계량분석

OLS Assumptions (I)

김현우, PhD[1]

[1] 충북대학교 사회학과 조교수

December 6, 2021

진행 순서

회귀분석의 가정

회귀분석의 가정

단순최소자승(OLS)은 사실 몇 가지 가정에 입각해야만 성립한다.

- 가장 기본적으로 (1) 고전적 가정(classical assumption), (2) 종속변수(y)에 대한 가정, (3) 오차항(ϵ)에 대한 가정을 구별해야 한다.
- (1)이 가장 넓은 범위에서 가정을 다루고 있고, (2)와 (3)은 궁극적으로 같은 내용이다.
- 교과서에 따라서는 어느 쪽인지 명시하지 않고 대충 넘어가다보니 학생들이 쉽게 혼동하곤 한다.
- 대체로 “오차항에 대한 가정”이 많이 논의되는데 재미있게도 교과서에 따라 가정의 목록이 조금씩 다르다.

충북대학교
CHUNGBUK NATIONAL UNIVERSITY

회귀분석의 가정

- 이 가정들은 가장 기본적으로 (1) OLS 추정량(estimator) 자체를 도출하고 (2) OLS 가 왜 BLUE (Best Linear Unbiased Estimator)인지 증명하는데 사용된다.
- 첫번째로 회귀계수와 그 표준오차(SE)를 도출하는 과정에서 수학적으로 "계산이 가능하려면" 혹은 "계산이 용이하려면" 반드시 필요하기 때문에 이 가정들이 요구된다.
- 두번째로 OLS 추정량(b_k과 SE_{b_k})이 다른 추정량(b'_k과 $SE_{b'_k}$)보다 우월하다는 수학적 증명(Gauss-Markov Theorem)에 이 가정들이 요구된다. 보다 구체적으로, 이 가정들이 성립할 때 OLS 추정량은 (1) 왜곡이 없고(unbiased) (2) (다른 추정량보다) 작은 표준오차만을 가진다(efficient).

$$\text{불편성(unbiasedness)}: \; E(b_k) = \beta_k$$
$$\text{효율성(efficiency)}: \; SE_{b_k} < SE_{b'_k}$$

충북대학교
CHUNGBUK NATIONAL UNIVERSITY

회귀분석의 가정

- 사실 이 내용은 상당히 복잡하기 때문에 사회과학 통계학 분야에서는 대학원에서나 다루어지는 문제로 여겨진다. 하지만 당황스럽게도 사회조사분석사 2급에서 몇 차례나 기출문제가 등장했다.
- 사회조사분석사 2급 수험서 레벨에서 오차항에 관해 흔히 세 가지 가정만 달랑 맥락없이 언급된다.
  정규성(normality): $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$
  등분산성(homoscedasticty): $Var(\epsilon_i|X) = \sigma^2$
  독립성(independence): $Cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$
- 이런 식으로 나열하는 것은 조금 논리적으로 엉성하지만 적어도 틀린 것은 아니니 받아들여도 된다.

충북대학교
CHUNGBUK NATIONAL UNIVERSITY

회귀분석의 가정

좀 더 논리적으로 오차항에 대한 가정은 다음과 같다.

1. 조건부 영평균(zero conditional mean): $E(\epsilon_i|X_i) = 0$
2. 등분산성(homoscedasticty): $Var(\epsilon_i|X) = Cov(\epsilon_i, \epsilon_i) = \sigma^2$
3. 자기상관 없음(no autocorrelation): $Cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$
4. 정규성(normality): $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$

충북대학교
CHUNGBUK NATIONAL UNIVERSITY

회귀분석의 가정

"오차항에 대한 가정"을 포함하여 회귀모형에 대한 고전적 가정(classical assumptions)은 좀 더 광범위하다.

1. 선형성(linearity): y와 X의 관계는 선형적으로 표현된다.
2. Full Rank: 사례 수(n)는 적어도 독립변수의 수(k)보다 두 개 많고, 똑같은 독립변수가 두 개 이상 존재하지 않는다.
3. 비확률적 독립변수(non-stochastic Xs): 독립변수는 외생적이다.
4. 어떤 교과서는 극단치 없음(no outliers)을 포함하기도 한다. 이해는 가지만 가정이라고 하기엔 좀 무리가 있다.

고전적 가정: 선형성

고전적 가정: 선형성

단순최소자승(OLS)은 "선형모형(linear model)"의 오차를 최소화하는 상수와 회귀계수를 추정한다.

- 여기서 주목해야 할 부분은 선형모형이라는 부분이다. 첫번째 고전적 가정은 바로 선형성(linearity)이다.
- 아래 회귀식에서 모든 X들과 y의 관계는 선형적이다.

$$y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + ... + \beta_k X_k + \epsilon$$

- 이 가정과 관련하여 형식적인 의미와 실질적인 의미 두 가지를 모두 충족해야 한다.

충북대학교
CHUNGBUK NATIONAL UNIVERSITY

고전적 가정: 선형성

- 형식적으로 이 가정은 회귀식이 선형방정식으로 세워질 것을 전제로 하는데, 보통 변수를 데이터에서 골라 별 생각없이 모형에 집어넣으면 자연스럽게 충족된다.
- 만약 엄밀하게 유도된 수리모형(mathematical model)에 따라 회귀식을 세우다보면 아래와 같은 (유명한) 비선형모형이 제시될 수도 있다.

$$y = \beta_0 \cdot X_1^{\beta_1} \cdot X_2^{\beta_2}$$

- 그래도 걱정이 없다. 양변을 로그 변환하면 선형성을 다시 확보할 수 있다.

$$\begin{aligned} \ln(y) &= \ln(\beta_0 \cdot X_1^{\beta_1} \cdot X_2^{\beta_2}) \\ &= \ln(\beta_0) + \beta_1 \ln(X_1) \cdot + \beta_2 \ln(X_2) \end{aligned}$$

- 다시 말해, 형식적인 의미에서 대처법은 간단한데 (1) 회귀식을 아예 처음부터 선형모형으로 만들거나, (2) 적절한 함수 변환으로 선형관계를 확보하는 것이다.

충북대학교
CHUNGBUK NATIONAL UNIVERSITY

고전적 가정: 선형성

이 가정의 실질적인 타당성 여부는 데이터에 그 선형모형이 얼마나 잘 적합(fit)하는가에 달려있다(**[Stata 코드]** 참고).

- 설령 형식적으로 선형성 가정을 충족하더라도 그 선형모형이 "실질적으로" 데이터에 잘 맞지 않을 수 있다.
- eCampus에서 transit.csv를 다운받아 Stata에서 열어보자. map은 버스지도를 무료 배부 부수(단위 1,000부)를 의미하고 rider는 증가한 버스 승객의 수(단위 1,000명)이다. 관찰단위는 시이다.
- 첫번째로 rider를 y축으로, map을 x축으로 산포도와 적합선(fitting line)을 그려보면 선형모형의 적합도가 낮음을 확인할 수 있다.
- 두번째로 (더 세련된 방법은) 이른바 RVF (Residual-Versus-Fitted) 도표(plot)를 그려보는 것이다. 이것은 오차항(residuals)을 y축으로, 예측된 y (fitted values)를 x축으로 하여 그린 산포도(와 적합선)를 의미한다.
- 직선의 적합선이 매우 부적합함을 두번째 산포도에서 선명하게 확인할 수 있다.

충북대학교
CHUNGBUK NATIONAL UNIVERSITY

고전적 가정: 선형성

- 한마디로 그림을 그려보아 선형모형이 데이터에 적합한지 살펴보는 것이 핵심이다. 엄밀하게 말해 여기까지 오면 더이상 형식적 가정 문제라기보다 실질적인 선형모형의 타당성 문제라고 보아야 한다.
- 일단 모든 X에 대해 y와의 산포도를 그려보는 것이 첫 출발점이다. 모든 변수에 대해 그리기 귀찮기 때문에 Stata의 **graph matrix** 명령어를 사용할 수도 있다.
- 단 하나의 산포도로 살펴볼 수 있는 가장 세련된 방법은 위에서 설명한 RVF 도표이다. 이것은 "예측된 y (fitted values)"를 사용한다는 점에서 여러 그래프를 하나로 압축하고 있는 셈이다(Why?).
- RVF 도표는 선형성 뿐 아니라 이상점(outliers)이나 이분산성(heteroscedasticity) 식별 등에도 좋은 출발점이 된다!
- 선형모형이 부적합한 것 같다면 로그 변환이나 이차항을 사용하고 모형 적합도의 개선 여부를 판단한다.

고전적 가정: Full Rank

고전적 가정: Full Rank

이것은 완전히 수학적인 계산 과정에 관한 가정이다.

- Full rank는 우리말 번역이 마땅치 않은 선형대수학(linear algebra)의 개념이다. 만약 선형대수학을 한 학기 정도 이수하지 않으면 이 개념을 이해하기 어렵다.
- 하지만 우리 모두는 적어도 "연립방정식(simultaneous equations)이 주어졌을 때, 미지수(unknowns)의 고유한 해을 구할 수 있는 어떤 조건들"이 있고, 그 조건들이 충족되지 않으면 미지수가 무한히 많거나 아예 구할 수 없거나 함을 알고 있다. Full Rank는 바로 이렇게 고유한 미지수, 즉 상수와 회귀계수를 구할 수 있는 조건들을 의미한다.
- Full Rank가 위배되는 상황은 크게 다음 두 가지를 지적할 수 있다:
(1) 변수의 수에 비해 표본 크기가 작은 경우
(2) 둘 이상의 완전히 똑같거나 선형의존적(linear dependent)인 변수가 있는 경우

충북대학교
CHUNGBUK NATIONAL UNIVERSITY

고전적 가정: Full Rank

독립변수의 수(k)에 비해 표본 크기(n)가 작은 경우는 거의 문제되지 않는다.

- 얼마나 표본 크기가 작으면 이런 문제가 생길까? 최소한 다음이 성립해야 한다.

$$n \geq k + 2$$

- 예컨대 독립변수가 2개라면 샘플은 최소 5개가 되어야 회귀분석이 작동한다.
- 오늘날 사회과학 통계학은 대부분 대규모 표본을 사용한다. 변수가 다소 많아지더라도 표본의 크기만큼이나 많아지는 경우는 사실상 없다.

충북대학교
CHUNGBUK NATIONAL UNIVERSITY

고전적 가정: Full Rank

요즘 독립변수의 수(k)에 비해 표본 크기(n)가 작은 경우는 거의 문제되지 않는다(**[Stata 코드]** 참고).

- 얼마나 표본 크기가 작으면 이런 문제가 생길까? 최소한 다음이 성립해야 문제가 없다.

$$n \geq k + 2$$

- 예컨대 독립변수가 2개라면 샘플은 최소 5개가 되어야 회귀분석이 작동한다.
- 오늘날 사회과학 통계학은 대부분 대규모 표본을 사용한다. 독립변수가 다소 많아지더라도 표본의 크기만큼이나 많아지는 경우는 사실상 없다.
- 그것과는 별개로 "독립변수 당 최소한 20개 정도 표본이 있어야 한다"는 이야기를 할 때가 있다. 예를 들어 5개 독립변수를 사용하고 싶다면 표본 수가 100개는 되어야 한다는 식이다. 이것은 회귀분석의 가정과는 별개로 믿을 수 있는 추정이 가능하기 위한 필요조건으로 받아들여야 한다.

충북대학교 CHUNGBUK NATIONAL UNIVERSITY

고전적 가정: Full Rank

둘 이상의 완전히 똑같거나 선형의존적 변수가 들어가는 경우는 흔하게 일어나지만 통계분석 패키지가 알아서 제거해준다(**[Stata 코드]** 참고).

- 어떤 변수들은 종종 (거의) 실질적인 의미에서 차이가 없다. 예를 들어, 횡단면 분석 (cross-sectional analysis)의 맥락에서 연령(age)과 태어난 해(birth year)를 동시에 독립변수로 고려하는 것은 아무런 의미도 없다(Why?)
- 선형의존적이라는 말은 선형독립적(linear independent)이 아니라는 의미이다. 예컨대 두 변수 X_1와 X_2가 있을 때, $X_2 = a + bX_1$ 와 같은 선형식이 성립하면 X_2는 X_1에 대해 선형의존적이다. 이 경우 $X_1 = (a/b) + (1/b)X_1$ 역시 성립하므로 X_1도 X_2에 대해 공히 선형의존적이다.
- 이렇게 완전히 똑같거나 선형의존적인 변수가 존재하는 상황을 완전공선성(perfect collinearity)이라고 부른다.
- X_2가 X_1에 의해 완벽하게 설명되므로 이런 경우 역시 사실상 똑같은 변수를 여러 개 집어넣은 것과 같다.

충북대학교
CHUNGBUK NATIONAL UNIVERSITY

고전적 가정: Full Rank

완전공선성의 가정 성립과 위반 사이에는 약간의 회색지대가 있다.

- 완전공선성까지는 아니지만 공선성(collinearity)의 정도가 매우 높아 모형의 추정 결과가 불안정해지는 현상을 다중공선성(multicollinearity)라고 부른다.
- 완전공선성은 가정 위배이지만 다중공선성은 그 자체로 가정 위배는 아니다.
- 다중공선성이 존재하는가를 식별하는 가장 기본적인 방법 두 가지는 (1) 상관계수행렬(correlation coefficient matrix)을 살펴보는 것과 (2) 분산팽창인자(Variance Inflation Factors; VIF)를 살펴보는 것이다.
- 상관계수행렬을 살펴보면 구체적으로 어떤 두 변수 사이의 상관계수가 지나치게 높은지 파악할 수 있다. 많은 연구논문이나 보고서에서 상관계수행렬을 보고하는 것은 이 때문이다.
- 그러나 이 방식은 오로지 두 변수 사이에서 나타나는 공선성 문제만 볼 수 있기 때문에 제한점이 있다. 한 변수가 다른 여러 변수들과 조금씩 공선성을 가져 결국 종속변수의 변량(variation)을 설명할만큼 충분히 독자적인 변량을 갖지 못할 수도 있다.

충북대학교 CHUNGBUK NATIONAL UNIVERSITY

분산팽창인자는 좀 더 세련된 다중공선성 진단법으로 알려져 있다(**[Stata 코드]** 참고).

- 직관적으로 다중공선성은 독립변수 사이의 지나치게 밀접한 관계 때문에 발생하는 문제이다. 그러므로 "특정 독립변수"가 얼마나 다른 독립변수들에 의해 지나치게 잘 설명된다면 다중공선성 문제의 원인이 될 것이다.
- 그러므로 특정 독립변수를 새로운 종속변수로, 나머지 독립변수를 그대로 독립변수로 하여 새로운 회귀분석을 수행하고 그 결정계수(R^2)를 구한다.
- 1에서 결정계수를 뺀 값($1 - R^2$)을 공차(tolerance)라고 부른다. 곰곰히 생각해보면 공차는 "특정 독립변수"가 다른 독립변수들에 의해 설명되지 않은 정도를 보여준다 (Why?). 이것은 "특정 독립변수"의 (다른 독립변수로부터의) 상대적 독립성을 보여준다.
- 그런데 우리는 문제의 심각성을 알고 싶으므로 이 공차의 역(inverse)을 취해야 한다. 이 값이 바로 해당 "특정 변수"의 분산팽창인자(VIF)이다.

$$\mathrm{VIF}_i = \frac{1}{1 - R_i^2}$$

충북대학교
CHUNGBUK NATIONAL UNIVERSITY

고전적 가정: Full Rank

- 분산팽창인자가 얼마나 크면 문제인지 대략적인 지표(rule-of-thumb)가 교과서에 따라 제각각이다. 엄격하게 5 이상은 문제라고 말하거나 15 까지도 괜찮다고 말하기도 한다.
- 분산팽창인자는 특히 집계자료(aggregate data)를 사용할 때 커지는 경향이 있다. 개인을 분석단위로 삼으면 그렇게 까지 크지 않았을 두 변수(예컨대 소득과 최종학력) 사이의 상관계수도 국가를 분석단위로 삼으면 매우 커지기 때문이다.
- 상호작용항이나 다항함수를 사용할때도 분산팽창인자가 커진다. 이로 인한 문제는 너무 고민하지 않아도 된다. 정 신경쓰이면 평균중심화(mean centering)를 하자.
- 개별 변수의 분산팽창인자 뿐 아니라 평균 분산팽창인자(Mean VIF)에도 주목하자. 1보다 훨씬 크면 대응책을 고민해야 한다(Hamilton 1992).

고전적 가정: Full Rank

공선성 문제에 대한 몇 가지 정형화된 대응책이 이미 준비되어 있다.

- 완전공선성이 나타나는 가장 흔한 이유는 연구자가 실수로 똑같은 변수를 두 번 집어넣거나 범주형 변수를 더미 코딩하고 모두 다 집어넣은 경우이다. 그러므로 첫번째 대응책은 똑같은 변수 중 하나를 제거하는 것이다. 정 원한다면 변수를 따로따로 넣은 모형을 여러 개 추정하고 나란히 비교하여 보고할 수도 있다.
- 두번째 대응책은 좀 더 복잡한데, 합성지수(composite index) 같은 잠재변수(latent variable)를 만들어 이를 사용하는 것이다. 둘 이상의 변수가 "그렇게나 유사하다면" 아예 하나로 합친 새로운 변수를 만들어 분석에 사용할 수 있기 때문이다.
- 세번째 대응책은 능형회귀(ridge regression)나 랏소(LASSO regression)처럼 우도함수(likelihood function)에 패널티 항(penalty term)을 넣는 특수한 알고리즘을 사용하는 것이다. 머신러닝(machine learning) 분야에서는 제법 많이 사용된다.

고전적 가정: 비확률적 독립변수

고전적 가정: 비확률적 독립변수

독립변수는 외생적으로 주어져 고정되어있고(fixed) 확률적으로 변화하지 않아야 한다(non-stochastic).

- 통계 용어 stochastic은 적절한 번역어가 없다. probability, random, stochastic은 확률이라는 단어로 대충 뭉뚱그려진다.
- 독립변수에는 샘플링에 따른 변동(sampling variation)가 나타나지 않아야 하는데, 평범하게 생각하면 독립변수 X가 데이터의 형태로 주어져 있는 것이 당연하게 들릴 수도 있다.
- 이 가정에 따르면 독립변수의 값은 "모형 외부로부터" 결정된다고 전제된다. 그러므로 이론상 "모형 내부에서" 일종의 방정식 시스템(equation system)이 존재한다면 이 가정을 반드시 완화해야 한다. 경제학에서는 일찌감치 방정식 시스템을 도입하는 편이고, 그 밖의 사회과학에서는 조금 나중에 다층회귀모형(multilevel regression modeling)에서 방정식 시스템을 도입한다.

고전적 가정: 비확률적 독립변수

- 이 가정의 일부로서 독립변수 X는 0이 아닌 분산을 가질 것이 요구된다. 회귀계수의 표준오차 공식을 떠올려보면 그 분모는 당연히 0이 아니어야 한다!

$$\mathrm{SE}_{\hat{b}} = \sqrt{\frac{\sum(y_i - \hat{y}_i)^2/(n-k-1)}{\sum(x_i - \bar{x})^2}} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2}}$$

- 예컨대 여성 밖에 없는 표본이라면 성별 변수는 아무런 의미도 갖지 못한다(Why?).
- 한편 이 가정을 완화하여 설령 “독립변수가 확률적(stochastic)이다”라고 하더라도 다시 오차항에 대한 가정 $\mathrm{Cov}(\epsilon_i, X_i) = 0$이 성립하면 아무런 문제도 없다.

충북대학교
CHUNGBUK NATIONAL UNIVERSITY

고전적 가정: 이상점 없음

고전적 가정: 이상점 없음

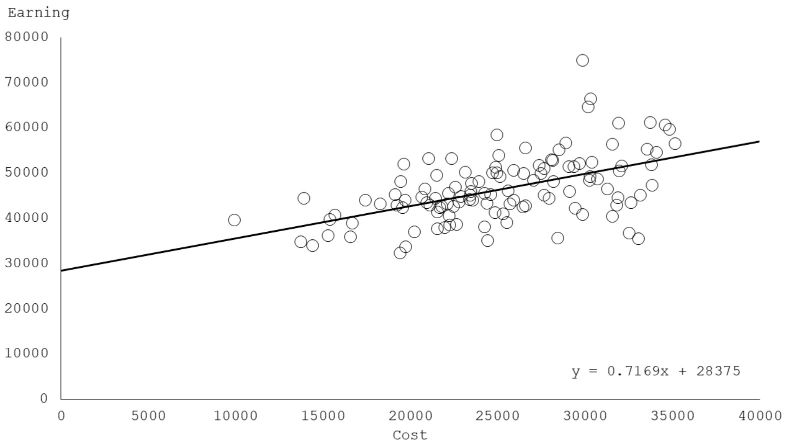
이상점(outliers)이 존재하면 추정량은 심각하게 왜곡된다. 그것도 아주 심각하게!

- 이것은 사실 가정이라고 하기엔 좀 무리가 있다. 하지만 회귀분석 결과의 실질적인 의미를 해치는 굉장히 심각하고 중요한 문제이다. 개인적으로 모형을 점검할 때 가장 중요한 요소라고 본다.
- 이상점의 가장 초보적이고 흔한 원인은 사람의 실수이다. 자료를 입력한 사람의 실수 등으로 인해 특정 변수 특정 케이스에 너무 크거나 너무 작은 값이 들어갈 수 있다.
- 그러므로 데이터를 꼼꼼히 훑어보고 소팅 또는 필터링해가며 살펴보는 것이 중요하다.

충북대학교
CHUNGBUK NATIONAL UNIVERSITY

고전적 가정: 이상점 없음

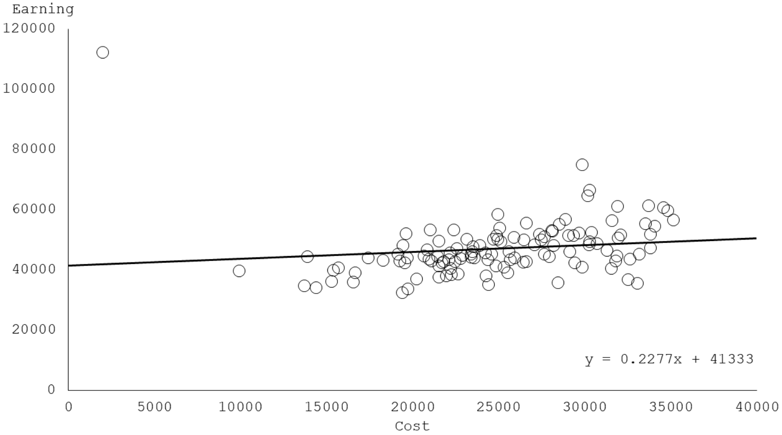
- 아래 그래프는 등록금(cost)과 졸업생 평균수입(earnings)의 관계의 예제이다.



충북대학교 CHUNGBUK NATIONAL UNIVERSITY

고전적 가정: 이상점 없음

- 단 하나의 이상치만으로도 그 관계는 심각하게 왜곡된다.



충북대학교 CHUNGBUK NATIONAL UNIVERSITY

고전적 가정: 이상점 없음

이상점 식별(outlier detection)은 사실 그 자체로 굉장히 큰 주제이다.

- 이상점의 존재를 식별하는 수리적 알고리즘도 이미 상당히 발달해있고 기법도 다양하게 개발되었다. 대표적인 영역들로 선거부정(election frauds), 신용카드 사기(credit frauds), 게임 어뷰징(game abusing) 식별 등이 있다. 이것들을 이해하려면 좀 깊이있는 공부가 요구된다.
- 여기서 우리는 사회과학 통계학에서 기본적으로 잘 알려진 이상점 식별(또는 영향력있는 사례 식별)의 두 가지 도구만을 공부한다:
  (1) 스튜던트화된 잔차(Studentized residuals)
  (3) Cook's Distance

CHUNGBUK NATIONAL UNIVERSITY

고전적 가정: 이상점 없음

이상점으로 나타나면 적합선과 크게 동떨어져 있고 잔차(residuals)가 크다!

- 앞의 그래프를 자세히 관찰해보면 모형에서 추정된 적합선과 이상점 사이의 거리 $(\hat{y}_i - y_i)$, 즉 잔차(residual)가 유달리 크다는 것을 알 수 있다.
- 그러므로 사례들의 잔차를 계산해 본 뒤, 이를 표준화하여 유독 큰 잔차가 나타나는 사례가 있다면 이 사례를 이상점으로 식별할 수 있다. 즉 표준화된 잔차 (standardized residuals)로 이상점을 식별할 수 있다.

$$z_i = \frac{e_i}{\sqrt{MSE(1 - h_i)}}$$

- MSE는 평균제곱오차(mean squared error), h_i는 이른바 레버리지(leverage)로 불리우며 투영행렬(projection matrix) 또는 모자장수(hat maker)라고 불리우는 행렬의 대각행렬이다. 분모 부분을 더 깊이 이해하려면 많은 수학적 설명이 필요하므로 그냥 표준화가 목적인 것으로 일단 받아들이자.

충북대학교
CHUNGBUK NATIONAL UNIVERSITY

고전적 가정: 이상점 없음

표준화된 잔차를 통해 이상점을 식별하려는 접근법에는 치명적인 한계가 있다([Stata 코드] 참고).

- 적합선 자체가 이미 이상점에 의해 왜곡된 뒤에 잔차가 계산되기 때문이다(Why?).
- 그러므로 개별 사례를 일단 하나씩 빼놓고 적합선을 추정한 뒤, 그로부터 해당 사례의 오차를 구하고 표준화하는 방식이 보다 바람직하다. 이것을 스튜던트화된 잔차 (Studentized residuals)라고 부른다.

$$z_{(i)} = \frac{e_i}{\sqrt{MSE_{(i)}(1 - h_i)}}$$

- 교과서와 통계분석 패키지에 따라 통일되지 않은 용어가 다양하게 쓰인다. 어떤 교과서/소프트웨어는 이를 스튜던트화 삭제된 잔차(Studentized deleted residuals) 또는 외재적으로 스튜던트화된 잔차(externally Studentized residuals)라고 부른다. 다른 곳에서는 스튜던트화 잔차를 좀 다른 의미로 사용한다.
- 위의 그림을 다시 예로 든다면, “해당 이상점 사례를 포함하지 않고” 회귀분석을 수행하여 적합선을 그린 뒤, 그로부터 “해당 이상점 사례에 대한 잔차”를 계산하는 셈이다.

충북대학교 CHUNGBUK NATIONAL UNIVERSITY

고전적 가정: 이상점 없음

영향력있는(influential) 사례의 유무는 이상점의 유무와 별개 문제이다 ([Stata 코드] 참고).

- 이상점이 있더라도 실질적으로 거의 영향을 미치지 못할 수도 있다. 예를 들어 “이상점이 고르게 분포하거나 적합선 상에 놓여있어” 적합선의 기울기에 영향을 미치지 못하는 상황을 상상해보자!
- 그러니 이상점 유무와 영향력 유무는 좀 별개의 문제로 접근해야 한다.
- 영향력있는 사례를 식별하는 방식으로 Cook’s Distance, DBFITS, DFBETAS가 특히 널리 알려져 있다.

충북대학교
CHUNGBUK NATIONAL UNIVERSITY

고전적 가정: 이상점 없음

- Cook's Distance는 특정 사례가 “예측된 y (fitted values) 전체”에 미치는 영향력을 추정한다.

$$D_i = \frac{\sum(\hat{y} - \hat{y}_{(i)})^2}{kMSE}$$

- k는 추정된 회귀계수의 수를 지칭한다.
- “특정 사례”를 데이터에서 일시적으로 제거한 뒤 추정하여 그것이 예측된 y (fitted values)에 미치는 영향을 평가하는다.

충북대학교 CHUNGBUK NATIONAL UNIVERSITY

고전적 가정: 이상점 없음

이상점/영향력있는 사례의 제거는 서두르지 말고 천천히 단계적으로 수행한다(**[Stata 코드]** 참고).

- 스튜던트화된 잔치를 계산한 뒤에는 대략적인 기준(rule-of-thumb)으로 절대값이 2 보다 큰 사례를 삭제할 수 있다(Neter et al 2004).
- Cook's Distance를 계산한 뒤에는 대략적인 기준으로 1보다 크거나 4/n보다 큰 사례를 삭제할 수 있다(Neter et al 2004).
- 기계적으로 위와 같이 적용할 수도 있다. 일단 나의 의견은 일단 히스토그램을 그려보고 너무 나간 사례들을 "단계적으로 제거하면서" 영향을 살펴보라는 것이다.
- 또한 이상점/영향력있는 사례를 제거한 결과만 보고하기보다는, 포함하기도 하고 제거하기도 하여 각각 따로 모형을 추정하고 결과를 함께 보고할 수도 있다. 특히 온라인 부록(online appendix)으로 이와 같은 결과를 보고할 수도 있다.

충북대학교
CHUNGBUK NATIONAL UNIVERSITY

고전적 가정: 이상점 없음

이상점과 영향력있는 사례는 개념적으로 분명히 구분된다([Stata 코드] 참고).

- 우리는 스튜던트화된 잔차를 살펴보아 “오차항의 크기에 기반하여” 이상점을 식별하였다.
- 반면 Cook’s distance는 “예측된 y의 크기에 기반하여” 영향력있는 사례를 식별하였다.
- 서로 상이한 두 측면을 동시에 고려하는 전략도 있다. 이를 그림으로 나타낸 것이 이른바 LVR (Leverage-Versus-Residual-Squared) 도표(plot)로 “두 값 모두가 크면” 삭제를 고려하게 된다.