

4 章 指数関数と対数関数

§ 2 対数関数 (p.112~p.120)

問 1

(1) $\log_2 16 = m$ とおくと

$$2^m = 16$$

$$2^m = 2^4$$

よって, $m = 4$ であるから, $\log_2 16 = 4$

【別解】

$$\text{与式} = \log_2 2^4$$

$$= 4 \log_2 2$$

$$= 4 \cdot 1 = 4$$

(2) $\log_3 \frac{1}{9} = m$ とおくと

$$3^m = \frac{1}{9}$$

$$3^m = 3^{-2}$$

よって, $m = -2$ であるから, $\log_3 \frac{1}{9} = -2$

【別解】

$$\text{与式} = \log_3 3^{-2}$$

$$= -2 \log_3 3$$

$$= -2 \cdot 1 = -2$$

(3) $\log_3 1 = m$ とおくと

$$3^m = 1$$

$$3^m = 3^0$$

よって, $m = 0$ であるから, $\log_3 1 = 0$

【別解】

$$\text{与式} = \log_3 3^0$$

$$= 0 \log_3 3 = 0$$

(4) $\log_{10} 0.1 = m$ とおくと

$$10^m = 0.1$$

$$10^m = \frac{1}{10}$$

$$10^m = 10^{-1}$$

よって, $m = -1$ であるから, $\log_{10} 0.1 = -1$

【別解】

$$\text{与式} = \log_{10} 10^{-1}$$

$$= -1 \log_{10} 10$$

$$= -1 \cdot 1 = -1$$

(5) $\log_{0.1} 0.01 = m$ とおくと

$$0.1^m = 0.01$$

$$0.1^m = 0.1^2$$

よって, $m = 2$ であるから, $\log_{0.1} 0.01 = 2$

【別解】

$$\text{与式} = \log_{0.1} 0.1^2$$

$$= 2 \log_{0.1} 0.1$$

$$= 2 \cdot 1 = 2$$

(6) $\log_5 \sqrt[3]{25} = m$ とおくと

$$5^m = \sqrt[3]{25}$$

$$5^m = 25^{\frac{1}{3}}$$

$$5^m = (5^2)^{\frac{1}{3}}$$

$$5^m = 5^{\frac{2}{3}}$$

よって, $m = \frac{2}{3}$ であるから, $\log_5 \sqrt[3]{25} = \frac{2}{3}$

【別解】

$$\text{与式} = \log_5 5^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2}{3} \log_5 5$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

問 2

(1) 与式 $= \log_3 3^5$

$$= 5 \log_3 3$$

$$= 5 \cdot 1 = 5$$

(2) 与式 $= \log_2 \left(\frac{4}{3} \times \frac{3}{2} \right)$

$$= \log_2 2$$

$$= 1$$

【別解】

$$\text{与式} = (\log_2 4 - \log_2 3) + (\log_2 3 - \log_2 2)$$

$$= \log_2 2^2 - \log_2 2 + \log_2 3 - \log_2 2$$

$$= 2 - 1 = 1$$

$$\begin{aligned}
 (3) \text{ 与式} &= \log_2 \frac{20}{5\sqrt{2}} \\
 &= \log_2 \frac{20\sqrt{2}}{10} \quad \text{※分母を有理化} \\
 &= \log_2 2\sqrt{2} \\
 &= \log_2 2^{\frac{3}{2}} \\
 &= \frac{3}{2} \log_2 2 \\
 &= \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \text{ 与式} &= \log_3 5^{\frac{1}{2}} - \log_3 \frac{\sqrt{15}}{3} \\
 &= \log_3 \frac{\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{15}}{3}} \\
 &= \log_3 \frac{3}{\sqrt{3}} \\
 &= \log_3 \frac{3\sqrt{3}}{3} \quad \text{※分母を有理化} \\
 &= \log_3 \sqrt{3} \\
 &= \log_3 3^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \log_3 3 \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

問 3

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ 左辺} &= \log_a 1 - \log_a M \\
 &= 0 - \log_a M \\
 &= -\log_a M = \text{右辺}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 左辺} &= \log_a M^{\frac{1}{n}} \\
 &= \frac{1}{n} \log_a M = \text{右辺}
 \end{aligned}$$

問 4

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ 左辺} &= (\log_a L + \log_a M) + \log_a N \\
 &= \log_a LM + \log_a N \\
 &= \log_a LMN = \text{右辺}
 \end{aligned}$$

(2) (1) の証明より

$$\text{与式} = \log_{10} \left(0.4 \times \frac{50}{3} \times 1.5 \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \log_{10} \left(\frac{4}{10} \times \frac{50}{3} \times \frac{15}{10} \right) \\
 &= \log_{10} 10 = 1
 \end{aligned}$$

問 5

底を3にする.

$$\begin{aligned}
 \log_{9\sqrt{3}} 3 &= \frac{\log_3 3}{\log_3 9\sqrt{3}} \\
 &= \frac{1}{\log_3 3^{\frac{5}{2}}} \\
 &= \frac{1}{\frac{5}{2} \log_3 3} \\
 &= \frac{1}{\frac{5}{2} \cdot 1} \\
 &= \frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

問 6

$\log_a b$ の底を b にする.

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$$

また

$$\begin{aligned}
 \log_b \frac{1}{a} &= \log_b a^{-1} \\
 &= -\log_b a \text{ であるから}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{与式} &= \frac{1}{\log_b a} \cdot (-\log_b a) \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

問 7

(1) 底を2にそろえる.

$$\begin{aligned}
 \text{与式} &= \frac{\log_2 2}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 9}{\log_2 4} \\
 &= \frac{1}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 3^2}{\log_2 2^2} \\
 &= \frac{1}{\log_2 3} \cdot \frac{2\log_2 3}{2\log_2 2} \\
 &= \frac{1}{\log_2 3} \cdot \frac{2\log_2 3}{2} \\
 &= 1 \cdot 1 = 1
 \end{aligned}$$

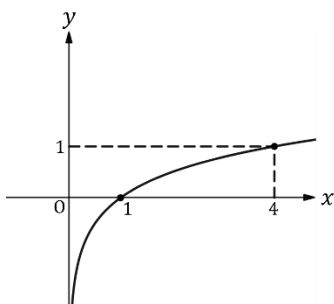
(2) 底を2にそろえる.

$$\text{与式} = \log_2 3^2 \cdot \frac{\log_2 16}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 25}{\log_2 3}$$

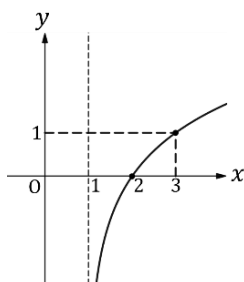
$$\begin{aligned}
 &= 2\log_2 3 \cdot \frac{\log_2 2^4}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 5^2}{\log_2 3} \\
 &= 2\log_2 3 \cdot \frac{4\log_2 2}{\log_2 5} \cdot \frac{2\log_2 5}{\log_2 3} \\
 &= 2 \cdot 4 \cdot 2 = 16
 \end{aligned}$$

問 8

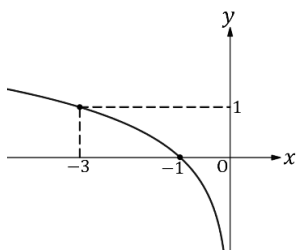
- (1) $x = 1$ のとき, $y = \log_4 1 = 0$
 $x = 4$ のとき, $y = \log_4 4 = 1$
 グラフは, 2 点(1, 0), (4, 1)を通り,
 単調に増加する曲線となる.



- (2) この関数のグラフは, $y = \log_2 x$ のグラフを
 x 軸方向に1平行移動したものであり,
 漸近線は, $x = 1$ である.
 $x = 2$ のとき, $y = \log_2(2 - 1) = 0$
 $x = 3$ のとき, $y = \log_2(3 - 1) = 1$
 グラフは, 2 点(2, 0), (3, 1)を通り,
 単調に増加する曲線となる.



- (3) この関数のグラフは, $y = \log_3 x$ のグラフと
 y 軸に関して対称である.
 $x = -1$ のとき, $y = \log_3\{-(-1)\} = 0$
 $x = -3$ のとき, $y = \log_3\{-(-3)\} = 1$
 グラフは, 2 点(-1, 0), (-3, 1)を通り,
 単調に減少する曲線となる.



問 9

$$(1) \frac{1}{81} = \frac{1}{3^4} = 3^{-4}$$

$$\sqrt{27} = 27^{\frac{1}{2}} = (3^3)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}$$

であるから, 定義域は

$$3^{-4} < x < 3^{\frac{3}{2}}$$

$y = \log_3 y$ は単調に増加するので

$$\log_3 3^{-4} < y < \log_3 3^{\frac{3}{2}}$$

すなわち

$$-4\log_3 3 < y < \frac{3}{2}\log_3 3$$

$$\text{よって, } -4 < y < \frac{3}{2}$$

$$(2) 0.125 = 0.5^3$$

$$0.25 = 0.5^2$$

であるから, 定義域は

$$0.5^3 < x \leq 0.5^2$$

$y = \log_{0.5} x$ は単調に減少するので

$$\log_{0.5} 0.5^3 > y \geq \log_{0.5} 0.5^2$$

すなわち

$$3\log_{0.5} 0.5 > y \geq 2\log_{0.5} 0.5$$

$$\text{よって, } 2 \leq y < 3$$

問 10

$$(1) 0.25 < 2 < 5$$

$y = \log_4 x$ は単調に増加するから

$$\log_4 0.25 < \log_4 2 < \log_4 5$$

$$(2) \frac{1}{9} < \sqrt{3} < 3$$

$y = \log_{\frac{1}{3}} x$ は単調に減少するから

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} > \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3} > \log_{\frac{1}{3}} 3$$

すなわち

$$\log_{\frac{1}{3}} 3 < \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3} < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$$

問 11

(1) 真数条件より, $x > 0$, $x - 1 > 0$ であるから

$$x > 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_3 \frac{x}{x-1} = 2$$

$$\log_3 \frac{x}{x-1} = \log_3 3^2$$

よって

$$\frac{x}{x-1} = 9$$

$$x = 9(x-1)$$

$$x = 9x - 9$$

$$8x = 9$$

$$x = \frac{9}{8}$$

これは、①を満たしている.

よって, $x = \frac{9}{8}$

(2) 真数条件より, $x+2 > 0$, $x-1 > 0$ であるから

$$x > 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_4(x+2)(x-1) = 1$$

$$\log_4(x+2)(x-1) = \log_4 4$$

よって

$$(x+2)(x-1) = 4$$

$$x^2 + x - 2 = 4$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x-2)(x+3) = 0$$

$$x = 2, -3$$

①より, $x = 2$

問 12

(1) 真数条件より, $2x+1 > 0$ であるから

$$x > -\frac{1}{2} \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_3(2x+1) \geq 2\log_3 3$$

$$\log_3(2x+1) \geq \log_3 3^2$$

$$\log_3(2x+1) \geq \log_3 9$$

底が1より大きいので

$$2x+1 \geq 9$$

$$2x \geq 8$$

$$x \geq 4$$

これは, ①を満たす.

よって, $x \geq 4$

(2) 真数条件より, $2x+1 > 0$ であるから

$$x > -\frac{1}{2} \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_3(2x+1) \leq 2\log_3 3$$

$$\log_3(2x+1) \leq \log_3 3^2$$

$$\log_3(2x+1) \leq \log_3 9$$

底が1より大きいので

$$2x+1 \leq 9$$

$$2x \leq 8$$

$$x \leq 4$$

これと①より

$$-\frac{1}{2} < x \leq 4$$

問 13

(1) 与式 $= \log_{10}(2 \times 3)$

$$= \log_{10} 2 + \log_{10} 3$$

$$= 0.3010 + 0.4771 = \mathbf{0.7781}$$

(2) 与式 $= \log_{10} \frac{15}{10}$

$$= \log_{10} \frac{3}{2}$$

$$= \log_{10} 3 - \log_{10} 2$$

$$= 0.4771 - 0.3010 = \mathbf{0.1761}$$

(3) 底を10にする.

$$\text{与式} = \frac{\log_{10} 9}{\log_{10} 5}$$

$$= \frac{\log_{10} 3^2}{\log_{10} \frac{10}{2}}$$

$$= \frac{2\log_{10} 3}{\log_{10} 10 - \log_{10} 2}$$

$$= \frac{2 \cdot 0.4771}{1 - 0.3010}$$

$$= \frac{0.9542}{0.699}$$

$$= 1.3650 \dots \approx \mathbf{1.365}$$

問 14

(1) 両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} 10^n \leq \log_{10} 1.1^{200}$$

$$n \log_{10} 10 \leq 200 \log_{10} 1.1$$

$$n \leq 200 \log_{10} 1.1$$

対数表より, $\log_{10} 1.1 = 0.0414$ であるから

$$200 \log_{10} 1.1 = 200 \cdot 0.0414 = 8.28$$

よって, $n \leq 8.28$ であり, n はこれを満たす最大の整数なので, $n = 8$

(2) 両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} 10^n \leq \log_{10} 1.2^{200}$$

$$n \log_{10} 10 \leq 200 \log_{10} 1.2$$

$$n \leq 200 \log_{10} 1.2$$

対数表より, $\log_{10} 1.2 = 0.0792$ であるから

$$200 \log_{10} 1.2 = 200 \cdot 0.0792 = 15.84$$

よって, $n \leq 15.84$ であり, n はこれを満たす最大の整数なので, $n = 15$

問 15

両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} 10^{-n} \geq \log_{10} \frac{1}{3^{100}}$$

$$-n \log_{10} 10 \geq \log_{10} 3^{-100}$$

$$-n \geq -100 \log_{10} 3$$

$$n \leq 100 \log_{10} 3$$

対数表より, $\log_{10} 3 = 0.4771$ であるから

$$100 \log_{10} 3 = 100 \cdot 0.4771 = 47.71$$

よって, $n \leq 47.71$ であり, n はこれを満たす最大の整数なので, $n = 47$

問 16

1 時間ごとに前の時間の r 倍になるとすると

$$r^6 = 3 \text{ より, } r = 3^{\frac{1}{6}}$$

ここで, n 時間後に最初の量の 10 倍以上になるとすると

$$r^n \geq 10$$

$$\text{すなわち, } 3^{\frac{n}{6}} \geq 10$$

両辺の常用対数をとって

$$\log_{10} 3^{\frac{n}{6}} \geq \log_{10} 10$$

$$\frac{n}{6} \log_{10} 3 \geq 1$$

$$n \geq \frac{6}{\log_{10} 3}$$

対数表より, $\log_{10} 3 = 0.4771$ であるから

$$\frac{6}{\log_{10} 3} = \frac{6}{0.4771} = 12.575 \dots$$

したがって, $n \geq 12.575 \dots$

よって, はじめて 10 倍以上になるのは

13 時間後である。

問 17

普通預金は, 1 年間で $\frac{103}{100}$ 倍になる。

経過年数を n 年とすると

$$\left(\frac{103}{100}\right)^n \geq 1.5$$

$$\left(\frac{103}{100}\right)^n \geq \frac{3}{2}$$

両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} \left(\frac{103}{100}\right)^n \geq \log_{10} \frac{3}{2}$$

$$n \log_{10} \frac{103}{100} \geq \log_{10} \frac{3}{2}$$

$$n \log_{10} 1.03 \geq \log_{10} 3 - \log_{10} 2$$

$$n \geq \frac{\log_{10} 3 - \log_{10} 2}{\log_{10} 1.03}$$

対数表より, $\log_{10} 1.03 = 0.0128$, $\log_{10} 2 = 0.3010$,

$\log_{10} 3 = 0.4771$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{\log_{10} 3 - \log_{10} 2}{\log_{10} 1.03} &= \frac{0.4771 - 0.3010}{0.0128} \\ &= 13.75 \dots \end{aligned}$$

したがって, $n \geq 13.75$

よって, 預金が 1.5 倍となるのは **14 年後**である。