der Substitutionsregel für Funktionen einer Veränderlichen. Sie macht eine Aussage darüber, wie sich das Integral bei stetig differenzierbaren Koordinatentransformationen verhält. Dies ist uns für lineare Koordinatentransformationen bereits aus § 6 bekannt. Für beliebige differenzierbare Koordinatentransformationen erfolgt der Beweis durch Zurückführung auf den linearen Fall mittels lokaler Approximation. Ein für viele Anwendungen nützlicher Spezialfall ist die Integration bzgl. Polarkoordinaten. Eine wesentliche Rolle spielt die Transformationsformel später in der Integrationstheorie auf Mannigfaltigkeiten (siehe § 14).

Vorbereitungen

Wir bezeichnen für einen Vektor $x = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$, den wir uns als Spaltenvektor denken, mit

$$|x| = \max(|x_1|, \cdots, |x_n|)$$

die Maximumnorm. Im Vergleich zur üblichen euklidischen Norm

$$\|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$$

gelten die Abschätzungen

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\| \leqslant |x| \leqslant \|x\|.$$

Der Maximumnorm ist folgende Operatornorm von Matrizen angepasst:
Für $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ setzen wir

$$\|A\| := \max_i \sum_j |a_{ij}|.$$

Dafür gelten die folgenden Rechenregeln ($A, B \in M(n \times n, \mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^n$):

i) $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$,

ii) $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$,

iii) $|Ax| \leqslant \|A\| \cdot |x|$.

Seien U und V zwei offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Eine bijektive Abbildung $\Phi : U \to V$ heißt C^1-*invertierbar*, wenn sowohl Φ als auch $\Phi^{-1} : V \to U$ einmal stetig differenzierbar sind. Wir bezeichnen mit

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

O. Forster, *Analysis 3*, Aufbaukurs Mathematik,
DOI 10.1007/978-3-8348-2374-8_9, © Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden 2012

die Funktionalmatrix von $\Phi = (\Phi_1, \cdots, \Phi_n)$. Für eine C^1-invertierbare Abbildung $\Phi : U \to V$ ist $D\Phi$ in jedem Punkt $a \in U$ invertierbar; es gilt

$$[D\Phi(a)]^{-1} = D\Phi^{-1}(b), \quad \text{wobei } b = \Phi(a),$$

vgl. dazu An. 2, §8, Satz 3.

Der Mittelwertsatz (vgl. An. 2, §6, Satz 5) für die Abbildung Φ liefert

$$\Phi(x) - \Phi(a) = \left(\int_0^1 D\Phi(a + t(x-a))dt \right) \cdot (x-a)$$

für alle $a, x \in U$ derart, dass die Verbindungsstrecke von a nach x ganz in U liegt. Daraus folgt

$$|\Phi(x) - \Phi(a)| \leqslant C|x-a| \qquad \text{mit} \quad C := \sup\{\|D\Phi(a + t(x-a))\| : 0 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

Für $a \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ sei

$$W(a, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x-a| \leqslant \varepsilon\}$$

der abgeschlossene Würfel mit Mittelpunkt a und Seitenlänge 2ε.

Hilfssatz 1. *Seien U und V offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und*

$$F : U \longrightarrow V$$

eine C^1-invertierbare Abbildung mit Umkehrabbildung $G := F^{-1} : V \to U$. Weiter sei $x_0 \in U$, $y_0 := F(x_0)$ und $r > 0$ mit $W(x_0, r) \subset U$ und $W(y_0, r) \subset V$. Es gebe ein $\varepsilon \in]0, 1[$ mit

$$\sup_{|x-x_0| \leqslant r} \|DF(x) - E\| \leqslant \varepsilon \quad \textit{und} \quad \sup_{|y-y_0| \leqslant r} \|DG(y) - E\| \leqslant \varepsilon.$$

Ist dann $\delta \leqslant r/2$ und $W(a, \delta)$ ein Würfel mit $x_0 \in W(a, \delta)$, so gilt für das Bild des Würfels unter der Abbildung F

$$W(b, (1-\varepsilon)\delta) \subset F(W(a, \delta)) \subset W(b, (1+\varepsilon)\delta), \quad \textit{wobei } b := F(a).$$

Der Hilfssatz sagt also, dass ein Würfel unter einer differenzierbaren Abbildung, deren Funktionalmatrix nahe der Einheitsmatrix ist, nur wenig gestreckt und gestaucht wird.

Beweis. O.B.d.A. sei $x_0 = y_0 = 0$. Da $0 \in W(a, \delta)$, gilt $|a| \leqslant \delta \leqslant r/2$ und $W(a, \delta) \subset W(0, r)$. Wegen $\|DF(x)\| \leqslant 1 + \varepsilon$ für alle $x \in W(0, r)$, folgt

$$|b| = |F(a)| \leqslant (1+\varepsilon)|a| \leqslant (1+\varepsilon)r/2$$

und

$$F(W(a, \delta)) \subset W(b, (1+\varepsilon)\delta).$$

Aus $|b| \leqslant (1+\varepsilon)r/2$ folgt weiter $W(b, (1-\varepsilon)\delta) \subset W(0, r)$, also $\|DG(y)\| \leqslant 1 + \varepsilon$ für alle $y \in W(b, (1-\varepsilon)\delta)$ und

$$|G(y) - G(b)| = |G(y) - a| \leqslant (1+\varepsilon)|y-b| \leqslant (1+\varepsilon)(1-\varepsilon)\delta \leqslant \delta,$$

d.h. $G(W(b,(1-\varepsilon)\delta)) \subset W(a,\delta)$. Anwendung von F ergibt

$$W(b,(1-\varepsilon)\delta) \subset F(W(a,\delta)), \quad \text{q.e.d.}$$

Hilfssatz 2. *Seien U und V offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und $\Phi : U \to V$ eine C^1-invertierbare Abbildung. Sei $x_0 \in U$ und*

$$T := D\Phi(x_0)$$

die Funktional-Matrix von Φ im Punkt x_0. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für jeden achsenparallelen Würfel W der Seitenlänge $\leqslant \delta$ mit $x_0 \in W \subset U$ gilt

$$\left| \frac{\mathrm{Vol}(\Phi(W))}{\mathrm{Vol}(W)} - |\det T| \right| \leqslant \varepsilon.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $x_0 = 0$ und $\Phi(x_0) = 0$. Es gilt dann $D\Phi(0) = T$. Ist $\Psi : V \to U$ die Umkehrabbildung von Φ, so folgt $D\Psi(0) = T^{-1}$.

Wir betrachten die zusammengesetzte Abbildung

$$F := T^{-1} \circ \Phi : U \to V_1, \quad \text{wobei } V_1 := T^{-1}(V).$$

F ist eine C^1-invertierbare Abbildung von U auf V_1 mit $F(0) = 0$ und es gilt

$$DF(x) = T^{-1} D\Phi(x), \quad \text{also} \quad DF(0) = E.$$

Die Umkehrabbildung $G := F^{-1} = \Psi \circ T : V_1 \to U$ hat die Funktional-Matrix

$$DG(y) = D\Psi(Ty) \cdot T, \quad \text{also} \quad DG(0) = E.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir setzen $\varepsilon_1 := \varepsilon / |\det T|$ und wählen $\varepsilon_2 \in \,]0,1[$ so klein, dass

$$|(1 \pm \varepsilon_2)^n - 1| \leqslant \varepsilon_1.$$

Wegen der Stetigkeit von DF und DG gibt es ein $\delta > 0$, so dass $W(0,\delta) \subset U$, $W(0,\delta) \subset V_1$ und folgende Abschätzungen gelten:

$$\sup_{|x| \leqslant \delta} \|DF(x) - E\| \leqslant \varepsilon_2, \qquad \sup_{|y| \leqslant \delta} \|DG(y) - E\| \leqslant \varepsilon_2.$$

Nach Hilfssatz 1 folgt daraus für jeden Würfel $W \subset U$ der Seitenlänge $\leqslant \delta$ mit $0 \in W$

$$(1-\varepsilon_2)^n \leqslant \frac{\mathrm{Vol}(F(W))}{\mathrm{Vol}(W)} \leqslant (1+\varepsilon_2)^n,$$

also

$$\left| \frac{\mathrm{Vol}(F(W))}{\mathrm{Vol}(W)} - 1 \right| \leqslant \varepsilon_1.$$

Da $F(W) = T^{-1}\Phi(W)$, gilt nach § 6, Satz 3, $\mathrm{Vol}(F(W)) = |\det T|^{-1} \mathrm{Vol}(\Phi(W))$, also

$$\left| \frac{\mathrm{Vol}(\Phi(W))}{\mathrm{Vol}(W)} - |\det T| \right| \leqslant \varepsilon_1 |\det T| = \varepsilon, \quad \text{q.e.d.}$$

Satz 1. *Seien U, V offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und $\Phi : U \to V$ eine C^1-invertierbare Abbildung. Dann gilt für jede stetige Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger*

$$\int_V f(y) d^n y = \int_U f(\Phi(x)) |\det D\Phi(x)| d^n x.$$

Beweis. Da der Träger von $f \circ \Phi \in C_c(U)$ in einer endlichen Vereinigung von kompakten Würfeln enthalten ist, die höchstens Randpunkte gemeinsam haben, genügt es, folgendes zu beweisen:

Sei $W \subset U$ ein kompakter Würfel und $F : \Phi(W) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt

$$\int_{\Phi(W)} F(y)\, d^n y = \int_W F(\Phi(x)) |\det D\Phi(x)|\, d^n x.$$

Zum Beweis definieren wir folgende Funktion Δ auf der Menge aller kompakten Würfel $Q \subset W$:

$$\Delta(Q) := \int_{\Phi(Q)} F(y) d^n y - \int_Q F(\Phi(x)) |\det D\Phi(x)| d^n x.$$

Es ist zu zeigen, dass $\Delta(W) = 0$.

Annahme: Dies ist nicht der Fall. Dann gibt es eine reelle Zahl $\alpha > 0$, so dass

$$|\Delta(W)| = \alpha \mathrm{Vol}(W).$$

Sei r die Seitenlänge von W. Wir unterteilen den Würfel W durch Halbierung seiner Seiten in 2^n kompakte Teilwürfel $W^{(j)}$ der Seitenlänge $r/2$, die bis auf Randpunkte disjunkt sind. Da

$$\Delta(W) = \sum_{j=1}^{2^n} \Delta(W^{(j)}),$$

muss dann für mindestens einen der Teilwürfel $W^{(j)} =: W_1$ gelten

$$|\Delta(W_1)| \geqslant \alpha \mathrm{Vol}(W_1).$$

Auf W_1 wenden wir dies Halbierungs-Verfahren wieder an und erhalten einen Würfel $W_2 \subset W_1$ der Seitenlänge $r/4$ mit $|\Delta(W_2)| \geqslant \alpha \mathrm{Vol}(W_2)$. So fortfahrend erhalten wir eine Schachtelung von kompakten Würfeln

$$W \supset W_1 \supset W_2 \supset \ldots \supset W_{k-1} \supset W_k \supset \ldots$$

wobei W_k die Seitenlänge $2^{-k} r$ hat und folgende Ungleichung gilt:

$$(*) \quad |\Delta(W_k)| \geqslant \alpha \mathrm{Vol}(W_k) \qquad \text{für alle } k \geqslant 1.$$

Die Mittelpunkte der W_k bilden eine Cauchyfolge, die gegen einen Punkt $x_0 \in W$ konvergiert, der in allen W_k enthalten ist. Wir setzen

$$T := D\Phi(x_0), \quad y_0 := \Phi(x_0), \quad c := F(y_0)$$

und definieren Funktionen $g : W \to \mathbb{R}$ und $h : \Phi(W) \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} g(x) &:= F(\Phi(x))|\det D\Phi(x)| - F(\Phi(x_0))|\det D\Phi(x_0)|, \\ h(y) &:= F(y) - F(y_0). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\int_{\Phi(W_k)} F(y)d^n y = \int_{\Phi(W_k)} (h(y) + F(y_0))d^n y = \int_{\Phi(W_k)} h(y)d^n y + c\mathrm{Vol}(\Phi(W_k))$$

sowie

$$\begin{aligned} \int_{W_k} F(\Phi(x))|\det D\Phi(x)|d^n x &= \int_{W_k} (g(x) + F(\Phi(x_0))|\det T|)d^n x \\ &= \int_{W_k} g(x)d^n x + c|\det T|\mathrm{Vol}(W_k). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\Delta(W_k) = \int_{\Phi(W_k)} h(y)d^n y - \int_{W_k} g(x)d^n x + c\big(\mathrm{Vol}(\Phi(W_k)) - |\det T|\mathrm{Vol}(W_k)\big),$$

also

$$\frac{\Delta(W_k)}{\mathrm{Vol}(W_k)} = \frac{1}{\mathrm{Vol}(W_k)} \int\limits_{\Phi(W_k)} h(y)d^n y - \frac{1}{\mathrm{Vol}(W_k)} \int\limits_{W_k} g(x)d^n x + c\Big(\frac{\mathrm{Vol}(\Phi(W_k))}{\mathrm{Vol}(W_k)} - |\det T|\Big).$$

Wegen $\lim\limits_{y \to y_0} h(y) = 0$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ konvergieren die ersten beiden Terme auf der rechten Seite für $k \to \infty$ gegen null. Der letzte Term konvergiert wegen Hilfssatz 2 gegen null, d.h.

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\Delta(W_k)}{\mathrm{Vol}(W_k)} = 0.$$

Dies steht aber im Widerspruch zu $(*)$. Deshalb ist die Annahme falsch und der Satz ist bewiesen.

Satz 2. *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen, und $\Phi : U \to V$ eine C^1-invertierbare Abbildung. Eine Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn die Funktion $(f \circ \Phi)|\det D\Phi|$ über U integrierbar ist und es gilt dann*

$$\int_U f(\Phi(x))|\det D\Phi(x)|d^n x = \int_V f(y)d^n y.$$

Bemerkung. Man merkt sich die Integral-Transformationsformel am besten durch die symbolische Gleichung: Aus $y = \Phi(x)$ folgt

$$d^n y = |\det D\Phi(x)|d^n x.$$

Beweis. a) Sei zunächst vorausgesetzt, dass f integrierbar ist, d.h. $f \in \mathcal{L}^1(V)$. Dann ist f insbesondere messbar, also ist auch die Funktion

$$g := (f \circ \Phi)|\det D\Phi|$$

messbar auf U.

Nach § 5, Satz 6 gibt es eine Folge $f_k \in C_c(V)$, $k \geqslant 1$, die in der L^1-Norm gegen f konvergiert. Nach evtl. Übergang zu einer Teilfolge gibt es nach § 5, Corollar zu Satz 7, eine Nullmenge $N \subset V$, so dass

$$f(y) = \lim_{k\to\infty} f_k(y) \quad \text{für alle} \quad y \in V \smallsetminus N.$$

Sei $g_k := (f_k \circ \Phi)|\det D\Phi|$. Dann gilt

$$g(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x) \quad \text{für alle} \quad x \in U \smallsetminus \Phi^{-1}(N).$$

Nach § 3, Satz 9, ist $\Phi^{-1}(N)$ eine Nullmenge. Da die Transformationsformel für stetige Funktionen mit kompaktem Träger gilt, ist

$$\int_U g_k(x)d^nx = \int_V f_k(y)d^ny \quad \text{und} \quad \|g_k - g_\ell\|_{L^1} = \|f_k - f_\ell\|_{L^1},$$

also (g_k) eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}^1(U)$, die nach § 5, Satz 7 bzgl. der L^1-Norm gegen eine gewisse Funktion $G \in \mathcal{L}^1(U)$ konvergiert. Da aber eine Teilfolge der g_k fast überall auf U gegen G konvergiert, ist $G = g$ fast überall. Daraus folgt

$$\int_U g(x)d^nx = \lim_{k\to\infty}\int_U g_k(x)d^nx = \lim_{k\to\infty}\int_V f_k(y)d^ny = \int_V f(y)d^ny.$$

b) Sei umgekehrt $g := (f \circ \Phi)|\det D\Phi|$ als integrierbar über U vorausgesetzt. Dann wende man Teil a) des Beweises auf die Umkehrabbildung $\Psi := \Phi^{-1} : V \to U$ an. Da $(D\Phi)\circ\Psi = (D\Psi)^{-1}$ (vgl. An. 2, §8, Satz 3), folgt

$$(g\circ\Psi)|\det D\Psi| = (f\circ\Phi\circ\Psi)|\det D\Phi\circ\Psi||\det D\Psi| = f,$$

also ist $f \in \mathcal{L}^1(V)$, q.e.d.

(9.1) Ebene Polarkoordinaten

Die Polarkoordinaten (r,φ) eines Punktes $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$ sind wie folgt definiert: $r = \sqrt{x^2+y^2}$ ist der Abstand vom Nullpunkt und φ der (bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π eindeutig bestimmte) orientierte Winkel zwischen den Vektoren $(1,0)$ und (x,y), siehe Bild 9.1.

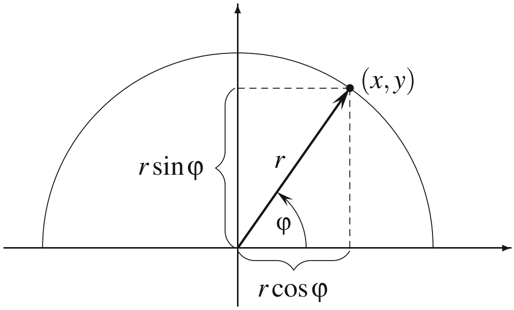


Bild 9.1

Die Transformationsformel (Satz 2) liefert die folgende Aussage:

Corollar 1 (Ebene Polarkoordinaten)**.** *Sei*

$$\Phi : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

die Abbildung

$$\Phi(r, \varphi) := (r \cos\varphi, r \sin\varphi).$$

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *ist genau dann integrierbar, wenn die Funktion*

$$\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad (r, \varphi) \mapsto r f(\Phi(r, \varphi))$$

integrierbar ist und es gilt dann

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} f(r \cos\varphi, r \sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi.$$

Beweis. Sei $U := \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[$ und $V := \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+ \times 0)$. Dann sind U und V offene Mengen im $\mathbb{R}^2$ und Φ liefert eine C^∞-invertierbare Abbildung von U auf V. Für die Funktional-Matrix gilt

$$D\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r \sin\varphi \\ \sin\varphi & r \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \det D\Phi(r, \varphi) = r.$$

Die Behauptung folgt deshalb aus Satz 2, da $\mathbb{R}^2 \setminus V$ und $(\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]) \setminus U$ Nullmengen sind.

(9.2) Eulersche Betafunktion. Für reelle Zahlen $p > 0, \ q > 0$ ist die Betafunktion $B(p, q)$ definiert durch

$$B(p, q) := \int_0^1 t^{p-1} (1 - t)^{q-1} dt.$$

Man überlegt sich leicht, dass das Integral als uneigentliches Riemannsches und als Lebesguesches Integral existiert. Wir wollen mit Hilfe ebener Polarkoordinaten die Formel

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\, \Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}$$

beweisen.

Mit der Substitution $t = \sin^2 \varphi$ erhält man wegen $dt = 2 \sin\varphi \, \cos\varphi \, d\varphi$ folgende äquivalente Definition der Betafunktion:

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin\varphi)^{2p-1} (\cos\varphi)^{2q-1} d\varphi.$$

Da

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty t^{m-1} e^{-t} dt = 2 \int_0^\infty r^{2m-1} e^{-r^2} dr,$$

ist

$$
\begin{aligned}
B(p,q)\Gamma(p+q) &= 2\int_0^\infty B(p,q)r^{2p+2q-1}e^{-r^2}\,dr \\
&= 4\int_0^\infty \int_0^{\pi/2} (r\sin\varphi)^{2p-1}(r\cos\varphi)^{2q-1}e^{-r^2}\,r\,d\varphi\,dr.
\end{aligned}
$$

Durch Anwendung des Satzes von Fubini und Umkehrung der Polarkoordinaten-Transformation erhält man

$$
\begin{aligned}
B(p,q)\Gamma(p+q) &= 4\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \\
&= 4\int_0^\infty x^{2p-1}e^{-x^2}\,dx \cdot \int_0^\infty y^{2q-1}e^{-y^2}\,dy \\
&= \Gamma(p)\Gamma(q).
\end{aligned}
$$

Daraus folgt die behauptete Formel.

(9.3) Räumliche Polarkoordinaten

Die Polarkoordinaten (r,ϑ,φ) eines Punktes $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, der nicht auf der z-Achse liegt, sind wie folgt definiert (siehe Bild 9.2):

i) r ist der Abstand vom Nullpunkt.
ii) Die *Poldistanz* ϑ ist der Winkel zwischen der z-Achse und dem Ortsvektor von P.
iii) φ ist der orientierte Winkel zwischen der x-Achse und dem Ortsvektor der Projektion P' von P auf die x-y-Ebene.

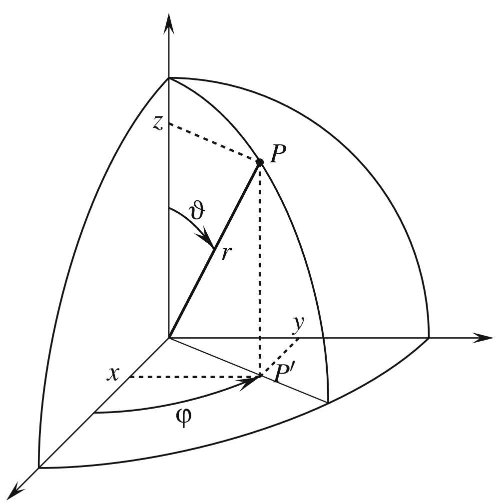


Bild 9.2

Da der Abstand von P' vom Nullpunkt gleich $\rho := r\sin\vartheta$ ist, sind (ρ,φ) die ebenen Polarkoordinaten von P'. Daraus ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen den kartesischen und den räumlichen Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi = r\sin\vartheta\cos\varphi, \\ y &= \rho\sin\varphi = r\sin\vartheta\sin\varphi, \\ z &= r\cos\vartheta. \end{aligned}$$

Die Transformationsformel (Satz 2) liefert in diesem Fall:

Corollar 2 (Räumliche Polarkoordinaten)**.** *Sei*

$$\Phi : \mathbb{R}_+ \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

die Abbildung

$$\Phi(r,\vartheta,\varphi) := (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta).$$

Dann ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *genau dann integrierbar, wenn die Funktion*

$$\mathbb{R}_+ \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}, \quad (r,\vartheta,\varphi) \mapsto f(\Phi(r,\vartheta,\varphi))\, r^2 \sin\vartheta,$$

integrierbar ist und es gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\infty} f(\Phi(r,\vartheta,\varphi))\, r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Beweis. Sei $U := \mathbb{R}_+^* \times]0,\pi[\times]0,2\pi[$ und $V := \mathbb{R}^3 \smallsetminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R})$.

Dann sind U und V offene Mengen im $\mathbb{R}^3$ und Φ liefert eine C^∞-invertierbare Abbildung von U auf V. Für die Funktional-Matrix berechnet man

$$D\Phi(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\ \cos\varphi & r\ \cos\vartheta\ \cos\varphi & -r\ \sin\vartheta\ \sin\varphi \\ \sin\vartheta\ \sin\varphi & r\ \cos\vartheta\ \sin\varphi & r\ \sin\vartheta\ \cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix},$$

also $\det D\Phi(r,\varphi) = r^2 \sin\vartheta$.

Die Behauptung folgt deshalb aus Satz 2, da $\mathbb{R}^3 \smallsetminus V$ und $(\mathbb{R}_+ \times [0,\pi] \times [0,2\pi]) \smallsetminus U$ Nullmengen sind.

(9.4) Unter Benutzung der Polarkoordinaten berechnen wir noch einmal das Volumen der dreidimensionalen Kugel vom Radius R.

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}_3(K_3(R)) &= \int_{K_3(R)} dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi \\ &= \left(\int_0^R r^2 dr\right)\left(\int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) = \frac{4\pi}{3} R^3. \end{aligned}$$

(9.5) Newton-Potential einer Kugel

Ein kompakter Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ der Dichte $m : K \to \mathbb{R}$ (die wir als stetig voraussetzen), erzeugt im Punkt $Q \in \mathbb{R}^3 \setminus K$ (bis auf einen Normierungsfaktor) das Potential

$$u(Q) = \int_K \frac{m(x)}{\rho(x,Q)} d^3x,$$

wobei $\rho(x,Q)$ den Abstand zwischen den Punkten x und Q bedeutet. Wir setzen jetzt speziell voraus, dass

$$K := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leqslant r_0\}$$

die Kugel vom Radius $r_0 > 0$ und $m : K \to \mathbb{R}$ rotationssymmetrisch ist. Es gilt also $m(x) = \tilde{m}(\|x\|)$ mit einer Funktion $\tilde{m} : [0, r_0] \to \mathbb{R}$. Wir werden jedoch unter leichtem Missbrauch der Bezeichnung statt $\tilde{m}$ wieder m schreiben.

Um $u(Q)$ zu berechnen, können wir wegen der Rotationssymmetrie annehmen, dass $Q = (0,0,R)$, wobei $R = \rho(0,Q) = \|Q\|$. Hat der Punkt x die Polarkoordinaten (r, ϑ, φ), so gilt (vgl. Bild 9.3)

$$\rho(x,Q)^2 = (R - r\cos\vartheta)^2 + r^2 \sin^2\vartheta = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\vartheta.$$

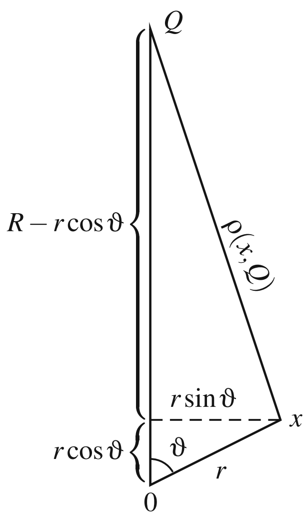


Bild 9.3

Damit wird

$$\begin{aligned} u(Q) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{r_0} \frac{m(r) r^2 \sin\vartheta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\vartheta}} \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^{r_0} \left(\int_0^{\pi} \frac{\sin\vartheta \, d\vartheta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\vartheta}} \right) m(r) r^2 dr. \end{aligned}$$

Um das innere Integral zu berechnen, machen wir die Sustitution $t = -\cos\vartheta$ und erhalten

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{R^2+r^2+2Rrt}} &= \frac{1}{Rr}\sqrt{R^2+r^2+2Rrt}\Big|_{t=-1}^{t=1} \\ &= \frac{1}{Rr}\left(\sqrt{R^2+r^2+2Rr}-\sqrt{R^2+r^2-2Rr}\right) \\ &= \frac{1}{Rr}\{(R+r)-(R-r)\} = \frac{2}{R}.\end{aligned}$$

Somit ist

$$u(Q) = \frac{4\pi}{R}\int_0^{r_0} m(r)r^2 dr.$$

Andererseits berechnet man für die Gesamtmasse M von K

$$M = \int_K m(x)d^3x = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r_0} m(r)r^2\sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = 4\pi\int_0^{r_0} m(r)r^2 dr.$$

Also erhält man insgesamt

$$u(Q) = \frac{M}{R}.$$

Das Potential der Kugel verhält sich also so, als ob die Gesamtmasse im Mittelpunkt konzentriert wäre.

AUFGABEN

9.1. Sei $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant 1\}$ der Einheitskreis der Ebene.

Für $n,m \in \mathbb{N}$ berechne man das Integral

$$\int_E x^n y^m dxdy.$$

9.2. Man berechne das Volumen des Kugelsektors, der in dreidimensionalen Polarkoordinaten durch die Ungleichungen

$$0 \leqslant r \leqslant r_0, \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_0$$

gegeben ist ($r_0 > 0,\ 0 < \vartheta_0 < \pi$).

9.3. Man zeige, dass die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}_+^* \times]0,1[\to \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \qquad \Phi(s,t) := (s(1-t), st)$$

bijektiv ist. Wie lautet die Umkehrabbildung?

Man berechne die Funktional-Matrix und Funktional-Determinante von Φ.

9.4. Sei K die Kugelschale $K := \{x \in \mathbb{R}^3 : r \leqslant \|x\| \leqslant R\}$, $0 < r < R < \infty$.
Man berechne das Integral (Potential einer Kugelschale)

$$u(\xi) := \int_K \frac{d^3x}{\|x-\xi\|}$$

für die Fälle $\|\xi\| < r$, $r \leqslant \|\xi\| \leqslant R$ und $\|\xi\| > R$.

9.5. Die 4-dimensionalen Polarkoordinaten $(r, \vartheta_1, \vartheta_2, \varphi)$, hängen mit den kartesischen Koordinaten (x_1, x_2, x_3, x_4) wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned}
x_1 &= r \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\varphi,\\
x_2 &= r \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\varphi,\\
x_3 &= r \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2,\\
x_4 &= r \cos\vartheta_1.
\end{aligned}$$

Man berechne die Funktionalmatrix $\dfrac{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial(r, \vartheta_1, \vartheta_2, \varphi)}$ und ihre Determinante.

9.6. a) Es sei $U := \{\xi \in \mathbb{R}^{n-1} : \|\xi\| < 1\}$. Man zeige, dass

$$\Phi : U \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+^*,$$

$$(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, r) \mapsto \left(r\xi_1, \ldots, r\xi_{n-1}, r\sqrt{1-\|\xi\|^2}\right)$$

eine C^1-invertierbare Abbildung ist mit

$$\det D\Phi(\xi, r) = \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-\|\xi\|^2}}.$$

b) Sei $f : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ eine (Lebesgue-)integrierbare Funktion. Man zeige

$$\int_{x_n>0} f(x)d^nx = \int_0^\infty \left(\int_{\|\xi\|<1} \frac{f(r\xi, r\sqrt{1-\|\xi\|^2})}{\sqrt{1-\|\xi\|^2}} d^{n-1}\xi\right) r^{n-1}dr.$$

c) Seien $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-messbare Funktionen derart, dass die Funktion

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(\|x\|)g(x_n)$$

über $\mathbb{R}^n$ integrierbar ist ($n \geqslant 2$). Man zeige

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\|x\|)g(x_n)d^nx = \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_0^\infty \left(\int_0^\pi \sin^{n-2} t\, g(r\cos t)dt\right) f(r)r^{n-1}dr.$$

§ 10 Partielle Integration

Wir werden jetzt die bekannte Regel der partiellen Integration von Funktionen einer reellen Veränderlichen in einem speziellen Fall auf mehrere Veränderliche verallgemeinern. Dies ist eine Vorstufe für die in späteren Paragraphen zu beweisenden Integralsätze im $\mathbb{R}^n$. Als eine Anwendung der partiellen Integration leiten wir den Begriff des adjungierten Differentialoperators her. Außerdem leiten wir in diesem Paragraphen mit Hilfe der Transformationsformel für mehrfache Integrale und partieller Integration die Darstellung des Laplace-Operators in krummlinigen Koordinaten ab.

Bezeichnungen. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Wir bezeichnen mit $C(U)$ den Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$ und mit $C_c(U)$ den Untervektorraum aller Funktionen $f \in C(U)$, die kompakten Träger in U haben. Für eine natürliche Zahl k sei $C^k(U)$ der Vektorraum der k-mal stetig partiell differenzierbaren Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$ sowie

$$C^\infty(U) := \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(U),$$

$$C_c^k(U) := C_c(U) \cap C^k(U) \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Differenzierbare Teilung der Eins

Wir definieren die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$g(t) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right) & \text{für} \quad |t| < 1 \\ 0 & \text{für} \quad |t| \geqslant 1. \end{cases}$$

Die Funktion g ist beliebig oft differenzierbar, gehört also zu $C_c^\infty(\mathbb{R})$. Dies beweist man ähnlich wie in An. 1, Beispiel (22.2). Die Funktion

$$G(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(t-k)$$

ist beliebig oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$, überall ungleich null und genügt der Beziehung $G(t) = G(t-k)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$. Setzt man

$$h(t) := \frac{g(t)}{G(t)} \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R},$$

so ist $h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{Supp}(h) = [-1, 1]$ und

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h(t-k) = 1 \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}.$$

O. Forster, *Analysis 3*, Aufbaukurs Mathematik,
DOI 10.1007/978-3-8348-2374-8_10, © Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden 2012

Definiert man deshalb für $p=(p_1,\cdots,p_n)\in\mathbb{Z}^n$ und $\varepsilon>0$ die Funktionen $\alpha_{p\varepsilon}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ durch

$$\alpha_{p\varepsilon}(x)=\prod_{\nu=1}^{n} h\left(\frac{x_\nu}{\varepsilon}-p_\nu\right),$$

so gilt $\alpha_{p\varepsilon}\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}^n}\alpha_{p\varepsilon}(x)=1 \text{ für alle } x\in\mathbb{R}^n.$$

Die Träger der Funktion $\alpha_{p\varepsilon}$ ist der durch

$$\{x\in\mathbb{R}^n : |x_\nu-p_\nu\varepsilon|\leqslant\varepsilon \text{ für } \nu=1,\cdots,n\}$$

definierte Würfel.

Mit Hilfe der Teilung der Eins $(\alpha_{p\varepsilon})_{p\in\mathbb{Z}^n}$ kann man andere C^∞-Funktionen konstruieren.

Satz 1. *Sei $U\subset\mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $K\subset U$ eine kompakte Teilmenge. Dann gibt es eine Funktion $\beta\in C_c^\infty(U)$ mit $0\leqslant\beta\leqslant 1$ und*

$$\beta\mid K=1.$$

Beweis. Es gibt ein $\varepsilon>0$ derart, dass jeder kompakte Würfel der Seitenlänge 2ε, der K trifft, ganz in U enthalten ist. Sei P die (endliche) Menge aller Multiindizes $p\in\mathbb{Z}^n$ mit

$$\mathrm{Supp}(\alpha_{p\varepsilon})\cap K\neq\emptyset.$$

Wir definieren

$$\beta:=\sum_{p\in P}\alpha_{p\varepsilon}.$$

Dann ist $\beta(x)=1$ für alle $x\in K$ und

$$\mathrm{Supp}(\beta)=\bigcup_{p\in P}\mathrm{Supp}(\alpha_{p\varepsilon})\subset U,$$

also $\beta\in C_c^\infty(U)$, q.e.d.

Corollar. *Sei $U\subset\mathbb{R}^n$ offen, $K\subset U$ kompakt und $f\in C^k(U)$, $0\leqslant k\leqslant\infty$. Dann gibt es eine Funktion $f_1\in C_c^k(U)$ mit*

$$f_1\mid K=f\mid K.$$

Beweis. Mit der in Satz 1 konstruierten Funktion $\beta\in C_c^\infty(U)$ braucht man nur $f_1:=\beta f$ zu definieren.

Satz 2. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leqslant i \leqslant n$. Dann gilt*

a) $\displaystyle\int_U \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i} d^n x = 0$ *für alle* $\varphi \in C_c^1(U)$,

b) $\displaystyle\int_U \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} g(x) d^n x = -\int_U f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} d^n x$ *für alle* $f \in C^1(U)$ *und* $g \in C_c^1(U)$.

Bemerkung. Für die Gültigkeit dieser Integralformeln ist wesentlich, dass jeweils mindestens eine der auftretenden Funktionen kompakten Träger in U hat. Andernfalls treten noch Randintegrale hinzu. Darauf werden wir in § 15 bei der Behandlung des Gaußschen Integralsatzes zurückkommen.

Beweis. Zunächst ist klar, dass b) aus a) folgt, denn $fg \in C_c^1(U)$ und

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Zum Beweis von a) kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $U = \mathbb{R}^n$. Denn die Funktion $\varphi \in C_c^1(U)$ kann durch 0 trivial auf ganz $\mathbb{R}^n$ zu einer Funktion aus $C_c^1(\mathbb{R}^n)$ fortgesetzt werden. Außerdem genügt es, den Fall $i = 1$ zu behandeln. Sei also $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Wir wählen $R \in \mathbb{R}_+$ so groß, dass

$$\operatorname{Supp}(\varphi) \subset [-R, R]^n.$$

Für jedes feste $(x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ gilt dann

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x_1, \cdots, x_n) dx_1 = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)\Big|_{x_1=-R}^{x_1=R} = 0,$$

also auch

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 0, \quad \text{q.e.d.}$$

(10.1) Beispiel. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $f \in C^2(U), g \in C_c^2(U)$. Für $i = 1, \cdots, n$ erhält man durch zweimalige Anwendung von Satz 2

$$\int_U \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} g d^n x = -\int_U \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} d^n x = \int_U f \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} d^n x.$$

Summation über i ergibt

$$\int_U (\Delta f) g d^n x = -\int_U \langle \nabla f, \nabla g \rangle d^n x = \int_U f \Delta g d^n x,$$

wobei $\Delta = \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ der Laplace-Operator und $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$ der Nabla-Operator ist.

Lineare Differentialoperatoren

Ein linearer Differentialoperator der Ordnung k in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ hat die Gestalt

$$L = \sum_{|p| \leqslant k} a_p D^p.$$

Dabei durchläuft p alle n-tupel $p = (p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{N}^n$ mit

$$|p| := p_1 + \cdots + p_n \leqslant k,$$

$$D^p := D_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot D_n^{p_n}, \quad D_i := \frac{\partial}{\partial x_i},$$

und die a_p sind Funktionen in U, die wir zur Vereinfachung als beliebig oft differenzierbar voraussetzen. L definiert dann lineare Abbildungen

$$L : C^m(U) \to C^{m-k}(U) \quad \text{für } m \geqslant k,$$

sowie

$$L : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$$

durch

$$Lf := \sum_{|p| \leqslant k} a_p D^p f.$$

Ein Differentialoperator der Ordnung 0 bedeutet einfach Multiplikation mit einer Funktion.

Lineare Differentialoperatoren können in natürlicher Weise addiert und mit Skalaren multipliziert werden, bilden also einen Vektorraum. Die Multiplikation von Differentialoperatoren ist definiert als Komposition von Abbildungen. Sei L_1 ein Differentialoperator der Ordnung k und L_2 ein Differentialoperator der Ordnung l. Für $m \geqslant k + l$ definiert dann die Zusammensetzung

$$C^m(U) \xrightarrow{L_2} C^{m-l}(U) \xrightarrow{L_1} C^{m-k-l}(U)$$

die Abbildung

$$L_1 \circ L_2 : C^m(U) \to C^{m-k-l}(U).$$

Wir wollen zeigen, dass $L_1 \circ L_2$ wieder ein Differentialoperator der Ordnung $k + l$ ist. Dazu behandeln wir zuerst den Spezialfall

$$L_1 = D_i,\ L_2 = aD^p,\ a \in C^\infty(U),$$

mit einem festen n-tupel $p = (p_1, \cdots, p_n)$. Für jede Funktion $f \in C^m(U),\ m \geqslant |p| + 1$, gilt

$$(L_1 \circ L_2)f = L_1(L_2 f) = D_i(aD^p f) = \frac{\partial a}{\partial x_i} D^p f + aD_i D^p f.$$

Es gilt also

$$L_1 \circ L_2 = aD_iD^p + \left(\frac{\partial a}{\partial x_i}\right) D^p.$$

Dies ist ein Differentialoperator der Ordnung $|p|+1$. Der allgemeine Fall wird durch Induktion nach der Ordnung von L_1 auf diesen Spezialfall zurückgeführt.

Bemerkung. Man beachte, dass das Produkt von Differentialoperatoren nicht kommutativ ist, d.h. im allgemeinen ist der *Kommutator*

$$[L_1, L_2] := L_1 \circ L_2 - L_2 \circ L_1$$

ungleich null.

(10.2) Beispiel. Sei $L_1 := \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $L_2 := x_j$. Dann ist

$$L_1(L_2 f) = \frac{\partial}{\partial x_i}(x_j f) = \delta_{ij} f + x_j \frac{\partial f}{dx_i},$$

$$L_2(L_1 f) = x_j \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

also $L_1(L_2 f) - L_2(L_1 f) = \delta_{ij} f$, d.h.

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, x_j\right] = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j. \end{cases}$$

Diese Vertauschungs-Relation spielt in der Quanten-Mechanik eine wichtige Rolle.

Adjungierte Differentialoperatoren

Sei L ein Differentialoperator der Ordnung k in der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Ein Differentialoperator M der Ordnung k in U heißt *adjungiert* zu L, falls

$$(*) \qquad \int_U (Mf) \cdot g d^n x = \int_U f(Lg) d^n x$$

für alle $f \in C^k(U)$, $g \in C_c^k(U)$. Wir zeigen, dass der Operator M durch diese Bedingung eindeutig bestimmt ist. Dazu benötigen wir folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz 1. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $h \in C(U)$. Für alle $g \in C_c^\infty(U)$ gelte*

$$\int_U h(x) g(x) d^n x = 0.$$

Dann ist h identisch null.

Beweis. Angenommen, es gebe einen Punkt $a \in U$ mit $h(a) \neq 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $h(a) > 0$. Es gibt dann wegen der Stetigkeit von h eine Umgebung $V \subset U$ von a und ein $\delta > 0$, so dass

$$h(x) \geqslant \delta \ \text{ für alle } \ x \in V.$$

Es gibt eine Funktion $g \in C_c^\infty(U)$ mit $\mathrm{Supp}(g) \subset V$, $g \geqslant 0$ und $g(a) > 0$. (Man kann als g etwa eine der oben konstruierten Funktionen $\alpha_{p\varepsilon}$ wählen.) Damit ist

$$\int_U h(x)g(x)dx = \int_V h(x)g(x)dx \geqslant \delta \int_V g(x)dx > 0.$$

Dies steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung, also ist der Hilfssatz bewiesen.

Nun zum Beweis der Eindeutigkeit des adjungierten Differentialoperators. Angenommen, $(*)$ sei noch für einen zweiten Operator M' erfüllt. Sei $f \in C^k(U)$ eine beliebige Funktion. Dann gilt

$$\int_U (Mf - M'f) \cdot g\, d^n x = 0 \quad \text{für alle } g \in C_c^k(U).$$

Der Hilfssatz zeigt, dass $Mf = M'f$, also $M = M'$.

Der somit eindeutig bestimmte adjungierte Differentialoperator zu L wird mit L^* bezeichnet. (Die Existenz beweisen wir im nächsten Satz.) Die Definitionsgleichung für L^* lautet also

$$\int_U (L^* f) g d^n x = \int_U f(Lg) d^n x$$

für alle $f \in C^k(U),\ g \in C_c^k(U)$.

Satz 3. *Zu jedem Differentialoperator in der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ gibt es einen adjungierten. Es gelten die Rechenregeln*

i) $(cL)^* = cL^*$,

ii) $(L_1 + L_2)^* = L_1^* + L_2^*$,

iii) $(L_1 \circ L_2)^* = L_2^* \circ L_1^*$,

für Differentialoperatoren L, L_1, L_2 und $c \in \mathbb{R}$.

Man beachte die formale Analogie der Rechenregeln zu denen für die Transposition von Matrizen.

Beweis. Wir beweisen zuerst die Rechenregeln i) bis iii) in der verschärften Form: Existieren L^*, L_1^* und L_2^*, so existieren auch $(cL)^*, (L_1 + L_2)^*$ und $(L_1 \circ L_2)^*$ und werden durch die angegebenen Formeln dargestellt. Dies folgt daraus, dass (in abgekürzter Schreibweise)

$$\int (cL^* f)g = c\int (L^* f)g = c\int fLg = \int f(cLg),$$

$$\int ((L_1^* + L_2^*)f)g = \int (L_1^* f)g + \int (L_2^* f)g = \int f(L_1 + L_2)g,$$

$$\int (L_2^* \circ L_1^* f)g = \int (L_1^* f)(L_2 g) = \int f(L_1 \circ L_2 g).$$

Für den Differentialoperator 0-ter Ordnung $L = a$ mit $a \in C^\infty(U)$ ist $L^* = a$, denn

$$\int (af)g = \int f(ag).$$

Für $L = \frac{\partial}{\partial x_i}$ folgt aus Satz 2 b), dass $L^* = -\frac{\partial}{\partial x_i}$. Da sich jeder lineare Differentialoperator durch Addition und Multiplikation aus diesen speziellen Differentialoperatoren 0-ter und 1. Ordnung aufbauen lässt, folgt die Existenz des Adjungierten eines jeden linearen Differentialoperators.

Beispiele

(10.3) Sei $L = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad a_i \in C^\infty(U)$.

Dann ist

$$L^* = \sum_i \left(-\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \cdot a_i = -\sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum \frac{\partial a_i}{\partial x_i}.$$

(10.4) Für den Differentialoperator

$$L = \sum_{|p| \leqslant k} c_p D^p, \quad c_p \in \mathbb{R},$$

mit konstanten Koeffizienten gilt

$$L^* = \sum_{|p| \leqslant k} (-1)^{|p|} c_p D^p.$$

Z.B. gilt für den Laplace-Operator $\Delta = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$

$$\Delta^* = \Delta.$$

Ein Differentialoperator L, für den $L^* = L$, heißt *selbstadjungiert*.

Bemerkung. In der Theorie der linearen Operatoren in Hilberträumen definiert man ebenfalls die Begriffe adjungiert und selbstadjungiert, aber in einem schärferen Sinn. Was wir hier als adjungiert und selbstadjungiert bezeichnen heißt dort formal adjungiert bzw. formal selbstadjungiert.

Eine Anwendung der Transformationsformel

Wir werden jetzt die Transformationsformel für mehrfache Integrale dazu verwenden, um den Laplace-Operator in krummlinigen Koordinaten darzustellen. Dazu formulieren wir die Transformationsformel erst noch etwas um.

Seien Ω und Ω' offene Mengen in $\mathbb{R}^n$ und

$$\Phi : \Omega' \to \Omega, \qquad \xi \mapsto x = \Phi(\xi)$$

eine C^1-invertierbare Abbildung. Wir definieren eine Matrix („Maßtensor“)

$g_{ij} : \Omega' \to \mathbb{R},\ 1 \leqslant i, j \leqslant n$, durch

$$g_{ij} := \left\langle \frac{\partial x}{\partial \xi_i}, \frac{\partial x}{\partial \xi_j} \right\rangle,$$

d.h. genauer

$$g_{ij}(\xi) = \left\langle \frac{\partial \Phi(\xi)}{\partial \xi_i}, \frac{\partial \Phi(\xi)}{\partial \xi_j} \right\rangle = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \Phi_\nu(\xi)}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \Phi_\nu(\xi)}{\partial \xi_j}.$$

Es gilt also in Matrixschreibweise

$$G = (D\Phi)^T (D\Phi),$$

wobei $G := (g_{ij})$ und $D\Phi = \left(\frac{\partial \Phi_\nu}{\partial \xi_i}\right)$ die Funktionalmatrix von Φ ist.

Wir setzen

$$g := \det(g_{ij}).$$

Aus dem Determinanten-Multiplikationssatz folgt

$$\sqrt{g} = |\det D\Phi|.$$

Damit schreibt sich die Transformationsformel aus § 9, Satz 2 als

$$\int_{\Omega'} u(\Phi(\xi)) \sqrt{g(\xi)} d^n \xi = \int_{\Omega} u(x) d^n x$$

für jede Funktion $u \in C_c(\Omega)$. Es sei (g^{kl}) die zu (g_{ij}) inverse Matrix, d.h.

$$\sum_l g^{kl} g_{lj} = \delta_{kj}.$$

Hilfssatz 2. *Mit den obigen Bezeichnungen gilt: Seien $u, v \in C^1(\Omega)$ und*

$$\tilde{u} := u \circ \Phi, \quad \tilde{v} := v \circ \Phi \in C^1(\Omega').$$

Dann ist

$$\sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \circ \Phi = \sum_{k,l} g^{kl} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_k} \cdot \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi_l}.$$

Beweis. Nach der Kettenregel ist

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_k} = \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \circ \Phi \right) \frac{\partial \Phi_i}{\partial \xi_k}.$$

In Matrizenschreibweise heißt das

$$\nabla \tilde{u} = ((\nabla u) \circ \Phi) D\Phi$$

oder

$$(\nabla u) \circ \Phi = (\nabla \tilde{u})(D\Phi)^{-1},$$

wobei die Gradienten ∇u und $\nabla\tilde{u}$ als Zeilenvektoren aufgefasst werden. Ebenso gilt

$$(\nabla v)\circ\Phi = (\nabla\tilde{v})(D\Phi)^{-1}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\langle\nabla u,\nabla v\rangle\circ\Phi &= ((\nabla u)\circ\Phi)((\nabla v)\circ\Phi)^T\\ &= (\nabla\tilde{u})(D\Phi)^{-1}((D\Phi)^{-1})^T(\nabla\tilde{v})^T\\ &= (\nabla\tilde{u})G^{-1}(\nabla\tilde{v})^T.\end{aligned}$$

In Komponenten ausgeschrieben ist das die Behauptung.

Die Transformation des Laplace-Operators im $\mathbb{R}^n$,

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

bzgl. einer C^2-invertierbaren Abbildung $\Phi : \Omega' \to \Omega$ ist definiert durch die Formel

$$\Delta^\Phi(u\circ\Phi) = (\Delta u)\circ\Phi \quad \text{für alle} \quad u\in C^2(\Omega).$$

Satz 4. *Mit den obigen Bezeichnungen gilt*

$$\begin{aligned}\Delta^\Phi &= \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{k,l}\frac{\partial}{\partial\xi_l}\left(g^{kl}\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial\xi_k}\right)\\ &= \sum_{k,l}g^{kl}\frac{\partial^2}{\partial\xi_k\partial\xi_l} + \sum_k\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_l\frac{\partial(g^{kl}\sqrt{g})}{\partial\xi_l}\right)\frac{\partial}{\partial\xi_k}.\end{aligned}$$

Beweis. Sei $u\in C^2(\Omega), v\in C_c^2(\Omega)$ und $\tilde{u} := u\circ\Phi,\ \tilde{v} := v\circ\Phi$. Nach der Transformationsformel (§ 9, Satz 1) ist

$$\begin{aligned}\int_\Omega(\Delta u)v\,d^nx &= \int_{\Omega'}((\Delta u)\circ\Phi)(v\circ\Phi)\sqrt{g}\,d^n\xi\\ &= \int_{\Omega'}(\Delta^\Phi\tilde{u})\cdot\tilde{v}\sqrt{g}\,d^n\xi.\end{aligned}$$

Andrerseits gilt nach Beispiel (10.1)

$$\begin{aligned}\int_\Omega(\Delta u)v\,d^nx &= -\int_\Omega\langle\nabla u,\nabla v\rangle\,d^nx\\ &= -\int_{\Omega'}(\langle\nabla u,\nabla v\rangle\circ\Phi)\sqrt{g}\,d^n\xi\\ &= -\int_{\Omega'}\sum_{k,l}g^{kl}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi_k}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\xi_l}\sqrt{g}\,d^n\xi \quad \text{(Hilfssatz 2)}\\ &= -\int_{\Omega'}\sum_{k,l}\left(g^{kl}\sqrt{g}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi_k}\right)\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\xi_l}d^n\xi.\end{aligned}$$

Wendet man noch einmal partielle Integration an (Satz 2), so erhält man schließlich

$$\int_{\Omega'} (\Delta^\Phi \tilde{u})\tilde{v}\sqrt{g}\,d^n\xi = \int_{\Omega'} \sum_{k,l} \frac{\partial}{\partial \xi_l}\left(g^{kl}\sqrt{g}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_k}\right)\tilde{v}\,d^n\xi.$$

Da dies für alle $\tilde{v} \in C_c^2(\Omega')$ gilt, folgt daraus mit Hilfssatz 1

$$\Delta^\Phi \tilde{u} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{k,l} \frac{\partial}{\partial \xi_l}\left(g^{kl}\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial \xi_k}\right)\tilde{u}, \quad \text{q.e.d.}$$

Beispiele

(10.5) *Ebene Polarkoordinaten*, vgl. (9.1)

Hier sei für einen beliebig gewählten Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\Omega' := \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\, \alpha < \varphi < 2\pi + \alpha\} = \mathbb{R}_+^* \times]\alpha, 2\pi + \alpha[$$

und

$$\Omega := \mathbb{R}^2 \smallsetminus S_\alpha,$$

wobei $S_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ den Halbstrahl $S_\alpha := \{(r\cos\alpha, r\sin\alpha) : r \in \mathbb{R}_+\}$ bezeichne.

Die Abbildung

$$\Phi : \Omega' \to \Omega, \qquad \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

ist C^∞-invertierbar. Ist $\Phi(r,\varphi) = (x,y)$, so sind (r,φ) die Polarkoordinaten des Punktes (x,y). Zu jedem $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus (0,0)$ kann man ein α finden, so dass $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus S_\alpha$. Der Winkel φ hängt von der Wahl von α ab, er ist nur bis auf ein Vielfaches von 2π bestimmt.

Für die Funktionalmatrix der Transformation Φ gilt

$$D\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix},$$

also lautet der Maßtensor

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

und

$$\sqrt{g} = r, \quad (g^{kl}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{pmatrix}.$$

Für den Laplace-Operator in ebenen Polarkoordinaten ergibt sich daher

$$\begin{aligned} \Delta^\Phi &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

Sei beispielsweise $u : \mathbb{R}^2 \setminus 0 \to \mathbb{R}$ die Funktion, die in Polarkoordinaten durch

$$\tilde{u}(r,\varphi) = u(\Phi(r,\varphi)) = r^m \cos m\varphi, \ (m \in \mathbb{Z}),$$

gegeben wird. Dann ist

$$\begin{aligned}\Delta^\Phi \tilde{u} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial r^m}{\partial r}\right)\cos m\varphi + r^{m-2}\frac{\partial^2 \cos m\varphi}{\partial \varphi^2} \\ &= m^2 r^{m-2}\cos m\varphi - r^{m-2}m^2 \cos m\varphi = 0,\end{aligned}$$

also u harmonisch.

Bemerkung. Meist schreibt man in der Praxis (nicht ganz korrekt) ebenfalls u für die transformierte Funktion $u \circ \Phi$ und Δ statt Δ^Φ.

(10.6) *Räumliche Polarkoordinaten*, vgl. (9.3)

Für einen beliebig gewählten Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$\begin{aligned}\Omega' &:= \left\{(r,\vartheta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 : r > 0,\, 0 < \vartheta < \pi,\, \alpha < \varphi < 2\pi + \alpha\right\} \\ &= \mathbb{R}_+^* \times]0,\pi[\times]\alpha, \pi + \alpha[\end{aligned}$$

und

$$\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus H_\alpha,$$

wobei $H_\alpha \subset \mathbb{R}^3$ die Halbebene $H_\alpha := \left\{(r\cos\alpha, r\sin\alpha, z) : r \in \mathbb{R}_+, z \in \mathbb{R}\right\}$ bezeichne.

Die Abbildung

$$\Phi : \Omega' \to \Omega, \qquad \begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,\sin\vartheta\,\cos\varphi \\ r\,\sin\vartheta\,\sin\varphi \\ r\,\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

ist C^∞-invertierbar. Ist $\Phi(r,\vartheta,\varphi) = (x,y,z)$, so sind (r,ϑ,φ) die Polarkoordinaten des Punktes (x,y,z). Zu jedem Punkt (x,y,z) mit $(x,y) \neq (0,0)$ gibt es ein α, so dass $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus H_\alpha$. Der Winkel φ hängt von der Wahl von α ab, er ist nur bis auf ein Vielfaches von 2π bestimmt.

Für die Funktionalmatrix der Transformation Φ gilt

$$D\Phi(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\,\cos\varphi & r\,\cos\vartheta\,\cos\varphi & -r\,\sin\vartheta\,\sin\varphi \\ \sin\vartheta\,\sin\varphi & r\,\cos\vartheta\,\sin\varphi & r\,\sin\vartheta\,\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Spaltenvektoren sind paarweise orthogonal, also ist der Maßtensor eine Diagonalmatrix

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\vartheta \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\sqrt{g} = r^2 \sin\vartheta$$

und (g^{kl}) ist eine Diagonalmatrix mit

$$g^{11} = 1,\ g^{22} = \frac{1}{r^2},\ g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}.$$

Für den Laplace-Operator in räumlichen Polarkoordinaten ergibt sich daher

$$\begin{aligned}\Delta^{\Phi} &= \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right\}\\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}.\end{aligned}$$

AUFGABEN

10.1. Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ und $(\alpha_{p\varepsilon})_{p\in\mathbb{Z}^n}$ die eingangs dieses Paragraphen definierte Teilung der Eins. Sei

$$f_\varepsilon := \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} f(p\varepsilon)\alpha_{p\varepsilon}.$$

Man zeige, dass die Funktionen $f_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ für $\varepsilon \to 0$ gleichmäßig gegen f konvergieren.

10.2. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und seien $a_{ij}, b_i, c \in C^\infty(U)$. Für den Differentialoperator

$$L := \sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c$$

berechne man L^*.

10.3. Man zeige: Für jeden linearen Differentialoperator in der offenen Menge $U \in \mathbb{R}^n$ gilt $(L^*)^* = L$.

10.4. Seien L_1, L_2, L_3, M lineare Differentialoperatoren in der offenen Menge $U \in \mathbb{R}^n$.

Man zeige:

a) $[M, L_1 \circ L_2] = [M, L_1] \circ L_2 + L_1 \circ [M, L_2]$.

b) $[[L_1, L_2], L_3] + [[L_2, L_3], L_1] + [[L_3, L_1], L_2] = 0$, (Jacobi-Identität).

c) Hat L_1 die Ordnung k und L_2 die Ordnung ℓ, so ist $[L_1, L_2]$ ein Differentialoperator der Ordnung $\leqslant k + \ell - 1$.

10.5. Für $\ell \in \mathbb{N}$ sei P_ℓ das ℓ-te Legendre-Polynom

$$P_\ell(t) := \frac{1}{2^\ell \ell!}\left(\frac{d}{dt}\right)^\ell (t^2-1)^\ell,$$

(vgl. An. 2, §14, Satz 1).

Man zeige: Die von φ unabhängige Funktion

$$f(r,\vartheta) := r^\ell P_\ell(\cos\vartheta)$$

genügt der Laplace-Gleichung $\Delta f = 0$ bzgl. räumlicher Polarkoordinaten.

10.6. Für $\ell \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$ mit $|m| \leqslant \ell$ sind die *zugeordneten Legendre-Funktionen* $P_{m\ell} : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} P_{m\ell}(t) &:= (1-t^2)^{m/2}\left(\frac{d}{dt}\right)^m P_\ell(t), \quad \text{falls } m \geqslant 0, \\ P_{m\ell}(t) &:= P_{|m|,\ell}(t), \quad \text{falls } m < 0. \end{aligned}$$

Man zeige:

a) Die „*Kugelfunktionen*“

$$Y_{\ell m}(\varphi,\vartheta) := e^{im\varphi} P_{m\ell}(\cos\vartheta)$$

genügen der Differentialgleichung

$$\Lambda Y_{\ell m} = \ell(\ell+1)Y_{\ell m},$$

wobei

$$\Lambda := -\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} - \cot\,\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, \quad (0 < \vartheta < \pi).$$

b) Die Funktionen $r^\ell Y_{m\ell}(\vartheta,\varphi)$ und $r^{-\ell-1}Y_{m\ell}(\vartheta,\varphi)$ sind harmonisch in $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^3 \setminus 0$.

(Man diskutiere genau das Verhalten auf der z-Achse, da dort die Polarkoordinaten-Transformation singulär wird.)

§ 11 Parameterabhängige Integrale

Häufig sind Funktionen definiert durch Integrale der Gestalt $g(t) = \int f(x,t)dx$. Wir untersuchen in diesem Paragraphen, unter welchen Voraussetzungen für f die entstehende Funktion g stetig bzw. differenzierbar von t abhängt. Unter Benutzung der Konvergenzsätze der Lebesgueschen Integrationstheorie ergeben sich hier viel stärkere Sätze als bei den entsprechenden Untersuchungen in An. 2, §10, im Rahmen der Riemannschen Integrationstheorie.

Satz 1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $U \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge und $a \in U$. Weiter sei*

$$f : \Omega \times U \to \mathbb{R}, \quad (x,t) \mapsto f(x,t),$$

eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

a) *Für jedes feste $t \in U$ ist die Funktion $x \mapsto f(x,t)$ μ-integrierbar auf Ω.*

b) *Für jedes feste $x \in \Omega$ ist die Funktion $t \mapsto f(x,t)$ stetig im Punkt a.*

c) *Es gibt eine integrierbare Funktion $F : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mit*

$$|f(x,t)| \leqslant F(x) \quad \textit{für alle} \quad (x,t) \in \Omega \times U.$$

Dann ist die durch

$$g(t) := \int_\Omega f(x,t) d\mu(x)$$

definierte Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ im Punkt a stetig.

Beweis. Sei $t_k \in U$, $k \geqslant 1$, irgendeine Punktfolge mit $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = a$. Wir setzen

$$f_k(x) := f(x,t_k) \quad \text{und} \quad f_*(x) := f(x,\ a).$$

Wegen b) gilt

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f_*(x) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Wegen a) und c) sind die Voraussetzungen des Satzes von der majorisierten Konvergenz (§ 5, Satz 3) erfüllt; es gilt deshalb

$$\lim_{k\to\infty} g(t_k) = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(x) d\mu(x) = \int_\Omega f_*(x) d\mu(x) = g(a), \quad \text{q.e.d.}$$

Satz 2. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $I \subset \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall. Weiter sei*

$$f : \Omega \times I \to \mathbb{R}, \quad (x,t) \mapsto f(x,t),$$

eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

O. Forster, *Analysis 3*, Aufbaukurs Mathematik,
DOI 10.1007/978-3-8348-2374-8_11, © Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden 2012

a) *Für jedes feste* $t \in I$ *ist die Funktion* $x \mapsto f(x,t)$ μ*-integrierbar auf* Ω.

b) *Für jedes feste* $x \in \Omega$ *ist die Funktion* $t \mapsto f(x,t)$ *differenzierbar in* I.

c) *Es gibt eine integrierbare Funktion* $F : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *mit*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leqslant F(x) \quad \text{für alle} \quad (x,t) \in \Omega \times I.$$

Dann ist die durch

$$g(t) := \int_\Omega f(x,t)d\mu(x)$$

definierte Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ *differenzierbar. Für jedes feste* $t \in I$ *ist die Funktion* $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ *über* Ω *integrierbar und es gilt*

$$g'(t) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)d\mu(x).$$

Beweis. Sei $t \in I$ fest und $h \neq 0$ eine reelle Zahl derart, dass $t+h \in I$. Wir setzen

$$f_h(x) := \frac{f(x,\ t+h) - f(x,\ t)}{h} \quad \Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} f_h(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t).$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert außerdem ein $\theta = \theta(x,h) \in [0,1]$ mit

$$f_h(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,\ t+\theta h).$$

Wegen c) gilt

$$|f_h(x)| \leqslant F(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Nun folgt aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$g'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\int_\Omega f_h(x)d\mu(x) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,d\mu(x), \quad \text{q.e.d.}$$

Beispiele

(11.1) Wir wollen das von dem Parameter $t \in \mathbb{R}$ abhängende Integral

$$g(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}e^{-ixt}dx$$

auswerten. Nach Beispiel (8.4) ist

$$g(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{2\pi}.$$

Satz 2 gilt natürlich auch für komplexwertige Funktionen. Mit

$$f(x,t) := e^{-x^2/2}e^{-ixt}$$

gilt

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,\, t) = -ixe^{-x^2/2}e^{-ixt}$$

also

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,\, t)\right| \leqslant |x|e^{-x^2/2} \quad \text{für alle} \quad (x,\, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Da die Funktion $x \mapsto |x|e^{-x^2/2}$ integrierbar ist, folgt

$$g'(t) = -i\int_{\mathbb{R}} xe^{-x^2/2}e^{-ixt}\,dx.$$

Durch partielle Integration erhält man

$$\int_{-R}^{R} xe^{-x^2/2}e^{-ixt}\,dx = -e^{-x^2/2}e^{-ixt}\Big|_{-R}^{R} - it\int_{-R}^{R} e^{-x^2/2}e^{-ixt}\,dx,$$

also

$$g'(t) = -t\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}e^{-ixt}\,dx = -tg(t).$$

Die Funktion g genügt also der linearen Differentialgleichung

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -ty$$

mit der Lösung $y(t) = y(0)e^{-t^2/2}$. Daher ergibt sich

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}e^{-ixt}\,dx = \sqrt{2\pi}e^{-t^2/2}.$$

(11.2) Für eine Funktion $f \in C_c^k(\mathbb{R}^3),\ k \geqslant 1$, betrachten wir das Integral

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{\|y-x\|}d^3y.$$

In physikalischer Interpretation stellt u das von der Ladungsverteilung f erzeugte Potential dar. Das Integral existiert nach Beispiel (8.1)(i).

Behauptung. Die Funktion u ist k-mal stetig differenzierbar und für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^3$ mit $|\alpha| \leqslant k$ gilt

$$D^\alpha u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{D^\alpha f(y)}{\|y-x\|}d^3y.$$

Beweis. Wir führen die Substitution $\xi = y - x$ durch und erhalten

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x+\xi)}{\|\xi\|}d^3\xi.$$

Sei $1 \leqslant i \leqslant 3$ und M eine obere Schranke für die Funktion $|D_i f|$. Da

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f(x+\xi)}{\|\xi\|}\right)\right| \leqslant \frac{M}{\|\xi\|} \quad \text{für} \quad \xi \neq 0$$

und die Funktion $\xi \mapsto M/\|\xi\|$ über jedem Kompaktum integrierbar ist, folgt aus Satz 2

$$D_i u(x) = \int \frac{D_i f(x+\xi)}{\|\xi\|} d^3\xi = \int \frac{D_i f(y)}{\|y-x\|} d^3 y.$$

Nach Satz 1 ist $D_i u$ stetig, also u einmal stetig partiell differenzierbar. Wiederholung des Verfahrens ergibt die Behauptung.

(11.3) Bessel-Funktionen. Häufig werden parameterabhängige Integrale zur Definition von Funktionen benutzt. Dazu betrachten wir folgendes Beispiel: Sei $p \geqslant 0$ eine reelle Zahl. Die Funktion $f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ werde definiert durch

$$f_p(x) := \int_0^\pi \sin^{2p} t \, e^{-ix\cos t} dt.$$

(Dieses Beispiel lässt sich auch im Rahmen des elementaren Riemannschen Integrals für Funktionen einer Veränderlichen behandeln.) f_p ist beliebig oft differenzierbar und Differentiation unter dem Integral liefert

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k f_p(x) = (-i)^k \int_0^\pi \cos^k t \sin^{2p} t \, e^{-ix\cos t} dt.$$

Daraus ergibt sich wegen $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ die Formel

$$f_p'' = f_{p+1} - f_p. \tag{1}$$

Für f_p' erhält man mit partieller Integration

$$\begin{aligned} f_p'(x) &= -i \int_0^\pi \sin^{2p} t \, e^{-ix\cos t} d\sin t \\ &= i \int_0^\pi \sin t \, d(\sin^{2p} t \, e^{-ix\cos t}) \\ &= 2pi \int_0^\pi \cos t \sin^{2p} t \, e^{-ix\cos t} dt - x \int_0^\pi \sin^{2p+2} t \, e^{-ix\cos t} dt \\ &= -2p f_p'(x) - x f_{p+1}(x), \end{aligned}$$

also

$$(2p+1) f_p'(x) = -x f_{p+1}(x). \tag{2}$$

Aus (1) und (2) zusammen folgt, dass f_p eine Lösung der Differentialgleichung

$$f_p'' + \frac{2p+1}{x} f_p' + f_p = 0, \quad (x \neq 0), \tag{3}$$

ist. Die durch

$$J_p(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(x/2)^p}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} \int_0^\pi \sin^{2p} t \, e^{-ix\cos t} dt \tag{4}$$

definierte Funktion $J_p : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}$ heißt *Besselfunktion der Ordnung p*.

Da $J_p(x) = \text{const} \cdot x^p f_p(x)$, folgt leicht aus (3), dass $y = J_p(x)$ der Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0, \quad (x > 0), \tag{5}$$

genügt. Dies ist die Besselsche Differentialgleichung, die wir schon in An. 2, §12, betrachtet haben. Aus (2) folgt die Rekursionsformel

$$\frac{d}{dx}(x^{-p}J_p(x)) = -x^{-p}J_{p+1}(x)$$

oder

$$J_{p+1}(x) = -J_p'(x) + \frac{p}{x}J_p(x).$$

Für $p = \frac{1}{2}$ erhält man aus der Definition (4) durch eine elementare Integration

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

Daraus erhält man rekursiv alle Besselfunktionen halbganzer Ordnung $p = k + \frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{N}$. Die Besselfunktion ganzer Ordnung lassen sich nicht so einfach mittels der elementaren transzendenten Funktionen ausdrücken. Wir werden jedoch eine Reihenentwicklung der Besselfunktionen beliebiger Ordnung ableiten.

(11.4) Reihenentwicklung der Besselfunktionen.

Für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{-ix\cos t} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-i)^\nu \frac{x^\nu}{\nu!} \cos^\nu t$$

und die Konvergenz ist gleichmäßig in t. Daher erhält man für die Funktion

$$f_p(x) = \int_0^\pi \sin^{2p} t e^{-ix\cos t} dt, \qquad (p \geqslant 0),$$

die Entwicklung

$$f_p(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-i)^\nu \frac{x^\nu}{\nu!} \int_0^\pi \sin^{2p} t \cos^\nu t dt.$$

Da $\cos t = -\cos(\pi - t)$, verschwindet das Integral für ungerades ν. Für gerades $\nu = 2k$ erhält man unter Benutzung von (9.2)

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^{2p} t \cos^{2k} t dt &= 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p} t \cos^{2k} t dt \\ &= B\left(p + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\Gamma(p+k+1)}.\end{aligned}$$

Nun war aber $J_p(x)$ definiert durch

$$J_p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(x/2)^p}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} f_p(x), \quad (x > 0),$$

also ist

$$J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k x^{2k}$$

mit

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(2k)!} \cdot \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\Gamma(p+k+1)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(k-\frac{1}{2})(k-\frac{3}{2}) \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2}}{(2k)!} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(p+k+1)} = \\ &= \frac{1}{2^{2k} k! \Gamma(p+k+1)}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(p+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Die unendliche Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$, während der Faktor $(x/2)^p$ für nicht-ganzes p nur für $x > 0$ definiert ist.

Aufgaben

11.1. Man zeige, das man die Funktion

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} dt = \frac{1}{x}, \quad (x > 0),$$

beliebig oft unter dem Integral differenzieren darf und leite daraus die Formel

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!$$

ohne Benutzung partieller Integration her.

11.2. Man zeige, dass die Gamma-Funktion beliebig oft differenzierbar ist mit

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} (\log t)^n dt, \quad (x > 0).$$

11.3. a) Man beweise, dass für $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $|\varphi| < \frac{\pi}{4}$ die Funktion

$$x \mapsto \exp(-e^{2i\varphi} x^2)$$

zu $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ gehört und zeige

$$F(\varphi) := \int_{-\infty}^\infty \exp(-e^{2i\varphi} x^2) dx = \sqrt{\pi} e^{-i\varphi}.$$

Anleitung: Durch Differentiation unter dem Integral leite man die Differentialgleichung $F'(\varphi) = -iF(\varphi)$ her.

b) Man berechne für $a \in \mathbb{R}$ die Integrale

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \sin(ax^2) dx, \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \cos(ax^2) dx.$$

§ 12 Die L^p-Räume

Wir führen jetzt die L^p-Räume $(p \geqslant 1)$ ein, die in der Analysis eine wichtige Rolle spielen. Sie bestehen aus allen messbaren Funktionen f, für die das Integral von $|f|^p$ endlich ist. Die p-te Wurzel aus diesem Integral definiert eine Norm auf L^p, bzgl. der L^p vollständig ist. Insbesondere ergibt sich, dass L^2 ein Hilbertraum ist.

Die L^p-Norm

Im Folgenden sei ein Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ zugrunde gelegt.

Für eine reelle Zahl $p \geqslant 1$ und eine messbare Funktion. $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ definiert man eine Pseudonorm durch

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p} \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Statt $\|f\|_{L^p}$ schreibt man zur Präzisierung auch $\|f\|_{L^p(\Omega)}$.

Dies verallgemeinert die schon in § 5 eingeführte Pseudonorm $\| \, . \, \|_{L^1}$.

Trivialerweise gilt für alle messbaren Funktionen $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ und alle $c \in \mathbb{R}$

$$\|cf\|_{L^p} = |c| \cdot \|f\|_{L^p}.$$

Die Dreiecks-Ungleichung ist jedoch nicht so einfach zu beweisen und wir brauchen einige Vorbereitungen.

Satz 1 (Höldersche Ungleichung)**.** *Seien p und q reelle Zahlen > 1 mit*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dann gilt für je zwei messbare Funktionen $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$

$$\|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$. Falls $\|f\|_{L^p} = 0$, folgt aus § 4, Satz 10, dass $f = 0$ fast überall, also auch $fg = 0$ fast überall, d.h. $\|fg\|_{L^1} = 0$. Daher gilt die Ungleichung trivialerweise.

Man darf daher voraussetzen, dass $\|f\|_{L^p} > 0$ und $\|g\|_{L^q} > 0$. Falls eine der beiden Normen gleich ∞ ist, gilt die Ungleichung ebenfalls trivialerweise. Daher ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$0 < \|f\|_{L^p} < \infty, \quad 0 < \|g\|_{L^q} < \infty.$$

Wir setzen

$$\varphi := f^p / \|f\|^p_{L^p}, \quad \psi := g^q / \|g\|^q_{L^q}.$$

O. Forster, *Analysis 3*, Aufbaukurs Mathematik,
DOI 10.1007/978-3-8348-2374-8_12, © Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden 2012

Nach Definition der L^p-Norm bzw. der L^q-Norm gilt dann

$$\int_\Omega \varphi d\mu = 1, \quad \text{und} \quad \int_\Omega \psi d\mu = 1.$$

Nach An. 1, §16, Hilfssatz, gilt für beliebige reelle Zahlen $a, b \geqslant 0$

$$a^{1/p} b^{1/q} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Daraus folgt

$$\frac{fg}{\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}} \leqslant \frac{1}{p}\varphi + \frac{1}{q}\psi.$$

Integriert man beide Seiten über Ω, so erhält man

$$\frac{1}{\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}} \int_\Omega fg\, d\mu \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

d.h.

$$\|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}, \quad \text{q.e.d.}$$

Corollar (Minkowskische Ungleichung)**.** *Seien $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen. Dann gilt für jedes $p \geqslant 1$*

$$\|f+g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Dabei sei unter $f+g$ irgendeine messbare Funktion mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$ verstanden, so dass $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ für alle $x \in \Omega$ mit $f(x),\ g(x) \neq \pm\infty$. Es gilt dann $|f+g| \leqslant |f| + |g|$ auf ganz Ω.

Beweis. Für $p = 1$ ist uns die Ungleichung schon aus § 5 bekannt. Sei also $p > 1$ und q definiert durch $1/p + 1/q = 1$. Es sei $h : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ die Funktion

$$h := |f+g|^{p-1}.$$

Dann ist

$$h^q = |f+g|^{q(p-1)} = |f+g|^p, \quad \text{also} \quad \|h\|_{L^q} = \|f+g\|_{L^p}^{p/q}.$$

Außerdem gilt

$$|f+g|^p = |f+g|h \leqslant |fh| + |gh|,$$

die Höldersche Ungleichung liefert daher

$$\begin{aligned} \|f+g\|_{L^p}^p &= \int_\Omega |f+g|^p d\mu \leqslant \|fh\|_{L^1} + \|gh\|_{L^1} \\ &\leqslant (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p})\|h\|_{L^q} \\ &= (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p})\|f+g\|_{L^p}^{p/q}. \end{aligned}$$

Da $p - (p/q) = 1$, folgt die Behauptung.

Definition. Für eine reelle Zahl $p \geqslant 1$ bestehe $\mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$ aus allen messbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\|f\|_{L^p} < \infty$.

Wegen § 4, Satz 8, erhält man für $p = 1$ eine zur ursprünglichen Definition äquivalente Definition von $\mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$.

Satz 2. *Für jedes $p \geqslant 1$ ist $\mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$ ein Vektorraum und*

$$\|\,.\,\|_{L^p} : \mathcal{L}^p(\Omega,\mu) \to \mathbb{R}_+, \quad f \mapsto \|f\|_{L^p},$$

ist eine Seminorm auf diesem Vektorraum.

Beweis. Seien $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen cf und $f+g$ messbar. Außerdem ist

$$\|cf\|_{L^p} = |c| \cdot \|f\|_{L^p} < \infty,$$

$$\|f+g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} < \infty,$$

d.h. $cf,\ f+g \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$.

Bemerkung. Da aus $\|f\|_{L^p} = 0$ nicht notwendig folgt $f = 0$, sondern nur $f = 0$ fast überall, ist $\|\,.\,\|_{L^p}$ auf $\mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$ nur eine Seminorm. Um eine Norm zu erhalten, gehen wir wie im Fall $p = 1$ vor (siehe § 5) und definieren

$$\mathcal{N} := \{f \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mu) : \|f\|_{L^p} = 0\}.$$

Dies ist ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Wir setzen

$$L^p(\Omega,\mu) := \mathcal{L}^p(\Omega,\mu)/\mathcal{N}.$$

Dieser Quotienten-Vektorraum entsteht aus $\mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$ durch Identifizieren von Funktionen, die fast überall gleich sind. Die Seminorm $\|\,.\,\|_{L^p}$ induziert eine Norm auf $L^p(\Omega,\mu)$, der dadurch zu einem normierten Vektorraum wird. Wir werden später zeigen, dass $L^p(\Omega,\mu)$ bzgl. dieser Norm sogar vollständig, also ein Banachraum ist.

(12.1) *Beziehung zwischen $\mathcal{L}^p$ und $\mathcal{L}^1$.* Die Funktionen aus $\mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$ sind für $p > 1$ nicht notwendig integrierbar, d.h. im Allgemeinen ist $\mathcal{L}^p(\Omega,\mu) \not\subset \mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$. Wir geben dazu ein Beispiel auf dem $\mathbb{R}^n$ bzgl. des Lebesgue-Maßes. Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \frac{1}{1 + \|x\|^n}$$

gehört zu $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ für jedes $p > 1$, aber nicht zu $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, vgl. (8.1) (ii).

Umgekehrt ist im Allgemeinen auch $\mathcal{L}^1(\Omega,\mu) \not\subset \mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$, wie folgendes Beispiel zeigt: Sei

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) := \begin{cases} \|x\|^{-n/p} & \text{für } 0 < \|x\| \leqslant 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für jedes $p > 1$ liegt g in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, aber nicht in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, vgl. (8.1) (i).

Satz 3. *Sei $p > 1$ eine reelle Zahl und $f \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$.*

a) *Sei q definiert durch $1/p + 1/q = 1$. Dann gilt $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$ für alle $g \in \mathcal{L}^q(\Omega,\mu)$.*

b) *Falls $\mu(\Omega) < \infty$, gilt $f \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$.*

c) *Sei umgekehrt $g \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$. Falls g beschränkt ist, folgt $g \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$.*

Beweis. a) folgt unmittelbar aus der Hölderschen Ungleichung.

b) Falls $\mu(\Omega) < \infty$, gehört die konstante Funktion 1 zu $\mathcal{L}^q(\Omega,\mu)$, also folgt aus Teil a) $f = f \cdot 1 \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$.

c) Sei $|g(x)| \leqslant M < \infty$ für alle $x \in \Omega$. Dann ist $|g|^p \leqslant M^{p-1}|g|$. Da $\|g\|_{L^1} < \infty$, folgt

$$\|g\|_{L^p} = (\|g^p\|_{L^1})^{1/p} \leqslant M^{(p-1)/p}\|g\|_{L^1}^{1/p} < \infty,$$

also $g \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$, q.e.d.

Wir verallgemeinern jetzt den Satz von der majorisierten Konvergenz (§ 5, Satz 3) auf L^p-Funktionen.

Satz 4 (majorisierte Konvergenz für L^p-Funktionen)**.** *Sei $p \geqslant 1$ und $f_k \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$, $k \geqslant 1$, eine Funktionenfolge, die fast überall gegen die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ konvergiere. Es gebe eine messbare Funktion $F : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mit $\|F\|_{L^p} < \infty$, so dass*

$$|f_k| \leqslant F \quad \text{für alle} \quad k \geqslant 1.$$

Dann gehört f (nach evtl. Abänderung auf einer Nullmenge) zu $\mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$ und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{L^p} = 0.$$

Beweis. Da die Funktionenfolge f_k fast überall gegen f konvergiert, ist f (nach evtl. Abänderung auf einer Nullmenge) messbar. Aus den Voraussetzungen folgt

$$|f_k|^p \underset{\text{f.ü}}{\longrightarrow} |f|^p \quad \text{und} \quad |f_k|^p \leqslant F^p \quad \text{fast überall.}$$

Die Funktionen $|f_k|^p$ gehören zu $\mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$ und es gilt $\|F^p\|_{L^1} < \infty$. Wir können deshalb den Satz von der majorisierten Konvergenz für L^1-Funktionen (§ 5, Satz 3) anwenden und erhalten

$$\lim_{k\to\infty} \int |f_k|^p d\mu = \int |f|^p d\mu \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \|f_k\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$$

Da $\|f_k\|_{L^p} \leqslant \|F\|_{L^p}$ für alle $k \geqslant 1$, gilt auch $\|f\|_{L^p} \leqslant \|F\|_{L^p} < \infty$, d.h. $f \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$.

Außerdem gilt

$$|f_k - f|^p \leqslant (|f_k| + |f|)^p \leqslant 2^p F^p$$

Da $|f_k - f|^p \to 0$ fast überall, kann man wieder den Satz von der majorisierten Konvergenz für L^1-Funktionen anwenden und es folgt

$$\lim_{k\to\infty} \int |f_k - f|^p d\mu = 0, \quad \text{d.h.} \quad \lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{L^p} = 0, \quad \text{q.e.d.}$$

Um zu zeigen, dass in $\mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$ jede Cauchyfolge konvergiert, brauchen wir noch die Verallgemeinerung von Lemma 2 aus § 5 auf L^p-Funktionen.

Lemma 1. *Sei $p \geqslant 1$ und $g_k \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$, $k \geqslant 1$, eine Funktionenfolge mit*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{L^p} =: M < \infty.$$

Dann konvergiert die Folge der Partialsummen $(\sum_{k=1}^m g_k)_{m\geqslant 1}$ fast überall gegen eine Funktion $g \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$ und es gilt

$$\lim_{m\to\infty} \Big\| g - \sum_{k=1}^{m} g_k \Big\|_{L^p} = 0.$$

Beweis. Wir setzen

$$G_m := \sum_{k=1}^{m} |g_k|, \quad G := \sum_{k=1}^{\infty} |g_k|.$$

Es gilt $G_m \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$, also $G_m^p \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$ und

$$\int G_m^p d\mu = \|G_m\|_{L^p}^p \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{m} \|g_k\|_{L^p}\Big)^p \leqslant M^p \qquad \text{für alle } m \geqslant 1.$$

Da $G_m^p \uparrow G^p$, folgt aus dem Satz von der monotonen Konvergenz $G^p \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$, also

$$\|G^p\|_{L^1} = \|G\|_{L^p}^p < \infty.$$

Deshalb gibt es eine Nullmenge $N \subset \Omega$, so dass

$$G(x) < \infty \quad \text{für alle} \quad x \in \Omega \setminus N.$$

Für alle $x \in \Omega \setminus N$ existiert deshalb der Limes

$$g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$$

bei absoluter Konvergenz. Wir setzen $g(x) := 0$ für alle $x \in N$. Für die Partialsummen gilt die Majorisierung

$$\Big| \sum_{k=1}^{m} g_k \Big| \leqslant G_m \leqslant G,$$

also folgt die Behauptung aus Satz 4.

Satz 5. *Sei $p \geqslant 1$ und $f_m \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$, $m \geqslant 1$, eine L^p-Cauchyfolge. Dann gilt:*

a) *Es gibt eine Teilfolge $(f_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit*

$$f_{m_k} \to f \quad \text{fast überall.}$$

b) *Diese Funktion f gehört zu $\mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$ und*

$$\lim_{m\to\infty} \|f_m - f\|_{L^p} = 0.$$

Beweis. Der Beweis verläuft ganz analog zum Beweis von Satz 7 aus § 5.

Nach Definition der Cauchyfolge gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $m_0(\varepsilon)$ mit $\|f_i - f_j\|_{L^p} < \varepsilon$ für alle $i, j \geqslant m_0(\varepsilon)$. Wählt man speziell $\varepsilon = 2^{-k}$, erhält man eine Indexfolge $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$, so dass

$$\|f_{m_k} - f_{m_{k+1}}\|_{L^p} \leqslant 2^{-k} \quad \text{für alle} \quad k \geqslant 1.$$

Auf die Reihe

$$f_{m_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{m_{k+1}} - f_{m_k})$$

mit den Partialsummen f_{m_ℓ} kann deshalb Lemma 1 angewendet werden. Man erhält die Existenz einer Funktion $f \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$ mit $f_{m_k} \to f$ fast überall und

$$\lim_{k\to\infty} \|f_{m_k} - f\|_{L^p} = 0.$$

Da (f_m) eine L^p-Cauchyfolge ist, folgt daraus

$$\lim_{m\to\infty} \|f_m - f\|_{L^p} = 0, \qquad \text{q.e.d.}$$

Bemerkung. Die sog. L^p-Konvergenz einer Funktionenfolge $f_m \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$, $m \geqslant 1$, gegen eine Funktion $f \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$, die durch

$$\lim_{m\to\infty} \|f_m - f\|_{L^p} = 0$$

definiert ist, bedeutet ausgeschrieben

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega |f_m(x) - f(x)|^p d\mu(x) = 0.$$

Deshalb spricht man für $p = 1$ auch von Konvergenz im absoluten Mittel und für $p = 2$ von Konvergenz im quadratischen Mittel.

Die Banachräume $L^p(\Omega,\mu)$

Unter einem Banachraum versteht man bekanntlich einen normierten Vektorraum, der bzgl. seiner Norm vollständig ist, d.h. in dem jede Cauchyfolge konvergiert (vgl. An. 2, § 2). Daher folgt aus Satz 5:

Corollar. *Für jede relle Zahl $p \geqslant 1$ ist der Quotienten-Vektorraum*

$$L^p(\Omega,\mu) := \mathcal{L}^p(\Omega,\mu)/\mathcal{N},$$

wobei $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mu) : \|f\|_{L^p} = 0\}$, ein Banachraum.

Alle diese Begriffsbildungen lassen sich leicht auf komplex-wertige Funktionen übertragen und man erhält so die Räume $\mathcal{L}^p(\Omega,\mu,\mathbb{C})$, $L^p(\Omega,\mu,\mathbb{C})$. Besonders interessant ist der Fall $p=2$. Auf $\mathcal{L}^2(\Omega,\mu,\mathbb{C})$ definiert man ein Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle := \int_\Omega \overline{f(x)}g(x)d\mu(x) \in \mathbb{C}.$$

Aus Satz 3 folgt, dass $\overline{f}g \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mu,\mathbb{C})$, falls $f,g \in \mathcal{L}^2(\Omega,\mu,\mathbb{C})$; das Integral ist also definiert. Das Skalarprodukt ist antilinear im ersten und linear im zweiten Argument, außerdem hermitesch, d.h. für Funktionen $f,g,h \in \mathcal{L}^2(\Omega,\mu,\mathbb{C})$ und $c \in \mathbb{C}$ gelten die Regeln

a) $\langle f+g,h\rangle = \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle$,

b) $\langle f,g+h\rangle = \langle f,g\rangle + \langle f,h\rangle$,

c) $\langle cf,g\rangle = \overline{c}\langle f,g\rangle$,

d) $\langle f,cg\rangle = c\langle f,g\rangle$,

e) $\langle f,g\rangle = \overline{\langle g,f\rangle}$.

Für alle $f \in \mathcal{L}^2(\Omega,\mu,\mathbb{C})$ gilt

$$\langle f,f\rangle = \|f\|_{L^2}^2 \geqslant 0$$

und $\langle f,f\rangle = 0$ genau dann, wenn $f=0$ fast überall. Auf dem Quotienten $L^2(\Omega,\mu,\mathbb{C})$ erhält man somit ein positiv-definites Skalarprodukt. Da $L^2(\Omega,\mu,\mathbb{C})$ bzgl. der L^2-Norm überdies vollständig ist, ist es ein *Hilbertraum.*

Wir beweisen jetzt noch in Verallgemeinerung von § 5, Satz 6, Approximations-Eigenschaften von L^p-Funktionen auf dem Lebesgueschen Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda^n)$ durch stetige und differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger. Wir schreiben kurz $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ für $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n,\lambda^n)$.

Satz 6. *Für jedes $p \geqslant 1$ liegt $C_c(\mathbb{R}^n)$ dicht in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, d.h. zu jedem $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ und jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit*

$$\|f-\varphi\|_{L^p} < \varepsilon.$$

Beweis. Es genügt, die Aussage für $f \geqslant 0$ zu beweisen.

Für $k \geqslant 1$ sei

$$f_k(x) := \begin{cases} \min(f(x),k) & \text{für } \|x\| \leqslant k, \\ 0 & \text{für } \|x\| > k. \end{cases}$$

Dann gilt $f_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ und $f_k \uparrow f$. Aus Satz 4 folgt, dass $\lim\limits_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{L^p} = 0$. Wir wählen k so groß, dass

$(*)$ $\qquad \|f_k - f\|_{L^p} < \varepsilon/2.$

Nach § 5, Satz 6, gibt es ein $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$, so dass

$$\|f_k - \varphi\|_{L^1} < \varepsilon' := \frac{\varepsilon^p}{2^p k^{p-1}}.$$

Da $0 \leqslant f_k \leqslant k$, kann man annehmen, dass auch $0 \leqslant \varphi \leqslant k$. Daraus folgt $|f_k - \varphi| \leqslant k$ und

$$|f_k - \varphi|^p \leqslant k^{p-1}|f_k - \varphi|,$$

also

$$\|f_k - \varphi\|_{L^p}^p \leqslant k^{p-1}\|f_k - \varphi\|_{L^1} \leqslant k^{p-1}\varepsilon' = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

Zusammen mit (*) folgt $\|f - \varphi\|_{L^p} < \varepsilon$, q.e.d.

Corollar. *Für jedes reelle $p \geqslant 1$ liegt $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ bzgl. der L^p-Norm dicht in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Wegen Satz 6 genügt es zu zeigen, dass $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ bzgl. der L^p-Norm dicht in $C_c(\mathbb{R}^n)$ liegt.

Seien $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Der Träger von f liegt in einer genügend großen Kugel $K(R) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant R\}$. Sei

$$c := \mathrm{Vol}_n(K(R+1)), \quad \varepsilon_1 := c^{-1/p}\varepsilon.$$

Es gibt eine Funktion $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\mathrm{Supp}(\varphi) \subset K(R+1) \quad \text{und} \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon_1,$$

vgl. Aufgabe 10.1. Damit ist

$$\|f - \varphi\|_{L^p}^p = \int |f(x) - \varphi(x)|^p dx < c\varepsilon_1^p = \varepsilon^p,$$

d.h. $\|f - \varphi\|_{L^p} < \varepsilon$, q.e.d.

AUFGABEN

12.1. Es sei $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$, $(1 \leqslant p < \infty)$, und $K \subset \Omega$ eine messbare Teilmenge mit $\mu(K) < \infty$. Man zeige, dass f über K integrierbar ist und dass gilt

$$\int_K |f| d\mu \leqslant \mu(K)^{1-1/p}\|f\|_{L^p}.$$

12.2. Es sei $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(k \geqslant 1)$, die wie folgt definierte Funktion:

$$f_k(x) := \begin{cases} \sin^k(k\pi x) & \text{für} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man zeige, dass für jedes $p \in [1, \infty[$ gilt:

$$\lim_{k \to \infty} \|f_k\|_{L^p} = 0.$$

12.3. Es sei

$$A := \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < \|x\| \leqslant 1\},$$

$$B := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \geqslant 1\}.$$

Für $\alpha \in \mathbb{R}_+$ seien Funktionen $f_\alpha,\ g_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_\alpha(x) := \frac{\chi_A(x)}{\|x\|^\alpha}, \quad g_\alpha(x) := \frac{\chi_B(x)}{\|x\|^\alpha}.$$

Für welche $p \in [1,\infty[$ gehören die Funktionen f_α bzw. g_α zu $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$?

12.4. Sei $1 \leqslant p < q < \infty$. Man zeige:

a) Es gibt Funktionen

$$f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) \smallsetminus \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n) \smallsetminus \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n).$$

b) Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beschränkt und gilt $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, so gilt auch $f \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$.

c) Ist $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$, so folgt

$$f \in \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n) \qquad \text{für alle } s \in [p,q].$$

d) Die Menge $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$ liegt sowohl dicht in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ (bzgl. der $\|\ \ \|_{L^p}$-Norm) als auch dicht in $\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$ (bzgl. der $\|\ \ \|_{L^q}$-Norm).

12.5. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}, \ (x \in \mathbb{R}),$$

das n-te Hermitesche Polynom (vgl. An. 2, §14, (14.4)). Man zeige: Die Funktionen

$$h_n(x) := H_n(x) e^{-x^2/2}$$

gehören zu $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ und es gilt

$$\langle h_n, h_m \rangle = 0 \quad \text{für} \quad n \neq m.$$

12.6. Ein Hilbertraum heißt *separabel*, wenn es in ihm eine abzählbare dichte Teilmenge gibt.

Man zeige: Für jede offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist $L^2(U)$ ein separabler Hilbertraum. (Vgl. dazu Aufgabe 5.1.)

§ 13 Fourier-Integrale

Zu den wichtigsten parameterabhängigen Integralen gehören die Fourier-Integrale, die das kontinuierliche Analogon der Fourier-Reihen sind. Bei der Darstellung der Theorie der Fourier-Integrale werden wir Gelegenheit haben, alle bisher gelernten Sätze der Integrations-Theorie anzuwenden.

Vereinbarung. Da wir es im Folgenden immer mit komplex-wertigen Funktionen zu tun haben werden, bedeuten in diesem Paragraphen die Bezeichnungen $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n), \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, etc. immer die entsprechenden Vektorräume komplex-wertiger Funktionen.

Definition der Fourier-Transformation

Für jede Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ gehört die Funktion

$$x \mapsto f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}, \qquad \langle x,\xi\rangle := \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \xi_\nu,$$

wieder zu $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, (denn $|f(x)| = |f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}|$); also existiert das Integral

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle} d^n x.$$

Die dadurch definierte Funktion

$$\hat{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

heißt die *Fourier-Transformierte* von f. Aus § 11, Satz 1 folgt, dass $\hat{f}$ stetig ist. Außerdem ist $\hat{f}$ beschränkt mit

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f\|_{L^1} \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Beispiele

(13.1) Wir berechnen die Fourier-Transformierte der Funktion

$$f(x) := e^{-\|x\|^2/2}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2/2}\, e^{-i\langle x,\xi\rangle} d^n x \\ &= \prod_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x_\nu^2/2} e^{-ix_\nu\,\xi_\nu} dx_\nu \right) \\ &= \prod_{\nu=1}^{n} e^{-\xi_\nu^2/2} = e^{-\|\xi\|^2/2} \end{aligned}$$

O. Forster, *Analysis 3*, Aufbaukurs Mathematik,
DOI 10.1007/978-3-8348-2374-8_13, © Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden 2012

nach Beispiel (11.1). Die Funktion f ist also ihre eigene Fourier-Transformierte.

(13.2) Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion mit Fourier-Transformierter $\hat{f}$. Für eine reelle Zahl $\alpha \neq 0$ definieren wir

$$g(x) := f(\alpha x).$$

Dann gilt

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(\alpha x) e^{-i\langle x,\xi\rangle} d^n x.$$

Wir machen die Substitution $y = \alpha x$. Damit ergibt sich (§ 6, Satz 5)

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{|\alpha|^n} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(y) e^{-i\langle y,\xi\rangle/\alpha} d^n y,$$

d.h.

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{|\alpha|^n} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right).$$

Z.B. erhält man damit für die Fourier-Transformation der Funktion

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(-\|x\|^2/2a^2), \quad a > 0, \\ \hat{f}(\xi) &= a^n \exp(-a^2\|\xi\|^2/2). \end{aligned}$$

(13.3) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion des Intervalls $[-1,1]$, d.h.

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{für} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi} \right]_{x=-1}^{x=1} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{i\xi} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\xi}{\xi}. \end{aligned}$$

(Für $\xi = 0$ ist $\frac{\sin\xi}{\xi}$ als 1 zu interpretieren.)

Dies ist das Beispiel einer Funktion $f \in \mathcal{L}^1$, für die $\hat{f}$ nicht mehr zu $\mathcal{L}^1$ gehört, siehe § 5, Beispiel (5.1).

(13.4) Wir berechnen jetzt die Fourier-Transformierte der charakteristischen Funktion der n-dimensionalen Einheitskugel $K_n(1)$. Sei $f := \chi_{K_n(1)}$. Dann ist

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\|x\| \leqslant 1} e^{-i\langle \xi,x\rangle} d^n x.$$

Wir setzen $\rho := \|\xi\|$. Wegen der Rotationsinvarianz des Integrals und des Skalarprodukts gilt

$$\hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi^*) \quad \text{mit} \quad \xi^* = (0,\dots,0,\rho),$$

also

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\|x\|\leqslant 1} e^{-i\rho x_n} dx_1 \dots dx_n = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-1}^{1} \mathrm{Vol}(K_{n-1}(\sqrt{1-x_n^2}))e^{-i\rho x_n} dx_n = \\
&= \frac{\tau_{n-1}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-1}^{1} (1-x_n^2)^{(n-1)/2} e^{-i\rho x_n} dx_n = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})} \int_0^{\pi} \sin^n t \; e^{-i\rho\cos t} dt,
\end{aligned}$$

wobei $x_n = \cos t$ substituiert wurde. Nach Beispiel (11.3) kann man das Integral durch eine Besselfunktion ausdrücken und erhält

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\rho^{n/2}} J_{n/2}(\rho), \quad \rho = \|\xi\|.$$

Wie alle Fourier-Transformierten von L^1-Funktionen ist $\hat{f}$ im Nullpunkt stetig und man erhält durch direkte Rechnung

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \mathrm{Vol}(K_n(1)) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

Für $n=1$ ergibt sich wieder die im vorigen Beispiel berechnete Fourier-Transformierte.

(13.5) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = e^{-|x|}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x}(e^{-ix\xi} + e^{ix\xi}) dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R\to\infty} \left[\frac{e^{-x(1+i\xi)}}{-1-i\xi} + \frac{e^{-x(1-i\xi)}}{-1+i\xi} \right]_{x=0}^{x=R} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\xi^2}.
\end{aligned}$$

Satz 1. *Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{f}, \hat{g}$ ihre Fourier-Transformierten.*

a) *Sei $a \in \mathbb{R}^n$ und $(\tau_a f)(x) := f(x-a)$ die um a translatierte Funktion. Dann gilt*

$$(\tau_a f)\hat{\ }(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{-i\langle a,\xi\rangle}.$$

b) *Es gilt $(f * g)\hat{\ } = (2\pi)^{n/2} \hat{f}\hat{g}$.*

c) *Ist* $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, *so gilt*

$$(D_\nu f)\hat{}(\xi) = i\xi_\nu \hat{f}(\xi).$$

d) *Ist die Funktion* $x \mapsto x_\nu f$ *integrierbar, so ist* $\hat{f}$ *nach* ξ_ν *stetig partiell differenzierbar und es gilt*

$$(x_\nu f)\hat{} = iD_\nu \hat{f}.$$

e) *Die Funktionen* $\hat{f}g$ *und* $f\hat{g}$ *sind integrierbar und es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\hat{g}(y)d^n y.$$

Beweis.

a) Nach Definition ist

$$\begin{aligned}
(\tau_\alpha f)\hat{}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(x-a)e^{-i\langle x,\, \xi\rangle} d^n x \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(y)e^{-i\langle y+a,\, \xi\rangle} d^n y = \hat{f}(\xi)e^{-i\langle a,\, \xi\rangle}.
\end{aligned}$$

b) Da $(f * g)(x) = \int f(t)g(x-t)d^n t$, (vgl. § 7), ist

$$\begin{aligned}
(f * g)\hat{}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \left(\int f(t)g(x-t)dt \right) e^{-i\langle x,\, \xi\rangle} dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \left(\int g(x-t)e^{-i\langle x-t,\, \xi\rangle} dx \right) f(t)e^{-i\langle t,\, \xi\rangle} dt \\
&= \int \hat{g}(\xi)f(t)e^{-i\langle t,\, \xi\rangle} dt = (2\pi)^{n/2}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi),
\end{aligned}$$

wobei der Satz von Fubini verwendet wurde.

c) Mittels partieller Integration (§ 10, Satz 2) erhält man

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{n/2}(D_\nu f)\hat{}(\xi) &= \int \frac{\partial f(x)}{\partial x_\nu} e^{-i\langle x,\, \xi\rangle} dx = -\int f(x) \frac{\partial}{\partial x_\nu} e^{-i\langle x,\, \xi\rangle} dx \\
&= -\int f(x)(-i\xi_\nu)e^{-i\langle x,\, \xi\rangle} dx = (2\pi)^{n/2} i\xi_\nu \hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

d) Aus § 11, Satz 2, folgt

$$\begin{aligned}
iD_\nu \hat{f}(\xi) &= \frac{i}{(2\pi)^{n/2}} \int f(x) \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} e^{-i\langle x,\, \xi\rangle} dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int x_\nu f(x)e^{-i\langle x,\, \xi\rangle} dx = (x_\nu f)\hat{}(\xi).
\end{aligned}$$

e) Da $\hat{f}$ und $\hat{g}$ stetig und beschränkt sind, sind $\hat{f}g$ und $f\hat{g}$ integrierbar. Mit dem Satz von Fubini erhält man

$$\begin{aligned}\int f(x)\hat{g}(x)dx &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\int f(x)g(y)e^{-i\langle y,\, x\rangle}dxdy\\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\Big(\int f(x)e^{-i\langle x,\, y\rangle}dx\Big)g(y)dy = \int \hat{f}(y)g(y)dy.\end{aligned}$$

(13.6) Ist $f = \chi_{[-1,1]}$ die charakteristische Funktion des Intervalls $[-1,1]$, so gilt für $g := f * f$, wie man einfach nachrechnet

$$g(x) = \sup(0, 2-|x|), \qquad \text{siehe Bild 13.1}$$

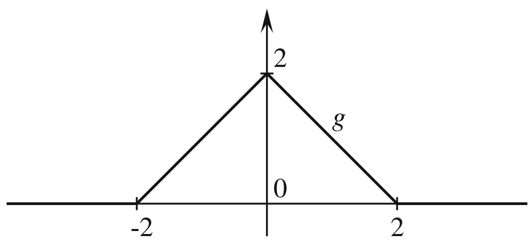


Bild 13.1

Da $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\xi}{\xi}$, folgt aus Satz 1 b)

$$\hat{g}(\xi) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2.$$

Wir ziehen noch eine interessante Folgerung aus Punkt c) von Satz 1.

Corollar 1. *Zu jeder Funktion $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$, $(k \in \mathbb{N})$, gibt es eine Konstante $M \in \mathbb{R}_+$, so dass*

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant M(1+\|\xi\|)^{-k} \quad \textit{für alle} \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Insbesondere ist für jedes $f \in C_c^{n+1}(\mathbb{R}^n)$ die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ integrierbar, vgl. Beispiel (8.1) (ii).

Beweis. Durch wiederholte Anwendung von Satz 1 c) erhält man für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leqslant k \qquad (D^\alpha f)\hat{\ }(\xi) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{f}(\xi),$$

also

$$|\xi^\alpha \hat{f}(\xi)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\|D^\alpha f\|_{L^1}.$$

Deshalb gibt es eine Konstante $M \in \mathbb{R}_+$, so dass

$$(1+|\xi_1|+\ldots+|\xi_n|)^k|\hat{f}(\xi)| \leqslant M \quad \text{für alle} \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Daraus folgt

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant M(1+\|\xi\|)^{-k}, \quad \text{q.e.d.}$$

Corollar 2. *Für jede Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\lim_{\|\xi\|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

Beweis. Ist $g \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n)$, so folgt aus Corollar 1, dass

$$\lim_{\|\xi\|\to\infty} \hat{g}(\xi) = 0.$$

Zu jedem $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gibt es aber nach § 12, Corollar zu Satz 6, ein $g \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f-g\|_{L^1} < \varepsilon$. Daraus folgt

$$|\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{(2\pi)^{n/2}} \quad \text{für alle} \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Bemerkung. Es bezeichne $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ den Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mit

$$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = 0.$$

Es gilt $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. Corollar 2 lässt sich dann so aussprechen: Die Fourier- Transformation definiert eine lineare Abbildung

$$\mathcal{F} : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n), \quad f \mapsto \hat{f}.$$

Da die Fourier-Transformierte einer Funktion, die fast überall null ist, identisch verschwindet, induziert $\mathcal{F}$ eine mit demselben Buchstaben bezeichnete Abbildung

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n).$$

Wir wollen uns jetzt mit der Umkehrung der Fourier-Transformation beschäftigen. Dazu brauchen wir folgendes Lemma.

Lemma 1. *Sei $\psi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion mit*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx = 1.$$

Für $\alpha > 0$ setzen wir

$$\psi_\alpha(x) := \frac{1}{\alpha^n}\psi\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

Dann gilt für jede Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{\alpha\to 0} \|f - f * \psi_\alpha\|_{L^1} = 0.$$

Beweis. Wir behandeln zuerst den Fall, dass $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es eine Kugel $K(R) \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\mathrm{Supp}(f) \subset K(R)$. Da f gleichmäßig stetig ist, gibt es eine Funktion $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit

$$\lim_{\delta \searrow 0} \omega(\delta) = 0,$$

so dass

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \omega(\|x - y\|) \quad \text{für alle} \quad x,\ y \in \mathbb{R}^n.$$

Die Substitution $t = x/\alpha$ zeigt (vgl. § 6, Satz 5)

$$\int \psi_\alpha(t)dt = \int \psi(x)dx = 1,$$

also

$$f(x) = \int f(x)\psi_\alpha(t)dt.$$

Da nach Definition

$$(f * \psi_\alpha)(x) = \int f(x-t)\psi_\alpha(t)dt,$$

folgt

$$(f - f * \psi_\alpha)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x-t))\psi_\alpha(t)dt.$$

Sei $\delta \in]0,1]$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} \|f - f * \psi_\alpha\|_{L^1} \leqslant & \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\|t\| \leqslant \delta} |f(x) - f(x-t)|\, |\psi_\alpha(t)|dt \right) dx + \\ & + \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\|t\| > \delta} |f(x) - f(x-t)|\, |\psi_\alpha(t)|dt \right) dx. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen den ersten Summanden der rechten Seite mit I, den zweiten mit II. Dann kann man wie folgt abschätzen:

$$|I| \leqslant \int_{\|x\| \leqslant R+1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \omega(\delta)|\psi_\alpha(t)|dt \right) dx \leqslant \mathrm{Vol}(K(R+1)) \cdot \omega(\delta) \cdot \|\psi\|_{L^1}.$$

Zu vorgegebenen $\varepsilon > 0$ können wir deshalb δ so klein wählen, dass $|I| < \frac{\varepsilon}{2}$. Für den zweiten Summanden erhalten wir mit Fubini

$$\begin{aligned} |II| &= \int_{\|t\| > \delta} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-t)|dx \right) |\psi_\alpha(t)|dt \\ &\leqslant 2\|f\|_{L^1} \left(\int_{\|t\| > \delta} |\psi_\alpha(t)|dt \right) = 2\|f\|_{L^1} \left(\int_{\|x\| > \delta/\alpha} |\psi(x)|dx \right). \end{aligned}$$

Da $|\psi|$ integrierbar ist, strebt das letzte Integral für $\alpha \to 0$ gegen 0. Man kann deshalb α so klein wählen, dass $|II| < \frac{\varepsilon}{2}$. Insgesamt ergibt sich

$$\|f - f * \psi_\alpha\|_{L^1} < \varepsilon.$$

Damit ist die Aussage des Lemmas für $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ bewiesen. Für allgemeines $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ approximieren wir f nach § 5, Satz 6 durch eine Funktion $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, so dass

$$\|f-g\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{2(1+\|\psi\|_{L^1})}$$

und wählen $\alpha > 0$ so klein, dass

$$\|g - g * \psi_\alpha\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mit $h := f - g$ gilt dann

$$\begin{aligned} \|f - f * \psi_\alpha\|_{L^1} &\leqslant \|g - g * \psi_\alpha\|_{L^1} + \|h - h * \psi_\alpha\|_{L^1} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \|h\|_{L^1}(1 + \|\psi\|_{L^1}) < \varepsilon, \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Satz 2 (Umkehrformel)**.** *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion derart, dass auch $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt nach evtl. Abänderung auf einer Nullmenge $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ und*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\langle \xi,\, x\rangle} d\xi \qquad \textit{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Bemerkungen

a) Die Umkehrformel lässt sich als Antwort auf folgendes Problem auffassen: Man möchte eine Funktion f im $\mathbb{R}^n$ als Superposition der einfachen Funktionen $x \mapsto e^{i\langle \xi,\, x\rangle}$, $(\xi \in \mathbb{R}^n)$, d.h. als Integral

$$f(x) = \int a(\xi) e^{i\langle \xi,\, x\rangle} d\xi$$

darstellen. Satz 2 zeigt, dass dies unter gewissen Voraussetzungen an f möglich ist und man

$$a(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int f(x) e^{-i\langle x,\, \xi\rangle} dx$$

zu wählen hat. Die Voraussetzungen sind nach Corollar 1 zu Satz 1 insbesondere für alle $f \in C_c^{n+1}(\mathbb{R}^n)$ erfüllt.

b) Satz 2 zeigt auch, dass eine Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ durch ihre Fourier-Transformierte eindeutig (bis auf Nullmengen) bestimmt ist. Denn gilt $\hat{f} = \hat{g}$, so folgt aus Satz 2, angewandt auf die Differenz $f - g$, so dass $f = g$ fast überall.

c) Schreibt man $\mathcal{F} f$ für $\hat{f}$ und definiert den Operator $\overline{\mathcal{F}}$ durch

$$(\overline{\mathcal{F}} f)(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{i\langle \xi,\, x\rangle} d\xi,$$

so gilt

$$\overline{\mathcal{F}}(f) = \overline{\mathcal{F}(\overline{f})} \quad \text{für alle} \quad f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n).$$

Satz 2 lässt sich dann so aussprechen:

Ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, so gilt

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f \quad \text{und} \quad \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f = f.$$

Beweis. Da $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, folgt aus Corollar 2 zu Satz 1, dass $\overline{\mathcal{F}}\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$. Wir haben zu zeigen, dass $\overline{\mathcal{F}}\hat{f} = f$ fast überall. Dazu verwenden wir Satz 1 a) und e). Für eine beliebige Funktion $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$(*) \qquad \int \hat{f}(\xi)e^{i\langle\xi,\,x\rangle}\varphi(\xi)d\xi = \int (\tau_{-x}f)\hat{\ }(\xi)\varphi(\xi)d\xi$$
$$= \int (\tau_{-x}f)(y)\hat{\varphi}(y)dy = \int f(x+y)\hat{\varphi}(y)dy = \int f(x-y)\hat{\varphi}(-y)dy.$$

Wir spezialisieren jetzt die Funktion φ. Sei

$$\psi(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{-\|\xi\|^2/2}.$$

Nach den Beispielen (13.1) und (8.5) ist

$$\hat{\psi}(\xi) = \psi(\xi) \quad \text{und} \quad \int \psi(\xi)d\xi = 1.$$

Sei $\alpha > 0$. Für die Funktion $\varphi(\xi) := \psi(\alpha\xi)$ gilt dann

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\alpha^n}\psi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) =: \psi_\alpha(\xi).$$

Damit erhalten wir aus $(*)$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int \hat{f}(\xi)e^{i\langle\xi,\,x\rangle}e^{-\alpha^2\|\xi\|^2/2}d\xi = \int f(x-y)\psi_\alpha(y)dy = (f*\psi_\alpha)(x).$$

Für $\alpha \to 0$ strebt $\exp(-\alpha^2\|\xi\|^2/2)$ monoton wachsend gegen 1, die linke Seite konvergiert daher nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz gegen $(\overline{\mathcal{F}}\hat{f})(x)$. Andererseits konvergiert $f*\psi_\alpha$ nach Lemma 1 in der L^1-Norm gegen f. Eine Teilfolge konvergiert also (§ 5, Corollar zu Satz 7) fast überall gegen f. Daraus folgt $\overline{\mathcal{F}}\hat{f} = f$ fast überall, q.e.d.

Beispiele

(13.7) Auf die in Beispiel (13.6) untersuchte Funktion $\sup(0, 2-|x|)$ lässt sich die Umkehrformel anwenden und man erhält

$$\sup(0, 2-|\xi|) = \frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{ix\xi}dx = \frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cos(x\xi)dx,$$

insbesondere für $\xi = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \pi.$$

(13.8) Nach Beispiel (13.5) ist $g(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1+\xi^2}$ die Fourier-Transformierte von $f(x) = e^{-|x|}$, also gilt umgekehrt $\overline{\mathcal{F}}g = f$, und da beide Funktionen reell sind, auch $\mathcal{F}g = f$. Daraus folgt

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x\xi)}{1+x^2} dx = e^{-|\xi|}.$$

(13.9) Für $\sigma > 0$ sei $G_\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$G_\sigma(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2\sigma^2).$$

Es gilt $\int G_\sigma(x)dx = 1$. In wahrscheinlichkeitstheoretischer Interpretation ist G_σ die Dichte der Gaußschen Wahrscheinlichkeitsverteilung mit Mittelwert 0 und Varianz σ^2. Nach (13.2) gilt

$$\hat{G}_\sigma(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\sigma^2 x^2/2.)$$

Nach Satz 1 b) gilt $(G_\sigma * G_\tau)\hat{} = \sqrt{2\pi}\hat{G}_\sigma\hat{G}_\tau$, also

$$(G_\sigma * G_\tau)^\wedge(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-(\sigma^2+\tau^2)\xi^2/2) = \hat{G}_{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}.$$

Da eine Funktion durch ihre Fourier-Transformierte eindeutig bestimmt ist, folgt

$$G_\sigma * G_\tau = G_{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}.$$

(13.10) Für $a > 0$ sei $F_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$F_a(x) := \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}F_1\left(\frac{x}{a}\right).$$

Es gilt $\int F_a(x)dx = 1$. In wahrscheinlichkeitstheoretischer Interpretation ist F_a die Dichte der Cauchyschen Wahrscheinlichkeitsverteilung mit Parameter a.
Nach Beispiel (13.5) ist

$$\hat{F}_a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a|\xi|}.$$

Es folgt

$$(F_a * F_b)\hat{}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(a+b)|\xi|} = \hat{F}_{a+b}(\xi).$$

Daraus folgt $F_a * F_b = F_{a+b}$.

Wir wollen jetzt die Fourier-Transformation auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ ausdehnen. Dazu benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 2. *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, so dass gleichzeitig*

$$\|f - \varphi\|_{L^1} < \varepsilon \quad \text{und} \quad \|f - \varphi\|_{L^2} < \varepsilon.$$

Beweis. Für $\alpha > 0$ sei

$$h_\alpha(x) := e^{-\alpha\|x\|^2}.$$

Es gilt $h_\alpha \uparrow 1$ für $\alpha \to 0$. Daher konvergiert für $p = 1, 2$ das Integral

$$\|f - fh_\alpha\|_{L^p}^p = \int |f(x)|^p |1 - h_\alpha(x)|^p dx$$

nach dem Satz von der monotonen Konvergenz gegen 0. Wir wählen $\alpha > 0$ so klein, dass

$$\|f - fh_\alpha\|_{L^p} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad p = 1, 2.$$

Nach § 12, Corollar zu Satz 6, gibt es eine Funktion $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|f - \psi\|_{L^2} < \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2\|h_\alpha\|_{L^2}}\right).$$

Da $|fh_\alpha - \psi h_\alpha| = |f - \psi| \cdot |h_\alpha| \leqslant |f - \psi|$, gilt

$$\|fh_\alpha - \psi h_\alpha\|_{L^2} \leqslant \|f - \psi\|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

und nach der Hölderschen Ungleichung

$$\|fh_\alpha - \psi h_\alpha\|_{L^1} \leqslant \|f - \psi\|_{L^2} \|h_\alpha\|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Die Funktion $\varphi := \psi h_\alpha$ erfüllt also die Bedingungen des Lemmas.

Satz 3. *Ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, so gehört $\hat{f}$ zu $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ und es gilt*

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}.$$

Beweis.

a) Sei zunächst $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $\mathcal{F}f = \hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Wir setzen $g := \overline{\mathcal{F}f}$. Aus Satz 2 folgt $\hat{g} = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\,\overline{f} = \overline{f}$. Nach Satz 1 e) ist in abkürzender Schreibweise

$$\|\hat{f}\|_{L^2}^2 = \int (\mathcal{F}f)(\overline{\mathcal{F}f}) = \int \hat{f} g = \int f\hat{g} = \int f\overline{f} = \|f\|_{L^2}^2.$$

b) Sei jetzt $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ beliebig. Nach Lemma 2 gibt es eine Folge $f_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{L^p} = 0 \quad \text{für} \quad p = 1, 2.$$

Daraus folgt insbesondere $\lim \|f_k\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$. Nach Teil a) gilt

$$\|\hat{f}_k\|_{L^2} = \|f_k\|_{L^2} \quad \text{und} \quad \|\hat{f}_k - \hat{f}_m\|_{L^2} = \|f_k - f_m\|_{L^2}$$

für alle $k,\ m$. Deshalb ist $(\hat{f}_k)$ eine L^2-Cauchyfolge, konvergiert also in der L^2-Norm gegen eine gewisse Funktion $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Da

$$|\hat{f}_k(\xi) - \hat{f}(\xi)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f_k - f\|_{L^1},$$

konvergiert die Folge $(\hat{f}_k)$ punktweise gegen $\hat{f}$; es muss also $\hat{f} = g$ fast überall sein. Infolgedessen ist

$$\|f\|_{L^2} = \lim_{k\to\infty} \|f_k\|_{L^2} = \lim_{k\to\infty} \|\hat{f}_k\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}, \quad \text{q.e.d.}$$

(13.11) Wir wollen untersuchen, was die Gleichung

$$\|\chi_{K_n(1)}\|_{L^2} = \|\hat{\chi}_{K_n(1)}\|_{L^2}$$

konkret bedeutet, vgl. (13.4). Es ist

$$\|\chi_{K_n(1)}\|_{L^2}^2 = \mathrm{Vol}(K_n(1)) =: \tau_n.$$

Mit Satz 1 aus § 8 erhält man andererseits

$$\|\hat{\chi}_{K_n(1)}\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \|\xi\|^{-n} J_{n/2}(\|\xi\|)^2 d^n\xi = n\tau_n \int_0^\infty r^{-n} |J_{n/2}(r)|^2 r^{n-1} dr.$$

Es ergibt sich also die Gleichung

$$\int_0^\infty |J_{n/2}(r)|^2 \frac{dr}{r} = \frac{1}{n} \quad \text{für alle} \quad n \geqslant 1.$$

Corollar (Satz von Plancherel)**.** *Es gibt einen eindeutig bestimmten Isomorphismus*

$$T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$$

mit folgenden Eigenschaften:

a) $\|Tf\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$ *für alle* $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

b) $Tf = \mathcal{F} f$ *für alle* $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.

c) $T^{-1} g = \overline{\mathcal{F}} g$ *für alle* $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Da $C_c^\infty \subset L^1 \cap L^2 \subset L^2$ und C_c^∞ bzgl. der L^2-Norm dicht in L^2 liegt, liegt auch $L^1 \cap L^2$ dicht in L^2. Zu jedem $f \in L^2$ gibt es deshalb eine Folge $f_\nu \in L^1 \cap L^2$, die in der L^2-Norm gegen f konvergiert. Da die Fourier-Transformation auf $L^1 \cap L^2$ nach Satz 3 längentreu ist, ist $(\hat{f}_\nu)$ eine L^2-Cauchyfolge und man setzt

$$Tf := \lim \hat{f}_\nu, \qquad \text{(Limes bzgl. } L^2\text{-Norm).}$$

Diese Definition ist unabhängig von der ausgewählten Folge. Damit erhält man eine lineare, längentreue, also auch injektive Abbildung von L^2 in L^2. Da nach Satz 2 gilt $\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}} f) = f$ für alle $f \in C_c^\infty$, umfasst das Bild den dichten Unterraum $C_c^\infty \subset L^2$. Da

T längentreu ist, folgt daraus die Surjektivität. Außerdem folgt $T^{-1}f = \overline{\mathcal{F}}f$ für $f \in L^1 \cap L^2$.

Bezeichnung. Wir schreiben wieder $\hat{f}$ oder $\mathcal{F}f$ für Tf. Man beachte aber folgenden Unterschied der Fourier-Transformation auf L^1 und L^2: Während $\hat{f}$ für $f \in L^1$ eine stetige Funktion ist und man eindeutig von den Werten $\hat{f}(\xi)$ sprechen kann, ist $\hat{f}$ für $f \in L^2$ nur bis auf Gleichheit fast überall bestimmt.

Bemerkung: Sei $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ und R_ν eine Folge von Radien mit $R_\nu \to \infty$. Dann liegen die Funktionen

$$f_\nu := f\chi_{K_n(R_\nu)}$$

in $\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$ und die Folge (f_ν) konvergiert bzgl. der L^2-Norm gegen f. Es ist

$$\hat{f}_\nu(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\|x\| \leqslant R_\nu} f(x)e^{-i\langle\xi,\, x\rangle}dx.$$

Nach Definition konvergiert die Folge $\hat{f}_\nu$ in der L^2-Norm gegen $\hat{f}$. Man schreibt dafür

$$\hat{f}(\xi) = \underset{R\to\infty}{\text{l.i.m}} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\|x\| \leqslant R} f(x)e^{-i\langle\xi,\, x\rangle}dx,$$

wobei l.i.m (“limit in mean”) andeuten soll, dass es sich hierbei nicht um punktweise Konvergenz, sondern um Konvergenz im quadratischen Mittel handelt. Analog gilt

$$f(x) = \underset{R\to\infty}{\text{l.i.m}} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\|\xi\| \leqslant R} \hat{f}(\xi)e^{i\langle\xi,x\rangle}d\xi.$$

(13.12) Nach (13.3) gilt

$$\chi_{[-1,1]}(x) = \underset{R\to\infty}{\text{l.i.m}} \frac{1}{\pi} \int_{|t|\leqslant R} \frac{\sin t}{t} e^{ixt}dt = \underset{R\to\infty}{\text{l.i.m}} \frac{1}{\pi} \int_{|t|\leqslant R} \frac{\sin t \cos xt}{t}dt.$$

Aufgrund der Überlegungen in (5.1) existiert der Grenzwert

$$A := \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin t}{t}dt.$$

Daraus folgt für jedes $\alpha > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin \alpha t}{t}dt = \lim_{R\to\infty} \int_{-\alpha R}^{\alpha R} \frac{\sin u}{u}du = A.$$

Da $\sin t \cos xt = \frac{1}{2}\sin(1+x)t + \frac{1}{2}\sin(1-x)t$, erhält man für alle $|x| < 1$

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-R}^{R} \frac{\sin t \cos xt}{t}dt = \frac{A}{\pi}.$$

Wegen der Konvergenz im quadratischen Mittel muss aber eine Teilfolge fast überall gegen $\chi_{[-1,1]}$ konvergieren. Daher ist $A = \pi$, also

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin t}{t}dt = \pi.$$

AUFGABEN

13.1. Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ eine Funktion der Gestalt

$$f(x)=p(x)e^{-x^2/2},$$

wobei p ein Polynom n-ten Grades ist. Man zeige, dass für ihre Fourier-Transformierte gilt

$$\hat{f}(x)=q(x)e^{-x^2/2}$$

mit einem Polynom n-ten Grades q.

13.2. Es sei H_n das n-te Hermitesche Polynom und

$$h_n(x)=H_n(x)e^{-x^2/2},$$

vgl. Aufgabe 12.5. Man zeige, dass h_n Eigenfunktion der Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}:L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})$$

ist, d.h. $\hat{h}_n=c_nh_n$ mit einer Konstanten $c_n\in\mathbb{C}$.

13.3. Man berechne die Integrale

$$\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3dx,\quad \int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4dx.$$

13.4. Sei $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $A\in GL(n,\mathbb{R})$. Man zeige

$$(f\circ A)\hat{}=\frac{1}{|\det A|}f\circ(A^T)^{-1}.$$

13.5. Sei $A\in M(n\times n,\mathbb{R})$ eine symmetrische, positiv-definite Matrix. Man berechne die Fourier-Transformierte der Funktion

$$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\quad f(x):=e^{-\langle x,Ax\rangle}.$$

13.6. Es bezeichne $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ den Vektorraum aller Funktionen $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit folgender Eigenschaft:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\beta D^\alpha f(x)|<\infty\quad\text{für alle}\quad\alpha,\ \beta\in\mathbb{N}^n.$$

Man zeige:

a) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ für alle $p\geqslant 1$.

b) Für alle $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt $\hat{f}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und die Abbildung

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\quad f\mapsto\hat{f},$$

ist ein Isomorphismus von Vektorräumen.

13.7. Man berechne die Fourier-Transformation folgender Funktionen

$$f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad j = 1, \ldots, 6 :$$

$$f_1(x) := \begin{cases} e^{-x} & \text{für} \quad x \geqslant 0, \\ 0 & \text{für} \quad x < 0. \end{cases}$$

$$f_2(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$f_3(x) := e^{-x^2} \sin(ax^2), \quad (a > 0).$$

$$f_4(x) := e^{-x^2} \cos(ax^2), \quad (a > 0).$$

$$f_5(x) := \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{für} \quad |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{für} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

$$f_6(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{für} \quad |x| < 1, \\ 0 & \text{für} \quad |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

Hinweis: Für f_3 und f_4 vgl. Aufgabe 11.3. Bei den Aufgaben f_5 und f_6 treten Besselfunktionen auf.

13.8. Sei $F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ eine rotationssymmetrische Funktion, d.h. es gebe eine Funktion $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = f(\|x\|).$$

Sei $G := \hat{F}$ die Fourier-Transformierte von F. Man zeige: G ist ebenfalls rotationssymmetrisch und es gilt $G(\xi) = g(\|\xi\|)$ mit

$$g(\rho)\rho^{\frac{n-1}{2}} = \int_0^\infty \sqrt{\rho r} J_{n/2-1}(\rho r) f(r) r^{\frac{n-1}{2}} dr, \quad (\rho > 0).$$

Anleitung: Man verwende die Aufgaben 13.4 und 9.6 c).

Bemerkung. Die Abbildung, die einer Funktion $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}$ die Funktion $\psi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}$ mit

$$\psi(\rho) := \int_0^\infty \sqrt{\rho r} J_p(\rho r) \varphi(r) dr$$

zuordnet, heißt *Hankel-Transformation* der Ordnung p.

§ 14 Integration auf Untermannigfaltigkeiten

In diesem Paragraphen soll präzisiert werden, was es heißt, Funktionen über Flächen zu integrieren und wie der Flächeninhalt (von gekrümmten Flächen im Raum) definiert ist. Der klassische Fall sind die zweidimensionalen Flächen im dreidimensionalen Raum. Wir behandeln jedoch gleich allgemeiner k-dimensionale Untermannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^n$, die lokal als Nullstellengebilde von $n-k$ differenzierbaren Funktionen beschrieben werden, deren Funktionalmatrix maximalen Rang hat.

Definition. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α, $(\alpha \geqslant 1)$, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und α-mal stetig differenzierbare Funktionen

$$f_1, \ldots f_{n-k} : U \to \mathbb{R}$$

gibt, so dass gilt

a) $M \cap U = \{x \in U : f_1(x) = \ldots = f_{n-k}(x) = 0\}$,

b) $\operatorname{Rang} \dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_{n-k})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(a) = n-k$.

Dabei bezeichnet

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_{n-k})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-k}}{dx_1} & \ldots & \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_n} \end{pmatrix} = Df$$

die Funktionalmatrix von $f = (f_1, \ldots, f_{n-k})$.

Die Bedingung $\operatorname{Rang} \frac{\partial(f_1, \ldots, f_{n-k})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(a) = n-k$ lässt sich so umformulieren:

Die Gradienten

$$\operatorname{grad} f_1, \ldots, \operatorname{grad} f_{n-k}$$

sind im Punkt a linear unabhängig.

Vereinbarung: Untermannigfaltigkeit ohne weiteren Zusatz bedeute Untermannigfaltigkeit der Klasse C^1.

(14.1) Beispiel. Die $(n-1)$-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ bezeichnet man als *Hyperflächen*. Sie werden lokal definiert als Nullstellengebilde einer Funktion mit nicht-verschwindendem Gradienten. Ein Beispiel ist die $(n-1)$-dimensionale Einheitssphäre

$$S_{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}.$$

O. Forster, *Analysis 3*, Aufbaukurs Mathematik,
DOI 10.1007/978-3-8348-2374-8_14, © Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden 2012

Mit $f(x) := x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1$ gilt nämlich

$$S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$$

und wegen $\operatorname{grad} f(x) = (2x_1, \ldots, 2x_n)$ ist $\operatorname{grad} f(x) \neq 0 \quad$ für alle $\quad x \in S_{n-1}$.

Wir zeigen jetzt, dass sich eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit lokal als Graph einer Funktion von k Variablen darstellen lässt.

Satz 1. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α und $a = (a_1, \ldots, a_n) \in M$. Dann gibt es nach evtl. Umnumerierung der Koordinaten offene Umgebungen*

$$U' \subset \mathbb{R}^k \quad \textit{von} \quad a' := (a_1, \ldots, a_k),$$

$$U'' \subset \mathbb{R}^{n-k} \quad \textit{von} \quad a'' := (a_{k+1}, \ldots, a_n)$$

sowie eine α-mal stetig differenzierbare Abbildung

$$g : U' \to U'',$$

so dass

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' : x'' = g(x')\}.$$

Dabei wurde gesetzt

$$x' = (x_1, \ldots, x_k) \quad \textit{und} \quad x'' = (x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Beweis. Nach Definition gibt es eine offene Umgebung U von a und eine α-mal stetig differenzierbare Abbildung

$$f = (f_1, \ldots, f_{n-k}) : U \to \mathbb{R}^{n-k}$$

mit

$$M \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\}$$

und

$$\operatorname{Rang} Df(a) = n - k.$$

Daraus folgt, dass für mindestens ein $(n-k)$-tupel $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{n-k} \leqslant n$ gilt

$$\det \frac{\partial(f_1, \ldots, f_{n-k})}{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}})}(a) \neq 0.$$

Wegen der Stetigkeit der Funktional-Determinante können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass diese Determinante auf ganz U von Null verschieden ist (sonst verkleinere man U). Wir numerieren die Koordinaten so um, dass $(i_1, \ldots, i_{n-k}) = (k+1, \ldots, n)$.

Nun wenden wir den Satz über implizite Funktionen an (An. 2, §8, Satz2) und erhalten offene Umgebungen U' von a' und U'' von a'' mit $U' \times U'' \subset U$ sowie eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U' \to U''$ mit

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' : x'' = g(x')\}.$$

Für die Funktionalmatrix von g gilt

$$\frac{\partial g}{\partial x'} = -\frac{\partial f}{\partial x'} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x''}\right)^{-1}.$$

Da alle Komponenten der Matrizen $\frac{\partial f}{\partial x'}$ und $\frac{\partial f}{\partial x''}$ $(\alpha - 1)$-mal stetig differenzierbar sind, folgt dass g α-mal stetig differenzierbar ist, q.e.d.

(14.2) Beispiel. Wir betrachten die Sphäre

$$S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$$

in der Umgebung eines Punktes $a = (a_1, \ldots, a_n) \in S_{n-1}$. Sei $a_n > 0$. Wir setzen

$$U' := \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : \|x'\| < 1\}$$

und

$$g : U' \to \mathbb{R}_+^*, \quad g(x_1, \ldots, x_{n-1}) := \sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2}.$$

Dann ist

$$a \in S_{n-1} \cap (U' \times \mathbb{R}_+^*) = \{(x', x_n) \in U' \times \mathbb{R}_+^* : x_n = g(x')\}.$$

Ist $a_n < 0$, so ist S_{n-1} in einer Umgebung von a Graph der Funktion $-g(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Falls aber $a_n = 0$, gibt es einen anderen Index m mit $a_m \neq 0$ und nach Umnumerierung der Koordinaten hat man wieder einen der oben behandelten Fälle.

Als nächstes zeigen wir, dass sich k-dimensionale Untermannigfaltigkeiten nach differenzierbaren Koordinatentransformationen lokal wie k-dimensionale Ebenen im $\mathbb{R}^n$ verhalten. Wir verwenden folgende Bezeichnungen: Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen. Eine Abbildung

$$F : U \to V$$

heißt C^α-*invertierbar* oder *Diffeomorphismus* der Klasse C^α, falls F bijektiv ist und sowohl F als auch F^{-1} α-mal stetig differenzierbar sind.

Satz 2. *Es bezeichne $E_k \subset \mathbb{R}^n$ die k-dimensionale Ebene*

$$E_k := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{k+1} = \ldots = x_n = 0\}.$$

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α, falls es zu jedem $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine C^α-invertierbare Abbildung

$$F : U \to V$$

von U auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass

$$F(M \cap U) = E_k \cap V,$$

(vgl. Bild 14.1).

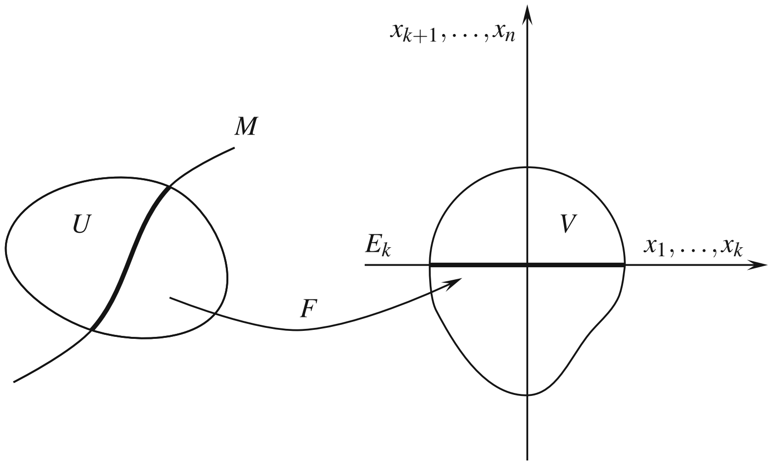


Bild 14.1

Beweis.

a) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $a \in M$. Nach Satz 1 ist M in einer Umgebung von a als Graph darstellbar. Mit den Bezeichnungen von Satz 1 können wir schreiben

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' : x'' = g(x')\}.$$

Wir definieren nun eine Abbildung

$$F : U := U' \times U'' \to \mathbb{R}^n$$

durch

$$F(x', x'') := (x', x'' - g(x')).$$

Offensichtlich ist $V := F(U) \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to V$ ein Diffeomorphismus mit

$$F(M \cap U) = E_k \cap V.$$

b) Sei umgekehrt eine C^α-invertierbare Abbildung

$$F = (F_1, \ldots, F_n) : U \to V$$

mit $F(M \cap U) = E_k \cap V$ vorgegeben. Dann gilt

$$M \cap U = \{x \in U : F_{k+1}(x) = \ldots F_n(x) = 0\}$$

und

$$\text{Rang} \frac{\partial(F_{k+1}, \ldots, F_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = n - k,$$

da

$$\operatorname{Rang}\frac{\partial(F_1,\ldots,F_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} = n.$$

Also ist $M \cap U$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, q.e.d.

Relativ-Topologie

Für das folgende brauchen wir einige topologische Überlegungen. Da $\mathbb{R}^n$ ein metrischer Raum ist, ist auch jede Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ein metrischer Raum mit der induzierten Metrik (vgl. An. 2, §1, (1.2)). Infolgedessen ist auch der Begriff der *offenen Teilmenge* $V \subset M$ relativ M definiert. Nach Definition ist V genau dann offen in M, wenn zu jedem Punkt $a \in V$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$V \supset \{x \in M : \|x-a\| < \varepsilon\} = B(a,\varepsilon) \cap M,$$

wobei

$$B(a,\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| < \varepsilon\}.$$

Eine offene Teilmenge von M ist im allgemeinen nicht offen in $\mathbb{R}^n$. Ist jedoch U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, so ist $M \cap U$ eine offene Teilmenge von M, wie unmittelbar aus der Definition folgt. Ist umgekehrt eine offene Teilmenge $V \subset M$ vorgegeben, so gibt es stets eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $V = M \cap U$. Dies sieht man so: Zu jedem $a \in V$ gibt es eine offene Menge $U_a \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$a \in U_a \cap M \subset V.$$

(Für U_a kann man eine Kugel $B(a,\varepsilon)$ wählen.) Die Menge

$$U := \bigcup_{a \in V} U_a$$

ist dann als Vereinigung offener Mengen offen in $\mathbb{R}^n$ und es gilt $V = M \cap U$.

Die offenen Teilmengen von M sind also genau die Mengen der Gestalt $M \cap U$, U offen in $\mathbb{R}^n$. Damit zeigt man leicht:

Eine Teilmenge

$$K \subset M \subset \mathbb{R}^n$$

ist genau dann *kompakt* relativ M, wenn K kompakt in $\mathbb{R}^n$ ist (siehe Definition der Kompaktheit in An. 2, §3).

Sind M_1 und M_2 metrische Räume (oder allgemeiner topologische Räume), so heißt eine Abbildung

$$\Phi : M_1 \to M_2$$

Homöomorphismus (oder homöomorphe Abbildung), wenn sie bijektiv ist und sowohl Φ wie auch Φ^{-1} stetig sind.

Immersionen

Sei $T \subset \mathbb{R}^k$ offen. Eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : T \to \mathbb{R}^n$$

heißt *Immersion*, falls

$$\operatorname{Rang} D\varphi(t) = k \quad \text{für alle} \quad t \in T.$$

Bemerkung. Da stets $\operatorname{Rang} D\varphi(t) \leqslant \min(k,n)$, ist dann notwendigerweise $k \leqslant n$ (oder $T = \emptyset$).

Satz 3. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ offen und*

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

eine Immersion der Klasse C^α $(\alpha \geqslant 1)$. Dann gibt es zu jedem $c \in \Omega$ eine offene Umgebung $T \subset \Omega$, so dass $\varphi(T)$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α und

$$\varphi : T \to \varphi(T)$$

ein Homöomorphismus ist.

Beweis. Da $\operatorname{Rang} D\varphi(c) = k$, kann man nach Umnumerierung der Koordinaten im $\mathbb{R}^n$ annehmen, dass

$$\det \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)}{\partial(t_1, \ldots, t_k)}(c) \neq 0.$$

Es gibt daher nach Satz über die Umkehrabbildung (An. 2, §8, Satz3) eine offene Umgebung $T \subset \Omega \subset \mathbb{R}^k$ von c und eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^k$, so dass

$$(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) : T \to V$$

ein C^α -Diffeomorphismus ist. Wir definieren nun eine Abbildung

$$\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n) : T \times \mathbb{R}^{n-k} \to V \times \mathbb{R}^{n-k}$$

durch

$$\Phi_i(t_1, \ldots, t_n) := \varphi_i(t_1, \ldots, t_k) \quad \text{für} \quad 1 \leqslant i \leqslant k,$$

$$\Phi_j(t_1, \ldots, t_n) := \varphi_j(t_1, \ldots, t_k) + t_j \quad \text{für} \quad k+1 \leqslant j \leqslant n.$$

Offensichtlich ist Φ ein C^α -Diffeomorphismus von $T \times \mathbb{R}^{n-k}$ auf $V \times \mathbb{R}^{n-k}$ und

$$\Phi(T \times 0) = \varphi(T).$$

Daraus folgt, dass $\varphi(T)$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α ist (Satz 2) und T durch φ homöomorph auf $\varphi(T)$ abgebildet wird.

(14.3) Beispiel. Sei $\Omega := \,]0,\pi[\, \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ und

$$\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^3$$

$$(t_1,t_2) \mapsto (\cos t_2 \sin t_1, \sin t_2 \sin t_1, \cos t_1).$$

Es ist

$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)}{\partial(t_1,t_2)} = \begin{pmatrix} \cos t_2 \cos t_1 & -\sin t_2 \sin t_1 \\ \sin t_2 \cos t_1 & \cos t_2 \sin t_1 \\ -\sin t_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus liest man ab, dass in jedem Punkt $t \in \Omega$ gilt $\operatorname{Rang} D\varphi(t) = 2$, also φ eine Immersion ist. $\varphi(\Omega)$ ist die Einheits-Sphäre $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ ohne den Nordpol $(0,0,1)$ und Südpol $(0,0,-1)$. Jedoch wird Ω durch φ nicht homöomorph auf die Untermannigfaltigkeit

$$M := S_2 \smallsetminus \{(0,0,1),(0,0,-1) \subset \mathbb{R}^3\}$$

abgebildet, φ ist nicht einmal injektiv.

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$T_\alpha := \,]0,\pi[\, \times \,]\alpha,\alpha+2\pi[\, \subset \Omega.$$

Dann ist $\varphi : T_\alpha \to \varphi(T_\alpha)$ ein Homöomorphismus, $\varphi(T_\alpha)$ ist die offene Teilmenge von S_2, die durch Wegnahme des Meridians des Längengrades α entsteht.

Satz 4 (Parameterdarstellung)**.** *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist dann und nur dann eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $V \subset M$ relativ M, eine offene Teilmenge $T \subset \mathbb{R}^k$ und eine Immersion*

$$\varphi : T \to \mathbb{R}^n$$

der Klasse C^α gibt, die T homöomorph auf V abbildet.

Bezeichnung. Der Homöomorphismus

$$\varphi : T \xrightarrow{\sim} V \subset M \subset \mathbb{R}^n$$

mit den im Satz genannten Eigenschaften heißt lokale *Parameterdarstellung* oder *Karte* der Untermannigfaltigkeit M.

(Wir verwenden manchmal den Pfeil $\xrightarrow{\sim}$, um eine bijektive Abbildung anzudeuten.)

Beweis. „dann“. Diese Implikation folgt aus Satz 3.

„nur dann“. Wir stellen M gemäß Satz 1 in einer Umgebung von a als Graph dar

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x',x'') \in U' \times U'' : x'' = g(x')\}.$$

Setzt man $V := M \cap (U' \times U'')$, $T := U'$ und definiert

$$\varphi : T \to \mathbb{R}^n, \ \varphi(t) := (t, g(t)),$$

so ist φ eine C^α -Immersion, die T homöomorph auf V abbildet, q.e.d.

Satz 5 (Parameter-Transformation). *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α und seien*

$$\varphi_j : T_j \xrightarrow{\sim} V_j \subset M, \ j = 1, 2,$$

zwei Karten der Klasse C^α mit $V := V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Dann sind $W_j := \varphi_j^{-1}(V)$ offene Teilmengen von T_j und

$$\tau := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : W_1 \to W_2$$

ist ein C^α-Diffeomorphismus (vgl. Bild 14.2).

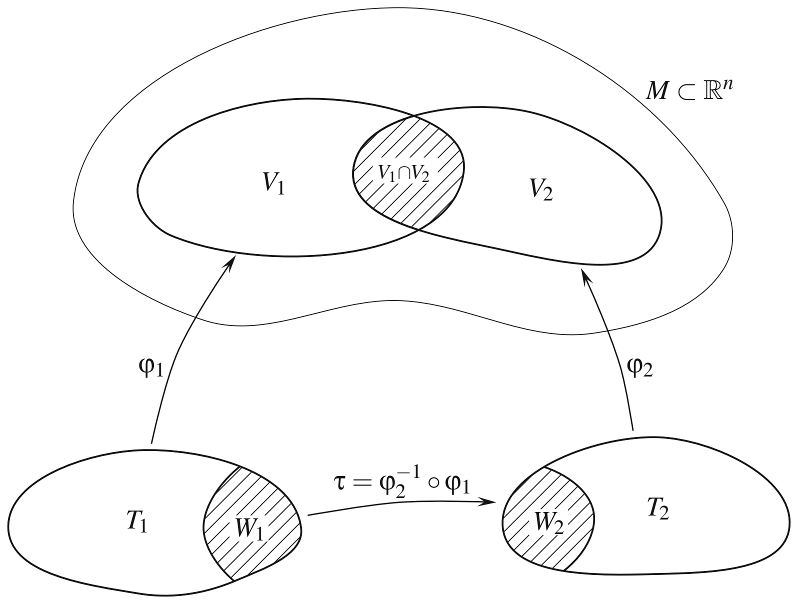


Bild 14.2

Beweis. Da V offene Teilmenge von V_j und φ_j stetig ist, ist W_j offen. Nach Konstruktion ist τ bijektiv. Sei jetzt $c_1 \in W_1$ ein beliebiger Punkt und

$$a := \varphi_1(c_1), \ c_2 := \varphi_2^{-1}(a) = \tau(c_1).$$

Nach Satz 2 existiert eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von a, eine offene Menge $U' \subset \mathbb{R}^n$ und ein C^α-Diffeomorphismus

$$F : U \to U' \quad \text{mit} \quad F(M \cap U) = E_k \cap U',$$

wobei $E_k = \mathbb{R}^k \times 0 \subset \mathbb{R}^n$. Wir dürfen annehmen, dass $M \cap U \subset V$. Sei $W_j' := \varphi_j^{-1}(M \cap U)$. Auf W_1' bzw. W_2' können wir schreiben

$$F \circ \varphi_1 = (g_1, \ldots, g_k, 0, \ldots, 0), \qquad F \circ \varphi_2 = (h_1, \ldots, h_k, 0, \ldots, 0).$$

Da $\mathrm{Rang} D\varphi_j = k$ und die Matrix DF invertierbar ist, gilt

$$\mathrm{Rang} \frac{\partial(g_1, \ldots, g_k)}{\partial(t_1, \ldots, t_k)} = k \quad \text{und} \quad \mathrm{Rang} \frac{\partial(h_1, \ldots, h_k)}{\partial(t_1, \ldots, t_k)} = k,$$

und es folgt, dass

$$g = (g_1, \dots, g_k) : W_1' \to E_k \cap U' \quad \text{und}$$
$$h = (h_1, \dots, h_k) : W_2' \to E_k \cap U'$$

C^α-Diffeomorphismen sind. (Dabei werde $E_k \cap U'$ als offene Teilmenge von $\mathbb{R}^k$ aufgefasst.) Nun ist auf W_1

$$\tau = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = (F \circ \varphi_2)^{-1} \circ (F \circ \varphi_1) = h^{-1} \circ g,$$

also liefert τ eine C^α-invertierbare Abbildung von W_1' auf W_2'. Da $c_1 \in W_1$ beliebig war, folgt die Behauptung.

Maßtensor

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und

$$\varphi : T \to V \quad (T \subset \mathbb{R}^k,\ v \subset M \quad \text{offene Teilmengen})$$

eine Karte von M. Bezüglich dieser Karte definieren wir (ähnlich wie in § 10) eine Matrix („Maßtensor“) aus Funktionen $g_{ij} : T \to \mathbb{R},\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant k$ durch

$$g_{ij}(t) := \left\langle \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t_i}, \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t_j} \right\rangle = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\nu(t)}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial \varphi_\nu(t)}{\partial t_j}.$$

Wir bezeichnen mit $g := \det(g_{ij})$ ihre Determinante. Sie heißt *Gramsche Determinante* von M bzgl. der Karte $\varphi : T \to V$.

Wir wollen nun das Verhalten von (g_{ij}) bzw. g bei Kartenwechsel untersuchen. Sei dazu $\tilde{\varphi} : \tilde{T} \to \tilde{V}$ eine weitere Karte und $V \cap \tilde{V} \neq \emptyset$. Nach evtl. Verkleinerung der Karten können wir voraussetzen, dass $V \cap \tilde{V} = V = \tilde{V}$. Nach Satz 5 gibt es eine C^α-invertierbare Abbildung

$$\tau : \tilde{T} \to T \quad \text{mit} \quad \tilde{\varphi} = \varphi \circ \tau.$$

Bezeichnen wir die Variablen in $\tilde{T}$ mit $\xi_1, \dots, \xi_k$, so gilt nach der Kettenregel

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_\nu}{\partial \xi_l}(\xi) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial t_i}(\tau(\xi)) \frac{\partial \tau_i}{\partial \xi_l}(\xi),$$

und wir erhalten für die Matrix

$$\tilde{g}_{lm}(\xi) := \left\langle \frac{\partial \tilde{\varphi}(\xi)}{\partial \xi_l}, \frac{\partial \tilde{\varphi}(\xi)}{\partial \xi_m} \right\rangle$$

in abgekürzter Schreibweise

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{lm} &= \sum_{\nu=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial t_i} \frac{\partial \tau_i}{\partial \xi_l} \right) \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial t_j} \frac{\partial \tau_j}{\partial \xi_m} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \tau_i}{\partial \xi_l} \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial t_i} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial t_j} \right) \frac{\partial \tau_j}{\partial \xi_m} = \sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial \tau_i}{\partial \xi_l} \cdot g_{ij} \cdot \frac{\partial \tau_j}{\partial \xi_m}. \end{aligned}$$

Für die Gramschen Determinanten ergibt sich daraus die Transformationsformel

$$\tilde{g}(\xi) = |\det D\tau(\xi)|^2 g(\tau(\xi)).$$

Die Gramsche Determinante lässt sich noch auf eine andere Weise aus der Funktionalmatrix $D\varphi$ berechnen. Dazu benötigen wir folgenden Satz aus der linearen Algebra.

Satz 6. *Sei $k \leqslant n$ und seien A, B zwei $n \times k$ -Matrizen (mit Koeffizienten aus einem beliebigen Körper K). Für $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$ bezeichne $A_{i_1 \ldots i_k}$ die Matrix, die aus den Zeilen $i_1, \ldots, i_k$ der Matrix A besteht. Entsprechend seien Untermatrizen von B bezeichnet. Dann gilt*

$$\det(A^T B) = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \det(A_{i_1 \ldots i_k}) \det(B_{i_1 \ldots i_k}).$$

Bemerkung. Für $k = n$ besteht die Summe nur aus einem Summanden und Satz 6 geht in den Determinanten-Multiplikationssatz über.

Beweis. Wir halten A fest und untersuchen, für welche Matrizen B die Formel gilt.

i) Zunächst sieht man sofort, dass die Formel gilt, falls

$$B = (e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}),$$

wobei e_j die (Spalten-)Einheitsvektoren des K^n bezeichnen.

Aus den Linearitäts-Eigenschaften der Determinante folgt weiter:

ii) Gilt die Formel für die Matrix

$$B = (b_1, \ldots, b_k),$$

so gilt sie auch für die Matrix

$$B' = (b_1, \ldots, \lambda b_i, \ldots, b_k),$$

in der die i-te Spalte von B mit einem Skalar λ multipliziert worden ist.

iii) Die Formel gelte für die Matrizen

$$B' = (b_1, \ldots, b'_i, \ldots, b_k) \quad \text{und} \quad B'' = (b_1, \ldots, b''_i, \ldots, b_k).$$

Dann gilt sie auch für die Matrix

$$B = (b_1, \ldots, b'_i + b''_i, \ldots, b_k).$$

Aus i) – iii) ergibt sich, dass die Formel für eine beliebige Matrix B gilt, q.e.d.

Corollar 1. *Sei A eine $n \times k$-Matrix ($k \leqslant n$). Dann gilt*

$$\det(A^T A) = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} (\det A_{i_1 \ldots i_k})^2.$$

Bemerkung. Für $k = 2,\ n = 3$ ergibt sich eine bekannte Formel aus der Vektorrechnung. Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$ (als Spaltenvektoren gedacht). Wendet man das Corollar auf die Matrix $A = (a, b)$ an, erhält man

$$\|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 - \langle a, b\rangle^2.$$

Corollar 2. *Sei $\varphi : T \to V \subset M$ eine Karte für die k-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ und $g : T \to \mathbb{R}$ die zugehörige Gramsche Determinante. Dann gilt*

$$g = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \left(\det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_k})}{\partial(t_1, \ldots, t_k)}\right)^2.$$

Dies folgt daraus, dass man die Matrix $(g_{ij}) =: G$ schreiben kann als

$$G = (D\varphi)^T D\varphi.$$

Insbesondere ergibt sich aus dem Corollar, dass die Gramsche Determinante stets positiv ist.

Definition des Integrals über Untermannigfaltigkeiten

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und

$$f : M \to \mathbb{R}$$

eine Funktion. Es soll das Integral von f über M erklärt werden. Dies geschieht mittels Karten.

a) Sei zunächst vorausgesetzt, dass es eine Karte

$$\varphi : T \xrightarrow{\sim} V \subset M, \qquad (T \subset \mathbb{R}^k \quad \text{offen}),$$

von M gibt, so dass $f \mid M \setminus V = 0$. Es sei g die Gramsche Determinante bzgl. φ. Dann heißt f *integrierbar* über M, falls die Funktion

$$t \mapsto f(\varphi(t))\sqrt{g(t)}$$

über T integrierbar ist und man setzt

$$\int_M f(x) dS(x) := \int_T f(\varphi(t))\sqrt{g(t)} d^k t.$$

Man merkt sich diese Formel am besten durch die symbolische Gleichung

$$dS(x) = \sqrt{g(t)} d^k t \quad \text{für} \quad x = \varphi(t).$$

Man nennt $dS(x)$ das k-dimensionale Flächenelement (S von engl. oder frz. surface). Es ist noch zu zeigen, dass die obige Definition nicht von der gewählten Karte abhängt. Sei

$$\tilde{\varphi} : \tilde{T} \to \tilde{V} \subset M$$

eine weitere Karte mit $f \mid M \setminus \tilde{V} = 0$. Wir dürfen annehmen, dass $V = \tilde{V}$. Es gibt dann eine C^1-invertierbare Abbildung

$$\tau : \tilde{T} :\to T \quad \text{mit} \quad \tilde{\varphi} = \varphi \circ \tau.$$

Bezeichnet $\tilde{g}$ die Gramsche Determinante bzgl. $\tilde{\varphi}$, so gilt

$$\sqrt{\tilde{g}(\xi)} = |\det D\tau(\xi)| \sqrt{g(\tau(\xi))}$$

und die Transformationsformel (§ 9, Satz 2) liefert

$$\begin{aligned}\int_T f(\varphi(t))\sqrt{g(t)}dt &= \int_{\tilde{T}} f(\varphi(\tau(\xi)))|\det D\tau(\xi)|\sqrt{g(\tau(\xi))}d\xi \\ &= \int_{\tilde{T}} f(\tilde{\varphi}(\xi))\sqrt{\tilde{g}(\xi)}d\xi,\end{aligned}$$

also die Unabhängigkeit von der Karte.

b) Wir behandeln nicht den allgemeinsten Fall, sondern setzen voraus, dass es endlich viele Karten

$$\varphi_j : T_j \xrightarrow{\sim} V_j \subset M, \quad j = 1, \ldots, m,$$

gibt mit $\bigcup V_j = M$. Wir wählen eine der Überdeckung (V_j) untergeordnete lokal-integrierbare Teilung der Eins, d.h. Funktionen

$$\alpha_j : M \to \mathbb{R}, \quad j = 1, \ldots, m,$$

mit folgenden Eigenschaften:

i) $0 \leqslant \alpha_j \leqslant 1, \quad \alpha_j \mid M \setminus V_j = 0.$

ii) $\sum_{j=1}^m \alpha_j(x) = 1$ für alle $x \in M$.

iii) Die Funktion $t \mapsto \alpha_j(\varphi_j(t))$ ist lokal-integrierbar auf T_j.

Beispielsweise erhält man eine solche Teilung der Eins durch

$$\alpha_j := \chi_{W_j}, \quad \text{wobei} \quad W_j := V_j \setminus (\bigcup_{i<j} V_i).$$

Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt dann über M integrierbar, falls $f \mid V_j$ für alle j integrierbar ist und man setzt

$$\int_M f(x)dS(x) = \sum_{j=1}^m \int_M \alpha_j(x) f(x) dS(x).$$

Bemerkung. Sei g_j die Gramsche Determinante bzgl. φ_j. Nach Voraussetzung ist die Funktion $(f \circ \varphi_j)\sqrt{g_j}$ über T_j integrierbar. Da $\alpha_j \circ \varphi_j$ messbar und beschränkt ist, ist dann auch die Funktion

$$t \mapsto \alpha_j(\varphi_j(t)) f(\varphi_j(t)) \sqrt{g_j(t)}$$

über T_j integrierbar, also $\alpha_j f$ im Sinne von a) über M integrierbar.

Es muss noch gezeigt werden, dass die Definition unabhängig von der Überdeckung von M durch Karten und der Teilung der Eins ist. Seien $\tilde{\varphi}_l : \tilde{T}_l \to \tilde{V}_l,\ l = 1, \ldots, p$, andere Karten mit $\bigcup \tilde{V}_l = M$ und (β_l) eine dieser Überdeckung untergeordnete lokal-integrierbare Teilung der Eins. Es gilt dann

$$\sum_{l=1}^{p} \alpha_j \beta_l = \alpha_j, \qquad \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \beta_l = \beta_l,$$

also

$$\sum_{l=1}^{p} \int_M \alpha_j(x)\beta_l(x) f(x) dS(x) = \int_M \alpha_j(x) f(x) dS(x)$$

und

$$\sum_{j=1}^{m} \int_M \alpha_j(x)\beta_l(x) f(x) dS(x) = \int_m \beta_l(x) f(x) dS(x),$$

da im ersten Fall alle Funktionen auf $M \setminus V_j$ und im zweiten Fall auf $M \setminus \tilde{V}_l$ verschwinden. Summation über j bzw. l ergibt

$$\sum_{j=1}^{m} \int \alpha_j(x) f(x) dS(x) = \sum_{l=1}^{p} \int \beta_l(x) f(x) dS(x), \qquad \text{q.e.d.}$$

Im Folgenden sei von allen Untermannigfaltigkeiten vorausgesetzt, dass sie durch endlich viele Karten überdeckt werden können. (Dies ist z.B. für kompakte Untermannigfaltigkeiten erfüllt.)

k-dimensionales Volumen

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt integrierbare Teilmenge von M, falls die charakteristische Funktion χ_A über M integrierbar ist und man setzt

$$\mathrm{Vol}_k(A) := \int_M \chi_A(x) dS(x).$$

$\mathrm{Vol}_k(A)$ heißt k-dimensionales Volumen oder k-dimensionaler Flächeninhalt von A. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt über A integrierbar, falls $f\chi_A$ über M integrierbar ist und man definiert

$$\int_A f(x) dS(x) := \int_M f(x)\chi_A(x) dS(x).$$

Damit lässt sich also schreiben

$$\mathrm{Vol}_k(A) = \int_A dS(x).$$

Eine integrierbare Teilmenge $N \subset M$ heißt *k-dimensionale Nullmenge*, falls $\mathrm{Vol}_k(N) = 0$. Ähnlich wie in § 4, Satz 10 zeigt man: Ändert man eine integrierbare Funktion

$F : M \to \mathbb{R}$ auf einer Nullmenge ab, so bleibt sie integrierbar mit dem gleichen Integral.

Beispiele

(14.4) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und

$$\varphi : I \to \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare Kurve mit folgenden Eigenschaften:

i) $\varphi'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

ii) φ bildet I homöomorph auf $\varphi(I)$ ab.

Dann ist $\varphi(I)$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und $\varphi : I \to \varphi(I)$ eine globale Karte. Für die Gramsche Determinante gilt hier nach Corollar 2 zu Satz 6

$$g(t) = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{d\varphi_\nu(t)}{dt} \right)^2 = \|\varphi'(t)\|^2.$$

Für jedes kompakte Teilintervall $J \subset I$ ist $\varphi(J)$ eine integrierbare Teilmenge von $\varphi(I)$ und

$$\mathrm{Vol}_1(\varphi(J)) = \int_J \|\varphi'(t)\| dt.$$

In diesem Fall stimmt also das eindimensionale Volumen mit der schon in An. 2, §4, definierten Kurvenlänge überein.

(14.5) Wir betrachten folgende Karte der 2-Sphäre $S_2 \subset \mathbb{R}^3$:

$$\Phi :]0, \pi[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$$

$$(\vartheta, \varphi) \mapsto (\cos\varphi \sin\vartheta, \sin\varphi \sin\vartheta, \cos\vartheta),$$

vgl. Beispiel (14.3). Der Maßtensor lautet hier

$$(g_{ij}(\vartheta, \varphi)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\vartheta \end{pmatrix},$$

also $\sqrt{g(\vartheta, \varphi)} = \sin\vartheta$.

Da der Nullmeridian (d.h. die durch $\varphi = 0$ gegebene Teilmenge der Sphäre) offensichtlich eine zweidimensionale Nullmenge ist, gilt für jede integrierbare Funktion $f : S_2 \to \mathbb{R}$

$$\int_{S_2} f(x) dS(x) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} f(\Phi(\vartheta, \varphi)) \sin\vartheta d\vartheta \right) d\varphi.$$

Insbesondere ist

$$\mathrm{Vol}_2(S_2) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} 2 d\varphi = 4\pi.$$

Die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ ist also gleich 4π.

(14.6) Rotationsflächen. Sei $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ eine stetig differenzierbare Funktion auf dem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Die Menge

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in I,\ x^2 + y^2 = f(z)^2\}$$

ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, die bis auf eine Nullmenge durch die Karte

$$\Phi : I \times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^3, \quad \Phi(t,\varphi) =: (x,y,z)$$

mit

$$x = f(t)\cos\varphi, \quad y = f(t)\sin\varphi, \quad z = t,$$

dargestellt wird. Da

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(t,\varphi)} = \begin{pmatrix} f'(t)\cos\varphi & -f(t)\sin\varphi \\ f'(t)\sin\varphi & f(t)\cos\varphi \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ergibt sich hier für den Maßtensor

$$(g_{ij}(t,\varphi)) = \begin{pmatrix} 1+f'(t)^2 & 0 \\ 0 & f(t)^2 \end{pmatrix},$$

also

$$\sqrt{g(t,\varphi)} = f(t)\sqrt{1+f'(t)^2}.$$

Daher ist

$$\mathrm{Vol}_2(M) = \int_0^{2\pi} \left(\int_I f(t)\sqrt{1+f'(t)^2}dt \right) d\varphi = 2\pi \int_I f(t)\sqrt{1+f'(t)^2}dt,$$

falls das Integral existiert (z.B. falls I endlich ist sowie f und f' auf I beschränkt sind).

(14.7) Sei $T \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen und

$$F : T \to \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Ihr Graph

$$M := \{(x_1,\ldots,x_n) \in T \times \mathbb{R} : x_n = F(x_1,\ldots,x_{n-1})\}$$

ist eine Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$ mit der Parameterdarstellung

$$\Phi : T \to M,$$

$$(t_1,\ldots,t_{n-1}) \mapsto (t_1,\ldots,t_{n-1},F(t_1,\ldots,t_{n-1})).$$

Die Funktionalmatrix von Φ ist

$$D\Phi(t) = \begin{pmatrix} E \\ \mathrm{grad}F(t) \end{pmatrix},$$

wobei E die $(n-1)$-reihige Einheitsmatrix bezeichnet. Für die Gramsche Determinante erhält man hier mit Corollar 2 zu Satz 6

$$g(t) = 1 + \|\mathrm{grad} F(t)\|^2.$$

Also ist

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(M) = \int_T \sqrt{1 + \|\mathrm{grad} F(t)\|^2}\, d^{n-1}t,$$

vorausgesetzt, das Integral konvergiert.

(14.8) Wir betrachten die obere Halbsphäre vom Radius $r > 0$

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r,\ x_n > 0\}.$$

Sie lässt sich darstellen als Graph der Funktion

$$F : T \to \mathbb{R}, \quad F(t_1, \ldots, t_{n-1}) = \sqrt{r^2 - t_1^2 - \ldots - t_{n-1}^2},$$

wobei $T = \{t \in \mathbb{R}^{n-1} : \|t\| < r\}$. Da

$$\frac{\partial F(t)}{\partial t_j} = \frac{-t_j}{F(t)},$$

ist nach (14.7)

$$g(t) = 1 + \frac{\|t\|^2}{|F(t)|^2} = \frac{r^2}{|F(t)|^2}.$$

Für jede integrierbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ erhält man deshalb

$$\begin{aligned}\int_M f(x) dS(x) &= \int_{\|t\|<r} f\left(t, \sqrt{r^2 - \|t\|^2}\right) \frac{r}{\sqrt{r^2 - \|t\|^2}}\, d^{n-1}t \\ &= \int_{\|\xi\|<1} f\left(r\xi, r\sqrt{1 - \|\xi\|^2}\right) \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1 - \|\xi\|^2}}\, d^{n-1}\xi,\end{aligned}$$

wobei die Substitution $t = r\xi$ benützt wurde.

Satz 7 (Verhalten bei Homothetien)**.** *Für $r > 0$ sei θ_r die Homothetie*

$$\theta_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto rx.$$

Weiter sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann ist $\theta_r(M)$ ebenfalls eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Eine Funktion

$$f : \theta_r(M) \to \mathbb{R}$$

ist genau dann über $\theta_r(M)$ integrierbar, wenn die Funktion $f \circ \theta_r$ über M integrierbar ist und es gilt

$$\int_{\theta_r(M)} f(x) dS(x) = \int_M f(r\xi) r^k dS(\xi).$$

Insbesondere ist für jede integrierbare Teilmenge $A \subset M$ die Teilmenge $\theta_r(A) \subset \theta_r(M)$ integrierbar und

$$\mathrm{Vol}_k(\theta_r(A)) = r^k \mathrm{Vol}_k(A).$$

Bemerkung. Man merkt sich den obigen Sachverhalt am leichtesten durch die symbolische Gleichung für die k-dimensionalen Flächenelemente

$$dS(r\xi) = r^k dS(\xi).$$

Beweis. Für jede Karte $\varphi : T \to V \subset M$ von M ist

$$\tilde{\varphi} := \theta_r \circ \varphi : T \to \theta_r(V) \subset \theta_r(M)$$

eine Karte von $\theta_r(M)$. Wegen $\tilde{\varphi}(t) = r\varphi(t)$ gilt

$$\left\langle \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t_i}, \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t_j} \right\rangle = r^2 \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t_i}, \frac{\partial\varphi}{\partial t_j} \right\rangle,$$

also folgt für die Gramschen Determinanten

$$\tilde{g}(t) = r^{2k} g(t), \quad \text{d.h.} \quad \sqrt{\tilde{g}(t)} = r^k \sqrt{g(t)}.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung.

Satz 8. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann ist für Lebesgue-fast alle $r \in \mathbb{R}_+^*$ die Funktion f über die Sphäre $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r\}$ integrierbar und es gilt*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d^n x &= \int_0^\infty \left(\int_{\|x\|=r} f(x) dS(x) \right) dr \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{\|\xi\|=1} f(r\xi) dS(\xi) \right) r^{n-1} dr.\end{aligned}$$

Beweis. Sei $H_\pm := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \pm x_n > 0\}$ der obere (bzw. untere) Halbraum. Da

$$f = f\chi_{H_+} + f\chi_{H_-} \quad \text{fast überall}$$

und der Durchschnitt jeder Sphäre mit der Hyperebene $\{x_n = 0\}$ eine $(n-1)$-dimensionale Nullmenge ist, genügt es, die Aussage für die Funktionen $f\chi_{H_+}$ und $f\chi_{H_-}$ zu beweisen. Wir behandeln nur den Fall des oberen Halbraums, da der andere Fall ganz analog ist. Zur Vereinfachung der Schreibweise nehmen wir an, dass $f = f\chi_{H_+}$.

Sei $U := \{\xi \in \mathbb{R}^{n-1} : \|\xi\| < 1\}$ die offene Einheitskugel und $\Phi : U \times \mathbb{R}_+^* \to H_+$ definiert durch

$$\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, r) := (r\xi_1, \ldots, r\xi_{n-1}, r\sqrt{1 - \|\xi\|^2}).$$

Φ ist eine C^1-invertierbare Abbildung mit

$$\det D\Phi(\xi, r) = \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1 - \|\xi\|^2}},$$

vgl. Aufgabe 9.6. Daher gilt (§ 9, Satz 2)

$$\int_{H_+} f(x)d^n x = \int_{U\times\mathbb{R}_+^*} f\left(r\xi, r\sqrt{1-\|\xi\|^2}\right)\frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-\|\xi\|^2}}\, d^{n-1}\xi dr.$$

Aus dem Satz von Fubini folgt

$$\int_{H_+} f(x)d^n x = \int_0^\infty \left(\int_U f(r\xi, r\sqrt{1-\|\xi\|^2})\frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-\|\xi\|^2}}\, d^{n-1}\xi\right) dr.$$

Das in der Klammer stehende Integral ist aber nach Beispiel (14.8) gleich

$$\int\limits_{\|x\|=r,\, x_n>0} f(x)dS(x).$$

Daraus folgt die Behauptung.

Beispiele

(14.9) Oberfläche der Einheitskugel

Sei $K_n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$ die n-dimensionale Einheitskugel und $S_{n-1} = \partial K_n$ die $(n-1)$-dimensionale Einheitssphäre. Für das Volumen von K_n haben wir bereits in (7.4) berechnet

$$\tau_n = \mathrm{Vol}_n(K_n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

Sei

$$\omega_n := \mathrm{Vol}_{n-1}(S_{n-1}).$$

Wendet man Satz 8 auf die charakteristische Funktion χ_{K_n} an, erhält man

$$\tau_n = \int_{\|x\|\leqslant 1} d^n x = \int_0^1 \left(\int_{\|x\|=r} dS(x)\right) dr = \int_0^1 \omega_n r^{n-1} dr = \frac{\omega_n}{n},$$

also

$$\omega_n = n\tau_n = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})},$$

insbesondere $\omega_2 = 2\pi,\ \omega_3 = 4\pi,\ \omega_4 = 2\pi^2$.

Für die Fläche der Sphäre vom Radius $r > 0$

$$S_{n-1}(r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r\}$$

hat man nach Satz 7

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(S_{n-1}(r)) = \omega_n r^{n-1}.$$

(14.10) Rotationssymmetrische Funktionen

Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass die Funktion

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(\|x\|),$$

integrierbar ist. Dann gilt nach Satz 8

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\|x\|)d^n x = \int_0^\infty \left(\int_{\|\xi\|=1} f(r)dS(\xi) \right) r^{n-1} dr = \omega_n \int_0^\infty f(r) r^{n-1} dr.$$

Damit erhalten wir wieder Satz 1 aus § 8.

Aufgaben

14.1. Die Funktionen $f,\ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f(x,y,z) := x^2 + xy - y - z, \qquad g(x,y,z) := 2x^2 + 3xy - 2y - 3z.$$

Man zeige, dass

$$C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = g(x,y,z) = 0\}$$

eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist und dass

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(t) := (t, t^2, t^3)$$

eine globale Parameterdarstellung von C ist.

14.2. Die Funktionen $f_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},\ i = 1,2,3$, seien definiert durch

$$f_1(x_1, \ldots, x_4) := x_1 x_3 - x_2^2,$$

$$f_2(x_1, \ldots, x_4) := x_2 x_4 - x_3^2,$$

$$f_3(x_1, \ldots, x_4) := x_1 x_4 - x_2 x_3.$$

Man zeige, dass

$$M := \{x \in \mathbb{R}^4 \smallsetminus \{0\} : f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0\}$$

eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist.

14.3.

a) Seien $M \subset \mathbb{R}^m$ eine k-dimensionale und $N \subset \mathbb{R}^n$ eine l-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Man zeige, dass $M \times N \subset \mathbb{R}^{m+n}$ eine $(k+l)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist.

b) Seien $A \subset M$ und $B \subset N$ integrierbare Teilmengen. Man zeige: $A \times B$ ist eine integrierbare Teilmenge von $M \times N$ und es gilt

$$\mathrm{Vol}_{k+l}(A \times B) = \mathrm{Vol}_k(A)\mathrm{Vol}_l(B).$$

14.4. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $A \subset M$ eine integrierbare Teilmenge. Sei

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad F(x) := a + Tx,$$

eine längentreue Abbildung ($a \in \mathbb{R}^n$ und $T \in O(n)$ eine orthogonale Matrix). Man zeige, dass $F(A)$ eine integrierbare Teilmenge der Untermannigfaltigkeit $F(M) \subset \mathbb{R}^n$ ist mit

$$\mathrm{Vol}_k(F(A)) = \mathrm{Vol}_k(A).$$

14.5. Es sei A die bzgl. Polarkoordinaten (φ, ϑ) auf der Einheitssphäre $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ durch die Ungleichungen

$$\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2, \quad \vartheta_1 \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_2,$$

$(0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \vartheta_1 < \vartheta_2 \leqslant \pi)$ gegebene Teilmenge. Man berechne ihre Fläche.

14.6. Man berechne die Fläche des Rotationsellipsoids

$$M := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2 = 1 \right\}, \qquad a,\ b \in \mathbb{R}_+^*.$$

14.7. Seien r, R reelle Zahlen mit $0 < r < R$ und K die Kreislinie

$$K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-R)^2 + z^2 = r^2,\ y = 0\}.$$

Durch Rotation von K um die z-Achse entsteht ein Torus $T \subset \mathbb{R}^3$. Man berechne seine Fläche.

14.8. Es sei S_+ die folgende Teilmenge der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$:

$$S_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1,\ x_i \geqslant 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n\}.$$

Für $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}_+$ zeige man

$$\int_{S_+} x_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{p_n} dS(x) = \frac{\Gamma(\frac{p_1+1}{2}) \cdot \ldots \cdot \Gamma(\frac{p_n+1}{2})}{2^{n-1}\Gamma(\frac{p_1+\ldots+p_n+n}{2})}.$$

Anleitung: Man wende auf das Integral

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} x_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{p_n} e^{-\|x\|^2} d^n x$$

den Satz 8 an.

§ 15 Der Gaußsche Integralsatz

Wir kommen jetzt zum wichtigsten Satz der Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, dem Gaußschen Integralsatz. Er erlaubt, das Volumenintegral über die Divergenz eines Vektorfeldes durch ein Oberflächenintegral zu ersetzen. Dies ist das n-dimensionale Analogon des Fundamentalsatzes der Integral- und Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen. Der Gaußsche Integralsatz hat viele Anwendungen in der mathematischen Physik, wovon wir einige in den folgenden Paragraphen kennenlernen werden.

Tangentialvektoren

Unter einem Tangentialvektor an eine Untermannigfaltigkeit versteht man einen Tangentialvektor einer in der Untermannigfaltigkeit verlaufenden Kurve (Bild 15.1).

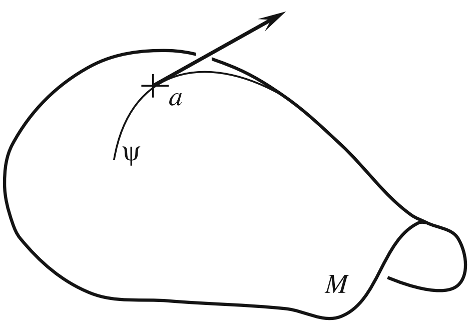


Bild 15.1

Präziser ausgedrückt lautet die Definition wie folgt:

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und $a \in M$ ein Punkt. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt *Tangentialvektor* an M im Punkt a, wenn es eine stetig differenzierbare Kurve

$$\psi :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M \subset \mathbb{R}^n, \quad (\varepsilon > 0),$$

gibt mit

$$\psi(0) = a \quad \text{und} \quad \psi'(0) = v.$$

Die Gesamtheit aller Tangentialvektoren an M in a wird mit T_aM bezeichnet.

Satz 1. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $a \in M$. Dann gilt:*

a) *T_aM ist ein k-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.*

b) *Sei $\varphi : \Omega \to V \subset M$, (Ω offen in $\mathbb{R}^k$, V offen in M) eine Karte von M und $c \in \Omega$ ein Punkt mit $\varphi(c) = a$. Dann bilden die Vektoren*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(c), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(c)$$

O. Forster, *Analysis 3*, Aufbaukurs Mathematik,
DOI 10.1007/978-3-8348-2374-8_15, © Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden 2012

eine Basis von T_aM.

c) *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *eine offene Umgebung von* a *und seien* $f_1, \ldots, f_{n-k} \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbare Funktionen mit*

$$M \cap U = \{x \in U : f_1(x) = \ldots = f_{n-k}(x) = 0\}$$

und

$$\operatorname{Rang} \frac{\partial(f_1, \ldots, f_{n-k})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(a) = n - k.$$

Dann gilt

$$T_aM = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, \operatorname{grad} f_j(a) \rangle = 0 \quad \textit{für} \quad j = 1, \ldots, n-k.\}$$

Beweis. Es sei T_1 der von $\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(c), \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial t_k}(c)$ aufgespannte Vektorraum und

$$T_2 := \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, \operatorname{grad} f_j(a) \rangle = 0, \quad j = 1, \ldots, n-k\}.$$

Wir zeigen

$$T_1 \subset T_aM \subset T_2.$$

Da T_1 und T_2 beides k-dimensionale Untervektorräume von $\mathbb{R}^n$ sind, ist dann notwendig $T_1 = T_aM = T_2$ und der Satz bewiesen.

i) Beweis der Inklusion $T_1 \subset T_aM$.

Sei

$$v = \lambda_1 \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(c) + \ldots + \lambda_k \frac{\partial\varphi}{\partial t_k}(c)$$

ein beliebiger Vektor aus T_1. Wir definieren eine Kurve

$$\psi :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M \subset \mathbb{R}^n$$

durch

$$\psi(\tau) := \varphi(c_1 + \lambda_1\tau, \ldots, c_k + \lambda_k\tau).$$

Es gilt $\psi(0) = \varphi(c) = a$ und nach der Kettenregel ist

$$\psi'(0) = \lambda_1 \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(c) + \ldots + \lambda_k \frac{\partial\varphi}{\partial t_k}(c) = v,$$

d.h. $v \in T_aM$.

ii) Beweis der Inklusion $T_aM \subset T_2$.

Sei $v \in T_aM$, d.h. $v = \psi'(0)$ für eine stetig differenzierbare Kurve

$$\psi :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M \subset \mathbb{R}^n$$

mit $\psi(0) = a$. Da die Kurve in M verläuft, gilt für $j = 1, \ldots, n-k$

$$f_j(\psi(\tau)) = 0 \quad \text{für} \quad |\tau| < \varepsilon_1, \quad (0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon).$$

Differentiation nach τ ergibt

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\psi(0)) \frac{d\psi_i}{d\tau}(0) = \langle \operatorname{grad} f_j(a), \psi'(0) \rangle = \langle v, \operatorname{grad} f_j(a) \rangle,$$

d.h. $v \in T_2$, q.e.d.

Normalenvektoren

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $a \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt *Normalenvektor* von M in a, wenn er auf T_aM senkrecht steht, d.h.

$$\langle v, w \rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad w \in T_aM.$$

Die Normalenvektoren von M in a bilden deshalb einen $(n-k)$-dimensionalen Untervektorraum $N_aM \subset \mathbb{R}^n$. Nach Satz 1 c) ist mit den dortigen Bezeichnungen

$$\operatorname{grad} f_1(a), \ldots, \operatorname{grad} f_{n-k}(a)$$

eine Basis von N_aM.

Kompakta mit glattem Rand

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge. Wir sagen, A habe glatten Rand, falls es zu jedem Randpunkt $a \in \partial A$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Funktion $\psi : U \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften gibt (vgl. Bild 15.2):

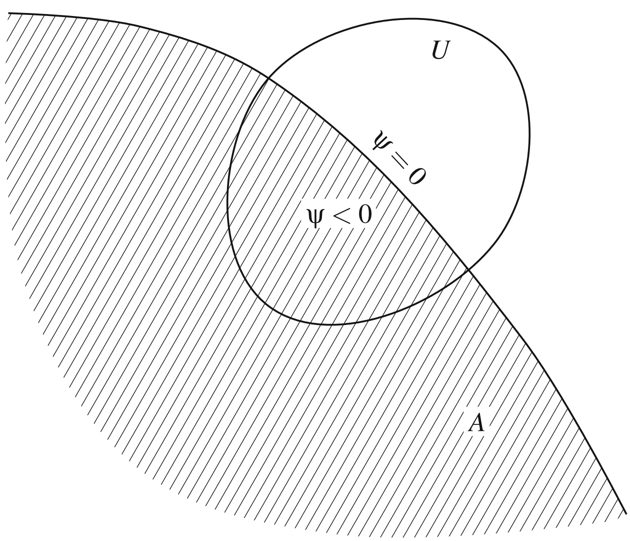


Bild 15.2

i) $A \cap U = \{x \in U : \psi(x) \leqslant 0\}$,

ii) $\operatorname{grad}\psi(x) \neq 0$ für alle $x \in U$.

Behauptung. Es gilt dann

$$\partial A \cap U = \{x \in U : \psi(x) = 0\}.$$

Beweis.

a) Wir zeigen zunächst die Inklusion „ $\subset$ “. Dazu genügt es zu zeigen: Ist $x \in U$ ein Punkt mit $\psi(x) < 0$, so ist $x \notin \partial A$. Dies folgt daraus, dass es wegen der Stetigkeit von ψ eine ganze Umgebung $V \subset U$ von x gibt mit $\psi(y) < 0$ für alle $y \in V$. Also ist $V \subset A$, d.h. x kein Randpunkt von A.

b) Beweis der Inklusion „ $\supset$ “. Sei $a \in U$ mit $\psi(a) = 0$. Es ist zu zeigen $a \in \partial A$. Sei $v := \operatorname{grad}\psi(a) \neq 0$. Die Taylorentwicklung bis zu Gliedern 1. Ordnung von ψ im Punkt a lautet

$$\psi(a+\xi) = \psi(a) + \langle \operatorname{grad}\psi(a), \xi\rangle + o(\xi) = \langle v, \xi\rangle + o(\xi).$$

Setzt man speziell $\xi = tv$, erhält man

$$\psi(a+tv) = t\|v\|^2 + o(tv).$$

Es gibt deshalb ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\psi(a+tv) > 0 \quad \text{für alle} \quad t \quad \text{mit} \quad 0 < t < \varepsilon,$$

$$\psi(a+tv) < 0 \quad \text{für alle} \quad t \quad \text{mit} \quad -\varepsilon < t < 0.$$

Daraus folgt

$$a + t\ \operatorname{grad}\psi(a) \notin A \quad \text{für} \quad 0 < t < \varepsilon,$$

$$a + t\ \operatorname{grad}\psi(a) \in A \quad \text{für} \quad -\varepsilon < t < 0.$$

In jeder Umgebung von a liegen deshalb sowohl Punkte von A als auch Punkte des Komplements von A. Deshalb ist a ein Randpunkt von A, q.e.d.

Folgerung. *Der Rand eines Kompaktums $A \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand ist eine kompakte $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.*

Wir werden nun einen eindeutig bestimmten Normalenvektor in einen Randpunkt von A auszeichnen.

Satz 2. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $a \in \partial A$. Dann existiert genau ein Vektor $\nu(a) \in \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:*

1) $\nu(a)$ *steht senkrecht auf* $T_a(\partial A)$.

2) $\|\nu(a)\| = 1$.

3) *Es gibt ein* $\varepsilon > 0$, *so dass*

$$a + t\nu(a) \notin A \quad \textit{für alle} \quad t \in \,]0, \varepsilon[\,.$$

Der Vektor $\nu(a)$ heißt *äußerer Normalen-Einheitsvektor* von A im Punkt a.

Beweis.

a) Existenz. Sei U eine offene Umgebung von a und $\psi : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\operatorname{grad}\psi \neq 0$ und

$$A \cap U = \{x \in U : \psi(x) \leqslant 0\}.$$

Dann hat der Vektor

$$\nu(a) := \frac{\operatorname{grad}\psi(a)}{\|\operatorname{grad}\psi(a)\|}$$

die Eigenschaften von 1) bis 3).

b) Eindeutigkeit. Da der Normalenvektorraum von ∂A im Punkt a eindimensional mit Basis $\operatorname{grad}\psi(a)$ ist, folgt

$$\nu(a) = \lambda \operatorname{grad}\psi(a), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wegen 2) ist $|\lambda| = 1/\|\operatorname{grad}\psi(a)\|$ und aus 3) folgt, dass $\lambda > 0$. Also ist $\nu(a)$ durch die drei Bedingungen eindeutig festgelegt, q.e.d.

Zu jedem Kompaktum $A \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand gibt es deshalb ein stetiges Vektorfeld

$$\nu : \partial A \to \mathbb{R}^n,$$

wo $\nu(a)$ für $a \in \partial A$ der äußere Normalen-Einheitsvektor ist.

Beispiele

(15.1) Sei $A := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant r\}$ die Kugel vom Radius $r > 0$. A hat glatten Rand, als Funktion ψ im Sinne der Definition kann man $\psi(x) = \|x\|^2 - r^2$ wählen. Für den Einheits-Normalenvektor in einem Randpunkt

$$a \in \partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r\}$$

erhält man

$$\nu(a) = \frac{a}{r}.$$

(15.2) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand und

$$a = (a_1, \ldots, a_n) \in \partial A.$$

In einer Umgebung von a kann ∂A als Graph einer Funktion von $n-1$ Variablen dargestellt werden. Es gibt deshalb nach evtl. Umnumerierung der Koordinaten eine offene

Umgebung $U' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ von $(a_1, \ldots, a_n)$, ein Intervall $I =]\alpha, \beta[$, $\alpha < a_n < \beta$, sowie eine stetig differenzierbare Funktion

$$g : U' \to \mathbb{R},$$

so dass

$$A \cap (U' \times I) = \{(x', x_n) \in U' \times I : x_n \leqslant g(x')\},$$

(bzw. statt der letzten Ungleichung $x_n \geqslant g(x')$). Mit $\psi(x) = x_n - g(x')$ berechnet man für das äußere Einheits-Normalenvektorfeld

$$\nu = \frac{(-\operatorname{grad} g, 1)}{\sqrt{1 + \|\operatorname{grad} g\|^2}},$$

wobei $\operatorname{grad} g = (\frac{\partial g}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_{n-1}})$. (Im Fall, dass A durch die Ungleichung $x_n \geqslant g(x')$ gegeben wird, ergibt sich der entgegengesetzte Wert.)

Das nächste Lemma stellt bereits einen Spezialfall des Gaußschen Integralsatzes dar.

Lemma. *Sei $U' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ eine offene Menge, $I =]\alpha, \beta[$ ein Intervall und*

$$g : U' \to I \subset \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Wir setzen

$$A := \{(x', x_n) \in U' \times I : x_n \leqslant g(x')\},$$

$$M := \{(x', x_n) \in U' \times I : x_n = g(x')\}.$$

Dann gilt für jede stetig differenzierbare Funktion $f : U' \times I \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger in $U' \times I$ und alle $i = 1, \ldots, n$

$$\int_A \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} d^n x = \int_M f(x) \nu_i(x) dS(x),$$

wobei

$$\begin{aligned}
\nu_i(x) &= -\big(1 + \|\operatorname{grad} g(x')\|^2\big)^{-1/2} \frac{\partial g(x')}{\partial x_i} \quad \text{für} \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \\
\nu_n(x) &= \big(1 + \|\operatorname{grad} g(x')\|^2\big)^{-1/2}, \\
x &= (x_1, \ldots, x_n), \quad x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass das Flächenelement von M bzgl. der Parameterdarstellung $x' \mapsto (x', g(x'))$ folgende Form hat

$$dS(x) = \sqrt{1 + \|\operatorname{grad} g(x')\|^2}\, d^{n-1} x',$$

vgl. § 14, Beispiel (14.7). Beim Beweis der Integralformel haben wir zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall: $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

Sei $F : U' \times I \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x',z) := \int_\alpha^z f(x',x_n)dx_n.$$

Es gilt

$$\frac{\partial F(x',z)}{\partial z} = f(x',z), \qquad \frac{\partial F(x',z)}{\partial x_i} = \int_\alpha^z \frac{\partial f}{\partial x_i}(x',x_n)dx_n.$$

Daraus folgt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}\int_\alpha^{g(x')} f(x',x_n)dx_n &= \frac{\partial}{\partial x_i}F(x',g(x')) \\ &= \int_\alpha^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x',x_n)dx_n + f(x',g(x'))\frac{\partial g(x')}{\partial x_i}.\end{aligned}$$

Da die Funktion

$$x' \mapsto \int_\alpha^{g(x')} f(x',x_n)dx_n$$

kompakten Träger in U' hat, gilt nach § 10, Satz 2

$$\int_{U'} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_\alpha^{g(x')} f(x',x_n)dx_n\right) d^{n-1}x' = 0.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_A \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} d^n x &= \int_{U'}\left(\int_\alpha^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x',x_n)dx_n\right) d^{n-1}x' \\ &= \int_{U'} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_\alpha^{g(x')} f(x',x_n)dx_n\right) d^{n-1}x' - \int_{U'} f(x',g(x'))\frac{\partial g(x')}{\partial x_i} d^{n-1}x' \\ &= \int_M f(x)\nu_i(x)dS(x).\end{aligned}$$

2. Fall: $i = n$.

Da für jedes $x' \in U$ die Funktion $x_n \mapsto f(x',x_n)$ kompakten Träger in $I =]\alpha,\beta[$ hat, folgt aus dem Fundamentalsatz der Integral- und Differentialrechnung einer Veränderlichen

$$\int_\alpha^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x',x_n)dx_n = f(x',g(x')),$$

also

$$\begin{aligned}\int_A \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} d^n x &= \int_{U'}\left(\int_\alpha^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x',x_n)dx_n\right) d^{n-1}x' \\ &= \int_{U'} f(x',g(x'))d^{n-1}x' = \int_M f(x)\nu_n(x)dS(x), \quad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Der Beweis des Gaußschen Integralsatzes im allgemeinen Fall wird durch eine Teilung der Eins auf den vorstehenden Spezialfall zurückgeführt werden. Dazu brauchen wir folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz (Lebesguesches Lemma). *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie offener Teilmengen $U_i \subset \mathbb{R}^n$ mit*

$$A \subset \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Dann existiert eine reelle Zahl $\lambda > 0$ (Lebesguesche Zahl) *mit folgender Eigenschaft: Jede Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$, die A trifft (d.h. $A \cap K \neq \emptyset$) und die einen Durchmesser $\leqslant \lambda$ hat, ist ganz in einem U_i enthalten.*

Beweis. Zu jedem $a \in A$ gibt es ein $r_a > 0$ und ein $i \in I$, so dass

$$B(a, r_a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r_a\} \subset U_i.$$

Da die Familie $(B(a, r_a/2))_{a\in A}$ eine offene Überdeckung des Kompaktums A darstellt, gibt es endlich viele Punkte $a_1, \ldots, a_m \in A$ mit

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(a_k, r_{a_k}/2).$$

Wir setzen $\lambda := \min(r_{a_1}/2, \ldots, r_{a_m}/2)$. Sei nun $K \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge mit $A \cap K \neq \emptyset$ und $\operatorname{diam} K \leqslant \lambda$. Wir wählen einen Punkt $a \in A \cap K$. Dazu gibt es ein $k \in \{1, \ldots, m\}$ und ein $i \in I$, so dass

$$a \in B(a_k, r_{a_k}/2) \subset B(a_k, r_{a_k}) \subset U_i.$$

Wegen $\operatorname{diam}(K) \leqslant r_{a_k}/2$ folgt

$$K \subset B(a_k, r_{a_k}) \subset U_i, \quad \text{q.e.d.}$$

Wir kommen jetzt zur Formulierung des Gaußschen Integralsatzes. Wir erinnern an den Begriff der Divergenz eines Vektorfeldes. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$F = (F_1, \ldots, F_n) : U \to \mathbb{R}^n$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann ist die Divergenz von F eine Funktion $\operatorname{div} F : U \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

Satz 3 (Gaußscher Integralsatz). *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge mit glattem Rand, $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^n$ das äußere Einheits-Normalenfeld und $U \supset A$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $F : U \to \mathbb{R}^n$*

$$\int_A \operatorname{div} F(x)\, d^n x = \int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x) \rangle\, dS(x).$$

Bemerkung. Der Gaußsche Integralsatz gilt auch noch, wenn der Rand von A nicht glatt ist, sondern niederdimensionale Singularitäten (Kanten, Ecken, etc.) hat und das Vektorfeld F nicht in einer vollen Umgebung von A stetig differenzierbar ist. Für eine solche Verallgemeinerung siehe: *H. König*, Ein einfacher Beweis des Gaußschen Integralsatzes, Jahresbericht der DMV, **66** (1964) 119–138.

Beweis. Nach (15.2) ist ∂A in der Umgebung jedes Punktes Graph einer Funktion von $n-1$ Variablen. Deshalb gibt es eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ offener Teilmengen

$$U_i \subset \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad \bigcup_{i\in I} U_i \supset A,$$

so dass für jedes $i \in I$ eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(1) Entweder $\quad U_i \subset A \smallsetminus \partial A \quad$ oder

(2) nach evtl. Umnumerierung der Koordinaten hat U_i die Gestalt

$$U_i = U' \times]a,b[, \qquad U' \quad \text{offen in} \quad \mathbb{R}^{n-1},$$

und es gibt eine stetig differenzierbare Funktion

$$g : U' \to]a,b[$$

mit

$$U_i \cap A = \{(x',x_n) \in U' \times]a,b[: x_n \leqslant g(x'),\ (\text{bzw. } x_n \geqslant g(x'))\}.$$

Sei $\lambda > 0$ eine Lebesguesche Zahl bzgl. der Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von A gemäß dem obigen Hilfssatz. Wir setzen $\varepsilon := \lambda/2\sqrt{n}$ und betrachten die anfangs des Paragraphen 10 konstruierte differenzierbare Teilung der Eins $(\alpha_{p\varepsilon})_{p\in\mathbb{Z}^n}$. Der Träger jedes $\alpha_{p\varepsilon}$ ist ein Würfel der Seitenlänge 2ε, hat also einen Durchmesser $\leqslant \lambda$. Sei P die (endliche) Menge aller Multiindizes $p \in \mathbb{Z}^n$, so dass

$$\operatorname{Supp}(\alpha_{p\varepsilon}) \cap A \neq \emptyset.$$

Dann ist

$$\int_A \operatorname{div} F(x) d^n x = \sum_{p\in P} \int_A \operatorname{div}(\alpha_{p\varepsilon}(x) F(x)) d^n x$$

und

$$\int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x) \rangle dS(x) = \sum_{p\in P} \int_{\partial A} \langle \alpha_{p\varepsilon} F(x), \nu(x) \rangle dS(x).$$

Der Satz braucht also nur für die Funktionen $\alpha_{p\varepsilon}F$ bewiesen zu werden. Nach Konstruktion ist $\operatorname{Supp}(\alpha_{p\varepsilon}F)$ für jedes $p \in P$ ganz in einem U_i enthalten. Falls $U_i \subset A \smallsetminus \partial A$, folgt die Gleichung

$$(*) \quad \int_A \operatorname{div}(\alpha_{p\varepsilon}(x) F(x)) d^n x = \int_{\partial A} \langle \alpha_{p\varepsilon}(x) F(x), \nu(x) \rangle dS(x)$$

aus § 10, Satz 2 a), da das Randintegral entfällt. Falls aber U_i der Bedingung (2) genügt, ist $(*)$ eine Folgerung aus dem Lemma, angewandt auf die Komponenten der vektorwertigen Funktion $\alpha_{p\varepsilon}F$.

(15.3) Beispiel. Wir betrachten das durch den Ortsvektor gegebene Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ F(x) := x.$$

Es ist dann

$$\operatorname{div} F(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial x_k} = n.$$

Für jedes Kompaktum $A \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand gilt deshalb

$$\int_A \operatorname{div} F(x) d^n x = n\mathrm{Vol}_n(A),$$

also folgt aus dem Gaußschen Integralsatz

$$\mathrm{Vol}_n(A) = \frac{1}{n} \int_{\partial A} \langle x, \nu(x) \rangle dS(x).$$

Wählen wir für A speziell die n-dimensionale Einheitskugel K_n, so ist

$$\nu(x) = x \quad \text{für alle} \quad x \in \partial K_n = S_{n-1},$$

also $\langle x, \nu(x) \rangle = \|x\|^2 = 1$, woraus folgt

$$\mathrm{Vol}_n(K_n) = \frac{1}{n} \int_{\partial K_n} dS(x) = \frac{1}{n} \mathrm{Vol}_{n-1}(S_{n-1}).$$

Diese Formel hatten wir schon auf andere Weise in (14.9) abgeleitet.

(15.4) Physikalische Interpretation des Gaußschen Integralsatzes

$$\int_A \operatorname{div} F(x) d^n x = \int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x) \rangle dS(x).$$

Das Skalarprodukt

$$\langle F(x), \nu(x) \rangle = \|F(x)\| \cos\alpha,$$

wobei $\alpha = \sphericalangle(F(x), \nu(x))$ den Winkel zwischen den Vektoren $F(x)$ und $\nu(x)$ bezeichnet, ist die Projektion von $F(x)$ auf die äußere Normale. Man kann deshalb

$$\langle F(x), \nu(x) \rangle dS(x)$$

als den durch das Oberflächenelement $dS(x)$ austretenden Fluss des Vektorfeldes F interpretieren (Bild 15.3).

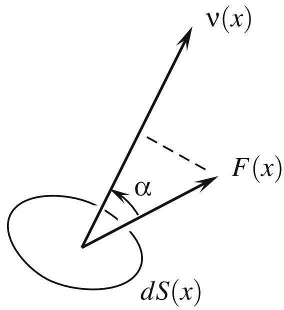


Bild 15.3

Das Integral

$$\int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x) \rangle dS(x)$$

ist daher der Gesamtfluss des Vektorfeldes F durch die Oberfläche von A. Dieser Fluss kann nach dem Satz von Gauß als Volumenintegral der Divergenz von F über A ausgerechnet werden.

Beispielsweise gilt für die Strömung F einer inkompressiblen Flüssigkeit, dass der Gesamtfluss durch die Oberfläche jedes (gedachten) Körpers A gleich null ist. Daraus folgt

$$\int_A \operatorname{div} F(x) d^3x = 0$$

für alle A, also $\operatorname{div} F(x) = 0$.

Analoges gilt für das elektrische Feld E in einem ladungsfreien Raum.

(15.5) Archimedisches Prinzip. Ein fester Körper A befinde sich in einer Flüssigkeit der konstanten Dichte $c > 0$, deren Oberfläche mit der Ebene $x_3 = 0$ des (x_1, x_2, x_3)-Raums zusammenfalle. Im Punkt $x \in \partial A$ übt die Flüssigkeit auf den Körper einen Druck der Größe

$$c x_3 \nu(x)$$

aus, wobei $\nu(x)$ der äußere Normalenvektor von A im Punkt x ist. (Man beachte, dass x_3 negativ ist; der Druck ist nach innen gerichtet, vgl. Bild 15.4).

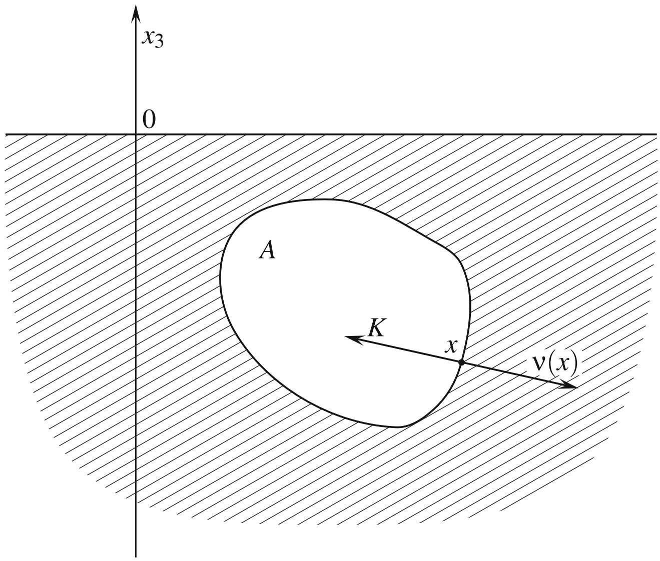


Bild 15.4

Für die gesamte Auftriebskraft $K = (K_1, K_2, K_3)$ erhält man daher

$$K = \int_{\partial A} c x_3 \nu(x) dS(x),$$

d.h.

$$K_i = \int_{\partial A} c x_3 \nu_i(x) dS(x).$$

Mit dem Satz von Gauß kann man umformen

$$K_i = \int_A c \frac{\partial x_3}{\partial x_i} d^3x,$$

also $K_1 = K_2 = 0$ und

$$K_3 = c \int_A d^3x = c\mathrm{Vol}(A).$$

Der Körper erfährt also einen Auftrieb in x_3-Richtung, dessen Betrag gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit ist.

Greensche Formel

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $A \subset U$ ein Kompaktum mit glattem Rand und

$$\nu : \partial A \to \mathbb{R}^n$$

das äußere Einheits-Normalenfeld. Für eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ werde die Ableitung in Normalenrichtung in einem Punkt $x \in \partial A$ definiert durch

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x) := \langle \mathrm{grad} f(x), \nu(x) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \nu_i(x).$$

Wir führen ferner folgende abkürzende Schreibweise ein

$$\int_A \varphi dV := \int_A \varphi(x) d^n x$$

für eine stetige Funktion $\varphi : A \to \mathbb{R}$, wobei dV an Volumenelement erinnern soll.

Satz 4 (Greensche Formel)**.** *Mit den obigen Bezeichnungen seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ zwei 2-mal stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt*

$$\int_A (f\Delta g - g\Delta f) dV = \int_{\partial A} \left(f\frac{\partial g}{\partial \nu} - g\frac{\partial f}{\partial \nu} \right) dS.$$

Beweis. Wir wenden den Gaußschen Integralsatz auf das Vektorfeld

$$F := f\nabla g - g\nabla f$$

an. Da

$$\operatorname{div}(f\nabla g) = f\Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle,$$

(vgl. An. 2, §5) und einer analogen Formel für $\operatorname{div}(g\nabla f)$, folgt

$$\operatorname{div} F = f\Delta g - g\Delta f.$$

Auf ∂A gilt

$$\langle F, \nu \rangle = f\langle \nabla g, \nu \rangle - g\langle \nabla f, \nu \rangle = f\frac{\partial g}{\partial \nu} - g\frac{\partial f}{\partial \nu}.$$

Aus

$$\int_A \operatorname{div}(F) dV = \int_{\partial A} \langle F, \nu \rangle dS$$

folgt deshalb die Behauptung.

AUFGABEN

15.1. Sei

$$A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} \leqslant 1\}$$

und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld

$$F(x,y,z) := (3x^2 z,\ y^2 - 2x,\ z^3).$$

Man berechne das Integral

$$\int_{\partial A} \langle F, \nu \rangle dS.$$

15.2. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand, das den Nullpunkt in seinem Inneren enthält und

$$\alpha(x) := \sphericalangle(x, \nu(x)), \quad x \in \partial A,$$

der Winkel zwischen dem Ortsvektor x und dem Normalenvektor $\nu(x)$ an ∂A. Man zeige

$$\int_{\partial A} \frac{\cos\alpha(x)}{\|x\|^{n-1}} dS(x) = \omega_n,$$

wobei ω_n die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel ist.

Anleitung: Man wende den Gaußschen Integralsatz auf das Vektorfeld

$$F(x) := \frac{x}{\|x\|^n}$$

und die Menge

$$A_\varepsilon := \{x \in A : \|x\| \geqslant \varepsilon\}$$

für genügend kleines $\varepsilon > 0$ an.

15.3. Eine Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von nicht-leeren Teilmengen $A_k \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvergent gegen einen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$, falls es gilt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$A_k \subset B(x,\varepsilon) \quad \text{für alle} \quad k \geqslant N.$$

(Dabei ist $B(x,\varepsilon)$ die offene Kugel um x mit Radius ε.) Man zeige: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $a : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $A_k \subset U$, $k \in \mathbb{N}$, eine gegen den Punkt $x \in U$ konvergente Folge von Teilmengen mit glattem Rand. Dann gilt

$$\operatorname{div} a(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\operatorname{Vol}(A_k)} \int_{\partial A_k} \langle a, \nu\rangle dS.$$

15.4. Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ schreiben wir $f = o(r^\alpha)$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $R > 0$ gibt, so dass

$$|f(x)| \leqslant \varepsilon\|x\|^\alpha \quad \text{für} \quad \|x\| \geqslant R.$$

Sei $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit

$$a_k = o(r^{1-n}), \quad \frac{\partial a_k}{\partial x_k} = o(r^{-n}), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Man zeige

$$\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} a(x) d^n x = 0.$$

§ 16 Die Potentialgleichung

In diesem Paragraphen benützen wir die Greensche Integralformel, um Integraldarstellungen für Lösungen der homogenen (inhomogenen) Potentialgleichung $\Delta u = 0$ (bzw. $\Delta u = \rho$) abzuleiten.

Unter der homogenen Potentialgleichung oder Laplaceschen Differentialgleichung versteht man die Differentialgleichung

$$\Delta u = 0,$$

wobei $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ der Laplace-Operator im $\mathbb{R}^n$ ist. Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion u mit $\Delta u = 0$ heißt *harmonisch*.

Ist ρ eine vorgegebene Funktion in einer offenen Menge des $\mathbb{R}^n$, so heißt

$$\Delta u = \rho$$

inhomogene Potentialgleichung oder Poissonsche Differentialgleichung. In physikalischer Interpretation beschreibt die Gleichung das elektrische Potential bei der Ladungsverteilung ρ.

Für die folgenden Untersuchungen brauchen wir spezielle Lösungen der Potentialgleichung mit einer Singurarität in einem Punkt $a \in \mathbb{R}^n$, die sog. Newton-Potentiale

$$N_a : \mathbb{R}^n \smallsetminus \{a\} \to \mathbb{R}.$$

Sie sind wie folgt definiert:

$$N_a(x) := \begin{cases} \dfrac{-1}{(n-2)\omega_n} \cdot \dfrac{1}{\|x-a\|^{n-2}} & \text{für} \quad n \neq 2, \\ \dfrac{1}{2\pi} \log \|x-a\| & \text{für} \quad n = 2. \end{cases}$$

Dabei ist $\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel, vgl. (14.9).

Man rechnet leicht nach, dass N_a der Potentialgleichung

$$\Delta N_a = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \smallsetminus \{a\}$$

genügt, vgl. An. 2, (5.9). Für den Gradienten von N_a erhält man

$$\operatorname{grad} N_a(x) = \frac{1}{\omega_n} \cdot \frac{x-a}{\|x-a\|^n}.$$

(Hier ist keine Fallunterscheidung $n \neq 2$ und $n = 2$ nötig.)

O. Forster, *Analysis 3*, Aufbaukurs Mathematik,
DOI 10.1007/978-3-8348-2374-8_16, © Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden 2012

Hilfssatz 1. *Sei U eine offene Umgebung des Punktes $a \in \mathbb{R}^n$ und $\varphi : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt*

$$\varphi(a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\|x-a\|=\varepsilon} \left(\varphi(x) \frac{\partial N_a(x)}{\partial \nu} - N_a(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \nu} \right) dS(x).$$

Beweis. Wir setzen

$$I_\varepsilon := \int_{\|x-a\|=\varepsilon} \varphi(x) \frac{\partial N_a(x)}{\partial \nu} dS(x),$$

$$II_\varepsilon := \int_{\|x-a\|=\varepsilon} N_a(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \nu} dS(x)$$

und zeigen

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon = \varphi(a), \quad \lim_{\varepsilon \to 0} II_\varepsilon = 0.$$

i) Der äußere Normalen-Einheitsvektor der Sphäre $\|x-a\| = \varepsilon$ lautet

$$\nu(x) = \frac{x-a}{\|x-a\|}.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial N_a(x)}{\partial \nu} = \langle \operatorname{grad} N_a(x), \nu(x) \rangle = \frac{1}{\omega_n \|x-a\|^{n-1}},$$

also

$$I_\varepsilon = \frac{1}{\omega_n} \int_{\|x-a\|=\varepsilon} \varphi(x) \frac{1}{\|x-a\|^{n-1}} dS(x) = \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\|x-a\|=\varepsilon} \varphi(x) dS(x).$$

Wir machen die Substitution $x - a = \varepsilon\xi$, $dS(x) = \varepsilon^{n-1} dS(\xi)$, und erhalten

$$I_\varepsilon = \frac{1}{\omega_n} \int_{\|\xi\|=1} \varphi(a + \varepsilon\xi) dS(\xi).$$

Da

$$\varphi(a) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\|\xi\|=1} \varphi(a) dS(\xi),$$

folgt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon = \varphi(a).$$

ii) Da φ einmal stetig differenzierbar ist, gibt es eine Konstante $M \in \mathbb{R}_+$, so dass

$$\left| \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \nu} \right| \leqslant M \quad \text{für} \quad 0 < \|x-a\| \leqslant \varepsilon_0.$$

Somit gilt

$$|II_\varepsilon| \leqslant \text{const.} \int_{\|x-a\|=\varepsilon} \varepsilon^{2-n} dS(x) \quad \text{für} \quad n \neq 2,$$

$$|II_\varepsilon| \leqslant \text{const.} \int_{\|x-a\|=\varepsilon} |\log \varepsilon| dS(x) \quad \text{für} \quad n = 2.$$

In beiden Fällen erhält man

$$\lim_{\varepsilon \to 0} II_\varepsilon = 0, \quad \text{q.e.d.}$$

Wir kommen jetzt zur Lösung der Poisson-Gleichung $\Delta u = \rho$.

Satz 1. *Sei* $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger. Für* $x \in \mathbb{R}^n$ *sei*

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} N_y(x) \rho(y) d^n y.$$

Dann ist $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *zweimal stetig differenzierbar und genügt der Differentialgleichung*

$$\Delta u = \rho.$$

Bemerkungen:

1) Die Lösung der Differentialgleichung $\Delta u = \rho$ ist natürlich nicht eindeutig bestimmt. Je zwei Lösungen unterscheiden sich um eine Lösung der homogenen Gleichung $\Delta v = 0$. Wir werden auf die Frage der Eindeutigkeit noch später zurückkommen.

2) Für die Gültigkeit des Satzes genügt es, dass ρ nur einmal stetig differenzierbar ist. Die Voraussetzung $\rho \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ vereinfacht aber den Beweis.

Beweis. Da $N_y(x) = N_0(y - x)$, erhält man mit der Substitution $z = y - x$

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} N_0(z) \rho(x + z) d^n z.$$

Da die Funktion N_0 lokal integrierbar ist (vgl. Beispiel (8.1)), gilt für jeden Differentialoperator D^α der Ordnung $|\alpha| \leqslant 2$

$$D^\alpha u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} N_0(z) D^\alpha \rho(x + z) d^n z$$

(§ 11, Satz 2), also $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und

$$\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} N_0(z) \Delta \rho(x + z) d^n z.$$

Wir halten jetzt x fest und wählen $R \in \mathbb{R}_+$ so groß, dass

$$\rho_x(z) := \rho(x + z) = 0 \quad \text{für} \quad \|z\| \geqslant R.$$

Wir setzen

$$A_\varepsilon := \{z \in \mathbb{R}^n : \varepsilon \leqslant \|z\| \leqslant R\}, \qquad (0 < \varepsilon < R).$$

Dann gilt

$$\Delta u(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{A_\varepsilon} N_0(z)\Delta\rho_x(z)d^nz.$$

Da $\Delta N_0 = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus 0$, folgt mit der Greenschen Integralformel (§ 15, Satz 4)

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &:= \int_{A_\varepsilon} N_0\Delta\rho_x d^nz = \int_{A_\varepsilon}(N_0\Delta\rho_x - \rho_x\Delta N_0)d^nz \\ &= \int_{\partial A_\varepsilon}\left(N_0\frac{\partial\rho_x}{\partial\nu} - \rho_x\frac{\partial N_0}{\partial\nu}\right)dS. \end{aligned}$$

Der Rand ∂A_ε besteht aus den beiden Sphären $\{\|z\| = R\}$ und $\{\|z\| = \varepsilon\}$. Auf $\{\|z\| = R\}$ verschwindet das Randintegral. Auf dem Randstück $\{\|z\| = \varepsilon\}$ gilt

$$\nu(z) = -\overline{\nu}(z),$$

wobei ν das äußere Normalen-Einheitsfeld von A_ε und $\overline{\nu}$ dasjenige von $\{\|z\| \leqslant \varepsilon\}$ bezeichnet (Bild 16.1).

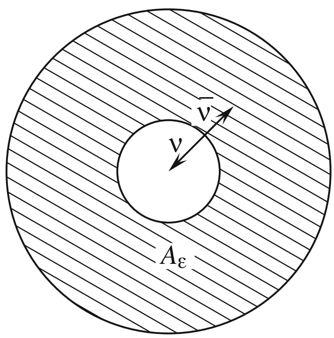


Bild 16.1

Daraus folgt

$$I_\varepsilon = \int_{\|z\|=\varepsilon}\left(\rho_x\frac{\partial N_0}{\partial\overline{\nu}} - N_0\frac{\partial\rho_x}{\partial\overline{\nu}}\right)dS.$$

Hilfssatz 1 ergibt nun

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = \rho_x(0) = \rho(x), \quad \text{q.e.d.}$$

Satz 2. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $A \subset U$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Weiter sei $\varphi : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit*

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{in} \quad \mathring{A}.$$

Dann gilt für jeden Punkt $a \in \mathbb{R}^n \setminus \partial A$

$$\int_{\partial A}\left(\varphi\frac{\partial N_a}{\partial\nu} - N_a\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)dS = \begin{cases} \varphi(a) & \textit{für} \quad a \in \mathring{A} = A \setminus \partial A, \\ 0 & \textit{für} \quad a \in \mathbb{R}^n \setminus A. \end{cases}$$

Beweis.

i) Im Fall $a \in \mathbb{R}^n \smallsetminus A$ ist die Funktion N_a in einer Umgebung von A zweimal stetig differenzierbar mit $\Delta N_a = 0$. Es folgt also aus der Greenschen Integralformel (§ 15, Satz 4)

$$\int_{\partial A} \left(\varphi \frac{\partial N_a}{\partial \nu} - N_a \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) dS = \int_A (\varphi \Delta N_a - N_a \Delta \varphi) dV = 0.$$

ii) Es bleibt noch der Fall $a \in \mathring{A}$ zu behandeln. Es gibt dann ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass

$$K_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leqslant \varepsilon\} \subset \mathring{A} \quad \text{für alle} \quad \varepsilon \leqslant \varepsilon_0.$$

Wir setzen

$$A_\varepsilon := A \smallsetminus \mathring{K}_\varepsilon.$$

Wie in i) folgt aus der Greenschen Formel

$$\int_{\partial A_\varepsilon} \left(\varphi \frac{\partial N_a}{\partial \nu} - N_a \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) dS = 0.$$

Der Rand ∂A_ε ist disjunkte Vereinigung von ∂A und ∂K_ε. Auf ∂K_ε gilt $\nu = -\overline{\nu}$, wobei ν das außere Normalen-Einheitsfeld von A_ε und $\overline{\nu}$ dasjenige von K_ε bezeichnet. Also ergibt sich

$$\int_{\partial A} \left(\varphi \frac{\partial N_a}{\partial \nu} - N_a \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) dS = \int_{\partial K_\varepsilon} \left(\varphi \frac{\partial N_a}{\partial \overline{\nu}} - N_a \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{\nu}} \right) dS.$$

Das Integral rechter Hand konvergiert nach Hilfssatz 1 für $\varepsilon \to 0$ gegen $\varphi(a)$. Da die linke Seite aber unabhängig von ε ist, folgt

$$\int_{\partial A} \left(\varphi \frac{\partial N_a}{\partial \nu} - N_a \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) dS = \varphi(a), \quad \text{q.e.d.}$$

Satz 3 (Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $\varphi : U \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Sei $a \in U$ und $r > 0$ mit*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leqslant r\} \subset U.$$

Dann gilt

$$\varphi(a) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\|\xi\|=1} \varphi(a + r\xi) dS(\xi).$$

Beweis. Nach Satz 2 gilt

$$\varphi(a) = \int_{\|x-a\|=r} \left(\varphi(x) \frac{\partial N_a(x)}{\partial \nu} - N_a(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \nu} \right) dS(x).$$

Wir werten die beiden Summanden einzeln aus:

$$\begin{aligned} I &:= \int_{\|x-a\|=r} \varphi(x)\frac{\partial N_a(x)}{\partial \nu}dS(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\|x-a\|=r} \varphi(x)\frac{1}{r^{n-1}}dS(x) \\ &= \frac{1}{\omega_n}\int_{\|\xi\|=1} \varphi(a+r\xi)dS(\xi). \end{aligned}$$

Es bleibt also zu zeigen, dass das Integral

$$II := -\int_{\|x-a\|=r} N_a(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial \nu}dS(x)$$

verschwindet. Auf der Sphäre $\{\|x-a\| = r\}$ ist $N_a(x)$ konstant (d.h. nur von r, aber nicht von x abhängig), es genügt also zu zeigen, dass

$$\int\limits_{\|x-a\|=r} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}dS = 0.$$

Dazu verwenden wir wieder die Greensche Integralformel

$$\begin{aligned} \int\limits_{\|x-a\|=r} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}dS &= \int\limits_{\|x-a\|=r} \left(1\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi\frac{\partial 1}{\partial \nu}\right)dS \\ &= \int\limits_{\|x-a\|\leqslant r} (1\Delta\varphi - \varphi\Delta 1)d^n x = 0, \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Wir können jetzt das Maximum-Prinzip für harmonische Funktionen beweisen. Dabei verwenden wir folgende Bezeichnung:

Eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *zusammenhängend*, wenn je zwei Punkte $a, b \in U$ durch eine Kurve in U verbunden werden können, d.h. eine stetige Abbildung

$$\alpha : [0,1] \to U$$

existiert mit $\alpha(0) = a$ und $\alpha(1) = b$. Eine offene zusammenhängende Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Gebiet*.

Satz 4 (Maximumprinzip für harmonische Funktionen)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\varphi : U \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Nimmt φ in einem Punkt $a \in U$ ihr Maximum an, so ist φ konstant.*

Beweis.

a) Wir setzen

$$M := \varphi(a) = \sup\{\varphi(x) : x \in U\}.$$

Wir zeigen zunächst: Sei $x \in U$ ein Punkt mit $\varphi(x) = M$ und $\varepsilon > 0$ so, dass die Kugel

$$B(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y-x\| < \varepsilon\}$$

ganz in U liegt. Dann gilt $\varphi(y) = M$ für alle $y \in B(x, \varepsilon)$. Denn für jedes $r \in]0, \varepsilon[$ folgt aus der Mittelwert-Eigenschaft

$$M = \varphi(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\|\xi\|=1} \varphi(x + r\xi) dS(\xi),$$

dass

$$\int_{\|\xi\|=1} \{M - \varphi(x + r\xi)\} dS(\xi) = 0$$

Da $M - \varphi(x + r\xi) \geqslant 0$, kann wegen der Stetigkeit von φ diese Gleichung nur dann gelten, wenn $\varphi(x + r\xi) = M$ für alle $\|\xi\| = 1$.

b) Wäre φ nicht konstant, gäbe es einen Punkt $b \in U$ mit $\varphi(b) < M$. Wir wählen eine Kurve $\alpha : [0, 1] \to U$, die a mit b verbindet, d.h. $\alpha(0) = a$ und $\alpha(1) = b$. Sei

$$t^* := \sup\{t \in [0, 1] : \varphi(\alpha(t)) = M\}.$$

Wegen der Stetigkeit der Funktion $\varphi \circ \alpha$ gilt auch $\varphi(\alpha(t^*)) = M$ und wegen $\varphi(b) < M$ ist $t^* < 1$. Nach der in a) bewiesenen Eigenschaft gibt es dann ein $t' > t^*$ mit $\varphi(\alpha(t')) = M$. Dies steht aber im Widerspruch zur Definition von t^*. Also ist φ doch konstant.

Bemerkung. Beim Beweis des Maximumprinzips wurde nur ausgenützt, dass die Funktion φ stetig ist und die Mittelwerteigenschaft hat.

Corollar 1. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $\varphi : \overline{U} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in U harmonisch ist. Dann nimmt die Funktion φ ihr Maximum und ihr Minimum auf dem Rand von U an.*

Beweis. Da $\overline{U}$ kompakt ist, nimmt φ sein Maximum auf $\overline{U}$ an (An. 2, §3, Satz 7). Liegt das Maximum nicht auf dem Rand ∂U, so wird das Maximum in einem Punkt von $U = \overline{U} \setminus \partial U$ angenommen. Nach Satz 4 muss dann aber φ konstant sein, nimmt also das Maximum doch am Rand an. Für das Minimum betrachte man die Funktion $-\varphi$ anstelle von φ.

Corollar 2. *Sei $n \geqslant 3$ und $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger. Dann besitzt die Differentialgleichung*

$$\Delta u = \rho$$

genau eine Lösung $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$(*) \qquad \lim_{\|x\| \to \infty} |u(x)| = 0.$$

Beweis. Die in Satz 1 konstruierte Lösung u hat die Eigenschaft $(*)$, da für das Newton-Potential gilt

$$\lim_{\|x\| \to \infty} N_y(x) = 0.$$

Sei u_1 eine weitere Lösung mit (∗). Dann gilt für die Differenz $v := u - u_1$

$$\Delta v = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\|x\|\to\infty} |v(x)| = 0.$$

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein $R > 0$, so dass

$$|v(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad \|x\| \geqslant R.$$

Die Funktion $v \mid \{\|x\| \leqslant R\}$ nimmt ihr Maximum und Minimum auf dem Rand $\{\|x\| = R\}$ an. Deshalb ist

$$|v(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist v identisch null.

Dirichletsches Randwertproblem

Unter dem Dirichletschen Randwertproblem für ein beschränktes Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ versteht man das folgende:

Gegeben sei eine stetige Funktion

$$f : \partial G \to \mathbb{R}$$

auf dem Rande von G. Gesucht wird eine stetige Funktion $u : \overline{G} \to \mathbb{R}$, die in G harmonisch ist und die vorgegebenen Randwerte annimmt, d.h.

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } G \qquad \text{und} \qquad u \mid \partial G = f.$$

Aus Corollar 1 zu Satz 2 folgt sofort, dass die Lösung des Dirichletschen Randwertproblems, falls sie existiert, eindeutig bestimmt ist. Denn die Differenz zweier Lösungen ist in G harmonisch und nimmt die Randwerte 0 an, muss also auch im Innern gleich 0 sein. Wir wollen das Dirichletsche Randwertproblem für die Einheitskugel

$$B := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$$

durch eine Integralformel lösen. Dazu brauchen wir einige Vorbereitungen. Wir definieren den sog. *Poissonschen Integralkern*

$$P : \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \neq y\} \to \mathbb{R}$$

durch

$$P(x,y) := \frac{1}{\omega_n} \cdot \frac{\|y\|^2 - \|x\|^2}{\|y-x\|^n},$$

wobei ω_n die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel ist.

Lemma.

a) *Für festes $y \in \mathbb{R}^n$ ist die Funktion*

$$x \mapsto P(x,y)$$

harmonisch in $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$.

b) *Für jedes* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *mit* $\|\xi\| < 1$ *gilt*

$$\int_{\|y\|=1} P(\xi, y)\, dS(y) = 1.$$

Beweis.

a) Dies bestätigt man durch einfaches Nachrechnen.

b) Falls $\xi = 0$ und $\|y\| = 1$, ist

$$P(0, y) = \frac{1}{\omega_n},$$

die Behauptung also trivial.

Wir können deshalb $\xi \neq 0$ voraussetzen und definieren den Punkt $\xi^* \in \mathbb{R}^n$ durch

$$\xi^* := \frac{1}{\|\xi\|^2} \cdot \xi.$$

(Es gilt also $\|\xi^*\| = \frac{1}{\|\xi\|}$.)

Wir wenden Satz 2 auf $A = \overline{B}$ und die Funktion $\varphi = 1$ an und erhalten

$$\int_{\|y\|=1} \frac{\partial}{\partial \nu} N_\xi(y)\, dS(y) = 1, \qquad \int_{\|y\|=1} \frac{\partial}{\partial \nu} N_{\xi^*}(y)\, dS(y) = 0.$$

Dabei ist $\frac{\partial}{\partial \nu}$ die Ableitung in Richtung der äußeren Normalen der Einheitskugel, $\nu(y) = y$. Die Behauptung ist deshalb bewiesen, wenn wir zeigen können, dass für $\|\xi\| < 1$ und $\|y\| = 1$ gilt

$$P(\xi, y) = \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ N_\xi(y) - \frac{1}{\|\xi\|^{n-2}} N_{\xi^*}(y) \right\}.$$

Beweis hierfür. Wir stellen zunächst fest, dass

$$\|\xi\| \cdot \|y - \xi^*\| = \left\| \|\xi\| y - \frac{1}{\|\xi\|} \xi \right\| = \|y - \xi\|.$$

Es gilt

$$\operatorname{grad}_y N_\xi(y) = \frac{1}{\omega_n} \cdot \frac{y - \xi}{\|y - \xi\|^n}$$

und

$$\operatorname{grad}_y \left(\frac{1}{\|\xi\|^{n-2}} N_{\xi^*}(y) \right) = \frac{1}{\omega_n \|\xi\|^{n-2}} \cdot \frac{y - \xi^*}{\|y - \xi^*\|^n} = \frac{\|\xi\|^2}{\omega_n} \frac{y - \xi^*}{\|y - \xi\|^n}.$$

Wegen $\frac{\partial}{\partial\nu} = \langle\nu, \mathrm{grad}\rangle$ folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\nu}\Big\{N_\xi(y) - \frac{1}{\|\xi\|^{n-2}}N_{\xi^*}(y)\Big\} &= \frac{1}{\omega_n\|y-\xi\|^n}\{\langle y-\xi, y\rangle - \|\xi\|^2\langle y-\xi^*, y\rangle\} \\
&= \frac{1}{\omega_n\|y-\xi\|^n}\{1-\|\xi\|^2 - \langle\xi, y\rangle + \|\xi\|^2\langle\xi^*, y\rangle\} \\
&= \frac{1-\|\xi\|^2}{\omega_n\|y-\xi\|^n} = P(\xi, y), \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Satz 5 (Lösung des Dirichletschen Randwertproblems für die Einheitskugel)**.** *Auf dem Rand der Einheitskugel $B \subset \mathbb{R}^n$ sei eine stetige Funktion $f : \partial B \to \mathbb{R}$ vorgegeben. Definiert man $u : \overline{B} \to \mathbb{R}$ durch das Poisson-Integral*

$$u(x) := \int_{\|y\|=1} P(x,y)f(y)dS(y) \qquad \textit{für} \quad \|x\| < 1,$$

und

$$u(x) := f(x) \qquad \textit{für} \quad \|x\| = 1,$$

so ist u in $\overline{B}$ stetig und in B harmonisch.

Beweis. Dass u in B harmonisch ist, folgt daraus, dass man unter dem Integral differenzieren darf und die Funktion $x \mapsto P(x,y)$ harmonisch ist. Es ist also nur noch die Stetigkeit von u am Rande von B zu beweisen. Sei $x_0 \in \partial B$. Wir haben zu zeigen

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ \|x\|<1}} (u(x) - f(x_0)) = 0.$$

Aus Teil b) des Lemmas folgt

$$f(x_0) = \int_{\|y\|=1} P(x,y)f(x_0)dS(y),$$

also

$$u(x) - f(x_0) = \int_{\|y\|=1} P(x,y)\,(f(y) - f(x_0))\,dS(y).$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt dann ein $\rho > 0$, so dass

$$|f(y) - f(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle} \quad y \in \partial B \quad \text{mit} \quad \|y - x_0\| \leqslant \rho.$$

Wir zerlegen nun den Integrationsbereich $\partial B = \{\|y\| = 1\}$ in zwei Teile:

$$A_1 := \{y \in \partial B : \|y - x_0\| \leqslant \rho\}, \qquad A_2 := \{y \in \partial B : \|y - x_0\| > \rho\}.$$

Setzen wir

$$I_j(x) := \int_{A_j} P(x,y)(f(y) - f(x_0))dS(y) \quad \text{für} \quad j = 1, 2,$$

so gilt

$$u(x) - f(x_0) = I_1(x) + I_2(x).$$

Wir schätzen jetzt I_1 und I_2 einzeln ab.

1) Da $P(x,y) > 0$ für $x \in B,\ y \in \partial B$, gilt

$$|I_1(x)| \leqslant \int_{A_1} P(x,y)\frac{\varepsilon}{2} dS(y) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_{\partial B} P(x,y)dS(y) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

2) Sei $M := \sup\{|f(y)| : y \in \partial B\}$. Dann gilt stets

$$|f(y) - f(x_0)| \leqslant 2M,$$

also

$$|I_2(x)| \leqslant 2M \int_{A_2} P(x,y)dS(y).$$

Wir wollen jetzt

$$P(x,y) = \frac{1}{\omega_n}\frac{1-\|x\|^2}{\|y-x\|^n}$$

nach oben abschätzen. Sei

$$\delta := \min\left\{\frac{\rho}{2}, \frac{\varepsilon}{8M}\left(\frac{\rho}{2}\right)^n\right\}.$$

Falls $\|x - x_0\| \leqslant \delta$ und $y \in A_2$, gilt

$$1 - \|x\|^2 = (1+\|x\|)(1-\|x\|) \leqslant 2\|x - x_0\| \leqslant 2\delta$$

und

$$\|y - x\| \geqslant \|y - x_0\| - \|x - x_0\| \geqslant \rho - \delta \geqslant \frac{\rho}{2},$$

also

$$\frac{1-\|x\|^2}{\|y-x\|^n} \leqslant \frac{2\delta}{(\rho/2)^n} \leqslant \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Daraus ergibt sich

$$|I_2(x)| \leqslant \frac{2M}{\omega_n}\int_{A_2} \frac{\varepsilon}{4M} dS(y) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aus 1) und 2) erhalten wir insgesamt

$$|u(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x \in B \quad \text{mit} \quad \|x - x_0\| \leqslant \delta.$$

Damit ist Satz 5 bewiesen.

Corollar 3. *Sei* $r > 0$,

$$B(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$$

und $u : \overline{B(r)} \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion, die in* $B(r)$ *harmonisch ist. Dann gilt für alle* $x \in B(r)$ *die Poissonsche Integralformel*

$$u(x) = \int_{\|y\|=r} P_r(x,y)u(y)dS(y),$$

wobei

$$P_r(x,y) := \frac{1}{r\omega_n} \frac{\|y\|^2 - \|x\|^2}{\|x-y\|^n}.$$

Beweis. Durch die Substitution $x,\ y \mapsto x/r,\ y/r$, kann man sich auf den Fall $r = 1$ beschränken. Setzt man

$$v(x) := \int_{\|y\|=1} P(x,y)u(y)dS(y),$$

so ist v nach Satz 5 Lösung des Dirichletschen Randwertproblems mit den Randwerten $u \mid \partial B(1)$. Da aber die Lösung dieses Randwertproblems eindeutig bestimmt ist, muss $u = v$ gelten.

Corollar 4. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *eine offene Menge und*

$$u_k : U \to \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N},$$

eine Folge von in U *harmonischen Funktionen, die auf jedem kompakten Teil von* U *gleichmäßig gegen eine Funktion*

$$u : U \to \mathbb{R}$$

konvergiere. Dann ist auch u *harmonisch.*

Beweis. Da die Konvergenz $u_k \to u$ auf jedem kompakten Teil von U gleichmäßig ist, folgt zunächst, dass u stetig ist (An. 2, §2, Satz 9). Um zu beweisen, dass u sogar harmonisch ist, wählen wir einen beliebigen Punkt $a \in U$ und ein $r > 0$ so, dass die Kugel

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| < r\}$$

einschließlich ihre Randes in U liegt und zeigen, dass u in $B(a,r)$ harmonisch ist. Wir dürfen $a = 0$ annehmen (sonst Translation des Koordinatensystems). Nach Corollar 3 gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$ und alle $x \in B(0,r)$

$$u_k(x) = \int_{\|y\|=r} P_r(x,y)u_k(y)dS(y).$$

Da u_k auf $\{\|y\| = r\}$ gleichmäßig gegen u konvergiert, kann man Limesbildung und Integration vertauschen und erhält

$$u(x) = \int_{\|y\|=r} P_r(x,y)u(y)dS(y).$$

Daraus folgt aber (nach Satz 5), dass u in $B(0,r)$ harmonisch ist, q.e.d.

Corollar 5. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche die Mittelwerteigenschaft besitzt, d.h. für jede in U enthaltene Kugel*

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| \leqslant r\} \subset U$$

gelte

$$f(a) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\|\xi\|=1} f(a+r\xi)dS(\xi).$$

Dann ist f harmonisch.

Beweis. Sei $\overline{B}(a,r) \subset U$. Wir zeigen, dass f in $B(a,r)$ harmonisch ist. Nach Satz 5 gibt es eine stetige Funktion $u : \overline{B}(a,r) \to \mathbb{R}$ mit

$$u \mid \partial B(a,r) = f \mid \partial B(a,r),$$

die in $B(a,r)$ harmonisch ist. Die Funktion $v := f - u$ besitzt deshalb in $B(a,r)$ die Mittelwerteigenschaft, nimmt also nach der Bemerkung zu Satz 4 ihr Maximum und Minimum auf dem Rand $\partial B(a,r)$ an. Da aber $v \mid \partial B(a,r) = 0$, ist v identisch null, d.h. $f = u$, also f harmonisch in $B(a,r)$.

AUFGABEN

16.1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$ und

$$e_a : U \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$$

eine Funktion mit folgender Eigenschaft: Es gibt eine harmonische Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, so dass

$$e_a = N_a + f,$$

wobei N_a das Newton-Potential ist. Weiter sei $A \subset U$ ein Kompaktum mit glattem Rand, so dass $a \in \mathring{A}$.

Man zeige: Für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $\varphi : U \to \mathbb{R}$ gilt

$$\varphi(a) = \int_{\partial A} \left(\varphi \frac{\partial e_a}{\partial \nu} - e_a \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) dS + \int_A e_a \Delta\varphi \, dV.$$

16.2. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : U \to \mathbb{R}$ harmonisch, d.h. zweimal stetig differenzierbar mit $\Delta\varphi = 0$. Man zeige, dass φ beliebig oft stetig differenzierbar ist.

Anleitung. Man verwende die Poissonsche Integralformel (Corollar 3 zu Satz 5).

16.3. Sei $B(R) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < R\}$ und

$$u : B(R) \to \mathbb{R}_+$$

eine nicht-negative harmonische Funktion. Man beweise mit Hilfe der Poissonschen Integralformel (angewendet auf die Kugeln $\overline{B}(r)$, $r < R$) die *Harnacksche Ungleichung*: Für alle $x \in B(R)$ gilt

$$\frac{1 - \|x\|/R}{(1 + \|x\|/R)^{n-1}} u(0) \leqslant u(x) \leqslant \frac{1 + \|x\|/R}{(1 - \|x\|/R)^{n-1}} u(0).$$

16.4. Mit Hilfe der Harnackschen Ungleichung beweise man: Jede nach oben (bzw. nach unten) beschränkte harmonische Funktion

$$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

ist konstant (Satz von Liouville für harmonische Funktion).

16.5. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant \ldots \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant \ldots$$

eine monoton wachsende Folge harmonischer Funktionen $u_k : G \to \mathbb{R}$. Man zeige mit Hilfe der Harnackschen Ungleichung: Gibt es einen Punkt $x_0 \in G$ mit

$$\lim_{k \to \infty} u_k(x_0) < \infty,$$

so konvergiert die Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ auf jedem kompakten Teil von G gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion $u : G \to \mathbb{R}$.

16.6. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige beschränkte Funktion. Die Funktion

$$u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto u(x,y),$$

werde definiert durch

$$u(x,y) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{|x-t|^2 + y^2} f(t)\,dt \quad \text{für} \quad y > 0, \quad u(x,0) := f(x).$$

Man zeige: u ist in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ stetig und in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ harmonisch.

§ 17 Distributionen

In diesem Paragraphen führen wir den Begriff der Distribution ein. Distributionen sind verallgemeinerte Funktionen. Die Klasse der Distributionen hat viele angenehme Eigenschaften, die innerhalb der kleineren Klasse der stetigen Funktionen nicht gelten. Z.B. ist jede Distribution beliebig oft differenzierbar; bei Distributionen ist Limesbildung und Differentiation immer vertauschbar. Die Distributionen spielen eine wichtige Rolle in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen; z.B. lässt sich der Begriff der Fundamental-Lösung (die im vorigen Paragraphen behandelten Newton-Potentiale sind ein Spezialfall davon) erst in der Theorie der Distributionen befriedigend definieren. Wir bestimmen in diesem Paragraphen Fundamental-Lösungen für die Potentialgleichung, die Helmholtzsche Schwingungsgleichung und die Wärmeleitungsgleichung.

Der Raum der Testfunktionen $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Wir führen folgende Bezeichnung ein:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) := C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

oder kurz $\mathcal{D}$ sei der Vektorraum aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Wir führen in $\mathcal{D}$ folgenden Konvergenzbegriff ein: Wir sagen, eine Folge $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ von Funktionen aus $\mathcal{D}$ konvergiere gegen eine Funktion $\varphi \in \mathcal{D}$, in Zeichen

$$\varphi_\nu \underset{\mathcal{D}}{\longrightarrow} \varphi,$$

falls gilt:

i) Es gibt ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\mathrm{Supp}(\varphi_\nu) \subset K$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset K$.

ii) Für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^n$ konvergiert die Folge der Ableitungen $D^\alpha\varphi_\nu$ für $\nu \to \infty$ gleichmäßig auf K gegen $D^\alpha\varphi$.

Die Konvergenz in $\mathcal{D}$ ist also eine viel stärkere Bedingung als die punktweise oder gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen.

Definition. Eine Distribution im $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige lineare Abbildung

$$T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto T[\varphi].$$

Dabei bedeutet die Stetigkeit von T, dass aus $\varphi_\nu \underset{\mathcal{D}}{\longrightarrow} \varphi$ stets folgt $T[\varphi_\nu] \to T[\varphi]$.

Die Menge aller Distributionen im $\mathbb{R}^n$ bildet in natürlicher Weise einen Vektorraum, der mit $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ oder kurz $\mathcal{D}'$ bezeichnet wird.

O. Forster, *Analysis 3*, Aufbaukurs Mathematik,
DOI 10.1007/978-3-8348-2374-8_17, © Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden 2012

Beispiele

(17.1) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ sei

$$T_f[\varphi] := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)d^n x.$$

Es ist klar, dass die Abbildung $\varphi \mapsto T_f[\varphi]$ linear und stetig ist, also eine Distribution definiert. Sind $f_1, f_2 \in C(\mathbb{R}^n)$ zwei Funktionen mit

$$T_{f_1}[\varphi] = T_{f_2}[\varphi] \qquad \text{für alle} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

so folgt $f_1 = f_2$ (vgl. § 10, Hilfssatz 1). Deshalb ist die (lineare) Abbildung

$$C(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \quad f \mapsto T_f,$$

injektiv. Man kann deshalb die stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ mit den ihnen zugeordneten Distributionen identifizieren.

(17.2) Etwas allgemeiner als im vorigen Beispiel sei $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Dann wird ebenfalls durch

$$T_f[\varphi] := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)d^n x \quad \text{für} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

eine Distribution definiert. Die Abbildung

$$\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \quad f \mapsto T_f,$$

ist jedoch nicht injektiv, ihr Kern besteht aus allen Funktionen, die Lebesgue-fast überall gleich null sind.

(17.3) Diracsche Deltadistribution. Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ setzt man

$$\delta_a[\varphi] := \varphi(a).$$

Dadurch wird eine Distribution $\delta_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ definiert, die Diracsche Deltadistribution zum Punkt a. Sie kann nicht durch eine Funktion wie in Beispiel (17.1) oder (17.2) dargestellt werden.

Man kann jedoch die Distribution als Limes von Funktionen darstellen. Dazu führen wir folgenden Konvergenzbegriff für Distributionen ein.

Definition. Seien $T_\nu \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\nu \in \mathbb{N}$, und $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ Distributionen. Man sagt, die Folge $(T_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ konvergiere in $\mathcal{D}'$ gegen T, in Zeichen

$$T_\nu \xrightarrow[\mathcal{D}']{} T,$$

falls

$$T_\nu[\varphi] \to T[\varphi] \quad \text{für alle} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Die letzte Konvergenz ist dabei die gewöhnliche Konvergenz von reellen Zahlenfolgen. Die Konvergenz von Distributionen wird so mit Funktionen $\varphi \in \mathcal{D}$ „getestet“.

(17.4) Sei $f_\nu \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, $\nu \in \mathbb{N}$, eine Folge von Funktionen, die auf jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ gleichmäßig gegen die Funktion $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ konvergiere. Für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt dann

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_\nu(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx,$$

also

$$T_{f_\nu} \xrightarrow[\mathcal{D}']{} T_f.$$

Im folgenden Satz lernen wir einen Fall kennen, in dem eine divergente Funktionenfolge im Sinne der Distributionen konvergiert.

Satz 1. *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$ mit*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)d^n x = 1.$$

Für $\varepsilon > 0$ sei

$$f_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Dann gilt für jede Funktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)\varphi(x)d^n x = \varphi(0),$$

d.h. $\quad T_{f_\varepsilon} \xrightarrow[\mathcal{D}']{} \delta_0 \quad$ für $\quad \varepsilon \searrow 0.$

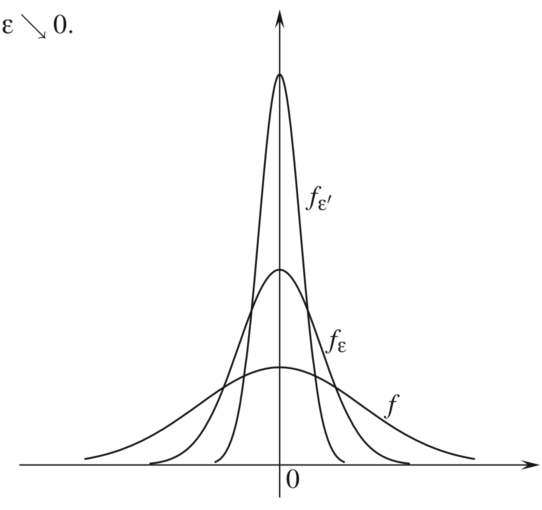


Bild 17.1

Bemerkung. Sei f etwa eine glockenförmige Funktion, wie in Bild 17.1 angedeutet. Die Funktionen f_ε sind für $\varepsilon \searrow 0$ immer mehr um den Nullpunkt konzentriert und steiler. Deshalb stellt man sich manchmal δ_0 als eine Funktion vor, für die $\delta_0(x) = 0$ für $x \neq 0$, die aber im Nullpunkt so stark unendlich wird, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta_0(x)\varphi(x)d^n x = \varphi(0)$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}$. Natürlich ist diese Vorstellung unkorrekt, eine solche Funktion gibt es nicht (da $\delta_0(x)\varphi(x) = 0$ Lebesgue-fast überall, müsste das Integral verschwinden). Die korrekte Aussage wird durch den Inhalt von Satz 1 gegeben.

Statt $T_{f_\varepsilon} \xrightarrow[\mathcal{D}']{} \delta_0$ schreibt man auch suggestiver

$$f_\varepsilon \xrightarrow[\mathcal{D}']{} \delta_0.$$

Beweis von Satz 1. Mit der Substitution $x = \varepsilon y$ erhalten wir

$$\int f_\varepsilon(x)\varphi(x)d^nx = \int \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi(x)d^nx = \int f(y)\varphi(\varepsilon y)d^ny.$$

Sei $M := \sup\{|\varphi(x)| : x \in \mathbb{R}^n\}$. Dann gilt

$$|f(y)\varphi(\varepsilon y)| \leqslant M|f(y)| \quad \text{für alle} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{und} \quad y \in \mathbb{R}^n$$

sowie

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} f(y)\varphi(\varepsilon y) = f(y)\varphi(0).$$

Aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz (§ 5, Satz 3) folgt deshalb

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(\varepsilon y)d^ny = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(0)d^ny = \varphi(0), \quad \text{q.e.d.}$$

Differentiation von Distributionen

Es sei ein linearer Differentialoperator der Ordnung k auf dem $\mathbb{R}^n$ gegeben,

$$L = \sum_{|\alpha| \leqslant k} c_\alpha D^\alpha, \qquad c_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n),$$

vgl. § 10. Wir wollen eine Abbildung

$$L : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

so erklären, dass für alle $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$LT_f = T_{Lf},$$

d.h. dass die Anwendung von L auf f als Funktion oder als Distribution auf dasselbe hinausläuft.

Sei L^* der adjungierte Differentialoperator zu L. Dann gilt für $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Lf(x))\varphi(x)d^nx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)L^*\varphi(x)d^nx,$$

(vgl. § 10), d.h.

$$T_{Lf}[\varphi] = T_f[L^*\varphi].$$

Deshalb ist für allgemeines $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ folgende Definition sinnvoll:

$$(LT)[\varphi] := T[L^*\varphi].$$

Offensichtlich ist $LT : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ linear. LT ist aber auch stetig, denn

$$\begin{aligned} \varphi_\nu \xrightarrow[\mathcal{D}]{} \varphi \quad &\Longrightarrow \quad L^*\varphi_\nu \xrightarrow[\mathcal{D}]{} L^*\varphi \\ &\Longrightarrow \quad T[L^*\varphi_\nu] \to T[L^*\varphi], \quad (\text{da } T \text{ stetig}) \\ &\Longrightarrow \quad (LT)[\varphi_\nu] \to (LT)[\varphi]. \end{aligned}$$

Also ist LT wieder eine Distribution im $\mathbb{R}^n$.

Wir wollen noch schnell zeigen, dass für Distributionen Differentiation und Limesbildung vertauschbar sind, d.h.

$$T_\nu \xrightarrow[\mathcal{D}']{} T \quad \Rightarrow \quad LT_\nu \xrightarrow[\mathcal{D}']{} LT.$$

Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ beliebig. Es ist zu zeigen, dass

$$\lim_{\nu\to\infty} (LT_\nu)[\varphi] = (LT)[\varphi].$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\lim_{\nu\to\infty} T_\nu[L^*\varphi] = T[L^*\varphi].$$

Letzteres folgt aber aus $T_\nu \xrightarrow[\mathcal{D}']{} T$.

Beispiele

(17.5) Für $\nu > 0$ sei $f_\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f_\nu(x) := \sin \nu x, \qquad \text{vgl. Bild 17.2.}$$

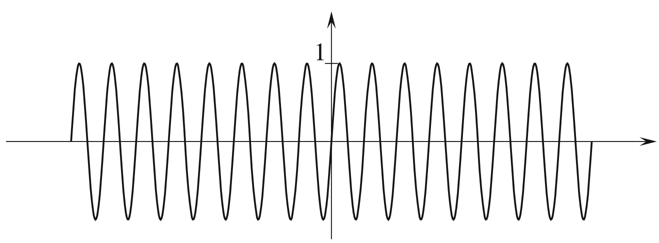


Bild 17.2

Wir wollen zeigen, dass

$$f_\nu \xrightarrow[\mathcal{D}']{} 0, \qquad (\text{d.h. } T_{f_\nu} \xrightarrow[\mathcal{D}']{} 0).$$

(Als Funktionenfolge ist (f_ν) natürlich nicht konvergent.)

Wir betrachten dazu die Funktionen

$$g_\nu(x) := -\frac{1}{\nu}\cos \nu x.$$

Da die Funktionenfolge (g_ν) gleichmäßig gegen 0 konvergiert, gilt nach (17.4)

$$g_\nu \xrightarrow[\mathcal{D}']{} 0.$$

Differenzieren ergibt

$$f_\nu \xrightarrow[\mathcal{D}']{} 0.$$

(17.6) Sei $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die *Heavysidesche Sprungfunktion*,

$$H(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0, \\ 1 & \text{für} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

Die Funktion H ist im Nullpunkt nicht differenzierbar. Fasst man H als Distribution auf, so kann man differenzieren. Wir zeigen

$$DH = \delta_0 \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

d.h. genauer $DT_H = \delta_0$. Dabei ist $D = \frac{d}{dx}$.

Beweis. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gilt nach Definition

$$(DT_H)[\varphi] = T_H[-D\varphi] = -\int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = -\int_0^R \varphi'(x)dx,$$

falls $\varphi(x) = 0$ für $x \geqslant R$. Also ist

$$(DT_H)[\varphi] = -\varphi(x)\big|_0^R = \varphi(0) = \delta_0[\varphi],$$

d.h. $DT_H = \delta_0$.

Bemerkung. Für den Spezialfall der Differentialoperatoren der Ordnung 0 ist auch die Multiplikation einer Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit einer Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ definiert. Die Definitionsgleichung lautet

$$(fT)[\varphi] = T[f\varphi] \quad \text{für} \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Fundamental-Lösungen

Sei L ein linearer Differentialoperator im $\mathbb{R}^n$. Unter einer Fundamental-Lösung (oder Elementar-Lösung) von L bzgl. eines Punktes a versteht man eine Distribution $E_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, so dass

$$LE_a = \delta_a.$$

Dabei ist δ_a Dirac-Distribution zum Punkt a, siehe Beispiel (17.3).

Ein Beispiel für Fundamental-Lösungen sind die im vorigen Paragraphen eingeführten Newton-Potentiale N_a.

Satz 2. *Das Newton-Potential N_a ist eine Fundamental-Lösung für den Laplace-Operator Δ bzgl. des Punktes $a \in \mathbb{R}^n$, d.h.*

$$\Delta N_a = \delta_a.$$

Bemerkung. Die Funktion N_a ist lokal integrierbar, also ist nach Beispiel (17.2) die Distribution T_{N_a} definiert. Die Gleichung $\Delta N_a = \delta_a$ ist als $\Delta T_{N_a} = \delta_a$ zu interpretieren.

Beweis. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Nach Definition ist

$$(\Delta N_a)[\varphi] = N_a[\Delta\varphi] = \int N_a(x)\Delta\varphi(x)d^n x, \quad \delta_a[\varphi] = \varphi(a).$$

Es ist also zu zeigen

$$\int N_a(x)\Delta\varphi(x)d^n x = \varphi(a).$$

Nach § 16, Satz 1, gilt für

$$u(z) := \int_{\mathbb{R}^n} N_y(z)\varphi(y)d^n y$$

$$\Delta u(z) = \varphi(z).$$

Da $N_y(z) = N_0(y-z)$ ergibt sich nach Substitution $\xi = y - z$

$$u(z) = \int N_0(\xi)\varphi(\xi + z)d^n\xi,$$

also

$$\varphi(z) = \Delta u(z) = \int N_0(\xi)\Delta\varphi(\xi + z)d^n\xi.$$

Nochmalige Substitution $x = \xi + z$ liefert

$$\varphi(z) = \int N_0(x-z)\Delta\varphi(x)d^n x = \int N_z(x)\Delta\varphi(x)d^n x.$$

Für $z = a$ ergibt sich die Behauptung.

Die Helmholtzsche Schwingungsgleichung

Macht man für die Wellengleichung im $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f(x,t) = 0$$

den Ansatz

$$f(x,t) = e^{i\omega t}u(x), \quad \omega \in \mathbb{R},$$

mit einer nur vom Ort abhängigen Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so erhält man wegen

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}e^{i\omega t} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 e^{i\omega t}$$

für u die Differentialgleichung

$$(\Delta + k^2)u = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

Man nennt diese Differentialgleichung für $k \neq 0$ die Helmholtzsche Schwingungsgleichung. Wir werden für den Differentialoperator $L = \Delta + k^2$ im $\mathbb{R}^3$ eine Fundamental-Lösung bestimmen. Dazu bemerken wir zunächst, dass die Funktion

$$u(x) := \frac{\cos k\|x\|}{\|x\|}, \qquad x \neq 0,$$

eine Lösung der Helmholtzschen Schwingungsgleichung in $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ darstellt. Denn für rotationssymmetrische Funktionen in $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ lautet der Laplace-Operator (An. 2, Beispiel (5.9))

$$\Delta f(r) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) f(r), \qquad (r = \|x\|),$$

und es ist eine einfache Verifikation, dass

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + k^2\right) \frac{\cos kr}{r} = 0.$$

Satz 3. *Für alle $k \in \mathbb{R}$ ist die Funktion*

$$E(x) := -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\cos k\|x\|}{\|x\|}$$

im $\mathbb{R}^3$ lokal-integrierbar und genügt, als Distribution aufgefasst, der Differentialgleichung

$$(\Delta + k^2)E = \delta_0,$$

ist also eine Fundamental-Lösung für den Helmholtz-Operator $\Delta + k^2$ bzgl. des Nullpunkts.

Bemerkung. Eine Fundamental-Lösung E_a bzgl. eines beliebigen anderen Punktes $a \in \mathbb{R}^3$ wird dann gegeben durch

$$E_a(x) := E(x - a).$$

Beweis. Dass E im $\mathbb{R}^3$ lokal-integrierbar ist, folgt z.B. aus § 8, Beispiel (8.1).

Der Operator $\Delta + k^2$ ist selbstadjungiert. Wir haben also zu zeigen: Für jede Funktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^3} E(x)(\Delta + k^2)\varphi(x)d^3x = \varphi(0).$$

Wir wählen R so groß, dass der Träger von φ ganz in der Kugel $\{\|x\| < R\}$ enthalten ist. Es gilt dann

$$\int_{\mathbb{R}^3} E(x)(\Delta + k^2)\varphi(x)d^3x = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\varepsilon \leqslant \|x\| \leqslant R} E(x)(\Delta + k^2)\varphi(x)d^3x.$$

Da $(\Delta + k^2)E(x) = 0$ in $\{\varepsilon \leqslant \|x\| \leqslant R\}$, folgt aus der Greenschen Integralformel

$$\int_{\varepsilon \leqslant \|x\| \leqslant R} E(x)(\Delta + k^2)\varphi(x)d^3x = \int_{\|x\| = \varepsilon} \left(\frac{\partial E(x)}{\partial \nu}\varphi(x) - E(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial \nu}\right) dS(x),$$

wobei $\frac{\partial}{\partial\nu}$ die Ableitung in Richtung des äußeren Normalenvektors der Sphäre $\{\|x\| = \varepsilon\}$ bedeutet, $\nu(x) = \frac{x}{\|x\|}$. (Dies ist gleich dem Negativen des äußeren Normalenvektors an das Randstück $\{\|x\| = \varepsilon\}$ von $\{\varepsilon \leqslant \|x\| \leqslant R\}$.) Wir zeigen jetzt:

i) $$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_{\|x\|=\varepsilon} E(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial\nu} dS(x) = 0,$$

ii) $$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_{\|x\|=\varepsilon} \frac{\partial E(x)}{\partial\nu}\varphi(x) dS(x) = \varphi(0).$$

Daraus folgt dann die Behauptung.

Zu i). Da φ überall stetig differenzierbar ist, gibt es eine Konstante $M \in \mathbb{R}_+$, so dass

$$\left|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial\nu}\right| \leqslant M \quad \text{für alle } x.$$

Außerdem gilt für $\|x\| = \varepsilon$

$$|E(x)| \leqslant \frac{1}{4\pi\varepsilon},$$

also

$$\left|\int_{\|x\|=\varepsilon} E(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial\nu} dS(x)\right| \leqslant \frac{M}{4\pi\varepsilon}\int_{\|x\|=\varepsilon} dS(x) = M\varepsilon.$$

Daraus folgt Behauptung i).

Zu ii). Es ist mit $r = \|x\|$

$$\frac{\partial E(x)}{\partial\nu} = \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\cos kr}{r}\right) = \frac{\cos kr}{4\pi r^2} + \frac{k\sin kr}{4\pi r} = \frac{f(r)}{4\pi r^2},$$

wobei $\lim_{r\to 0} f(r) = 1$. Es folgt

$$\int_{\|x\|=\varepsilon} \frac{\partial E(x)}{\partial\nu}\varphi(x) dS(x) = \frac{f(\varepsilon)}{4\pi\varepsilon^2}\int_{\|x\|=\varepsilon} \varphi(x) dS(x) = \frac{f(\varepsilon)}{4\pi}\int_{\|\xi\|=1} \varphi(\varepsilon\xi) dS(\xi).$$

Da $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{4\pi}\int_{\|\xi\|=1} \varphi(\varepsilon\xi) dS(\xi) = \varphi(0)$, folgt Behauptung ii).

Damit ist Satz 3 bewiesen.

Bemerkung. In komplexer Form kann man eine Fundamental-Lösung für den Operator $\Delta + k^2$ im $\mathbb{R}^3$ auch als

$$\frac{e^{ik\|x\|}}{\|x\|}$$

angeben.

Die Wärmeleitungsgleichung

Die Wärmeleitungsgleichung im $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ lautet

$$\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x,t) = 0,$$

wobei $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ nur auf die Ortsvariablen $x = (x_1, \ldots, x_n)$ wirkt.

Satz 4. *Die Funktion $W : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch*

$$W(x,t) := \begin{cases} \dfrac{-1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\|x\|^2/4t} & \textit{für } t > 0, \\ 0 & \textit{für } t \leqslant 0. \end{cases}$$

W ist lokal-integrierbar und genügt, als Distribution aufgefasst, der Differentialgleichung

$$\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) W = \delta_0.$$

Beweis.

a) Wir stellen zunächst fest, dass W in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \smallsetminus (0,0)$ beliebig oft stetig differenzierbar ist. Dies beweist man ähnlich wie in An. 1, Beispiel (22.2). Außerdem genügt W dort der Wärmeleitungsgleichung. Dazu benützt man die Darstellung des Laplace-Operators für rotationssymmetrische Funktionen in $\mathbb{R}^n \smallsetminus 0$,

$$\Delta f(r) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) f(r),$$

vgl. An. 2, Beispiel (5.9). Man hat also nur zu verifizieren, dass

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial t}\right) t^{-n/2} e^{-r^2/4t} = 0$$

für $r > 0,\ t > 0$.

b) Für jedes $t > 0$ ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} (4\pi t)^{-n/2} e^{-\|x\|^2/4t} d^n x = 1.$$

Dies folgt aus der in § 8, Beispiel (8.5), hergeleiteten Formel

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} d^n x = \pi^{n/2}.$$

Damit ergibt sich für $T > 0$

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \times [\varepsilon, T]} |W(x,t)|\, d^n x\, dt = T,$$

insbesondere ist W lokal integrierbar.

Mit Hilfe von Satz 1 folgt außerdem für jede Funktion $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} (4\pi\varepsilon)^{-n/2} e^{-\|x\|^2/4\varepsilon} \psi(x) d^n x = \psi(0).$$

c) Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$. Da $(\Delta - \frac{\partial}{\partial t})^* = \Delta + \frac{\partial}{\partial t}$, haben wir zu zeigen

$$\varphi(0,0) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} W(x,t) \left(\Delta + \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi(x,t) d^n x \right) dt.$$

Für festes $t > 0$ ist (vgl. § 10, Beispiel (10.1))

$$\int W(x,t) \Delta\varphi(x,t) d^n x = \int (\Delta W(x,t)) \varphi(x,t) d^n x = \int \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} \varphi(x,t) d^n x,$$

also

$$\int_{\mathbb{R}^n} W(x,t) \left(\Delta + \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi(x,t) d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} (W(x,t)\varphi(x,t)) d^n x.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} W(x,t) \left(\Delta + \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi(x,t) d^n x \, dt &= - \int_{\mathbb{R}^n} W(x,\varepsilon) \varphi(x,\varepsilon) d^n x \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} W(x,\varepsilon) \varphi(x,0) d^n x - \int_{\mathbb{R}^n} W(x,\varepsilon)(\varphi(x,\varepsilon) - \varphi(x,0)) d^n x. \end{aligned}$$

Nach b) gilt für das erste Integral

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(- \int W(x,\varepsilon) \varphi(x,0) d^n x \right) = \varphi(0,0).$$

Das zweite Integral konvergiert für $\varepsilon \searrow 0$ gegen 0, da

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x,\varepsilon) - \varphi(x,0)| = 0.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Faltung von Distributionen und Funktionen

Sei $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ und $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann hat für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ die Funktion

$$y \mapsto f(y) g(x-y)$$

kompakten Träger und gehört zu $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Also ist das Faltungsintegral

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) d^n y$$

wohldefiniert. Fasst man f als Distribution auf,

$$\varphi \mapsto T_f[\varphi] = \int f(y) \varphi(y) d^n y,$$

so kann man die Faltung auch schreiben als

$$(f * g)(x) := T_f[\check{\tau}_x g],$$

wobei

$$(\check{\tau} g)(y) := g(x-y).$$

(Der Translationsoperator τ_x ist definiert durch $(\tau_x g)(y) = g(y-x)$.)

Dies gibt Anlass zu folgender

Definition. Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann wird die Faltung

$$T * \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

definiert durch

$$(T * \varphi)(x) := T[\check{\tau}_x \varphi] \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Die Faltung ist offenbar linear in beiden Argumenten, d.h.

$$\begin{aligned} (\lambda T_1 + \mu T_2) * \varphi &= \lambda(T_1 * \varphi) + \mu(T_2 * \varphi), \\ T * (\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2) &= \lambda(T * \varphi_1) + \mu(T * \varphi_2) \end{aligned}$$

für $T, T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, λ, $\mu \in \mathbb{R}$.

(17.7) Beispiel. Sei δ_0 die Delta-Distribution bzgl. des Nullpunkts,

$$\delta_0[\varphi] = \varphi(0).$$

Dann gilt für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\delta_0 * \varphi = \varphi,$$

denn

$$(\delta_0 * \varphi)(x) = \delta_0[\check{\tau}_x \varphi] = (\check{\tau}_x \varphi)(0) = \varphi(x).$$

Die Distribution δ_0 wirkt also bzgl. Faltungsprodukts als Identität.

Satz 5. *Für $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist die Funktion $T * \varphi$ beliebig oft stetig differenzierbar, d.h. $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Für den Differentialoperator $D_i = \partial/\partial x_i$ gilt*

$$D_i(T * \varphi) = (D_i T) * \varphi = T * (D_i \varphi).$$

Beweis.

a) Wir zeigen zunächst, dass $T * \varphi$ stetig ist. Da

$$(\check{\tau}_{x'} \varphi)(y) - (\check{\tau}_x \varphi)(y) = \varphi(x'-y) - \varphi(x-y),$$

gilt

$$\check{\tau}_{x'} \varphi \xrightarrow[\mathcal{D}]{} \check{\tau}_x \varphi \qquad \text{für} \quad x' \to x,$$

also

$$T[\check{\tau}_{x'}\varphi] \to T[\check{\tau}_x\varphi],$$

d.h.

$$\lim_{x' \to x} (T * \varphi)(x') = (T * \varphi)(x).$$

b) Für $h \in \mathbb{R}^*$ ist

$$\frac{1}{h}(\check{\tau}_{x+he_i}\varphi - \check{\tau}_x\varphi)(y) = \frac{1}{h}(\varphi(x+he_i-y) - \varphi(x-y)).$$

Man überlegt sich leicht, dass daraus folgt

$$\frac{1}{h}(\check{\tau}_{x+he_i}\varphi - \check{\tau}_x\varphi) \underset{\mathcal{D}}{\longrightarrow} \check{\tau}_x(D_i\varphi) \qquad \text{für} \quad h \to 0.$$

Aus der Linearität und Stetigkeit von T folgt nun

$$D_i(T * \varphi)(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(T[\check{\tau}_{x+he_i}\varphi] - T[\check{\tau}_x\varphi])$$

$$= \lim_{h \to 0} T\left[\frac{1}{h}(\check{\tau}_{x+he_i}\varphi - \check{\tau}_x\varphi)\right] = T[\check{\tau}_x D_i\varphi] = (T * D_i\varphi)(x).$$

Also ist $T * \varphi$ nach der i-ten Koordinate partiell differenzierbar und es gilt

$$D_i(T * \varphi) = T * (D_i\varphi).$$

Nach Teil a) ist diese partielle Ableitung stetig. Auf $T * (D_i\varphi)$ kann man nun dasselbe Argument nochmals anwenden,

$$D_j D_i(T * \varphi) = D_j(T * D_i\varphi) = T * (D_j D_i\varphi),$$

und man erhält durch wiederholte Anwendung, dass $T * \varphi$ beliebig oft stetig partiell differenzierbar ist, d.h. $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

c) Wegen $\dfrac{\partial\varphi(x-y)}{\partial y_i} = -\dfrac{\partial\varphi(x-y)}{\partial x_i}$ gilt

$$D_i(\check{\tau}_x\varphi) = -\check{\tau}_x(D_i\varphi),$$

also

$$D_i(T * \varphi)(x) = (T * D_i\varphi)(x) = T[\check{\tau}_x(D_i\varphi)] =$$

$$= T[-D_i(\check{\tau}_x\varphi)] = (D_iT)[\check{\tau}_x\varphi] = ((D_iT) * \varphi)(x),$$

d.h.

$$D_i(T * \varphi) = (D_iT) * \varphi, \quad \text{q.e.d.}$$

Satz 6. *Im* $\mathbb{R}^n$ *sei*

$$L = \sum_{|\alpha|\leqslant k} c_\alpha D^\alpha$$

ein linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $c_\alpha \in \mathbb{R}$. *Es sei* $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *eine Elementarlösung von* L, *d.h.*

$$LE = \delta_0.$$

Ist dann $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *beliebig, so ist die Funktion*

$$u := E * \rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$Lu = \rho.$$

Beweis. Aus Satz 5 folgt

$$Lu = L(E*\rho) = (LE)*\rho = \delta_0 * \rho = \rho.$$

Beispiele

(17.8) Wendet man Satz 6 auf die Elementarlösung des Laplace-Operators an, so erhält man wieder Satz 1 aus § 16, abgesehen von den etwas anderen Differenzierbarkeits-Voraussetzungen. (Allerdings ist dies kein neuer Beweis, da wir jenen Satz benützt haben, um zu beweisen, dass die Newton-Potentiale Elementarlösungen sind.)

(17.9) Für den Helmholtz-Operator erhält man: Im $\mathbb{R}^3$ wird eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$(\Delta + k^2)u = \rho, \qquad \rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3),$$

gegeben durch

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\cos k\|y\|}{\|y\|}\rho(x-y)d^3y = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\cos k\|y-x\|}{\|y-x\|}\rho(y)d^3y.$$

(17.10) Aus der Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung erhält man: Die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x,t) = \rho(x,t), \qquad \rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}),$$

besitzt die spezielle Lösung

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\|y\|^2/4\tau}}{(4\pi\tau)^{n/2}} \rho(x-y,t-\tau)d^ny \right) d\tau \\ &= \frac{-1}{(4\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^t \frac{1}{(t-\tau)^{n/2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{\|y-x\|^2}{4(t-\tau)}\right) \rho(y,\tau) d^ny \right) d\tau. \end{aligned}$$

AUFGABEN

17.1. Es sei $a_k \in \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{N}$, eine Punktfolge mit

$$\lim_{k\to\infty} \|a_k\| = \infty$$

und $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige reelle Zahlenfolge. Man zeige, dass die Folge

$$\sum_{k\leqslant N} c_k \delta_{a_k}$$

in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ für $N \to \infty$ gegen eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ konvergiert.

Bezeichnung:

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \delta_{a_k}.$$

17.2. Es seien $a_k \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}$, reelle Zahlen mit $a_k < a_{k+1}$ für alle k und

$$\lim_{k\to\infty} a_{-k} = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} a_k = \infty.$$

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

i) $f \mid]a_k, a_{k+1}[$ ist stetig differenzierbar für alle $k \in \mathbb{Z}$.

ii) Für alle $k \in \mathbb{Z}$ existieren die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x\nearrow a_k} f(x), \quad \lim_{x\searrow a_k} f(x), \quad \lim_{x\nearrow a_k} f'(x), \quad \lim_{x\searrow a_k} f'(x).$$

Man zeige, dass die Funktion f und f' lokal-integrierbar sind (f' ist in den Punkten a_k nicht notwendig definiert) und dass gilt

$$DT_f = T_{f'} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \delta_{a_k},$$

wobei $c_k := \lim_{x\searrow a_k} f(x) - \lim_{x\nearrow a_k} f(x)$.

17.3. Sei $f_k \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n),\ k \in \mathbb{N}$, eine Folge von Funktionen, die in der L^p-Norm gegen die Funktion $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ konvergiere. Man zeige

$$T_{f_k} \xrightarrow[\mathcal{D}']{} T_f.$$

17.4. Sei $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein Maß auf der Borel-Algebra des $\mathbb{R}^n$, so dass $\mu(K) < \infty$ für jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$.

Man zeige: Durch

$$T_\mu[\varphi] := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu \quad \text{für} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

wird eine Distribution $T_\mu \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ definiert.

Ist $\mu = \varepsilon_a$ die Einheitsmasse im Punkt $a \in \mathbb{R}^n$, vgl. (2.2), so ist $T_{\varepsilon_a} = \delta_a$ die Diracsche Delta-Distribution.

17.5. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit und $f : M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ definiere man

$$(f\delta_M)[\varphi] := \int_M \varphi(x) f(x) dS(x).$$

Man zeige, dass $f\delta_M$ eine Distribution auf $\mathbb{R}^n$ ist.

17.6. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand und

$$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) : \partial A \to \mathbb{R}^n$$

das äußere Normalen-Einheitsfeld. Sei χ_A die charakteristische Funktion von A. Man zeige, dass in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \chi_A = -\nu_i \delta_{\partial A}.$$

17.7. Sei $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) d^n x = 1$$

und

$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{für} \quad \varepsilon > 0.$$

Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Man zeige, dass die Funktionen $T * \rho_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, als Distributionen aufgefasst, für $\varepsilon \to 0$ gegen T konvergieren.

17.8. Eine komplexwertige Distribution $T \in \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ hat die Gestalt

$$T = T_1 + iT_2,$$

wobei $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ reellwertige Distributionen sind. Die Wirkung von T auf eine komplexwertige Funktion

$$f = f_1 + if_2, \quad f_1, f_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

ist definiert durch

$$T[f] = (T_1[f_1] - T_2[f_2]) + i(T_1[f_2] + T_2[f_1]).$$

Im $\mathbb{R}^2$ seien die Koordinaten mit x, y bezeichnet und $z := x + iy$. Man zeige, dass für den Differentialoperator

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

die lokal-integrierbare Funktion $\dfrac{1}{\pi z}$ eine Fundamental-Lösung darstellt, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{\pi z}\right) = \delta_0 \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2).$$

17.9. Für $n \in \mathbb{Z}$ werde die Funktion

$$\mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad x \mapsto e^{inx},$$

als komplexwertige Distribution aufgefaßt,

$$\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} e^{inx}\varphi(x)dx \quad \text{für} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Man beweise in $\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi n}.$$

Anleitung. Sei $T := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi n}$ und sei T_N die durch $\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$ definierte Distribution. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ sei

$$\Phi(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(x + 2n\pi).$$

Man zeige

$$T[\varphi] = \Phi(0)$$

und

$$T_N[\varphi] = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inx}\Phi(x)dx$$

und verwende die Theorie der Fourierreihen (An. 1, §23).

17.10. Man beweise folgende Gleichung (Transformationsformel der Thetafunktion):

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} = \frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/t} \quad \text{für alle} \quad t > 0.$$

Anleitung. Man wende die Distributionen aus Aufgabe 17.9 auf die Funktion

$$\varphi(x) = e^{-x^2/4\pi t}$$

an (man überlege sich, dass dies möglich ist, obwohl φ nicht zu $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ gehört), und verwende die Fouriertransformation von Beispiel (13.2).

17.11. Sei $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige beschränkte Funktion. Für $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ setze man

$$u(x,t) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x-y\|^2/4t} u_0(y) d^n y \quad \text{für} \quad t > 0,$$

$$u(x,0) := u_0(x).$$

Man zeige, dass u eine Lösung des Anfangswertproblems der Wärmeleitungsgleichung mit der Anfangsbedingung u_0 ist, d.h. u genügt in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$ der Wärmeleitungsgleichung und ist in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ stetig.

17.12. Es sei $N_0 : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ die in An. 2, §14 angegebene Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0, \qquad (x > 0),$$

(Neumannsche Funktion 0-ter Ordnung). Man zeige: Im $\mathbb{R}^2$ ist die Funktion

$$F(x) := \frac{1}{4} N_0(kr), \qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

eine Fundamental-Lösung der Helmholtzschen Schwingungsgleichung, d.h.

$$(\Delta + k^2) F = \delta_0, \qquad (k > 0).$$

§ 18 Pfaffsche Formen, Kurvenintegrale

In den folgenden vier Paragraphen wollen wir die mehrdimensionale Integration noch einmal von einem anderen Gesichtspunkt aus mit Hilfe des Differentialformen-Kalküls betrachten. Wir definieren zunächst die Differentialformen 1. Ordnung, die sog. Pfaffschen Formen. Sie können über Kurven integriert werden. Dabei interessiert uns insbesondere die Frage, unter welchen Umständen das Integral nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve, nicht aber von der speziellen Kurve selbst abhängt. Als Spezialfall ergibt sich insbesondere der Cauchysche Integralsatz für holomorphe Funktionen.

Tangential- und Cotangential-Vektoren

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $p \in U$. Wir bezeichnen mit $T_p(U)$ den Tangentialvektorraum im Punkt p, d.h. die Menge aller Tangentenvektoren $\alpha'(0)$ stetig differenzierbarer Kurven durch p,

$$\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\to U, \qquad \alpha(0) = p.$$

Da ein beliebig vorgegebenes $v \in \mathbb{R}^n$ Tangentialvektor der Kurve

$$t \mapsto p + tv$$

ist, gilt $T_p(U) = \mathbb{R}^n$. (Deshalb gilt auch $T_p(U) = T_p(V)$ für je zwei offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$, die den Punkt p enthalten.)

Wir bezeichnen mit $T_p^*(U)$ den dualen Vektorraum von $T_p(U)$, d.h. die Menge aller Linearformen

$$\varphi : T_p(U) \to \mathbb{R}.$$

Die Elemente $\varphi \in T_p^*(U)$ heißen auch Cotangentialvektoren.

Pfaffsche Formen

Unter einer Pfaffschen Form oder Differentialform 1. Ordnung in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ versteht man eine Abbildung

$$\omega : U \to \bigcup_{p \in U} T_p^*(U)$$

mit $\omega(p) \in T_p^*(U)$ für alle $p \in U$. Eine Pfaffsche Form ω in U ordnet also jedem Punkt $p \in U$ einen Cotangentialvektor $\omega(p) \in T_p^*(U)$ zu. Wir bezeichnen den Wert von $\omega(p)$ auf dem Tangentialvektor $v \in T_p(U)$ mit $\langle \omega(p), v \rangle$.

Ein spezielles Beispiel einer Pfaffschen Form ist das totale Differential einer differenzierbaren Funktion.

O. Forster, *Analysis 3*, Aufbaukurs Mathematik,
DOI 10.1007/978-3-8348-2374-8_18, © Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden 2012

Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Unter dem *totalen Differential* df von f versteht man die wie folgt definierte Differentialform 1. Ordnung: Für $p \in U$ und $v \in T_p(U)$ sei

$$\langle df(p), v\rangle := \langle \operatorname{grad} f(p), v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) v_i.$$

Bemerkung. Eine äquivalente Definition von $df(p)$ ist die folgende: Sei

$$\alpha : \,]-\varepsilon, \varepsilon[\, \to U$$

eine stetig differenzierbare Kurve mit

$$\alpha(0) = p \;\text{ und }\; \alpha'(0) = v.$$

Dann ist

$$\langle df(p), v\rangle := \frac{d}{dt} f(\alpha(t))\Big|_{t=0}.$$

Denn nach der Kettenregel gilt

$$\frac{d}{dt} f(\alpha(t))\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha(0))\alpha_i'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) v_i.$$

Koordinaten-Darstellung Pfaffscher Formen

Wir betrachten jetzt speziell die Differentiale $dx_1, \ldots, dx_n$ der kanonischen Koordinatenfunktionen $x_1, \ldots, x_n$ des $\mathbb{R}^n$. (Die i-te Koordinatenfunktion ist durch

$$x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (p_1, \ldots, p_n) \mapsto p_i$$

definiert. Eine korrektere, aber unschöne Bezeichnung hierfür wäre pr_i, da es sich um die Projektion auf den i-ten Faktor von $\mathbb{R}^n$ handelt.) Es sei

$$e_j = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-te Stelle}}}{1}, 0, \ldots, 0)$$

der j-te Basis-Einheitsvektor des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt nach Definition

$$\big\langle dx_i(p), e_j\big\rangle = \frac{d}{dt} x_i(p + te_j)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(p_i + t\delta_{ij})\Big|_{t=0} = \delta_{ij}.$$

Also bilden die Cotangentialvektoren $dx_1(p), \ldots, dx_n(p)$ eine Basis von $T_p^*(\mathbb{R}^n)$, die duale Basis von $e_1, \ldots, e_n$. Jeder Cotangentialvektor $\varphi \in T_p^*(\mathbb{R}^n)$ lässt sich also schreiben als

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i \, dx_i(p)$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $c_i \in \mathbb{R}$. Daraus folgt: Jede Pfaffsche Form ω in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ lässt sich eindeutig darstellen als

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$$

mit Funktionen $f_i : U \to \mathbb{R}$. Dabei bedeutet diese Gleichung

$$\omega(p) = \sum_{i=1}^{n} f_i(p) dx_i(p) \qquad \text{für alle } p \in U.$$

Die Form ω heißt stetig (bzw. r-mal stetig differenzierbar), falls alle Funktionen f_i stetig (bzw. r-mal stetig differenzierbar) sind.

Wir wollen noch folgende Formel beweisen:

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion auf einer offenen Menge $U \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Zum Beweis hat man nur zu zeigen, dass in jedem Punkt $p \in U$ die rechte und die linke Seite auf jedem Tangentialvektor $v \in T_p(U)$ denselben Wert ergeben. Da $\langle dx_i(p), v \rangle = v_i$, gilt

$$\left\langle \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) dx_i(p), v \right\rangle = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) v_i = \langle df(p), v \rangle .$$

Kurvenintegrale

Sei $U \in \mathbb{R}^n$ offen und

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$$

eine stetige Pfaffsche Form in U. Weiter sei

$$\alpha : [a,b] \to U$$

eine stetig differenzierbare Kurve in U. Dann wird das Integral von ω über α definiert als

$$\int_\alpha \omega := \int_a^b \left\langle \omega(\alpha(t)), \alpha'(t) \right\rangle dt = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(\alpha(t)) \alpha_i'(t) \right) dt.$$

Das letztere ist das gewöhnliche Integral einer stetigen Funktion einer Veränderlichen über ein Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Etwas allgemeiner lässt sich das Integral definieren, falls α nur eine stückweise stetig differenzierbare Kurve ist, d.h.

$$\alpha : [a,b] \to U$$

ist stetig und es gibt eine Unterteilung

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$$

des Intervalls $[a,b]$, so dass $\alpha \mid [t_{j-1}, t_j]$ stetig differenzierbar ist für $j = 1, \ldots, k$. Man setzt dann

$$\int_\alpha \omega = \sum_{j=1}^{k} \int_{\alpha_j} \omega,$$

wobei α_j die Teilkurve $\alpha \mid [t_{j-1}, t_j]$ ist.

Verhalten bei Parametertransformation

Sei ω eine stetige Pfaffsche Form in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und

$$\alpha : [a,b] \to U$$

eine stetig differenzierbare Kurve. Sei $[a_1, b_1] \subset \mathbb{R}$ ein weiteres Intervall und

$$\varphi : [a_1, b_1] \to [a,b]$$

eine stetig differenzierbare Abbildung mit

$$\varphi(a_1) = a, \quad \varphi(b_1) = b.$$

Dann ist

$$\alpha \circ \varphi : [a_1, b_1] \to U$$

ebenfalls eine stetig differenzierbare Kurve mit demselben Anfangs- und Endpunkt wie α.

Behauptung. Es gilt

$$\int_{\alpha\circ\varphi} \omega = \int_\alpha \omega.$$

Beweis. Da $(\alpha \circ \varphi)'(u) = \alpha'(\varphi(u))\varphi'(u)$, gilt mit $\tilde{\alpha} := \alpha \circ \varphi$

$$\langle \omega(\tilde{\alpha}(u)), \tilde{\alpha}'(u) \rangle = \langle \omega(\alpha(\varphi(u))), \alpha'(\varphi(u)) \rangle \varphi'(u).$$

Daher folgt mit der Substitutionsregel für Integrale einer Veränderlichen

$$\begin{aligned} \int_\alpha \omega &= \int_a^b \langle \omega(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt = \int_{a_1}^{b_1} \langle \omega(\alpha(\varphi(u))), \alpha'(\varphi(u)) \rangle \varphi'(u) du = \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \langle \omega(\tilde{\alpha}(u)), \tilde{\alpha}'(u) \rangle du = \int_{\tilde{\alpha}} \omega = \int_{\alpha\circ\varphi} \omega, \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Ebenso zeigt man: Ist

$$\psi : [a_1, b_1] \to [a,b]$$

eine stetig differenzierbare Abbildung mit

$$\psi(a_1) = b, \quad \psi(b_1) = a,$$

so gilt

$$\int_{\alpha\circ\psi} \omega = -\int_{\alpha} \omega.$$

Als nächstes berechnen wir das Integral eines totalen Differentials.

Satz 1. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und*

$$\alpha : [a,b] \to U$$

eine stückweise stetig differenzierbare Kurve mit

$$\alpha(a) =: p, \quad \alpha(b) =: q.$$

Dann gilt

$$\int_{\alpha} dF = F(q) - F(p).$$

Beweis. Sei zunächst α als stetig differenzierbar vorausgesetzt. Für $t \in [a,b]$ gilt dann

$$\langle dF(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\alpha(t))\alpha_i'(t) = \frac{d}{dt}F(\alpha(t)),$$

also

$$\int_{\alpha} dF = \int_a^b \frac{d}{dt}F(\alpha(t))dt = F(\alpha(t))\Big|_a^b = F(q) - F(p).$$

Ist α nur stückweise stetig differenzierbar und

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$$

eine Unterteilung, so dass $\alpha_j := \alpha|[t_{j-1}, t_j]$ stetig differenzierbar ist, so folgt

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} dF &= \sum_{j=1}^{m} \int_{\alpha_j} dF = \sum_{j=1}^{m} (F(\alpha(t_j)) - F(\alpha(t_{j-1}))) \\ &= F(\alpha(t_m)) - F(\alpha(t_0)) = F(q) - F(p). \end{aligned}$$

Bemerkung. Satz 1 besagt, dass das Integral eines totalen Differentials dF über eine Kurve nur von Anfangs- und Endpunkt der Kurve, nicht aber von der speziellen Kurve selbst, abhängt. Ist insbesondere

$$\alpha : [a,b] \to U$$

eine *geschlossene* Kurve, d.h. $\alpha(a) = \alpha(b)$, so gilt

$$\int_{\alpha} dF = 0.$$

Für nicht totale Differentialformen verschwindet das Integral über geschlossene Kurven i.Allg. nicht, wie folgendes Beispiel zeigt.

(18.1) Beispiel. In $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sei ω die Differentialform

$$\omega := \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy,$$

wobei mit x, y die kanonischen Koordinatenfunktionen des $\mathbb{R}^2$ bezeichnet seien. Sei $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}_+$ und α der Kreisbogen

$$\alpha : [0,\varphi] \to U, \qquad \alpha(t) := (r\cos t, r\sin t).$$

Dann ist

$$\alpha'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$$

und

$$\langle \omega(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle = \frac{-r\sin t}{r^2}\cdot(-r\sin t) + \frac{r\cos t}{r^2}\cdot r\cos t = 1,$$

also

$$\int_\alpha \omega = \int_0^\varphi dt = \varphi.$$

Insbesondere für $\varphi = 2\pi$ ist α eine geschlossene Kurve, aber das Integral $\neq 0$.

Hilfssatz 1. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und*

$$\gamma : [0,1] \to U$$

eine (stetige) Kurve mit $\gamma(0) =: p$ und $\gamma(1) =: q$. Dann gibt es auch eine stückweise stetig differenzierbare Kurve

$$\alpha : [0,1] \to U$$

mit $\alpha(0) = p$ und $\alpha(1) = q$.

Beweis. Da $\gamma([0,1])$ eine kompakte Teilmenge von U und $\mathbb{R}^n \setminus U$ abgeschlossen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\|\gamma(t) - y\| \geqslant \varepsilon \quad \text{für alle} \quad t \in [0,1] \quad \text{und} \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus U,$$

vgl. An. 2, Beispiel (3.5). Da γ gleichmäßig stetig ist, gibt es eine Unterteilung

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1,$$

so dass

$$\|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad j = 1, \ldots, m.$$

Wir definieren jetzt α als den Polygonzug mit den Eckpunkten $\gamma(t_j)$, d.h.

$$\alpha(\lambda t_j + (1-\lambda)t_{j-1}) := \lambda\gamma(t_j) + (1-\lambda)\gamma(t_{j-1})$$

$$\text{für} \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \quad \text{und} \quad j = 1, \ldots, m,$$

vgl. Bild 18.1. Dann gilt $\alpha([0,1]) \subset U$ und α ist eine stückweise stetig differenzierbare Kurve, die p mit q verbindet.

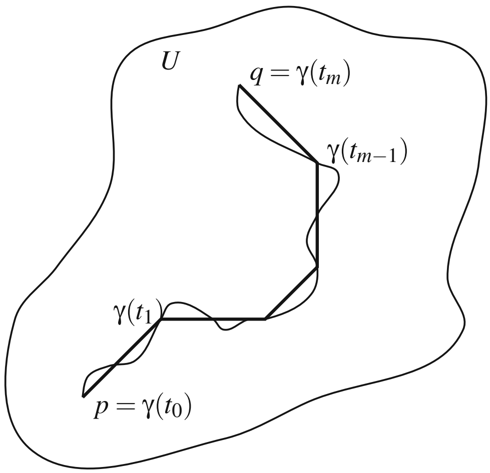


Bild 18.1

Satz 2. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet (d.h. eine zusammenhängende offene Teilmenge) und $F : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $dF = 0$. Dann ist F konstant.*

Beweis. Wir wählen einen festen Punkt $p_0 \in U$. Ist $p \in U$ ein beliebiger Punkt, so gibt es nach dem Hilfssatz eine stückweise stetig differenzierbare Kurve $\alpha : [0,1] \to U$ mit

$$\alpha(0) = p_0 \quad \text{und} \quad \alpha(1) = p.$$

Nach Satz 1 ist

$$0 = \int_\alpha dF = F(p) - F(p_0).$$

Daher gilt $F(p) = F(p_0)$ für alle $p \in U$, q.e.d.

Definition. Sei ω eine stetige Pfaffsche Form in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Eine stetig differenzierbare Funktion $F : U \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* von ω, falls

$$dF = \omega.$$

Bemerkungen

1) Ist F eine Stammfunktion von ω, so ist auch $F+$ const. eine Stammfunktion. Ist U ein Gebiet, so folgt umgekehrt aus Satz 2, dass sich je zwei Stammfunktionenen von ω um eine Konstante unterscheiden.

2) Sei $n = 1$ und $U \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine stetige Pfaffsche Form in U schreibt sich dann

$$\omega = f dx$$

mit einer stetigen Funktion $f : U \to \mathbb{R}$. Ist $F : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt

$$dF = F'dx,$$

also $dF = \omega$ genau dann, wenn $F' = f$. Deshalb ist F genau dann Stammfunktion von f im Sinne der Differential- und Integalrechnung einer Veränderlichen, wenn F Stammfunktion der Differentialform $\omega = fdx$ im Sinne der obigen Definition ist. Also existiert zu jeder stetigen Pfaffschen Form $\omega = fdx$ eine Stammfunktion; man kann eine solche z.B. als Integral

$$F(x) := \int_{x_o}^{x} f(t)dt$$

erhalten ($x_0 \in U$ ein beliebiger fester Punkt).

3) Im Gegensatz zum Fall $n = 1$ besitzt für $n \geqslant 2$ nicht jede stetige Pfaffsche Form eine Stammfunktion. Ein Gegenbeispiel ist die in (18.1) betrachtete Differentialform in $\mathbb{R}^2 \setminus 0$

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

Besäße ω eine Stammfunktion, so müsste nämlich das Integral von ω über die geschlossene Kreislinie vom Radius r verschwinden, was aber nach Beispiel (18.1) nicht der Fall ist. Der nächste Satz gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Stammfunktion.

Satz 3. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und ω eine stetige Pfaffsche Form in U. Genau dann besitzt ω eine Stammfunktion, wenn für jede stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurve α in U gilt*

$$\int_\alpha \omega = 0.$$

Beweis.

a) Nach Satz 1 ist die angegebene Bedingung notwendig.

b) Sei jetzt vorausgesetzt, dass das Integral von ω über jede geschlossene Kurve verschwindet. Wir wollen eine Stammfunktion $F : U \to \mathbb{R}$ von ω konstruieren. Wir wählen einen festen Punkt $p_0 \in U$ und setzen für $p \in U$

$$F(p) := \int_\alpha \omega,$$

wobei $\alpha : [0,1] \to U$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve mit $\alpha(0) = p_0$ und $\alpha(1) = p$. (Eine solche Kurve existiert nach Hilfssatz 1.) Es ist noch zu zeigen, dass die Definition unabhängig von der gewählten Kurve ist. Sei also

$$\beta : [0,1] \to U$$

eine weitere stückweise stetig differenzierbare Kurve mit $\beta(0) = p_0$ und $\beta(1) = p$. Wir definieren die Kurve $\gamma : [0,2] \to U$ durch

$$\gamma(t) := \begin{cases} \alpha(t) & \text{für} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ \beta(2-t) & \text{für} \quad 1 \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$$

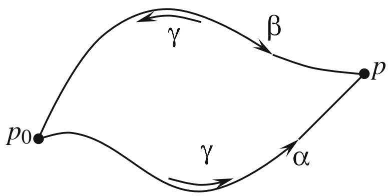


Bild 18.2

Dann ist γ eine stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurve, die zuerst α durchläuft und anschließend β rückwärts durchläuft, siehe Bild 18.2. Nach Voraussetzung gilt

$$0 = \int_\gamma \omega = \int_\alpha \omega - \int_\beta \omega,$$

also $\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$. Daher ist $F(p)$ wohldefiniert. Wir schreiben

$$F(p) = \int_{p_0}^{p} \omega,$$

da es nicht auf Kurve ankommt, die p_0 mit p verbindet.

c) Wir beweisen jetzt $dF = \omega$. Sei

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i.$$

Da $dF = \sum(\partial F/\partial x_i)dx_i$, müssen wir zeigen

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = f_i \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Sei $h \neq 0$ eine kleine reelle Zahl. Dann ist

$$F(p + he_i) = \int_{p_0}^{p} \omega + \int_{p}^{p+he_i} \omega,$$

also

$$F(p + he_i) - F(p) = \int_{p}^{p+he_i} \omega.$$

Zur Berechnung dieses Integrals verwenden wir die Kurve

$$\beta(t) := p + the_i, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

(die, falls nur h genügend klein ist, ganz in U liegt.) Wegen $\beta'(t) = he_i$ ist

$$\langle \omega(\beta(t)), \beta'(t)\rangle = hf_i(\beta(t)),$$

also

$$\int_\beta \omega = h \int_0^1 f_i(p+the_i)dt.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(F(p+he_i) - F(p)) = \lim_{h\to 0} \int_0^1 f_i(p+the_i)dt = f_i(p), \quad \text{q.e.d.}$$

Geschlossene Pfaffsche Formen

Eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Stammfunktion wird durch die folgende Eigenschaft gegeben.

Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$$

eine stetig differenzierbare Pfaffsche Form in U. Die Form ω heißt *geschlossen*, falls

$$(*) \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \qquad \text{für alle} \quad i, j.$$

Besitzt ω eine Stammfunktion, so ist ω notwendig geschlossen. Denn aus $dF = \omega$ folgt $f_i = \partial F/\partial x_i$, also

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}.$$

Diese Bedingung ist jedoch nicht hinreichend, wie die in $U = \mathbb{R}^2 \setminus 0$ definierte Pfaffsche Form

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

aus Beispiel (18.1) zeigt. Sie besitzt keine Stammfunktion, erfüllt aber Bedingung $(*)$, denn

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Unter zusätzlichen Bedingungen über den Definitionsbereich ist die Geschlossenheit der Pfaffschen Form jedoch auch hinreichend für die Existenz einer Stammfunktion. Dazu geben wir folgende

Definition. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig* bzgl. eines Punktes $p \in U$, wenn für jeden Punkt $x \in U$ die ganze Verbindungsstrecke von p nach x

$$\{(1-t)p + tx : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

in U liegt (Bild 18.3).

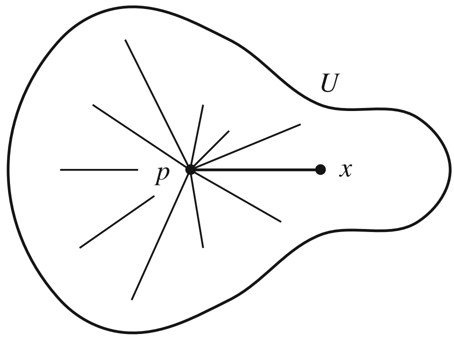


Bild 18.3

Satz 4. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges Gebiet und ω eine stetig differenzierbare geschlossene Pfaffsche Form in U. Dann besitzt ω eine Stammfunktion $F : U \to \mathbb{R}$.*

Beweis. Nach evtl. Translation des Koordinatensystems können wir annehmen, dass U sternförmig bzgl. des Nullpunktes ist. Ist $\omega = \sum f_i dx_i$, so definiere man F durch das Integral

$$F(x) := \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n f_i(tx)x_i \right) dt \quad \text{für} \quad x \in U.$$

Das Integral ist definiert, denn wegen der Sternförmigkeit von U liegt die ganze Strecke $tx,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$, in U. Man rechnet nun unter Benutzung der Bedingung

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

leicht nach (siehe An. 2, Beispiel (10.2)), dass $\partial F / \partial x_i = f_i$, also F Stammfunktion von ω ist.

Bemerkung. Satz 4 wird sich in § 19, Satz 6, noch einmal als Spezialfall eines viel allgemeineren Sachverhalts ergeben.

(18.2) Beispiel. Wir kommen nochmals auf das Beispiel (18.1) zurück. Das Gebiet $U = \mathbb{R}^2 \smallsetminus 0$ ist nicht sternförmig bzgl. irgendeines Punktes $p \in U$. Nimmt man aber die negative x-Achse weg, so ist der Rest

$$V := \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(x,0) : x \leqslant 0\}$$

sternförmig bzgl. des Punktes $(1,0)$. Da die Form

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

geschlossen ist, besitzt sie in V eine Stammfunktion F. Man kann F als Integral

$$F(x,y) := \int_{(1,0)}^{(x,y)} \omega$$

erhalten, wobei über eine beliebige stückweise stetig differenzierbare Kurve in V von $(1,0)$ nach (x,y) zu integrieren ist. Sei $r := \sqrt{x^2+y^2}$. Dann ist

$$F(x,y) = \int_{(1,0)}^{(r,0)} \omega + \int_{(r,0)}^{(x,y)} \omega.$$

Wir wählen als Kurve von $(1,0)$ nach $(r,0)$ die Verbindungsstrecke auf der x-Achse und von $(r,0)$ nach (x,y) den Kreisbogen, vgl. Bild 18.4.

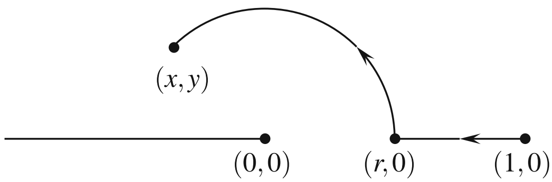


Bild 18.4

Damit ergibt sich

$$\int_{(1,0)}^{(r,0)} \omega = 0,$$

und nach Beispiel (18.1)

$$\int_{(r,0)}^{(x,y)} \omega = \varphi,$$

wobei φ die durch die Bedingungen

$$x = r\cos\varphi, \ y = r\sin\varphi, \quad -\pi < \varphi < \pi,$$

eindeutig bestimmte Zahl ist. Es gilt

$$\varphi = F(x,y) = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{für} \quad x > 0, \\ \pi/2 - \arctan(x/y) & \text{für} \quad y > 0, \\ -\pi/2 - \arctan(x/y) & \text{für} \quad y < 0. \end{cases}$$

Die Gleichung $dF(x,y) = \omega$ kann man auch direkt durch Differenzieren verifizieren.

Homotopie von Kurven

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $p_0, p_1 \in U$, und seien

$$\alpha,\ \beta : [0,1] \to U$$

zwei Kurven von p_0 nach p_1, d.h.

$$\alpha(0) = \beta(0) = p_0, \quad \alpha(1) = \beta(1) = p_1.$$

Die beiden Kurven heißen *homotop* in U, falls es eine stetige Abbildung

$$A : [0,1] \times [0,1] \to U, \qquad (u,t) \mapsto A(u,t),$$

mit folgenden Eigenschaften gibt:

i) $A(0,t) = \alpha(t)$ und $A(1,t) = \beta(t)$ für alle $t \in [0,1]$.

ii) $A(u,0) = p_0$ und $A(u,1) = p_1$ für alle $u \in [0,1]$.

Bemerkung. Setzt man

$$\alpha_u(t) := A(u,t),$$

so ist $\alpha_u : [0,1] \to U$ eine Kurve von p_0 nach p_1; es gilt

$$\alpha_0 = \alpha \quad \text{und} \quad \alpha_1 = \beta.$$

Die Eigenschaft „α homotop zu β" bedeutet also, dass man die Kurve α über die stetige Schar von Kurven $(\alpha_u)_{0 \leqslant u \leqslant 1}$ in die Kurve β deformieren kann (Bild 18.5).

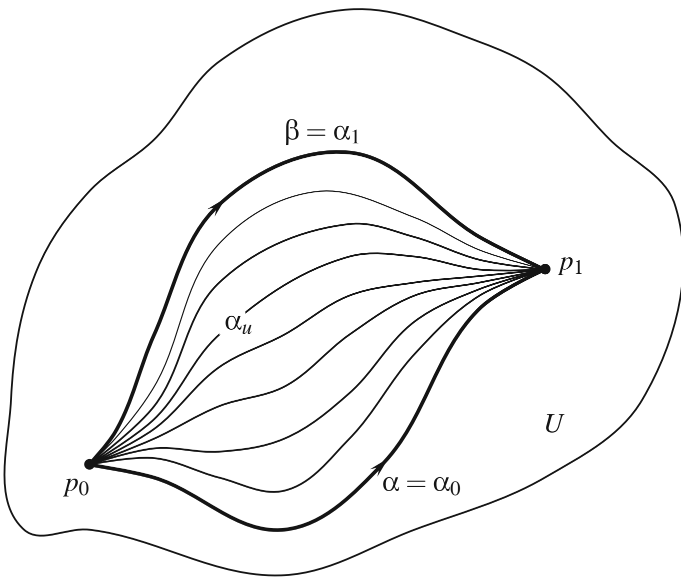


Bild 18.5

Satz 5. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p_0, p_1 \in U$, und seien $\alpha, \beta : [0,1] \to U$ zwei stückweise stetig differenzierbare Kurven von p_0 nach p_1, die in U zueinander homotop sind. Dann gilt für jede stetig differenzierbare geschlossene Pfaffsche Form ω in U*

$$\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega.$$

Beweis. Sei $A : [0,1] \times [0,1] \to U$ eine Homotopie zwischen α und β wie in der obigen Definition. Da $A([0,1] \times [0,1])$ kompakt ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$(*) \quad \|A(u,t) - y\| \geqslant \varepsilon$$

für alle $(u,t) \in [0,1] \times [0,1]$ und $y \in \mathbb{R}^n \smallsetminus U$. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von A gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$(**)\quad \|A(u,t)-A(u',t')\| < \frac{\varepsilon}{2}$

für alle $(u,t),(u',t') \in [0,1]\times[0,1]$ mit

$$\|(u,t)-(u'-t')\| < \delta.$$

Sei jetzt

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$$

eine Unterteilung von $[0,1]$ mit $|t_j - t_{j-1}| < \delta$ für $j = 1,\ldots,m$. Für $u \in [0,1]$ bezeichnen wir mit γ_u den Polygonzug mit den Eckpunkten

$$A(u,t_0),\ A(u,t_1),\ldots,\ A(u,t_m).$$

Wir zeigen jetzt

i) $\displaystyle\int_\alpha \omega = \int_{\gamma_0}\omega, \quad \int_\beta \omega = \int_{\gamma_1}\omega.$

ii) $\displaystyle\int_{\gamma_u}\omega = \int_{\gamma_\tau}\omega \quad \text{für} \quad |u-\tau| < \delta.$

Aus i) und ii) zusammen folgt dann die Behauptung.

Zu i). Für $j = 1,\ldots,m$ sei B_j die offene Kugel mit Mittelpunkt

$$a_j := A(0,t_j) = \alpha(t_j) = \gamma_0(t_j)$$

und Radius ε. Nach $(*)$ ist B_j ganz in U enthalten und nach $(**)$ gilt

$$\alpha([t_{j-1},t_j]) \subset B_j \quad \text{und} \quad \gamma_0([t_{j-1},t_j]) \subset B_j.$$

In B_j besitzt ω nach Satz 4 eine Stammfunktion $F_j : B_i \to \mathbb{R}$. Daraus folgt

$$\int_{\alpha|[t_{j-1},t_j]}\omega = F_j(a_j) - F_j(a_{j-1}) = \int_{\gamma_0|[t_{j-1},t_j]}\omega,$$

also $\int_\alpha \omega = \int_{\gamma_0}\omega$. Ebenso zeigt man $\int_\beta \omega = \int_{\gamma_1}\omega$.

Zu ii). Bei festem Parameterwert $u \in [0,1]$ bezeichne hier B_j die offene Kugel mit Mittelpunkt $A(u,t_j) = \gamma_u(t_j)$ und Radius ε. Nach $(*)$ gilt $B_j \subset U$. Sei $F_j : B_j \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von ω in B_j. Da $B_j \cap B_{j+1}$ zusammenhängt, gibt es nach Satz 2, Bemerkung 1 eine Konstante $c_j \in \mathbb{R}$ mit

$$F_{j+1} = F_j + c_j \quad \text{in} \quad B_j \cap B_{j+1}.$$

Sei jetzt $\tau \in [0,1]$ ein beliebiger Parameterwert mit $|u-\tau| < \delta$. Aus $(**)$ folgt, dass

$$\gamma_\tau(t_j),\ \gamma_\tau(t_{j-1}) \in B_j.$$

Daraus folgt

$$\int_{\gamma_\tau|[t_{j-1},t_j]}\omega = F_j(\gamma_\tau(t_j)) - F_j(\gamma_\tau(t_{j-1})).$$

Summieren über $j = 1, \ldots, m$ ergibt bei geeigneter Zusammenfassung der Terme

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_\tau} \omega &= -F_1(\gamma_\tau(t_0)) + \sum_{j=1}^{m-1} (F_j(\gamma_\tau(t_j)) - F_{j+1}(\gamma_\tau(t_j))) + F_m(\gamma_\tau(t_m)) = \\ &= F_m(p_1) - F_1(p_0) - \sum_{j=1}^{m-1} c_j.\end{aligned}$$

Da dieses Resultat unabhängig vom speziellen Wert von

$$\tau \in [0,1] \cap]u-\delta, u+\delta[$$

ist, folgt die Behauptung ii). Damit ist Satz 5 bewiesen.

Einfacher Zusammenhang

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $p_0 \in U$. Wir betrachten *geschlossene* Kurven

$$\alpha : [0,1] \to U$$

mit Anfangs- und Endpunkt $p_0 = \alpha(0) = \alpha(1)$. Eine spezielle solche Kurve ist die *Punktkurve in* p_0; sie ist definiert durch

$$\gamma(t) := p_0 \quad \text{für alle} \quad t \in [0,1].$$

Diese Punktkurve ist also eine entartete Kurve; sie verharrt zu allen Zeiten $t \in [0,1]$ im Punkt p_0.

Eine Kurve $\alpha : [0,1] \to U$ mit Anfangs- und Endpunkt p_0 heißt *nullhomotop*, falls sie in U homotop zur Punktkurve in p_0 ist (Bild 18.6).

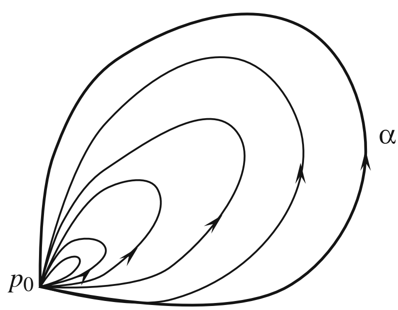


Bild 18.6

Man sagt in diesem Fall auch, dass man die Kurve α auf den Punkt p_0 zusammenziehen kann.

Definition. Ein Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *einfach zusammenhängend*, falls es einen Punkt $p_0 \in U$ gibt, so dass jede geschlossene Kurve

$$\alpha : [0,1] \to U$$

mit Anfangs- und Endpunkt p_0 nullhomotop ist.

Bemerkung. Man kann zeigen, dass dann auch jede geschlossene Kurve in U mit einem anderen Anfangs- und Endpunkt $p_1 \in U$ nullhomotop ist.

Beispiel

(18.3) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein bzgl. $p_0 \in U$ sternförmiges Gebiet und $\alpha : [0,1] \to U$ eine Kurve mit $\alpha(0) = \alpha(1) = p_0$. Definiert man

$$A(u,t) := up_0 + (1-u)\alpha(t)$$

für $(u,t) \in [0,1] \times [0,1]$, so liefert A eine Homotopie zwischen α und der Punktkurve in p_0. Dies zeigt, dass ein sternförmiges Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend ist. Daraus folgt, dass auch jedes Gebiet $V \subset \mathbb{R}^n$, das zu einem sternförmigen Gebiet homöomorph ist, einfach zusammenhängend ist.

Satz 6. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und ω eine stetig differenzierbare geschlossene Pfaffsche Form in U. Dann gilt für jede stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurve α in U*

$$\int_\alpha \omega = 0.$$

Bemerkung. Daraus folgt mit Satz 3: In einem einfach zusammenhängenden Gebiet besitzt jede geschlossene Pfaffsche Form eine Stammfunktion.

Beweis. Sei $p_0 \in U$ ein Punkt im Sinne der obigen Definition des einfachen Zusammenhangs. Hat α Anfangs- und Endpunkt p_0, so ist α zur Punktkurve in p_0 homotop. Nach Satz 5 ist das Integral von ω über α gleich null, da das Integral über eine Punktkurve verschwindet.

Ist der Anfangs- und Endpunkt von α ein anderer Punkt p_1, so wähle man eine stückweise stetig differenzierbare Kurve $\beta : [0,1] \to U$ von p_0 nach p_1 und konstruiere eine neue Kurve

$$\alpha_1 : [0,3] \to U,$$

$$\alpha_1(t) := \begin{cases} \beta(t) & \text{für} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ \alpha(t-1) & \text{für} \quad 1 \leqslant t \leqslant 2, \\ \beta(3-t) & \text{für} \quad 2 \leqslant t \leqslant 3. \end{cases}$$

Dann ist α_1 eine geschlossene Kurve mit Anfangs- und Endpunkt p_0, also nullhomotop und deshalb

$$\int_{\alpha_1} \omega = 0.$$

Andererseits ist

$$\int_{\alpha_1} \omega = \int_\beta \omega + \int_\alpha \omega - \int_\beta \omega = \int_\alpha \omega,$$

woraus die Behauptung folgt.

Bemerkung. Aus Satz 5 und Beispiel (18.1) folgt, dass $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ nicht einfach zusammenhängt. Dagegen kann man zeigen, dass $\mathbb{R}^n \setminus 0$ für $n \geqslant 3$ einfach zusammenhängend ist.

Komplexwertige Pfaffsche Formen

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine komplexwertige Pfaffsche Form in U hat die Gestalt

$$\omega = \omega_1 + i\omega_2, \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

wobei ω_1 und ω_2 reelle Pfaffsche Formen in U sind. Ist ω stetig (d.h. ω_1 und ω_2 stetig) und α eine stückweise stetig differenzierbare Kurve in U, so definiert man das Integral

$$\int_\alpha \omega := \int_\alpha \omega_1 + i \int_\alpha \omega_2.$$

Ist $f = f_1 + i f_2 : U \to \mathbb{C}$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion (f_1, f_2 reellwertig), so setzt man

$$df := df_1 + i\, df_2.$$

Sei jetzt speziell $n = 2$. Wir identifizieren $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$. Seien x, y die kanonischen Koordinaten in $\mathbb{R}^2$ und $z = x + iy$. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig partiell differenzierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(dx + idy) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(dx - idy) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\overline{z}. \end{aligned}$$

Definiert man daher Differentialoperatoren

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

so kann man schreiben

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}.$$

Wir bringen jetzt einige Anwendungen der Kurvenintegrale in der Theorie der holomorphen Funktionen. Dies ist nicht als eine Einführung in die Theorie der holomorphen Funktion gedacht, sondern soll nur zeigen, wie sich diese Theorie in den hier betrachteten Zusammenhang einordnen lässt.

Definition. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt *holomorph*, wenn sie stetig partiell differenzierbar ist und der Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$$

genügt.

Satz 7. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion. f ist genau dann holomorph, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

i) *Für das totale Differential von f gilt*

$$df = g dz$$

mit einer stetigen Funktion $g : U \to \mathbb{C}$. (Dann ist notwendigerweise $g = \partial f / \partial z$.)

ii) *Die Differentialform*

$$\omega := f dz$$

ist geschlossen.

Beweis.

Zu i). Für jeden Punkt $p \in U$ sind $dz(p) = dx(p) + i dy(p)$ und $d\overline{z}(p) = dx(p) - i dy(p)$ linear unabhängig über $\mathbb{C}$, da $dx(p)$ und $dy(p)$ linear unabhängig sind. Da

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z},$$

ist $df = g dz$ gleichbedeutend mit $\dfrac{\partial f}{\partial z} = g$ und $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.

Zu ii). Da $\omega = f dz = f dx + i f dy$, ist die Geschlossenheit von ω gleichbedeutend mit

$$\frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\partial}{\partial x} i f,$$

d.h.

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial y} - i \frac{\partial}{\partial x} \right) f = -i \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) f = -2i \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}.$$

(18.4) Beispiele. Nach Satz 7 i) ist die Funktion $f(z) := z$ holomorph, denn $df = dz$. Weiter folgt, dass das Produkt zweier holomorpher Funktionen $f_1, f_2 : U \to \mathbb{C}$ holomorph ist, denn

$$d(f_1 f_2) = f_1 df_2 + f_2 df_1.$$

Also ist auch jedes Polynom

$$P(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_k z^k, \quad c_j \in \mathbb{C},$$

holomorph auf ganz $\mathbb{C}$.

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die nirgends verschwindet, und $g := 1/f$. Dann ist auch g holomorph, denn aus $fg = 1$ folgt

$$d(fg) = f dg + g df = 0,$$

also $dg = -(1/f^2)df$, und das Kriterium aus Satz 7 i) liefert die Holomorphie von g.

Satz 8 (Cauchyscher Integralsatz). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gilt für jede stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurve α in U*

$$\int_\alpha f dz = 0.$$

Beweis. Nach Satz 7 ii) ist die Differentialform $f dz$ geschlossen und nach Satz 6 verschwindet das Integral.

Integration bzgl. des Bogenelements

Wir wollen jetzt eine andere Interpretation der Kurvenintegrale geben. Sei

$$\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

eine stückweise stetig differenzierbare Kurve. Dann ist $\alpha([a,b])$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Sei weiter eine stetige Funktion

$$f : \alpha([a,b]) \to \mathbb{R}$$

vorgegeben. Dann definiert man

$$\int_\alpha f ds := \int_a^b f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt.$$

Bemerkungen

1) Wählt man speziell die Funktion $f = 1$, so stellt

$$\int_\alpha ds = \int_a^b \|\alpha'(t)\|dt$$

die Länge der Kurve α dar (vgl. An. 2, §4, Satz 1). Deshalb nennt man ds auch das Bogenelement oder Streckenelement der Kurve. (Man beachte, dass ds nicht das totale Differential einer Funktion ist!)

2) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare Kurve mit folgenden Eigenschaften:

i) $\alpha'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$

ii) α bildet I homöomorph auf $\varphi(I)$ ab.

Dann ist $M := \alpha(I)$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Wir hatten bereits in §14 ein Integral über M erklärt. Dies hängt mit dem hier definierten Integral wie folgt zusammmen: Sei $[a,b] \subset I,\ K := \alpha([a,b])$ und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt (vgl. (14.4)):

$$\int_{\alpha|[a,b]} f ds = \int_K f(x) dS(x).$$

Für 1-dimensionale Untermannigfaltigkeiten stimmt also das 1-dimensionale Flächenelement mit dem hier definierten Streckenelement überein.

Riemannsche Summen

Sei jetzt wieder $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine beliebige stückweise stetig differenzierbare Kurve und $f : \alpha([a,b]) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir wählen eine Unterteilung

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$$

des Intervalls und Zwischenstellen

$$t'_j \in [t_{j-1}, t_j].$$

Dann heißt

$$\sum_{j=1}^{m} f(\alpha(t'_j)) \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\|$$

Riemannsche Summe für das Integral $\int_\alpha f ds$. Setzt man

$$\xi_j := \alpha(t'_j), \qquad \triangle s_j := \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\|,$$

so lässt sich die Riemannsche Summe suggestiver schreiben als

$$\sum_{J=1}^{m} f(\xi_j) \triangle s_j.$$

Geht man zu immer feineren Unterteilungen über, so konvergieren diese Riemannschen Summen gegen das Integral $\int_\alpha f ds$. In der Tat gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für jede Unterteilung

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$$

der Feinheit $\leqslant \delta$ und jede Wahl der Zwischenstellen $t'_j \in [t_{j-1}, t_j]$ gilt

$$\Big| \int_\alpha f ds - \sum_{j=1}^{m} f(\alpha(t'_j)) \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\| \Big| \leqslant \varepsilon.$$

Wir führen den Beweis nicht aus; er verläuft ähnlich wie der von An. 2, §4, Satz 1.

Zusammenhang mit dem Integral Pfaffscher Formen

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$$

eine stetige Pfaffsche Form in U. Wir fassen die Funktionen f_i zu einem stetigen Vektorfeld

$$f := (f_1, \ldots, f_n) : U \to \mathbb{R}^n$$

zusammen. Wir führen außerdem das folgende n-tupel Pfaffscher Formen ein:

$$d\vec{s} := (dx_1, \ldots, dx_n).$$

(Man nennt $d\vec{s}$ das „vektorielle Streckenelement".) Jetzt lässt sich ω formal als Skalarprodukt der beiden Vektoren f und $d\vec{s}$ auffassen,

$$\omega = f \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i.$$

(Aus graphischen Gründen verwenden wir hier für das Skalarprodukt den Punkt anstelle der spitzen Klammern.) Sei nun weiter

$$\alpha : [a,b] \to U \subset \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare, injektive und reguläre Kurve, d.h.

$$\alpha'(t) \neq 0 \quad \text{für alle} \quad t \in [a,b].$$

Für einen Kurvenpunkt $x = \alpha(t)$ sei

$$\tau(x) := \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

der Tangenten-Einheitsvektor der Kurve.

Satz 9. *Mit den obigen Bezeichnungen gilt*

$$\int_\alpha f \cdot d\vec{s} = \int_\alpha \langle f, \tau \rangle ds.$$

Bemerkung. Man kann diesen Sachverhalt symbolisch durch die Gleichung

$$d\vec{s} = \tau ds$$

ausdrücken. ds ist der Betrag, und der Tangenten-Einheitsvektor τ die Richtung des Vektors $d\vec{s}$.

Beweis. Nach Definition ist

$$\int_\alpha f \cdot d\vec{s} = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(\alpha(t))\alpha_i'(t) \right) dt = \int_a^b \langle f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt.$$

Andererseits ist

$$\int_\alpha \langle f, \tau \rangle ds = \int_a^b \langle f(\alpha(t)), \tau(\alpha(t)) \rangle \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b \langle f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt.$$

Daraus folgt die Behauptung.

(18.5) Beispiel. In einem Gebiet $U \subset \mathbb{R}^3$ herrsche das (zeitlich konstante) elektrische Feld

$$E = (E_1, E_2, E_3) : U \to \mathbb{R}^3.$$

Auf eine Einheits-Probeladung im Punkt $x \in U$ wirkt dann die Kraft $E(x)$. Die Komponente dieser Kraft in Richtung eines Einheitsvektors τ (d.h. $\|\tau\| = 1$) ist gleich $\langle E(x), \tau \rangle$. Verschiebt man deshalb die Probeladung längs einer Kurve α von p_0 nach p_1 in U, so wird die Arbeit

$$A = \int_\alpha E \cdot d\vec{s}$$

geleistet. Aus physikalischen Gründen ist diese Arbeit unabhängig von der Kurve, die von p_0 nach p_1 läuft (andernfalls könnte man Energie gewinnen). Daher gilt für jede geschlossene Kurve γ in U

$$\int_\gamma E \cdot d\vec{s} = 0.$$

Nach Satz 3 besitzt deshalb die Differentialform

$$\omega = E \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^{3} E_i dx_i$$

eine Stammfunktion. Das Negative dieser Stammfumktion, die bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist, heißt das *Potential* des elektrischen Feldes E und sei mit Φ bezeichnet. Es gilt also

$$E \cdot d\vec{s} = -d\Phi = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i,$$

d.h.

$$E = -\operatorname{grad} \Phi.$$

Aufgaben

Bezeichnung. In den Aufgaben 18.1 bis 18.5 bezeichnen x, y die kanonischen Koordinatenfunktionen im $\mathbb{R}^2$ und x, y, z die im $\mathbb{R}^3$.

18.1. Im $\mathbb{R}^2$ sei φ die folgende Kurve:

$$\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) := e^t(\cos t, \sin t).$$

Man berechne das Integral

$$\int_{\varphi}(xdy - ydx).$$

18.2. Im $\mathbb{R}^3$ sei α die Kurve

$$\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,$$

$$\alpha(t) := (e^{t \sin t}, t^2 - 2\pi t, \cos \frac{t}{2}).$$

Man berechne die Integrale

$$\int_{\alpha}(xdx + ydy + zdz), \quad \int_{\alpha} zdy.$$

18.3. Seien $r, c > 0$ und φ die Schraubenlinie

$$\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$$

$$\varphi(t) := (r\cos t, r\sin t, ct).$$

Man berechne die Integrale

$$\int_{\varphi}((x^2 - y^2)dx + 3zdy + 4xydz), \quad \int_{\varphi}(x^4 + y^4 + z^4)ds.$$

18.4. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $a \in U$ und

$$\omega = fdx + gdy$$

eine in $U \setminus \{a\}$ stetig differenzierbare geschlossene Pfaffsche Form, deren Koeffizienten f und g beschränkte Funktionen seien. Man beweise, dass ω eine Stammfunktion $F : U \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ besitzt, die sich stetig nach U fortsetzen lässt.

18.5. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und

$$u : G \to \mathbb{R}$$

eine harmonische Funktion. Eine stetig partiell differenzierbare Funktion

$$v : G \to \mathbb{R}$$

heißt zu u *konjugiert*, falls

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Man zeige:

a) Ist v zu u konjugiert, so ist v ebenfalls harmonisch und $f := u + iv$ holomorph.

b) Sei $F : G \to \mathbb{C}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare holomorphe Funktion und

$$F = u + iv$$

ihre Zerlegung in Real- und Imaginärteil. Dann sind u und v zueinander konjugierte harmonische Funktionen.

c) Ist G einfach zusammenhängend, so existiert zu jeder harmonischen Funktion $u : G \to \mathbb{R}$ eine konjugiert harmonische Funktion.

18.6.

a) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusmmenhängendes Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $F : G \to \mathbb{C}$ eine (nach Satz 6 existierende) Stammfunktion von $\omega = f dz$.

Man zeige, dass F holomorph ist.

b) Man zeige, dass jede in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ beliebig oft stetig partiell differenzierbar ist.

Anleitung. Man kann voraussetzen, dass G einfach zusammenhängt. Man wende auf eine Stammfunktion von $f dz$ die Aufgaben 18.5 b) und 16.2 an.

18.7. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p, q \in U$ und $\alpha : [0,1] \to U$ eine stetige Kurve von p nach q. Man zeige, dass α zu einem Polygonzug in U von p nach q homotop ist.

18.8. a) Sei $a \in \mathbb{R}^n \smallsetminus 0$ und

$$U := \mathbb{R}^n \smallsetminus \mathbb{R}_+ a.$$

Man zeige, dass U einfach zusammenhängend ist.

b) Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n \smallsetminus 0$ ein geschlossener Polygonzug, $n \geqslant 3$. Man zeige: Es gibt einen Halbstrahl

$$\mathbb{R}_+ a, \qquad a \in \mathbb{R}^n \smallsetminus 0,$$

mit $\gamma([0,1]) \cap \mathbb{R}_+ a = \emptyset$.

c) Man beweise, dass $\mathbb{R}^n \smallsetminus 0$ für $n \geqslant 3$ einfach zusammenhängend ist.

§ 19 Differentialformen höherer Ordnung

Wir führen jetzt die Differentialformen höherer Ordnung ein. Sie sind Linearkombinationen von äußeren Produkten Pfaffscher Formen. Dazu sind zunächst einige algebraische Vorbereitungen über alternierende Multilinearformen nötig. Neben den algebraischen Operationen gibt es für Differentialformen die äußere Ableitung, die aus einer Differentialform der Ordnung k eine der Ordnung $k+1$ macht und die eine Verallgemeinerung des totalen Differentials von Funktionen ist. Im Differentialformen-Kalkül ist die klassische Vektoranalysis mit ihren Begriffsbildungen wie Gradient, Rotation, Divergenz enthalten.

Alternierende Multilinearformen

In diesem Abschnitt sei V stets ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$. (Später wird dies angewendet auf den Tangentialvektorraum in einem Punkt des $\mathbb{R}^n$.)

Definition. Unter einer *alternierenden k-Form* auf V versteht man eine Abbildung

$$\omega : V^k \to \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften:

i) ω ist linear in jedem Argument, d.h.

$$\omega(\ldots,\lambda v' + \mu v'',\ldots) = \lambda\omega(\ldots,v',\ldots) + \mu\omega(\ldots,v'',\ldots)$$

für alle $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ und $v',\ v'' \in V$ bei festgehaltenen übrigen Variablen.

ii) Sind zwei Argumente gleich, so verschwindet ω, d.h.

$$\omega(v_1,\ldots,v_k) = 0,$$

falls ein Paar $i \neq j$ existiert, so dass $v_i = v_j$.

Die Menge aller alternierenden k-Formen bildet in natürlicher Weise einen Vektorraum, der mit

$$\textstyle\bigwedge^k V^*$$

bezeichnet wird. Für $k = 1$ sind die alternierenden 1-Formen nichts anderes als die Linearformen auf V, da die Bedingung ii) dann leer ist. Also

$$\textstyle\bigwedge^1 V^* = V^*.$$

Man setzt noch

$$\textstyle\bigwedge^0 V^* := \mathbb{R}.$$

Bemerkung. Die Bedingung ii) ist unter der Voraussetzung von i) mit folgender Bedingung äquivalent:

O. Forster, *Analysis 3*, Aufbaukurs Mathematik,
DOI 10.1007/978-3-8348-2374-8_19, © Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden 2012

ii)$'$ Vertauscht man zwei Argumente, so ändert sich das Vorzeichen, d.h.

$$\omega(\ldots,v',\ldots,v'',\ldots) = -\omega(\ldots,v'',\ldots,v',\ldots)$$

bei festgehaltenen übrigen Variablen.

Beweis. Zur Vereinfachung der Schreibweise nehmen wir $k=2$ an.

ii)$'$ $\Rightarrow$ ii). Nach ii)$'$ ist $\omega(v,v) = -\omega(v,v)$, also $\omega(v,v)=0$.

ii) $\Rightarrow$ ii)$'$. Unter Benützung von i) und ii) ist

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(v'+v'',v'+v'') = \omega(v',v')+\omega(v',v'')+\omega(v'',v')+\omega(v'',v'') = \\ &= \omega(v',v'')+\omega(v'',v'), \end{aligned}$$

also $\omega(v',v'') = -\omega(v'',v')$.

Aus der Bedingung ii)$'$ folgt weiter: Ist π irgendeine Permutation von $(1,2,\ldots,k)$, so gilt

$$\omega(v_{\pi(1)},\ldots,v_{\pi(k)}) = \operatorname{sign}(\pi)\cdot\omega(v_1,\ldots,v_k).$$

Dabei ist $\operatorname{sign}(\pi)$ das Signum der Permutation π, d.h. $\operatorname{sign}(\pi)=(-1)^r$, wenn π Produkt von r Transpositionen ist.

Definition. (Äußeres Produkt oder Dachprodukt von Linearformen.) Seien $\varphi_1,\ldots,\varphi_k \in V^*$ Linearformen. Dann wird die Abbildung

$$\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k : V^k \to \mathbb{R}$$

definiert durch

$$(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k)(v_1,\ldots,v_k) := \det\begin{pmatrix} \langle\varphi_1,v_1\rangle & \ldots & \langle\varphi_1,v_k\rangle \\ \langle\varphi_2,v_1\rangle & \ldots & \langle\varphi_2,v_k\rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle\varphi_k,v_1\rangle & \ldots & \langle\varphi_k,v_k\rangle \end{pmatrix}.$$

Aus den Eigenschaften der Determinante folgt unmittelbar, dass $\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k$ eine alternierende k-Form ist, d.h.

$$\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k \in \textstyle\bigwedge^k V^*.$$

Eigenschaften des Dachprodukts

i) Das Dachprodukt ist linear in jedem Argument, d.h.

$$\begin{aligned} \varphi_1\wedge\ldots\wedge(\lambda\varphi_i'+\mu\varphi_i'')\wedge\ldots\wedge\varphi_k &= \lambda(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_i'\wedge\ldots\wedge\varphi_k) \\ &+ \mu(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_i''\wedge\ldots\wedge\varphi_k). \end{aligned}$$

ii) Das Dachprodukt ist alternierend, d.h.

$$\varphi_{\pi(1)}\wedge\ldots\wedge\varphi_{\pi(k)} = \operatorname{sign}(\pi)\cdot\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k$$

für jede Permutation π von $1,\ldots,k$.

Satz 1. *Sei $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ eine Basis von V^*. Dann bilden die Elemente*

$$\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}, \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n,$$

eine Basis von $\bigwedge^k V^*$. Insbesondere gilt

$$\dim \bigwedge^k V^* = \binom{n}{k}.$$

Für $k > n$ ist $\bigwedge^k V^* = 0$.

Beweis. Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine zu $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ duale Basis von V, d.h.

$$\langle \varphi_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Aus der Definition des Dachprodukts folgt dann für zwei k-tupel $i_1 < \ldots < i_k$ und $j_1 < \ldots < j_k$

$$(\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k})(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = \begin{cases} 1, & \text{falls} (i_1, \ldots, i_k) = (j_1, \ldots, j_k), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $\omega \in \bigwedge^k V^*$ beliebig. Für $i_1 < \ldots < i_k$ setzen wir

$$c_{i_1 \ldots i_k} := \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \in \mathbb{R}.$$

Man zeigt jetzt leicht, dass

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} c_{i_1 \ldots i_k} \varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}$$

und dass diese Darstellung eindeutig ist.

Satz 2. *Seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in V^*$ und*

$$\psi_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} \varphi_j, \quad i = 1, \ldots, k,$$

mit einer Matrix $(a_{ij}) \in M(k \times k, \mathbb{R})$. Dann gilt

$$\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k = \det(a_{ij}) \cdot \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k.$$

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass

$$\det(a_{ij}) = \sum_{\pi \in Per_k} \operatorname{sign}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdot \ldots \cdot a_{k\pi(k)},$$

wobei Per_k die Gruppe aller Permutationen von $1, \ldots, k$ bezeichne. Nun gilt

$$\begin{aligned}
\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k &= \left(\sum_{j_1=1}^{k} a_{1j_1} \varphi_{j_1} \right) \wedge \ldots \wedge \left(\sum_{j_k=1}^{k} a_{kj_k} \varphi_{j_k} \right) \\
&= \sum_{j_1, \ldots, j_k = 1}^{k} (a_{1j_1} \ldots a_{kj_k}) \varphi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{j_k} \\
&= \sum_{\pi \in Per_k} (a_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot a_{k\pi(k)}) \varphi_{\pi(1)} \wedge \ldots \wedge \varphi_{\pi(k)} \\
&= \sum_{\pi \in Per_k} \operatorname{sign}(\pi) (a_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot a_{k\pi(k)}) \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k \\
&= \det(a_{ij}) \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k, \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Satz 3 (Produkt von k- und l-Formen)**.** *Es gibt genau eine Abbildung*

$$\bigwedge^k V^* \times \bigwedge^l V^* \to \bigwedge^{k+l} V^*, \quad (\omega, \sigma) \mapsto \omega \wedge \sigma$$

mit folgenden Eigenschafen:

i) $\omega \wedge \sigma$ *ist linear in jedem Faktor, d.h.*

$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \sigma = \omega_1 \wedge \sigma + \omega_2 \wedge \sigma, \quad \omega \wedge (\sigma_1 + \sigma_2) = \omega \wedge \sigma_1 + \omega \wedge \sigma_2,$$

$$\lambda(\omega \wedge \sigma) = (\lambda\omega) \wedge \sigma = \omega \wedge (\lambda\sigma).$$

ii) *Sind* $\psi_1, \ldots, \psi_k, \eta_1, \ldots, \eta_l \in V^*$, *so gilt*

$$(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k) \wedge (\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_l) = \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k \wedge \eta_1 \wedge \ldots \eta_l.$$

Beweis. Sei $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ eine Basis von V^*. Man definiere für

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} a_{i_1 \ldots i_k} \varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}, \quad \sigma = \sum_{j_1 < \ldots < j_l} b_{j_1 \ldots j_l} \varphi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{j_l}$$

das Produkt durch

$$\omega \wedge \sigma := \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_k \\ j_1 < \ldots < j_l}} a_{i_1 \ldots i_k} b_{j_1 \ldots j_l} \varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k} \wedge \varphi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{j_l}.$$

Dieses Produkt hat die Eigenschaften i) und ii). Die Eindeutigkeit ist klar.

Bemerkung. Es ist nützlich, auch die Fälle $k = 0$ oder $l = 0$ zuzulassen. Für $a \in \mathbb{R}$ und $\omega \in \bigwedge^k V^*$ setzt man

$$a \wedge \omega = \omega \wedge a := a\omega.$$

Weitere Rechenregeln

iii) Für $\omega_1 \in \bigwedge^k V^*,\ \omega_2 \in \bigwedge^l V^*,\ \omega \in \bigwedge^m V^*$ gilt

$$(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3).$$

iv) Sei $\omega \in \bigwedge^k V^*$ und $\sigma \in \bigwedge^l V^*$. Dann gilt

$$\omega \wedge \sigma = (-1)^{kl} \sigma \wedge \omega.$$

Dabei folgt iii) ganz einfach aus ii) unter Benutzung von i). Die Regel iv) folgt ebenfalls aus ii), weil die Permutation

$$(1, \ldots, k, k+1, \ldots, k+l) \mapsto (k+1, \ldots, k+l, 1 \ldots, k)$$

das Signum $(-1)^{kl}$ hat.

Differentialformen

Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Unter einer *Differentialform der Ordnung k* (oder kurz *k-Form*) in U versteht man eine Abbildung

$$\omega : U \to \bigcup_{p \in U} \bigwedge^k T_p^*(U)$$

mit $\omega(p) \in \bigwedge^k T_p^*(U)$ für alle $p \in U$.

Für $k = 1$ erhält man wieder die Definition der Pfaffschen Formen. Eine Differentialform der Ordnung 0 ist nichts anderes als eine reellwertige Funktion.

Koordinatendarstellung

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die kanonischen Koordinatenfunktionen des $\mathbb{R}^n$. Nach Satz 1 bilden die Elemente

$$dx_{i_1}(p) \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}(p), \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n,$$

eine Basis von $\bigwedge^k T_p^*(U)$. Jede Differentialform ω der Ordnung k in U lässt sich also darstellen als

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} f_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

mit eindeutig bestimmten Funktionen

$$f_{i_1 \ldots i_k} : U \to \mathbb{R}.$$

Die Form ω heißt stetig (bzw. r-mal stetig differenzierbar), wenn alle Koeffizientenfunktionen $f_{i_1 \ldots i_k}$ stetig (bzw. r-mal stetig differenzierbar) sind.

Operationen auf Differentialformen

Seien $\omega, \tilde{\omega}$ zwei k-Formen in U und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind k-Formen $f\omega$ und $\omega + \tilde{\omega}$ definiert durch

$$(f\omega)(p) := f(p)\omega(p) \quad \text{und} \quad (\omega + \tilde{\omega})(p) := \omega(p) + \tilde{\omega}(p)$$

für alle $p \in U$. Ist weiter σ eine l-Form in U, so kann man eine $(k+l)$-Form $\omega \wedge \sigma$ definieren durch

$$(\omega \wedge \sigma)(p) := \omega(p) \wedge \sigma(p).$$

Für diese Operationen gelten analoge Rechenregeln wie die oben für alternierende Formen auf Vektorräumen abgeleiteten.

Ableitung von Differentialformen

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_k} f_{i_1\ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

eine stetig differenzierbare k-Form in U. Dann wird eine $(k+1)$-Form $d\omega$ definiert durch

$$d\omega := \sum_{i_1<\ldots<i_k} df_{i_1\ldots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Man nennt $d\omega$ *äußere Ableitung* oder *Differential* von ω.

Beispiele

(19.1) Pfaffsche Formen. Sei

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$$

eine stetig differenzierbare 1-Form. Da

$$df_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j,$$

gilt

$$d\omega = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i.$$

Wegen $dx_i \wedge dx_i = 0$ und $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ folgt schließlich

$$d\omega = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j.$$

(19.2) Differentialformen der Ordnung $n-1$. Der Vektorraum $\bigwedge^{n-1} T_p^*(U)$ hat die Dimension $\binom{n}{n-1} = n$; wir verwenden als Basis die Elemente

$$(-1)^{i-1}(dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n)(p), \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Dabei bedeutet das Dach über dx_i, dass dieser Faktor wegzulassen ist. Eine stetig differenzierbare $(n-1)$-Form in U schreibt sich deshalb als

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} f_i dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $f_i : U \to \mathbb{R}$. Da

$$(-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_n = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_i \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

folgt

$$d\omega = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Dies lässt sich folgendermaßen umschreiben: Wir fassen die Funktionen f_i zu einem Vektorfeld

$$f = (f_1, \ldots, f_n) : U \to \mathbb{R}^n$$

zusammen und definieren folgendes n-tupel von $(n-1)$-Formen:

$$d\vec{S} := (dS_1, \ldots, dS_n), \quad dS_i := (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

(Was $d\vec{S}$ mit dem in § 14 eingeführten Flächenelement dS zu tun hat, werden wir in § 20, Satz 3, untersuchen.)

Damit lässt sich ω formal als Skalarprodukt von f mit $d\vec{S}$ auffassen,

$$\omega = f \cdot d\vec{S} := \sum_{i=1}^{n} f_i dS_i.$$

Für $d\omega$ kann man nun schreiben

$$d(f \cdot d\vec{S}) = \operatorname{div}(f) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

wobei

$$\operatorname{div}(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

die Divergenz des Vektorfeldes f ist.

Satz 4. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge.*

i) *Seien ω_1, ω_2 stetig differenzierbare k-Formen in U und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$d(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) = \lambda d\omega_1 + \mu d\omega_2.$$

ii) *Sei ω eine stetig differenzierbare k-Form und σ eine stetig differenzierbare l-Form in U. Dann gilt*

$$d(\omega \wedge \sigma) = (d\omega) \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge (d\sigma).$$

iii) *Für jede zweimal stetig differenzierbare k-Form ω in U gilt*

$$d(d\omega) = 0.$$

Bezeichnung. Für die Rechnung mit Differentialformen ist manchmal folgende abkürzende Schreibweise nützlich. Statt

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} f_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

schreiben wir kurz

$$\omega = \sum_{|I|=k} f_I dx_I.$$

Dabei durchläuft I alle strikt aufsteigenden Multiindizes der Länge k,

$$I = (i_1, \ldots, i_k) \quad \text{mit } 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n,$$

und

$$dx_I := dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Diese Schreibweise verwenden wir auch im folgenden Beweis.

Beweis von Satz 4

Die Behauptung i) ist trivial.

Zu ii). Wir behandeln zunächst den Fall $k = l = 0$. Es mögen also zwei stetig differenzierbare Funktionen $f, g : U \to \mathbb{R}$ vorliegen. Aus der Produktregel

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(fg) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

folgt

$$d(fg) = gdf + fdg = df \wedge g + f \wedge dg.$$

Sei jetzt allgemein

$$\omega = \sum_{|I|=k} f_I dx_I, \quad \sigma = \sum_{|J|=l} g_J dx_J,$$

also

$$\omega \wedge \sigma = \sum_{I,J} f_I g_J dx_I \wedge dx_J.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \sigma) &= \sum_{I,J} (g_J df_I + f_I dg_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum_{I,J} (g_J df_I \wedge dx_I \wedge dx_J + (-1)^k f_I dx_I \wedge dg_J \wedge dx_J) \\ &= (d\omega) \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge (d\sigma). \end{aligned}$$

Zu iii). Wir behandeln wieder zunächst den Fall $k = 0$. Für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ gilt

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

und nach Beispiel (19.1)

$$d(df) = \sum_{i<j} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \right\} dx_i \wedge dx_j = 0.$$

Für eine zweimal stetig differenzierbare k-Form

$$\omega = \sum_{|I|=k} f_I dx_I$$

ist

$$d\omega = \sum_{|I|=k} df_I \wedge dx_I$$

und wegen

$$d(dx_I) = d1 \wedge dx_I = 0$$

folgt aus ii)

$$d(d\omega) = \sum_I \{d(df_I) \wedge dx_I - df_I \wedge d(dx_I)\} = 0.$$

Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

i) Eine stetig differenzierbare k-Form ω in U heißt *geschlossen*, falls

$$d\omega = 0.$$

ii) Für $k \geqslant 1$ heißt eine stetige k-Form ω in U *exakt* oder *total*, falls es eine stetig differenzierbare $(k-1)$-Form η in U gibt mit

$$\omega = d\eta.$$

Bemerkungen

1) Für 1-Formen haben wir den Begriff der Geschlossenheit bereits in § 18 definiert. Nach Beispiel (19.1) stimmen beide Definitionen überein. Eine 1-Form ist genau dann exakt, wenn sie eine Stammfunktion besitzt.

2) Wegen $d(d\omega) = 0$ ist eine exakte Differentialform, die Ableitung einer zweimal stetig differenzierbaren Form ist, auch geschlossen. Es erhebt sich die Frage, wann umgekehrt eine geschlossene Differentialform exakt ist. In sternförmigen Gebieten ist das stets der Fall, wie wir in Satz 6 beweisen werden.

Rücktransport von Differentialformen

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} f_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

eine k-Form in U. Weiter sei eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^m$ und eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : V \to U \subset \mathbb{R}^n$$

vorgegeben. Dann definiert man eine k-Form $\varphi^*\omega$ in V durch

$$\varphi^*\omega := \sum_{i_1 < \ldots < i_k} (f_{i_1 \ldots i_k} \circ \varphi) d\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_k}.$$

Beispiele

Wir wollen einige Spezialfälle genauer betrachten. Wir bezeichnen die kanonischen Koordinatenfunktionen im $\mathbb{R}^m$ mit $t_1, \ldots, t_m$, so dass also

$$d\varphi_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} dt_j.$$

(19.3) Sei $k = 1$, also

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i.$$

Dann ist

$$\varphi^* \omega = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (f_i \circ \varphi) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} dt_j,$$

d.h.

$$\varphi^* \omega = \sum_{j=1}^{m} g_j dt_j$$

mit

$$g_j = \sum_{i=1}^{n} (f_i \circ \varphi) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}.$$

In Matrizenschreibweise lässt sich dies folgendermaßen ausdrücken: Sei

$$D\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_m} \end{pmatrix}$$

die Funktionalmatrix von φ und seien

$$f = (f_1, \ldots, f_n), \quad g = (g_1, \ldots, g_m)$$

zu Zeilenvektoren zusammengefasst. Dann ist

$$g = (f \circ \varphi) D\varphi.$$

(19.4) Sei $m = k$. Nach Satz 2 ist dann

$$d\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_k} = \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_k})}{\partial(t_1, \ldots, t_k)} dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_k,$$

wobei

$$\frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_k})}{\partial(t_1, \ldots, t_k)} \quad \text{die Matrix} \quad \left(\frac{\partial \varphi_{i_\nu}}{\partial t_\mu} \right)_{1 \leqslant \nu, \mu \leqslant k}$$

bezeichnet. Also folgt für

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_k} f_{i_1\ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

$$\varphi^*\omega = g dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_k$$

mit

$$g = \sum_{i_1<\ldots<i_k} (f_{i_1\ldots i_k} \circ \varphi) \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_k})}{\partial(t_1, \ldots, t_k)}.$$

(19.5) Sei $m = k = n$. Durch Spezialisierung des vorigen Beispiels erhält man für

$$\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

$$\varphi^*\omega = g dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n$$

mit

$$g = (f \circ \varphi) \det(D\varphi).$$

Satz 5. *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und*

$$\varphi : V \to U$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Weiter seien $\omega, \omega_1, \omega_2$ Differentialformen der Ordnung k und σ eine Differentialform der Ordnung l in U, sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

i) $\varphi^*(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) = \lambda\varphi^*\omega_1 + \mu\varphi^*\omega_2$

ii) $\varphi^*(\omega \wedge \sigma) = (\varphi^*\omega) \wedge (\varphi^*\sigma)$

iii) *Ist ω stetig differenzierbar und φ zweimal stetig differezierbar, so gilt*

$$d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega).$$

iv) *Sei außerdem eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^p$ und eine stetig differenzierbare Abbildung*

$$\psi : W \to V$$

vorgegeben. Dann gilt

$$\psi^*(\varphi^*\omega) = (\varphi \circ \psi)^*\omega.$$

Beweis. Die Eigenschaften i) und ii) sind mehr oder weniger trivial.

Zu iii). Wir behandeln zunächst den Spezialfall $k = 0$. Sei also $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Nach der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} d(\varphi^* f) &= d(f \circ \varphi) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial t_j} dt_j \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \varphi\right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} dt_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \varphi\right) d\varphi_i \\ &= \varphi^* \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \varphi^*(df). \end{aligned}$$

Für eine beliebige stetig differenzierbare k-Form

$$\omega = \sum_I f_I dx_I \quad \text{ist} \quad \varphi^*\omega = \sum_I (f_I \circ \varphi) d\varphi_I$$

mit der Abkürzung

$$d\varphi_I := d\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_k} \quad \text{für} \quad I = (i_1, \ldots, i_k).$$

Da die Funktionen f_I stetig differenzierbar und φ_i zweimal stetig differenzierbar sind, ist die Differentialform $\varphi^*\omega$ wieder stetig differenzierbar.

Es folgt weiter unter Benutzung von ii)

$$\begin{aligned} d(\varphi^*\omega) &= \sum d(f_I \circ \varphi) \wedge d\varphi_I = \sum \varphi^*(df_I) \wedge \varphi^*(dx_I) = \\ &= \varphi^* \left(\sum df_I \wedge dx_I\right) = \varphi^*(d\omega). \end{aligned}$$

Zu iv). Sei $\Phi := \varphi \circ \psi$. Für $1 \leqslant i \leqslant n$ ist dann

$$\Phi_i = \varphi_i \circ \psi,$$

also nach iii)

$$d\Phi_i = d(\varphi_i \circ \psi) = \psi^*(d\varphi_i).$$

Daher folgt mit der Bezeichnung von iii)

$$\begin{aligned} \psi^*(\varphi^*\omega) &= \psi^* \left(\sum_I (f_I \circ \varphi) d\varphi_I \right) = \\ &= \sum (f_I \circ \varphi \circ \psi) \psi^*(d\varphi_I) = \sum (f_I \circ \Phi) d\Phi_I = \\ &= \Phi^* \left(\sum f_I dx_I\right) = (\varphi \circ \psi)^*\omega, \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Hilfssatz. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine offene Menge mit $[0,1] \times U \subset V$. Die Abbildungen*

$$\psi_0, \psi_1 : U \to V$$

seien definiert durch

$$\psi_0(x) := (0,x), \quad \psi_1(x) := (1,x).$$

Ist dann σ eine stetig differenzierbare geschlossene k-Form auf V, $(k \geqslant 1)$, so gibt es eine stetig differenzierbare $(k-1)$-Form η auf U mit

$$\psi_1^*\sigma - \psi_0^*\sigma = d\eta.$$

Beweis. Wir bezeichnen die Koordinaten in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ mit $t, x_1, \ldots, x_n$. Dann lässt sich σ schreiben als

$$\sigma = \sum_{|I|=k} f_I dx_I + \sum_{|J|=k-1} g_J dt \wedge dx_J$$

und es ist

$$\psi_1^*\sigma = \sum_I f_I(1,x)dx_I, \quad \psi_0^*\sigma = \sum_I f_I(0,x)dx_I.$$

Für das Differential $d\sigma$ ergibt sich

$$d\sigma = \sum_I \frac{\partial f_I}{\partial t}dt \wedge dx_I + \sum_I \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_I}{\partial x_i}dx_i \wedge dx_I - \sum_J \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_J}{\partial x_i}dt \wedge dx_i \wedge dx_J.$$

Da $d\sigma = 0$, gilt

$$\sum_I \frac{\partial f_I}{\partial t}dx_I = \sum_J \sum_i \frac{\partial g_J}{\partial x_i}dx_i \wedge dx_J.$$

Wir integrieren die Koeffizienten auf beiden Seiten über t von 0 bis 1. Da

$$\int_0^1 \frac{\partial f_I}{\partial t}(t,x)dt = f_I(1,x) - f_I(0,x)$$

und

$$\int_0^1 \frac{\partial g_J}{\partial x_i}(t,x)dt = \frac{\partial}{\partial x_i}\int_0^1 g_J(t,x)dt$$

erhält man

$$\psi_1^*\sigma - \psi_0^*\sigma = d\eta$$

mit

$$\eta := \sum_{|J|=k-1} \left(\int_0^1 g_J(t,x)dt\right) dx_J.$$

Satz 6 (Poincarésches Lemma)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges Gebiet und ω eine in U stetig differenzierbare geschlossene k-Form ($k \geqslant 1$). Dann ist ω exakt.*

Bemerkung. Dies ist eine Verallgemeinerung von § 18, Satz 4.

Beweis. Wir können annehmen, dass U sternförmig bzgl. des Nullpunkts ist. Sei

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi(t,x) := tx,$$

und $V := \varphi^{-1}(U)$. Dann gilt $[0,1] \times U \subset V$. Seien φ_0 und φ_1 wie im vorigen Hilfssatz definiert. Die k-Form

$$\sigma := \varphi^*\omega$$

auf V ist wegen Satz 5 iii) geschlossen, wir können also den Hilfssatz anwenden und erhalten eine $(k-1)$-Form η auf U mit

$$\psi_1^*\sigma - \psi_0^*\sigma = d\eta.$$

Da $\varphi \circ \psi_1 = id_U$ und $\varphi \circ \psi_0$ die konstante Abbildung auf 0 ist, folgt

$$\psi_1^*\sigma = \psi_1^*(\varphi^*\omega) = (\varphi \circ \psi_1)^*\omega = id_U^*\omega = \omega, \quad \psi_0^*\sigma = (\varphi \circ \psi_0)^*\omega = 0,$$

also $\omega = d\eta$, q.e.d.

Bemerkung

Man kann das Poincarésche Lemma auf folgende Weise elegant umformulieren.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig und $\Omega^k(U)$ der Vektorraum aller beliebig oft stetig differenzierbaren k-Formen in U. Für $\omega \in \Omega^k(U)$ ist $d\omega$ wieder beliebig oft differenzierbar, also ein Element aus $\Omega^{k+1}(U)$ und es gilt $d(d\omega) = 0$. Ist $d\omega = 0$, so kann man (falls $k \geqslant 1$) nach Satz 6 eine $(k-1)$-Form η finden, so dass $d\eta = \omega$. Aus dem Beweis ergibt sich, dass die konstruierte Form η ebenfalls beliebig oft stetig differenzierbar ist. Daraus folgt, dass die Sequenz

$$(*) \qquad 0 \to \mathbb{R} \to \Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \Omega^{n-1}(U) \xrightarrow{d} \Omega^n(U) \to 0$$

für sternförmiges U eine *exakte* Vektorraumsequenz ist, d.h. an jeder Stelle stimmen Bild und Kern überein, also

$$\mathrm{Im}(\Omega^{k-1}(U) \xrightarrow{d} \Omega^k(U)) = \mathrm{Ker}(\Omega^k(U) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(U)) \quad \text{für} \quad k \geqslant 1,$$

$$\mathrm{Ker}(\Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U)) = \mathbb{R}.$$

Die letzte Gleichung ist eine andere Form von §18, Satz 2. Ist U eine beliebige offene Menge, so ist die Sequenz $(*)$ nicht notwendig exakt, aber wegen $d \circ d = 0$ gilt $\mathrm{Im} \subset \mathrm{Ker}$, man kann also die Quotientenvektorräume

$$H^k_{DR}(U) := \frac{\mathrm{Ker}(\Omega^k(U) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(U))}{\mathrm{Im}(\Omega^{k-1}(U) \xrightarrow{d} \Omega^k(U))}, \quad (k \geqslant 0),$$

bilden. (Dabei setzt man $\Omega^{-1}(U) = 0$.)

Man nennt $H^k_{DR}(U)$ die k-te *de Rhamsche Cohomologiegruppe* von U. Das Poincarésche Lemma sagt also, dass

$$H^k_{DR}(U) = 0 \quad \text{für } k \geqslant 1, \quad \text{falls } U \text{ sternförmig.}$$

Aus § 18, Satz 6, folgt $H^1_{DR}(U) = 0$ für einfach zusammenhängendes U. Im allgemeinen kann man zeigen, dass $H^k_{DR}(U)$ nur von den topologischen Eigenschaften von U abhängt.

Vektoranalysis im $\mathbb{R}^3$

Wir wollen zeigen, wie sich die klassische Vektoranalysis in den Differentialformen-Kalkül einordnet.

In einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^3$ sei

$$f : U \to \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion und

$$a = (a_1, a_2, a_3) : U \to \mathbb{R}^3$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Man hat die Operationen

$$\operatorname{grad} f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right),$$

$$\operatorname{rot} a := \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}, \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}, \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right),$$

$$\operatorname{div} a := \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}.$$

Diese Operationen sind alle nur ein Spezialfall der äußeren Ableitung von Differentialformen. Dazu betrachten wir

1) das „vektorielle Streckenelement"

$$d\vec{s} = (dx_1, dx_2, dx_3),$$

2) das „vektorielle Flächenelement"

$$d\vec{S} = (dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2),$$

3) das „Volumenelement"

$$dV = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Differentialformen der Ordnung 0,1,2,3 in U schreiben sich damit als

$$\omega_0 = f, \quad \omega_1 = a \cdot d\vec{s}, \quad \omega_2 = b \cdot d\vec{S}, \quad \omega_3 = g dV$$

mit Funktionen $f, g :\to \mathbb{R}$ und Vektorfeldern $a, b : U \to \mathbb{R}^3$. Sind f, a, b stetig differenzierbar, so kann man die Differentiale bilden und erhält

i) $df = \operatorname{grad} f \cdot d\vec{s}$,

ii) $d(a \cdot d\vec{s}) = \operatorname{rot} a \cdot d\vec{S}$,

iii) $d(b \cdot d\vec{S}) = \operatorname{div} b \, dV$.

Dabei folgt i) aus der Formel $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$, ii) aus Beispiel (19.1) und iii) aus Beispiel (19.2).

Folgerungen aus $d \circ d = 0$

Wendet man die Formel $d(d\omega) = 0$ auf 0- und 1-Formen an, so erhält man:

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $a : U \to \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} a = 0.$$

Folgerungen aus dem Poincaréschen Lemma

Sei jetzt $U \in \mathbb{R}^3$ eine sternförmige offene Menge. Das Poincarésche Lemma, zusammen mit den Darstellungen i), ii) und iii) für die äußere Ableitung, ergibt die folgenden Aussagen:

a) Ist $a : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $\operatorname{rot} a = 0$, so existiert eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit

$$a = \operatorname{grad} f.$$

b) Ist $b : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $\operatorname{div} b = 0$, so existiert ein stetig differenzierbares Vektorfeld $a : U \to \mathbb{R}^3$ mit

$$b = \operatorname{rot} a.$$

AUFGABEN

19.1. In einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^3$ seien drei Vektorfelder $a, b, c : U \to \mathbb{R}^3$ gegeben. Man zeige

$$\begin{aligned}
&(a \cdot d\vec{s}) \wedge (b \cdot d\vec{s}) = (a \times b) \cdot d\vec{S},\\
&(a \cdot d\vec{s}) \wedge (b \cdot d\vec{S}) = \langle a, b \rangle dV,\\
&(a \cdot d\vec{s}) \wedge (b \cdot d\vec{s}) \wedge (c \cdot d\vec{s}) = \det(a, b, c) dV.
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

das Vektorprodukt von a mit b.

19.2. Im $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ seien die Koordinaten mit x_1, x_2, x_3, t bezeichnet. Sei

$$\begin{aligned}
d\vec{s} &= (dx_1, dx_2, dx_3),\\
d\vec{S} &= (dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2),\\
dV &= dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.
\end{aligned}$$

Man zeige, dass sich Differentialformen der Ordnung 0,1,2,3,4 in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^4$ wie folgt schreiben lassen:

$$\omega_0 = f, \quad \omega_1 = a \cdot d\vec{s} + f dt, \quad \omega_2 = a \cdot d\vec{s} \wedge dt + b \cdot d\vec{S},$$

$$\omega_3 = a \cdot d\vec{S} \wedge dt + f dV, \quad \omega_4 = f dV \wedge dt,$$

mit „zeitabhängigen Vektorfeldern“

$$a, b : U \to \mathbb{R}^3$$

und „zeitabhängigen Skalarfeldern“

$$f : U \to \mathbb{R}.$$

Man berechne die äußeren Ableitungen von ω_j in dieser Schreibweise und ziehe Folgerungen aus $d \circ d = 0$ und dem Poincaréschen Lemma.

19.3. Es sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\ \sin\vartheta\ \cos\varphi \\ r\ \sin\vartheta\ \sin\varphi \\ r\ \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

In einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^3$ seien Differentialformen

$$\omega_1 = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz,$$

$$\omega_2 = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy$$

gegeben. Sei $V = \Phi^{-1}(U)$ und

$$\Phi^*\omega_1 = g_1 dr + g_2 d\vartheta + g_3 d\varphi,$$

$$\Phi^*\omega_2 = G_1 d\vartheta \wedge d\varphi + G_2 d\varphi \wedge dr + G_3 dr \wedge d\vartheta.$$

Man berechne die Funktionen $g_j, G_j : V \to \mathbb{R}$.

19.4. Im $\mathbb{R}^3$ sei ω die Differentialform

$$\omega = 2xz\ dy \wedge dz + dz \wedge dx - (z^2 + e^x) dx \wedge dy.$$

Man zeige $d\omega = 0$ und bestimme eine 1-Form η mit $\omega = d\eta$.

§ 20 Integration von Differentialformen

Während Pfaffsche Formen über Kurven integriert werden, sind die Integrationsbereiche für k-Formen k-dimensionale Untermannigfaltigkeiten. Dabei spielt der Begriff der Orientierung eine große Rolle, den wir in diesem Paragraphen eingehend diskutieren. Speziell für Hyperflächen ist die Orientierung gleichbedeutend mit der Vorgabe eines Normalen-Einheitsfeldes. Insbesondere kann für ein Kompaktum mit glattem Rand im $\mathbb{R}^n$ der Rand durch das äußere Normalenfeld kanonisch orientiert werden. Wir behandeln in diesem Paragraphen außerdem für Hyperflächen den Zusammenhang zwischen der Integration von $(n-1)$-Formen und der Integration von Funktionen bzgl. des Flächenelements.

Integration von n-Formen

In einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ sei

$$\omega = f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

eine n-Form. ω heißt integrierbar über eine Borelsche Teilmenge $A \subset U$, wenn $f \mid A$ integrierbar ist und man setzt

$$\int_A \omega := \int_A f(x) d^n x.$$

Insbesondere ist eine stetige n-Form ω in U über jede kompakte Teilmenge $A \subset U$ integrierbar. Im Folgenden beschränken wir uns auf diesen einfachen Fall.

Wir werden jetzt die Transformationsformel für mehrfache Integrale umformulieren für Differentialformen. Dazu führen wir folgenden Begriff ein.

Definition. Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen und sei

$$\varphi : U \to V$$

eine C^1-invertierbare Abbildung. Man nennt φ *orientierungstreu*, falls

$$\det D\varphi(x) > 0 \quad \text{für alle} \quad x \in U.$$

φ heißt *orientierungsumkehrend*, falls

$$\det D\varphi(x) < 0 \quad \text{für alle} \quad x \in U.$$

Bemerkung. Ist U zusammenhängend, so tritt genau eine der beiden Möglichkeiten auf. Denn die Funktion $F := \det D\varphi$ ist auf U stetig und nirgends null. Ist $\alpha : [0,1] \to U$ eine (stetige) Kurve in U, so hat die Funktion

$$F \circ \alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$$

wegen des Zwischenwertsatzes an den Stellen 0 und 1 dasselbe Vorzeichen, d.h. F hat am Anfangs- und Endpunkt der Kurve dasselbe Vorzeichen. Ist deshalb $\det D\varphi(x_0)$

O. Forster, *Analysis 3*, Aufbaukurs Mathematik,
DOI 10.1007/978-3-8348-2374-8_20, © Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden 2012

positiv (bzw. negativ) für einen einzigen Punkt $x_0 \in U$, so ist es überall in U positv (bzw. negativ).

Satz 1. *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und*

$$\varphi : U \to V$$

eine C^1-invertierbare Abbildung. Weiter sei ω eine stetige n-Form auf V und $A \subset U$ eine kompakte Teilmenge. Dann gilt

$$\int_{\varphi(A)} \omega = \int_A \varphi^* \omega, \quad \textit{falls } \varphi \textit{ orientierungstreu},$$

$$\int_{\varphi(A)} \omega = -\int_A \varphi^* \omega, \quad \textit{falls } \varphi \textit{ orientierungsumkehrend}.$$

Beweis. Sei $\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Nach Beispiel (19.5) gilt dann

$$\varphi^* \omega = (f \circ \varphi) \det D\varphi \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

und die Behauptung folgt aus der Transformationsformel

$$\int_{\varphi(A)} f(x) d^n x = \int_A f(\varphi(x)) |\det D\varphi(x)| d^n x.$$

Um auch k-Formen integrieren zu können, brauchen wir den Begriff der Orientierung einer Untermannigfaltigkeit.

Orientierung von Untermannigfaltigkeiten

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit $(k \geqslant 1)$. Wir erinnern an den Begriff der Karte (§ 14, Satz 4):

Dabei handelt es sich um einen Homöomorphismus

$$\varphi : T \xrightarrow{\sim} V \subset M \subset \mathbb{R}^n$$

einer offenen Menge $T \subset \mathbb{R}^k$ auf eine offene Menge $V \subset M$, so dass φ, als Abbildung in den $\mathbb{R}^n$ aufgefasst, eine Immersion ist, d.h. stetig differenzierbar und

$$\text{Rang } D\varphi(t) = k \quad \text{für alle} \quad t \in T.$$

Seien nun

$$\varphi_j : T_j \xrightarrow{\sim} V_j \subset M \subset \mathbb{R}^n, \quad j = 1, 2,$$

zwei Karten von M und $W_j := \varphi_j^{-1}(V_1 \cap V_2)$. Dann gibt es nach § 14, Satz 5, eine C^1-invertierbare Abbildung („Parameter-Transformation“)

$$\tau : W_1 \to W_2,$$

so dass $\varphi_1 \mid W_1 = \varphi_2 \circ \tau$. Man nennt die Karten $\varphi_1 : T_1 \to V_1$ und $\varphi_2 : T_2 \to V_2$ *gleich orientiert*, falls die Parameter-Transformation τ orientierungstreu ist.

Eine Menge $\mathfrak{A} = \{(\varphi_j : T_j \to V_j) : j \in J\}$ von Karten von M heißt *Atlas von M,* falls

$$M = \bigcup_{j \in J} V_j.$$

Der Atlas $\mathfrak{A}$ heißt *orientiert*, wenn je zwei Karten von $\mathfrak{A}$ gleich orientiert sind. Eine *Orientierung* σ von M wird gegeben durch einen orientierten Atlas von M. Dabei definieren zwei Atlanten $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ dieselbe Orientierung von M, wenn jede Karte aus $\mathfrak{A}$ mit jeder Karte aus $\mathfrak{A}'$ gleich orientiert ist.

Exakt ausgedrückt ist deshalb eine Orientierung σ von M eine Äquivalenzklasse von orientierten Atlanten von M nach folgender Äquivalenzrelation: Man setzt

$$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{A}',$$

wenn gilt: Je zwei Karten $(\varphi : T \to V) \in \mathfrak{A}$ und $(\psi : S \to W) \in \mathfrak{A}'$ sind gleich orientiert. Eine Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *orientierbar*, wenn M einen orientierten Atlas besitzt. Eine *orientierte* Untermannigfaltigkeit ist ein Paar (M, σ), wobei M eine Untermannigfaltigkeit und σ eine Orientierung von M ist.

Sei (M, σ) eine orientierte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $\mathfrak{A}$ ein zu σ gehörender orientierter Atlas. Eine Karte

$$\varphi : T \to V \subset M$$

von M heißt *positiv orientiert* bzgl. σ, falls $(\varphi : T \to V)$ mit jeder Karte von $\mathfrak{A}$ gleich orientiert ist. (Dann ist auch

$$\mathfrak{A}' := \mathfrak{A} \cup \{\varphi : T \to V\}$$

ein orientierter Atlas von M und gehört ebenfalls zur Orientierung σ.)

Beispiele

(20.1) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Dann kann U als n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ aufgefasst werden. Die identische Abbildung

$$id_U : U \to U$$

ist eine Karte und bildet für sich allein einen Atlas von U. Unter der *kanonischen Orientierung* von U versteht man die Orientierung, die durch den aus der Karte $id_U : U \to U$ bestehenden Atlas definiert wird. Sei

$$\varphi : T \to V \subset U$$

eine weitere Karte von U, d.h. ein C^1-Diffeomorphismus einer offenen Menge $T \subset \mathbb{R}^n$ auf eine offene Teilmenge V von U. Genau dann ist φ positiv orientiert bzgl. der kanonischen Orientierung von U, falls

$$\det D\varphi(t) > 0 \quad \text{für alle} \quad t \in T.$$

(20.2) Jede Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$, die Bild einer einzigen Karte

$$\varphi : T \xrightarrow{\sim} M$$

ist, ist orientierbar mit dem aus dieser einzigen Karte bestehenden Atlas.

(20.3) Die 1-Sphäre

$$S_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

ist eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$. Es gibt einen aus zwei Karten bestehenden Atlas von S_1:

$$\varphi_1 : T_1 := \,]-\pi, \pi[\, \xrightarrow{\sim} S_1 \smallsetminus (-1, 0),$$

$$\varphi_2 : T_2 := \,]0, 2\pi[\, \xrightarrow{\sim} S_1 \smallsetminus (1, 0),$$

wobei $\varphi_j(t) := (\cos t, \sin t)$ für $t \in T_j$. Für die Parameter-Transformation

$$\tau : T_1 \smallsetminus \{0\} \to T_2 \smallsetminus \{\pi\}$$

mit

$$\tau(t) = \begin{cases} t + 2\pi & \text{für } -\pi < t < 0, \\ t & \text{für } 0 < t < \pi, \end{cases}$$

gilt $\varphi_1 | T_1 \smallsetminus 0 = \varphi_2 \circ \tau$. Da $\tau'(t) > 0$ für alle $t \in T_1 \smallsetminus 0$, ist $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ ein orientierter Atlas, definiert also eine Orientierung von S_1.

Umkehrung der Orientierung

Nicht jede Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ ist orientierbar. Wenn jedoch eine Orientierung existiert, so auch eine zweite, dazu entgegengesetzte.

Sei dazu (M, σ) eine (nicht-leere) orientierte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und

$$\mathfrak{A} = \{(\varphi_j : T_j \to V_j) : j \in J\}$$

ein zu σ gehörender orientierter Atlas von M. Wir definieren eine orientierungsumkehrende Abbildung

$$\iota : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k, \quad \iota(x_1, x_2, \ldots, x_k) := (x_1, \ldots, x_{k-1}, -x_k).$$

Es gilt $\iota^2 = id_{\mathbb{R}^k}$. Wir setzen $\tilde{T}_j := \iota(T_j)$ und

$$\tilde{\varphi}_j := \varphi_j \circ \iota : \tilde{T}_j \to V_j.$$

Dann ist $\widetilde{\mathfrak{A}} = \{(\tilde{\varphi}_j : \tilde{T}_j \to V_j) : j \in J\}$ wieder ein orientierter Atlas von M, denn für die Parameter-Transformationen gilt

$$\tilde{\varphi}_j^{-1} \circ \tilde{\varphi}_l = \iota \circ (\varphi_j^{-1} \circ \varphi_l) \circ \iota,$$

(die Bezeichnung der Beschränkung auf den jeweiligen Definitionsbereich wurde weggelassen). Ist $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_l$ orientierungstreu, so auch $\tilde{\varphi}_j^{-1} \circ \tilde{\varphi}_l$. Die durch $\widetilde{\mathfrak{A}}$ definierte Orientierung wird mit $-\sigma$ bezeichnet. Sie ist von σ verschieden und heißt die σ entgegengesetze Orientierung. Es gilt $-(-\sigma) = \sigma$.

Eine Karte

$$\varphi : T \xrightarrow{\sim} V \subset M$$

heißt *negativ orientiert* bzgl. σ, wenn sie positiv orientiert bzgl. $-\sigma$ ist.

Bemerkung. Sei (M, σ) eine orientierte Untermannigfaltigkeit und

$$\varphi : T \xrightarrow{\sim} V \subset M$$

eine Karte von M, so dass $T \subset \mathbb{R}^k$ eine *zusammenhängende* offene Menge ist. Dann sieht man leicht, dass φ entweder positiv orientiert oder negativ orientiert bzgl. σ ist. Falls φ negativ orientiert ist, kann man daraus mittels der Transformation ι die positiv orientierte Karte

$$\varphi \circ \iota : \iota(T) \xrightarrow{\sim} V \subset M$$

konstruieren. Es ist klar, dass es Karten $\varphi : T \to V \subset M$ mit unzusammenhängenden T gibt, die weder positiv noch negativ orientiert sind.

Integration von k-Formen

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und ω eine stetige k-Form in U. Sei $M \subset U$ eine in U enthaltene orientierbare k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und σ eine Orientierung von M. Für eine kompakte Teilmenge $A \subset M$ soll das Integral

$$\int_{(A,\sigma)} \omega$$

definiert werden.

a) Sei zunächst vorausgesetzt, dass es eine positiv orientierte Karte

$$\varphi : T \xrightarrow{\sim} V \subset M$$

von (M, σ) gibt, so dass $A \subset V$. Dann setzt man

$$\int_{(A,\sigma)} \omega := \int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^* \omega.$$

Wir zeigen, dass diese Definition unabhängig von der gewählten Karte ist. Sei

$$\varphi_1 : T_1 \xrightarrow{\sim} V_1 \subset M$$

eine weitere positiv orientierte Karte mit $A \subset V_1$. Wir dürfen annehmen, dass $V = V_1$. Es gibt dann eine orientierungstreue Parameter-Transformation

$$\tau : T \to T_1$$

mit $\varphi = \varphi_1 \circ \tau$. Aus Satz 1 folgt nun

$$\int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^*\omega = \int_{\varphi^{-1}(A)} (\varphi_1 \circ \tau)^*\omega = \int_{\tau^{-1}(\varphi_1^{-1}(A))} \tau^*(\varphi_1^*\omega) = \int_{\varphi_1^{-1}(A)} \varphi_1^*\omega.$$

b) Der Fall, dass A nicht in einer Karte enthalten ist, wird mit Hilfe einer Teilung der Eins auf den vorherigen Fall zurückgeführt.

Es gibt in jedem Fall eine endliche Familie $(\alpha_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ stetiger Funktionen

$$\alpha_j : M \to \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften:

i) $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \alpha_j(x) = 1 \quad$ für alle $\quad x \in A$.

ii) Zu jedem j existiert eine positiv orientierte Karte

$$\varphi_j : T_j \xrightarrow{\sim} V_j \subset M$$

mit $A_j := A \cap \operatorname{Supp}(\alpha_j) \subset V_j$.

Man setzt dann

$$\int_{(A,\sigma)} \omega := \sum_{j=1}^{m} \int_{\varphi_j^{-1}(A_j)} (\alpha_j \circ \varphi_j)\varphi_j^*\omega.$$

Ähnlich wie §14 zeigt man, dass diese Definition unabhängig von der gewählten Teilung der Eins und der Wahl der Karten ist.

Bemerkungen

1) In der Bezeichnung lässt man meist die Angabe der Orientierung weg und schreibt nur $\int_A \omega$, wenn klar ist, um welche Orientierung es sich handelt. Man beachte aber, dass das Integral von der gewählten Orientierung abhängt, denn es gilt

$$\int_{(A,-\sigma)} \omega = -\int_{(A,\sigma)} \omega,$$

wie aus Satz 1 folgt.

2) Sei $M \subset U \subset \mathbb{R}^n$ eine orientierte eindimensionale Untermannigfaltigkeit und

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$$

eine stetige 1-Form in U. Sei

$$\varphi : I \xrightarrow{\sim} V \subset M$$

eine positiv orientierte Karte von M mit einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$, also eine stetig differenzierbare Kurve. Sei $[a,b] \subset I$ ein kompaktes Teilintervall und $A := \varphi([a,b])$. Da

$$\varphi^*\omega = \sum_{i=1}^{n} (f_i \circ \varphi)\varphi_i' dt,$$

stimmt das in § 18 definierte Kurvenintegral

$$\int_{\varphi|[a,b]} \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b f_i(\varphi(t))\varphi_i'(t)dt$$

mit dem hier definierten Integral

$$\int_A \omega = \int_{[a,b]} \varphi^* \omega$$

überein.

Orientierung der Tangentialvektorräume

Sei $(v_1, \ldots, v_k)$ eine Basis von $\mathbb{R}^k$. Diese Basis heißt *positiv orientiert* (bzgl. der kanonischen Orientierung des $\mathbb{R}^k$), falls

$$\det(v_1, \ldots, v_k) > 0.$$

(Hier sind die v_j als Spaltenvektoren aufzufassen.)

Sei jetzt (M, σ) eine k-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und

$$\varphi : \Omega \xrightarrow{\sim} V \subset M \subset \mathbb{R}^n, \quad (\Omega \subset \mathbb{R}^k \quad \text{offen}),$$

eine positiv orientierte Karte. Sei $c \in \Omega$ und $a := \varphi(c)$. In § 15, Satz 1, haben wir gesehen, dass die Vektoren

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(c), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(c)$$

eine Basis von $T_a M \subset \mathbb{R}^n$ bilden. Daraus folgt, dass die Abbildung

$$D\varphi(c) : \mathbb{R}^k \to T_a M$$

ein Isomorphismus ist. (Die Funktionalmatrix $D\varphi(c)$ ist eine $n \times k$ -Matrix mit den Spalten $\frac{\partial \varphi}{\partial t_j}(c), 1 \leqslant j \leqslant k.$)

Man nennt nun eine Basis $(v_1, \ldots, v_k)$ von $T_a M$ *positv orientiert* bzgl. σ, falls sie Bild einer positiv orientierten Basis von $\mathbb{R}^k$ bei der Abbildung $D\varphi(c)$ ist. Insbesondere ist die Basis

$$\mathcal{B} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(c), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(c) \right)$$

positiv orientiert, denn sie ist Bild der kanonischen Basis $(e_1, \ldots, e_k)$ des $\mathbb{R}^k$. Jede andere positiv orientierte Basis von $T_a M$ geht aus $\mathcal{B}$ durch eine lineare Transformation mit positiver Determinante hervor. Daraus folgt auch, dass die Definition unabhängig von der Wahl der positiv orientierten Karte ist, die den Punkt a enthält.

Orientierung von Hyperflächen

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche, d.h. eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Unter einem *Einheits-Normalenfeld* von M versteht man eine stetige Abbildung

$$\nu : M \to \mathbb{R}^n,$$

so dass für jedes $a \in M$ der Vektor $\nu(a)$ ein Normalenvektor von M in a ist (d.h. senkrecht auf T_aM steht) und die Länge 1 hat.

Besitzt M eine Orientierung σ, so heißt das Einheits-Normalenfeld ν *positiv orientiert* bzgl. σ, wenn für jedes $a \in M$ folgende Bedingung erfüllt ist:

Sei $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ eine positiv orientierte Basis von T_aM. Dann ist

$$(\nu(a), v_1, \ldots, v_{n-1})$$

eine positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^n$, d.h.

$$\det(\nu(a), v_1 \ldots, v_{n-1}) > 0.$$

Bemerkung. Gilt

$$\det(\nu(a), v_1 \ldots, v_{n-1}) > 0$$

für eine positv orientierte Basis $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ von T_aM, so gilt auch

$$\det(\nu(a), w_1 \ldots, w_{n-1}) > 0$$

für jede andere positiv orientierte Basis $(w_1, \ldots, w_{n-1})$ von T_aM. Denn

$$(w_1, \ldots, w_{n-1}) = (v_1, \ldots, v_{n-1}) \cdot A,$$

wobei $A \in M((n-1) \times (n-1), \mathbb{R})$ eine Matrix positiver Determinante ist.

Der folgende Satz gibt den Zusammenhang zwischen der Existenz von Normalenfeldern und Orientierungen.

Satz 2. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche $(n \geqslant 2)$.*

a) Besitzt M eine Orientierung σ, so gibt es genau ein Einheits-Normalenfeld

$$\nu : M \to \mathbb{R}^n,$$

das positiv orientiert bzgl. σ ist.

b) M besitze ein Einheits-Normalenfeld ν. Dann existiert genau eine Orientierung σ von M, bzgl. der ν positiv orientiert ist.

Beweis.

a) Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Da der Normalenvektorraum N_aM eindimensional ist, gibt es genau zwei Vektoren $w, -w \in N_aM$ der Länge eins. Sei $v_1, \ldots, v_{n-1}$ eine bzgl. σ positiv orientierte Basis von T_aM und

$$\operatorname{sign}\, \det(w, v_1, \ldots, v_{n-1}) =: \varepsilon \in \{+1, -1\}.$$

Dann ist notwendig $\nu(a) = \varepsilon w$.

Um die Existenz zu zeigen, definieren wir $\nu(a)$ für $a \in M$ auf die oben beschriebene Weise. Es bleibt zu zeigen, dass ν auf M stetig ist. Dazu wählen wir einen festen Punkt $p \in M$. In einer Umgebung von p gibt es ein stetiges Feld $\tilde{\nu}$ von Normalen-Einheitsvektoren. Zum Beispiel kann man wählen

$$\tilde{\nu} = \frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|},$$

wenn $f = 0$ eine lokale Gleichung von M im Sinne der Definition aus § 14 ist. Indem man nötigenfalls zum Negativen übergeht, kann man annehmen dass $\tilde{\nu}(p) = \nu(p)$. Sei jetzt

$$\varphi : \Omega \to V \subset M, \quad (\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1} \quad \text{offen}),$$

eine positiv orientierte Karte in einer Umgebung von p und $c \in \Omega$ mit $\varphi(c) = p$. Wir betrachten die Funktion

$$t \mapsto \triangle(t) := \det\left(\tilde{\nu}(\varphi(t)), \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_1}, \ldots \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_{n-1}}\right),$$

die in einer Umgebung von $c \in \Omega$ definiert und stetig ist. Nach Voraussetzung ist $\triangle(c) > 0$, da $\tilde{\nu}(\varphi(c)) = \nu(p)$. Wegen der Stetigkeit gilt dann auch $\triangle(t) > 0$ für alle t aus einer Umgebung Ω' von c. Daraus folgt umgekehrt $\tilde{\nu}(\varphi(t)) = \nu(\varphi(t))$ für alle $t \in \Omega'$. Also stimmen $\tilde{\nu}$ und ν in einer Umgebung von p überein, d.h. ν ist bei p stetig.

b) Sei ein (stetiges) Einheits-Normalenfeld $\nu : M \to \mathbb{R}^n$ vorgegeben. Wir konstruieren einen orientierten Atlas auf folgende Weise. Zu jedem Punkt $p \in M$ gibt es eine Karte

$$\varphi : \Omega \xrightarrow{\sim} V \subset M,$$

mit $p \in V$, wobei Ω eine zusammenhängende offene Menge in $\mathbb{R}^{n-1}$ ist. Die stetige Funktion $\triangle : \Omega \to \mathbb{R}^*$,

$$\triangle(t) := \det\left(\nu(\varphi(t)), \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_{n-1}}\right),$$

hat, da Ω zusammenhängt, überall dasselbe Vorzeichen. Indem man evtl. die Transformation

$$(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) \mapsto (t_1, \ldots, t_{n-2}, -t_{n-1})$$

vorschaltet, darf man annehmen, dass $\triangle > 0$ auf Ω. Sei $\mathfrak{A}$ die Menge aller solchen Karten. Wir zeigen, dass je zwei Karten

$$\varphi : \Omega \to V \quad \text{und} \quad \tilde{\varphi} : \tilde{\Omega} \to \tilde{V}$$

aus $\mathfrak{A}$ gleich orientiert sind. Sei

$$\tau : W \to \tilde{W}, \quad (W = \varphi^{-1}(V \cap \tilde{V}),\ \tilde{W} = \tilde{\varphi}^{-1}(V \cap \tilde{V})),$$

die Transformation zwischen diesen beiden Karten, d.h.

$$\varphi \mid W = \tilde{\varphi} \circ \tau.$$

Wir setzen $v_j := \partial\varphi/\partial t_j,\ \tilde{v}_j := \partial\tilde{\varphi}/\partial t_j$. Für $c \in W, \tilde{c} := \tau(c) \in \tilde{W}$ gilt dann

$$v_j(c) = \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{v}_i(\tilde{c})\alpha_{ij},\ (\alpha_{ij}) := D\tau(c).$$

Da für $p := \varphi(c) = \tilde{\varphi}(\tilde{c})$

$$\det(\nu(p), v_1(c), \ldots, v_{n-1}(c)) > 0,$$

$$\det(\nu(p), \tilde{v}_1(\tilde{c}), \ldots, \tilde{v}_{n-1}(\tilde{c})) > 0,$$

folgt $\det(\alpha_{ij}) = \det D\tau(c) > 0$. Also sind die Karten φ und $\tilde{\varphi}$ gleich orientiert und der Atlas $\mathfrak{A}$ definiert die gesuchte Orientierung von M. Die Eindeutigkeit ist klar.

Beispiele

(20.4) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand (siehe § 15). Dann ist der Rand ∂A eine Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$ und es existiert das äußere Einheits-Normalenfeld $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^n$. Infolgedessen ist ∂A orientierbar. Wir nennen diejenige Orientierung des Randes ∂A, bzgl. derer das äußere Normalenfeld positiv orientiert ist, die *kanonische Orientierung* von ∂A.

(20.5) Die 2-Sphäre

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$$

sei kanonisch orientiert als Rand der Einheitskugel. Wir betrachten folgende Karte:

Sei $\Omega :=]0,\pi[\times]\alpha, \alpha + 2\pi[\subset \mathbb{R}^2$ und

$$\Phi : \Omega \xrightarrow{\sim} \Phi(\Omega) \subset S_2,$$

$$\Phi(\vartheta, \varphi) := (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta).$$

Behauptung. Die Karte Φ ist positiv orientiert.

Beweis. Für $x \in S_2$ ist der äußere Normaleneinheitsvektor $\nu(x) = x$. Es ist also zu zeigen, dass

$$\det\left(\Phi(\vartheta,\varphi), \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}(\vartheta,\varphi), \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}(\vartheta,\varphi)\right) > 0$$

für alle $(\vartheta, \varphi) \in \Omega$. In der Tat berechnet man diese Determinante als

$$\det\begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta\cos\varphi & -\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix} = \sin\vartheta > 0.$$

(20.6) Möbiusband. Für $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ definieren wir Vektoren $a_\varphi, b_\varphi(\psi) \in \mathbb{R}^3$ wie folgt

$$a_\varphi := (\cos\varphi, \sin\varphi, 0),$$

$$b_\varphi(\psi) := a_\varphi \cos\psi + e_3 \sin\psi, \quad e_3 = (0,0,1).$$

Es sei $R > 1$, $I := \,]-1,1[\, \subset \mathbb{R}$ und $B := [-\pi,\pi] \times I$. Wir definieren eine Abbildung Φ durch

$$\Phi : B \to \mathbb{R}^3, \quad \Phi(\varphi,t) := Ra_\varphi + tb_\varphi(\varphi/2).$$

Dann ist $M := \Phi(B)$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, das sog. Möbiusband (Bild 20.1).

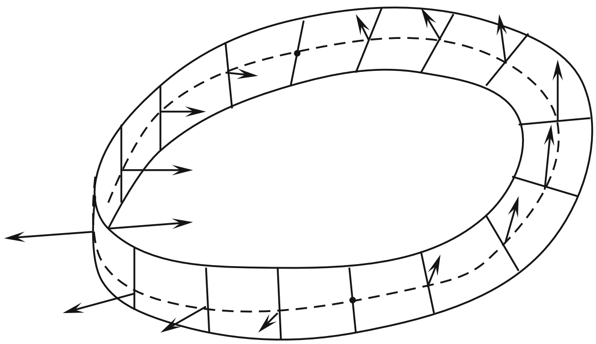


Bild 20.1

Man beachte, dass Φ nicht injektiv ist. Φ ist jedoch injektiv auf $B \setminus (\{\pi\} \times I)$ und es gilt

$$\Phi(\{\pi\} \times I) = \Phi(\{-\pi\} \times I),$$

da

$$\Phi(\pi,t) = (-R,0,t), \quad \Phi(-\pi,t) = (-R,0,-t).$$

Man kann sich M aus B entstanden denken durch Identifikation von $\{\pi\} \times I$ mit $\{-\pi\} \times I$ vermöge

$$(\pi,t) \sim (-\pi,-t).$$

Wir wollen zeigen, dass M nicht orientierbar ist. Im Punkt $p := \Phi(\varphi,0)$ bilden die Vektoren

$$v_1 := \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}(\varphi,0) = R(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$$

$$v_2 := \frac{\partial\Phi}{\partial t}(\varphi,0) = b_\varphi(\varphi/2)$$

eine Basis des Tangentialraums T_pM. Daraus folgt, dass der Normalenvektorraum gleich

$$N_pM = \mathbb{R}b_\varphi\left(\frac{\varphi+\pi}{2}\right)$$

ist und die beiden Einheitsvektoren $b_\varphi(\frac{\varphi\pm\pi}{2})$ enthält. Gäbe es ein (stetiges) Einheits-Normalenfeld $\nu : M \to \mathbb{R}^3$, gäbe es auch eines mit

$$\nu(\Phi(0,0)) = b_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = e_3.$$

Stetige Fortsetzung längs $\Phi(\varphi,0)$, $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$, würde liefern

$$\nu(\Phi(\varphi,0)) = b_\varphi\left(\frac{\varphi+\pi}{2}\right).$$

Da $p_1 := \Phi(\pi,0) = \Phi(-\pi,0)$, würde folgen

$$\nu(p_1) = \nu(\Phi(\pi,0)) = b_\pi(\pi) = (1,1,0)$$

und

$$\nu(p_1) = \nu(\Phi(-\pi,0)) = b_{-\pi}(0) = (-1,0,0),$$

ein Widerspruch. Also ist das Möbiusband nicht orientierbar.

Integration auf Hyperflächen

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und ω eine stetige $(n-1)$-Form in U. Nach (19.2) lässt sich ω schreiben als

$$\omega = f \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} f_i dS_i,$$

wobei

$$f = (f_1,\ldots,f_n) : U \to \mathbb{R}^n$$

ein stetiges Vektorfeld ist und

$$d\vec{S} = (dS_1,\ldots,dS_n), \quad dS_i = (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Sei jetzt $M \subset U$ eine in U enthaltene Hyperfläche des $\mathbb{R}^n$, die durch ein Einheits-Normalenfeld

$$\nu : M \to \mathbb{R}^n$$

im Sinne von Satz 2 orientiert sei. Dann lässt sich ω über jede kompakte Teilmenge von M integrieren. Andererseits haben wir in § 14 das Integral von Funktionen über Untermannigfaltigkeiten definiert. Der folgende Satz gibt den Zusammenhang zwischen den beiden Integralbegriffen.

Satz 3. *Mit den obigen Bezeichnungen gilt für jede kompakte Teilmenge $K \subset M$*

$$\int_K f(x) \cdot d\vec{S}(x) = \int_K \langle f(x), \nu(x)\rangle dS(x).$$

Bemerkung. Man kann diesen Sachverhalt symbolisch durch die Gleichung

$$d\vec{S} = \nu dS$$

ausdrücken. dS ist der Betrag und der Normalen-Einheitsvektor ν die Richtung des „vektoriellen Flächenelements“$d\vec{S}$.

Beweis. Indem man $\omega = f \cdot d\vec{S}$ mit einer genügend feinen Teilung der Eins multipliziert, kann man annehmen, dass $K \cap \mathrm{Supp}(\omega)$ in einer offenen Menge enthalten ist, in der M Graph einer Funktion von $n-1$ Variablen ist. Wir setzen deshalb für den Beweis voraus, dass

$$U = U' \times I,\ U' \subset \mathbb{R}^{n-1} \text{ Gebiet}, \quad I \subset \mathbb{R} \text{ offenes Intervall},$$

$$M = \{(x', x_n) \in U' \times I : x_n = g(x')\},$$

$$g : U' \to I \quad \text{stetig differenzierbar.}$$

(Falls M beschrieben wird durch $x_k = g(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$, geht der Beweis analog.)

Jetzt kann M durch folgende Karte beschrieben werden:

$$\varphi : U' \xrightarrow{\sim} M$$

$$\varphi(t_1, \ldots, t_{n-1}) := (t_1, \ldots, t_{n-1}, g(t_1, \ldots, t_{n-1})).$$

Nach § 15 Beispiel (15.2), erhält man ein Einheits-Normalenfeld von M durch

$$\tilde{\nu}(x) = \frac{(-\mathrm{grad}\ g(x'), 1)}{\sqrt{1 + \|\mathrm{grad}\ g(x')\|^2}} \quad \text{für } x = (x', x_n) \in M.$$

Für das vorgegebene Normalenfeld gilt $\nu = \varepsilon\tilde{\nu}$ mit $\varepsilon = \pm 1$. Wir untersuchen jetzt, ob die Karte φ bzgl. der durch ν definierten Orientierung von M positiv oder negativ orientiert ist. Dazu ist das Vorzeichen von

$$\det\left(\nu, \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial t_{n-1}}\right)$$

zu bestimmen. Diese Determinante ist gleich

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \|\mathrm{grad}\ g\|^2}} \det\left(\begin{array}{c|ccc} -\frac{\partial g}{\partial t_1} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -\frac{\partial g}{\partial t_{n-1}} & & & 1 \\ \hline 1 & \frac{\partial g}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial t_{n-1}} \end{array}\right) = \varepsilon(-1)^{n-1}\sqrt{1 + \|\mathrm{grad}\ g\|^2}.$$

Es ergibt sich also: φ ist positiv (negativ) orientiert, je nachdem $\varepsilon(-1)^{n-1}$ positv (bzw. negativ) ist. Deshalb gilt

$$\int_K \omega = \varepsilon(-1)^{n-1} \int_{\varphi^{-1}(K)} \varphi^*\omega.$$

Wir berechnen jetzt $\varphi^*\omega$. Es ist

$$\varphi^*(dS_i) \ = \ (-1)^{i-1} dt_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dt_i} \wedge \ldots \wedge dt_{n-1} \wedge dg(t) =$$

$$= (-1)^n \frac{\partial g}{\partial t_i} dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{n-1} \quad \text{für } 1 \leqslant i \leqslant n-1$$

und

$$\varphi^*(dS_n) = (-1)^{n-1} dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{n-1},$$

$$\varphi^*\omega = (-1)^{n-1} \left(-\sum_{i=1}^{n-1} (f_i \circ \varphi) \frac{\partial g}{\partial t_i} + f_n \circ \varphi \right) dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{n-1}.$$

Wir erhalten

$$\int_K f(x) \cdot d\vec{S}(x) = \varepsilon \int_{\varphi^{-1}(K)} F(t) d^{n-1}t,$$

wobei

$$F(t) := -\sum_{i=1}^{n-1} f_i(\varphi(t)) \frac{\partial g(t)}{\partial t_i} + f_n(\varphi(t)).$$

Andererseits gilt nach Definition des Integrals $\int \langle f, \nu \rangle dS$ und Beispiel (14.7)

$$\int_K \langle f(x), \nu(x) \rangle dS(x) = \int_{\varphi^{-1}(K)} \langle f(\varphi(t)), \nu(\varphi(t)) \rangle \sqrt{1 + \|\text{grad } g(t)\|^2} \, d^{n-1}t.$$

Wegen

$$\nu(\varphi(t)) = \varepsilon \tilde{\nu}(\varphi(t)) = \varepsilon \frac{(-\text{grad } g(t), 1)}{\sqrt{1 + \|\text{grad } g(t)\|^2}}$$

ist der Integrand des Integrals auf der rechten Seite gleich $\varepsilon F(t)$. Daraus folgt die Behauptung.

(20.7) Beispiel. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$\psi : U \to \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion mit

$$\text{grad } \psi(x) \neq 0 \quad \text{für alle} \quad x \in U.$$

Dann ist

$$M := \{x \in U : \psi(x) = 0\}$$

eine Hyperfläche in U (oder leer). Für $x \in M$ ist

$$\nu(x) := \frac{\text{grad } \psi(x)}{\|\text{grad } \psi(x)\|}$$

ein Normalen-Einheitsvektor von M; wir orientieren M durch dieses Normalenfeld ν. In U hat man die stetige $(n-1)$-Form

$$\omega := \frac{\text{grad } \psi \cdot d\vec{S}}{\|\text{grad } \psi\|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}}{\|\text{grad } \psi\|} dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_n.$$

Aus Satz 3 folgt nun für jedes Kompaktum $A \subset M$

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(A) = \int_A \omega,$$

denn

$$\left\langle \frac{\operatorname{grad} \psi}{\|\operatorname{grad} \psi\|}, \nu \right\rangle = 1.$$

Allgemeiner folgt für jede stetige Funktion $g : U \to \mathbb{R}$

$$\int_A g(x) dS(x) = \int_A g\omega.$$

Ein Konvergenzsatz

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $(\omega_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von k-Formen in U,

$$\omega_m = \sum_{|I|=k} f_{m,I} dx_I.$$

Man sagt, die Folge (ω_m) *konvergiere in U kompakt* gegen die k-Form

$$\omega = \sum_{|I|=k} f_I dx_I,$$

wenn für jeden Multiindex I die Funktionenfolge $(f_{m,I})_{m\in\mathbb{N}}$ auf jedem kompakten Teil von U gleichmäßig gegen f_I konvergiert. Damit können wir folgenden einfachen Konvergenzsatz formulieren.

Satz 4. *Sei M eine orientierte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und $(\omega_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger k-Formen in U, die kompakt gegen die k-Form ω in U konvergiert. Dann gilt für jede kompakte Teilmenge $A \subset M$*

$$\lim_{m\to\infty} \int_A \omega_m = \int_A \omega.$$

Beweis. Sei $\varphi : \Omega \xrightarrow{\sim} V \subset M$ eine positiv orientierte Karte von M. Wir behandeln zunächst den speziellen Fall, dass $A \subset V$. Sei

$$\varphi^*\omega_m =: g_m dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_k, \quad \varphi^*\omega =: g dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_k.$$

Dann konvergiert die Funktionenfolge $g_m : \Omega \to \mathbb{R}$ auf $\varphi^{-1}(A)$ gleichmäßig gegen g (vgl. Beispiel (19.4)). Da

$$\int_A \omega_m = \int_{\varphi^{-1}(A)} g_m(t) d^k t, \quad \int_A \omega = \int_{\varphi^{-1}(A)} g(t) d^k t,$$

folgt die Behauptung. Der allgemeine Fall wird auf diesen Spezialfall mithilfe einer Teilung der Eins zurückgeführt.

Aufgaben

20.1. Im $\mathbb{R}^3$ sei

$$\omega := 3z dy \wedge dz + (x^2+y^2) dz \wedge dx + xz dx \wedge dy.$$

Sei M die folgende zweidimensionale Untermannigfaltigkeit

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}.$$

M sei so orientiert, dass $e_3 = (0,0,1)$ im Nullpunkt positiv orientierter Normalenvektor von M ist.

Man berechne $\int_A \omega$, wobei

$$A := \{(x,y,z) \in M : |x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1\}.$$

20.2. Im $\mathbb{R}^4$ sei ω die Differentialform

$$\begin{aligned}\omega \;:=\; & x_2 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \;+\; x_1 dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \;+\; x_4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \\ & + x_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.\end{aligned}$$

Sei $S_3 \subset \mathbb{R}^4$ die Einheitssphäre, orientiert bzgl. der äußeren Normalen.

a) Man zeige: Für jede kompakte Teilmenge $A \subset S_3$ gilt

$$\int_A \omega = 0.$$

b) Man berechne $\int_B x_2 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$, wobei

$$B := \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in S_3 : x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0\}.$$

20.3. Die Einheitssphäre $S_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ sei orientiert bzgl. der äußeren Normalen. Man untersuche, welche der folgenden Karten $\varphi_1^+, \ldots \varphi_n^+, \varphi_1^-, \ldots \varphi_n^-$ positiv bzw. negativ orientiert sind:

$$T := \{t \in \mathbb{R}^{n-1} : \|t\| < 1\}, \quad V_k^\pm := \{(x_1, \ldots x_n) \in S_{n-1} : \pm x_k > 0\},$$

$$\varphi_k^\pm : T \xrightarrow{\sim} V_k^\pm \subset S_{n-1},$$

$$\varphi_k^\pm(t_1, \ldots, t_{n-1}) := (t_1 \ldots, t_{k-1}, \pm\sqrt{1 - t_1^2 - \ldots - t_{n-1}^2}, t_k, \ldots, t_{n-1}).$$

20.4. Man zeige, dass die in Beispiel (20.3) angegebene Orientierung von $S_1 \subset \mathbb{R}^2$ mit der Orientierung bzgl. der äußeren Normalen übereinstimmt.

20.5. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche. Es gebe eine stetige Abbildung $v : M \to \mathbb{R}^n$, so dass

$$v(p) \notin T_p M \quad \text{für alle} \quad p \in M.$$

Man zeige, dass M orientierbar ist.

20.6. a) Seien $v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Man zeige, dass es genau einen Vektor $w \in \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

i) $\langle w, v_j \rangle = 0 \quad$ für $j = 1, \ldots, n-1$,

ii) $\|w\|^2 = \det(w, v_1, \ldots, v_{n-1})$.

Der Vektor w heißt *Vektorprodukt* von $v_1, \ldots, v_{n-1}$; Schreibweise

$$w = v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_{n-1}.$$

b) Sei A_i die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die aus $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ durch Streichen der i-ten Zeile entsteht. (Die v_j seien als Spaltenvektoren aufgefasst.) Man zeige: Für das Vektorprodukt $w = v_1 \times \ldots \times v_{n-1}$ gilt

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } w_i = (-1)^{i-1} \det A_i.$$

c) Sei $M \subset R^n$ eine orientierte Hyperfläche, $\nu : M \to \mathbb{R}^n$ das positiv orientierte Einheitsnormalenfeld und

$$\varphi : T \xrightarrow{\sim} V \subset M, \quad (T \subset \mathbb{R}^{n-1} \text{ offen}),$$

eine positiv orientierte Karte. Man zeige

$$\nu(\varphi(t)) = \frac{\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_1} \times \ldots \times \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_{n-1}}}{\|\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_1} \times \ldots \times \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_{n-1}}\|}, \quad (t \in T).$$

d) Mit den Bezeichnungen von c) sei $g : T \to \mathbb{R}$ die Gramsche Determinante der Karte φ. Man zeige

$$\sqrt{g(t)} = \left\| \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_1} \times \ldots \times \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_{n-1}} \right\| \quad \text{für alle} \quad t \in T.$$

20.7. Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \xrightarrow{\sim} V$ eine C^1-invertierbare Abbildung. Man zeige:

a) Ist $M \subset U$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, so ist $M' := F(M)$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von V und

$$DF(a) : T_a M \to T_{F(a)} M'$$

ist für jedes $a \in M$ ein Isomorphismus.

b) Sei $A \subset U$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Dann ist auch $B := F(A)$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $F(\partial A) = \partial B$.

c) Für $a \in \partial A$ und $b := F(a)$ betrachte man die induzierte Abbildung

$$DF(a) : T_a(\partial A) \to T_b(\partial B).$$

Ist $F : U \to V$ orientierungstreu (bzw. orientierungsumkehrend), so ist das Bild einer positiv orientierten Basis $v_1, \ldots, v_{n-1} \in T_a(\partial A)$ unter $DF(a)$ eine positiv (bzw. negativ) orientierte Basis von $T_b(\partial B)$. Dabei sei jeweils die Orientierung bzgl. der äußeren Normalen zugrunde gelegt.

20.8. Im $\mathbb{R}^n$ seien $f_1, \ldots, f_n$ homogene Polynome vom Grad m in den Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ und

$$\omega := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} f_i dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Sei $S_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ die Einheitssphäre. Man zeige: Ist m gerade, so ist

$$\int_{S_{n-1}} \omega = 0.$$

Anleitung: Man betrachte die Transformation $x \mapsto -x$ des $\mathbb{R}^n$.

§ 21 Der Stokessche Integralsatz

Wir kommen jetzt zum Höhepunkt der Integrationstheorie im $\mathbb{R}^n$, dem allgemeinen Stokesschen Integralsatz für Untermannigfaltigkeiten. Dieser Integralsatz besticht schon durch seine elegante Formulierung

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega.$$

Dabei ist A ein Kompaktum mit glattem Rand ∂A auf einer k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit und ω eine stetig differenzierbare $(k-1)$-Form in einer Umgebung von A. Der allgemeine Stokessche Satz enthält als Spezialfälle den Gaußschen Integralsatz sowie den klassischen Stokesschen Integralsatz für Flächen im $\mathbb{R}^3$. Wir leiten in diesem Paragraphen außerdem die Cauchysche Integralformel für holomorphe Funktionen einer Veränderlichen sowie die Bochner-Martinellische Integralformel für holomorphe Funktionen mehrerer Veränderlichen aus dem Stokesschen Integralsatz ab und beweisen den Brouwerschen Fixpunktsatz.

Der folgende Satz ist eine Umformulierung des Gaußschen Integralsatzes mit Hilfe des Differentialformenkalküls.

Satz 1. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ($n \geqslant 2$) und ω eine stetig differenzierbare $(n-1)$-Form in U. Dann gilt für jedes Kompaktum $A \subset U$ mit glattem Rand*

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega.$$

Dabei trägt ∂A die durch das äußere Normalenfeld induzierte Orientierung.

Bemerkung. Für $n = 1$ entartet dieser Satz zum Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Beweis. Sei

$$\omega = \sum (-1)^{i-1} f_i dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

d.h. $\omega = f \cdot d\vec{S}$ mit dem stetig differenzierbaren Vektorfeld

$$f = (f_1, \ldots, f_n) : U \to \mathbb{R}^n.$$

Sei $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^n$ das äußere Einheits-Normalenfeld. Nach § 20, Satz 3, gilt

$$\int_{\partial A} \omega = \int_{\partial A} \langle f(x), \nu(x) \rangle dS(x)$$

und nach Beispiel (19.2) ist

$$d\omega = \operatorname{div}(f) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

O. Forster, *Analysis 3*, Aufbaukurs Mathematik,
DOI 10.1007/978-3-8348-2374-8_21, © Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden 2012

also

$$\int_A d\omega = \int_A \operatorname{div} f(x) d^n x.$$

Die Behauptung ist deshalb gleichbedeutend mit dem Gaußschen Integralsatz (§ 15, Satz 3)

$$\int_A \operatorname{div} f(x) d^n x = \int_{\partial A} \langle f(x), \nu(x) \rangle dS(x).$$

Bemerkung. Wir werden später (Satz 6) den Satz 1 zum allgemeinen Stokesschen Integralsatz im $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern. Für diesen Stokesschen Integralsatz geben wir einen vom Gaußschen Integralsatz unabhängigen Beweis. Damit ergibt sich dann umgekehrt ein neuer Beweis des Gaußschen Integralsatzes.

Beispiele

(21.1) Für die Differentialform

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

im $\mathbb{R}^n$ gilt

$$d\omega = n dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Deshalb folgt für jedes Kompaktum $A \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand

$$\operatorname{Vol}_n(A) = \frac{1}{n} \int_{\partial A} \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_n \right).$$

Speziell im $\mathbb{R}^2$ (mit Koordinaten x, y) erhält man für den Flächeninhalt eines Kompaktums $A \subset \mathbb{R}^2$ mit glattem Rand

$$\operatorname{Vol}_2(A) = \frac{1}{2} \int_{\partial A} (x dy - y dx).$$

Diese Formel kann man auch elementargeometrisch interpretieren: Man betrachte das Dreieck $\triangle$ mit den Eckpunkten

$$(0,0),\ (x,y),\ (x+\delta x, y+\delta y),$$

vgl. Bild 21.1. (Hier stehen δx und δy als Symbole für kleine Differenzen.) Dann ist

$$\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x & x+\delta x \\ y & y+\delta y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(x\delta y - y\delta x)$$

der orientierte Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle$. Die Fläche von A kann man sich approximativ zusammengesetzt denken aus solch kleinen Dreiecken.

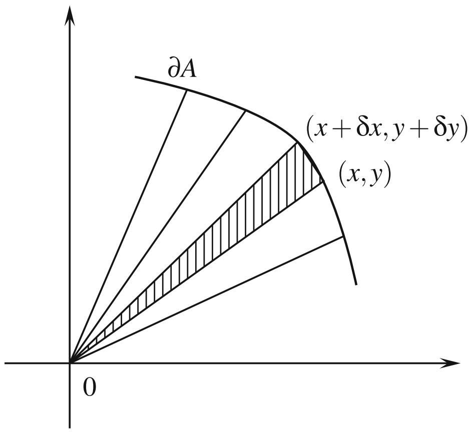


Bild 21.1

(21.2) Im $\mathbb{R}^2$ spezialisiert sich Satz 1 wie folgt: Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbare Funktionen. Dann gilt für jedes Kompaktum $A \subset U$ mit glattem Rand

$$\int_{\partial A} (f dx + g dy) = \int_A \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy.$$

Diese Aussage ist auch unter dem Namen *Green-Riemannsche Formel* bekannt.

Corollar. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$ und ω eine in $U \smallsetminus \{a\}$ stetig differenzierbare geschlossene $(n-1)$-Form. Seien $A, B \subset U$ zwei Kompakta mit glattem Rand, so dass $a \in \mathring{A} \cap \mathring{B}$. Dann gilt*

$$\int_{\partial A} \omega = \int_{\partial B} \omega,$$

wobei ∂A und ∂B bzgl. der äußeren Normalen orientiert sind.

Beweis. Wir wählen $\varepsilon > 0$ so klein, dass

$$K_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leqslant \varepsilon\} \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}.$$

Wir setzen $A_\varepsilon := A \smallsetminus \mathring{K}_\varepsilon$ und $B_\varepsilon := B \smallsetminus \mathring{K}_\varepsilon$. Dann sind A_ε und B_ε Kompakta mit glattem Rand, die in $U \smallsetminus \{a\}$ enthalten sind. Da $d\omega = 0$, folgt aus Satz 1

$$\int_{\partial A_\varepsilon} \omega = \int_{\partial B_\varepsilon} \omega = 0.$$

Der Rand ∂A_ε besteht aus ∂A und dem negativ orientierten ∂K_ε; ebenso besteht ∂B_ε aus ∂B und dem negativ orientierten ∂K_ε, siehe Bild 21.2. Somit folgt

$$\int_{\partial A} \omega - \int_{\partial K_\varepsilon} \omega = 0 = \int_{\partial B} \omega - \int_{\partial K_\varepsilon} \omega.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung.

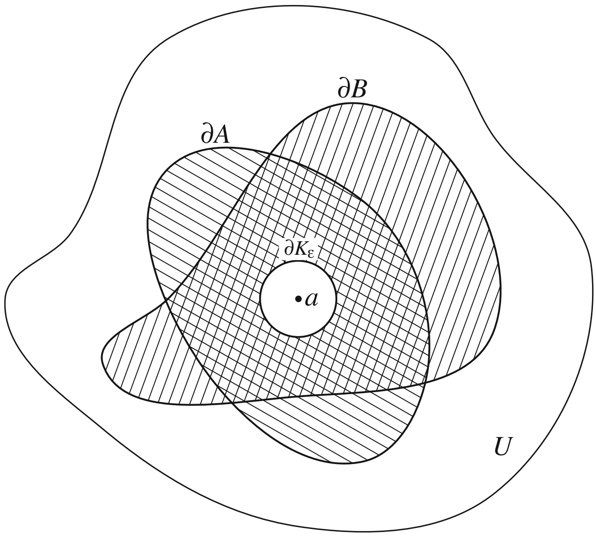


Bild 21.2

Anwendung auf holomorphe Funktionen

Sei $U \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ offen. Wir erinnern an die in §18 gegebene Definition: Eine Funktion

$$f : U \to \mathbb{C}$$

heißt *holomorph*, wenn sie stetig partiell differenzierbar ist und

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \text{wobei} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Hier sind $x,\ y$ die Koordinaten im $\mathbb{R}^2$ und $z = x + iy$.

Für $a \in U$ ist nach Beispiel (18.4) die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ holomorph in $U \smallsetminus \{a\}$. Ist $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, so ist deshalb auch $\frac{f(z)}{z-a}$ holomorph in $U \smallsetminus \{a\}$ und nach § 18, Satz 7 ii) die Differentialform

$$\omega = \frac{f(z)}{z-a} dz$$

geschlossen in $U \smallsetminus \{a\}$. Auf sie kann deshalb das Corollar zu Satz 1 angewendet werden.

Satz 2 (Cauchysche Integralformel)**.** *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $A \subset U$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Dann gilt für jeden Punkt $a \in \mathring{A}$*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Beweis. Nach dem Corollar zu Satz 1 gilt für alle genügend kleinen $\varepsilon > 0$

$$\int_{\partial A} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|z-a|=\varepsilon} (\overline{z}-\overline{a}) f(z) dz.$$

Auf das letzte Integral wenden wir noch einmal Satz 1 an. Da die Differentialform $f(z)dz$ geschlossen ist, gilt

$$d((\overline{z}-\overline{a})f(z)dz) = d(\overline{z}-\overline{a}) \wedge (f(z)dz) = f(z)d\overline{z} \wedge dz.$$

Nun ist aber

$$d\overline{z} \wedge dz = (dx - idy) \wedge (dx + idy) = 2i\, dx \wedge dy.$$

Somit erhalten wir insgesamt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_{|z-a|\leqslant\varepsilon} f(z) dx \wedge dy = \frac{1}{\pi} \int_{|\xi|\leqslant 1} f(a+\varepsilon\zeta) d\xi \wedge d\eta,$$

wobei wir die Substitution $\zeta = \xi + i\eta = \frac{z-a}{\varepsilon}$ verwendet haben. Wegen der Stetigkeit von f strebt das letzte Integral für $\varepsilon \to 0$ gegen $f(a)$. Andererseits ist die linke Seite unabhängig von ε, also muss gelten

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a), \quad \text{q.e.d.}$$

(21.3) Beispiel. Wählt man speziell $f = 1$ und $a = 0$, erhält man für jedes Kompaktum $A \subset \mathbb{C}$ mit glattem Rand und $0 \in \mathring{A}$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{dz}{z} = 1.$$

Da $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$, ist

$$\frac{dz}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}(dx+idy) = \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} + i\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}.$$

Also folgt

$$\int_{\partial A} \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} = 0, \qquad \int_{\partial A} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = 2\pi.$$

Das letzte Integral haben wir für den Spezialfall einer Kreisscheibe A schon in Beispiel (18.1) berechnet.

Satz 3 (Taylorentwicklung holomorpher Funktionen)**.** *Sei f eine in der Kreisscheibe*

$$B(a,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}, \quad (a \in \mathbb{C},\ 0 < R \leqslant \infty),$$

holomorphe Funktion. Dann gilt für alle $z \in B(a,R)$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

mit

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}d\zeta.$$

Dabei ist r eine beliebige Zahl mit $0 < r < R$.

Bemerkung. Die Reihe konvergiert dann auf jedem kompakten Teil von $B(a,R)$ gleichmäßig (vgl. An. 1, §21, Satz3).

Beweis. Durch eine Translation des Koordinatensystems kann man sich auf den Fall $a = 0$ beschränken. Wir halten ein $z \in B(0,R)$ fest und wählen ein r mit $|z| < r < R$. Dann gilt nach Satz 2 unter Umbenennung der Variablen

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

Nun entwickeln wir $(\zeta-z)^{-1}$ in eine geometrische Reihe

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta}\cdot\frac{1}{1-(z/\zeta)} = \frac{1}{\zeta}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k.$$

Die Reihe konvergiert (bei festgehaltenem z) gleichmäßig in ζ auf der Kreislinie $\{|\zeta| = r\}$. Nach § 20, Satz 4 kann man Integration und Limesbildung vertauschen und erhält

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r} f(\zeta)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\zeta^{k+1}}\right)d\zeta \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}d\zeta\right)z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k. \end{aligned}$$

Nach dem Corollar zu Satz 1 ist das Integral für c_k von $r \in\,]0,R[$ unabhängig. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Holomorphe Funktionen mehrerer Veränderlichen

Wir identifizieren den n-dimensionalen komplexen Zahlenraum $\mathbb{C}^n$ mit $\mathbb{R}^{2n}$ durch die Zuordnung

$$(z_1,\dots,z_n) \mapsto (x_1,y_1,\dots,x_n,y_n),$$

wobei $z_k = x_k + iy_k$ für $k = 1,\dots,n$. Analog zum Fall $n = 1$ definieren wir lineare Differentialoperatoren

$$\frac{\partial}{\partial z_k} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial y_k}\right).$$

Für eine in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}^n$ stetig partiell differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ gilt dann

$$df = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}dx_k + \frac{\partial f}{\partial y_k}dy_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_k}dz_k + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k}d\overline{z}_k.$$

Definition. Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt *holomorph*, wenn sie stetig partiell differenzierbar ist und den *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z_k}} = 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, n$$

genügt.

Wir wollen ein Analogon der Cauchyschen Integralformel im $\mathbb{C}^n$ beweisen. Dazu machen wir einige Vorbereitungen. Es gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial z_k \, \partial \overline{z_k}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial y_k}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_k^2}\right),$$

also ist

$$4\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_k \, \partial \overline{z_k}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_k^2}\right) = \Delta$$

der Laplace-Operator im $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$. Wir haben die folgenden harmonischen Funktionen in $\mathbb{C}^n \smallsetminus 0 \cong \mathbb{R}^{2n} \smallsetminus 0$:

$$\frac{1}{\|z\|^{2n-2}} \quad \text{für } n \neq 1, \qquad \log\|z\| \quad \text{für } n = 1.$$

Dies sind bis auf konstante Faktoren die Newton-Potentiale, vgl. § 16. Da

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{\|z\|^{2n-2}}\right) = -(2n-2)\frac{x_k}{\|z\|^{2n}}, \quad \frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{1}{\|z\|^{2n-2}}\right) = -(2n-2)\frac{y_k}{\|z\|^{2n}},$$

folgt

$$\frac{\partial}{\partial z_k}\left(\frac{1}{\|z\|^{2n-2}}\right) = -(n-1)\frac{\overline{z_k}}{\|z\|^{2n}}.$$

Wegen $\Delta(1/\|z\|^{2n-2}) = 0$ ergibt sich die Formel

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \overline{z_k}}\left(\frac{\overline{z_k}}{\|z\|^{2n}}\right) = 0 \quad \text{in } \mathbb{C}^n \smallsetminus 0.$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Formel auch für $n = 1$ gilt.

Für $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ definieren wir jetzt folgende komplexwertige $(2n-1)$-Formen in $\mathbb{C}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n \smallsetminus \{a\}$:

$$\eta_a(z) := (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}(\overline{z_k} - \overline{a_k})dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\overline{z_1} \wedge \ldots \widehat{d\overline{z_k}} \wedge \ldots \wedge d\overline{z_n}$$

$$\sigma_a(z) := \frac{1}{\|z-a\|^{2n}} \cdot \eta_a(z).$$

Für $n = 1$ ergibt sich speziell

$$\sigma_a(z) = \frac{1}{z-a} dz.$$

Hilfssatz 1. *Für die oben definierten Differentialformen gilt:*

a) $d\eta_a = n(2i)^n dx_1 \wedge dy_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge dy_n$.

b) *Ist f eine holomorphe Funktion in der offenen Menge $U \subset \mathbb{C}^n$, so ist die Differentialform*

$$\omega := f\sigma_a$$

geschlossen in $U \setminus \{a\}$.

Beweis.

a) Man berechnet

$$\begin{aligned} d\eta_a &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} d\overline{z_k} \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\overline{z_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{d\overline{z_k}} \wedge \ldots \wedge d\overline{z_n} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n} dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\overline{z_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z_n} \\ &= n(-1)^n (dz_1 \wedge d\overline{z_1}) \wedge \ldots \wedge (dz_n \wedge d\overline{z_n}) \\ &= n(2i)^n dx_1 \wedge dy_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge dy_n. \end{aligned}$$

b) Es gilt $d\omega = df \wedge \sigma_a + f d\sigma_a$. Da

$$df = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k$$

und σ_a alle dz_k als Faktoren enthält, folgt

$$df \wedge \sigma_a = 0.$$

Es ist also nur zu zeigen, dass $d\sigma_a = 0$. Nun ist

$$\begin{aligned} d\sigma_a &= \pm \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\partial}{\partial \overline{z_k}} \left(\frac{\overline{z_k} - \overline{a_k}}{\|z-a\|^{2n}} \right) d\overline{z_k} \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\overline{z_1} \wedge \ldots \widehat{d\overline{z_k}} \ldots \wedge d\overline{z_n} \\ &= \pm \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \overline{z_k}} \left(\frac{\overline{z_k} - \overline{a_k}}{\|z-a\|^{2n}} \right) dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\overline{z_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z_n} = 0 \end{aligned}$$

wegen der oben bewiesenen Formel $(*)$, q.e.d.

Satz 4 (Bochner-Martinellische Integralformel)**.** *Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $A \subset U$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Dann gilt für jeden Punkt $a \in \mathring{A}$*

$$f(a) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial A} f(z)\sigma_a(z).$$

Bemerkung. Für $n = 1$ ergibt sich als Spezialfall wieder die Cauchysche Integralformel.

Beweis. Da die Differentialform $\omega = f\sigma_a$ in $U \setminus a$ geschlossen ist, gilt nach dem Corollar zu Satz 1 für alle genügend kleinen $\varepsilon > 0$

$$\int_{\partial A} f(z)\sigma_a(z) = \int_{\|z-a\|=\varepsilon} f(z)\sigma_a(z) = \frac{1}{\varepsilon^{2n}} \int_{\|z-a\|=\varepsilon} f(z)\eta_a(z).$$

Auf das letzte Integral wenden wir wieder Satz 1 an. Da

$$d(f\eta_a) = df \wedge \eta_a + f d\eta_a = f d\eta_a,$$

ergibt sich unter Benutzung von Hilfssatz 1 a)

$$I := \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial A} f(z)\sigma_a(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \cdot \frac{n(2i)^n}{\varepsilon^{2n}} \int_{\|z-a\|\leqslant\varepsilon} f(z)dV(z),$$

wobei wir die Abkürzung

$$dV(z) := dx_1 \wedge dy_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge dy_n$$

verwendet haben. Wir machen die Substitution $\zeta = \frac{z-a}{\varepsilon}$. Wegen $dV(z) = \varepsilon^{2n} dV(\zeta)$ erhalten wir

$$I = \frac{n!}{\pi^n} \int_{\|\zeta\|\leqslant 1} f(a+\varepsilon\zeta)dV(\zeta).$$

Da diese Gleichung für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, gilt sie auch im Limes für $\varepsilon \to 0$ und man erhält

$$I = \frac{n!}{\pi^n} \int_{\|\zeta\|\leqslant 1} f(a)dV(\zeta) = f(a),$$

denn $\displaystyle\int_{\|\zeta\|\leqslant 1} dV(\zeta) = \frac{\pi^n}{n!}$

ist das Volumen der $2n$-dimensionalen Einheitskugel, siehe § 7, Beispiel (7.4). Damit ist Bochner-Martinellische Integralformel bewiesen.

Integral über einen Halbraum

Wir definieren folgenden Standard-Halbraum $H_k \subset \mathbb{R}^k$:

$$H_k := \{(x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{R}^k : x_1 \leqslant 0\}.$$

Der Rand ∂H_k ist die durch $\{x_1 = 0\}$ beschriebene Hyperebene; das äußere Einheitsnormalenfeld wird durch

$$\nu(x) = e_1 = (1,0,\ldots,0) \quad \text{für alle} \quad x \in \partial H_k$$

gegeben (Bild 21.3). ∂H_k besitzt eine globale Karte

$$\beta : \mathbb{R}^{k-1} \to \partial H_k \qquad (t_1,\ldots,t_{k-1}) \mapsto (0,t_1,\ldots,t_{k-1}).$$

Wir orientieren ∂H_k mithilfe dieser Karte. Dann ist das äußere Normalenfeld $\nu = e_1$ positiv orientiert (vgl. §20).

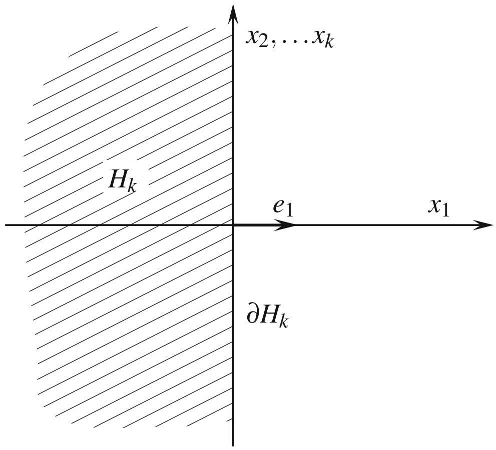


Bild 21.3

Hilfssatz 2. *Sei* ω *eine stetig differenzierbare* $(k-1)$*-Form im* $\mathbb{R}^k$, $(k \geqslant 2)$, *mit kompaktem Träger. Dann gilt*

$$\int_{H_k} d\omega = \int_{\partial H_k} \omega.$$

Bemerkung. Für $k = 1$ ist $H_1 = \mathbb{R}_- :=]-\infty, 0]$ und $\partial H_1 = \{0\}$. In diesem Fall entartet Hilfssatz 2 zu folgender Aussage: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{0} df = f(0).$$

Dies folgt unmittelbar aus dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen.

Beweis.

a) Die $(k-1)$-Form ω hat die Gestalt

$$\omega = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} f_j dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_k.$$

Mit der oben definierten Karte $\beta : \mathbb{R}^{k-1} \to \partial H_k$ gilt

$$\beta^*\omega = f_1(0, t_1, \ldots, t_{k-1}) dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{k-1},$$

also folgt

$$\int_{\partial H_k} \omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, t_1, \ldots, t_{k-1}) d^{k-1}t.$$

b) Wir berechnen jetzt das Integral von

$$d\omega = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$$

über $H_k = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{k-1}$. Da für jedes feste $(x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^{k-1}$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_k) dx_1 = f_1(0, x_2, \ldots, x_k),$$

folgt

$$\int_{H_k} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_k) dx_1 \ldots dx_k = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, x_2, \ldots, x_k) dx_2 \ldots dx_k.$$

Für $2 \leqslant j \leqslant k$ gilt

$$\int_{H_k} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dx_1 \ldots dx_k = \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{k-2}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dx_j \right) dx_1 dx_2 \ldots \widehat{dx_j} \ldots dx_k.$$

Da für festes $(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{k-2}$ die Funktion $x_j \mapsto f_j(x_1, \ldots, x_k)$ kompakten Träger mit $\mathbb{R}$ hat, verschwindet das Integral in der Klammer, also ist auch das Integral über H_k null. Insgesamt ergibt sich

$$\int_{H_k} d\omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, x_2, \ldots, x_k) dx_2 \ldots dx_k = \int_{\partial H_k} \omega, \quad \text{q.e.d.}$$

Wir stellen noch einen weiteren Hilfssatz betreffend den Halbraum H_k und seinen Rand bereit.

Hilfssatz 3. *Seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^k$ offene Mengen und*

$$\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_k) : \Omega \xrightarrow{\sim} \Omega'$$

eine C^1-invertierbare Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

i) $\tau(H_k \cap \Omega) = H_k \cap \Omega'$,

ii) $\tau(\partial H_k \cap \Omega) = \partial H_k \cap \Omega'$,

iii) $\det D\tau(x) > 0$ *für alle* $x \in \Omega$.

Dann gilt

$$\det \frac{\partial(\tau_2, \ldots, \tau_k)}{\partial(x_2, \ldots, x_k)}(x) > 0 \quad \textit{für alle } x \in \partial H_k \cap \Omega.$$

Bemerkung. Da τ ein Homöomorphismus ist, folgt ii) schon aus i).

Beweis.

a) Da $\tau(\partial H_k \cap \Omega) \subset \partial H_k$, gilt

$$\tau_1(0, x_2, \ldots, x_k) = 0 \quad \text{für alle} \quad (0, x_2, \ldots, x_k) \in \Omega.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial x_j}(x) = 0 \quad \text{für } 2 \leqslant j \leqslant k \quad \text{und alle} \quad x \in \partial H_k \cap \Omega.$$

b) *Behauptung.*

$$\frac{\partial\tau_1}{\partial x_1}(x) \geqslant 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \partial H_k \cap \Omega.$$

Beweis hierfür. Sei $(0, x'') \in \partial H_k \cap \Omega$, $x'' := (x_2, \ldots, x_k)$.

Nun ist

$$\frac{\partial\tau_1}{\partial x_1}(0, x'') = \lim_{h\to 0} \frac{\tau_1(h, x'') - \tau_1(0, x'')}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\tau_1(h, x'')}{h}.$$

Da $\tau(H_k \cap \Omega) = H_k \cap \Omega'$, gilt

$$\tau_1(h, x'') \leqslant 0 \text{ für } h < 0, \qquad \tau_1(h, x'') > 0 \text{ für } h > 0.$$

Daraus folgt die Behauptung.

c) Nach a) hat die Funktionalmatrix $D\tau$ in einem Punkt $x \in \partial H_k \cap \Omega$ die Gestalt

$$D\tau(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\tau_1}{\partial x_1}(x) & 0 \ldots\ldots 0 \\ * & \frac{\partial(\tau_2,\ldots,\tau_k)}{\partial(x_2,\ldots,x_k)}(x) \end{pmatrix}.$$

Also ergibt sich

$$0 < \det D\tau(x) = \frac{\partial\tau_1}{\partial x_1}(x) \cdot \det \frac{\partial(\tau_2, \ldots, \tau_k)}{\partial(x_2, \ldots, x_k)}(x).$$

Wegen b) sind beide Faktoren > 0, q.e.d.

Kompakta mit glattem Rand auf Mannigfaltigkeiten

Sei M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und A eine Teilmenge von M. Ein Punkt $p \in M$ heißt Randpunkt von A relativ M, wenn in jeder Umgebung von p sowohl Punkte von A als auch Punkte von $M \setminus A$ liegen. (Es gibt dann also Punktfolgen $x_j \in A$ und $y_j \in M \setminus A$, $j \in \mathbb{N}$, mit $\lim\limits_{j\to\infty} x_j = p$ und $\lim\limits_{j\to\infty} y_j = p$.)

Die Menge aller Randpunkte von A relativ M bezeichnen wir mit ∂A.

Ist A kompakt, so gilt stets $\partial A \subset A$.

Bemerkung. Genau genommen müsste man die Abhängigkeit von M bezeichnen und $\partial_M A$ schreiben. Die Menge der Randpunkte von A relativ $\mathbb{R}^n$ ist im allgemeinen größer. Ist die Dimension von M kleiner als n, so gilt für jede Teilmenge $A \subset M$

$$A \subset \partial_{\mathbb{R}^n} A.$$

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $A \subset M$ eine kompakte Teilmenge. Man sagt A habe *glatten Rand*, falls es zu jedem Randpunkt $p \in \partial A$ eine Karte von M

$$\varphi : \Omega \xrightarrow{\sim} V \subset M, \qquad (\Omega \text{ offen in } \mathbb{R}^k),$$

mit $p \in V$ gibt, so dass gilt

i) $\varphi(H_k \cap \Omega) = A \cap V$,

ii) $\varphi(\partial H_k \cap \Omega) = \partial A \cap V$.

Der Rand von A sieht also dann lokal so aus, wie der Rand des Halbraums $H_k \subset \mathbb{R}^k$, siehe Bild 21.4.

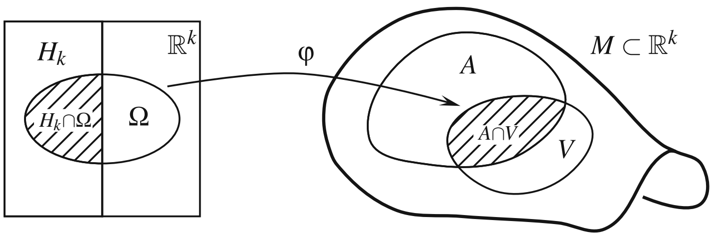


Bild 21.4

Bemerkung. Eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist nichts anderes als eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$. Ist $A \subset U$ kompakt, so hatten wir für diesen Fall den Begriff des glatten Randes bereits in § 15 definiert. Wegen § 14, Satz 2, sind die alte und die neue Definition äquivalent.

Bezeichnung. Sei A eine kompakte Teilmenge mit glattem Rand einer k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$. Wir nennen eine Karte

$$\varphi : \Omega \xrightarrow{\sim} V \subset M$$

von M *Rand-adaptiert* bzgl. A, falls sie die Bedingungen i) und ii) der obigen Definition erfüllt. (Wenn $\partial A \cap V = \emptyset$, bedeutet dies insbesondere $\partial H_k \cap \Omega = \emptyset$.)

Es ist klar, dass stets ein Atlas von M existiert, dessen sämtliche Karten Rand-adaptiert bzgl. A sind.

Satz 5. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $A \subset M$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Dann ist ∂A eine kompakte $(k-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{A}$ ein Atlas von M, der Rand-adaptiert bzgl. A ist. Für jede Karte

$$\varphi : \Omega \xrightarrow{\sim} V \subset M \subset \mathbb{R}^n, \quad (\Omega \subset \mathbb{R}^k \text{ offen}),$$

die ∂A trifft (d.h. $V \cap \partial A \neq \emptyset$) konstruieren wir eine Karte für ∂A auf folgende Weise:

Sei

$$\beta : \mathbb{R}^{k-1} \xrightarrow{\sim} \partial H_k, \quad \beta(u_1, \ldots, u_{k-1}) := (0, u_1, \ldots, u_{k-1}),$$

$$\Omega_0 := \beta^{-1}(\partial H_k \cap \Omega), \quad V_0 := \partial A \cap V.$$

Ω_0 ist offen in $\mathbb{R}^{k-1}$ und V_0 ist offen relativ ∂A. Wir definieren

$$\psi := \varphi \circ \beta : \Omega_0 \to V_0 \subset \partial A,$$

d.h.

$$\psi(u_1, \ldots, u_{k-1}) = \varphi(0, u_1, \ldots, u_{k-1}).$$

Da $\varphi : \Omega \to V$ ein Homöomorphismus ist und $\varphi(\partial H_k \cap \Omega) = \partial A \cap V$, folgt, dass auch $\psi : \Omega_0 \to V_0$ ein Homöomorphismus ist. Für die Funktionalmatrix von ψ gilt

$$D\psi(u) = \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(t_2, \ldots, t_k)}(0, u).$$

Sie hat den Rang $k-1$, da $D\varphi = \frac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}{\partial(t_1,\ldots,t_k)}$ den Rang k hat. Sei $\mathfrak{A}_0$ die Menge aller Karten, die sich so aus den Karten des Atlas $\mathfrak{A}$ ergeben. Aus § 14, Satz 4, folgt, dass ∂A eine $(k-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $\mathfrak{A}_0$ ein Atlas für ∂A ist. Es ist klar, dass ∂A kompakt ist.

Induzierte Orientierung des Randes

Mit denselben Bezeichnungen wie oben sei jetzt M eine *orientierte* Untermannigfaltigkeit. Dann können wir den bzgl. A Rand-adaptierten Atlas $\mathfrak{A}$ von M positiv orientiert wählen.

Behauptung. Der aus $\mathfrak{A}$ abgeleitete Atlas $\mathfrak{A}_0$ von ∂A ist orientiert.

Beweis. Seien

$$\varphi : \Omega \xrightarrow{\sim} V, \quad \varphi' : \Omega' : \xrightarrow{\sim} V'$$

zwei Karten aus $\mathfrak{A}$ mit $V \cap V' \cap \partial A \neq \emptyset$ und

$$\varphi \circ \beta : \Omega_0 \xrightarrow{\sim} V_0, \quad \varphi' \circ \beta : \Omega_0' \xrightarrow{\sim} V_0'$$

die aus abgeleiteten Karten. Es ist zu zeigen, dass sie gleich orientiert sind. Wir dürfen annehmen, dass $V = V'$. Nach Voraussetzung ist die Parametertransformation

$$\tau := (\varphi')^{-1} \circ \varphi : \Omega \to \Omega'$$

orientierungstreu. Sei

$$\tilde{\tau} := (\varphi' \circ \beta)^{-1} \circ (\varphi \circ \beta) : \Omega_0 \to \Omega_0'$$

die Transformation zwischen den abgeleiteten Karten. Dann gilt

$$\tilde{\tau}(u) := (\tau_2(0, u), \ldots, \tau_k(0, u)),$$

wobei $u = (u_1, \ldots, u_{k-1}) \in \Omega_0, \quad \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_k)$. Daraus folgt

$$D\tilde{\tau}(u) = \frac{\partial(\tau_2, \ldots, \tau_k)}{\partial(t_2, \ldots, t_k)}(0, u).$$

Da $\det D\tau > 0$, folgt aus Hilfssatz 3, dass $\det D\tilde{\tau} > 0$, q.e.d.

Man nennt die durch den Atlas $\mathfrak{A}_0$ definierte Orientierung die durch die Orientierung von M *induzierte Orientierung* auf ∂A.

Bemerkung. Sei $k = n$, also M eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Dann ist die durch die kanonische Orientierung von M auf ∂A induzierte Orientierung die Orientierung bzgl. der äußeren Normalen. Dies folgt daraus, dass die Karte $\beta : \mathbb{R}^{n-1} \to \partial H_n$ positiv orientiert bzgl. der äußeren Normalen des Halbraums $H_n \subset \mathbb{R}^n$ ist.

Satz 6 (Stokesscher Integralsatz). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $M \subset U$ eine orientierte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit $(k \geqslant 2)$ und ω eine stetig differenzierbare $(k-1)$-Form in U. Dann gilt für jedes Kompaktum $A \subset M$ mit glattem Rand*

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega,$$

wobei ∂A die induzierte Orientierung trägt.

Bemerkungen:

a) Für $k = n$ ergibt sich wieder Satz 1.

b) Ist $k = 1$, so geht der Stokessche Integralsatz in den Satz über Kurvenintegrale totaler Differentiale über (§ 18, Satz 1).

Beweis. Wir führen den Beweis nur für den Fall durch, dass die Untermannigfaltigkeit M und der Rand von A differenzierbar von der Klasse $\mathcal{C}^2$ sind. (Der allgemeine Fall kann durch Approximation auf diesen Spezialfall zurückgeführt werden.)

Der Beweis beruht darauf, die Aussage auf den (fast trivialen) Hilfssatz 2 zurückzuführen. Wir wählen einen orientierten, bzgl. A Rand-adaptierten Atlas $\mathfrak{A}$ der Klasse $\mathcal{C}^2$ von M. Nach dem Lebesgueschen Lemma (siehe §15) gibt es eine Zahl $\lambda > 0$ mit folgender Eigenschaft: Für jede Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit $A \cap K \neq \emptyset$ und $\operatorname{diam}(K) \leqslant \lambda$ ist $M \cap K$ ganz in einer Karte aus $\mathfrak{A}$ enthalten. Wir betrachten die anfangs des § 10 konstruierte differenzierbare Teilung der Eins im $\mathbb{R}^n$

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}^n} \alpha_{p\varepsilon} = 1, \qquad 0 < \varepsilon \leqslant \lambda / 2\sqrt{n}.$$

Dann ist $\operatorname{diam}(\operatorname{Supp}(\alpha_{p\varepsilon})) \leqslant \lambda$. Da

$$\omega = \sum_p \alpha_{p\varepsilon}\omega,$$

und auf A nur endlich viele Summanden von null verschieden sind, genügt es, den Stokesschen Satz für jeden einzelnen Summanden $\alpha_{p\varepsilon}\omega$ zu beweisen. Wir dürfen deshalb ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $M \cap \operatorname{Supp}(\omega)$ kompakt und ganz in einer Karte

$$\varphi : \Omega \xrightarrow{\sim} V \subset M, \qquad (\Omega \text{ offen in } \mathbb{R}^k),$$

aus $\mathfrak{A}$ enthalten ist. Die Differentialform $\varphi^*\omega$ in Ω kann deshalb durch null trivial zu einer auf ganz $\mathbb{R}^k$ stetig differenzierbaren $(k-1)$-Form $\widetilde{\omega}$ mit kompaktem Träger fortgesetzt werden. Nun ist unter Benutzung von § 19, Satz 5 iii)

$$\int_A d\omega = \int_{H_k \cap \Omega} \varphi^*(d\omega) = \int_{H_k \cap \Omega} d(\varphi^*\omega) = \int_{H_k} d\widetilde{\omega}.$$

Es sei

$$\psi = \varphi \circ \beta : \Omega_0 \xrightarrow{\sim} V_0 = \partial A \cap V$$

die durch φ induzierte Karte von ∂A, wobei

$$\beta(u_1, \ldots, u_{k-1}) = (0, u_1, \ldots, u_{k-1}), \quad \Omega_0 = \beta^{-1}(\partial H_k \cap \Omega) \subset \mathbb{R}^{k-1}.$$

Dann ist

$$\int_{\partial A} \omega = \int_{\Omega_0} \psi^* \omega = \int_{\Omega_0} \beta^* \varphi^* \omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \beta^* \widetilde{\omega} = \int_{\partial H_k} \widetilde{\omega}.$$

Die Behauptung folgt deshalb aus Hilfssatz 2.

Corollar. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und ω eine stetig differenzierbare $(k-1)$-Form in U. Dann gilt für jede orientierte kompakte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset U$*

$$\int_M d\omega = 0.$$

Beweis. Da M kompakt ist, kann man im Stokesschen Satz $A = M$ wählen. In diesem Fall ist $\partial A = \emptyset$, also folgt die Behauptung.

Beispiel

(21.4) In $\mathbb{R}^n \setminus 0$ betrachten wir die $(n-1)$-Form

$$\sigma := \frac{x \cdot d\vec{S}}{\|x\|^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1} x_i}{\|x\|^n} dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_n.$$

Wegen $\operatorname{div}(\frac{x}{\|x\|^n}) = 0$ ist $d\sigma = 0$, d.h. σ geschlossen. Wir wollen zeigen, dass σ nicht exakt ist. Dazu integrieren wir σ über die Einheitssphäre

$$S_{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\},$$

die eine kompakte $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n \setminus 0$ ist und die bzgl. der äußeren Normalen orientiert sei. Es ergibt sich mit (21.1)

$$\int_{S_{n-1}} \sigma = \int_{\|x\|=1} \frac{x \cdot d\vec{S}}{\|x\|^n} = \int_{\|x\|=1} x \cdot d\vec{S} = n\tau_n,$$

wobei τ_n das Volumen der Einheitskugel ist. Wäre σ exakt, müsste aber nach dem Corollar das Integral verschwinden! Daraus folgt für die $(n-1)$-te de Rhamsche Cohomologiegruppe (vgl. §19)

$$H_{DR}^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus 0) \neq 0.$$

(Man kann zeigen, dass $H_{DR}^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus 0) \cong \mathbb{R}$.) Mit Hilfe der in diesem Beispiel betrachteten Differentialform σ können wir nun den berühmten Brouwerschen Fixpunktsatz beweisen.

Satz 7 (Brouwerscher Fixpunktsatz)**.** *Sei $\overline{B} \subset \mathbb{R}^n$ die abgeschlossene Einheitskugel. Dann hat jede stetige Abbildung*

$$f : \overline{B} \to \overline{B}$$

mindestens einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $p \in \overline{B}$ mit $f(p) = p$.

Beweis. Für $n = 1$ ist $\overline{B} = [-1,1] \subset \mathbb{R}$ und die Aussage folgt sofort aus dem Zwischenwertsatz, angewandt auf die Funktion $x - f(x)$. Wir können also $n \geqslant 2$ voraussetzen.

a) Wir behandeln zunächst einen speziellen Fall: Es gebe ein $r > 1$ und eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\tilde{f} : B(r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < R\} \to \mathbb{R}^n$$

mit $\tilde{f}|\overline{B} = f$.

Angenommen, f habe keinen Fixpunkt, d.h. $f(x) \neq x$ für alle $\|x\| \leqslant 1$. Wegen der Stetigkeit von $\tilde{f}$ können wir (nach evtl. Verkleinerung von $r > 1$) voraussetzen, dass auch

$$\tilde{f}(x) \neq x \quad \text{für alle} \quad \|x\| < r.$$

Wir definieren

$$\varphi_1 : B(r) \to \mathbb{R}^n \smallsetminus 0, \qquad \varphi_1(x) := x - \tilde{f}(x).$$

Da die in (21.4) betrachtete Form σ in $\mathbb{R}^n \smallsetminus 0$ geschlossen ist, ist auch $\varphi_1^*\sigma$ geschlossen in $B(r)$ und nach dem Poincaréschen Lemma exakt. Infolgedessen gilt

$$\int_{S_{n-1}} \varphi_1^*\sigma = 0,$$

wobei S_{n-1} die Einheitssphäre ist. Wir betrachten jetzt

$$\Phi : \mathbb{R} \times B(r) \to \mathbb{R}^n, \qquad \Phi(t,x) := x - t\tilde{f}(x).$$

Für $\|x\| = 1$ und $0 \leqslant t \leqslant 1$ ist $\Phi(t,x) \neq 0$, also

$$V := \Phi^{-1}(\mathbb{R}^n \smallsetminus 0)$$

eine offene Menge, die $[0,1] \times S_{n-1}$ umfasst. Es gibt dann auch eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $S_{n-1} \subset U \subset B(r)$ und $[0,1] \times U \subset V$. Es seien nun

$$\psi_0,\ \psi_1 : U \to V, \quad \psi_0(x) = (0,x),\ \psi_1(x) = (1,x),$$

die im Hilfssatz aus §19 betrachteten Abbildungen. Nach jenem Hilfssatz gibt es eine stetig differenzierbare $(n-2)$-Form η auf U, so dass

$$\psi_1^*\Phi^*\sigma - \psi_0^*\Phi^*\sigma = d\eta.$$

Nun gilt aber für $x \in U$

$$(\Phi \circ \psi_1)(x) = \Phi(1,x) = x - \tilde{f}(x) = \varphi_1(x), \qquad (\Phi \circ \psi_0)(x) = \Phi(0,x) = x.$$

Daraus folgt $\psi_1^*\Phi^*\sigma = \varphi_1^*\sigma$ und $\psi_0^*\Phi^*\sigma = \sigma$ auf U, d.h.

$$\varphi_1^*\sigma - \sigma = d\eta \text{ auf } U.$$

Nach dem Corollar zu Satz 6 ist $\int_{S_{n-1}} d\eta = 0$, also folgt

$$\int_{S_{n-1}} \sigma = \int_{S_{n-1}} \varphi_1^*\sigma = 0.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu (21.4). Daher muss $f : \overline{B} \to \overline{B}$ doch einen Fixpunkt haben.

b) Sei jetzt $f : \overline{B} \to \overline{B}$ eine beliebige stetige Abbildung, die keinen Fixpunkt hat. Dann ist

$$\delta := \inf\{\|x - f(x)\| : x \in \overline{B}\} > 0.$$

Behauptung. $(*)$ Es gibt eine stetig differenzierbare Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $F(\overline{B}) \subset \overline{B}$ und $\|F(x) - f(x)\| \leqslant \delta/2$ für alle $x \in \overline{B}$.

Aus $(*)$ folgt, dass auch $F|\overline{B} \to \overline{B}$ keinen Fixpunkt hat, woraus sich mit Teil a) ein Widerspruch ergibt.

Beweis von $(*)$. Wir definieren zunächst $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$f_1(x) := \begin{cases} (1-\delta/4)f(x) & \text{für } \|x\| \leqslant 1, \\ (1-\delta/4)f(\frac{x}{\|x\|}) & \text{für } \|x\| \geqslant 1. \end{cases}$$

f_1 ist auf ganz $\mathbb{R}^n$ gleichmäßig stetig mit $\|f_1(x) - f(x)\| \leqslant \delta/4$ und $\|f_1(x)\| \leqslant 1 - \delta/4$ für alle $x \in \overline{B}$. Sei $(\alpha_{p\varepsilon})_{p \in \mathbb{Z}^n}$ die C^∞-Teilung der Eins im $\mathbb{R}^n$ aus § 10 und

$$F_\varepsilon := \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} f_1(p\varepsilon)\alpha_{p\varepsilon}.$$

(Die Summe ist lokal endlich.) Für $\varepsilon \to 0$ konvergieren die F_ε gleichmäßig gegen f_1, vgl. Aufgabe 10.1. Wir wählen $\varepsilon > 0$ so klein, dass

$$\|F_\varepsilon(x) - f_1(x)\| \leqslant \delta/4 \quad \text{für alle } x.$$

Die Abbildung $F := F_\varepsilon$ erfüllt dann $(*)$, q.e.d.

Der klassische Stokessche Integralsatz

Die ursprüngliche Form des Stokesschen Integralsatzes bezieht sich auf Flächen im dreidimensionalen Raum.

Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Weiter sei $M \subset U$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit, die durch ein Einheits-Normalenfeld $\nu : M \to \mathbb{R}^3$ orientiert sei. Auf M sei ein Kompaktum A mit glattem Rand gegeben. Die induzierte Orientierung des Randes ∂A definiert ein Einheits-Tangentenfeld

$$\tau : \partial A \to \mathbb{R}^3,$$

wo $\tau(p)$ für jeden Punkt $p \in \partial A$ eine positiv orientierte Basis von $T_p(\partial A)$ bildet. Man betrachte in U die stetig differenzierbare Pfaffsche Form

$$\omega := F \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^{3} F_i dx_i.$$

Es ist

$$d\omega = \operatorname{rot} F \cdot d\vec{S} = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i} - \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j.$$

Also lautet Satz 6 in diesem Fall

$$\int_{\partial A} F \cdot d\vec{s} = \int_A \operatorname{rot} F \cdot d\vec{S}$$

oder anders ausgedrückt (§ 18, Satz 9 und § 20, Satz 3)

$$\int_{\partial A} \langle F, \tau \rangle ds = \int_A \langle \operatorname{rot} F, \nu \rangle dS.$$

(21.5) Beispiel. Wir geben eine Anwendung des Stokesschen Integralsatzes in der Elektrodynamik. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall (als Zeitintervall interpretiert). Das elektrische und magnetische Feld sind zeitabhängige Vektorfelder

$$E,\ B : U \times I \to \mathbb{R}^3$$

(als stetig differenzierbar vorausgesetzt). Diese Felder genügen (unter anderem) der Differentialgleichung

$$(1) \quad \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}.$$

Sei jetzt $M \subset U$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit, orientiert durch ein Einheits-Normalenfeld $\nu : M \to \mathbb{R}^3$, und $A \subset M$ ein Kompaktum mit glattem Rand.

Das Integral

$$\Phi(t) := \int_A \langle B(x,z), \nu(x) \rangle dS(x)$$

ist der magnetische Fluss zur Zeit $t \in I$ durch das Flächenstück A. Die Zeitableitung dieses Flusses kann man durch Differentiation unter dem Integral berechnen und erhält

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \int_A \left\langle \frac{\partial B(x,t)}{\partial t}, \nu(x) \right\rangle dS(x) = -\int_A \langle \operatorname{rot} E(x,t), \nu(x) \rangle dS(x).$$

Unter Benutzung des Stokesschen Satzes folgt also

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \int_A \langle B, \nu \rangle dS = -\int_{\partial A} \langle E, \tau \rangle ds.$$

Das Integral $\int_{\partial A} \langle E, \tau \rangle ds$ ist die „Rotation“ des Feldes E längs ∂A. (Ist der Rand ∂A zusammenhängend, ist er eine geschlossene Kurve; im allgemeinen ist ∂A Vereinigung endlich vieler disjunkter geschlossener Kurven.) Die Formel (2) sagt also: Die zeitliche

Änderung des magnetischen Flusses durch das Flächenstück A ruft eine „Rotation" des elektrischen Feldes längs ∂A hervor.

Bei Abwesenheit von elektrischen Strömen hat man außerdem die Differentialgleichung

$$(1') \qquad \operatorname{rot} B = \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Daraus folgt auf analoge Weise

$$(2') \qquad \frac{d}{dt} \int_A \langle E, \nu \rangle dS = \int_{\partial A} \langle B, \tau \rangle ds.$$

Umgekehrt kann man aus den Integralgleichungen (2) und (2′) (mit variablem M und A) die Differentialgleichungen (1) und (1′) ableiten (vgl. Aufgabe 21.1).

Aufgaben

21.1. Sei $p \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt und $v \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor der Länge 1. Wir bezeichnen mit M die Ebene senkrecht zu v durch p, d.h.

$$M := \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x - p, v \rangle = 0\}.$$

Wir orientieren M so, dass v ein positiv orientierter Normalenvektor wird. Für $\varepsilon > 0$ sei

$$A_\varepsilon := \{x \in M : \|x - p\| \leqslant \varepsilon\}.$$

Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld in einer Umgebung U von p. Man zeige

$$\langle \operatorname{rot} F(p), v \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int_{\partial A_\varepsilon} F \cdot d\vec{s}.$$

21.2. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $p \in U$ und

$$K_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x - p\| \leqslant \varepsilon\}, \quad (\varepsilon > 0).$$

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $F : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Man zeige

i) $$\operatorname{grad} f(p) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int\limits_{\partial K_\varepsilon} f d\vec{S},$$

ii) $$\operatorname{rot} F(p) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int\limits_{\partial K_\varepsilon} F \times d\vec{S},$$

iii) $$\operatorname{div} F(p) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int\limits_{\partial K_\varepsilon} F \cdot d\vec{S}.$$

Dabei wird in i) und ii) über Tripel von 2-Formen integriert; das Integral ist komponentenweise zu verstehen.

21.3. Man beweise $H^1_{DR}(\mathbb{R}^2 \smallsetminus 0) \cong \mathbb{R}$.

Anleitung: Die Cohomologieklasse der Differentialform

$$\sigma := \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

bildet eine Basis von $H^1_{DR}(\mathbb{R}^2 \smallsetminus 0)$. Dazu beweise man: Ist ω eine geschlossene 1-Form in $\mathbb{R}^2 \smallsetminus 0$ mit

$$\int_{S_1} \omega = 0, \qquad (S_1 = 1\text{-Sphäre}),$$

so besitzt ω eine Stammfunktion.

21.4. Sei $B := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$. Man gebe eine stetige Abbildung $F : B \to B$ an, die keinen Fixpunkt hat.

21.5. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen Mengen. Zwei stetig differenzierbare Abbildungen

$$\varphi_0,\ \varphi_1 : U \to V$$

heißen C^1-homotop, falls es eine offene Menge $W \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ mit $[0,1] \times U \subset W$ und eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\Phi : W \to V, \quad (t,x) \mapsto \Phi(t,x),$$

gibt, so dass für alle $x \in U$ gilt

$$\Phi(0,x) = \varphi_0(x) \quad \text{und} \quad \Phi(1,x) = \varphi_1(x).$$

Man zeige: Sind $\varphi_0,\ \varphi_1 : U \to V$ C^1-homotop, so gilt für jede geschlossene stetig differenzierbare k-Form ω in V und jede kompakte k-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit $M \subset U$

$$\int_M \varphi_1^* \omega = \int_M \varphi_0^* \omega.$$

Anleitung: Man benutze den Hilfssatz aus § 19 und das Corollar zu Satz 6 aus § 21.

21.6. Sei

$$\Omega := \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x < 0, y = 0\}, \qquad T := \mathbb{R}^*_+ \times]0,\pi[\times]-\pi,\pi[$$

und $\Phi : T \xrightarrow{\sim} \Omega$ der durch die Polarkoordinaten gegebene Diffeomorphismus

$$\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \stackrel{\Phi}{\longmapsto} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin\vartheta\, \cos\varphi \\ r \sin\vartheta\, \sin\varphi \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Mit $r, \vartheta, \varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ seien auch die drei Komponenten der Umkehrabbildung von Φ bezeichnet.

Man zeige:

a) Die Funktion ϑ und die Differentialform $d\varphi$ lassen sich stetig differenzierbar von Ω nach $\mathbb{R}^3 \setminus (0 \times 0 \times \mathbb{R})$ fortsetzen.

b) Sei $A \subset S_2$ ein Kompaktum mit glattem Rand, so dass ∂A weder den Nordpol $P_N := (0,0,1)$ noch den Südpol $P_S := (0,0,-1)$ enthält. Dann gilt

$$\mathrm{Vol}_2(A) = 2k\pi - \int_{\partial A} \cos\vartheta \, d\varphi.$$

Dabei ist $k = 0,1,2$, je nachdem A keinen, einen oder zwei der Punkte $\{P_N, P_S\}$ enthält.

c) Die Differentialform $r^3 \sin\vartheta \, d\vartheta \wedge d\varphi$ lässt sich stetig differenzierbar nach ganz $\mathbb{R}^3$ fortsetzen. Für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^3$ mit glattem Rand gilt

$$\mathrm{Vol}_3(K) = \frac{1}{3} \int_{\partial K} r^3 \sin\vartheta \, d\vartheta \wedge d\varphi.$$

21.7. Es sei $q : \mathbb{R}^n \setminus 0 \to S_{n-1}$ die Projektion auf die Einheitssphäre

$$q(x) := \frac{x}{\|x\|}.$$

Für eine kompakte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n \setminus 0$ versteht man unter dem Raumwinkel, unter dem A vom Nullpunkt aus erscheint, die Größe

$$\Theta(A) := \mathrm{Vol}_{n-1}(q(A)).$$

Sei $M \subset \mathbb{R}^n \setminus 0$ eine Hyperfläche mit folgender Eigenschaft:

i) Die Abbildung $q \mid M \to S_{n-1}$ ist injektiv.

ii) Für jedes $a \in M$ gilt $\mathbb{R}a + T_a M = \mathbb{R}^n$.

Man zeige:

a) M ist orientierbar.

b) Für jedes Kompaktum $A \subset M$ gilt $\Theta(A) = |\int_A \sigma|$, wobei

$$\sigma := \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1} x_i}{\|x\|^n} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Anleitung: Sei $\lambda : q(M) \to \mathbb{R}_+^*$ definiert durch

$$\lambda\left(\frac{x}{\|x\|}\right) := \|x\| \quad \text{für alle} \quad x \in M, \qquad U := \{x \in \mathbb{R}^n \setminus 0 : \frac{x}{\|x\|} \in q(M)\}$$

und

$$F : U \to U, \qquad F(x) := \lambda\left(\frac{x}{\|x\|}\right) x.$$

Man zeige $F(q(A)) = A$ und $F^*\sigma = \sigma$.

Im Fall $n = 3$ gilt $\sigma = \sin\vartheta \, d\vartheta \wedge d\varphi$ in $\mathbb{R}^3 \setminus 0$, vgl. Aufgabe 21.6.

21.8. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion. Sei $A \subset U$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $a \in \mathring{A}$. Man beweise

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial A} \frac{f(z)}{z-a}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_A \frac{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)}{z-a} dz \wedge d\overline{z}.$$

Dabei ist das Integral über A als Limes der Integrale über

$$A_\varepsilon := \{z \in A : \|z-a\| \geqslant \varepsilon\}, \quad (\varepsilon > 0),$$

für $\varepsilon \to 0$ zu verstehen.

21.9.

a) Man zeige: Im $\mathbb{C}^n \setminus \{\zeta\}$, $n \geqslant 2$, ist die Differentialform

$$\omega_{1,\zeta} := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\partial}{\partial \zeta_1}\left(\frac{\overline{z}_k - \overline{\zeta}_k}{\|z-\zeta\|^{2n}}\right) dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_1 \wedge \ldots \widehat{d\overline{z}_k} \ldots \wedge d\overline{z}_n$$

exakt; es gilt $\omega_{1,\zeta} = \pm d\eta$ mit

$$\eta := \sum_{j=2}^{n} (-1)^j \frac{\overline{z}_j - \overline{\zeta}_j}{\|z-\zeta\|^{2n}} dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_2 \ldots \wedge \widehat{d\overline{z}_j} \ldots \wedge d\overline{z}_n.$$

b) Sei $M \subset \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ eine $(2n-1)$-dimensionale orientierte kompakte Untermannigfaltigkeit,

$$f : U \to \mathbb{C}$$

eine holomorphe Funktion in einer offenen Menge $U \supset M$ und

$$F : \mathbb{C}^n \setminus M \to \mathbb{C}$$

definiert durch

$$F(\zeta) := \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_M f(z)\sigma_\zeta(z),$$

wobei σ_ζ die Differentialform aus der Bochner-Martinellischen Integralformel ist. Man beweise, dass F in $\mathbb{C}^n \setminus M$ holomorph ist.

21.10.

a) Man zeige, dass jede beschränkte holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ konstant ist.

Anleitung: Man verwende den Satz von Liouville für harmonische Funktionen (Aufgabe 16.4).

b) Sei $n \geqslant 2$, $r \in \mathbb{R}_+$ und

$$U := \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| > r\}.$$

Es sei $F : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit

$$\lim_{\|z\| \to \infty} F(z) = 0.$$

Man zeige, dass F identisch null ist.

Anleitung: Für jede komplexe Gerade

$$\{a+tb : t \in \mathbb{C}\}, \quad a \in \mathbb{C}^n,\ b \in \mathbb{C}^n \setminus 0,$$

die ganz in U enthalten ist, wende man auf die Funktion $t \mapsto F(a+tb)$ Teil a) an.

c) Sei $n \geqslant 2,\ 0 \leqslant r < R \leqslant \infty$ und $V \subset \mathbb{C}^n$ die Kugelschale

$$V := B(0,R) \setminus \overline{B}(0,r).$$

Man zeige: Jede holomorphe Funktion $f : V \to \mathbb{C}$ lässt sich holomorph in die ganze Kugel $B(0,R)$ fortsetzen, d.h. es gibt eine holomorphe Funktion $F : B(0,R) \to \mathbb{C}$ mit $F \mid V = f$ (Hartogsscher Kugelsatz).

Anleitung: Für $\zeta \in B(0,R)$ definiere man

$$F(\zeta) := \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\|z\|=\rho} f(z)\sigma_\zeta(z),$$

wobei $\rho \in \,]r,R[$ eine Zahl mit $\|\zeta\| < \rho$ ist. Für $\zeta \in V$ gilt nach der Bochner-Martinellischen Integralformel

$$f(\zeta) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \left\{ \int_{\|z\|=\rho} f(z)\sigma_\zeta(z) - \int_{\|z\|=\rho'} f(z)\sigma_\zeta(z) \right\},$$

wobei $r < \rho' < \|\zeta\| < \rho < R$.
Man zeige mit Teil b), dass das zweite Integral verschwindet.

Literaturhinweise

Die Analysis 3 ist die Fortsetzung von

O. Forster: Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen. Vieweg+Teubner. 10. Aufl. 2011

O. Forster: Analysis 2. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$. Gewöhnliche Differentialgleichungen. Vieweg+Teubner. 9. Aufl. 2011

Diese Bücher werden als An. 1 und An. 2 zitiert.

Die erforderlichen Vorkenntnisse in linearer Algebra finden sich in

G. Fischer: Lineare Algebra. Vieweg+Teubner. 17. Aufl. 2009

Einige weitere Lehrbücher über mehrdimensionale Analysis:

I. Agricola und Th. Friedrich: Vektoranalysis. Vieweg+Teubner 2. Aufl. 2010
M. Barner und F. Flohr: Analysis II. De Gruyter. 3. Aufl. 1996
E. Behrends: Analysis 2. Vieweg, 2. Aufl. 2007
Th. Bröcker: Analysis III. Spektrum Akademischer Verlag 1995
H. Heuser: Analysis, Teil 2. Vieweg+Teubner, 14. Aufl. 2008
K. Jänich: Vektoranalysis. 5. Aufl. Springer 2008
K. Königsberger: Analysis 2. Springer, 5. Aufl. 2004
M. Spivak: Calculus on manifolds. Perseus Books 1965

Maß- und Integrationstheorie:

H. Bauer: Maß- und Integrationstheorie. De Gruyter. 2. Aufl. 1992
D.L. Cohn: Measure Theory. Birkhäuser 1980
J. Elstrodt: Maß- und Integrationstheorie. Springer. 6. Aufl. 2009

Partielle Differentialgleichungen, Funktionalanalysis, Distributionen:

J. Appell: Elemente der Funktionalanalysis. Vieweg 2005
M. Dobrowolski: Angewandte Funktionalanalysis. Springer 2006
J. Jost: Partielle Differentialgleichungen. Springer 1998
L. Schwartz: Théorie des distributions. Hermann 1997
W. Walter: Einführung in die Theorie der Distributionen. Springer 1998
E. Wienholtz, H. Kalf und Th. Kriecherbauer: Elliptische Differentialgleichungen 2. Ordnung. Springer 2009

O. Forster, *Analysis 3*, Aufbaukurs Mathematik,
DOI 10.1007/978-3-8348-2374-8, © Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden 2012

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen (einschließlich der 0)
$\mathbb{Z}$	Ring der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$	Körper der rationalen (bzw. reellen, komplexen) Zahlen
$\mathbb{R}_+$	Menge der reellen Zahlen $\geqslant 0$
$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$	erweiterte Zahlengerade, 13
$\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} = [0,+\infty]$	

$M(m \times n, K)$	Vektorraum aller $m \times n$-Matrizen mit Koeffizienten aus K
$GL(n,K)$	Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit Koeffizienten aus K
$O(n) \subset GL(n,\mathbb{R})$	Untergruppe der orthogonalen Matrizen

Mengen, Mengensysteme

$A \triangle B$	symmetrische Differenz, 1
A^c	Komplement der Menge A, 1
$A_n \uparrow A$	aufsteigender Limes einer Folge von Mengen, 7
$A_n \downarrow A$	absteigender Limes, 7
$\mathfrak{P}(\Omega)$	Potenzmenge von Ω, 1
$\mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)$	Mengenring der Quadersummen im $\mathbb{R}^n$, 4, 6
$\mathcal{B}(X)$	Borel-Algebra des topologischen Raums X, 8
$\mathfrak{A}^\uparrow$	Menge aller aufsteigenden Limiten des Mengensystems $\mathfrak{A}$, 23
$\langle\mathfrak{A}\rangle^\sigma$	von $\mathfrak{A}$ erzeugte σ-Algebra, 8
$\mathfrak{A} \boxtimes \mathfrak{B}$	Produkt von Mengenringen, 4
$\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$	Produkt von σ-Algebren, 10

Funktionenräume

$\mathcal{C}$, 64 $\quad$ $\mathcal{C}_c$, 64 $\quad$ $\mathcal{C}^k$, 112 $\quad$ $\mathcal{C}^k_c$, 112 $\quad$ $\mathcal{L}^p$, 49, 133 $\quad$ L^p, 62, 133 $\quad$ $\mathcal{L}^1_{loc}$, 58
$\mathcal{D}$, 203 $\quad$ $\mathcal{D}'$, 203

Weitere Bezeichnungen

χ_A	charakteristische Funktion der Menge A, 40
$\|f\|_{L^p}$	L^p-Norm, 61, 131
$\operatorname{Supp}(f)$	Träger einer Funktion f, 64
$\hat{f}$, $\mathcal{F}f$	Fourier-Transformierte von f, 140, 145

Namens- und Sachverzeichnis