Módulo cardiovascular
Laboratorio 2

En esta práctica busca mejorar el modelo anterior teniendo en cuenta ahora el cambio de las variables en el tiempo. Es claro que el sistema de nueve por nueve encontrada una solución para los valores de las variables en un instante de tiempo o, en términos matemáticos, en valores promedio suponiendo un comportamiento pulsátil periódico, es decir, las variables asociadas al pulso del corazón tienen un comportamiento cíclico con periodo T, luego, la frecuencia cardiaca es $\frac{1}{T}$. Luego de revisar la teoría sobre flujo arterial dinámico, es claro que el flujo ya no se puede suponer igual en todo el sistema sino que, sigue la siguiente ecuación:

$$\frac{dV}{dt} = Q_1 - Q_2$$

Donde V es el volumen en una arteria, Q_1 es el flujo entrante y Q_2 el saliente. Notar que, en estado estable, ambos flujos son iguales, lo cual se nos llevaría al modelo anterior. En este laboratorio vamos a analizar dos modelos, uno teniendo en cuenta el flujo dinámico solo de la arteria aorta, y otro teniendo en cuenta también el flujo dinámico en el ventrículo izquierdo del corazón.

1 Flujo dinámico arterial aórtico

Para este modelo, $Q_1 = Q_L$ y $Q_2 = Q_s$, donde Q_L es el flujo saliente del ventrículo izquierdo y entrante a la aorta y Q_s es el saliente de la aorta y entrante al componente sistémico. Luego, el modelo para el componente sistémico arterial sería:

$$\frac{dV_{sa}}{dt} = Q_L - Q_s$$

Teniendo en cuenta las siguientes relaciones:

$$V_{sa}(t) = C_{sa} P_{sa}(t)$$
$$Q_s(t) = \frac{P_{sa}(t) - P_{sv}(t)}{Rs}$$

Además, despreciando el efecto de la presión sistémica venosa debido a que es mucho menor que la sistémica arterial, se llega a que:

$$c_{sa}\frac{dP_{sa}}{dt} = Q_L(t) - \frac{P_{sa}}{R_s}$$

Para solucionar la ecuación diferencial anterior es necesario conocer una condición inicial y modelar el flujo $Q_L(t)$ a través de una función matemática. Sin embargo, con el objetivo de analizar el comportamiento dinámico, se modela en la presión en el momento de diástole, es decir, $Q_L(t) = 0$, con lo que. Ahora, si se supone que el volumen sistólico eyectado (ΔV_0) es instantáneo y que el cambio en la presión arterial se produce por un cambio súbito en ΔV_0, luego:

$$\Delta V_0 = c_{sa} \Delta P_{sa}$$

Teniendo en cuenta que se supone un comportamiento periódico, luego:

$$\Delta P_{sa} = P_{sa}(0) - P_{sa}(T)$$

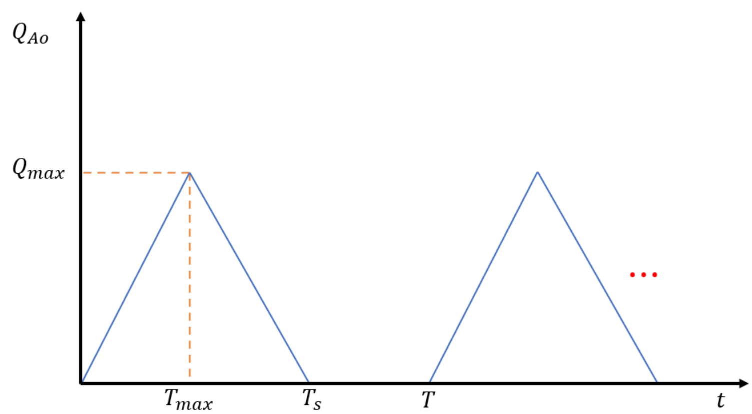
Ahora, si se soluciona la ecuación diferencial y se analiza $t = T$, es posible encontrar la solución para $P_{sa}(0)$ y $P_{sa}(T)$, con lo que es posible formular la solución analítica para $P_{sa}(t)$. Ahora, si se quiere simular el modelo en computador, hay que plantear una función para $Q_L(t)$, la cual ahora se plantea como el flujo aórtico $Q_{Ao}(t)$ que tiene la siguiente propiedad:

$$Q_{Ao}(t+T) = Q_{Ao}(t)$$

Es decir, es periódica. Luego, si se plantea la función como una función periódica triangular, luego:

$$Q_{Ao}(t) = \begin{cases} \frac{Q_{max}}{T_{max}} t & 0 \leq t \leq T_{max} \\ \frac{Q_{max}(T_s - T)}{T_s - T_{max}} & T_{max} < t \leq T_s \\ 0 & T_s < t \leq T \end{cases}$$

La cual debería tener la siguiente forma:



Ahora, usando diferencias finitas para aproximar la derivada y solucionar la ecuación diferencial numéricamente:

$$c_{sa} \frac{P_{sa}(t) - P_{sa}(t - \Delta t)}{\Delta t} = Q_{Ao}(t) - \frac{P_{sa}(t)}{R_s}$$

Es posible simular y estudiar el comportamiento de la presión arterial sistémica en el tiempo.

1. Encuentre la expresión algebraica para $P_{sa}(0)$ y $P_{sa}(T)$

2. Encuentre la solución analítica para $P_{sa}(t)$ en momento de diástole

3. Teniendo en cuenta que la presión arterial sistémica promedio es:

$$\bar{P}_{sa} = \frac{1}{T} \int_0^T P_{sa}(t)dt$$

Demuestre que

$$\bar{P_{sa}} = QR_s$$

Donde $Q = \frac{\Delta V_0}{T}$

4. Teniendo que la forma de la función es triangular, demuestre que

$$\Delta V_0 = \int_0^T Q_{Ao}(t)dt = \frac{Q_{max}T_s}{2}$$

y que

$$Q = \frac{Q_{max}T_s}{2T}$$

5. Teniendo en cuenta los siguientes valores numéricos para los parámetros del modelo:

Table 1:

Parámetro	**Valor**
T	0.0125 min
T_s	0.005 min
T_{max}	0.002 min
C_{sa}	0.00175 L/mmHg
R_s	17.5 mmHg/(L min)
Q_{max}	28 L/min
ΔV_0	0.07 L

Grafique la función de Q_{Ao} para tres ciclos.

6. Simule la presión arterial sistémica y grafique su comportamiento para 3 periodos. Pruebe con diferentes condiciones iniciales. Analice los resultados

2 Flujo dinámico arterial completo

Ahora que se estudió el comportamiento dinámico del flujo a través de la aorta, ahora se completa incluyendo la dinámica del ventrículo izquierdo del corazón junto a la acción de las válvulas aórtica y mitral. Ahora, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dV_{LV}}{dt} = Q_{Mi} - Q_{Ao}$$
$$\frac{dV_{sa}}{dt} = Q_{Ao} - Q_s$$

Donde V_{LV} es el volumen en el ventrículo izquierdo, Q_{Mi} el flujo que pasa a través de la válvula mitral y Q_{Ao} el flujo que pasa a través de la válvula aórtica. Ahora, teniendo en cuenta las siguientes relaciones:

$$V_{LV} = C_{LV} P_{LV}$$
$$V_{sa} = C_{sa} P_{sa}$$

Donde C_{LV} es variable en el tiempo mientras que C_{sa} es constante y P_{LV} es la presión en el ventrículo izquierdo. Ahora, se introducen las siguientes funciones:

$$S_{Mi}(t) = \begin{cases} 0 & P_{LA} \leq P_{LV} \\ 1 & P_{LA} > P_{LV} \end{cases}$$

$$S_{Ao}(t) = \begin{cases} 0 & P_{LV} \leq P_{sa} \\ 1 & P_{LV} > P_{sa} \end{cases}$$

Donde P_{LA} es la presión en la aurícula izquierda, estas funciones representan la activación o inactivación de las válvulas mitral y aórtica, respectivamente, dependiendo de los valores de presión. Es decir, 0 representa la válvula cerrada y 1 abierta. Usando las funciones anteriores, los flujos se representan como:

$$Q_{Mi} = S_{Mi} \frac{P_{LA} - P_{LV}}{R_{Mi}}$$
$$Q_{Ao} = S_{Ao} \frac{P_{LV} - P_{sa}}{R_{Ao}}$$
$$Q_s = \frac{P_{sa}}{R_s}$$

Ahora, sea la distensibilidad del ventrículo izquierdo como la siguiente función:

$$C_{LV}(t) = \begin{cases} C_{LV}^D \left(\frac{C_{LV}^S}{C_{LV}^D} \right)^{\frac{1-\exp(-t/\tau_s)}{1-\exp(-T_s/\tau_s}} & 0 \leq t < T_s \\ C_{LV}^S \left(\frac{C_{LV}^D}{C_{LV}^S} \right)^{\frac{1-\exp(-(t-T_s)/\tau_D)}{1-\exp(-(T-T_s)/\tau_D}} & T_s \leq t \leq T \end{cases}$$

Donde C_{LV}^D es la distensibilidad del ventrículo izquierdo en momento de diástole y C_{LV}^S en momento de sístole. τ_S y τ_D son constantes de tiempo que representan la velocidad de transición entre un momento y otro. Con lo anterior, se puede reemplazar todo en las ecuaciones diferenciales iniciales:

$$\frac{d}{dt}(C_{LV} P_{LV}) = S_{Mi} \frac{P_{LA} - P_{LV}}{R_{Mi}} - S_{Ao} \frac{P_{LV} - P_{sa}}{R_{Ao}}$$
$$C_{sa} \frac{dP_{sa}}{dt} = S_{Ao} \frac{P_{LV} - P_{sa}}{R_{Ao}} - \frac{P_{sa}}{R_s}$$

Si se aproximan las derivadas con diferencias finitas, se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{C_{LV}(t)P_{LV}(t) - C_{LV}(t-\Delta t)P_{LV}(t-\Delta t)}{\Delta t} = S_{Mi}(t)\frac{P_{LA} - P_{LV}(t)}{R_{Mi}} - S_{Ao}(t)\frac{P_{LV}(t) - P_{sa}(t)}{R_{Ao}}$$
$$C_{sa}\frac{(P_{sa}(t) - P_{sa}(t-\Delta t)}{\Delta t} = S_{Ao}(t)\frac{P_{LV}(t) - P_{sa}(t)}{R_{Ao}} - \frac{P_{sa}(t)}{R_s}$$

Notar que si se despejan las presiones en el tiempo t, se llega de un sistema lineal 2x2 que se puede representar mediante la ecuación matricial:

$$C(t)P(t) = B(t)$$

Donde $C(t)$ es la matriz de distensibilidades, $P(t)$, el vector de presiones y $B(t)$ el vector de volúmenes.

1. Construya el sistema de ecuaciones y expréselo como se muestra anteriormente.
2. Solucione el sistema de ecuaciones de forma simbólica.
3. Teniendo en cuenta la siguiente tabla de parámetros:

Table 2:

Parámetro	**Valor**
τ_S	0.0025 min
τ_D	0.0075 min
C_{LV}^D	0.0146 L/mmHg
C_{LV}^S	0.00003 L/mmHg
P_{LA}	5 mmHg

   Grafique la función de distensibilidad del ventrículo izquierdo para 3 ciclos.

4. Simule el sistema de ecuaciones y grafique las presiones sistémico arterial y del ventrículo izquierdo para 3 periodos. Pruebe con diferentes condiciones iniciales. Analice los resultados