2023 届·普通高中名校联考信息卷(月考四)·数学

参考答案

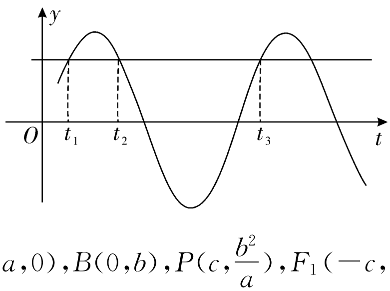
1. B 【解析】由题意可知，$A=\{x|x^2+x-6<0\}=\{x|-3<x<2\}$，$B=\{x|x+1>0\}=\{x|x>-1\}$，所以 $A\cap B=\{x|-1<x<2\}$，故选 B.

2. D 【解析】由题意可知，$z=(2+i)i=-1+2i$，则 $\bar{z}=-1-2i$，所以 $z\bar{z}=(-1+2i)(-1-2i)==1-(-4)=5$，故选 D.

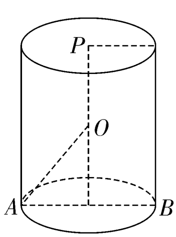
3. D 【解析】因为向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,1)$，所以 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}=(1+k,2+k)$，又 $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$，所以 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=1+k+2+k=0$，解得 $k=-\frac{3}{2}$. 故选 D.

4. C 【解析】由题意可知，设切点为(m,n)，且 $y'=1-\frac{2}{x}$，因为直线 $x+y+a=0$ 的斜率为 -1，所以 $k=-1=1-\frac{2}{m}$，解得 $m=1$，所以切点为$(1,1)$，则代入直线方程可得 $1+1+a=0$，解得 $a=-2$，故选 C.

5. D 【解析】由题意可知，$t_1+t_2=2$，$t_2+t_3=6$，所以 $t_3-t_1=4$，则 $T=4=\frac{2\pi}{\omega}$，解得 $\omega=\frac{\pi}{2}$，所以 $y=\sin(\frac{\pi}{2}t+\varphi)$，令 $\sin(\frac{\pi}{2}t+\varphi)>\frac{1}{2}$，则解得$\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}t+\varphi<\frac{5\pi}{6}$，所以$\frac{1}{3}-\frac{2}{\pi}\varphi<t<\frac{5}{3}-\frac{2}{\pi}\varphi$，则时间间隔为$\frac{5}{3}-\frac{2}{\pi}\varphi-(\frac{1}{3}-\frac{2}{\pi}\varphi)=\frac{4}{3}$s，故选 D.



6. A 【解析】由题意可知，$A(-a,0)$，$B(0,b)$，$P(c,\frac{b^2}{a})$，$F_1(-c,0)$，则 $k_{AB}=\frac{b}{a}$，$k_{PF_1}=\frac{b^2}{2ac}$，又 $AB/\!/PF_1$，所以$\frac{b}{a}=\frac{b^2}{2ac}$，化简可得 $b=2c$，而 $a^2=b^2+c^2=5c^2$，则 $a=\sqrt{5}c$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，故选 A.



7. B 【解析】由题意可知，圆柱的底面半径为 1，高为 2，设三棱锥 $P\text{-}ABE$ 外接球球心为 O，AB 的中点为 O_1，则球心 O 在高 PO_1 上. 设外接球半径为 R，且满足 $R^2=(2-R)^2+1$，解得 $R=\frac{5}{4}$，所以外接球的表面积为 $4\pi R^2=4\pi\times(\frac{5}{4})^2=\frac{25\pi}{4}$，故选 B.

8. C 【解析】方法一：由题意可知，令 $x=2,y=1$，则可得 $f(3)f(1)=f^2(2)-f^2(1)=0-4=-4$，即 $2f(3)=-4$，解得 $f(3)=-2$；令 $x=3,y=2$，则可得 $f(5)f(1)=f^2(3)-f^2(2)=4-0=4$，即 $2f(5)=4$，解得 $f(5)=2$；令 $x=4,y=1$，则可得 $f(5)f(3)=f^2(4)-f^2(1)=f^2(4)-4=-4$，即 $-4=f^2(4)-4$，解得 $f(4)=0$，可得到周期 $T=4$，且 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0$，所以 $f(1)+f(2)+\cdots+f(90)=f(1)+f(2)=2$，故选 C.

方法二：由题意可知，令 $y=2$，则可得到 $f(x+2)f(x-2)=f^2(x)-f^2(2)=f^2(x)$，令 $x=0,y=0$，可得 $f(0)f(0)=f^2(0)-f^2(0)=0$，解得 $f(0)=0$，同理可得，$f(4)=f(6)=\cdots=f(2n)=0$；令 $x=2,y=1$，则可得 $f(3)f(1)=f^2(2)-f^2(1)=0-4=-4$，即 $2f(3)=-4$，解得 $f(3)=-2$，同理可得 $f(5)=2,f(7)=-2,\cdots$，则奇数项是以 -1 为公比的等比数列，所以 $f(1)+f(2)+\cdots+f(90)=f(1)+f(3)+\cdots+f(89)=\frac{2\times[1-(-1)^{45}]}{1-(-1)}=2$（另解：$f(1)+f(2)+\cdots+f(90)=f(1)+f(2)=f(1)+f(3)+\cdots+f(89)=2-2+2-2+\cdots+2=2$），故选 C.

9. BC 【解析】由题意可知，对于选项 A，$\alpha\perp\beta,l\perp\alpha$，则 $l\subset\beta$ 或 $l/\!/\beta$，又 $m/\!/\beta$，若 $l\subset\beta$，则推不出 $l\perp m$，故选项 A 错误；对于选项 B，$m\perp\beta,\alpha/\!/\beta$，则 $m\perp\alpha$，又 $l/\!/\alpha$，所以 $l\perp m$，故选项 B 正确；对于选项 C，$l\perp\alpha,\alpha\perp\beta$，则 $l\subset\beta$ 或 $l/\!/\beta$，若 $l\subset\beta,m\perp\beta$，则 $l\perp m$，若 $l/\!/\beta$，则在 α 内至少存在一条直线 n 与 l 平行，则 $n\perp m$，所以 $l\perp m$，故选项 C 正确；对于选项 D，$l/\!/\alpha,\alpha\perp\beta$，则 l 与 β 无关系，所以不能推出 $l\perp m$，故选项 D 错误；综上，答案选 BC.

10. AC 【解析】由题意可知，对于选项 A，因为 $a>b>0$，所以 $a-b>0$，所以 $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}>0$，即 $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$，故选项 A 正确；对于选项 B，设函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$，可知在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，而 $a>b>0$，不能判断出 $a+\frac{1}{a}$ 与 $b+\frac{1}{b}$ 的大小，即无法判断 $a-\frac{1}{b}$ 与 $b-\frac{1}{a}$ 的大小，故选项 B 错误；对于选项 C，因为 $a>b>0$，所以 $a-b>0$，所以 $a^3-b^3-2(a^2b-ab^2)=(a-b)(a^2+ab+b^2)-2ab(a-b)=(a-b)(a^2-ab+b^2)=(a-b)[(a-b)^2+ab]>0$，即 $a^3-b^3>2(a^2b-ab^2)$，故选项 C 正确；对于选项 D，因为 $a>b>0$，所以 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$，

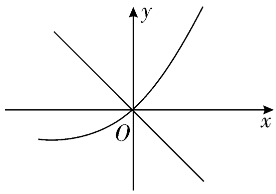
$\sqrt{a+1}>\sqrt{b+1}$，则$\sqrt{a}+\sqrt{a+1}>\sqrt{b}+\sqrt{b+1}>0$，所以$\dfrac{1}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}>\dfrac{1}{\sqrt{b+1}-\sqrt{b}}>0$，推不出$\sqrt{a+1}-\sqrt{b+1}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$（另解：若$\sqrt{a+1}-\sqrt{b+1}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$，则$\sqrt{a+1}-\sqrt{a}>\sqrt{b+1}-\sqrt{b}$，则$\dfrac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}>\dfrac{1}{\sqrt{b+1}+\sqrt{b}}$，显然不成立），故选项 D 错误；综上，答案选 AC.

11. ACD 【解析】由题意可知，设$M(x,y)$，则$MP=x+1=r$，即$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=x+1$，化简可得$y^2=4x$，即为抛物线（另解：点M到点P的距离与到直线l的距离相等，则动点M的轨迹为抛物线），故选项 A 正确；对于选项 B，MP的最小值为 1，则圆M面积的最小值为π，故选项 B 错误；对于选项 C，圆心M到y轴的距离为d，且$d=x$，$x+1=r$，弦长为$2\sqrt{5}$，所以可得$x^2+(\sqrt{5})^2=(x+1)^2$，解得$x=2$，所以圆M的半径为$r=x+1=3$，故选项 C 正确；对于选项 D，$MO=\sqrt{x^2+y^2}$，$MP=x+1$，因为$\dfrac{MO}{MP}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，所以$\dfrac{x^2+y^2}{(x+1)^2}=\dfrac{4}{3}$，且$y^2=4x$，则化简整理可得$x^2-4x+4=0$，解得$x=2$，即存在点$M$，使得$\dfrac{MO}{MP}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，故选项 D 正确；综上，答案选 ACD.

12. ABD 【解析】方法一：由题意可知，因为$f(x)=3^x-2^x$，所以$f'(x)=3^x\ln 3-2^x\ln 2$. 对于选项 A，当$x>0$时，$3^x>2^x$，$\ln 3>\ln 2$，所以$f'(x)=3^x\ln 3-2^x\ln 2>0$，即函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，故选项 A 正确；对于选项 B，$y=\dfrac{f(x)}{a^x}=\dfrac{3^x-2^x}{a^x}=(\dfrac{3}{a})^x-(\dfrac{2}{a})^x$. 若函数$y=\dfrac{f(x)}{a^x}$为奇函数，则$\dfrac{3}{a}=\dfrac{a}{2}$，解得$a=\sqrt{6}$，即存在$a\in\mathbf{R}$，使得函数$y=\dfrac{f(x)}{a^x}$为奇函数，故选项 B 正确；对于选项 C，$g(x)=f(x)+x=3^x-2^x+x$，当$x>0$时，$3^x-2^x>0$，则$g(x)>0$，当$x=0$时，$g(x)=0$，当$x<0$时，$3^x-2^x<0$，则$g(x)<0$，所以函数$g(x)$有唯一的零点 0，故选项 C 错误；对于选项 D，当$x\geqslant 0$时，$f(x)\geqslant f(0)=0>-1$，当$x<0$时，$f(x)=3^x-2^x>-2^x>-1$，所以对于任意$x\in\mathbf{R}$，$f(x)>-1$，故选项 D 正确；综上，答案选 ABD.

方法二：由题意可知，对于选项 A，$f(x)=3^x-2^x=2^x[(\dfrac{3}{2})^x-1]$，当$x>0$时，函数$y=2^x$，函数$y=(\dfrac{3}{2})^x-1$均为单调递增，且均为正，所以函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，故选项 A 正确；对于选项 B，$y=\dfrac{f(x)}{a^x}=\dfrac{3^x-2^x}{a^x}=(\dfrac{3}{a})^x-(\dfrac{2}{a})^x$，若$a=\sqrt{6}$，则$y=(\dfrac{3}{\sqrt{6}})^x-(\dfrac{2}{\sqrt{6}})^x$为奇函数，存在$a\in\mathbf{R}$，使得函数$y=\dfrac{f(x)}{a^x}$为奇函数，故选项 B 正确；对于选项 C，令$g(x)=f(x)+x=0$，解得$f(x)=-x$，且当$x\leqslant 0$时，$f(x)\leqslant 0$，当$x>0$时，函数$f(x)$单调递增，则

可作出函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=-x$ 的图象，可知两函数图象仅有一个交点，即函数 $g(x)=f(x)+x$ 有且仅有 1 个零点，故选项 C 错误；对于选项 D，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant f(0)=0>-1$，当 $x<0$ 时，$f(x)=3^x+1\in(1,2)$，$2^x\in(0,1)$，所以 $3^x+1>2^x$，则 $3^x-2^x>-1$，所以对于任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)>-1$，故选项 D 正确；综上，答案选 ABD.



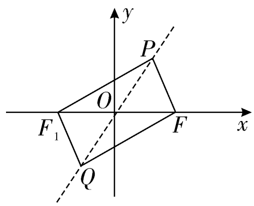
13. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 【解析】根据题意，在 $\triangle ABC$ 中，若 $\cos A=\frac{1}{3}$，则 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-(\frac{1}{3})^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

又由 $\triangle ABC$ 的面积是 $\sqrt{2}$，即 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{2}$，则有 $bc=3$，又由 $b=\frac{2}{3}c$，解得：$b=\sqrt{2}$，$c=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

由余弦定理得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=2+\frac{9}{2}-2\times\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{9}{2}$，则 $a=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

所以 $a=c$，所以 $\sin C=\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

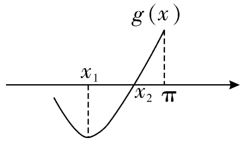
14. 4 【解析】方法一：由题意可知，设左焦点为 F_1，因为 P,Q 关于原点对称，且 $PF\perp QF$，所以四边形 $PFQF_1$ 为矩形，则 $S_{\triangle PQF}=S_{\triangle PFF_1}=b^2\frac{1}{\tan\frac{90^\circ}{2}}=b^2=4$.



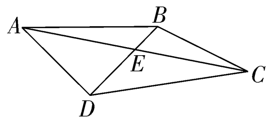
方法二：由题意可知，$F(\sqrt{5},0)$，因为 P,Q 关于原点对称，且 $PF\perp QF$，所以 $PQ=2OF=2\sqrt{5}$，设左焦点为 F_1，四边形 $PFQF_1$ 为矩形，则 $|PF-PF_1|=|PF-QF|=2$，在 $\mathrm{Rt}\triangle PQF$ 中，有 $PF^2+QF^2=PQ^2=20$，则 $PF\cdot QF=\frac{1}{2}(PF^2+QF^2-|PF-QF|^2)=8$，所以 $S_{\triangle PQF}=\frac{1}{2}PF\cdot QF=4$.

15. $2-\frac{\sqrt{6}}{3}$ 【解析】由题意可知，在 $\mathrm{Rt}\triangle OA_2A_3$ 中，$OA_2=\sqrt{2}$，$A_2A_3=1$，$OA_3=\sqrt{3}$，则 $\cos\angle A_2OA_3=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\sin\angle A_2OA_3=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\mathrm{Rt}\triangle OA_3A_4$ 中，$OA_3=\sqrt{3}$，$A_3A_4=1$，$OA_4=2$，则 $\cos\angle A_3OA_4=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\angle A_3OA_4=\frac{1}{2}$，所以 $\cos\angle A_2OA_4=\cos(\angle A_2OA_3+\angle A_3OA_4)=\cos\angle A_2OA_3\cdot\cos\angle A_3OA_4-\sin\angle A_2OA_3\sin\angle A_3OA_4=\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$，则 $\overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OA_4}=|\overrightarrow{OA_2}|\cdot|\overrightarrow{OA_4}|\cdot\cos\angle A_2OA_4=\sqrt{2}\times 2\times\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}=\frac{6-\sqrt{6}}{3}=2-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

16. $(-2\pi,1-\pi]$ 【解析】由题意可知，因为 $f(x)=2x-\sin x-a$，所以 $f'(x)=2-\cos x>0$，则函数 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上单调递增，且 $f(-\pi)=-2\pi-a$，$f(\pi)=2\pi-a$，若要存在唯一的零点 x_1，则 $-2\pi-a<0$，$2\pi-a>0$，解得 $-2\pi<a<2\pi$，对于 $g(x)=x^2+\cos x-ax+a$，则 $g'(x)=2x-\sin x-a=f(x)$，令 $g'(x)=0$，解得 $x=x_1$，所以函数 $g(x)$ 在 $(-\pi,x_1)$ 上单调递减，在 (x_1,π) 上单调递增，又函数 $g(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上存在唯一的零点 x_2，且 $x_1<x_2$，则 $g(-\pi)\leqslant 0$，$g(\pi)>0$，即 $(-\pi)^2+\cos(-\pi)-a(-\pi)+a\leqslant 0$，且 $\pi^2+\cos\pi-a\pi+a>0$，解得 $a\leqslant 1-\pi$，综上，实数 a 的取值范围为 $(-2\pi,1-\pi]$.



17.【解析】(1) 在 $\triangle ABD$ 中，由 $\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{AD}{\sin\angle ABD}$，得



$\dfrac{6}{\sin\angle ADB}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，

所以 $\sin\angle ADB=1$. 因为 $0^\circ<\angle ADB<135^\circ$，所以 $\angle ADB=90^\circ$，

所以 $BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=3\sqrt{2}$. ………………………………………………………… 4 分

(2)在 $\triangle ADE$ 中，$DE=\dfrac{2}{3}BD=2\sqrt{2}$，

因为 $\angle ADE=90^\circ$，所以 $AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=\sqrt{26}$，

$\cos\angle DAE=\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$. ………………………………………………………… 6 分

在 $\triangle ACD$ 中，$AC=2AE=2\sqrt{26}$，$AD=3\sqrt{2}$，$\cos\angle DAC=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$，

所以 $CD^2=AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cdot\cos\angle DAC=50$，即 $CD=5\sqrt{2}$，

所以 $\cos\angle ADC=\dfrac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}=-\dfrac{3}{5}$. …………………………………………… 10 分

18.【解析】(1)由题 $\begin{cases}S_5=a_3,\\ a_4^2=a_1(a_2+1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5a_1+\dfrac{5\times 4d}{2}=a_1+2d,\\ (a_1+3d)^2=a_1(a_1+d+1),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=-2d,\\ d=0\text{ 或 }d=2,\end{cases}$

因为 a_1,a_4,a_2+1 成等比数列，故 $d=0$ 舍掉，所以 $d=2$，$a_1=-4$，

求得 $a_n=2n-6$，$S_n=n^2-5n$. ………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)可得 $a_{2n+2}=2(2n+2)-6=4n-2$，$a_{2n+4}=2(2n+4)-6=4n+2$. ………… 7 分

故 $b_n=\dfrac{16n^2}{a_{2n+2}a_{2n+4}}=\dfrac{16n^2}{(4n-2)(4n+2)}=\dfrac{16n^2}{16n^2-4}=1+\dfrac{1}{4n^2-1}=1+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=1+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})+1+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+1+\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$

$=n+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{2n^2+2n}{2n+1}$. ………………………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)证明:连接 AC 交 BD 于点 N,连接 MN.

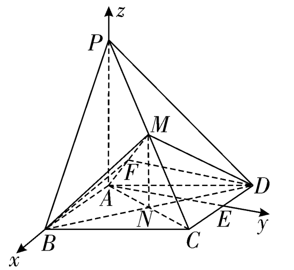
因为底面 $ABCD$ 为平行四边形,所以 N 为 AC 的中点,

因为 M 为 PC 的中点,所以 $MN/\!/PA$.

又 $PA\not\subset$平面 MBD,$MN\subset$平面 MBD,

所以 $PA/\!/$平面 MBD. ……………………………………………………………………………… 4 分

(2)方法一:



取 CD 的中点 E,连接 AE.

因为 $AB=AD$,四边形 $ABCD$ 为平行四边形,所以四边形 $ABCD$ 为菱形,

又$\angle BAD=120°$,所以$\angle ADC=60°$,因此$\triangle ACD$ 为等边三角形,

所以 $AE\perp CD$,即 $AE\perp AB$.

又 $PA\perp$平面 $ABCD$, ………………………………………………………………………………… 6 分

故以 AB,AE,AP 分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,

则 $A(0,0,0),B(2,0,0),P(0,0,2),C(1,\sqrt{3},0),D(-1,\sqrt{3},0),M(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1)$,

所以$\overrightarrow{AB}=(2,0,0),\overrightarrow{AM}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1),\overrightarrow{AD}=(-1,\sqrt{3},0)$.

设平面 AMB 的一个法向量为$\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AM}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2x=0,\\ \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+z=0,\end{cases}$取$\begin{cases}x=0,\\ y=2,\\ z=-\sqrt{3},\end{cases}$

即$\boldsymbol{n}_1=(0,2,-\sqrt{3})$. ………………………………………………………………………… 8 分

设平面 AMD 的一个法向量为$\boldsymbol{n}_2=(a,b,c)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AM}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-a+\sqrt{3}b=0,\\ \frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b+c=0,\end{cases}$取$\begin{cases}a=\sqrt{3},\\ b=1,\\ c=-\sqrt{3},\end{cases}$

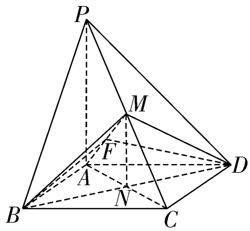
即$\boldsymbol{n}_2=(\sqrt{3},1,-\sqrt{3})$. ……………………………………………………………………… 10 分

则 $\cos\langle \boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{0\times\sqrt{3}+2\times1+(-\sqrt{3})\times(-\sqrt{3})}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\dfrac{5}{7}$,

又 $\langle \boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle\in(0,\pi)$,

所以二面角 B-AM-D 的正弦值为$\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$. ………………………………………………………… 12 分

方法二:



因为 $AB=AD$,四边形 $ABCD$ 为平行四边形,所以四边形 $ABCD$ 为菱形.

又 $\angle BAD=120^\circ$,所以 $\angle ABC=60^\circ$,因此 $\triangle ABC$ 为等边三角形.

又 $AB=2$,N 为 AC 的中点,所以 $BN=\sqrt{3}$.

取 AM 的中点 F,连接 BF,DF,

在 $\mathrm{Rt}\triangle BMN$ 中,$MN=1$,$BN=\sqrt{3}$,所以 $BM=2$.

又因为 $AB=2$,所以 $BF\perp AM$,

同理可证 $DF\perp AM$,所以 $\angle BFD$ 即为二面角 B-AM-D 的平面角. ………………… 9 分

在 $\mathrm{Rt}\triangle AMN$ 中,$AN=MN=1$,$AM=\sqrt{2}$.

在 $\triangle BAM$ 中,$BF=\sqrt{BA^2-\dfrac{AM^2}{4}}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

同理在 $\triangle DAM$ 中计算得 $DF=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

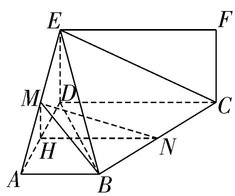
又 $BD=2\sqrt{3}$,所以 $\cos\angle BFD=\dfrac{BF^2+DF^2-BD^2}{2BF\cdot DF}=-\dfrac{5}{7}$. ……………………………… 11 分

又 $\angle BFD\in(0,\pi)$,

所以 $\sin\angle BFD=\sqrt{1-\cos^2\angle BFD}=\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$,

所以二面角 B-AM-D 的正弦值为$\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$. ………………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)取 AD 的中点 H,连接 HM,HN,



因为 M,N 分别是 AE,BC 的中点,$ABCD$ 是梯形($AB/\!/CD$),

则 $MH/\!/DE$,$HN/\!/CD$,

$HM\not\subset$平面 $CDEF$,$DE\subset$平面 $CDEF$,则 $HM/\!/$平面 $CDEF$,同理 $HN/\!/$平面 $CDEF$,

$HM\cap HN=H$,HM,$HN\subset$平面 HMN,所以平面 $HMN/\!/$平面 $CDEF$,

又 $MN\subset$平面 HMN,所以 $MN/\!/$平面 $CDEF$. ……………………………………………… 5 分

(2)因为 $CD\perp ED$，$CD\perp AD$，所以$\angle ADE$是二面角 $A\text{-}CD\text{-}E$ 的平面角，

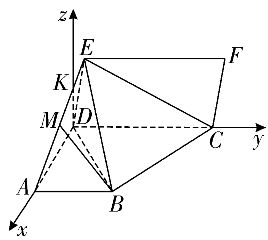
所以$\angle ADE=\frac{2\pi}{3}$，

在$\triangle ADE$上作 $DK\perp AD$ 交 AE 于点 K，

由 $DE,AD\subset$平面 ADE，$DE\cap AD=D$，得 $CD\perp$平面 ADE，而 $DK\subset$平面 ADE，

所以 $CD\perp DK$，…………………………………………………………………… 7 分

即 DA,DC,DK 两两垂直，分别以 DA,DC,DK 为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$C(0,2,0)$，又 $DE=1$，$\angle EDK=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$，

所以 E 点的竖坐标为 $z_E=1\times\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，横坐标为 $x_E=-1\times\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$，即 $E(-\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})$，

M 是 AE 的中点，则 $M(\frac{1}{4},0,\frac{\sqrt{3}}{4})$，$\overrightarrow{BM}=(-\frac{3}{4},-1,\frac{\sqrt{3}}{4})$，

$\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{BE}=(-\frac{3}{2},-1,\frac{\sqrt{3}}{2})$，

设平面 BCE 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-x+y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=-\frac{3}{2}x-y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\end{cases}$

取 $x=1$，得 $y=1$，$z=\frac{5}{\sqrt{3}}$，即 $\boldsymbol{n}=(1,1,\frac{5}{\sqrt{3}})$，…………………………………… 9 分

$\cos\langle\overrightarrow{BM},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{BM}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{BM}||\boldsymbol{n}|}=\frac{-\frac{3}{4}-1+\frac{5}{4}}{\frac{\sqrt{28}}{4}\times\sqrt{\frac{31}{3}}}=-\sqrt{\frac{3}{217}}$，…………………………… 10 分

所以直线 BM 与平面 BCE 所成角的正弦值为$|\cos\langle\overrightarrow{BM},\boldsymbol{n}\rangle|=\sqrt{\frac{3}{217}}=\frac{\sqrt{651}}{217}$. …… 12 分

21.【解析】(1)抛物线 $y^2=2px$ 的焦点 $F(\frac{p}{2},0)$.

因为 $P(0,2)$，且 A 为 PF 的中点，所以 $A(\frac{p}{4},1)$.

因为 A 在抛物线上，所以 $1=2p\times\frac{p}{4}$，解得 $p=\sqrt{2}$. ………………………………… 4 分

(2)由题意知直线 l 的斜率存在.

设直线 l 的方程为 $y=kx+2$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $y_1^2=2\sqrt{2}x_1$,$y_2^2=2\sqrt{2}x_2$.

联立直线与抛物线的方程得$\begin{cases}y=kx+2,\\y^2=2\sqrt{2}x,\end{cases}$消去 x,得 $ky^2-2\sqrt{2}y+4\sqrt{2}=0$,

则 $y_1+y_2=\dfrac{2\sqrt{2}}{k}$,$y_1y_2=\dfrac{4\sqrt{2}}{k}$, ………………………………………………………………… 6 分

假设存在定点 $T(m,n)$,则$\overrightarrow{TA}=(x_1-m,y_1-n)$,$\overrightarrow{TB}=(x_2-m,y_2-n)$,

所以$\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}=(x_1-m)(x_2-m)+(y_1-n)(y_2-n)$

$$=(\frac{\sqrt{2}}{4}y_1^2-m)(\frac{\sqrt{2}}{4}y_2^2-m)+(y_1-n)(y_2-n)$$

$$=\frac{1}{8}y_1^2y_2^2-\frac{\sqrt{2}}{4}m(y_1^2+y_2^2)+m^2+y_1y_2-n(y_1+y_2)+n^2$$

$$=\frac{4}{k^2}-\frac{\sqrt{2}}{4}m(\frac{8}{k^2}-\frac{8\sqrt{2}}{k})+m^2+\frac{4\sqrt{2}}{k}-\frac{2\sqrt{2}n}{k}+n^2$$

$=(4-2\sqrt{2}m)\dfrac{1}{k^2}+(4m+4\sqrt{2}-2\sqrt{2}n)\dfrac{1}{k}+m^2+n^2$. ……………………… 9 分

要使得$\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}$为常数,则$\begin{cases}4-2\sqrt{2}m=0,\\4m+4\sqrt{2}-2\sqrt{2}n=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=\sqrt{2},\\n=4,\end{cases}$

所以存在定点 $T(\sqrt{2},4)$,此时$\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}=m^2+n^2=18$. ……………………………………… 12 分

22.【解析】(1)因为 $f(x)=\sin x-(x+a)\cos x$,

所以 $f'(x)=\cos x-[\cos x-(x+a)\sin x]=(x+a)\sin x$.

因为 $x\in(0,\pi)$,$a\geqslant 0$,所以 $x+a>0$,$\sin x>0$,所以 $f'(x)>0$,

所以函数 $f(x)$在$(0,\pi)$上为增函数. ……………………………………………………………… 3 分

(2)令 $t(x)=x-\sin x$,所以 $t'(x)=1-\cos x$,则 $t'(x)\geqslant 0$,

所以 $t(x)$在 **R** 上单调递增,且 $t(0)=0$,

所以当 $x>0$ 时,$t(x)>0$,$x>\sin x$;当 $x<0$ 时,$t(x)<0$,$x<\sin x$. …………………… 5 分

由 $f(x)=g(x)$,得$\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}ax^2+(x+a)\cos x-\sin x=0$,

设 $h(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}ax^2+(x+a)\cos x-\sin x$,则 $h'(x)=(x-\sin x)(x+a)$.

令 $h'(x)=0$,由上述推理可得 $x=0$ 或 $x=-a$. ……………………………………………………… 6 分

①当 $a=0$ 时,$h'(x)=x(x-\sin x)$,

因为 $x(x-\sin x)\geqslant 0$,当且仅当 $h'(0)=0$,所以 $h(x)$在 **R** 上单调递增,

又因为 $h(0)=0$，所以 $h(x)$ 的零点有且仅有一个，为 0. …………………………… 8 分

②当 $a>0$ 时，列表如下：

x	$(-\infty,-a)$	$-a$	$(-a,0)$	0	$(0,+\infty)$
$x+a$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\sin x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

……………………………………………………………………………………………… 9 分

首先 $h(-a)>h(0)=a>0$，

下证：$h(-\frac{3}{2}a-3)<0$. 事实上，当 $x<-a$ 时，$x+a<0$，

因为 $\cos x\geqslant-1$，所以 $(x+a)\cos x\leqslant-(x+a)$，又 $\sin x>x$，所以 $-\sin x<-x$，

所以 $h(x)<\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2-(x+a)-x=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2-2x-a$

$$<\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2-2x=\frac{1}{3}x(x^2+\frac{3}{2}ax-6),$$

所以 $h(-\frac{3}{2}a-3)<-\frac{1}{3}(\frac{9}{2}a+3)(\frac{3}{2}a+3)<0$.

从而 $h(x)$ 在 $(-\frac{3}{2}a-3,-a)$ 上有且仅有一个零点.

综上所述，曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 有且仅有一个公共点. ……………………… 12 分