

班级\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 得分\_\_\_\_\_

(本试卷满分 150 分, 考试时间 120 分钟)

一. 选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 以下函数中是奇函数的是 ( )

A.  $f(x) = x^2(1-x)$ ; B.  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ; C.  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ ; D.  $f(x) = 3x^2 - x^3$ .

2. 以下函数中是偶函数的是 ( )

A.  $f(x) = x^2(1-x)$ ; B.  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ; C.  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ ; D.  $f(x) = 3x^2 - x^3$ .

3. 复数  $\frac{2+i}{1-2i}$  的共轭复数是 ( )

A.  $-\frac{3}{5}i$ ; B.  $\frac{3}{5}i$ ; C.  $-i$ ; D.  $i$ .

4. 有 3 个兴趣小组, 甲, 乙两位同学各自参加其中一个小组, 每位同学参加各个小组的可能性相同, 则这两位同学参加同一个兴趣小组的概率为 ( )

A.  $\frac{1}{3}$ ; B.  $\frac{1}{2}$ ; C.  $\frac{2}{3}$ ; D.  $\frac{3}{4}$ .

5.  $\left(x + \frac{a}{x}\right)\left(2x - \frac{1}{x}\right)^5$  的展开式中各项系数的和为 2, 则该展开式中常数项为 ( )

A.  $-40$ ; B.  $-20$ ; C.  $20$ ; D.  $40$ .

二. 填空题: 本大题共 14 小题, 每小题 5 分, 共 70 分.

6. 函数  $y = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x$  的最小正周期是\_\_\_\_\_.

7. 在等差数列  $\{a_n\}$  中, 若  $a_3 + a_9 + a_{27} = 12$ , 则  $a_{13} =$ \_\_\_\_\_.

8. 已知集合  $A = \{x | x - m < 0\}$ ,  $B = \{y | y = \log_2 x - 1, x \geq 4\}$  若  $A \cap B = \emptyset$ , 则实数  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

9. 函数  $f(x) = x - \ln x$  的单调递减区间是\_\_\_\_\_.

10. 数列  $\frac{1}{1+2}, \frac{1}{1+2+3}, \frac{1}{1+2+3+4}, \dots$  的前  $n$  项之和为\_\_\_\_\_.

11. 若命题 " $ax^2 - 2ax + 3 > 0$  恒成立" 是假命题, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

12. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 若  $a = 5, b = 7, \cos C = \frac{4}{5}$  则角  $A$  的大小为\_\_\_\_\_.

13. 函数  $f(x) = (x+a)^3$ , 对任意  $t \in \mathbf{R}$ , 总有  $f(1+t) = -f(1-t)$ , 则  $f(2) + f(-2) =$ \_\_\_\_\_.

14. 设  $\{a_n\}$  是首项为 1 的正项数列, 且  $(n+1)a_{n+1}^2 - na_n^2 + a_{n+1}a_n = 0$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), 则这个数列的通项公式  $a_n =$ \_\_\_\_\_.

三. 解答题: 本大题共 6 小题, 共计 90 分. 解答时应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 16 分)

已知函数  $f(x) = a \ln x - ax - 3$ , ( $a \in \mathbf{R}$ )

- (1) 求函数  $f(x)$  的单调区间;
- (2) 若函数  $y = f(x)$  的图象在点  $(2, f(2))$  处的切线的倾斜角为  $45^\circ$ , 对于任意的  $t \in [1, 2]$ , 函数  $g(x) = x^3 + x^2[f'(x) + \frac{m}{2}]$  在区间  $(t, 3)$  上总不是单调函数, 求实数  $m$  的取值范围;
- (3) 求证:  $\frac{\ln 2}{2} \cdot \frac{\ln 3}{3} \cdot \frac{\ln 4}{4} \cdots \frac{\ln n}{n} < \frac{1}{n} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$ .

16. (本小题满分 16 分)

如图, 四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为平行四边形,  $\angle DAB = 60^\circ$ ,  $AB = 2AD$ ,  $PD \perp$  底面  $ABCD$ .

(1) 证明:  $PA \perp BD$ ;

(2) 若  $PD = AD$ , 求二面角  $A-PB-C$  的余弦值.

