35 スペードの素数は 2, 3, 5, 7, 11, 13 の 6 枚なので，$P(A) = \dfrac{6}{52}$．絵札は J, Q, K でそれぞれの数字はハート，ダイヤ，クラブ，スペードの 4 つのスートがあるから $3 \times 4 = 12$ 枚より，$P(B) = \dfrac{12}{52}$．スペードの素数で絵札なのは J, K の 2 枚だから $P(A \cap B) = \dfrac{2}{52}$.
したがって求める確率 $P_A(B)$, $P_B(A)$ は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{52}}{\frac{6}{52}} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{52}}{\frac{12}{52}} = \mathbf{\frac{1}{6}}$$

36 (1) 大小 2 個のさいころを同時に投げるときの全事象は $6^2 = 36$ 通り．大きいさいころの出る目が偶数である事象 A は，2, 4, 6 の 3 通り．小さいさいころは 1〜 6 の 6 通りから任意に取れるので，$n(A) = 3 \times 6 = 18$ 通り．
したがって求める確率 $P(A)$ は

$$P(A) = \frac{18}{36} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

(2) 大きいさいころの出る目が偶数かつ出る目の和が 7 である事象 $A \cap B$ は，（大きいさいころの出る目, 小さいさいころの出る目）で表すと，

$$(2, 5), (4, 3), (6, 1)$$

の 3 通りなので，$n(A \cap B) = 3$.
したがって求める確率 $P_A(B)$ は

$$P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{3}{18} = \mathbf{\frac{1}{6}}$$

(3) 確率の乗法定理より，求める確率 $P(A \cap B)$ は

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \mathbf{\frac{1}{12}}$$

37 (1) 野球観戦が好きな会員である事象を A，サッカー観戦が好きな会員である事象を B とすると，

$$P(A) = \frac{40}{100}, \quad P_A(B) = \frac{70}{100},$$
$$P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B) = \frac{30}{100}$$

確率の乗法定理より，野球は好きだがサッカーは好きでない確率 $P(A \cap \overline{B})$ は

$$\begin{aligned} P(A \cap \overline{B}) &= \frac{40}{100} \times \frac{30}{100} \\ &= \mathbf{\frac{3}{25}} \end{aligned}$$

(2) テニス観戦が好きな会員である事象を C とすると，

$$P_{A \cap B}(C) = \frac{80}{100}$$

したがって野球観戦もサッカー観戦もテニス観戦も好きな確率 $P(A \cap B \cap C)$ は

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P(A)P_A(B)P_{A \cap B}(C) \\ &= \frac{40}{100} \times \frac{70}{100} \times \frac{80}{100} \\ &= \mathbf{\frac{28}{125}} \end{aligned}$$

(3) $P_{A \cap B}(C)$ の余事象を考えて

$$\begin{aligned} P_{A \cap B}(\overline{C}) &= 1 - P_{A \cap B}(C) \\ &= 1 - \frac{80}{100} \\ &= \frac{20}{100} \end{aligned}$$

これより，野球観戦もサッカー観戦も好きだがテニス観戦は好きではない確率 $P(A \cap B \cap \overline{C})$ は

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap \overline{C}) &= P(A)P_A(B)P_{A \cap B}(\overline{C}) \\ &= \frac{40}{100} \times \frac{70}{100} \times \frac{20}{100} \\ &= \mathbf{\frac{7}{125}} \end{aligned}$$

38 (1) 20 本のくじから当たりくじ 4 本を引く確率なので，求める確率を $P(A)$ とすると

$$P(A) = \frac{4}{20} = \mathbf{\frac{1}{5}}$$

(2) 全事象は $n(\Omega) = {}_{20}\mathrm{P}_3$ 通り．
「B が当たる事象」=「A が当たり B も当たる事象」$\cup$「A がはずれ B が当たる事象」.
「A が当たり B も当たる事象」は

$$n(A \cap B) = 4 \cdot 3 \cdot 18 \text{ 通り}$$

「A がはずれ B が当たる事象」は

$$n(\overline{A} \cap B) = 16 \cdot 4 \cdot 18 \text{ 通り}$$

したがって求める確率を $P(B)$ とすると

$$\begin{aligned}P(B) &= P\left((A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)\right)\\ &= P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)\\ &= \frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)}+\frac{n(\overline{A}\cap B)}{n(\Omega)}\\ &= \frac{4\cdot 3\cdot 18}{{}_{20}\mathrm{P}_3}+\frac{16\cdot 4\cdot 18}{{}_{20}\mathrm{P}_3}\\ &= \mathbf{\frac{1}{5}}\end{aligned}$$

(3)　「A も B も C も当たる事象」は

$$n(A\cap B\cap C)=4\cdot 3\cdot 2 \text{ 通り}$$

したがって求める確率を $P(A\cap B\cap C)$ とすると

$$\begin{aligned}P(A\cap B\cap C) &= \frac{n(A\cap B\cap C)}{n(\Omega)}\\ &= \frac{4\cdot 3\cdot 2}{{}_{20}\mathrm{P}_3}\\ &= \mathbf{\frac{1}{285}}\end{aligned}$$

(4)　「A が当たり B がはずれて C が当たる事象」は

$$n(A\cap\overline{B}\cap C)=4\cdot 16\cdot 3 \text{ 通り}$$

したがって求める確率を $P(A\cap\overline{B}\cap C)$ とすると

$$\begin{aligned}P(A\cap\overline{B}\cap C) &= \frac{n(A\cap\overline{B}\cap C)}{n(\Omega)}\\ &= \frac{4\cdot 16\cdot 3}{{}_{20}\mathrm{P}_3}\\ &= \mathbf{\frac{8}{285}}\end{aligned}$$

(5)　「C が当たる事象」=「A も B も C も当たる事象」$\cup$「A がはずれ B と C が当たる事象」$\cup$「B がはずれ A と C が当たる事象」$\cup$「A と B がはずれ C が当たる事象」.
「A がはずれ B と C が当たる事象」は

$$n(\overline{A}\cap B\cap C)=16\cdot 4\cdot 3 \text{ 通り}$$

「A と B がはずれ C が当たる事象」は

$$n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)=16\cdot 15\cdot 4 \text{ 通り}$$

したがって求める確率を $P(C)$ とすると

$$\begin{aligned}P(C) &= P(A\cap B\cap C)+P(\overline{A}\cap B\cap C)\\ &\quad +P(A\cap\overline{B}\cap C)+P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)\\ &= \frac{n(A\cap B\cap C)}{n(\Omega)}+\frac{n(\overline{A}\cap B\cap C)}{n(\Omega)}\\ &\quad +\frac{n(A\cap\overline{B}\cap C)}{n(\Omega)}+\frac{n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)}{n(\Omega)}\\ &= \frac{4\cdot 3\cdot 2}{{}_{20}\mathrm{P}_3}+\frac{16\cdot 4\cdot 3}{{}_{20}\mathrm{P}_3}\\ &\quad +\frac{4\cdot 16\cdot 3}{{}_{20}\mathrm{P}_3}+\frac{16\cdot 15\cdot 4}{{}_{20}\mathrm{P}_3}\\ &= \mathbf{\frac{1}{5}}\end{aligned}$$

39　(1)　3 の倍数は $\dfrac{600}{3}=200$ 個, 5 の倍数は $\dfrac{600}{5}=120$ 個なので,

$$P(A)=\frac{200}{600}=\frac{1}{3},\quad P(B)=\frac{120}{600}=\frac{1}{5}$$

また，3 の倍数かつ 5 の倍数は，$\dfrac{600}{3\times 5}=40$ 個なので,

$$P(A\cap B)=\frac{40}{600}=\frac{1}{15}=P(A)P(B)$$

したがって A と B は**互いに独立である.**
1 から 400 の場合,
3 の倍数は $\dfrac{400}{3}=133.3\cdots\fallingdotseq 133$ 個,
5 の倍数は $\dfrac{400}{5}=80$ 個なので,

$$P(A)=\frac{133}{400},\quad P(B)=\frac{80}{400}=\frac{1}{5}$$

また，3 の倍数かつ 5 の倍数は,
$\dfrac{400}{3\times 5}=26.6\cdots\fallingdotseq 26$ 個なので,

$$P(A\cap B)=\frac{26}{400}=\frac{130}{2000}\neq P(A)P(B)$$

したがって A と B は**互いに独立でない.**

(2)　素数の目が出る事象は，1, 2, 3, 5 のときの 4 通りなので

$$P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

2 の倍数の目が出る事象は 2, 4, 6 のときの 3 通りなので

$$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

3 の倍数の目が出る事象は 3, 6 のときの 2 通りなので

$$P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

素数かつ 2 の倍数が出る事象 $A \cap B$ は 2 のときの 1 通りのなので

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \neq P(A)P(B)$$

したがって，A と B は**互いに独立でない．**
2 の倍数かつ 3 の倍数の目が出る事象 $B \cap C$ は 6 のときの 1 通りのなので

$$P(B \cap C) = \frac{1}{6} = P(B)P(C)$$

したがって，B と C は**互いに独立である．**
3 の倍数かつ素数の目が出る事象 $C \cap A$ は 3 のときの 1 通りのなので

$$P(C \cap A) = \frac{1}{6} \neq P(C)P(A)$$

したがって，C と A は**互いに独立でない．**

コメント

解答では「互いに独立である」となっている

40 (1)　A と B は互いに独立なので，事象の独立性より求める確率 $P(A \cap B)$ は

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \boldsymbol{\frac{2}{15}}$$

(2)　確率の加法定理と (1) の結果より，求める確率 $P(A \cup B)$ は

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{15} \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{5}} \end{aligned}$$

41 (1)　1 回目に赤玉が出る事象を A_1，2 回目に白玉が出る事象を B_2，3 回目に白玉が出る事象を B_3 とする．復元抽出より A_1, B_2, B_3 は互いに独立だから，この事象の確率を $P(A_1 \cap B_2 \cap B_3)$ とすると

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap B_2 \cap B_3) &= P(A_1)P(B_2)P(B_3) \\ &= \frac{3}{9} \times \frac{6}{9} \times \frac{6}{9} \\ &= \frac{4}{27} \end{aligned}$$

同様に，2 回目に赤玉，3 回目に赤玉が出る事象を考えて，それぞれの事象の確率を $P(B_1 \cap A_2 \cap B_3)$, $P(B_1 \cap B_2 \cap A_3)$ とし，求める確率を P とおけば

$$\begin{aligned} P &= P(A_1 \cap B_2 \cap B_3) \\ &\quad + P(B_1 \cap A_2 \cap B_3) \\ &\quad + P(B_1 \cap B_2 \cap A_3) \\ &= 3 \times \frac{4}{27} \\ &= \boldsymbol{\frac{4}{9}} \end{aligned}$$

(2)　1 回目に赤玉が出る事象を A_1，2 回目に白玉が出る事象を B_2，3 回目に白玉が出る事象を B_3 とする．非復元抽出より A_1, B_2, B_3 は互いに独立でないから，この事象の確率を $P(A_1 \cap B_2 \cap B_3)$ とすると，確率の乗法定理より

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap B_2 \cap B_3) &= P(A_1)P_{A_1}(B_2)P_{A_1 \cap B_2}(B_3) \\ &= \frac{3}{9} \times \frac{6}{8} \times \frac{5}{7} \\ &= \frac{5}{28} \end{aligned}$$

同様に，2 回目に赤玉，3 回目に赤玉が出る事象を考えて，それぞれの事象の確率を $P(B_1 \cap A_2 \cap B_3)$, $P(B_1 \cap B_2 \cap A_3)$ とし，求める確率を P とすれば

$$\begin{aligned} P &= P(A_1 \cap B_2 \cap B_3) \\ &\quad + P(B_1 \cap A_2 \cap B_3) \\ &\quad + P(B_1 \cap B_2 \cap A_3) \\ &= 3 \times \frac{5}{28} \\ &= \boldsymbol{\frac{15}{28}} \end{aligned}$$

42 (1)　1 個のさいころを 1 回投げるとき，1 の目が出る確率 p は $p = \frac{1}{6}$
反復試行の確率公式より，求める確率 P は

$$P = {}_4\mathrm{C}_3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{4-3} = \boldsymbol{\frac{5}{324}}$$

(2)　1 枚の硬貨を 1 回投げるとき，表が出る確率 p は $p = \frac{1}{2}$
反復試行の確率公式より，求める確率 P は

$$P = {}_7\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{7-2} = \boldsymbol{\frac{21}{128}}$$

(3)　1 回玉を復元抽出するとき，白玉が出る確率 p は $p=\dfrac{2}{5}$

反復試行の確率公式より，求める確率 P は

$$P={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(1-\frac{2}{5}\right)^{3-2}=\mathbf{\frac{36}{125}}$$

43 (1)　1 の目が 1 回，2 の目が 2 回出る事象は，(1 回目の目, 2 回目の目, 3 回目の目) とすれば，(1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1) の 3 通り．各出目は $\dfrac{1}{6}$ の確率で出るので，求める確率 P は

$$P=3\times\left(\frac{1}{6}\right)^3=\mathbf{\frac{1}{72}}$$

(2)　1 個のさいころを 1 回投げるとき，奇数の目が出る確率 p は $p=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

反復試行の確率公式より，求める確率 P は

$$P={}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-3}=\mathbf{\frac{1}{8}}$$

(3)　少なくとも 1 回奇数の目が出る事象は，すべて偶数の目が出る事象の余事象．偶数の目が出る確率 p は $p=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$．反復試行の確率公式より，求める確率 P は

$$\begin{aligned}P&=1-{}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-3}\\&=1-\frac{1}{8}\\&=\mathbf{\frac{7}{8}}\end{aligned}$$

(4)　奇数の目が出る回数が偶数の目が出る回数よりも多くなるのは，奇数の目が 2 回以上出たとき．奇数の目が出る回数が 2 回の事象を A_2, 3 回の事象を A_3 とする．反復試行の確率公式より，求める確率 P は

$$\begin{aligned}P&=P(A_2)+P(A_3)\\&={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-2}\\&\quad+{}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-3}\\&=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\\&=\mathbf{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

(5)　3 回目に 6 の目が出る事象を B_3 とすると，$P(B_3)=\dfrac{1}{6}$

1 回目と 2 回目は 6 の目以外で任意なので，B_1, B_2 を用いて，$P(B_1)=P(B_2)=\dfrac{5}{6}$

求める確率 P は

$$\begin{aligned}P&=P(B_1)P(B_2)P(B_3)\\&=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\\&=\mathbf{\frac{25}{216}}\end{aligned}$$

(6)　3 回目に 2 回目の 6 の目が出るには，1 回目または 2 回目のいずれかで 1 回目の 6 の目が出ていなければならない．求める確率 P は

$$\begin{aligned}P&=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\\&=\mathbf{\frac{5}{108}}\end{aligned}$$