炎德·英才大联考湖南师大附中2023届高三月考试卷(三)

数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	C	D	D	B	A	B	B	BD	AC	BC	ACD

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.C 【解析】$\because a^2+1\geqslant 2a$,

$\therefore a=1$时,$B=\varnothing$,满足$A\cap B=\varnothing$;

$a\neq 1$时,$B=\{x\mid 2a<x<a^2+1\}$,$\because A\cap B=\varnothing$,得$\begin{cases}2a\geqslant 4\\ a\neq 1\end{cases}$,解得$a\geqslant 2$.

综上,实数a的取值范围为$\{a\mid a=1$或$a\geqslant 2\}$,

故选:C.

2.C 【解析】$P-Q=\left(a^2+b^2+\dfrac{1}{c^2}+c^2\right)-(2a+2b)=(a-1)^2+(b-1)^2+\left(c-\dfrac{1}{c}\right)^2\geqslant 0$,

故$P-Q\geqslant 0$,所以$P\geqslant Q$.

故选:C.

3.D 【解析】$\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{2\tan\alpha-1+\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{2\times 1-1+1^2}{1^2+1}=1$.

故选:D.

4.D 【解析】各项为正的数列$\{a_n\}$,$a_n>0$,

$\because S_n=\dfrac{1}{4}(a_n+1)^2$,

$\therefore n\geqslant 2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{1}{4}(a_n+1)^2-\dfrac{1}{4}(a_{n-1}+1)^2$,

化为:$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$,

$\because a_n+a_{n-1}>0$,$\therefore a_n-a_{n-1}=2$,

又$a_1=\dfrac{1}{4}(a_1+1)^2$,解得$a_1=1$.

$\therefore$数列$\{a_n\}$是等差数列,首项为1,公差为2.

$\therefore a_n=1+2(n-1)=2n-1$,

$\therefore S_n=\dfrac{1}{4}(2n-1+1)^2=n^2$,

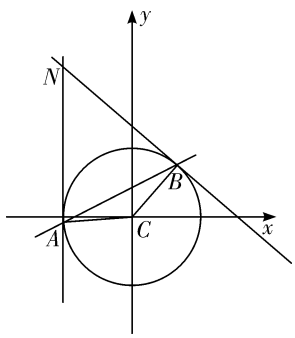
$\therefore \dfrac{2S_n+6}{a_n+3}=\dfrac{2n^2+6}{2n-1+3}=\dfrac{n^2+3}{n+1}=n+1+\dfrac{4}{n+1}-2\geqslant 2\sqrt{(n+1)\cdot\dfrac{4}{n+1}}-2=2$,

当且仅当$n=1$时取等号,

$\therefore \dfrac{2S_n+6}{a_n+3}$的最小值为2.

故选:D.

5.B 【解析】易得圆心$C(0,0)$,半径为4,如图,连接CA,CB,则$CA\perp NA$,$CB\perp NB$,则N,A,C,B四点在以NC为直径的圆上,



设$N(x_0,y_0)$,则该圆的圆心为$\left(\dfrac{x_0}{2},\dfrac{y_0}{2}\right)$,半径为$\dfrac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{2}$,圆的方程为$\left(x-\dfrac{x_0}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{y_0}{2}\right)^2=\dfrac{x_0^2+y_0^2}{4}$,又该圆和圆$C$的交点弦即为$AB$,

故AB:$x^2+y^2-\left(x-\dfrac{x_0}{2}\right)^2-\left(y-\dfrac{y_0}{2}\right)^2=16-\dfrac{x_0^2+y_0^2}{4}$,整理得$x_0x+y_0y=16$,又点$(1,\sqrt{3})$在直线$AB$上,

故$x_0+\sqrt{3}y_0=16$,即N点轨迹为$x+\sqrt{3}y-16=0$,又M在圆$x^2+y^2=1$上,故$|MN|$的最小值为圆心$(0,0)$到直线$x+\sqrt{3}y-16=0$的距离减去半径1,即$\dfrac{16}{\sqrt{3+1}}-1=7$.

故选:B.

6. A 【解析】∵平面 α 的方程为 $3x-5y+z-7=0$，∴平面 α 的法向量可取 $\boldsymbol{m}=(3,-5,1)$，

平面 $x-3y+7=0$ 的法向量为 $\boldsymbol{a}=(1,-3,0)$，平面 $4y+2z+1=0$ 的法向量为 $\boldsymbol{b}=(0,4,2)$，

设两平面的交线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}=x-3y=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}=4y+2z=0\end{cases}$，令 $x=3$，则 $y=1$，$z=-2$，所以 $\boldsymbol{n}=(3,1,-2)$，

设直线 l 与平面 α 所成角的大小为 θ，$\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{14}\times\sqrt{35}}=\dfrac{\sqrt{10}}{35}$.

故选：A.

7. B 【解析】令 $g(x)=e^x-(x+1)$，则 $g'(x)=e^x-1$，

当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，当 $x<0$ 时，$g'(x)<0$，

所以当 $x=0$ 时，$g(x)$ 取得最小值，即 $g(x)\geqslant g(0)=0$，

所以 $e^x\geqslant x+1$，

所以 $a=e^{-0.1}-1>-0.1+1-1=-0.1$；

因为 $\tan x>x$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $b=-\tan 0.1<-0.1$.

令 $\varphi(x)=x-1-\ln x(x>0)$，则 $\varphi'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，

当 $0<x<1$ 时，$\varphi'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)>0$，

所以当 $x=1$ 时，$\varphi(x)$ 取得最小值，所以 $\varphi(x)\geqslant\varphi(1)=0$，

所以 $\ln x\leqslant x-1$，所以 $c=\ln 0.9<0.9-1=-0.1$.

设 $f(x)=\ln(x+1)-\tan x$，$x\in(-1,0)$，

$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos^2 x-(x+1)}{(x+1)\cos^2 x}$.

设 $h(x)=\cos^2 x-(x+1)$，$h'(x)=-2\cos x\sin x-1=-\sin 2x-1$，

在 $(-1,0)$ 上，$h'(x)<0$，$h(x)$ 递减，所以 $h(x)>h(0)=0$，

所以 $f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，

所以 $f(-0.1)<f(0)$，即 $\ln 0.9-\tan(-0.1)<0$，

所以 $c<b$，

综上：$a>b>c$，

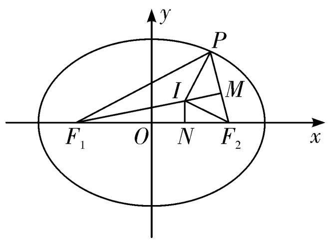
故选：B.

8. B 【解析】设 M 是 PF_2 的中点，连接 IM，如图，则 $\overrightarrow{IP}+\overrightarrow{IF_2}=2\overrightarrow{IM}$，由 $3\overrightarrow{IF_1}+2\overrightarrow{IF_2}=2\overrightarrow{PI}$，

得 $3\overrightarrow{IF_1}+2\overrightarrow{IF_2}+2\overrightarrow{IP}=3\overrightarrow{IF_1}+4\overrightarrow{IM}=\boldsymbol{0}$，∴$F_1$，$I$，$M$ 三点共线，$3\overrightarrow{IF_1}=4\overrightarrow{MI}$，∴$\dfrac{|F_1I|}{|IM|}=\dfrac{4}{3}$.

由 F_1M 既是 $\angle PF_1F_2$ 的平分线，又是 PF_2 边上的中线，得 $F_1M\perp PF_2$，$|PF_1|=|F_1F_2|=2c$，

∴$|PF_2|=2a-2c$，$|MF_2|=a-c$. 作 $IN\perp x$ 轴于点 N，$\mathrm{Rt}\triangle F_1IN\backsim\mathrm{Rt}\triangle F_1F_2M$，且 $|IN|=|IM|$，∴$\dfrac{|F_1I|}{|IN|}=\dfrac{|F_1I|}{|IM|}=\dfrac{|F_1F_2|}{|MF_2|}=\dfrac{4}{3}=\dfrac{2c}{a-c}$，∴$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{5}$，



故选：B.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

9. BD 【解析】对 A，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 不一定是钝角，可能是平角，A 错；

对 B，若 A、B、C 不共线，由 $\dfrac{1}{7}+\dfrac{2}{7}+\dfrac{4}{7}=1$，得 P，A，B，C 共面.

若 A、B、C 共线，由 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{7}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{7}\overrightarrow{OB}+\dfrac{4}{7}\overrightarrow{OC}$ 得 A、B、C、P 共线，即共面，B 对；

对 C，若截距均为 0，则直线方程为 $y=2x$，C 错；

对 D，$k=\tan\theta=-\sin\alpha\in[-1,1]$，又 $\theta\in[0,\pi)$，故 $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$，D 对；故选：BD.

10. AC 【解析】由已知，$f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)-\cos(\omega x+\varphi)=2\sin\left(\omega x+\varphi-\dfrac{\pi}{6}\right)$，

因为函数 $f(x)$ 为奇函数，所以 $\varphi-\dfrac{\pi}{6}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，可得 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

又因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，

又因为函数 $f(x)$ 的周期为 π，所以 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得 $\omega=2$，

所以 $f(x)=2\sin 2x$.

将函数 $f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得 $y=g(x)=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，故选项 A 正确；

当 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 时，$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$，此时函数 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 不单调，故选项 B 错误；

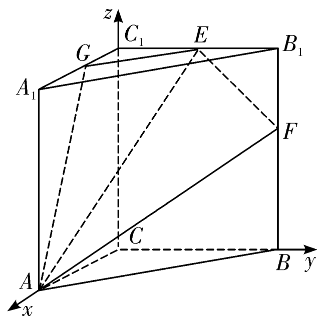
当 $x=-\frac{\pi}{12}$ 时，$g\left(-\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left[2\times\left(-\frac{\pi}{12}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-2$，所以 $x=-\frac{\pi}{12}$ 是函数 $g(x)$ 的一条对称轴，故选项 C 正确；

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，所以 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，

所以 $2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in[-\sqrt{3},2]$，故选项 D 错误.

故选：AC.

11. BC 【解析】因为 $CC_1\perp$ 平面 ABC，$AC\perp BC$，以点 C 为坐标原点，CA、CB、CC_1 所在直线分别为 x、y、z 轴建立如下图所示的空间直角坐标系，



则 $A(2,0,0)$、$B(0,2,0)$、$C(0,0,0)$、$A_1(2,0,2)$、$B_1(0,2,2)$、$C_1(0,0,2)$、$E(0,1,2)$、设点 $F(0,2,a)$、$G(b,0,2)$，其中 $0\leqslant a\leqslant 2$，$0\leqslant b\leqslant 2$.

对于 A 选项，若存在点 F，使得 $A_1F\perp AE$，且 $\overrightarrow{A_1F}=(-2,2,a-2)$，$\overrightarrow{AE}=(-2,1,2)$，

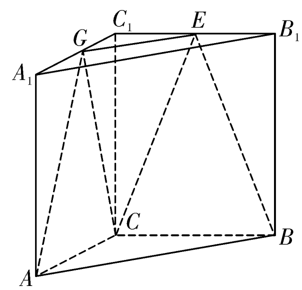
$\overrightarrow{A_1F}\cdot\overrightarrow{AE}=4+2+2(a-2)=0$，解得 $a=-1$，不合乎题意，A 错；

对于 B 选项，设 $\overrightarrow{AG}=m\overrightarrow{AE}+n\overrightarrow{AF}$，其中 m、$n\in\mathbf{R}$，

即 $(b-2,0,2)=m(-2,1,2)+n(-2,2,a)$，即 $\begin{cases}-2m-2n=b-2\\ m+2n=0\\ 2m+an=2\end{cases}$，可得 $b=\frac{4}{a-4}+2$，

$\because 0\leqslant a\leqslant 2$，则 $-4\leqslant a-4\leqslant -2$，所以，$b=\frac{4}{a-4}+2\in[0,1]$，B 对；

对于 C 选项，当点 F 与点 B 重合时，$a=0$，则 $b=1$，此时点 G 为 A_1C_1 的中点，如下图所示：



在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，四边形 AA_1B_1B 为矩形，则 $AB/\!/A_1B_1$ 且 $A_1B_1=AB$，

$\because E$、G 分别为 B_1C_1、A_1C_1 的中点，则 $EG/\!/A_1B_1$ 且 $EG=\frac{1}{2}A_1B_1$，

所以，$EG/\!/AB$ 且 $EG=\frac{1}{2}AB$，同理 $C_1G/\!/AC$ 且 $C_1G=\frac{1}{2}AC$，$C_1E/\!/BC$ 且 $C_1E=\frac{1}{2}BC$，

所以，$\frac{EG}{AB}=\frac{C_1E}{BC}=\frac{C_1G}{AC}=\frac{1}{2}$，故几何体 $ABC-GEC_1$ 为三棱台，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=2$，$S_{\triangle C_1EG}=\frac{1}{2}C_1E\cdot C_1G=\frac{1}{2}$，

$V_{ABC-GEC_1}=\frac{1}{3}\left(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle GEC_1}+\sqrt{S_{\triangle ABC}S_{\triangle GEC_1}}\right)\cdot CC_1=\frac{1}{3}\times\frac{7}{2}\times 2=\frac{7}{3}$，

$V_{C-GEC_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle GEC_1}\cdot CC_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{3}$，

因此，$V_{C-AFEG}=V_{ABC-GEC_1}-V_{C-GEC_1}=2$，C 对；

对于 D 选项，$\overrightarrow{AE}=(-2,1,2)$，$\overrightarrow{AF}=(-2,2,a)$，

则点 F 到直线 AE 的距离为 $d_1=\sqrt{|\overrightarrow{AF}|^2-\left(\frac{|\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{AE}|}\right)^2}=\frac{\sqrt{5a^2-24a+36}}{3}$，

$\overrightarrow{AG}=(b-2,0,2)$，则点 G 到直线 AE 的距离为 $d_2=\sqrt{|\overrightarrow{AG}|^2-\left(\frac{|\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{AE}|}\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{5b^2-4b+8}}{3}=\frac{2\sqrt{5a^2-24a+36}}{3(4-a)}$，

所以，$\frac{S_2}{S_3}=\frac{d_2}{d_1}=\frac{2}{4-a}$，故 $\frac{S_1^2}{S_2S_3}=\frac{(S_2+S_3)^2}{S_2S_3}=\frac{S_2}{S_3}+\frac{S_3}{S_2}+2=\frac{2}{4-a}+\frac{4-a}{2}+2\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{4-a}\cdot\frac{4-a}{2}}+2=4$，

当且仅当 $a=2$ 时，等号成立，故 $\frac{S_1^2}{S_2S_3}$ 的最小值为 4，D 错.

故选：BC.

12. ACD 【解析】A 选项，$a_{n+1}-a_n=2a_n-a_n^2-1=-(a_n-1)^2$，

令 $a_{n+1}<a_n$，解得：$a_n\neq 1$，

令 $a_{n+1}=3a_n-a_n^2-1\neq 1$，解得：$a_n\neq 2$，

综上：$a_n\neq 1$ 且 $a_n\neq 2$，

所以 $a\neq 1$ 且 $a\neq 2$，数列$\{a_n\}$单调递减，A 正确；

B 选项，当 $a=2$ 时，$a_2=3a_1-a_1^2-1=6-4-1=1$，

当 $n\geqslant 3$ 时，$a_n=3-1-1=1$，

所以存在无数个自然数 n，使得 $a_{n+1}=a_n$，

故 B 错误；

C 选项，当 $a>2$ 或 $a<1$ 时，$a_{n+1}-a_n=2a_n-a_n^2-1=-(a_n-1)^2<0$，

所以数列$\{a_n\}$单调递减，所以最小值不存在，C 正确；

D 选项，$a_{n+1}-1=3a_n-a_n^2-2=-(a_n-1)(a_n-2)$，

所以$\dfrac{1}{a_{n+1}-1}=-\dfrac{1}{(a_n-1)(a_n-2)}=\dfrac{1}{a_n-1}-\dfrac{1}{a_n-2}$，

所以$\dfrac{1}{a_n-2}=\dfrac{1}{a_n-1}-\dfrac{1}{a_{n+1}-1}$，

故$\dfrac{1}{a_1-2}+\dfrac{1}{a_2-2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n-2}=\dfrac{1}{a_1-1}-\dfrac{1}{a_2-1}+\dfrac{1}{a_2-1}-\dfrac{1}{a_3-1}+\cdots+\dfrac{1}{a_n-1}-\dfrac{1}{a_{n+1}-1}$

$=\dfrac{1}{a_1-1}-\dfrac{1}{a_{n+1}-1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{a_{n+1}-1}$，

因为 $a_1=a=3$，$a_2=3a_1-a_1^2-1=-1<0$，$\{a_n\}$单调递减，

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$a_{n+1}<a_2<0$，$-\dfrac{1}{a_{n+1}-1}>0$，

所以$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{a_{n+1}-1}>\dfrac{1}{2}$，

又因为$-\dfrac{1}{a_{n+1}-1}$单调递减，所以当 $n=1$ 时，$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{a_{n+1}-1}$取得最大值，

最大值为$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{a_2-1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$，

综上：$\dfrac{1}{a_1-2}+\dfrac{1}{a_2-2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n-2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{a_{n+1}-1}\in\left(\dfrac{1}{2},1\right]$，D 正确.

故选：ACD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 充分不必要 【解析】由题意知，

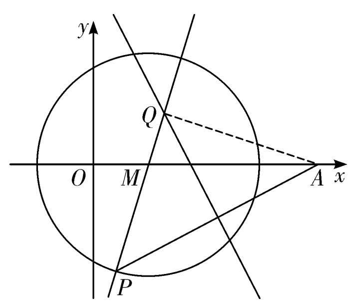
$\neg p$：$\forall x\in\mathbf{R}$，$ax^2+2x+1\geqslant 0$，

即 $a>0$ 且 $\Delta=4-4a\leqslant 0$，解得 $a\geqslant 1$，

所以 $q\Rightarrow\neg p$，即 q 是 $\neg p$ 的充分不必要条件.

故答案为：充分不必要.

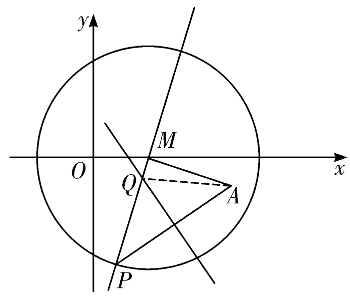
14. 4 【解析】当点 A 在圆 M 外时，连接 QA，因点 Q 在线段 PA 的中垂线上，如图，



则 $|QA|=|QP|$，有 $||QA|-|QM||=||QP|-|QM||=|PM|=4<|MA|$，

因此点 Q 的轨迹是以点 M，A 为两焦点，实轴长为 4 的双曲线；

当点 A 在圆 M 内(除圆心 M 外)时，连接 QA，因点 Q 在线段 PA 的中垂线上，如图，



则 $|QA|=|QP|$，有 $|QA|+|QM|=|QP|+|QM|=|PM|=4>|MA|$，

因此点 Q 的轨迹是以点 M，A 为两焦点，长轴长为 4 的椭圆；

当点 A 与圆心 M 重合时，有 PM 与 PA 重合，则线段 PA 的中垂线与 PM 交点 Q 是线段 PM 中点，即 $|QM|=2$，

因此点 Q 的轨迹是以点 M 为圆心，2 为半径的圆；

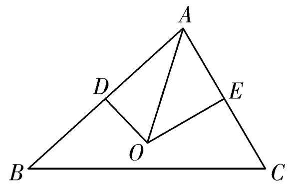
当点 A 在圆 M 上时，圆 M 上点 P 与 A 不重合，弦 PA 的中垂线过圆心 M，即线段 PA 的中垂线与 PM 交点 Q 是点 M，

因此点 Q 的轨迹是点 M，

所以所有可能的结果有 4 个.

故答案为：4

15. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　**【解析】**如图，



分别取 AB,AC 的中点 D,E，连接 OD,OE，

则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}c^2$；$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{AC}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}b^2$，

因为 $\frac{\cos B}{\sin C}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{\cos C}{\sin B}\cdot\overrightarrow{AC}=2\lambda\overrightarrow{OA}$，

设△ABC 的外接圆半径为 R，由正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，

所以两边同时点乘 $\overrightarrow{OA}$ 可得 $\frac{\cos B}{\sin C}\cdot(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OA})+\frac{\cos C}{\sin B}\cdot(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{OA})=2\lambda\overrightarrow{OA}^2$，

即 $\frac{\cos B}{\sin C}\cdot\left(-\frac{1}{2}c^2\right)+\frac{\cos C}{\sin B}\cdot\left(-\frac{1}{2}b^2\right)=2\lambda R^2$，

所以 $-\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{\sin C}\cdot c\cos B-\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{\sin B}\cdot b\cos C=2\lambda R^2$，

所以 $-\frac{1}{2}\cdot 2R\cdot c\cos B-\frac{1}{2}\cdot 2R\cdot b\cos C=2\lambda R^2$，

所以 $-(c\cos B+b\cos C)=2\lambda R$，

所以 $-\left(c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)=2\lambda R$，即 $-a=2\lambda R$，

所以 $\lambda=-\frac{a}{2R}=-\sin A=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故答案为：$-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

16. -1　**【解析】**若 $m\leqslant 0$，则 $f'(x)>0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，且当 $x\to-\infty$ 时 $f(x)\to-\infty$，不符合题意，

所以 $m>0$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\ln m$，当 $x<\ln m$ 时 $f'(x)<0$，当 $x>\ln m$ 时 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln m)$ 上单调递减，在 $(\ln m,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(\ln m)=m-m\ln m+n-1\geqslant 0$，

所以 $n\geqslant m\ln m-m+1$，则 $n-m\geqslant m\ln m-2m+1$，

则 $\frac{n-m}{m}\geqslant\ln m-2+\frac{1}{m}$.

令 $g(x)=\ln x-2+\frac{1}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，

则 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，所以当 $x>1$ 时 $g'(x)>0$，当 $0<x<1$ 时 $g'(x)<0$，

即 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)_{\min}=g(1)=-1$，

所以 $\frac{n-m}{m}\geqslant-1$，即 $\frac{n-m}{m}$ 的最小值为 -1.

故答案为：-1.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. **【解析】**(1)因为 $\{a_n\}$ 是公比为正数的等比数列，所以公比 $q>0$，

因为 $a_1=2$，$a_3=a_2+4$，所以 $2q^2=2q+4$，解得：$q=2$ 或 -1，

因为 $q>0$，所以 $q=2$，所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=a_1q^{n-1}=2^n$；…………………………………… 5 分

(2)由题意得：$b_n=1+2(n-1)=2n-1$，

所以数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}+\frac{n(1+2n-1)}{2}=2^{n+1}-2+n^2$. ………………………… 10 分

18. **【解析】**(1)(ⅰ)在三角形 ABD 中，由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{DB}{\sin\angle BAD}$，即 $\frac{AB}{DB}=\frac{\sin\angle ADB}{\sin\angle BAD}$；

在三角形 ACD 中，由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{DC}{\sin\angle CAD}$，即 $\frac{AC}{DC}=\frac{\sin\angle ADC}{\sin\angle CAD}$.

因为 $\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}$，所以 $\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{DC}$，所以 $\frac{\sin\angle ADB}{\sin\angle BAD}=\frac{\sin\angle ADC}{\sin\angle CAD}$.

因为 $\angle ADB$ 与 $\angle ADC$ 互补，所以 $\sin\angle ADB=\sin\angle ADC$，

所以 $\sin\angle CAD=\sin\angle BAD$.

因为 A 为三角形内角，所以 $\angle CAD+\angle BAD\neq\pi$，所以 $\angle CAD=\angle BAD$，

所以 AD 平分 $\angle BAC$；…………………………………………………………………… 3 分

(ⅱ)因为$\angle CAD=\angle BAD$,所以,

由余弦定理得$\frac{AB^2+AD^2-DB^2}{2AB\cdot AD}=\frac{AC^2+AD^2-DC^2}{2AC\cdot AD}$,

化简得$AD^2(AC-AB)=AB\cdot AC(AC-AB)-DC^2\cdot AB+DB^2\cdot AC$,

由(ⅰ)得$AB\cdot DC=AC\cdot DB$,

代入上式有:$AD^2(AC-AB)=AB\cdot AC(AC-AB)-DC\cdot AC\cdot DB+DB\cdot AB\cdot DC$.

当$AB\neq AC$时,消去$AC-AB$,得:$AD^2=AB\cdot AC-DB\cdot DC$,即证.

当$AB=AC$时,$\triangle ABC$为等腰三角形,由三线合一可知,$AD\perp BC$,且$AB=AC$.

由勾股定理得:$AD^2=AB^2-DB^2$.

因为$AB=AC,DB=DC$.

所以$AD^2=AB\cdot AC-DB\cdot DC$成立.

综上所述:$AD^2=AB\cdot AC-DB\cdot DC$. ………………………………………………………… 6分

(2)由已知得$(1+\sin B)\sin\angle BAC=\cos B(1+\cos\angle BAC)$

$$\Rightarrow\left(\sin\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}\right)^2\cdot 2\sin\frac{\angle BAC}{2}\cos\frac{\angle BAC}{2}=\left(\cos^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{B}{2}\right)\cdot 2\cos^2\frac{\angle BAC}{2}$$

$$\Rightarrow\tan\frac{\angle BAC}{2}=\frac{1-\tan\frac{B}{2}}{1+\tan\frac{B}{2}}\Rightarrow\tan\frac{\angle BAC}{2}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)\Rightarrow\angle BAC+B=\frac{\pi}{2},$$

所以$\triangle ABC$是直角三角形,即$c^2=a^2+b^2$,

所以$\frac{a+b}{c}=\sqrt{\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}}=\sqrt{1+\frac{2}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}}\leqslant\sqrt{2}$,当且仅当$a=b$时取等号,

所以$\frac{a+b}{c}$的最大值为$\sqrt{2}$. …………………………………………………………………… 12分

19.【解析】(1)由题意得

$\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$,$\bar{y}=\frac{10+12+17+20+26}{5}=17$,$\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i=295$,$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=55$.

$$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}=\frac{295-5\times3\times17}{55-45}=4,\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=17-4\times3=5.$$

y关于x的线性回归方程为$y=4x+5$,令$y=4x+5>50$,得$x>11.25$,

所以最小的整数为12,2016+12=2028,

所以该地区新能源汽车的销量最早在2028年能突破50万辆. ……………………………………… 4分

(2)①由题意知,该地区200名购车者中女性有200−95−45=60名,

故其中购置新能源汽车的女性车主有60−20=40名.

所以购置新能源汽车的车主中,女性车主所占的比例为$\frac{40}{40+45}=\frac{8}{17}$.

所以该地区购置新能源汽车的车主中女性车主的概率为$\frac{8}{17}$.

预测该地区2023年购置新能源汽车的销量为33万辆,

因此预测该地区2023年购置新能源汽车的女性车主的人数为$\frac{8}{17}\times33\approx15.5$万人. ……………… 7分

②由题意知,$p=\frac{45}{w+45}$,$0\leqslant w\leqslant135$,则$f(p)=C_5^3p^3(1-p)^2=10(p^5-2p^4+p^3)$,

$f'(p)=10(5p^4-8p^3+3p^2)=10p^2(5p^2-8p+3)$

$=10p^2(p-1)(5p-3)$,

当$p\in\left(0,\frac{3}{5}\right)$时,知$f'(p)>0$,所以函数$f(p)$单调递增,

当$p\in\left(\frac{3}{5},1\right)$时,知$f'(p)<0$,所以函数$f(p)$单调递减.

所以当$p=\frac{3}{5}$时,$f(p)$取得最大值$f\left(\frac{3}{5}\right)=C_5^3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(1-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{216}{625}$.

此时$\frac{45}{w+45}=\frac{3}{5}$,解得$w=30$,所以当$w=30$时$f(p)$取得最大值$\frac{216}{625}$. ………………………… 12分

20.【解析】(1)方法一：延长 CB，DA 交于点 F，连接 PF，

在 $\triangle CDF$ 中，

$\because BD$ 是 $\angle ADC$ 的平分线，且 $BD\perp BC$，

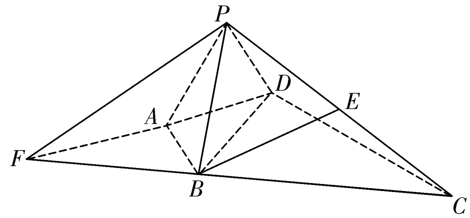
$\therefore$ 点 B 是 CF 的中点，

又 $\because E$ 是 PC 的中点，

$\therefore BE/\!/PF$，

又 $PF\subset$ 平面 PAD，$BE\not\subset$ 平面 PAD，

$\therefore$ 直线 $BE/\!/$ 平面 PAD. ………………………………………………………………………………………… 6 分



方法二：取 CD 的中点为 G，连接 GE，

$\because E$ 为 PC 的中点，$\therefore GE/\!/PD$，

又 $PD\subset$ 平面 PAD，$GE\not\subset$ 平面 PAD，

$\therefore GE/\!/$ 平面 PAD，①

又在四边形 $ABCD$ 中，

$AD=2$，$BD=4$，$AB=2\sqrt{3}$，

则 $\angle BAD=90^\circ$，$\angle BDA=\angle BDC=60^\circ$，

又因为 $BD\perp BC$，G 为 CD 的中点，

所以 $\angle DBG=\angle BDA=60^\circ$，

所以 $AD/\!/BG$，可得 $BG/\!/$ 平面 PAD，②

由①②得平面 $BEG/\!/$ 平面 PAD，

又 $BE\subset$ 平面 BEG，$BE\not\subset$ 平面 PAD，

$\therefore$ 直线 $BE/\!/$ 平面 PAD. ………………………………………………………………………………………… 6 分

(2)在 $\triangle ABD$ 中，$AD=2$，$BD=4$，$AB=2\sqrt{3}$，

则 $\angle BAD=90^\circ$，即 $BA\perp AD$，

由已知得 $\angle BDC=\angle BDA=60^\circ$，$CD=8$，

又平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$BA\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $BA\perp$ 平面 PAD，即 $BA\perp PA$，

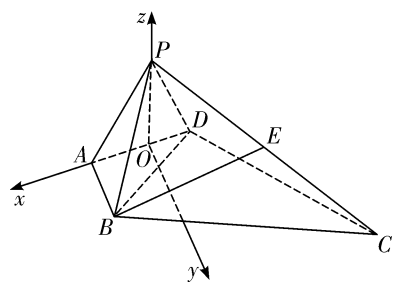
所以 $\angle PAD$ 为二面角 $P-AB-D$ 的平面角，

所以 $\angle PAD=60^\circ$，

又 $PA=AD=2$，所以 $\triangle PAD$ 为正三角形，

取 AD 的中点为 O，连 OP，则 $OP\perp AD$，$OP\perp$ 平面 $ABCD$，

如图建立空间直角坐标系，



则 $A(1,0,0)$，$B(1,2\sqrt{3},0)$，$C(-5,4\sqrt{3},0)$，$D(-1,0,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，

所以 $\overrightarrow{DP}=(1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BD}=(-2,-2\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{DC}=(-4,4\sqrt{3},0)$，

设 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$ 分别为平面 PBD 和平面 PCD 的法向量，则

$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DP}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1+\sqrt{3}z_1=0\\ -2x_1-2\sqrt{3}y_1=0\end{cases}$，取 $y_1=-1$，则 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-1,-1)$，

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_2+\sqrt{3}z_2=0\\ -4x_2+4\sqrt{3}y_2=0\end{cases}$，取 $y_2=1$，则 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,-1)$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{3}{5}$，

则平面 PBD 和平面 PCD 所成夹角的余弦值为 $\dfrac{3}{5}$. ……………………………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)由已知设椭圆 C 方程为：$mx^2+ny^2=1(m>0,n>0)$，

代入 $A(-2,0)$，$B\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$，得 $m=\dfrac{1}{4}$，$n=\dfrac{1}{3}$，

故椭圆 C 方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. …………………………………………………………………………… 4 分

(2)设直线 l：$y=kx+m$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ 3x^2+4y^2=12\end{cases}\Rightarrow(4k^2+3)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，

得$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-8km}{4k^2+3} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{4m^2-12}{4k^2+3} \end{cases}$，$\Delta=64k^2m^2-4(4k^2+3)(4m^2-12)=192k^2-48m^2+144$，…………………………… 6 分

又 $k_1=\dfrac{y_1}{x_1+2}=\dfrac{kx_1+m}{x_1+2}$，$k_2=\dfrac{kx_2+m}{x_2+2}$，

故 $k_1+k_2=\dfrac{kx_1+m}{x_1+2}+\dfrac{kx_2+m}{x_2+2}=\dfrac{2kx_1x_2+2k(x_1+x_2)+m(x_1+x_2)+4m}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}$

$=\dfrac{8km^2-24k-16k^2m-8km^2+16k^2m+12m}{4m^2-12-16km+16k^2+12}$

$=\dfrac{3m-6k}{m^2-4km+4k^2}$，

由 $k_1+k_2=-\dfrac{3}{k}$，得 $m^2-3km+2k^2=0$，

故$(m-2k)(m-k)=0\Rightarrow m=2k$ 或 $m=k$，…………………………… 10 分

①当 $m=2k$ 时，直线 $l:y=kx+2k=k(x+2)$，过定点 $A(-2,0)$，与已知不符，舍去；

②当 $m=k$ 时，直线 $l:y=kx+k=k(x+1)$，过定点$(-1,0)$，即直线 l 过左焦点，

此时 $\Delta=192k^2-48m^2+144=144k^2+144>0$，符合题意.

所以$\triangle FPQ$ 的周长为定值 $4a=8$. …………………………… 12 分

22.【解析】(1)由 $f(x)\leqslant mx$，得 $2x-\sin x\leqslant mx$，

即 $m\geqslant 2-\dfrac{\sin x}{x}$，其中 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

令 $h(x)=2-\dfrac{\sin x}{x}$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，得 $h'(x)=\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^2}$，…………………………… 2 分

设 $\varphi(x)=\sin x-x\cos x$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，

则 $\varphi'(x)=x\sin x>0$，所以 $\varphi(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递增，

所以 $\varphi(x)>\varphi(0)=\sin 0-0\times\cos 0=0$，所以 $h'(x)>0$，

所以 $h(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递增，所以 $h(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上有最大值，

$h(x)_{\max}=h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2-\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=2-\dfrac{2}{\pi}$，

所以 m 的取值范围为$\left[2-\dfrac{2}{\pi},+\infty\right)$； …………………………… 5 分

(2)由 $f(x_1)=f(x_2)$，可得 $2x_1-\sin x_1-a\ln x_1=2x_2-\sin x_2-a\ln x_2$，

整理为 $a(\ln x_2-\ln x_1)=2(x_2-x_1)-(\sin x_2-\sin x_1)$，

令 $u(x)=x-\sin x$，$x>0$，

则 $u'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，所以 $u(x)=x-\sin x$ 在$(0,+\infty)$上单调递增，

不妨设 $x_1<x_2$，所以 $x_1-\sin x_1<x_2-\sin x_2$，从而 $x_2-x_1>\sin x_2-\sin x_1$，

所以 $a(\ln x_2-\ln x_1)=2(x_2-x_1)-(\sin x_2-\sin x_1)>2(x_2-x_1)-(x_2-x_1)=x_2-x_1$，

所以 $a>\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}$. …………………………… 8 分

下面证明$\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}>\sqrt{x_1x_2}$，即证明$\dfrac{\frac{x_2}{x_1}-1}{\ln\frac{x_2}{x_1}}>\sqrt{\dfrac{x_2}{x_1}}$，

令$\dfrac{x_2}{x_1}=t$，即证明$\dfrac{t-1}{\ln t}>\sqrt{t}$，其中 $t>1$，只要证明$\dfrac{t-1}{\sqrt{t}}-\ln t>0$，

设 $v(t)=\dfrac{t-1}{\sqrt{t}}-\ln t(t>1)$，则 $v'(t)=\dfrac{(\sqrt{t}-1)^2}{2t\sqrt{t}}>0$，

所以 $v(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增，所以 $v(t)>v(1)=\dfrac{1-1}{\sqrt{1}}-\ln 1=0$，

所以$\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}>\sqrt{x_1x_2}$，

所以 $a>\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}>\sqrt{x_1x_2}$，

所以 $x_1x_2<a^2$. …………………………… 12 分