

管道订购和运输

马欣, 郭世强, 王佳  
指导老师: 教师组

(大连海事大学, 大连 116026)

**编者按:** 本文只是B题的第一问的求解部分, 该求解过程对所建立的非线性优化模型, 采用两阶段法求解, 首先通过对铺设路线上运输费用的分析, 为非线性规划的线性化提供了依据, 从而直接采用线性规划方法求解, 然后采用拆分法, 将原管道运输网络图分成二部分, 利用类似于原网络的方法, 逐步对问题调优, 最后, 以所得可行解为初始点, 采用模拟退火算法, 求得最后的近似最优解

**摘要:** 在对图形一分析的基础之上, 首先建立了问题一的非线性规划的模型, 然后采用了两种方法分别对问题一求解

1 问题的重述(略)

2 基本假设(略)

3 符号约定

$P_i$ : 各钢厂的钢管的出厂销价(万元/单位).

$C_{i,j}$ : 单位钢管从钢厂  $S_i$  购出并经单位运费最小路运至  $A_j$  时单位钢管的所需费用包括销价和运费两部分

$X_{i,j}$ : 从  $S_i$  到  $A_j$  运输钢管的总数

$l_j$ : 从  $A_j$  点到  $A_{j+1}$  点所需要铺设钢管的数量

$Ca_j$ : 表示从  $A_j$  到  $A_{j+1}$  段上钢管的运输费用

$D$ : 钢管总的需求量

$s_i$ : 各钢厂  $S_i$  的最大供给力

$a_j$ : 运到  $A_j$  的钢管总数

$a_{j,1}$ : 为从  $A_j$  向左铺设的里程数

$a_{j,2}$ : 为从  $A_j$  向右铺设的里程数

$t_i$ : 钢厂  $S_i$  的实际供给量

$Cost$ : 总费用函数

4 问题的分析和模型的建立

(1) 分析:

依照题目中所给出的数据, 我们可以计算出由  $S_i$  经单位运费最小路运至  $A_j$  点时单位钢管的费用(即运费与出厂销价之和  $C_{i,j}$ ).

更多数模资讯与学习资料, 请关注b站/公众号: 数学建模BOOM

精品课程: <https://docs.qq.com/doc/DZk1OSERMQ2VDTVBC>



扫码关注公众号

后台回复“课程”

(2)模型的建立: 在运送钢管时, 必须将钢管先运到各 $A_j$ 点, 再由各 $A_j$ 点转运到铺设地点, 因此我们考虑下将整个购运过程分为两个阶段:

I. 将钢管从各钢厂 $S_i(i=1, \dots, 7)$ 运到 $A_j(j=1, \dots, 15)$ 点

II. 从 $A_i$ 分别向左右两端运输并铺设

在 I 阶段中, 费用为  $\text{Cost}_1 = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^{15} C_{i,j} X_{i,j}$

在 II 阶段中, 费用为  $\text{Cost}_2 = \sum_j C a_j$

其中任意施工段 $L_j$ 内所花费的运输费用为

$$C a_j = \frac{0.1 \times (a_{j,2} - 1) \times a_{j,2}}{2} + \frac{0.1 \times (a_{j+1,1} - 1) \times a_{j+1,1}}{2}$$

再根据题目所要求的各种约束条件, 我们可以建立模型如下:

$$\min \text{Cost} = \text{cost}_1 + \text{cost}_2 = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^{15} C_{i,j} X_{i,j} + \sum_{j=1}^{15} \left[ \frac{(a_{j,1} - 1) \cdot a_{j,1}}{2} + \frac{(a_{j,2} - 1) \cdot a_{j,2}}{2} \right] \times 0.1$$

$$\text{s.t. } a_{j,2} + a_{j+1,1} = l_j (j = 1, \dots, 14)$$

$$500 \sum_{j=1}^{15} X_{i,j} \leq S_i \quad \text{or} \quad \sum_{j=1}^{15} X_{i,j} = 0$$

$$\sum_{i=1}^7 X_{i,j} = a_{j,2} + a_{j+1,1} (j = 1, \dots, 14)$$

$$X_{i,j} \geq 0, a_{j,1} \geq 0, a_{j,2} \geq 0$$

## 5 模型的求解

由于目标函数的图像是一个多维的抛物面, 它的约束条件所对应的区域不是凸集, 因而模型给出的是在非连续可行域上的二次规划问题. 这样就很难找到一个统一的方法来求解. 我们注意到: 在 $A_2$ 和 $A_{15}$ 处, 有 $a_{2,1} = 104$ ,  $a_{15,2} = 0$ ; 在 $A_1, A_2, \dots, A_{15}$ 上有 $a_{j,2} + a_{j+1,1} = l_j$ , 并且

$$\begin{aligned} C a_j &= 0.05 \times [(a_{j,2})^2 + (a_{j+1,1})^2 - a_{j,2} \cdot a_{j+1,1}] \\ &= 0.05 \times [(a_{j,2})^2 + (a_{j+1,1})^2 - (a_{j,2} + a_{j+1,1})] \\ &= 0.05 \times [(a_{j,2})^2 + (a_{j+1,1})^2 - l_j] \\ &= 0.05 \times (2a_{j,2} \cdot a_{j+1,1} - l_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{及 } C a_j &= 0.1 \times [(a_{j,2} - 1)a_{j,2} + (l_j - a_{j,2} - 1)(l_j - a_{j,2})] / 2 \\ &= 0.05 \times [2(a_{j,2})^2 + l_j^2 - 2l_j \cdot a_{j,2} - l_j] \\ &= 0.05 \times [2(a_{j,2} - l_j/2)^2 + l_j^2/2 - l_j] \end{aligned}$$

所以, 当 $a_{j,2} = a_{j+1,1}$ 成立时, 在这段路上费用最少; 当 $a_{j,2} = 0$ 时, 这段路上的费用最大

综合以上, 我们可以得到 $C a_j$ 的最值为:

$$\min C a_j = 0.1 \times [(l_j)^2 - 2l_j] / 4, \text{ 从而得 } \min C a_j = 61064.325,$$

$$\max C a_j = 0.1 \times [(l_j)^2 - l_j] / 2, \text{ 从而得 } \max C a_j = 122387.2,$$

于是,  $\max C a_j - \min C a_j = 61322.875$

我们先把 I, II 两个阶段分开分析, 因为公路和铁路的路线较长并且单价已经加入到

更多数模资讯与学习资料, 请关注b站/公众号: 数学建模BOOM

精品课程: <https://docs.qq.com/doc/DZK10SERMQ2VDTVBC>



$S_i$  到  $A_j$  的费用上, 这一段的费用占总费用的大部分, 所以考虑先将  $A_j$  各点的钢管到达量固定。由上面的推断, 我们知道, 在不考虑其他条件时, 当  $a_{j,2} = a_{j+1,1} = l_j/2$  时费用最低。所以, 我们先固定  $a_j = (l_{j-1} + l_j)/2$  这时模型变成:

$$\begin{aligned} \min \text{Cost}_1 &= \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^{15} C_{i,j} X_{i,j} \\ \text{s.t.} \quad &\sum_{i=1}^7 X_{i,j} = a_j \quad (j = 1, \dots, 14) \\ &\sum_{j=1}^{15} X_{i,j} \leq S_i \quad \text{or} \quad \sum_{j=1}^{15} X_{i,j} = 0 \\ &X_{i,j} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, 7, j = 1, \dots, 14) \end{aligned}$$

如果让所有工厂全部生产 500 单位以上时, 即忽略掉约束 的后一半, 那么原问题就被简化成为一个线性规划问题

通过计算, 得到总费用最优时的供给情况如下表所示:

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$
供给量	800	800	1000	500	831	740	500

此时目标函数的值为: 1242957.

我们发现, 工厂  $S_4$  和  $S_7$  都只生产 500 个单位, 那么有可能是在让  $S_4$  和  $S_7$  不生产时费用更低。在前面的线性规划中可以假设钢厂  $S_4$  不生产, 就得到结果如下表所示:

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$
供给量	800	800	1000	0	1331	740	500

此时目标函数的值为: 1237047. 同样, 当  $S_7$  不生产时, 得到结果如下表所示:

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$
供给量	800	800	1000	500	831	1240	0

此时目标函数的值为: 1241672. 当  $S_4$  和  $S_7$  都不生产时, 得到结果如下表所示:

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$
供给量	800	800	1000	0	941	1630	0

此时目标函数的值为: 1236122. 可以看到, 当  $S_4$  和  $S_7$  都不生产时, 目标函数更优化一些。因此, 当我们固定  $a_j$  的值时, 可以得到沿管道的运输费用为 61064, 进而, 得到总费用为: 1236122+ 61064= 1297186. 这是一个满足模型约束的可行解。

为了进一步优化, 我们尝试将这个图形进行拆分。观察下表:

	$A_{10}$	$A_{11}$	$A_{12}$	$A_{13}$	$A_{14}$	$A_{15}$
$S_5$	212	188	206	221. 2	228	242
$S_6$	212	201	195	176. 2	161	178

通过对图的右半部分作简单的计算, 可以发现:

由  $S_6$  单独供应  $A_{14}$ 、 $A_{15}$  时的费用要比由  $S_7$  单独供应或  $S_7$ 、 $S_6$  共同供应时的费用少,  $S_6$

离 $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}$ 比 $S_7$ 更近,但这几段管道的总需求不能使 $S_6$ 的供给达到饱和,所以由 $S_6$ 而不是 $S_7$ 来供应 $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}$ ,同理由于 $S_4$ 距 $A_{10}, A_{11}, A_{12}$ 比 $S_5$ 远,所以由 $S_5$ 而不是 $S_4$ 来供应 $A_{10}, A_{11}, A_{12}$ 所以 $A_{11}, A_{12}$ 由 $S_5$ 和 $S_6$ 共同供应

根据上述模型,我们可以求出各段所用的费用,相加便得到右半部分费用的最小值为

$$\sum_{j=10}^{14} Ca_j = 306972.6$$

而在前面求得的线性规划问题的最优解中, $S_1, S_2, S_3$ 的供给量已经达到饱和,这说明左半部分的需求量比供给量大,需要由右半部分来补充,补充量为445单位.通过观察可以发现在右半部分的工厂中, $S_5$ 距离这些点是最近的,而且在供给左半部分不足部分后其供给量也不会达到饱和

这样图的左半部分 $A_1$ 到 $A_{10}$ 加上工厂 $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$ 就形成了一个类似原大图模型的小模型,但已经不存在不生产的工厂,因为右半部分已经可以求到最优,再对左边继续进行优化

类似前述对大图进行优化的方法,我们固定 $a_j$ ,依旧求解线性规划,得出到各 $A_j$ 点的运输费用:934628,再加上沿管道的运输费用46725,得到总费用1288326.

至此我们就得到了一个更优化的解,可以相信已经非常接近最优值,以这个值为初值,继续进行优化,我们采取了模拟退火算法来优化,得到目标函数值为: $Cost = 1278198$

#### 参考文献

- [1] 钱颂迪,薛华成《运筹学》清华大学出版社,北京,1990
- [2] 盛昭瀚,曹忻《最优化方法基本教程》东南大学出版社,江苏,1992
- [3] 陈宝林《最优化理论和算法》清华大学出版社,北京,1989
- [4] 杨冰《使用最优化方法及计算机程序》哈尔滨船舶工程学院出版社,哈尔滨,1994.

## Model for Ordering and Transportation of Pipeline

MA Xin, GUO Shi-qiang, WANG Jia

(Dalian Maritime University, Dalian 116026)

**Abstract** By analysing of the graph, we gave a nonlinear optimum model of question one, and we solve the question one in two ways