# 矢量代数

## 矢量微分

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\hat{A}\frac{dA}{dt}+A\frac{d\hat{A}}{dt}$$

这里记得要考虑参考系的问题，如果矢量A的方向在参考系中始终与坐标轴相同，那么后一项的值为0，反之，如果A的方向在参考系中处于变化状态，那么后一项的值要考虑。

$$\frac{d(\vec{A}\times\vec{B})}{dt}=\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}+\frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}$$

注意叉乘的顺序不能颠倒

# 张量初步

并矢：

$$\vec{A}\vec{B}$$

单纯放在一起，不做任何运算

通常

$$\vec{A}\vec{B}\neq\vec{B}\vec{A}$$

张量：

$$\overleftrightarrow{T}=\vec{A}\vec{B}=\sum_{i,j=1}^{3}A_iB_j\overrightarrow{e_i}\overrightarrow{e_j}=\sum_{i,j=1}^{3}T_{ij}\overrightarrow{e_i}\overrightarrow{e_j}$$
$$T=\begin{Bmatrix}T_{11}&T_{12}&T_{13}\\T_{21}&T_{22}&T_{23}\\T_{31}&T_{32}&T_{33}\end{Bmatrix}$$

从这个矩阵中可以看出来如果$\vec{A}\vec{B}=\vec{B}\vec{A}$那么$T_{ij}=T_{ji}$，$T$矩阵就是对称矩阵

## 张量的运算

加法：

$$\overleftrightarrow{T}+\overleftrightarrow{V}=\sum_{i,j}(T_{ij}+V_{ij})\overrightarrow{e_i}\overrightarrow{e_j}$$

并矢与矢量点乘：

$$\vec{A}\vec{B}\cdot\vec{C}=\vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C})=\vec{A}(\vec{C}\cdot\vec{B})=\vec{A}\vec{C}\cdot\vec{B}$$
$$\vec{C}\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{B}(\vec{C}\cdot\vec{A})=\vec{B}\vec{A}\cdot\vec{C}$$
$$(\vec{A}\vec{B})\cdot\vec{C}\neq\vec{C}\cdot(\vec{A}\vec{B})$$

并矢与矢量叉乘：

$$\begin{cases}\vec{A}\vec{B}\times\vec{C}=\vec{A}(\vec{B}\times\vec{C})\\ \vec{C}\times\vec{A}\vec{B}=(\vec{C}\times\vec{A})\vec{B}\end{cases}$$

两并矢的双点乘：

$$\vec{A}\vec{B}:\vec{C}\vec{D}=(\vec{B}\cdot\vec{C})(\vec{A}\cdot\vec{D})$$

单位张量与矢量的点乘

$$\overleftrightarrow{I}\cdot\vec{f}=\vec{f}\cdot\overleftrightarrow{I}=\vec{f}$$

单位张量：

$$\overleftrightarrow{I}=\overrightarrow{e_i}\overrightarrow{e_i}+\overrightarrow{e_j}\overrightarrow{e_j}+\overrightarrow{e_k}\overrightarrow{e_k}$$

## 场论初步

### 矢量微分算符

梯度：

$$\nabla=\overrightarrow{e_x}\frac{\partial}{\partial x}+\overrightarrow{e_y}\frac{\partial}{\partial y}+\overrightarrow{e_z}\frac{\partial}{\partial z}$$

散度：

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

旋度：

$$\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}e_x & e_y & e_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

高斯公式：

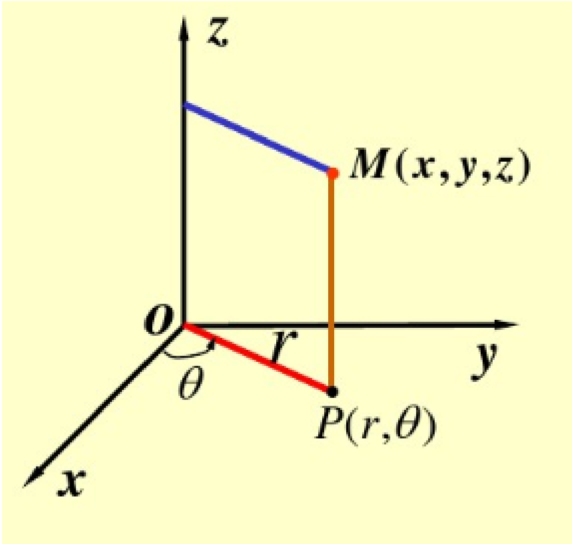
$$\iiint_\Omega(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dV=\oiint_{\partial\Omega}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

斯托克斯公式：

$$\iint_S\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\oint_L Pdx+Qdy+Rdz$$

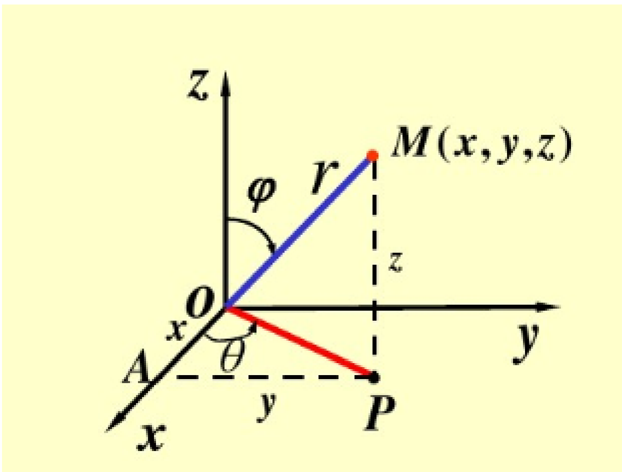
三类坐标转换

柱坐标与直角坐标




$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z. \end{cases}$$

球坐标与直角坐标




$$\begin{cases} x = r\sin\phi\cos\theta, \\ y = r\sin\phi\sin\theta, \\ z = r\cos\phi. \end{cases}$$