２章　偏微分

§２　偏微分の応用（p.45～p.59）

問１

（１）$z_y = 3x \cdot 2y - 3y^2 = 6xy - 3y^2$

よって

$z_{yx} = \mathbf{6y}$

$z_{yy} = \mathbf{6x - 6y}$

（２）$z_y = \dfrac{2y}{x^2 + y^2}$

よって

$$z_{yx} = \frac{-2y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = -\boldsymbol{\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}}$$

$$z_{yy} = \frac{2(x^2 + y^2) - 2y \cdot 2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^2 + 2y^2 - 4y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \boldsymbol{\frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}}$$

問２

（１）$z_x = 2 \cdot 4x^3 - 3 \cdot 3x^2 \cdot y^4 = 8x^3 - 9x^2y^4$

よって

$z_{xx} = 8 \cdot 3x^2 - 9 \cdot 2x \cdot y^4 = \mathbf{24x^2 - 18xy^4}$

$z_{xy} = -9x^2 \cdot 4y^3 = \mathbf{-36x^2y^3}$

$z_y = -3x^3 \cdot 4y^3 = -12x^3y^3$

よって

$z_{yx} = -12 \cdot 3x^2 \cdot y^3 = \mathbf{-36x^2y^3}$

$z_{yy} = -12x^3 \cdot 3y^2 = \mathbf{-36x^3y^2}$

（２）$z_x = e^{xy} \cdot y = ye^{xy}$

よって

$z_{xx} = ye^{xy} \cdot y = \boldsymbol{y^2e^{xy}}$

$z_{xy} = 1 \cdot e^{xy} + ye^{xy} \cdot x = \boldsymbol{(1 + xy)e^{xy}}$

$z_y = e^{xy} \cdot x = xe^{xy}$

よって

$z_{yx} = 1 \cdot e^{xy} + xe^{xy} \cdot y = \boldsymbol{(1 + xy)e^{xy}}$

$z_{yy} = xe^{xy} \cdot x = \boldsymbol{x^2e^{xy}}$

（３）$z_x = \cos 3x \cos 4y \cdot 3 = 3\cos 3x \cos 4y$

よって

$z_{xx} = 3 \cdot (-\sin 3x) \cdot 3 \cdot \cos 4y = \mathbf{-9\sin 3x\cos 4y}$

$z_{xy} = 3\cos 3x \cdot (-\sin 4y) \cdot 4 = \mathbf{-12\cos 3x\sin 4y}$

$z_y = \sin 3x \cdot (-\sin 4y) \cdot 4 = -4\sin 3x \sin 4y$

よって

$z_{yx} = -4\cos 3x \cdot 3 \cdot \sin 4y = \mathbf{-12\cos 3x\sin 4y}$

$z_{yy} = -4\sin 3x \cos 4y \cdot 4 = \mathbf{-16\sin 3x\cos 4y}$

（４）$z_x = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

よって

$$z_{xx} = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot 2x}{\left(\sqrt{x^2 - y^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - y^2}}}{x^2 - y^2} = \frac{x^2 - y^2 - x^2}{(x^2 - y^2)\sqrt{x^2 - y^2}} = -\boldsymbol{\frac{y^2}{(x^2 - y^2)\sqrt{x^2 - y^2}}}$$

$$z_{xy} = \frac{-x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot (-2y)}{\left(\sqrt{x^2 - y^2}\right)^2} = \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2 - y^2}}}{x^2 - y^2} = \boldsymbol{\frac{xy}{(x^2 - y^2)\sqrt{x^2 - y^2}}}$$

$$z_y=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\cdot(-2y)=\frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

よって

$$z_{yx}=\frac{-(-y)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\cdot 2x}{\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2-y^2}}}{x^2-y^2}$$

$$=\boldsymbol{\frac{xy}{(x^2-y^2)\sqrt{x^2-y^2}}}$$

$$z_{yy}=\frac{-1\cdot\sqrt{x^2-y^2}-(-y)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\cdot(-2y)}{\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)^2}$$

$$=\frac{-\sqrt{x^2-y^2}-\frac{y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}}{x^2-y^2}$$

$$=\frac{-(x^2-y^2)-y^2}{x^2-y^2\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$=-\boldsymbol{\frac{x^2}{(x^2-y^2)\sqrt{x^2-y^2}}}$$

問３

（１）$z_x=4x^3y^3-2xy$

これより

$z_{xy}=4x^3\cdot 3y^2-2x$

$=12x^3y^2-2x$

$z_y=x^4\cdot 3y^2-x^2$

$=3x^4y^2-x^2$

これより

$z_{yx}=12x^3y^2-2x$

以上より，$\boldsymbol{z_{xy}=z_{yx}}$

また

$z_{xx}=12x^2y^3-2y$より，

$z_{xxy}=12x^2\cdot 3y^2-2=36x^2y^2-2$

$z_{xy}=12x^3y^2-2x$より，

$z_{xyx}=36x^2y^2-2$

$z_{yx}=12x^3y^2-2x$より，

$z_{yxx}=36x^2y^2-2$

以上より，$\boldsymbol{z_{xxy}=z_{xyx}=z_{yxx}}$

（２）$z_x=\cos(2x-y)\cdot 2=2\cos(2x-y)$

これより

$z_{xy}=2\cdot\{-\sin(2x-y)\}\cdot(-1)$

$=2\sin(2x-y)$

$z_y=\cos(2x-y)\cdot(-1)$

$=-\cos(2x-y)$

これより

$z_{yx}=-\{-\sin(2x-y)\}\cdot 2$

$=2\sin(2x-y)$

以上より，$\boldsymbol{z_{xy}=z_{yx}}$

また

$z_{xx}=2\cdot\{-\sin(2x-y)\}\cdot 2$

$=-4\sin(2x-y)$より

$z_{xxy}=-4\cos(2x-y)\cdot(-1)$

$=4\cos(2x-y)$

$z_{xy}=2\sin(2x-y)$より

$z_{xyx}=2\cos(2x-y)\cdot 2$

$=4\cos(2x-y)$

$z_{yx}=2\sin(2x-y)$より

$z_{yxx}=2\cos(2x-y)\cdot 2$

$=4\cos(2x-y)$

以上より，$\boldsymbol{z_{xxy}=z_{xyx}=z_{yxx}}$

問４

$z_x=2x$より，$z_{xx}=2$，$z_{xy}=0$

$z_y=-2y$より，$z_{yy}=-2$

よって

$$\frac{d^2z}{dt^2}=h^2z_{xx}+2hkz_{xy}+k^2z_{yy}$$

$$=h^2\cdot 2+2hk\cdot 0+k^2\cdot(-2)$$

$$=\boldsymbol{2h^2-2k^2}$$

問５

（１）$z_x=2x-y-4$

$z_y=-x+4y+2$

よって，極値をとり得る点の座標が満たす必要条件は

$$\begin{cases}2x-y-4=0 & \cdot\cdot\cdot ① \\ -x+4y+2=0 & \cdot\cdot\cdot ②\end{cases}$$

①より，$y=2x-4$

これを，②に代入して

$-x+4(2x-4)+2=0$

$-x+8x-16+2=0$

$7x=14$

$x=2$

これより，$y=2\cdot 2-4=0$

したがって，極値をとり得る点は，$\boldsymbol{(2,\ 0)}$

（２）$z_x=12x^2-4y$

$z_y=-4x+4y$

よって，極値を取り得る点が満たす必要条件は

$$\begin{cases}12x^2-4y\ ・・・① \\ -4x+4y\ ・・・②\end{cases}$$

②より，$y=x$

これを，①に代入して

$12x^2-4x=0$

$3x^2-x=0$

$x(3x-1)=0$

$$x=0,\ \frac{1}{3}$$

$x=0$のとき，$y=0$

$x=\dfrac{1}{3}$のとき，$y=\dfrac{1}{3}$

したがって，極値をとり得る点は，$\boldsymbol{(0,\ 0)}$，$\boldsymbol{\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)}$

$\boxed{問6}$

（１）$z_x=2x-y-4=0$

$z_y=-x+4y+2=0$

これを解いて，$x=2$，$y=0$

よって，極値をとり得る点は，$(2,\ 0)$

第２次導関数は

$z_{xx}=2$，$z_{xy}=-1$，$z_{yy}=4$であるから，

$(2,\ 0)$に対して

$H=2\cdot 4-(-1)^2$

$=7>0$

また，$z_{xx}=2>0$

以上より，zは，点$(2,\ 0)$で極小となる．

極小値は

$z=2^2-2\cdot 0+2\cdot 0^2-4\cdot 2+2\cdot 0$

$=4-8=-4$

よって，zは，**点$\boldsymbol{(2,\ 0)}$で極小値$\boldsymbol{-4}$をとる．**

（２）$z_x=-\sin x=0$

$z_y=-\cos y=0$

$-\pi<x<\pi$，$-\pi<y<\pi$において

$x=0$，$y=\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}$

よって，極値をとり得る点は，$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，$\left(0,\ -\dfrac{\pi}{2}\right)$

第２次導関数は

$z_{xx}=-\cos x$，$z_{xy}=0$，$z_{yy}=\sin y$であるから，

$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$に対して

$$H=-\cos 0\cdot\sin\frac{\pi}{2}-0=-1<0$$

よって，$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$で極値をとらない．

$\left(0,\ -\dfrac{\pi}{2}\right)$に対して

$$H=-\cos 0\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)-0=1>0$$

また，$z_{xx}=-\cos 0=-1<0$

以上より，zは，点$\left(0,\ -\dfrac{\pi}{2}\right)$で極大となる．

極大値は

$z=\cos 0-\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$

$=1-(-1)=2$

よって，zは，**点$\boldsymbol{\left(0,\ -\frac{\pi}{2}\right)}$で極大値2をとる．**

（３）$z_x=e^x(x+2y^2)+e^x\cdot 1=e^x(x+2y^2+1)=0$

$z_y=4ye^x=0$

$e^x\neq 0$より

$$\begin{cases}x+2y^2+1=0\ ・・・① \\ y=0\ ・・・②\end{cases}$$

②を，①に代入して

$x+1=0$，すなわち，$x=-1$

よって，極値をとり得る点は，$(-1,\ 0)$

第２次導関数

$z_{xx}=e^x(x+2y^2+1)+e^x\cdot 1$

$=e^x(x+2y^2+2)$

$z_{xy}=4ye^x$

$z_{yy}=4e^x$

であるから，$(-1,\ 0)$に対して

$H=e^{-1}(-1+2\cdot 0^2+2)\cdot 4e^{-1}$

$= 4e^{-2} > 0$

また

$z_{xx} = e^{-1}(-1 + 2 \cdot 0^2 + 2)$

$= e^{-1} > 0$

以上より，zは，点$(-1,\ 0)$で極小となる.

極小値は

$z = e^{-1}(-1 + 2 \cdot 0^2)$

$= -e^{-1}$

$$= -\frac{1}{e}$$

よって，zは，**点$(-1,\ 0)$で極小値$-\dfrac{1}{e}$をとる.**

$\boxed{問7}$

（1）$f = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - 1$ とおくと

$$f_x = \frac{2x}{4} = \frac{1}{2}x$$

$$f_y = \frac{2y}{9} = \frac{2}{9}y$$

よって

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{1}{2}x}{\frac{2}{9}y}$$

$$= -\boldsymbol{\frac{9x}{4y}}$$

（2）$f = x - 2y + \log x + \log y - 1$とおくと

$$f_x = 1 + \frac{1}{x}$$

$$f_y = -2 + \frac{1}{y}$$

よって

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + \frac{1}{x}}{-2 + \frac{1}{y}} = -\frac{xy + y}{-2xy + x}$$

$$= -\boldsymbol{\frac{y(x+1)}{x(1-2y)}}$$

（3）$f = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - 4$とおくと

$$f_x = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f_y = \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}$$

よって

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}} = -\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}}$$

$$= -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$= -\boldsymbol{\sqrt[3]{\frac{y}{x}}}$$

（4）$f = xe^y - ye^x$とおくと

$f_x = e^y - ye^x$

$f_y = xe^y - e^x$

よって

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^y - ye^x}{xe^y - e^x} = \boldsymbol{\frac{ye^x - e^y}{xe^y - e^x}}$$

$\boxed{問8}$

（1）$f = x^2 + y^2 - 2zx - 2yz - 1$とおくと

$f_x = 2x - 2z$

$f_y = 2y - 2z$

$f_z = -2x - 2y$

よって，$-2x - 2y \neq 0$のとき

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x - 2z}{-2x - 2y} = \boldsymbol{\frac{x - z}{x + y}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y - 2z}{-2x - 2y} = \boldsymbol{\frac{y - z}{x + y}}$$

（2）$f = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx - 1$とおくと

$f_x = 2x - y - z$

$f_y = 2y - x - z$

$f_z = 2z - x - y$

よって，$2z - y - x \neq 0$のとき

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\boldsymbol{\frac{2x - y - z}{2z - x - y}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\boldsymbol{\frac{2y - x - z}{2z - x - y}}$$

$\boxed{問9}$

（1）$f(x,\ y,\ z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$とおくと

$f_x(x,\ y,\ z) = 2x$

$f_y(x,\ y,\ z) = 2y$

$f_z(x,\ y,\ z) = -2z$

これより

$f_x(1,\ 2,\ 2) = 2 \cdot 1 = 2$

$f_y(1,\ 2,\ 2) = 2 \cdot 2 = 4$

$f_z(1,\ 2,\ 2) = -2 \cdot 2 = -4$

よって，点$(1,\ 2,\ 2)$における接平面の方程式は

$2(x-1) + 4(y-2) - 4(z-2) = 0$

$2x - 2 + 4y - 8 - 4z + 8 = 0$

$2x + 4y - 4z = 2$

$\boldsymbol{x + 2y - 2z = 1}$

（2）$f(x,\ y,\ z) = x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{4} - 3$ とおくと

$f_x(x,\ y,\ z) = 2x$

$f_y(x,\ y,\ z) = \dfrac{2y}{4} = \dfrac{1}{2}y$

$f_z(x,\ y,\ z) = \dfrac{2z}{4} = \dfrac{1}{2}z$

これより

$f_x(1,\ 2,\ 2) = 2 \cdot 1 = 2$

$f_y(1,\ 2,\ 2) = \dfrac{1}{2} \cdot 2 = 1$

$f_z(1,\ 2,\ 2) = \dfrac{1}{2} \cdot 2 = 1$

よって，点$(1,\ 2,\ 2)$における接平面の方程式は

$2(x-1) + 1(y-2) + 1(z-2) = 0$

$2x - 2 + y - 2 + z - 2 = 0$

$\boldsymbol{2x + y + z = 6}$

問 10

$\varphi(x,\ y) = x^2 + y^2 - 1$，$f(x,\ y) = xy$とおく．

$\varphi_x = 2x$，$\varphi_y = 2y$

また，$f_x = y$，$f_y = x$

よって，$\dfrac{y}{2x} = \dfrac{x}{2y}$ より，$x^2 = y^2$・・・①

これを，$x^2 + y^2 = 1$に代入して

$2x^2 = 1$

$x^2 = \dfrac{1}{2}$

$x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

①に代入して

$\dfrac{1}{2} = y^2$

$y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

以上より，極値をとり得る点は

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$，

$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

例題 6 と同様に，最大値・最小値は極値とり得る点でとることとなる．

各点におけるzの値を求めると

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$のとき，$z = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$のとき，$z = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{1}{2}$

$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$のとき，$z = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2}$

$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$のとき，$z = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2}$

以上より

点$\boldsymbol{\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}$（複号同順）において，最大値$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

点$\boldsymbol{\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}$（複号同順）において，最小値$\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$

問 11

直方体の底面の辺の長さをx，高さをyとおく．

体積が一定であるから，$x^2y = c$（cは正の定数）とするときの，$S = 2x^2 + 4xy$の最小値を考えればよい．

$\varphi(x,\ y) = x^2y - c$とすれば

$\varphi_x = 2xy$，$\varphi_y = x^2$

また，$S_x = 4x + 4y$，$S_y = 4x$

よって，$\dfrac{4x + 4y}{2xy} = \dfrac{4x}{x^2}$ より，$x = y$

これを，$x^2y = c$に代入して

$x^3 = c$

$x > 0$より，これを満たすxはただ 1 つ存在する．

最小値が存在し，極値をとり得る点が 1 つであるから，この点が最小値を与える点である．

このとき，$y = x$であるから，半径と高さの比は

$x : y = x : x = \boldsymbol{1 : 1}$

問 12

（1）$f(x,\ y,\ \alpha) = (x-\alpha)^2 + (y-\alpha)^2 - 2$とおくと

$f_\alpha(x,\ y,\ \alpha) = -2(x-\alpha) - 2(y-\alpha)$

よって，包絡線の方程式は，次の 2 式からαを消去すればよい．

$$\begin{cases}(x-\alpha)^2+(y-\alpha)^2-2=0 \cdot\cdot\cdot ① \\ -2(x-\alpha)-2(y-\alpha)=0 \quad \cdot\cdot\cdot ②\end{cases}$$

②より

$$-2x+2\alpha-2y+2\alpha=0$$
$$4\alpha=2x+2y$$
$$\alpha=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y$$

これを，①に代入して

$$\left(x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\right)^2-2=0$$

$$\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\right)^2+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)^2-2=0$$

$$\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}xy+\frac{1}{4}y^2+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}xy+\frac{1}{4}y^2-2=0$$

$$\frac{1}{2}x^2-xy+\frac{1}{2}y^2-2=0$$

$$\frac{1}{2}(x^2-2xy+y^2)-2=0$$

$$(x-y)^2-4=0$$
$$(x-y)^2=4$$
$$x-y=\pm2$$
$$\boldsymbol{y=x\pm2}$$

（2）$f(x,\ y,\ z)=\alpha x^2+\frac{1}{\alpha}-y$とおくと

$$f_\alpha(x,\ y,\ z)=x^2-\frac{1}{\alpha^2}$$

よって，包絡線の方程式は，次の 2 式からαを消去すればよい．

$$\begin{cases}\alpha x^2+\frac{1}{\alpha}-y=0 \cdot\cdot\cdot ① \\ x^2-\frac{1}{\alpha^2}=0 \qquad \cdot\cdot\cdot ②\end{cases}$$

②より

$$x^2=\frac{1}{\alpha^2}$$

$$\alpha^2=\frac{1}{x^2}$$

$$\alpha=\pm\frac{1}{x}$$

これを，①に代入して

$$\pm\frac{1}{x}\cdot x^2\pm\frac{1}{\frac{1}{x}}-y=0$$（複号同順）

$$\pm x\pm x-y=0$$
$$\boldsymbol{y=\pm2x}$$