

## 練習問題 2-A

1.

(1) 与えられた等差数列の一般項を $a_n$ とすると

$$a_n = 50 + (n-1) \cdot (-3)$$

$$= -3n + 53$$

 $a_n < 0$ とすると

$$-3n + 53 < 0$$

$$-3n < -53$$

$$n > \frac{53}{3} = 17.666 \dots$$

よって、はじめて負になるのは、**第 18 項**である。(2) 与えられた等差数列の初項から第 $n$ 項までの和を $S_n$ とすると

$$S_n = \frac{n\{2 \cdot 50 + (n-1) \cdot (-3)\}}{2}$$

$$= \frac{n(-3n + 103)}{2}$$

よって、第 10 項までの和は

$$S_{10} = \frac{10(-3 \cdot 10 + 103)}{2}$$

$$= 5 \cdot 73$$

$$= \mathbf{365}$$

(3)  $S_n < 0$ とすると

$$\frac{n(-3n + 103)}{2} < 0$$

$$-n(3n - 103) < 0$$

$$n(3n - 103) > 0$$

$$n < 0, n > \frac{103}{3} = 34.333 \dots$$

 $n > 0$ であるから、はじめて負になるのは、**第 35 項**である。

2.

(1) 与えられた等比数列の一般項を $a_n$ とすると

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

 $a^n > 3000$ とすると

$$3 \cdot 2^{n-1} > 3000$$

$$2^{n-1} > 1000$$

ここで、 $2^9 = 512$ ,  $2^{10} = 1024$ であるから、はじめて3000より大きくなるのは、 $n-1 = 10$ より、 $n = 11$ , すなわち**第 11 項**である。(2) 与えられた等比数列の初項から第 $n$ 項までの和を $S_n$ とすると

$$S_n = \frac{3(2^n - 1)}{2 - 1}$$

$$= 3(2^n - 1)$$

よって、第 7 項までの和は

$$S_7 = 3(2^7 - 1)$$

$$= 3 \cdot 127$$

$$= \mathbf{381}$$

(3)  $S_n > 30000$ とすると

$$3(2^n - 1) > 30000$$

$$2^n - 1 > 10000$$

$$2^n > 10001$$

ここで、 $2^{13} = 8192$ ,  $2^{14} = 16384$ であるから、はじめて30000より大きくなるのは、**第 14 項**である。

3.

(1) 初項 1, 公比 $-\frac{1}{2}$ で、 $-\frac{1}{2^9}$ は第 10 項であるから、

求める和は、

$$\frac{1\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{1024}}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1023}{1024} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{\mathbf{341}}{\mathbf{512}}$$

(2) 初項 $\sqrt{3}$ , 公比 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ であるから、求める和は、

$$\frac{\sqrt{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{10}\right\}}{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3^5}\right)}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{3(3^5 - 1)}{3^5(\sqrt{3} + 1)}$$

$$= \frac{242(\sqrt{3} - 1)}{81(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)}$$

$$= \frac{242(\sqrt{3}-1)}{81 \cdot 2}$$

$$= \frac{121(\sqrt{3}-1)}{81}$$

4.

$$(1) \text{ 与式} = \sum_{k=1}^n (3k^2 - k)$$

$$= 3 \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k$$

$$= \frac{3}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1)\{(2n+1)-1\}$$

$$= n^2(n+1)$$

$$(2) \text{ 与式} = \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 + 3k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + 3 \sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= \frac{1}{6}(n-1)n\{2(n-1)+1\} + \frac{3}{2}(n-1)n$$

$$= \frac{1}{6}n(n-1)\{2n-2+1+9\}$$

$$= \frac{1}{6}n(n-1)(2n+8)$$

$$= \frac{1}{3}n(n-1)(n+4)$$

5.

$$(1) a_2 = 4a_1 + 3 = 3 \cdot 4 + 3$$

$$a_3 = 4a_2 + 3$$

$$= 4(3 \cdot 4 + 3) + 3$$

$$= 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3$$

$$a_4 = 4a_3 + 3$$

$$= 4(3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3) + 3$$

$$= 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3$$

よって,

$$a_n = 3 \cdot 4^{n-1} + 3 \cdot 4^{n-2} + \dots + 3 \cdot 4 + 3$$

$$= 3 + 3 \cdot 4 + \dots + 3 \cdot 4^{n-2} + 3 \cdot 4^{n-1}$$

$$= \frac{3(4^n - 1)}{4 - 1}$$

$$= 4^n - 1$$

$$(2) b_2 = b_1 + 2 \cdot 1 = 4 + 2 \cdot 1$$

$$b_3 = b_2 + 2 \cdot 2$$

$$= 4 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2$$

$$b_4 = b_3 + 2 \cdot 3$$

$$= 4 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3$$

よって,

$$b_n = 4 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + 2(n-1)$$

ここで,

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + 2(n-1) = \sum_{k=1}^{n-1} 2k$$

と表すことができるので

$$b_n = 4 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= 4 + \frac{2}{2}(n-1)n$$

$$= n^2 - n + 4$$

6.

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} \cdot 3^{n-1} \cdot \dots \text{①とする.}$$

[1]  $n=1$ のとき

$$a_1 = \frac{1(1+1)}{2} \cdot 3^{1-1}$$

$$= \frac{2}{2} \cdot 1 = 1$$

よって,  $n=1$ のとき, ①は成り立つ.

[2]  $n=k$ のとき, ①が成り立つと仮定する.

$$a_k = \frac{k(k+1)}{2} \cdot 3^{k-1}$$

$n=k+1$ のとき, 漸化式より

$$a_{k+1} = 3a_k + (k+1)3^k$$

$$= 3 \cdot \frac{k(k+1)}{2} \cdot 3^{k-1} + (k+1)3^k$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} \cdot 3^k + (k+1)3^k$$

$$= (k+1)3^k \left( \frac{k}{2} + 1 \right)$$

$$= (k+1)3^k \cdot \frac{k+2}{2}$$

$$= \frac{(k+1)\{(k+1)+1\}}{2} \cdot 3^k$$

よって,  $n=k+1$ のときも①が成り立つ.

[1], [2]から, すべての自然数 $n$ について①が成り立つ.

## 練習問題 2-B

1.

- (1)  $b_n = a_{n-1} - a_n$  より,  $b_k = a_{k-1} - a_k$  であるから,  
これを与式の右辺に代入すると

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k-1} - a_k) \\ &= a_1 + \{(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots \\ &\quad + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1})\} \\ &= a_1 + (-a_1 + a_n) \\ &= a_n = \text{右辺} \end{aligned}$$

$$\text{よって, } a_n = \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

- (2)  $b_1 = 2 - 1 = 1$

$$b_2 = 5 - 2 = 3$$

$$b_3 = 10 - 5 = 5$$

$$b_4 = 17 - 10 = 7$$

であるから,  $\{b_n\}$  は

$$1, 3, 5, 7, \dots$$

となる. よって, その一般項は

$$b_n = 2n - 1$$

したがって,  $n \geq 2$  のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k - 1) \\ &= 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\ &= 1 + \frac{2}{2}(n-1)n - (n-1) \\ &= 1 + n^2 - n - n + 1 \\ &= n^2 - 2n + 2 \end{aligned}$$

$n = 1$  のとき,  $a_1 = 1^2 = 1$  であるから,

$n = 1$  のときも, この式は成り立つ.

よって,  $a_n = n^2$

2.

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$$

であるから,  $n \geq 2$  のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 - 2n - \{(n-1)^2 - 2(n-1)\} \end{aligned}$$

$$= n^2 - 2n - (n^2 - 2n + 1 - 2n + 2)$$

$$= 2n - 3 \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{また, } a_1 = S_1 = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$$

一方①において,  $n = 1$  とすると

$$a_1 = 2 \cdot 1 - 3 = -1$$

よって, ①は,  $n = 1$  のときも成り立つ.

したがって,  $a_n = 2n - 3$

(初項-1, 公比2の等差数列)

3.

- (1)  $a_2 = 1, a_3 = 3, a_4 = 6$

- (2)  $k$ 本の直線による交点が $a_n$ 個あるとき,  
 $k+1$ 本目の直線は他の $k$ 本の直線と交わり,  
交点の数は $k$ 個増加するので

$$a_{k+1} = a_k + k$$

- (3)  $a_1 = 1$

$$a_2 = 1 + 2$$

$$a_3 = (1 + 2) + 3$$

$$a_4 = (1 + 2 + 3) + 4$$

$$a_5 = (1 + 2 + 3 + 4) + 5$$

$$a_n = \{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2)\} + (n-1)$$

$$= 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1)$$

$$= \frac{1}{2}(n-1)n$$

$$= \frac{n(n-1)}{2}$$

4.

「 $6^n - 1$ は5で割り切れる」という命題を①とおく.

- [1]  $n = 1$  のとき

$$6^1 - 1 = 5 \text{ となり, } 5 \text{ で割り切れる.}$$

よって,  $n = 1$  のとき, ①は成り立つ.

- [2]  $n = k$  のとき, ①が成り立つと仮定する.

$6^k - 1$ が5で割り切れるので, 整数 $m$ を用いて

$$6^k - 1 = 5m$$

と表すことができるから

$$6^k = 5m + 1$$

$n = k + 1$  のとき

$$6^k - 1 = 6^k \cdot 6 - 1$$

$$\begin{aligned}
&= (5m + 1) \cdot 6 - 1 \\
&= 30m + 6 - 1 \\
&= 30m + 5 \\
&= 5(6m + 1)
\end{aligned}$$

よって、 $6^{k+1} - 1$ も5で割り切れるから、  
 $n = k + 1$ のときも①が成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数 $n$ について①が  
成り立つ。

## 5.

整数 $p^l q^m r^n$ の約数は

$$p^a q^b r^c$$

ただし

$$a = 0, 1, 2, \dots, l$$

$$b = 0, 1, 2, \dots, m$$

$$c = 0, 1, 2, \dots, n$$

で表すことができるので、その総和は、次の式を  
展開することで求められる。

$$\begin{aligned}
&(p^0 + p^1 + p^2 + \dots + p^l) \\
&\quad \times (q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^m) \\
&\quad \times (r^0 + r^1 + r^2 + \dots + r^n)
\end{aligned}$$

ここで

$$p^0 + p^1 + p^2 + \dots + p^l = 1 + p + p^2 + \dots + p^l$$

は、初項1、公比 $p$ の等比数列の初項から第 $(l + 1)$ 項  
までの和であり、 $p \neq 1$ であるから

$$p^0 + p^1 + p^2 + \dots + p^l = \frac{p^{l+1} - 1}{p - 1}$$

同様に

$$q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^m = \frac{q^{m+1} - 1}{q - 1}$$

$$r^0 + r^1 + r^2 + \dots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

したがって、約数の総和は

$$\frac{p^{l+1} - 1}{p - 1} \cdot \frac{q^{m+1} - 1}{q - 1} \cdot \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$