練習問題 2-A

1.

（1）$(x^2-4x)+(y^2+2y)-7=0$

$(x-2)^2-4+(y+1)^2-1-7=0$

$(x-2)^2+(y+1)^2=12$

$(x-2)^2+(y+1)^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2$

よって，**中心** $\boldsymbol{(2,\ -1)}$，**半径** $\boldsymbol{2\sqrt{3}}$

（2）$x^2+(y^2-3y)+1=0$

$x^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}+1=0$

$x^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$

$x^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$

よって，**中心** $\boldsymbol{\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)}$，**半径** $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{2}}$

2.

（1）求める円の方程式を

$(x-1)^2+(y+2)^2=r^2$

とおくと，この円が点$(4,\ 1)$を通るので

$(4-1)^2+(1+2)^2=r^2$

よって，$r^2=18$

したがって，

$\boldsymbol{(x-1)^2+(y+2)^2=18}$

（2）円の中心の座標は，与えられた2点の中点だから

$\left(\dfrac{2+6}{2},\ \dfrac{4+(-2)}{2}\right)=(4,\ 1)$

半径は，この中心と点$(2,\ 4)$との距離だから

$\sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2}=\sqrt{13}$

よって，求める円の方程式は，

$(x-4)^2+(y-1)^2=\left(\sqrt{13}\right)^2$

$\boldsymbol{(x-4)^2+(y-1)^2=13}$

（3）求める円の方程式を，

$x^2+y^2+ax+by+c=0$

とおくと，この円が，与えられた3点を通るから

$$\begin{cases}1+1+a+b+c=0\\4+16+2a+4b+c=0\\25+9+5a+3b+c=0\end{cases}$$

整理すると

$$\begin{cases}a+b+c=-2\\2a+4b+c=-20\\5a+3b+c=-34\end{cases}$$

これを解いて，$(a,\ b,\ c)=(-6,\ -4,\ 8)$

よって，求める方程式は，

$\boldsymbol{x^2+y^2-6x-4y+8=0}$

3.

点Pの座標を$(x,\ y)$とすると

$\left.\begin{array}{l}\mathrm{AP}^2=(x-2)^2+y^2\\\mathrm{BP}^2=x^2+(y-2)^2\end{array}\right\}$・・・①

（1）与式に①を代入すると

$(x-2)^2+y^2+x^2+(y-2)^2=6$

$x^2-4x+4+y^2+x^2+y^2-4y+4=6$

$2x^2-4x+2y^2-4y=-2$

$x^2-2x+y^2-2y=-1$

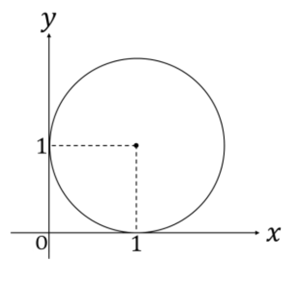
$(x-1)^2-1+(y-1)^2-1=-1$

$\boldsymbol{(x-1)^2+(y-1)^2=1}$

$(x-1)^2+(y-1)^2=1^2$

よって，求める軌跡は，

中心 $(1,\ 1)$，半径 1 の円である．



（2）$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=1:2$より，$2\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$であるから

$4\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

これに①を代入すると

$4\{(x-2)^2+y^2\}=x^2+(y-2)^2$

$4(x^2-4x+4+y^2)=x^2+y^2-4y+4$

$4x^2-16x+16+4y^2=x^2+y^2-4y+4$

$3x^2-16x+3y^2+4y+12=0$

$x^2-\dfrac{16x}{3}+y^2+\dfrac{4y}{3}+4=0$

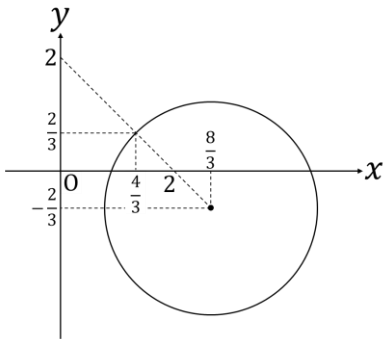
$$\left(x-\frac{8}{3}\right)^2-\frac{64}{9}+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}+4=0$$

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{8}{3}\right)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{32}{9}}$$

$$\left(x-\frac{8}{3}\right)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2$$

よって，求める軌跡は，

中心 $\left(\frac{8}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$，半径 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ の円である．



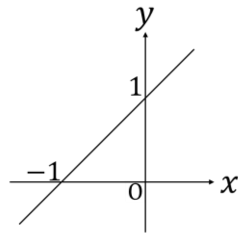
（３）与式に①を代入すると，

$(x-2)^2+y^2-\{x^2+(y-2)^2\}=4$

$x^2-4x+4+y^2-(x^2+y^2-4y+4)=4$

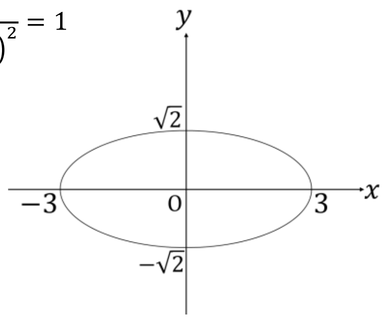
$-4x+4y=4$

$y=x+1$



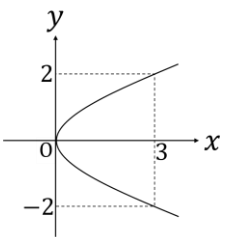
4.

（１）$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{2})^2}=1$

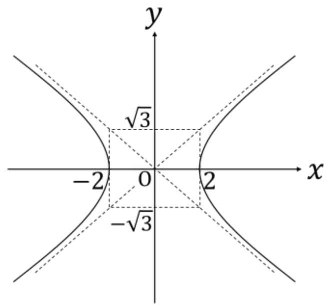


（２）$y^2=\frac{4}{3}x$

$y^2=4\cdot\frac{1}{3}x$



（３）$\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{3})^2}=1$



5.

（１）焦点が$(0,\ \pm\sqrt{3})$であるから，

求める楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(b>a>0)$$

とおくことができる．長軸の長さが6であるから

$2b=6$

よって，$b=3$

$\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{3}$

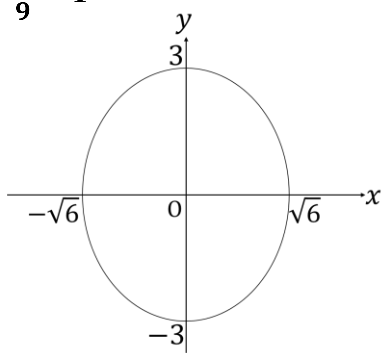
であるから，これに$b=3$を代入して

$9-a^2=3$

よって，$a^2=6$

したがって，楕円の方程式は

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{9}=1}$$



（２）焦点はy軸上にあるので，求める双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\quad(a>0,\ b>0)$$

とおくことができる．

点$(0,\ 1)$を通るから

$$-\frac{1}{b^2}=-1$$

よって，$b^2=1$・・・①

漸近線の傾きが$\pm\frac{1}{2}x$であるから

$$\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$$

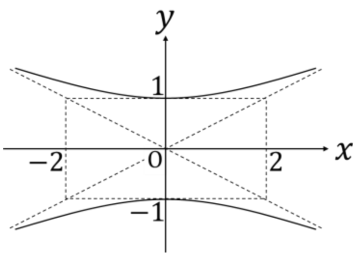
よって，$a=2b$となるので

$$a^2=4b^2$$

①を代入して，$a^2=4\cdot 1=4$

したがって，双曲線の方程式は

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{4}-y^2=-1}$$



6.

$y=x+k$を，$5x^2-y^2=-5$に代入して整理すると

$$5x^2-(x+k)^2=-5$$
$$5x^2-(x^2+2kx+k^2)=-5$$
$$4x^2-2kx-k^2+5=0\cdot\cdot\cdot①$$

この２次方程式の判別式をDとすると

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-4(-k^2+5)$$
$$=k^2+4k^2-20$$
$$=5k^2-20$$

双曲線と直線が接するための条件は，

$D=0$であるから

$$5k^2-20=0$$
$$k^2=4$$
$$k=\pm 2$$

このとき，①は

$$4x^2\mp 4x+1=0$$

となるから，これを解いて

$$(2x\mp 1)^2=0$$
$$x=\pm\frac{1}{2}$$
$$y=x+k$$
$$=\pm\frac{1}{2}\pm 2\quad (\text{複号同順})$$
$$=\pm\frac{5}{2}$$

よって，$\boldsymbol{k=\pm 2}$

焦点の座標は

$$\boldsymbol{\left(\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{5}{2}\right)}\quad \textbf{(複号同順)}$$

7.

（１）$x^2+y^2>4$の表す領域は，円$x^2+y^2=4$の外部である．

$x+y+2>0$より，$y>-x-2$

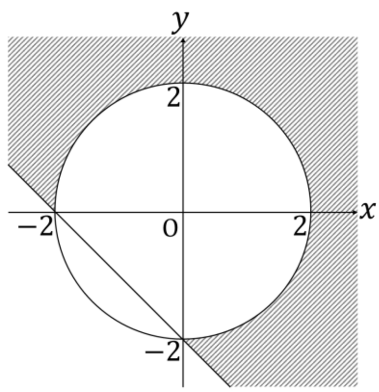
この不等式の表す領域は，直線$y=-x-2$の上側である．

円と直線の交点の座標を求めると

$$x^2+(-x-2)^2=4$$
$$x^2+x^2+4x+4=4$$
$$2x^2+4x=0$$
$$x(x+2)=0$$
$$x=0,\ -2$$

よって，$(0,\ -2)$，$(-2,\ 0)$

したがって，求める領域は，２つの領域の共通部分であるから，図の斜線部分である．



ただし，**境界を含まない．**

（２）$x^2+y\leqq 0$より，$y\leqq -x^2$

この不等式の表す領域は，放物線$y=x^2$の下側である．

$2x-y-3\leqq 0$より，$y\geqq 2x-3$

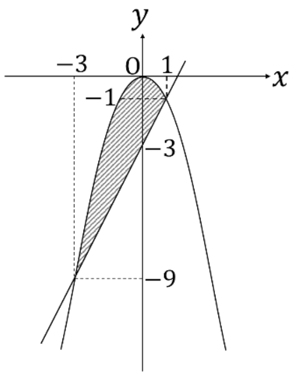
この不等式の表す領域は，直線$y=2x-3$の上側である．

放物線と直線の交点を求めると

$$-x^2=2x-3$$
$$x^2+2x-3=0$$
$$(x+3)(x-1)=0$$
$$x=-3,\ 1$$

よって，$(-3,\ -9)$，$(1,\ -1)$

したがって，求める領域は，２つの領域の共通部分であるから，図の斜線部分である．



ただし，**境界を含む.**

8.

2 直線$y=x+1$，$y=3x-1$の交点の座標は，

$(1,\ 2)$，

2 直線$y=-x+1$，$y=3x-1$の交点の座標は，

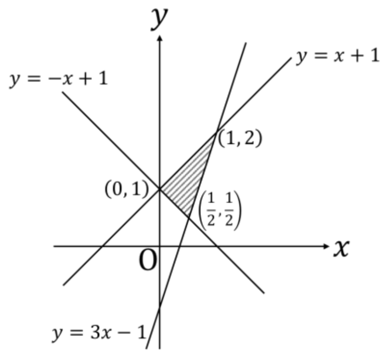
$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，

2 直線$y=x+1$，$y=-x+1$の交点の座標は，

$(0,\ 1)$である．

よって，与えられてた連立不等式の表す領域は

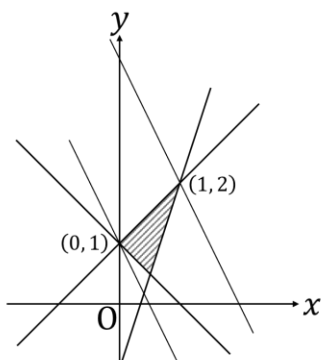
図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



$2x+y=k$とおくと

$y=-2x+k$・・・①

①は，傾きが-2，切片がkの直線を示す．



図より，直線①が点$(1,\ 2)$を通るとき，kの値は

最大となる．

このとき，$k=2x+y=2\cdot1+2=4$

また，直線①が点$(0,\ 1)$を通るとき，kの値は

最小となる．

このとき，$k=2x+y=2\cdot0+1=1$

よって

最大値　4　（$\boldsymbol{x=1,\ y=2}$のとき）

最小値　1　（$\boldsymbol{x=0,\ y=1}$のとき）

練習問題 2-B

（１）中心の座標は，$(0,\ t)$と表されるので，

求める円の方程式を

$x^2+(y-t)^2=r^2$

とおくと，この円が与えられた２点を通るから

$$\begin{cases}1+(1-t)^2=r^2\\4+(4-t)^2=r^2\end{cases}$$

r^2を削除すると

$$1+(1-t)^2=4+(4-t)^2$$

$$1+1-2t+t^2=4+16-8t+t^2$$

$$6t=18$$

$$t=3$$

よって，$r^2=1+(1-3)^2=5$

したがって

$$\boldsymbol{x^2+(y-3)^2=5}$$

（２）中心の座標は，$(t,\ t)$と表されるので，

求める円の方程式を

$(x-t)^2+(y-t)^2=r^2$

とおくと，この円が与えられた２点を通るから

$$\begin{cases}t^2+t^2=r^2\\(1-t)^2+(3-t)^2=r^2\end{cases}$$

r^2を削除すると

$$2t^2=(1-t)^2+(3-t)^2$$

$$2t^2=1-2t+t^2+9-6t+t^2$$

$$8t=10$$

$$t=\frac{5}{4}$$

よって，$r^2=2t^2=2\cdot\frac{25}{16}=\frac{25}{8}$

したがって

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{8}}$$

2.

$y = mx$を$x^2 + y^2 - 3x - 2y + 3 = 0$に代入して整理すると

$$x^2 + (mx)^2 - 3x - 2(mx) + 3 = 0$$

$$(m^2 + 1)x^2 - (2m + 3)x + 3 = 0$$

この2次方程式の判別式をDとすると

$$\begin{aligned} D &= \{-(2m+3)\}^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 3 \\ &= 4m^2 + 12m + 9 - 12m^2 - 12 \\ &= -8m^2 + 12m - 3 \end{aligned}$$

直線と円が接するのは，$D = 0$のときであるから

$$8m^2 - 12m + 3 = 0$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 3}}{2 \cdot 8} \\ &= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 96}}{16} \\ &= \frac{12 \pm \sqrt{48}}{16} \\ &= \frac{12 \pm 4\sqrt{3}}{16} \\ &= \boldsymbol{\frac{3 \pm \sqrt{3}}{4}} \end{aligned}$$

また，直線と円が共有点を持たないのは，$D < 0$のときであるから

$$-8m^2 + 12m - 3 < 0$$

$$8m^2 - 12m + 3 > 0$$

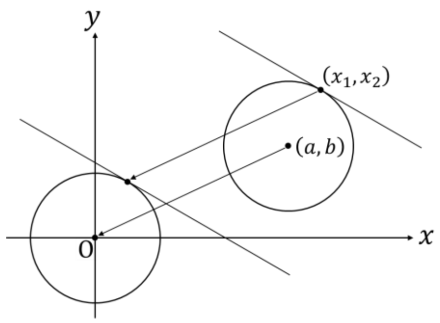
$$8\left(m - \frac{3 - \sqrt{3}}{4}\right)\left(m - \frac{3 + \sqrt{3}}{4}\right) > 0$$

よって

$$\boldsymbol{m < \frac{3 - \sqrt{3}}{4}, \ m > \frac{3 + \sqrt{3}}{4}}$$

3.

円$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$と円周上の点$(x_1, \ y_1)$を，x軸方向に$-a$，y軸方向に$-b$だけ平行移動させると，円は$x^2 + y^2 = r^2$に，円周上の点は$(x_1 - a, \ y_1 - b)$に移る．



円$x^2 + y^2 = r^2$の，点$(x_1 - a, \ y_1 - b)$における接線の方程式は

$$(x_1 - a)x + (y_1 - b)y = r^2$$

である．

求める戦線の方程式は，この直線を，x軸方向にa，y軸方向にbだけ平行移動させればよいから

$$\boldsymbol{(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2}$$

$(x_1, \ y_1) = (1, \ 3)$，$a = -2$，$b = 1$，$r^2 = 13$であるから，求める接線の方程式は

$$(1+2)(x+2) + (3-1)(y-1) = 13$$

$$3(x+2) + 2(y-1) = 13$$

$$3x + 6 + 2y - 2 = 13$$

$$\boldsymbol{3x + 2y = 9}$$

4.

$y = mx + 1$を$x^2 + 4y^2 = 2$に代入して整理すると

$$x^2 + 4(mx+1)^2 = 2$$

$$x^2 + 4(m^2x^2 + 2mx + 1) = 2$$

$$(4m^2 + 1)x^2 + 8mx + 2 = 0$$

この2次方程式の判別式をDとすると

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (4m)^2 - (4m^2 + 1) \cdot 2 \\ &= 16m^2 - 8m^2 - 2 \\ &= 8m^2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

i）$D > 0$のとき，すなわち

$$8m^2 - 2 > 0$$

$$4m^2 - 1 > 0$$

$$(2m+1)(2m-1) > 0$$

$m < -\frac{1}{2}$，$m > \frac{1}{2}$のとき，

共有点の個数は2個．

ii）$D = 0$のとき，すなわち

$m = \pm\frac{1}{2}$のとき

共有点の個数は1個．

iii）$D < 0$のとき，すなわち

$-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$のとき

共有点の個数は0個．

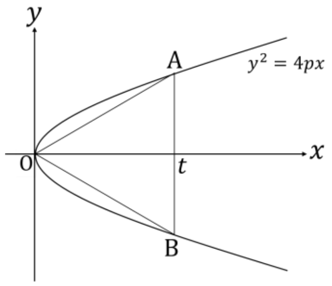
よって

$\boldsymbol{m < -\frac{1}{2}}$，$\boldsymbol{m > \frac{1}{2}}$**のとき　2個**

$\boldsymbol{m = \pm\frac{1}{2}}$**のとき　1個**

$\boldsymbol{-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}}$**のとき　0個**

5.



点 A, B のx座標をtとすると

$y^2 = 4pt$より，$y = \pm 2\sqrt{pt}$

ここで, $\mathrm{A}(t,\ 2\sqrt{pt})$, $\mathrm{B}(t,\ -2\sqrt{pt})$とする.

$$\mathrm{OA} = \sqrt{t^2 + (2\sqrt{pt})^2}$$

$$= \sqrt{t^2 + 4pt}$$

$$\mathrm{AB} = 2\sqrt{pt} - (-2\sqrt{pt})$$

$$= 4\sqrt{pt}$$

$\mathrm{OA} = \mathrm{AB}$より，$\mathrm{OA}^2 = \mathrm{AB}^2$であるから

$$t^2 + 4pt = 16pt$$

$$t^2 - 12pt = 0$$

$$t(t - 12p) = 0$$

$t = 0$であるから，$t = 12p$

よって

$$\mathrm{AB} = 4\sqrt{p \cdot 12p} = 8\sqrt{3}p$$

したがって

$$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\mathrm{AB} \cdot t$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3}p \cdot 12p$$

$$\boldsymbol{= 48\sqrt{3}p^2}$$

6.

（1）$\triangle\mathrm{OAB}$で，$\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 = \mathrm{AB}^2$であるから

$$a^2 + b^2 = 3^2$$

すなわち，$\boldsymbol{a^2 + b^2 = 9}$

（2）$x = \dfrac{2 \cdot a + 1 \cdot 0}{1 + 2} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}a}$

$$y = \frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot b}{1 + 2} = \boldsymbol{\frac{1}{3}b}$$

（3）$x = \dfrac{2}{3}a$より，$a = \dfrac{3}{2}x$

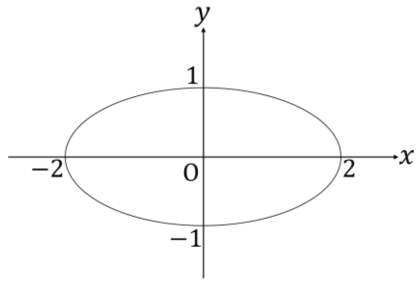
$y = \dfrac{1}{3}b$より，$b = 3y$

これらを，$a^2 + b^2 = 9$に代入すると

$$\left(\frac{3}{2}x\right)^2 + (3y)^2 = 9$$

$$\frac{9}{4}x^2 + 9y^2 = 9$$

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{4} + y^2 = 1}$$



7.

$y^2 \leqq 4x$より，$x \geqq \dfrac{1}{4}y^2$

この不等式の表す領域は，$x^2 = \dfrac{1}{4}y^2$の右側である.

$2x + y \leqq 12$より，$y \leqq -2x + 12$

この不等式の表す領域は，直線$y = -2x + 12$の下側である.

放物線と直線の交点の座標を求めると

$$\frac{1}{4}y^2 = -\frac{1}{2}y + 6$$

$$y^2 + 2y - 24 = 0$$

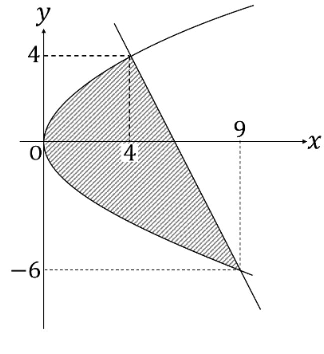
$$(y + 6)(y - 4) = 0$$

$$y = -6,\ 4$$

よって，$(9,\ -6)$，$(4,\ 4)$

したがって，求める領域は，２つの領域の共通部分であるから，図の斜線部分である.

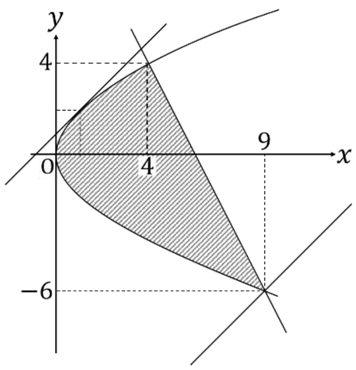
ただし，境界を含む.



$x-y=k$とおくと

$y=x-k$・・・①

①は，傾きが1，切片が$-k$の直線を表す.



図より，直線①が点$(9,\ -6)$を通るとき，

$-k$が最小になるので，kの値は最大となる.

このとき，$k=x-y=9-(-6)=15$

また，直線①と$y^2=4x$との接点において，

$-k$が最大になるので，kの値は最小となる.

kの値を判別式によって求める.

$y=x-k$を$y^2=4x$に代入して整理すると，

$$(x-k)^2=4x$$

$$x^2-2kx+k^2-4x=0$$

$$x^2+2(-x-2)x+k^2=0$$

この方程式の判別式をDとすると，

$$\frac{D}{4}=(-k-2)^2-k^2$$

$$=k^2+4k+4-k^2$$

$$=4k+4$$

接点を持つ(共有点が１個となる)のは，$D=0$

のときであるから，

$$k+1=0$$

$$k=-1$$

したがって，この値がkの最小値となる.

また，接点の座標は，$y=x+1$と$y^2=4x$の交点で

あるから，求めると$(1,\ 2)$である.

よって

最大値　15　（$x=9,\ y=-6$のとき）

最小値　−1　（$x=1,\ y=2$のとき）

8.

点P座標を$(x,\ y)$とすると

$$\mathrm{PF}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\mathrm{PF'}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$\mathrm{PF}+\mathrm{PF'}=2a$に代入すると

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

両辺を２乗して整理すると

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2+4cx$$

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$$

両辺を２乗して整理すると

$$a^2\{(x+c)^2+y^2\}=a^4+2a^2cx+c^2x^2$$

$$a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4+2a^2cx+c^2x^2$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

問題文より，$a^2-c^2=b^2$であるから

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

両辺をa^2b^2で割って

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$