# 사회통계
## 확률의 기초

김현우, PhD[1]

[1] 충북대학교 사회학과 조교수

# 진행 순서

# 확률 개념의 이해

# 확률 개념의 이해

확률이론의 역사는 도박과 밀접한 연관을 갖고 있었다.

- 17세기 프랑스 도박사였던 Antoine Gombaud는 도박과 판돈의 분배 문제에 관해 고민하다가 결국 해법을 찾는데 실패하고, 당대의 천재 수학자였던 Blaise Pascal과 Pierre de Fermat에게 이에 관해 물어보았다.
- 이에 Pascal과 Fermat는 서신을 교환하면서 확률이론(probability theory)의 토대를 쌓기 시작했다.
- 감사하라. 이들 덕택에 여러분이 이 고생을 하는 거다.

Gombaud

Pascal

Fermat

# 확률 개념의 이해

왜 사회학에서 확률이론을 필요로 할까?

- 우리는 모집단(population)에서 표본(sample)을 골라낼 것이다.
- 그 뒤, (모집단을 전수조사하지 않고) 표본만을 관찰하여 어떤 성질을 찾을 것이다.
- 우리는 그 표본의 성질로부터 모집단의 성질을 유추한다(make inference).
- 표본으로부터 유추된 성질이 (모집단과는 상관없이) 그저 표본만에서 우연히 나타났을 확률을 알고 싶기 때문에 확률이론을 필요로 한다.

# 확률 개념의 이해

예제 1. 동전을 한 번 던져서 앞면이 나올 가능성은 1/2이다. 그렇다면 동전을 두 번 던져서 두 번 모두 앞면이 나올 가능성은 얼마인가?

# 확률 개념의 이해

- 일단 동전을 (한 번) 던졌을 때, 있을 수 있는 모든 결과(all possible outcomes)는 암만 생각해도 두 가지 뿐이다: 앞면(head)과 뒷면(tail).
- 앞면($H$)이 나올 확률은 1/2, 뒷면($T$)이 나올 확률도 1/2.
- 이제 두 번 던졌을 때, 있을 수 있는 모든 결과(outcomes)의 집합(set)은 다음과 같다

$$S = \{HH, HT, TH, HH\}.$$

- "답은 1/4이구나."
- 이 아이디어를 (동전 던지기 뿐만 아니라) 모든 현상에도 일반화할 수 있다.

# 확률 개념의 이해

이 예제로부터 몇 가지 유용한 개념을 배울 수 있다.

- 확률(probability)이란 “어떤 사건(event)이 발생할 가능성을 나타난 값”이다.
- 사건이란 “표본공간(sample space)의 특정한 부분집합”을 의미한다.
- 앞의 예제에서 사건은 “두 번 모두 앞면($HH$)”으로 문제에서 주어졌다.
- 표본공간(sample space) $S$란 “어떤 시행(trial) 또는 실험(experiment)에서 가능한 모든 결과(all possible outcomes)의 집합”을 의미한다.
- 앞의 예제에서 표본공간은 $S = \{HH, HT, TH, TT\}$이다.

# 확률 개념의 이해

- 결과(outcome)는 시행 또는 실험에서 수집된 관측치를 뜻한다.
- 앞의 예제에서 “동전을 두 번 던진” 결과들은 $HH$, $HT$, $TH$, $TT$로 모두 4개가 있다.
- 결과와는 달리 사건은 연구자의 관심에 따라 달라질 수 있다!
- 앞에서는 “두 번 모두 앞면”이라는 사건에 관심을 두었는데, 만일 “적어도 한 번은 앞면”이라는 사건으로 관심을 바꿀 수도 있다. 이 경우 사건은 $HH$, $HT$, $TH$이다.

# 확률 개념의 이해

확률을 몇 가지 방식으로 정의할 수 있다.

- 고전적 확률(classical probability)은 “논리적으로 생각하여” 알 수 있는 가능성을 확률로 정의하는 입장이다.
- 경험적 관찰에 근거하지 않고 논리적 판단에 의해 정의된다. 이 때문에 분석적 확률이라고도 불리운다.
- 표본공간 $S = \{s_1, s_2, ..., s_N\}$에서 각각의 결과(outcome)가 일어날 가능성이 동등하다면, $m$개의 결과(outcomes)를 포함하는 사건(event)의 확률은 다음과 같다.

$$P(E) = \frac{m}{N}$$

# 확률 개념의 이해

- 경험적 확률(empirical probability)은 “장기간에 걸쳐 사건의 발생을 관찰하여(in a long run of observations) 얻은 상대적인 빈도”로 확률을 정의하는 관점이다.
- 주사위를 단 몇 차례만 던졌다면, 6이 나올 확률은 1/6이 아닐 수도 있다.
- 그러나 주사위를 제법 여러 차례 던졌다면, 6이 나올 확률은 1/6에 제법 근접할 것이다.
- 주사위를 무한히 많이 던진다면, 6이 나올 확률은 1/6에 무한히 근접할 것이다.
- 고전적 접근은 확률을 분석적으로 연역하고 있지만, 경험적 접근은 확률을 자료로부터 귀납한다.

# 확률 개념의 이해

확률은 사건에 대응하여 정의된다.

- "오늘 비가 내릴" 가능성이나 "동전을 열 번 던져 모두 뒷면이 나올" 가능성과 같이 관심있는 사건(event)이 먼저 정의되어 있어야 한다.
- 그 뒤 개별적인 사건에 대응하여 각각의 발생 확률을 제시할 수 있어야 한다.

| 사건 | 확률 |
|---|---|
| $H$ | $1/2$ |
| $T$ | $1/2$ |

# 확률 개념의 이해

이때 사건과 확률은 반드시 다음의 두 가지 법칙을 따라야 한다.

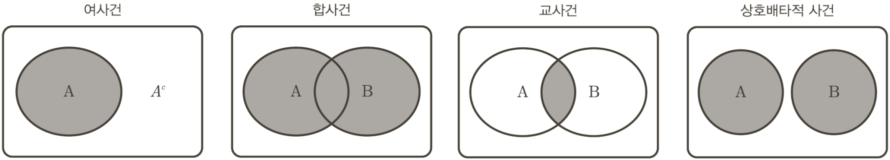
- 포괄적이고 상호배타적 사건들의 확률의 합은 1이다.
- 첫째, (구분한 후에 얻어진) 자항의 총합이 모항과 같아야 한다(exhaustive). 예컨대 “10대”, “20대’, “30대 이상”은 자항의 총합이 모항과 같지 않은 구분이다.
- 둘째, (구분한 후에 얻어진) 자항들은 서로 배제해야 한다(mutually exclusive). 예컨대 “군필”, “미필”, “장교 전역”은 서로 배제하지 못하는 구분이다.
- 이에 따라 표본공간 $S$에 대하여 $P(S) = 1$이다.

# 확률법칙

# 확률법칙

둘 이상의 사건들 사이 관계를 그림으로 표현할 수 있다.

- 흔히 벤 다이어그램(Venn Diagram)으로 두 사건의 확률이 어떤 관련을 갖고 있는가를 나타낸다.
- $A$와 $B$의 합사건(union)은 $A \cup B$ 로 표현한다
- $A$와 $B$의 교사건(intersection)은 $A \cap B$ 로 표현한다.
- $A$의 여사건(complement)은 $A^C$ 로 표현한다



# 확률법칙

둘 이상의 사건들 사이 관계에 관하여 두 가지 기본 법칙이 성립한다.

- 첫째, 두 사건 $A$와 $B$ 중 "최소한 한 사건이 발생"할 확률에 관해 다음의 덧셈 법칙 (addition rule)이 성립한다.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- 여기서 $P(A \cap B)$는 (곧 설명할) 결합확률(joint probability)이다.
- 만일 사건 $A$와 $B$가 상호배타적이라면 다음과 같이 단순화된다.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

# 확률법칙

- 둘째, 두 사건 $A$와 $B$가 "둘 다 발생할 확률"에 관해 다음의 곱셈 법칙 (multiplication rule)이 성립한다.

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

- 여기서 $P(A|B)$ 또는 $P(B|A)$ 는 (곧 설명할) 조건부확률(conditional probability)이다.

# 확률법칙

두 사건의 관계를 독립사건 혹은 종속사건으로 이해할 수 있다.

- 두 사건 $A$와 $B$가 있을 때, $P(A|B) = P(A)$ 이거나 $P(B|A) = P(B)$ 이면 두 사건은 독립(independent) 사건이다(Why?).
- (두 사건은 독립 아니면 종속이므로) 위 식이 성립하지 않으면 두 사건은 종속(dependent) 사건이다.
- $A$와 $B$가 독립적인 사건들이라면 덧셈 법칙은 더욱 단순해진다(Why?).

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

# 확률법칙

- 세 독립사건인 경우에는 다음이 성립한다(Why?).

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)$$

- 이 설명을 일반화하여 $E_1, E_2, \cdots, E_k$가 상호배타적인 $k$개의 사건이라면 다음의 덧셈법칙이 성립한다.

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_k)$$

# 결합확률, 한계확률과 조건부확률

# 결합확률, 한계확률과 조건부확률

지금까지 배운 것을 토대로 자료 설명에 유용한 확률 개념을 도출한다.

- 어떤 자료가 주어졌을 때, “두 사건이 동시에 일어날 확률”을 결합확률(joint probability)이라고 부른다.

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(A|B) \cdot P(B) \\
&= P(B|A) \cdot P(A)
\end{aligned}
$$

- 결합확률은 곱셈법칙을 그대로 이용한다.
- 위 수식의 의미를 천천히 음미해보아야 한다.

# 결합확률, 한계확률과 조건부확률

- 조건부확률(conditional probability)이란 "다른 사건($B$)이 이미 있어났다는 전제 아래, 한 사건($A$)이 일어날 확률"을 의미한다.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- 조건부확률 또한 곱셈법칙을 그대로 이용한다(Why?).
- 결합확률과는 달리 조건부확률에서는 교환법칙(commutative property)이 성립하지 않는다.

$$P(A \cap B) = P(B \cap A)$$
$$P(A|B) \neq P(B|A)$$

# 결합확률, 한계확률과 조건부확률

- 한계확률(marginal probability)은 “연관된 결합확률의 합”이다.

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^C) \qquad (1a) \\
&= P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^C) \cdot P(B^C) \qquad (1b)
\end{aligned}
$$

- (1b)는 조건부확률 $P(A|B)$의 정의를 이용하여 (1a)에서 도출된 것이다.

# 결합확률, 한계확률과 조건부확률

우리는 사실 이 개념들을 이미 배웠고 심지어 엑셀에서 활용까지 했다.

- 자료부터 교차표를 만든 뒤, 행 합계(row total)로 표준화한다.
- 아래 교차표를 들여다보면 $P(\text{종교인}|\text{여자}) = 0.44$, $P(\text{비종교인}|\text{여자}) = 0.56$, $P(\text{종교인}|\text{남자}) = 0.23$, $P(\text{비종교인}|\text{남자}) = 0.77$ 임을 알 수 있다.
- 이것이 바로 조건부확률(conditional probability)이다.

| | 종교인 | 비종교인 | 행 합계 |
|---|---|---|---|
| 여자 | 97 | 124 | 221 |
| 남자 | 68 | 232 | 300 |
| 열 합계 | 165 | 356 | 521 |

| | 종교인 | 비종교인 | 행 합계 |
|---|---|---|---|
| 여자 | 0.44 | 0.56 | 1 |
| 남자 | 0.23 | 0.77 | 1 |
| 열 합계 | 0.32 | 0.68 | 1 |

# 결합확률, 한계확률과 조건부확률

- 만약 열 합계(column total)로 표준화한 경우 다른 해석을 해야 한다(Why?)
- 아래 교차표를 들여다보면 $P$(여자|종교인), $P$(남자|종교인), $P$(여자|비종교인), $P$(남자|비종교인)을 구할 수 있다.
- 이것들도 물론 조건부확률(conditional probability)이다.

| | 종교인 | 비종교인 | 행 합계 |
|---|---|---|---|
| 여자 | 97 | 124 | 221 |
| 남자 | 68 | 232 | 300 |
| 열 합계 | 165 | 356 | 521 |

| | 종교인 | 비종교인 | 행 합계 |
|---|---|---|---|
| 여자 | 0.59 | 0.35 | 0.42 |
| 남자 | 0.41 | 0.65 | 0.58 |
| 열 합계 | 1 | 1 | 1 |

# 결합확률, 한계확률과 조건부확률

- 마지막으로 총 합계(grand total)로 표준화한 경우 다른 해석을 해야 한다.
- 아래 교차표를 들여다보면 $P(\text{종교인} \cap \text{여자}) = 0.19$, $P(\text{비종교인} \cap \text{여자}) = 0.24$, $P(\text{종교인} \cap \text{남자}) = 0.13$, $P(\text{비종교인} \cap \text{남자}) = 0.45$ 임을 알 수 있다.
- 이것이 바로 결합확률(joint probability)이다.

| | 종교인 | 비종교인 | 행 합계 |
|---|---|---|---|
| 여자 | 97 | 124 | 221 |
| 남자 | 68 | 232 | 300 |
| 열 합계 | 165 | 356 | 521 |

| | 종교인 | 비종교인 | 행 합계 |
|---|---|---|---|
| 여자 | 0.19 | 0.24 | 0.42 |
| 남자 | 0.13 | 0.45 | 0.58 |
| 열 합계 | 0.32 | 0.68 | 1 |

# 결합확률, 한계확률과 조건부확률

- 한계확률(marginal probability) 역시 교차표에서 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} P(\text{종교인}) &= P(\text{종교인} \cap \text{여자}) + P(\text{종교인} \cap \text{남자}) \\ &= P(\text{종교인}|\text{여자}) \cdot P(\text{여자}) + P(\text{종교인}|\text{남자}) \cdot P(\text{남자}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{비종교인}) &= P(\text{비종교인} \cap \text{여자}) + P(\text{비종교인} \cap \text{남자}) \\ &= P(\text{비종교인}|\text{여자}) \cdot P(\text{여자}) + P(\text{비종교인}|\text{남자}) \cdot P(\text{남자}) \end{aligned}$$

- $P(\text{여자})$와 $P(\text{남자})$도 연습삼아 계산해보자.

# 결합확률, 한계확률과 조건부확률

- 교차표가 $2 \times 2$ 가 아니라 $3 \times 3$ 라도 조금 더 길어지지만 본질은 똑같다.

| | 보수적 성역할 태도 | 중립적 성역할 태도 | 진보적 성역할 태도 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| 소득: 상 | 486 | 761 | 279 | 1526 |
| 소득: 중 | 1024 | 1080 | 967 | 3071 |
| 소득: 하 | 662 | 822 | 434 | 1918 |
| 합계 | 2172 | 2663 | 1680 | 6515 |

- 여기서도 표준화 방식에 따라 상이하게 조건부확률과 결합확률을 구할 수 있다.
- 한계확률도 마찬가지다. 다만 $2 \times 2$ 방식이 아니므로,

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$$

대신 다음과 같이 표현한다.

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3)$$

# 베이즈 정리

# 베이즈 정리

이제 인공지능 분야에서 새롭게 피어난 확률이론의 꽃을 살펴보자.

- 지금까지 배운 개념들을 토대로 베이즈 정리(Bayes' Theorem)를 살펴보자

$$
\begin{aligned}
P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad\qquad (\text{if } P(B) \neq 0) \\
&= \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \\
&= \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^C) \cdot P(A^C)}
\end{aligned}
$$

- 사전확률(prior probability)인 $P(A)$와 $P(A^C)$ 그리고 우도(likelihood)인 $P(B|A)$를 알면 사후확률(posterior probability) $P(A|B)$를 알 수 있다.
- 좌변의 $P(A|B)$가 우변에서는 모두 $P(B|A)$와 같이 바뀌었음에 주목하자!

예제 2. 사지선다 문제를 맞추었을 때 알고 풀었을 확률을 구하시오(단, 답을 아는 사전확률과 모르는 사전확률은 같다고 전제한다).

# 베이즈 정리

- "답을 알$(K)$" 사전확률과 "답을 모르는$(DK)$" 사전확률이 같다면 이는 상호배타적 사건임을 의미한다.

$$P(A_K) = P(A_{DK}) = \frac{1}{2}$$

- (다른 문제도 그렇지만 특히) 베이즈 확률을 계산할 때는 문제가 묻는 것이 정확히 무엇인지 먼저 식별해야 한다.
- 여기서는 "답을 맞추었다$(C)$"는 조건 아래 답을 알$(A_K)$ 확률, 즉 $P(A_K|C)$를 묻고 있다.

$$P(A_K|C) = \frac{P(C|A_K) \cdot P(A_K)}{P(C|A_K) \cdot P(A_K) + P(C|A_{DK}) \cdot P(A_{DK})}$$

# 베이즈 정리

- 곰곰히 생각하면 우도(likelihood)가 무엇인지 알 수 있다(Why?).

$$P(C|A_K) = 1$$
$$P(C|A_{DK}) = \frac{1}{4}$$

- 그러므로 문제가 찾는 답은 다음과 같다.

$$P(A_K|C) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$$

- 문제를 맞췄다고 하여 반드시 답을 알고 있었던 것은 아니다. 베이즈 정리는 그 확률마저 예측한다!

# 베이즈 정리

베이즈 정리에는 독특한 역사가 있다.

- 장로교 목사이자 아마추어 수학자였던 Thomas Bayes (1701?–1761)는 David Hume의 회의주의적 경험론에 반발하여 (아마도) 신의 존재를 수학으로 증명하는데 관심이 있었다.
- 그의 논문은 한때 완전히 잊혀졌다가 Pierre-Simon Laplace (1749–1827)에 의해 재발견되었다.
- 그러나 20세기 들어 통계학이 급성장하면서 Karl Pearson, Ronald Fisher, Jerzy Neyman 등이 베이즈의 관점과 상이한 통계추론의 논리를 제시하면서 다시 한 번 잊혀졌다.


Bayes


Laplace


Pearson


Fisher


Neyman

# 베이즈 정리

- 21세기 들어 인공지능(AI)과 기계학습(machine learning)의 시대가 도래하면서 다시 한 번 베이즈 통계학(Bayesian statistics)이 부상하게 되었다.
- 20세기 통계학의 관점을 빈도주의 통계학(frequentist statistics)이라고도 부른다.
- 우리 수업은 (아쉽게도 베이즈 통계학이 아니라) 빈도주의 통계학의 기초를 배우는 과정이다.
- 뇌의 작동 방식이 베이즈 정리에 의해 잘 설명된다는 주장이 있지만, 아쉽게도 베이즈 통계학은 계산집약적(computationally intensive)인 점이 흠이다.

# 베이즈 정리

- 확률의 기초는 베이즈 정리를 알기 전과 이것을 안 뒤로 나뉜다.
- 몇 가지 흥미로운 논리적 문제를 풀 수 있다: 몬티 홀 문제(the Monty Hall Problem), 다운증후군 임신 테스트 신뢰성 문제 등등...
- 그 밖에도 몇 가지 실생활에서 할 수 있는게 있다: 사람의 말과 글을 알아듣는 기계나 자율주행하는 자동차를 만든다던가 등등...
- (R이나 Python 등을 통해) 20-30줄 정도의 코드로도 꽤 쓸모있는 인공지능을 구현할 수 있다.
- 3학년이나 4학년 때 소셜데이터사이언스 수업에서 살짝 다룬다.