炎德·英才大联考雅礼中学2023届高三月考试卷(四)

数学参考答案

一、二、选择题

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答　案	C	D	C	A	D	C	C	D	ACD	CD	ABD	AD

1. C 【解析】集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{2,3\}$，则集合 $C=\{3,4,5\}$，集合元素个数为 3 个，故集合 $C=\{z\mid z=x+y,x\in A,y\in B\}$ 的真子集个数为 $2^3-1=7$. 故选：C.

2. D 【解析】$\because z(1+\mathrm{i})=2$，$\therefore z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=1-\mathrm{i}$，$\therefore$ 在复平面内复数 z 对应的点 $(1,-1)$ 位于第四象限. 故选：D.

3. C 【解析】由于 $N=4^5\cdot 9^{10}\Rightarrow \lg N=5\lg 4+10\lg 9=10\lg 2+20\lg 3\approx 12.552$，所以 N 所在的区间为 $(10^{12},10^{13})$. 故选：C.

4. A 【解析】设 $5a+b=x(a-b)+y(a+b)$，

可得 $\begin{cases}x+y=5,\\ y-x=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\ y=3,\end{cases}$

因为 $2\leqslant a-b\leqslant 4$，$4\leqslant a+b\leqslant 8$，所以 $4\leqslant 2(a-b)\leqslant 8$，$12\leqslant 3(a+b)\leqslant 24$，

所以 $16\leqslant 2(a-b)+3(a+b)\leqslant 32$，即 $5a+b\in[16,32]$，故选：A.

5. D 【解析】据图可知，$A=2$，因为 $\triangle QAB$ 的面积是 $\triangle PAB$ 面积的 2 倍，故 $P(0,1)$，

且 $\dfrac{T}{2}>\dfrac{5\pi}{3}$，可得 $0<\omega<\dfrac{3}{5}$，

所以 $f(0)=2\sin\varphi=1$，故 $\sin\varphi=\dfrac{1}{2}$，又 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，

结合 $f\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)=0$，即 $2\sin\left(\dfrac{5\pi}{3}\omega+\dfrac{\pi}{6}\right)=0$，故 $\dfrac{5\pi}{3}\omega+\dfrac{\pi}{6}=\pi+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

当 $k=0$ 时，$\omega=\dfrac{1}{2}$，符合题意，故 $f(x)=2\sin\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，

要求该函数的单调递增区间，只需 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

解得 $-\dfrac{4\pi}{3}+4k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{2\pi}{3}+4k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

故单调递增区间为 $\left[4k\pi-\dfrac{4\pi}{3},4k\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

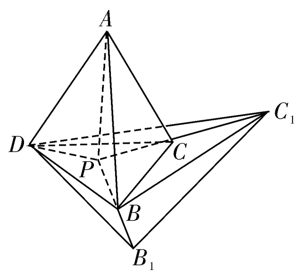
故选：D.

6. C 【解析】$\because(1+2x-x^2)^n$ 展开式中各项系数的和为 $2^n=64$，$\therefore n=6$，

$\therefore(1+2x-x^2)^6$ 展开式中含 x^3 项为 $C_6^3\cdot(2x)^3\cdot 1^3+C_6^1\cdot(2x)\cdot C_5^1\cdot(-x^2)\cdot 1^4=100x^3$，

$\therefore$ 该展开式中的 x^3 项的系数为 100. 故选：C.

7. C 【解析】三棱锥 $A-BCD$ 中，P 为 $\triangle BCD$ 内一点，如图所示：



延长 PB 至 B_1，使得 $PB_1=2PB$，延长 PC 至 C_1，使得 $PC_1=3PC$，

连接 DB_1，B_1C_1，C_1D，

因为 $S_{\triangle PBC}=1$，$S_{\triangle PCD}=2$，$S_{\triangle PBD}=3$，所以 $S_{\triangle PB_1C_1}=S_{\triangle PC_1D}=S_{\triangle PB_1D}$，

所以 P 为 $\triangle B_1C_1D$ 的重心，所以 $\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PB_1}+\overrightarrow{PC_1}=\mathbf{0}$，

即 $\overrightarrow{PD}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，所以 $(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP})+2(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+3(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\mathbf{0}$，

所以 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AD}$. 故选：C.

8. D 【解析】对于①，因为 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，所以 $c=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a$，

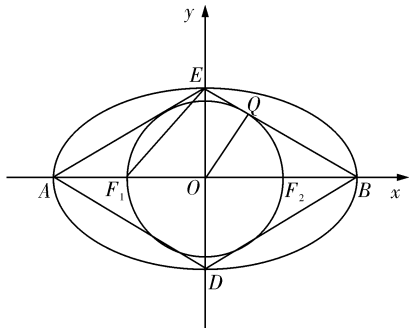
又 $b^2=a^2-c^2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a^2$，故 $b^2=ac$，故①正确；

对于②，如图，由题可知 $|EB|=\sqrt{a^2+b^2}$，$|F_1B|=c+a$，$|F_1E|=\sqrt{b^2+c^2}=a$，又因为 $|F_1B|^2=(a+c)^2=a^2+c^2+2ac=a^2+c^2+2b^2=2a^2+b^2$，$|EB|^2=a^2+b^2$，所以 $|F_1B|^2=|EB|^2+|F_1E|^2$，

所以 $\triangle F_1EB$ 为直角三角形，即 $\angle F_1EB=90°$，故②正确；

对于③，如图所示，设 EB 与内切圆相切于点 Q，连接 OQ，

由切线性质可知 $OQ\perp EB$，

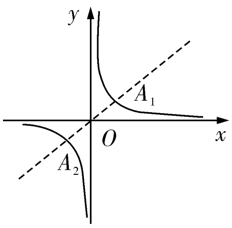


则 $|OQ|=\frac{|OE|\times|OB|}{|EB|}=\frac{b\times a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{a^3c}}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

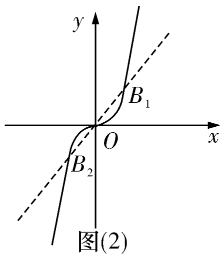
将 $c=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$，$b=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}a$ 代入上式，可得 $|OQ|=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a=c$，

即内切圆半径为 c，所以内切圆过两个焦点，故③正确．故选：D.

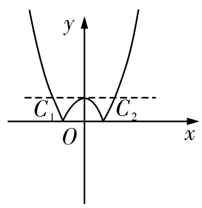
9. ACD 【解析】A 选择的两点关于原点对称即可，如图(1)中的 A_1，A_2；



图(1)



图(2)



图(3)

D 同 A，选择的两点关于原点对称即可，如图(2)中的 B_1，B_2；

C 如图(3)中的 C_1，C_2，$y=1$ 与 $f(x)$ 的交点，满足题意；

B 没有满足条件的点对，假设存在 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，使得 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，即 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2=\frac{x_1^2+x_2^2}{2}$，得 $x_1=x_2$，与 $x_1\neq x_2$ 矛盾，故 B 不满足题意，故选：ACD.

10. CD 【解析】对于 A 选项，记事件 A_i，B_i 分别表示第一次、第二次取到 i 号球，$i=1,2,3$，

则第一次抽到 3 号球的条件下，第二次抽到 1 号球的概率 $P(B_1|A_3)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，故 A 错误；

对于 B 选项，记事件 A_i，B_i 分别表示第一次、第二次取到 i 号球，$i=1,2,3$，

依题意 A_1，A_2，A_3 两两互斥，其和为 Ω，并且 $P(A_1)=\frac{2}{4}$，$P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{4}$，

所以 $P(B_1|A_1)=\frac{2}{4}$，$P(B_1|A_2)=\frac{2}{4}$，$P(B_1|A_3)=\frac{3}{6}$，

应用全概率公式，有 $P(B_1)=\sum\limits_{i=1}^{3}P(A_i)P(B_1|A_i)=\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}+\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，故 B 错误；

对于 C 选项，依题设知，第二次的球取自口袋的编号与第一次取的球上的号数相同，

则 $P(A_1|B_1)=\frac{P(A_1)\cdot P(B_1|A_1)}{P(B_1)}=\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}\times 2=\frac{1}{2}$；

$P(A_2|B_1)=\frac{P(A_2)\cdot P(B_1|A_2)}{P(B_1)}=\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}\times 2=\frac{1}{4}$；

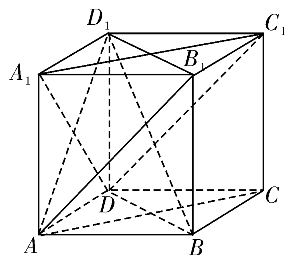
$P(A_3|B_1)=\frac{P(A_3)\cdot P(B_1|A_3)}{P(B_1)}=\frac{1}{4}\times\frac{3}{6}\times 2=\frac{1}{4}$.

故在第二次取到 1 号球的条件下，它取自编号为 1 的口袋的概率最大．故 C 正确；

对于 D 选项，先将 5 个不同的小球分成 1，1，3 或 2，2，1 三份，再放入三个不同的口袋，则不同的分配方法有 $\left(\frac{C_5^1C_4^1C_3^3}{A_2^2}+\frac{C_5^2C_3^2C_1^1}{A_2^2}\right)\cdot A_3^3=150$，故 D 正确．故选：CD.

11. ABD 【解析】对于 A，设正方体的棱长为 1，在正方体中 $\langle\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{AC}\rangle=60°$，

则 $|\overrightarrow{AB_1}\times\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB_1}||\overrightarrow{AC}|\sin\langle\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{AC}\rangle=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，



因为 $BD /\!/ B_1D_1$，且 $\angle AD_1B_1=60^\circ$，所以 $\langle \overrightarrow{AD_1},\overrightarrow{DB}\rangle=120^\circ$，

所以 $|\overrightarrow{AD_1}\times\overrightarrow{DB}|=|\overrightarrow{AD_1}||\overrightarrow{DB}|\sin\langle\overrightarrow{AD_1},\overrightarrow{DB}\rangle=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，

所以 $|\overrightarrow{AB_1}\times\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AD_1}\times\overrightarrow{DB}|$，故 A 正确；

对于 C，由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 构成右手系知，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 方向相反，

由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 模的定义知，$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}|$，

所以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$，则 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}$，故 C 错误；

对于 B，$A_1C_1\perp B_1D_1$，$A_1C_1\perp BB_1\Rightarrow A_1C_1\perp$ 平面 BB_1D_1D，

$BD_1\subset$ 平面 $BB_1D_1D\Rightarrow BD_1\perp A_1C_1$，由题易得 $BD_1\perp A_1D$，

由右手系知，$\overrightarrow{A_1C_1}\times\overrightarrow{A_1D}$ 与 $\overrightarrow{BD_1}$ 同向，故 B 正确；

对于 D，设正方体棱长为 a，$6|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{AC}|=6|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{AC}|\sin 45^\circ=6a\cdot\sqrt{2}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=6a^2$，

正方体表面积为 $6a^2$，故 D 正确. 故选：ABD.

12. AD 【解析】$\because f(x)=\sin x+\sin(1-x)$，$f(1-x)=\sin(1-x)+\sin x=f(x)$，

$\therefore f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称，故 A 正确；

令 $x=\pi$，求得 $f(x)=\sin\pi+\sin(1-\pi)=0-\sin 1=-\sin 1\neq 0$，故 B 错误；

由 $f(x)=\sin x+\sin(1-x)$，得 $f'(x)=\cos x-\cos(1-x)$，

$\because x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，$\therefore 1-x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，可得 $0\leqslant 1-x\leqslant x\leqslant 1<\frac{\pi}{2}$，

而函数 $y=\cos x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上为减函数，$\therefore f'(x)=\cos x-\cos(1-x)<0$，

可得 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上单调递减，故 C 错误；

$\because f(x)=\sin x+\sin(1-x)=2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{2x-1}{2}$，

又 $\frac{1}{2}<\frac{\pi}{6}$，$\therefore 2\sin\frac{1}{2}<2\sin\frac{\pi}{6}=1$，可得 $f(x)=2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{2x-1}{2}<1$，故 D 正确. 故选：AD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ 【解析】根据题意，原图为边长为 2 的正 $\triangle ABC$，其面积 $S=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，则其直观图 $\triangle A'B'C'$ 的面积 $S'=\frac{\sqrt{2}}{4}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

14. 90 【解析】$\because$ 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 3，以数据 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{11}$ 为样本，则此样本的平均数为 $\frac{1}{11}(a_1+a_2+\cdots+a_{11})=a_6$，$\therefore$ 此样本的方差为 $S^2=\frac{1}{11}[(a_1-a_6)^2+(a_2-a_6)^2+\cdots+(a_{11}-a_6)^2]=\frac{1}{11}(15^2+12^2+\cdots+0^2+\cdots+12^2+15^2)=90$.

15. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 【解析】设双曲线 $C_1:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，

由题意可得两曲线在第一象限的交点坐标为 $A(c,c)$，易知四边形为正方形，

则 $|AF_2|=c$，$|AF_1|=\sqrt{c^2+(2c)^2}=\sqrt{5}c$，故 $|AF_1|-|AF_2|=(\sqrt{5}-1)c=2a$，

故双曲线的离心率 $e=\frac{2c}{2a}=\frac{2c}{(\sqrt{5}-1)c}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

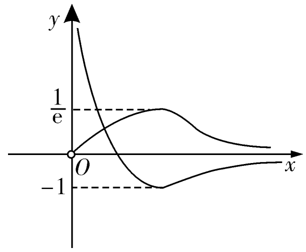
16. $(-\infty,0]\cup\left\{1+\frac{1}{\mathrm{e}}\right\}$ 【解析】方程 $x^2\mathrm{e}^{-x}=ax-\ln x-1$ 可转化为 $\frac{x}{\mathrm{e}^x}=a-\frac{\ln(\mathrm{e}x)}{x}$ 存在唯一实数根，

令 $f(x)=\frac{x}{\mathrm{e}^x}$，$x>0$，$g(x)=-\frac{\mathrm{e}\ln(\mathrm{e}x)}{\mathrm{e}^{\ln(\mathrm{e}x)}}$，$x>0$，

由 $f'(x)=\frac{1-x}{\mathrm{e}^x}$，当 $x\in(0,1)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极大值，极大值为 $f(1)=\frac{1}{e}$，



由 $g(x)=-ef(\ln(ex))$，所以，当 $x\in(0,1)$，$g(x)$ 单调递减，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)$ 单调递增，

当 $x=1$ 时，$g(x)$ 取得极小值，极小值为 $g(1)=-1$，

如图所示，而 $g(x)$ 图象可由 $y=a-\frac{\ln(ex)}{x}$ 图象平移可得，

显然，$a\leqslant 0$ 或 $a=1+\frac{1}{e}$，

所以 a 的取值范围为 $(-\infty,0]\cup\left\{1+\frac{1}{e}\right\}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.**【解析】**(1) 因为 $\sin(A+C)\cos B=\sqrt{3}\cos^2 B-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\sin B\cos B=\frac{\sqrt{3}(1+\cos 2B)}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

整理得 $\frac{1}{2}\sin 2B=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2B$，所以 $\tan 2B=\sqrt{3}$，

因为 B 为锐角，所以 $B=\frac{\pi}{6}$. …………………………………………………… 5 分

(2) 由 (1) 可知 $B=\frac{\pi}{6}$，根据余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$，

整理得 $1=a^2+c^2-\sqrt{3}ac\geqslant(2-\sqrt{3})ac$，即 $ac\leqslant\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

即 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$. …………………………………………………… 10 分

18.**【解析】**(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d\neq 0)$，$a_1=1$，

若 a_1,a_2,a_5 成等比数列，可得 $1\times(1+4d)=(1+d)^2$，

解得 $d=2$ 或 $d=0$（舍去），则 $a_n=1+2(n-1)=2n-1$. …………………………………… 6 分

(2) $b_n=\frac{1}{a_{n+1}^2-1}+3^{a_n}=\frac{1}{(2n+1)^2-1}+3^{2n-1}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+3^{2n-1}$，…………………………… 8 分

可得数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+(3^1+3^3+\cdots+3^{2n-1})$

$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{3(1-9^n)}{1-9}=\frac{n}{4n+4}+\frac{3}{8}(9^n-1)$. …………………………………… 12 分

19.**【解析】**(1) 证明：在等腰梯形 $ABCD$ 中，

$\because AB/\!/CD$，$DE\perp AB$，$AB=5$，$CD=3$，$\angle DAB=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore AE=1$，$AD=BC=2$，$DE=\sqrt{3}$，$CE=\sqrt{3+9}=2\sqrt{3}$，$BE=4$，

$\therefore CE^2+BC^2=BE^2$，$\therefore BC\perp EC$，

$\because$ 沿 DE 将等腰梯形折成直二面角，$\therefore AE\perp$ 平面 $BCDE$，

$\because BC\subset$ 平面 $BCDE$，$\therefore BC\perp AE$，

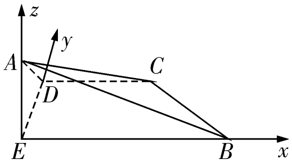
$\because AE\cap CE=E$，$\therefore BC\perp$ 平面 ACE. …………………………………………………… 6 分

(2) 解：以 E 为原点，EB 为 x 轴，ED 为 y 轴，EA 为 z 轴，建立空间直角坐标系，

由已知得 $A(0,0,1)$，$B(4,0,0)$，$C(3,\sqrt{3},0)$，

$\overrightarrow{AB}=(4,0,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(3,\sqrt{3},-1)$，

设平面 ABC 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，



则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=4x-z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=3x+\sqrt{3}y-z=0,\end{cases}$

取 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=\left(1,\frac{\sqrt{3}}{3},4\right)$， ………………………………………………………… 8 分

又平面 ADE 的法向量 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$， ………………………………………………………… 10 分

设平面 ADE 与平面 ABC 所成二面角的平面角为 θ，

$$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{3}+16}}=\frac{\sqrt{39}}{26}.$$

∴平面 ADE 与平面 ABC 所成二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{39}}{26}$. ………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)由样本频率分布直方图得，样本中获一等奖的有 6 人，获二等奖的有 8 人，获三等奖的有 16 人，共有 30 人获奖，70 人没有获奖，从该样本中随机抽取两名学生的竞赛成绩，基本事件总数为 C_{100}^{2}，

设"抽取的两名学生中恰有一名学生获奖"为事件 A，则事件 A 包含的基本事件的个数为 $C_{70}^{1}C_{30}^{1}$，

因为每个基本事件出现的可能性都相等，所以 $P(A)=\frac{C_{70}^{1}C_{30}^{1}}{C_{100}^{2}}=\frac{14}{33}$， ………………………………………… 4 分

即抽取的两名学生中恰有一名学生获奖的概率为 $\frac{14}{33}$.

(2)由样本频率分布直方图得样本平均数的估计值 $\mu=35\times0.006\times10+45\times0.012\times10+55\times0.018\times10+65\times0.034\times10+75\times0.016\times10+85\times0.008\times10+95\times0.006\times10=64$，

则所有参赛学生的成绩 X 近似服从正态分布 $N(64,15^2)$， ………………………………………………… 6 分

(i)因为 $\mu+\sigma=79$，所以 $P(X>79)\approx\frac{1-0.6827}{2}=0.15865$，………………………………………… 8 分

故参赛学生中成绩超过 79 分的学生数为 $0.15865\times10000\approx1587$.

(ii)由 $\mu=64$，得 $P(X>64)=\frac{1}{2}$，即从所有参赛学生中随机抽取 1 名学生，该生竞赛成绩在 64 分以上的概率为 $\frac{1}{2}$，所以随机变量 ξ 服从二项分布 $\xi\sim B\left(3,\frac{1}{2}\right)$，

所以 $P(\xi=0)=C_3^0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，$P(\xi=1)=C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$，$P(\xi=2)=C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$，$P(\xi=3)=C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，

所以随机变量 ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

………………………………………………………… 10 分

均值 $E(\xi)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$. ………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$. 依题意，知直线 AB 的方程为 $y=x\tan45^\circ+1$，即 $y=x+1$，

将它代入抛物线 H 的方程中，并整理得 $x^2-2px-2p=0$.

由韦达定理得 $x_1+x_2=2p$，$x_1x_2=-2p$，其 $\Delta=4p^2+8p>0$ 对 $p>0$ 恒成立，

由弦长公式得 $|AB|=\sqrt{2[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=8\sqrt{3}$，

化简得 $p^2+2p-24=0$ 且 $p>0$，解得 $p=4$.

故抛物线 H 的方程为 $x^2=8y$. ………………………………………………………… 4 分

(2)设 $C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，

联立 $\begin{cases}x^2=8y,\\ y=\frac{1}{2}x+n,\end{cases}$ 得 $x^2-4x-8n=0$，

$\because \Delta=(-4)^2-4\times(-8n)=16+32n>0$，$\therefore n>-\dfrac{1}{2}$ 且 $n\neq 0$，

故 $x_3+x_4=4$，$x_3x_4=-8n$， ………………………………………………………………………… 6 分

由(1)得 $F(0,2)$，依题意知$\angle CFD=90°$，即$\overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{FD}=0$，

$\overrightarrow{FC}=(x_3,y_3-2)$，$\overrightarrow{FD}=(x_4,y_4-2)$，

即 $x_3x_4+(y_3-2)(y_4-2)=0$，① ……………………………………………………………………… 8 分

又 C,D 在直线 l 上，$\therefore y_3=\dfrac{1}{2}x_3+n$，$y_4=\dfrac{1}{2}x_4+n$，

代入①式得 $x_3x_4+\left(\dfrac{1}{2}x_3+n-2\right)\left(\dfrac{1}{2}x_4+n-2\right)=0$，

整理得$\dfrac{5}{4}x_3x_4+\dfrac{1}{2}(n-2)(x_3+x_4)+(n-2)^2=0$，

又 $x_3+x_4=4$，$x_3x_4=-8n$，代入得 $n^2-12n=0$，又 $n\neq 0$，解得 $n=12$， ………………………… 10 分

设圆心 $G(x_0,y_0)$，则 $x_0=\dfrac{x_3+x_4}{2}=\dfrac{4}{2}=2$，$y_0=\dfrac{1}{2}x_0+n=1+n=13$，

$\therefore$圆心 $G(2,13)$，$r=|GF|=\sqrt{(2-0)^2+(13-2)^2}=5\sqrt{5}$，

$\therefore$圆 G 的面积为 $\pi r^2=\pi(5\sqrt{5})^2=125\pi$. ……………………………………………………… 12 分

22.【解析】(1)$g(x)=b(x-\sqrt{x})=b\left[\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\right](b>0)$，

二次函数 $r(\sqrt{x})=g(x)$的图象开口向上，且$\sqrt{x}\geqslant 0$，

$\therefore g(x)_{\min}=g\left(\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{1}{4}b$， …………………………………………………………………… 1 分

函数 $f(x)$定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=a\ln x+a$，由 $f'(x)=0$ 得 $x=\mathrm{e}^{-1}$，

①则当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$ 得 $x>\mathrm{e}^{-1}$，由 $f'(x)<0$ 得 $0<x<\mathrm{e}^{-1}$，

$\therefore f(x)$在$(0,\mathrm{e}^{-1})$上单调递减，在$(\mathrm{e}^{-1},+\infty)$上单调递增，

$\therefore$当 $x=\mathrm{e}^{-1}$时，$f(x)$取得极小值也是最小值，$f(x)_{\min}=f(\mathrm{e}^{-1})=-a\mathrm{e}^{-1}$， ………………… 2 分

$\because$函数 $f(x)=ax\ln x$ 和 $g(x)=b(x-\sqrt{x})(b>0)$有相同的最小值，

$\therefore -\dfrac{1}{4}b=-a\mathrm{e}^{-1}$，解得 $a=\dfrac{\mathrm{e}b}{4}(b>0)$，

$\therefore a+\dfrac{1}{b}=\dfrac{\mathrm{e}b}{4}+\dfrac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}b}{4}\cdot\dfrac{1}{b}}=\sqrt{\mathrm{e}}$，当且仅当$\dfrac{\mathrm{e}b}{4}=\dfrac{1}{b}$，即 $b=\dfrac{2\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}}$时，等号成立； …………………… 4 分

②当 $a=0$ 时，$f(x)=0$，此时不符合题意；

③当 $a<0$ 时，由 $f'(x)<0$ 得 $x>\mathrm{e}^{-1}$，由 $f'(x)>0$ 得 $0<x<\mathrm{e}^{-1}$，

$\therefore f(x)$在$(0,\mathrm{e}^{-1})$上单调递增，在$(\mathrm{e}^{-1},+\infty)$上单调递减，此时 $f(x)$无最小值，不符合题意，

综上所述，$a+\dfrac{1}{b}$的最小值为$\sqrt{\mathrm{e}}$. ……………………………………………………………………… 5 分

(2)证明：由(1)知 $a=\dfrac{\mathrm{e}b}{4}$，则 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}b}{4}x\ln x$，

$\therefore h(x)=\dfrac{\mathrm{e}b}{4}x\ln x+b(x-\sqrt{x})(x>0)$，$h'(x)=\dfrac{\mathrm{e}b}{4}(\ln x+1)+b\left(1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$，

令 $H(x)=\dfrac{\mathrm{e}b}{4}(\ln x+1)+b\left(1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x>0)$，则 $H'(x)=\dfrac{\mathrm{e}b}{4}\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{b}{4}x^{-\frac{3}{2}}>0$ 恒成立，

$\therefore H(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，即 $h'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

又 $h'(\mathrm{e}^{-2})=\dfrac{\mathrm{e}b}{4}(\ln\mathrm{e}^{-2}+1)+b\left(1-\dfrac{\mathrm{e}}{2}\right)=b\left(1-\dfrac{3\mathrm{e}}{4}\right)<0$，$h'(1)=\dfrac{\mathrm{e}b}{4}+\dfrac{b}{2}>0$，

由零点存在性定理得存在 $x_0\in(\mathrm{e}^{-2},1)$，使得 $h'(x_0)=0$，

$\therefore h(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$上单调递增，

又 $h(1)=0$，当 $x\to 0$ 时，$h(x)\to 0$，则当 $x\in(0,1)$时，$h(x)<0$，

方程 $h(x)=m$ 有两个不相等的实根 x_1,x_2，不妨设 $x_1<x_2$，

则 $0<x_1<x_2<1$,则 $x_1+x_2<2$, …………………………………………………………………………… 9 分

下面只需证 $x_1+x_2>\frac{1}{2}$,

由题意得 $h(x_1)=h(x_2)=m$,则 $\frac{eb}{4}x_1\ln x_1+b(x_1-\sqrt{x_1})=\frac{eb}{4}x_2\ln x_2+b(x_2-\sqrt{x_2})=m$,

即 $(x_1-\sqrt{x_1})\left(\frac{e}{4}\cdot\frac{\sqrt{x_1}\ln x_1}{\sqrt{x_1}-1}+1\right)=(x_2-\sqrt{x_2})\left(\frac{e}{4}\cdot\frac{\sqrt{x_2}\ln x_2}{\sqrt{x_2}-1}+1\right)=\frac{m}{b}$,

令 $m(x)=\frac{\sqrt{x}\ln x}{\sqrt{x}-1}$,$x\in(0,1)$,令 $t=\sqrt{x}$,则 $t\in(0,1)$,

则 $m(t)=\frac{2t\ln t}{t-1}$,则 $m'(t)=\frac{2(\ln t+1)(t-1)-2t\ln t}{(t-1)^2}=\frac{2(t-1-\ln t)}{(t-1)^2}$,

令 $n(t)=t-1-\ln t(0<t<1)$,则 $n'(t)=1-\frac{1}{t}<0$ 成立,

$\therefore n(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,$n(t)>n(1)=0$,

$\therefore m'(t)>0$ 成立,即 $m(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,也即 $m(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,

$\therefore m(x_2)>m(x_1)>0$,又 $x_2-\sqrt{x_2}<0$,

$\therefore (x_1-\sqrt{x_1})\left(\frac{e}{4}\cdot\frac{\sqrt{x_1}\ln x_1}{\sqrt{x_1}-1}+1\right)=(x_2-\sqrt{x_2})\left(\frac{e}{4}\cdot\frac{\sqrt{x_2}\ln x_2}{\sqrt{x_2}-1}+1\right)<(x_2-\sqrt{x_2})\left(\frac{e}{4}\cdot\frac{\sqrt{x_1}\ln x_1}{\sqrt{x_1}-1}+1\right)$,

$\therefore x_1-\sqrt{x_1}<x_2-\sqrt{x_2}$,即 $x_1-x_2<\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}$,即 $(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})>\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}$,

$\therefore \sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}>1$,$\therefore x_1+x_2>2\left(\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}{2}\right)^2>\frac{1}{2}$,

综上所述,$\frac{1}{2}<x_1+x_2<2$. …………………………………………………………………………… 12 分