

# Modelo 2: Sistema Respiratorio

Kirxi Vel'Bathory Arciniegas Bastidas, Paula Alejandra Guzmán Sastoque, Andrés Felipe Manrique Moreno,  
Email: \*{ra.arciniegas10, pa.guzmans, af.manrique}@uniandes.edu.co

## LABORATORIO 2: SISTEMA RESPIRATORIO

El modelo de intercambio gaseoso que se ha venido trabajando con anterioridad corresponde al fenómeno que toma lugar a lo largo del recorrido de la sangre por un alvéolo individual. Sin embargo, con el fin de observar el comportamiento esperado del pulmón, es necesario realizar algunos ajustes. El objetivo principal de esta práctica es extrapolar el modelo matemático del transporte de gas en un alvéolo, al resto de los alvéolos del pulmón para así poder observar el comportamiento en la totalidad del órgano. Teniendo en cuenta el sistema de 5 ecuaciones y 5 incógnitas para cada alvéolo:

$$\begin{aligned} V_A C_I + Q C_v &= V_A C_E + Q C_a \\ C_E &= C_A \\ P_A &= K T C_A \\ \sigma P_a &= C_a \\ P_a &= P_A \end{aligned}$$

Y las expresiones para concentración alveolar, concentración arterial y flujo neto del gas:

$$\begin{aligned} C_A &= \frac{r C_I + C_v}{\sigma K T + r} \\ C_a &= \sigma K T \frac{r C_I + C_v}{\sigma K T + r} \\ f &= Q r \sigma \frac{P_I - P_v}{r + \sigma k T} \end{aligned}$$

I. DEFINA LOS SUPUESTOS MÁS IMPORTANTES PARA LOGRAR HACER LA EXTRAPOLACIÓN DE LAS ECUACIONES PLANTEADAS Y JUSTIFIQUE POR QUÉ ES POSIBLE REALIZAR DICHAS SUPOSICIONES.

Para realizar dicha extrapolación de las ecuaciones se tienen los siguientes supuestos:

- Estado estable: La cantidad de moléculas de gas que entra al alvéolo por unidad de tiempo es igual a la cantidad de moléculas del gas que salen por unidad de tiempo, es decir que no se considera un volumen muerto. Las moléculas entran por el aire o sangre y salen por aire o sangre de acuerdo con lo establecido en la ecuación.
- El aire exhalado es una muestra del aire alveolar por lo que se tiene la igualdad de que la concentración del gas exhalado es igual a la concentración del gas en el alvéolo.
- El gas se comporta como un gas ideal en el aire alveolar.
- El gas forma una solución simple en la sangre arterial, en la medida que la concentración del gas en la solución es proporcional o está en equilibrio con su presión parcial, por lo cual se tiene en cuenta la solubilidad del gas en la sangre.

- Hay un equilibrio con el aire alveolar en la medida que la sangre pasa y se da el intercambio. Así, la presión parcial de cada gas en la sangre que sale del alvéolo es la misma que en el aire alveolar.
- Adicionalmente se asume que los alveolos están en serie, por lo que la concentración de gas que llega es idéntica y el único parámetro de control es el radio de ventilación perfusión.

II. EXTRAPOLE EL MODELO Y ENCUENTRE UNA EXPRESIÓN PARA EL FLUJO NETO DE UN GAS EN LA TOTALIDAD DEL PULMÓN.

Se tiene para el i-ésimo alvéolo que:

$$\begin{aligned} (C_A)_i &= \frac{r_i C_I + C_v}{\sigma K T + r_i} \\ (C_a)_i &= \sigma K T \frac{r_i C_I + C_v}{\sigma K T + r_i} \\ f_i &= Q_i r_i \sigma \frac{P_I - P_v}{r_i + \sigma k T} \end{aligned}$$

Así, realizando la sumatoria sobre todos los alveolos del pulmón, se obtiene el transporte total del gas en todo el pulmón:

$$f_T = \sum_i f_i = \sigma (P_I - P_v) \sum_i \frac{Q_i r_i}{r_i + \sigma k T}$$

Adicionalmente note que al multiplicar  $f_T * \frac{Q_T}{Q_T}$  se obtiene:

$$\begin{aligned} f &= \sigma (P_I - P_v) Q_T E \text{ con:} \\ E &= \frac{1}{Q_T} \sum_i \frac{Q_i r_i}{r_i + \sigma k T} \\ Q_T &= \sum_i Q_i \end{aligned}$$

Donde  $Q_T$  es el flujo sanguíneo pulmonar total y  $E$  es la eficiencia del pulmón.

III. ESTABLEZCA VALORES PARA EL ÍNDICE VENTILACIÓN-PERFUSIÓN QUE CORRESPONDAN A LA FISIOLÓGIA PULMONAR Y GRAFIQUE LAS CONCENTRACIONES ALVEOLARES Y ARTERIALES DE GAS A LO LARGO DE LA ALTURA DEL PULMÓN. (ASIGNANDO AL EJE X DE LA GRÁFICA AL RECORRIDO DEL PULMÓN DESDE EL ÁPICE HASTA LA BASE).

Se asumen los siguientes valores, teniendo en cuenta el laboratorio anterior:

$$\begin{aligned}
 \sigma &= 0,231 & \frac{\text{mmol}}{L \cdot kPa} \\
 &= 0,03079 & \frac{\text{mmol}}{L \cdot \text{mmHg}} \\
 &= 1,8361 \times 10^{-19} & \frac{1}{L \cdot \text{mmHg}} \\
 C_I &= 0 & \frac{\text{mmol}}{L} \\
 T &= 310,15 & K \\
 K &= 1,380649 \times 10^{-23} & \frac{J}{K} \\
 &= 1,0355 \times 10^{-22} & \frac{L \cdot \text{mmHg}}{K} \\
 C_v &= 23,21 & \frac{\text{mmol}}{L} \\
 P_* &= 25 & \text{mmHg} \\
 r &= 2 & \frac{L_g}{L_l}
 \end{aligned}$$

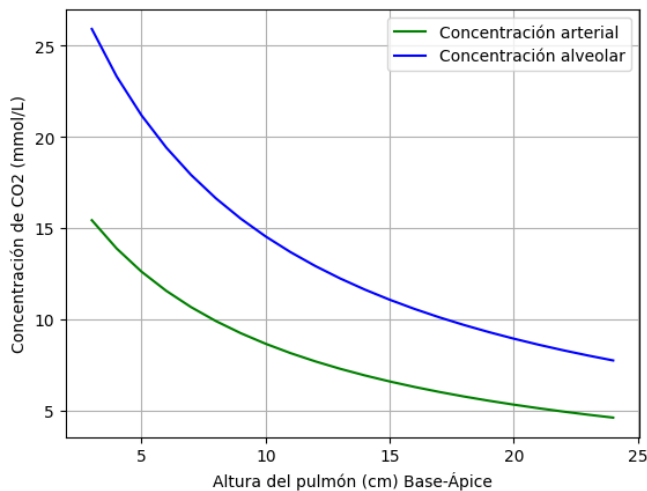


Figura 1. Concentración arterial y alveolar de  $CO_2$  de la base al ápice del pulmón

IV. CALCULE EL FLUJO NETO DE GAS A LO LARGO DE LA TOTALIDAD DEL PULMÓN, ASUMIENDO UNA EFICIENCIA DEL 75 %. REALICE EL MISMO CÁLCULO ASUMIENDO UNA EFICIENCIA DEL 38 %. DISCUTA SOBRE POSIBLES CAUSAS DE DICHA DISMINUCIÓN EN LA EFICIENCIA Y EL EFECTO DE LOS RESULTADOS SOBRE EL ORGANISMO.

Dado que el radio de perfusión es el único parametro de control vamos a suponer que es igual a  $r_n$  en todos los alveolos del pulmón para simular la eficiencia dada. Note que aunque no es una suposición realista es suficiente en este caso ya que para la eficiencia total del pulmón es indistinguible un valor promedio que se ajuste de valores individuales que lleven al mismo resultado.

Por lo anterior sean  $E_n, r_n$  tales que:

$$\begin{aligned}
 \frac{E_n}{E_M} &= n, \quad n \in (0, 1) \\
 E_n &= \frac{1}{Q_T} \sum_i \frac{Q_i r_n}{r_n + \sigma k T} = \frac{r_n}{r_n + \sigma k T} \\
 E_M &= \frac{r_0}{r_0 + \sigma k T}
 \end{aligned}$$

Note que, partiendo de la definición,  $r_n$  se puede hallar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 r_n &= n E_M (r_n + \sigma k T) \\
 &= a (r_n + b) \\
 &= a r_n + a b \\
 r_n - a r_n &= a b \\
 r_n (1 - a) &= a b \\
 r_n &= \frac{a b}{1 - a} \\
 r_n &= \frac{n E_M \sigma k T}{1 - n E_M}
 \end{aligned}$$

Dado lo anterior el flujo neto para un gas  $f_n$  con una eficiencia de  $n$  es igual a:

$$f_n = \sigma (P_I - P_v) Q_T E_n$$

Dado lo anterior y tomando los siguientes valores del anterior laboratorio y vistos en clase (para  $CO_2$ ):

$$\begin{aligned}
 \sigma_{CO_2} &= 0,03079 \frac{\text{mmol}}{\text{mmHg} \cdot L} \\
 Q_T &= 5L \\
 C_v CO_2 &= 23,21 \frac{\text{mmol}}{L} \\
 P_v CO_2 &= p_{Cvco2} / \sigma_{CO_2} \\
 C_I CO_2 &= 0 \rightarrow P_I CO_2 = 0
 \end{aligned}$$

Note que se toma  $r_o = r = 2$  y se tiene que los flujos son los siguientes para 74 % y 38 % de eficiencia respectivamente:

$$f_n(0,74) = -82,5979; \text{mmol}/m$$

$$f_n(0,38) = -42,4151; \text{mmol}/m$$

En el modelo se tiene que el único parámetro de control es el radio de perfusión de los alveolos  $r_i = \frac{V_i}{Q_I}$  partiendo de ello y de que el radio promedio para una eficiencia de  $n$ ,  $r_n$  es una función creciente (recordar que  $n \in (0, 1)$ ), dado lo anterior se llega a que:

La eficiencia se ve afectada por la relación entre la ventilación y la perfusión esto significa que para reducir la eficiencia se puede reducir la ventilación disminuye o aumentar la perfusión, esto puede suceder si hay un hueco en el pulmón por el que se escapa el aire o si hay una hemorragia después del pulmón lo que incrementaría el flujo de sangre.

#### V. EL SUPUESTO DE SOLUCIÓN SIMPLE NO APLICA REALMENTE PARA EL OXÍGENO

La concentración de  $O_2$  realmente es una función de la presión, es decir:

$$c_a = C(P_a)$$

Suponga que la función es de la forma:

$$c_a = \frac{c_I P_a^3}{P_*^3 + P_a^3}$$

Donde  $P_* = 25 \text{mmHg}$

Encuentre  $P_a$  en función de  $C_a$  de manera que se obtenga la siguiente relación:  $P_a = C^{-1}(C_a) = H(C_a)$

Usando los demás supuestos, encuentre una relación algebraica implícita para  $C_a$ . Luego, grafique  $C_a$  para los valores de  $r$  anteriores. Debido a la no linealidad de la ecuación, debe usar métodos numéricos para esto.

Note que solo hay una discontinuidad puntual en  $P_*^3 = P_a^3$ , para los demás valores de  $P_a$  se tiene:

$$\begin{aligned} C_a &= \frac{C_I P_a^3}{P_*^3 + P_a^3} \\ (P_*^3 + P_a^3) C_a &= C_I P_a^3 \\ P_*^3 C_a &= C_I P_a^3 - P_a^3 C_a \\ P_*^3 C_a &= (C_I - C_a) P_a^3 \\ P_*^3 C_a &= (C_I - C_a) P_a^3 \\ P_a^3 &= \frac{P_*^3 C_a}{(C_I - C_a)} \\ P_a &= H(C_a) = P_* \sqrt[3]{\frac{C_a}{C_I - C_a}} \end{aligned}$$

Resolviendo ahora la relación algebraica implícita de  $C_a$  se tienen las siguientes ecuaciones partiendo de los supuestos del modelo:

$$V_A C_I + Q C_v = V_A C_E + Q C_a$$

$$C_E = C_A$$

$$P_A = K T C_A$$

$$P_a = \frac{P_* C_a}{\sqrt[3]{C_I - C_a^3}}$$

$$P_a = P_A$$

Así, partiendo de que el supuesto de gas ideal y de que la presión parcial arterial es igual a la presión parcial alveolar se tiene que

$$P_A = K T C_A$$

$$P_a = K T C_A$$

Asimismo, si se sabe que la concentración alveolar es una muestra de la concentración expirada entonces se obtiene la relación

$$P_A = K T C_E$$

$$C_E = \frac{P_a}{K T}$$

Así, si se tiene el equilibrio en el sistema alveolar entonces se tiene que:

$$V_A C_I + Q C_v = V_A C_E + Q C_a$$

$$V_A (C_I - C_E) = Q (C_a - C_v)$$

$$r (C_I - C_E) = C_a - C_v$$

$$C_a = r C_I + C_v - r C_E$$

Reemplazando ambas expresiones se obtiene la relación:

$$C_a = r C_I + C_v - \frac{r}{K T} P_a$$

$$P_a = \frac{K T}{r} (C_a - r C_I + C_v)$$

Finalmente, si se tiene en cuenta la relación no lineal entre la concentración arterial y la presión parcial arterial entonces la expresión implícita para  $C_a$  se puede obtener como:

$$\begin{aligned} P_a &= P_* \sqrt[3]{\frac{C_a}{C_I - C_a}} \\ \frac{K T}{r} (C_a - r C_I + C_v) &= P_* \sqrt[3]{\frac{C_a}{C_I - C_a}} \end{aligned}$$

Así, implementado la función fsolve de scipy.optimize se puede llegar a diferentes valores de  $C_a$  se obtiene la siguiente relación:

Dado que se está hablando del oxígeno, se sabe que la presión parcial del mismo en el aire inspirado es de 160mmHg. Por

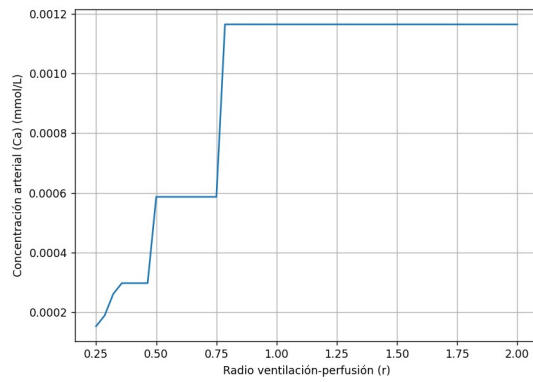


Figura 2. Variación de la concentración arterial con respecto al radio de ventilación-perfusión

supuesto del modelo, este es un gas ideal por lo que la concentración inspirada es:

$$C_{inspirada} = \frac{160}{KT} = 0,08 \text{ mmol/L}$$

Así, se puede concluir que conforme el radio de ventilación perfusión aumenta llega un punto en el que la concentración de la sangre deja de aumentar y converge a una concentración menor a la la concentración de oxígeno en el aire. Esto muestra una importante diferencia con respecto al modelo lineal ya que representa de forma más realista la realidad.

Por otro lado, el modelo muestra que para valores de  $r$  cercanos a los fisiológicos (cercanos a 1) se obtiene una concentración similar a la salida de oxígeno en sangre, una característica deseable en la medida que este parámetro cambia a lo largo del pulmón.