n元集合上的传递关系数目

江李阳

2025 年 6 月 4 日

1 基本定义

对于任意a,b,c∈A,(a,b)∈R并且(b,c)∈R,则(a,c)∈R, 那么定义在集合A上的关系R称为传递的.使用量词定义为:若$\forall a \forall b \forall c$ (((a,b)∈R⋀(b,c)∈R)→(a,c)∈R),则定义在集合A上的关系称为传递的.

2 历史背景和研究进展

记$T(n)$为n元集合上的传递关系的总数,对于一个任意的n元集合,一个很自然的想法就是这个集合上的传递关系数目是多少. 该问题最早由Richard P.Stanley在组合数学研究中提及,但他并未给出直接的表达式,只是记录了一些初始值.

2.1 理论研究方向

2.1.1 穷举和递归算法

对于较小的n,可以使用计算机穷举所有的关系并验证是否满足传递性:一个n元集合上总共有2^{n^2}种关系,使用位运算枚举所有的关系, 然后求解传递闭包$t(R)$,由于满足$R \subseteq t(R)$,只要满足$R = t(R)$,即可认为原关系R是传递

的.这种方法简单直观,但是计算量随n成指数级增长,只适用于非常有限的、小的n.

2.1.2 与偏序关系的联系

偏序关系(自反,反对称,传递)一定是一个传递关系,但传递关系不一定是偏序关系.通过研究偏序关系的结构分解方法可推广到一般传递关系.

2.1.3 图论分解

每个传递关系对应一个传递闭包,其基础图可分解为有向无环图(DAG).将传递关系视为DAG的传递闭包,通过分解为强连通组件和层次结构进行计数.

2.1.4 容斥原理和布尔矩阵

在统计满足传递性的矩阵数时需要排除违反传递性的三元组(a, b, c),其中存在边$a \to b$和$b \to c$但缺少$a \to c$,由于三元组间存在重叠,会重复计数,需要通过容斥原理精确计数.

传递性下要求关系矩阵$M^2 \leq M$,其中对M的乘积使用布尔运算,但这种只是判断条件,无法直接计数.

3 现代研究成果

3.0.1 Comtet公式

对于n元集合上的传递关系计数问题,Comtet公式通过生成函数和整数分拆给出精确的表达式:

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\lambda \vdash k} \frac{n!}{\prod_{i=1}^{k}(m_i \cdot i^{m_i})} \cdot 2^{\sum_i + \sum_{i<j} \binom{\lambda_i}{2} \lambda_i \lambda_j}$$

初始条件为$T(0) = 1$,意为空集$\emptyset$上传递关系数为1. 其中k:传递诱导的等价类个数;$\lambda \vdash k$:遍历k的所有整数分拆$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$,满足 $\sum_{\lambda_i} = k$;

m_i:分拆λ中大小为i的块的个数;系数项:$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k}(m_i \cdot i^{m_i})}$表示将$n$个元素分配到分拆λ指定的块结构中的方案数;指数项:$2^{\sum_i \binom{\lambda_i}{2} + \sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j}$表示: $\sum_i \binom{\lambda_i}{2}$表示各块内部非自反边的自由度,$\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j$:块间严格偏序决定的边自由度.

该公式将传递关系分解为划分+块内完全图子集+块间严格偏序,链接了整数分拆、偏序计数和等价关系计数,但计算的复杂度依然很高,需要遍历所有分拆$\lambda \vdash k$,分拆数$p(k)$增长迅速且求和形式无法化简为封闭表达式。

3.0.2 渐进行为与上下界

$Kleitman$:Kleitman通过分析传递关系矩阵中的"1"块的结构,证明了$T(n) \leq 2^{n^2/4+o(n)}$。

$2019 - Sharp, Pantone, Spiro$:他们证明了$T(n) = 2^{(1/4+o(1))n^2}$,核心思想为利用整数分拆来描述传递关系的结构。通过计算所有划分的权重和,证明这个和的主要贡献来自于那些块大小相对均衡的划分,最终证明最大权重对应于块大小接近$\sqrt{n}$的划分,并且在这种划分下,可添加的自幼边数大约是$n^2/4$。

这两个证明确定了$T(n)$的指数增长率为$(1/4)n^2$。

3.0.3 精确计数与算法改进

$Pfeiffer$:提出基于传递关系诱导的预序的树状递归结构。将问题分解为计算特定的较小的传递关系构成的更大的传递关系。这比朴素的枚举更高效。

布尔矩阵分解:传递关系看作其自反传递闭包的子集,利用布尔矩阵半环的性质,设计算法满足特的特定闭包性质的布尔矩阵数量。目前最先进的算法(基于树状分解、优化布尔矩阵计算等)已经能计算到n=24甚至更高。如$T(20)$是一个有几十亿位的天文数字。

3.0.4 随机传递关系

研究在n元集合所有的2^{n^2}个二元关系上均匀随机选取一个关系时,该关系是传递关系的概率是$\frac{T(n)}{2^{n^2}}$。根据渐进结果$T(n) = 2^{(1/4+o(1))n^2}$,这个概率约为 $2^{-(3/4+o(1))n^2}$,表明传递关系极其稀少。

3.0.5 与图论和组合结构的关系

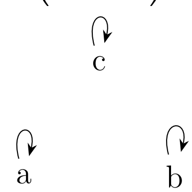
通过研究传递关系对应的有向图的性质,传递关系尤其是拟序和偏序定义了集合上的闭包算子,其闭集形成一个格,研究这些格的性质及其计数有助于理解和研究传递关系计数。

4 三元集合上的传递关系

三元集合$S = \{a,b,c\}$上的关系总数为$2^{3^2} = 512$,其中传递关系总数为$T(3)$=171种,按图表示关系、图同构、等价类相关知识,所有传递关系的矩阵表示如下:

1.三个顶点孤立：三个顶点之间互相不存在边,只有自环存在或不存在两种情况

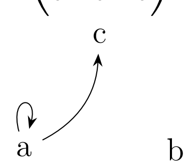
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



成员数:2^3=8;

2.单向二元边：任意不同两个元素之间存在单向边,自环不影响传递性

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

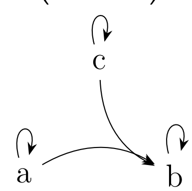


成员数:$\binom{3}{2} \cdot 2^3$=48;

3.倒V结构：任选一个中心元素,其余两个元素有指向中心元素的单向

边,自环不影响传递性

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

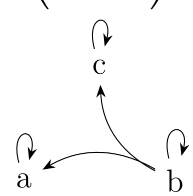


倒V结构:$c \to b, a \to b$

成员数:$\binom{3}{1} \cdot 2^3$=24;

4.正V结构：任选一个中心元素,中心元素指向两个剩余元素,自环不影响传递性

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

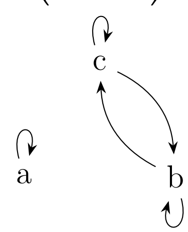


正V结构:$b \to c, b \to a$

成员数:$\binom{3}{1} \cdot 2^3$=24;

5.二元循环：任选一个孤立元素,是否存在自环不影响传递性,剩余两个元素之间形成双向有向边和自环

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

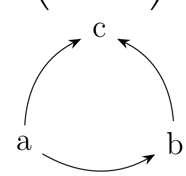


孤立元素a,二元循环$c \rightleftarrows b, \circlearrowleft b \circlearrowleft c$

成员数:$\binom{3}{1} \cdot 2^1$=6;

6.严格三元三边：存在有向边$i \rightarrow j$,$j \rightarrow k$,及传递性产生的边$i \rightarrow k$,自环不影响传递性

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

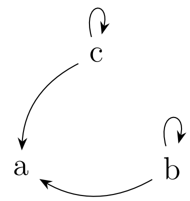


三边:$a \rightarrow b, b \rightarrow c$,$c \rightarrow a$

成员数:$\binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot 2^3$=48;

8.二元循环且指向"孤立点"：任选两个元素形成二元循环且都向剩余元素形成指向边,剩余一个元素自环不影响传递性

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

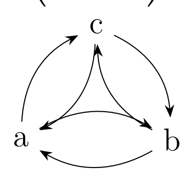


二元循环:$c \rightleftarrows b, b \to b, c \to c$,与剩余元素之间的指向边:$b \to a, c \to a$

成员数:$\binom{3}{1} \cdot 2^1$=6;

9.全连通：三个元素之间都存在双向有向边

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



三个元素之间都存在双向有向边:$a \rightleftarrows b, b \rightleftarrows c, b \rightleftarrows c$

成员数:2^0=1;

总计3元集合上的传递关系数目:$T(3) = 8+48+24+24+6+48+6+1 = 171$