# 2023 届·普通高中名校联考信息卷(月考三)·数学

## 参考答案

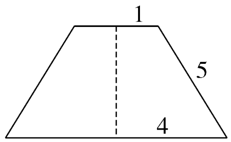
1. A 【解析】由 $4-2^x\geqslant0$,即 $2^2\geqslant2^x$,解得 $x\leqslant2$,集合 $A=(-\infty,2]$,当 $x>1$ 时,$y=\log_2x>\log_21=0$,得 $B=(0,+\infty)$,所以 $A\cap B=(0,2]$. 故选 A.

2. A 【解析】由题意可知,$\sin(2\theta+\frac{\pi}{2})=\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\times(\frac{1}{3})^2-1=-\frac{7}{9}$,故选 A.

3. D 【解析】对于 A,若 $l\perp m$,$l\perp n$,且 $m,n\subset\alpha$,若 $m$ 和 $n$ 为相交直线,才有 $l\perp\alpha$,故 A 错误;对于 B,若 $m/\!/\beta$,$n/\!/\beta$,且 $m$ 和 $n$ 为相交直线,$m,n\subset\alpha$,才有 $\alpha/\!/\beta$,故 B 错误;对于 C,若 $m/\!/n$,$m\not\subset\alpha$,且 $n\subset\alpha$,才有 $m/\!/\alpha$,故 C 错误;对于 D,若 $l\perp\beta$,$l\subset\alpha$,根据面面垂直的判定,则 $\alpha\perp\beta$,故 D 正确. 故选 D.

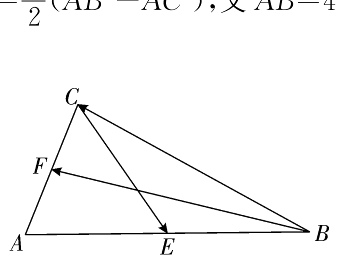
4. C 【解析】根据题意,用排除法分析:对于 A,$y=f(x)=\frac{e^{|x|}}{2x}$,当 $x<0$ 时,有 $f(x)<0$,不符合题意;对于 B,当 $x<0$ 时,$y=f(x)=\frac{(x^2+1)e^x}{x}<0$,不符合题意;对于 D,$y=f(x)=\frac{e^x}{2x^2}$,$f(2)=\frac{e^2}{8}<1$,不符合题意. 故选 C.

5. C 【解析】圆台的轴截面如图所示:




则圆台的高 $h=\sqrt{5^2-(4-1)^2}=4$,所以圆台的体积 $V=\frac{1}{3}\pi h(r^2+R^2+rR)=\frac{1}{3}\pi\times4\times(1^2+4^2+1\times4)=28\pi$. 故选 C.

6. B 【解析】因为 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$,$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$,所以 $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA})=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,所以 $(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CE})\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AC}^2)$,又 $AB=4$,$AC=2$,所以 $(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CE})\cdot\overrightarrow{BC}=6$. 故选 B.



7. B 【解析】由题意，数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_{n+1}-a_n=a_n^2$，因为数列$\{a_n^2\}$的前 50 项和为 $m$，所以 $m=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{50}^2=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{51}-a_{50})=a_{51}-a_1=a_{51}-1$，所以 $a_{51}=1+m$. 因为 $a_{n+1}-a_n=a_n^2$，所以 $a_{n+1}=a_n^2+a_n=a_n(a_n+1)$，所以$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n(a_n+1)}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_n+1}$，即$\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$，所以数列$\{\frac{1}{a_n+1}\}$的前 50 项和为$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{50}}-\frac{1}{a_{51}}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{51}}=1-\frac{1}{a_{51}}=1-\frac{1}{1+m}=\frac{m}{1+m}$. 故选 B.

8. B 【解析】因为 $\ln\pi>\pi-2$，所以 $\ln\pi+2>\pi$，所以 $\ln\pi+\ln e^2>\ln e^{\pi}$，所以 $\ln(\pi e^2)>\ln e^{\pi}$，所以 $\pi e^2>e^{\pi}$，因为 $3>e$，所以 $3\pi e>\pi e^2>e^{\pi}$，所以 $c>a$，令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，则$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}(x>0)$，当 $0<x<e$ 时，$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}>0$，所以 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$在$(0,e)$上单调递增；当 $x>e$ 时，$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$，所以 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$在$(e,+\infty)$上单调递减；所以 $x=e$ 时 $f(x)$取 $f(x)_{\max}=f(e)$，所以 $f(\pi)<f(e)$，所以$\frac{\ln\pi}{\pi}<\frac{1}{e}$，所以 $\pi>e\ln\pi$，所以 $\pi>\ln\pi^e$，又因为 $a=e^{\pi},b=\pi^e$，所以 $\ln a=\pi,\ln b=\ln\pi^e$，而 $\pi>\ln\pi^e$，所以 $\ln a=\pi>\ln\pi^e=\ln b$，所以 $a>b$. 综上所述 $b<a<c$. 故选 B.

9. AD 【解析】对于 A，因为$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}=1+2\sqrt{ab}>1$，可得$\sqrt{a}+\sqrt{b}>1$，故 A 正确；对于 B，$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1-2ab<1$，故 B 错误；对于 C，不妨取 $a=\frac{3}{5},b=\frac{2}{5}$，则$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{5}{2}-\frac{5}{3}=\frac{5}{6}<1$，故 C 错误；对于 D，$a-\sqrt{a}-(b-\sqrt{b})=(a-b)-(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1)$，因为 $a>b>0$，故$\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$，由 A 可知$\sqrt{a}+\sqrt{b}>1$，故$\sqrt{a}+\sqrt{b}-1>0$，故 $a-\sqrt{a}-(b-\sqrt{b})>0$，即 $a-\sqrt{a}>b-\sqrt{b}$，故 D 正确. 故选 AD.

10. CD 【解析】由图可知，第 1 天到第 2 天复工指数减少，第 7 天到第 8 天复工指数减少，第 10 天到第 11 天复工指数减少，第 8 天到第 9 天复产指数减少，故 A 错误；由图可知，第 1 天的复产指数与复工指数的差大于第 11 天的复产指数与复工指数的差，所以这 11 天期间，复产指数增量小于复工指数的增量，故 B 错误；由图可知，第 3 天至第 11 天复工复产指数均超过 80%，故 C 正确；由图可知，第 9 天至第 11 天复产指数增量大于复工指数的增量，故 D 正确. 故选 CD.

11. BCD 【解析】$f(x)_{\max}=2$，则 $A=2,\frac{3}{4}T=\frac{5}{12}\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\pi,T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=2,f(x)=2\cos(2x+\varphi),f(\frac{5\pi}{12})=2\cos(\frac{5\pi}{6}+\varphi)=2,\frac{5}{6}\pi+\varphi=2k\pi,|\varphi|<\pi$，所以 $\varphi=-\frac{5}{6}\pi$，故 A 错误；$f(x)=2\cos(2x-\frac{5}{6}\pi),f(x-\frac{\pi}{6})=2\cos[2(x-\frac{\pi}{6})-\frac{5}{6}\pi]=2\cos(2x-\frac{7}{6}\pi)$，$f(-x)=2\cos(-2x-\frac{5}{6}\pi)=2\cos(-2x+\frac{7}{6}\pi-2\pi)=2\cos(-2x+\frac{7}{6}\pi)=f(x-\frac{\pi}{6})$，故 B

正确；$g(x)=f(x+\frac{\pi}{6})=2\cos[2(x+\frac{\pi}{6})-\frac{5}{6}\pi]=2\cos(2x-\frac{\pi}{2})=2\sin 2x$ 为奇函数，故 C 正确；$\frac{\pi}{2}<2x<\frac{3}{2}\pi$，即$\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi$，$g(x)$在$(\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi)$上单调递减，而$(\frac{\pi}{3},\frac{3}{4}\pi)\subsetneqq(\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi)$，故 D 正确. 故选 BCD.

12. ABD 【解析】对于 A，当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x+\sin x$，$x\in(-\pi,+\infty)$，所以 $f(0)=1$，故切点为$(0,1)$，$f'(x)=e^x+\cos x$，所以切线斜率 $k=f'(0)=2$，故直线方程为 $y-1=2(x-0)$，即切线方程为 $y=2x+1$，故 A 正确；对于 B，当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x+\sin x$，$x\in(-\pi,+\infty)$，$f'(x)=e^x+\cos x$，$f''(x)=e^x-\sin x>0$ 恒成立，所以 $f'(x)$单调递增，又 $f'(-\frac{\pi}{2})=e^{-\frac{\pi}{2}}>0$，$f'(-\frac{3\pi}{4})=e^{-\frac{3\pi}{4}}+\cos(-\frac{3\pi}{4})=\frac{1}{e^{\frac{3\pi}{4}}}-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$(e^{\frac{3\pi}{4}})^2=e^{\frac{3\pi}{2}}>e>2$，所以 $e^{\frac{3\pi}{4}}>\sqrt{2}$，即$\frac{1}{e^{\frac{3\pi}{4}}}<\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $f'(-\frac{3\pi}{4})<0$，所以存在 $x_0\in(-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2})$，使得 $f'(x_0)=0$，即 $e^{x_0}+\cos x_0=0$，则在$(-\pi,x_0)$上，$f'(x)<0$，在$(x_0,+\infty)$上，$f'(x)>0$，所以在$(-\pi,x_0)$上，$f(x)$单调递减，在$(x_0,+\infty)$上，$f(x)$单调递增，所以 $f(x)$存在唯一的极小值点 $x_0$，故 B 正确；对于 C，D，令 $f(x)=0$，即 $e^x+a\sin x=0$，所以$-\frac{1}{a}=\frac{\sin x}{e^x}$，则令 $F(x)=\frac{\sin x}{e^x}$，$x\in(-\pi,+\infty)$，$F'(x)=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}=\frac{-\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})}{e^x}$，令 $F'(x)=0$，得 $x=k\pi+\frac{\pi}{4}(k\geqslant-1,k\in\mathbf{Z})$，由函数$y=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$的图象性质可知：$x\in(2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{5\pi}{4})$时，$\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})>0$，$F(x)$单调递减；$x\in(2k\pi+\frac{5\pi}{4},2k\pi+\frac{9\pi}{4})$时，$\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})<0$，$F(x)$单调递增，所以 $x=2k\pi+\frac{5\pi}{4}(k\geqslant-1,k\in\mathbf{Z})$时，$F(x)$取得极小值，又$\frac{\sin(-\frac{3\pi}{4})}{e^{-\frac{3\pi}{4}}}<\frac{\sin(\frac{5\pi}{4})}{e^{\frac{5\pi}{4}}}<\cdots$，即 $F(-\frac{3\pi}{4})<F(\frac{5\pi}{4})<\cdots$，又因为在$(-\pi,-\frac{3\pi}{4})$上 $F(x)$单调递减，所以$F(x)\geqslant F(-\frac{3\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$，所以 $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\geqslant0,k\in\mathbf{Z})$时，$F(x)$取得极大值，又$\frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{e^{\frac{\pi}{4}}}>\frac{\sin(\frac{9\pi}{4})}{e^{\frac{9\pi}{4}}}>\cdots$，即 $F(\frac{\pi}{4})>F(\frac{9\pi}{4})>\cdots$，所以$F(x)\leqslant F(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2e^{\frac{\pi}{4}}}$，当 $x\in(-\pi,+\infty)$时，$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\leqslant F(x)\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2e^{\frac{\pi}{4}}}$，所以当$-\frac{1}{a}<-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$，即 $0<a<\frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{3\pi}{4}}}$时，$f(x)$在$(-\pi,+\infty)$上无零点，所以 C 错误；当 $a<0$ 时，$\forall x\in(-\pi,+\infty)$，$f(x)\geqslant0$ 恒成立，则 $f(x)=e^x+a\sin x\geqslant0$，因为$x\in(-\pi,+\infty)$时，$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\leqslant F(x)\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2e^{\frac{\pi}{4}}}$，又因为 $a<0$，所以$-\frac{1}{a}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2e^{\frac{\pi}{4}}}$，即 $a\geqslant-\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$，即当 $a<0$ 时，若$\forall x\in(-\pi,+\infty)$，$f(x)\geqslant0$ 恒成立，则$-\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\leqslant a<0$，故 D 正确. 故选 ABD.

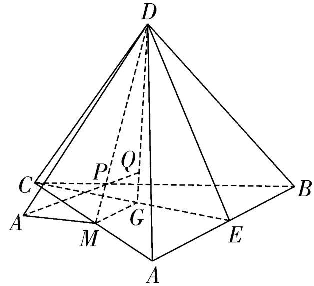
13. $4-4\sqrt{2}$ 【解析】根据题意，由 $f(x+1)$ 为奇函数，得 $f(x)$ 关于 $(1,0)$ 对称，故 $f(1)=0$，即 $2a+b=0$，因为 $f(0)+f(2)=0$，所以 $f(0)=-f(2)=-(4a+b)$，又因为 $f(0)+f(1)=-4$，所以 $f(0)=-4$，即 $4a+b=4$，由 $\begin{cases}2a+b=0,\\4a+b=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=-4,\end{cases}$ 因为 $f(\frac{7}{2})+f(-\frac{3}{2})=0$，所以 $f(\frac{7}{2})=-f(-\frac{3}{2})=-f(\frac{3}{2})=-(2\times2^{\frac{3}{2}}-4)=4-4\sqrt{2}$.

14. $-\frac{1}{5}$ 【解析】由题意，可得 $\sin^2(\pi+\alpha)-\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\sin^2\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=$

$$\frac{\sin^2\alpha+\cos\alpha\sin\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{\frac{\sin^2\alpha+\cos\alpha\sin\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\tan^2\alpha+\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{(-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}}{1+(-\frac{1}{2})^2}=-\frac{1}{5}.$$

15. 8 【解析】第一次操作去掉的线段长度为 $\frac{1}{3}$，第二次操作去掉的线段长度之和为 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$，第三次操作去掉的线段长度之和为 $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$，……，第 $n$ 次操作去掉的线段长度之和为 $(\frac{2}{3})^{n-1}\times\frac{1}{3}$，由题意知 $(\frac{2}{3})^{n-1}\times\frac{1}{3}\geqslant\frac{1}{60}$，则 $(\frac{2}{3})^n\geqslant\frac{1}{30}$，则 $n\lg\frac{2}{3}\geqslant-\lg 30=-1-\lg 3$，所以 $n(\lg 2-\lg 3)\geqslant-1-\lg 3$，即 $n\leqslant\frac{1+\lg 3}{\lg 3-\lg 2}$，又 $\lg 2\approx0.3010$，$\lg 3\approx0.4771$，可得 $n\leqslant8$，故最大值为 8.

16. $8\pi$ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ 【解析】因为 $DA,DB,DC$ 两两垂直，$DA=DB=DC=2$，所以 $AB=AC=BC=2\sqrt{2}$，因为 $M,E$ 分别为 $AC,AB$ 的中点，所以 $CE\perp AB$，所以 $MA=MC=MD=ME=\sqrt{2}$，故 $M$ 为三棱锥 $D$-$ACE$ 的外接球球心，所以三棱锥 $D$-$ACE$ 的外接球的表面积 $S=4\pi R^2=4\pi\times(\sqrt{2})^2=8\pi$；在正三棱锥 $D$-$ABC$ 中，$E$ 为 $AB$ 的中点，所以 $AB\perp DE$，$AB\perp CE$，所以 $AB\perp$ 平面 $CDE$，设 $CE$ 的中点为 $G$，连接 $MG$，因为 $M$ 为 $AC$ 的中点，所以 $MG\parallel AE$ 且 $MG=\frac{1}{2}AE=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $MG\perp$ 平面 $CDE$，所以 $DG$ 即为 $DM$ 在平面 $CDE$ 上的射影，当 $AP+PQ$ 最小时，$PQ\perp$ 平面 $CDE$，故 $Q$ 在线段 $DG$ 上. 如图，将三角形 $ADM$ 沿 $DM$ 翻折，使之与三角形 $GDM$ 共面，此时，$AP+PQ$ 的值最小，即为点 $A$ 到 $DG$ 的距离，过点 $A$ 作 $AQ\perp DG$ 于点 $Q$，又 $DM=\sqrt{2}$，所以 $\sin\angle MDG=\frac{MG}{MD}=\frac{1}{2}$，所以 $\angle MDG=30^\circ$，因为 $\angle ADM=45^\circ$，所以 $\sin\angle ADQ=\sin(\angle ADM+\angle MDG)=\sin(45^\circ+30^\circ)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，所以 $AQ=AD\cdot\sin\angle ADQ=2\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.



17.【解析】(1)由正弦定理以及$\dfrac{\sin B+\sin C}{\sin A-\sin C}=\dfrac{a}{b-c}$,得$\dfrac{b+c}{a-c}=\dfrac{a}{b-c}$,

即 $a^2+c^2-b^2=ac$,

在$\triangle ABC$中,由余弦定理得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{ac}{2ac}=\dfrac{1}{2}$,

又 $0<B<\pi$,所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$. …………………………………………………………………… 4 分

(2)因为$\triangle ABC$是锐角三角形,所以$\begin{cases}0<A<\dfrac{\pi}{2},\\0<\dfrac{2\pi}{3}-A<\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$所以$\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{2}$. ……………… 6 分

因为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}ac\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac=2\sqrt{3}$,所以 $ac=8$.

由正弦定理得 $c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}$,

所以 $c^2=\dfrac{ac\sin C}{\sin A}=\dfrac{8\sin C}{\sin A}=\dfrac{8\sin(\dfrac{2\pi}{3}-A)}{\sin A}=\dfrac{8(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\dfrac{1}{2}\sin A)}{\sin A}=\dfrac{4\sqrt{3}}{\tan A}+4$,

因为$\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{2}$,所以 $\tan A>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $0<\dfrac{1}{\tan A}<\sqrt{3}$,所以 $4<\dfrac{4\sqrt{3}}{\tan A}+4<16$,

所以 $4<c^2<16$,所以 $2<c<4$. ……………………………………………………………… 10 分

18.【解析】(1)因为 $C=2A$,所以 $B=\pi-A-C=\pi-3A$,则 $\sin B=\sin(\pi-3A)=\sin(A+2A)=\sin A\cos 2A+\cos A\sin 2A$,因为 $\sin 2A=2\sin A\cos A$,$\cos 2A=2\cos^2 A-1$,

所以 $\sin B=\sin A(2\cos^2 A-1)+2\sin A\cos^2 A=\sin A(4\cos^2 A-1)$,

由正弦定理,可得:$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$,则$\dfrac{2}{\sin A}=\dfrac{3}{\sin A(4\cos^2 A-1)}$,

可得 $8\cos^2 A-2=3$,解得 $\cos^2 A=\dfrac{5}{8}$,则 $\cos C=\cos 2A=2\cos^2 A-1=\dfrac{1}{4}$,

由余弦定理,$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=2^2+3^2-2\times2\times3\times\dfrac{1}{4}=10$,故 $c=\sqrt{10}$. ……… 6 分

(2)因为 $a^2+\dfrac{1}{5}b^2=c^2$,所以 $a^2-c^2=-\dfrac{1}{5}b^2$,$c^2-a^2=\dfrac{1}{5}b^2$,

由余弦定理,$\cos A=\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2cb}=\dfrac{b^2+\dfrac{1}{5}b^2}{2cb}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{b}{c}$ ①,

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{b^2-\dfrac{1}{5}b^2}{2ab}=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{b}{a}$ ②,

①与②相除可得:$\dfrac{\cos A}{\cos C}=\dfrac{3b}{5c}\cdot\dfrac{5a}{2b}=\dfrac{3a}{2c}=\dfrac{3\sin A}{2\sin C}$,

所以 $2\cos A\sin C=3\sin A\cos C$,两边同除以 $\cos A\cos C$,可得 $2\tan C=3\tan A$. … 12 分

19.【解析】(1)由数列$\{a_n\}$的前$n$项和$S_n=\frac{a_n(a_n+1)}{2}$知：

当$n=1$时，$S_1=\frac{a_1(a_1+1)}{2}$，$a_1=S_1$，所以$a_1(a_1-1)=0$，又$a_1>0$，所以$a_1=1$，

当$n>1$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{a_n(a_n+1)}{2}-\frac{a_{n-1}(a_{n-1}+1)}{2}$，

整理得：$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-1)=0$，

因为$a_n+a_{n-1}>0$，所以有$a_n-a_{n-1}=1$，

所以数列$\{a_n\}$是首项$a_1=1$，公差$d=1$的等差数列，

数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_1+(n-1)d=n$. ……………………………………………… 6分

(2)由$a_n=n$知：$b_n=\log_2\frac{a_n+2}{a_n+1}=\log_2\frac{n+2}{n+1}$，

数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=\log_2\frac{3}{2}+\log_2\frac{4}{3}+\log_2\frac{5}{4}+\cdots+\log_2\frac{n+2}{n+1}=$

$\log_2(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{n+2}{n+1})=\log_2(n+2)-1$， ……………………………………………… 8分

令$b_1+b_2+b_3+\cdots b_n=k(k\in\mathbf{Z})$，则有$\log_2(n+2)-1=k$，$n=2^{k+1}-2$，

由$n\in(0,2020)$，$k\in\mathbf{Z}$知$k<10$且$k\in\mathbf{N}^*$，

所以区间$(0,2020)$内所有“优化数”的和为$S=(2^2-2)+(2^3-2)+(2^4-2)+\cdots+(2^{10}-2)=(2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{10})-18=\frac{2^2(1-2^9)}{1-2}-18=2^{11}-22=2026$. ……………… 12分

20.【解析】(1)当$a_1=\frac{3}{2}$时，因为$a_n=2-\frac{1}{a_{n-1}}$，$a_n-1=1-\frac{1}{a_{n-1}}=\frac{a_{n-1}-1}{a_{n-1}}$，

所以$\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n-1}-1}=\frac{a_{n-1}}{a_{n-1}-1}-\frac{1}{a_{n-1}-1}=\frac{a_{n-1}-1}{a_{n-1}-1}=1$，

所以数列$\{\frac{1}{a_n-1}\}$为首项为$\frac{1}{a_1-1}$，公差为1的等差数列.

又$a_1=\frac{3}{2}$，$\frac{1}{a_1-1}=2$，所以$\frac{1}{a_n-1}=n+1$，解得$a_n=\frac{n+2}{n+1}$. ……………………………… 5分

(2)因为$a_n=\frac{n+2}{n+1}$，所以$c_n=\frac{n+2}{n\cdot(n+1)\cdot 2^n}=\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}$， ……………… 7分

所以$T_n=c_1+c_2+\cdots+c_{n-1}+c_n=1-\frac{1}{2\times 2^1}+\frac{1}{2\times 2^1}-\frac{1}{3\times 2^2}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}$

$=1-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}$， ……………………………………………………………… 9分

即$T_n=1-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}$，显然$T_n<1$，另一方面，

$T_n-T_{n-1}=1-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}-(1-\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}})=\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}=\frac{n+2}{n\cdot(n+1)\cdot 2^n}>0$，

故数列$\{T_n\}$是递增数列，所以$T_n\geqslant T_1=\frac{3}{4}$，因此，$\frac{3}{4}\leqslant T_n<1$. ……………………… 12分

21.【解析】(1)证明:因为在矩形 $ABCD$ 中,$AB=2AD=2$,$O$ 为 $CD$ 的中点,

所以 $\triangle ADO$ 为等腰直角三角形,则 $AO=\sqrt{2}AD=\sqrt{2}$,

连接 $BO$,易知 $AO=BO=\sqrt{2}$,即 $AO^2+BO^2=AB^2$,即 $OB\perp OA$.

又因为 $OD^2+OB^2=1^2+(\sqrt{2})^2=(\sqrt{3})^2=DB^2$,所以 $OB\perp OD$,

又 $OA\cap OD=O$,$OA$,$OD\subset$平面 $AOD$,所以 $OB\perp$平面 $AOD$,

又 $OB\subset$平面 $ABCO$,所以平面 $AOD\perp$平面 $ABCO$. ………………………………………… 5 分

(2)以 $O$ 为坐标原点,分别以直线 $OA$,$OB$ 为 $x$ 轴和 $y$ 轴,以过点 $O$ 且垂直平面 $ABCO$ 的直线为 $z$ 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,则 $O(0,0,0)$,$B(0,\sqrt{2},0)$,$A(\sqrt{2},0,0)$,

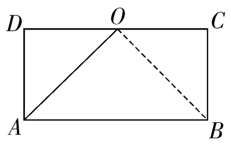
过点 $D$ 作 $DH\perp AO$,交 $AO$ 于 $H$,易知 $H$ 为 $AO$ 的中点,

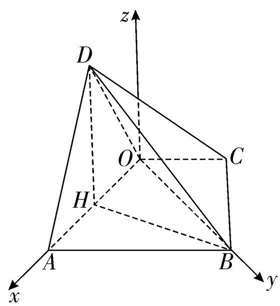
因为平面 $AOD\perp$平面 $ABCO$,平面 $AOD\cap$平面 $ABCO=AO$,$DH\subset$平面 $AOD$,

所以 $DH\perp$平面 $ABCO$,

则 $DH=\frac{1}{2}AO=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $D(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})$, ………………………………………… 7 分

又$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$,所以 $C(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$.




设$\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BD}$,$0\leqslant\lambda\leqslant 1$,设 $M(a,b,c)$,

由$\overrightarrow{BD}=(\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$,$\overrightarrow{BM}=(a,b-\sqrt{2},c)$,则$(a,b-\sqrt{2},c)=\lambda(\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$,

所以 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda$,$b=\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda$,$c=\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda$,即 $M(\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda,\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda,\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda)$, ……………………… 9 分

设平面 $MOA$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OM}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}\sqrt{2}x=0,\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda x+(\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda)y+\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda z=0,\end{cases}$则$\begin{cases}x=0,\\ y=\frac{\lambda z}{2\lambda-2},\end{cases}$

取 $\boldsymbol{n}=(0,\lambda,2\lambda-2)$,平面 $AOB$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$,

设二面角 $M$-$OA$-$B$ 的平面角为 $\theta$,则 $\tan\theta=\frac{1}{2}$,所以 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$,

所以$\begin{cases}\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{2},\\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\end{cases}$解得 $\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

则 $\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|2\lambda-2|}{\sqrt{\lambda^2+(2\lambda-2)^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$.

所以 $M$ 是 $BD$ 的中点. ………………………………………………………………… 12 分

22.【解析】(1)由题意知 $f'(x)=e^x+\cos x+\sin x-a$,

因为函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $f'(x)=e^x+\cos x+\sin x-a\geqslant 0$,

即 $a\leqslant e^x+\cos x+\sin x$ 对 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立,

设 $h(x)=e^x+\cos x+\sin x$,则 $h'(x)=e^x-\sin x+\cos x=e^x-\sqrt{2}\sin(x-\dfrac{\pi}{4})$,

当 $0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}$ 时,$h'(x)=e^x-\sqrt{2}\sin(x-\dfrac{\pi}{4})>1-1=0$,

当 $x\geqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时,$h'(x)\geqslant e^{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{2}>e-\sqrt{2}>0$,

所以函数 $h(x)=e^x+\cos x+\sin x$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $a\leqslant h(x)_{\min}=h(0)=2$.

故实数 $a$ 的取值范围为 $(-\infty,2]$. ……………………………………………………… 4 分

(2)由题知 $g(x)=f(x)-\ln(1-x)=e^x+\sin x-\cos x-ax-\ln(1-x)(x<1)$,

所以 $g'(x)=e^x+\cos x+\sin x-a+\dfrac{1}{1-x}$,$g(0)=0$,

因为 $g(x)\geqslant 0$,所以 $\forall x\in(-\infty,1)$,$g(x)\geqslant g(0)$,

即 $g(0)$ 为 $g(x)$ 的最小值,$x=0$ 为 $g(x)$ 的一个极小值点,

所以 $g'(0)=e^0+\cos 0+\sin 0-a+\dfrac{1}{1-0}=0$,解得 $a=3$. ……………………………… 6 分

当 $a=3$ 时,$g(x)=e^x+\sin x-\cos x-3x-\ln(1-x)(x<1)$,

所以 $g'(x)=e^x+\cos x+\sin x-3+\dfrac{1}{1-x}=e^x+\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})-3+\dfrac{1}{1-x}$,

①当 $0\leqslant x<1$ 时,$g'(x)\geqslant 1+1-3+1=0$(当且仅当 $x=0$ 时等号成立),

所以 $g(x)$ 在 $[0,1)$ 上单调递增. ……………………………………………………………… 8 分

②当 $x<0$ 时,若 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x<0$,则 $g'(x)<1+1-3+1=0$;

若 $x<-\dfrac{\pi}{2}$,则 $g'(x)<e^{-\frac{\pi}{2}}+\sqrt{2}-3+\dfrac{2}{\pi+2}<\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}-3+\dfrac{2}{\pi+2}<0$. ……………… 10 分

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减.

综上,$g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,在 $[0,1)$ 上单调递增.

所以当 $a=3$ 时,$g(x)\geqslant g(0)=0$. …………………………………………………… 12 分