

## 2005A 题:长江水质的评价和预测

水是人类赖以生存的资源,保护水资源就是保护我们自己,对于我国大江大河水资源的保护和治理应是重中之重。专家们呼吁:“以人为本,建设文明和谐社会,改善人与自 然 的环境,减少污染。”

长江是我国第一、世界第三大河流,长江水质的污染程度日趋严重,已引起了相关政府 部门和专家们的高度重视。2004 年10 月,由全国政协与中国发展研究院联合组成“保护长 江万里行”考察团,从长江上游宜宾到下游上海,对沿线 21 个重点城市做了实地考察,揭 示了一幅长江污染的真实画面,其污染程度让人触目惊心。为此,专家们提出“若不及时拯 救,长江生态10 年内将濒临崩溃”(附件 1)并发出了“拿什么拯救癌变长江”的呼唤(附 件2)。附件3 给出了长江沿线17 个观测站(地区)近两年多主要水质指标的检测数据,以及干流上 7 个观测站近一年多的基本数据(站点距离、水流量和水流速)。通常认为一个观测站(地区)的水质污染主要来自于本地区的排污和上游的污水。一般说来,江河自身对污 染 物都有一定的自然净化能力,即污染物在水环境中通过物理降解、化学降解和生物降解等使 水中污染物的浓度降低。反映江河自然净化能力的指标称为降解系数。事实上,长江干流的 自然净化能力可以认为是近似均匀的,根据检测可知,主要污染物高锰酸盐指数和氨氮的降 解系数通常介于0.1~0.5 之间,比如可以考虑取0.2 (单位:1/天)。附件4 是“1995~2004 年 长江流域水质报告”给出的主要统计数据。下面的附表是国标(GB3838-2002)给出的《地表 水环境质量标准》中4 个主要项目标准限值,其中 I、II、III类为可饮用水。

请你们研究下列问题:

(1)对长江近两年多的水质情况做出定量的综合评价,并分析各地区水质的污染 状况。

(2)研究、分析长江干流近一年多主要污染物高锰酸盐指数和氨氮的污染 源主要在哪些地区?

(3)假如不采取更有效的治理措施,依照过去 10 年的主要统计数据,对长江未来水

质污染的发展趋势做出预测分析,比如研究未来10 年的情况。

(4)根据你的预测分析,如果未来 10 年内每年都要求长江干流的IV类和V

类水的比例控制在20%以内，且没有劣Ⅴ类水，那么每年需要处理多少污水？

(5) 你对解决长江水质污染问题有什么切实可行的建议和意见

附表：《地表水环境质量标准》(GB3838—2002) 中 4 个主要项目标准限值

单位：mg/L

分 类		II 类	III 类	IV 类	V 类	V 类
溶 解 氧	.5		5			0
高锰酸盐指数		4	6	1	1	$\infty$
氨		0	1	1	2	$\infty$
PH 值（无量纲）	6					

（注：附件 1~4 位于压缩文件 A2005Data.rar 中，可从 <http://mcm.edu.cn/mcm05/problems2005c.asp> 下载）

## 2005 A题评阅要点

[说明] 根据各赛区的建议, 从 2004 年起全国组委会不再提供赛题参考解答, 只给评阅要点。本要点仅供参考, 各赛区评阅组应根据对题目的理解及学生的解答, 自主地进行评阅。

**总体思路** 根据问题的实际背景, 首先依据 17 个观测点水质数据对相应地区的水质情况做定量分析评价; 依据这些地点的相对地理位置、水流量和水质数据, 利用简化的一维水质模型推算出相应的排污量, 从而可以确定出长江的主要污染源所在的地区; 根据长江过去 10 年的总体水质检测数据, 对未来长江干流水质发展趋势进行预测, 并对可能控制水质的条件进行研究。

**问题(1)** 按照国家标准地表水的评价指标主要是附表中的 4 项, 而水质有 I、II、III、IV、V、劣 V 共 6 个类别, 每一类对每一项指标都有相应的标准值(区间), 只要有一项指标达到高类别标准就算是高类别的水质。

由于各项指标在各类别中的标准值(区间)差别很大, 评价时要先对各项指标的数据做**标准化处理**。其次, 由于不同类别的水质有很大的差别, 同一类别水质的污染物含量也有一定的范围, 所以做综合评价时要考虑这些指标的**类别差异和同类别内的数量差异**。最后, 根据附件 3 的数据计算出 17 个观测点 28 个月的水质综合指标后, 还要进行**综合排序**。

**问题(2)** 一个江段的水质污染来自本地区的排污和上游的污水, 问题(1)得到的水质排序最差的地区不一定是污染源最严重的地区。用长江干流上的 7 个观测站点将长江分

为 6 个江段, 逐段计算各江段的排污量, 找出主要污染源所在的区域。

首先研究每个江段中污染物浓度  $C$  (mg/L) 的变化规律。由于题目中给出了污染物的降解系数, 附件 3 给出了每个月的污染物浓度、流量、流速等数据, 若忽略污染物的局部扩散

(研究的是总体污染) 在考虑固定时段(月)的污染物浓度时, 可利用一般一维水质模型

$$\frac{dC}{dx} + kC = 0$$

的近似解  $C = C_0 e^{-kx}$ ,  $C_0 = C_x = 0$  (其中  $x$  为江段长度,  $u$  为流速, 对每一江段  $u$  是常数,  $k$  为污染物的降解系数)

根据污染物浓度和流量计算各江段的单位时间排污量时,困难在于不知道一个江段内诸多支流及排污口的位置和排污量,无法精确计算各江段的总排污量。解决问题的一个办法是,考虑到当所有排污点都集中在江段起点时,对该江段的水质影响最大,而当所有排污点都集中在江段终点时,对该江段的水质影响最小,由此可以计算一个江段内可能的最大排污量和最小排污量。这样,每一江段的每一个月都可以得到一个排污量区间,可以再用对月取平均

及对区间取中点的方法得到每一江段单位时间的平均排污量。最后，由于附件 3 给出了各江 段的距离，所以可用**每一江段单位时间、单位距离的平均排污量**作为可比性指标来确定主 要污染源所在江段。

**问题（3）** 附件 4 给出了过去 10 年长江流域总体水质污染状况数据，可以认为反映污 染状况的各类水质比例主要与当年（或者还与去年）总排污量和总流量有关，从而**建立可饮 用水（I、II、III类水）的比例与排污量和流量的回归模型**。为了用这个模型预测未来可 饮用水比例，先要预测未来的排污量和流量。

由附件 4 的数据可以看出，排污量增长很快，而流量变化不大。**可以用灰色预测或拟合 等方法得到排污量与时间的关系**，而流量可以简单地用取过去 10 年的平均值等办法处理。最后，用上面两个模型计算未来可饮用水的比例，会得到污染状况将十分严重的结论。

**问题（4）** 在问题（3）模型的基础上可以直接计算。

**问题（5）** 开放性问题（略）

**说明：**所给数据基本上都来自于相关部门的真实数据，有些可能用不到（甚至不准确 或有误）如果认为不够可以自己去找（如认为有误可修正）可以充分利用自己认为有用 的数据来解决问题

## 2005B题： DVD在线租赁

随着信息时代的到来，网络成为人们生活中越来越不可或缺的元素之一。许多网站利用其强大的资源和知名度，面向其会员群提供日益专业化和便捷化的服务。例如，音像制品的在线租赁就是一种可行的服务。这项服务充分发挥了网络的诸多优势，包括传播范围广泛、直达核心消费群、强烈的互动性、感官性强、成本相对低廉等，为顾客提供更为周到的服务。

考虑如下的在线 DVD 租赁问题。顾客缴纳一定数量的月费成为会员，订购 DVD 租赁服务。会员对哪些 DVD 有兴趣，只要在线提交订单，网站就会通过快递的方式尽可能满足要求。会员提交的订单包括多张 DVD，这些 DVD 是基于其偏爱程度排序的。网站会根据手头现有的 DVD 数量和会员的订单进行分发。每个会员每个月租赁次数不得超过 2 次，每次获得 3 张 DVD。会员看完 3 张 DVD 之后，只需要将 DVD 放进网站提供的信封里寄回（邮费由网站承担），就可以继续下次租赁。请考虑以下问题：

1) 网站正准备购买一些新的 DVD，通过问卷调查 1000 个会员，得到了愿意观看这些 DVD 的人数（表 1 给出了其中 5 种 DVD 的数据）。此外，历史数据显示，60% 的会员每月租赁 DVD 两次，而另外的 40% 只租一次。假设网站现有 10 万个会员，对表 1 中的每种 DVD 来说，应该至少准备多少张，才能保证希望看到该 DVD 的会员中至少 50% 在一个月之内能够看到该 DVD？如果要求保证在三个月内至少 95% 的会员能够看到该 DVD 呢？

2) 表 2 中列出了网站手上 100 种 DVD 的现有张数和当前需要处理的 1000 位会员的在线订单（表 2 的数据格式示例如下表 2，具体数据请从 <http://mcm.edu.cn/mcm05/problems2005c.asp> 下载），如何对这些 DVD 进行分配，才能使会员获得最大的满意度？请具体列出前 30 位会员（即 C0001~C0030）分别获得哪些 DVD。

3) 继续考虑表 2，并假设表 2 中 DVD 的现有数量全部为 0。如果你是网站经营管理人员，你如何决定每种 DVD 的购买量，以及如何对这些 DVD 进行分配，才能使一个月之内 95% 的会员得到他想看的 DVD，并且满意度最大？

4) 如果你是网站经营管理人员，你觉得在 DVD 的需求预测、购买和分

配中还有哪些重要 问题值得研究？请明确提出你的问题，并尝试建立相应的数学模型。表1 对1000 个会 员调查的部分结果

DVD	D	D	D	D	D
愿意	2	1	5	2	1
观看	00	00	0	5	0

表2 现有DVD 张数和当前需要处理的会员的在线订单（表格格式示例）

DVD	D	D002	D	D	...
DVD	1	40	1	2	...
现有	0		5	0	
	C	6	0	0	...



会员在线订单	0					
	C	0	0	0	0	...
	C	0	0	0	3	...
	C	0	0	0	0	...
	...	...	...	...	...	...

注：D001~D100 表示100 种DVD, C0001~C1000 表示1000 个会员， 会员的在线订单用 数字1, 2, ...表示， 数字越小表示会员的偏爱程度越高， 数字0 表示对应的DVD 当前不在会 员的在线订单中。

（ 注 ： 表 2 数 据 位  
于 文 件 B2005Table2.xls 中 ， 可 从  
<http://mcm.edu.cn/mcm05/problems2005c.asp> 下载）

## 2005 B题评阅要点

**命题思路** 本题是根据某 DVD 在线租赁网站经理提出的实际问题简化改编而成的。问题初看起来似乎很容易理解而且并不复杂，但考虑到 DVD 在线租赁业务中存在的各种不确定性和多阶段特征，建立好的数学模型并不容易。赛题(1) (2) 问考虑的是该问题的两个子问题（购买和分发），第（3）问则同时考虑购买和分发，第（4）问要求参赛队自己提出和求解问题。对题目的理解不同、假设不同，得到的模型和结果可能很不相同，因此本题应特别注意假设的合理性及所建立的模型与假设之间的一致性。

### 问题（1） 网站购买DVD 的最优数量

对表 1 的一种理解是根据表 1 得到某 DVD 被选中的概率（记为  $p$ ），设网站的会员总数量为  $n$ ，在  $n$  比较大的情况下，则该 DVD 的总需求可用正态分布  $N(np, npq)$  近似

（ $q = 1 - p$ ），据此可在一定的置信水平下得到有需求会员人数的上限  $M$ 。设该 DVD 购买  $x$

张，当  $x \geq M/2$  时，一种简单的近似方法是认为 1 个月该 DVD 的可用张数是  $1.6x$  张，要保证一个月至少  $P\%$  有需求的会员能得到满足，即  $1.6x \geq M \cdot P\%$ ，可求得最小的  $x$ ；当  $x < M/2$  时，一种简单的近似方法是认为 1 个月该 DVD 的可用张数是  $0.6M + 0.4x$  张，也可求得最小的  $x$ 。综合两种情况可得到近似结果。采用数值模拟（仿真）也是一种方法。

[注] 对表 1 可以存在其他理解方式，例如认为表中给出的某 DVD 的需求只是初始时段

(一个月或半个月)的需求,并进一步假设以后时段的需求持续不变或按某种规律变化。可相应地考虑三个月的问题。

## 问题(2) 网站分发DVD

用 $n, m$ 分别表示当前需要分发的会员订单数量和DVD种类,用 $c_j$ 表示第 $j$ 种DVD的现有数量,用 $a_{ij}$ 表示表格文件中给出的订单矩阵。用0-1变量 $x_{ij}$ 表示是否选择第 $j$ 种DVD

分配给第 $i$ 位会员,用0-1变量 $y_i$ 表示第 $i$ 位用户是否得到DVD。一种容易想到的方法是累加会员满意度,使其最大化。会员 $i$ 得到第 $j$ 种DVD的满意度 $s_{ij}$ 可以自行定义。一种0-1线性规划模型为:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_i \sum_j s_{ij} x_{ij} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & x_{ij} \leq a_{ij}, \quad \sum_j x_{ij} \leq c_j, \quad \sum_j x_{ij} \leq 3y_i \quad (\text{也可根据对题目的不同理解将等号换成小于等}) \\ & i \quad j \end{aligned}$$

于号)

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, y_i \in \{0, 1\}.$$

[注] 本题(尤其B题)数据量较大,但很容易用Lingo软件算出最后结果。如果将模型松弛成线性规划求解再舍入到0-1解,应该验证解的可行性和估计解的误差。如果模型正确但因软件限制影响到计算结果,可酌情处理。如果采用启发式算法求解问题,应该说明算法的效率和效果。进行敏感性分析也是值得鼓励的。此外,建立网络优化的模型也是可能的。

**问题(3) 购买和分发同时考虑** 一种近似方法是在一定的假设下把问题分解成刚刚考虑过的购买和分发两个子问题。

考虑到一个月内可能一个会员要发货两次,这又是一个多阶段的决策问题,建立随机决策模型并寻找最优决策是可能的,但由于后一阶段决策时需要考虑前一阶段哪些会员归还了哪些DVD,因此难度较大。采用数值模拟(仿真)也是一种方法。

**问题(4) 其他问题(D题没有这一问)** 要求同学自己思考、提出问题,并解决问题。这也是本题的重要组成部分,可供同学充分发挥其创造性,特别是提出问题的能力,主要依据论文中提出的问题的实用和理论价值以及建模思路评判论文的优劣。

## 2006A题:出版社的资源配置

出版社的资源主要包括人力资源、生产资源、资金和管理资源等，它们都捆绑在书号上，经过各个部门的运作，形成成本（策划成本、编辑成本、生产成本、库存成本、销售成本、财务与管理成本等）和利润。

某个以教材类出版物为主的出版社，总社领导每年需要针对分社提交的生产计划申请书、人力资源情况以及市场信息分析，将总量一定的书号数合理地分配给各个分社，使出版的教材产生最好的经济效益。事实上，由于各个分社提交的需求书号总量远大于总社的书号总量，因此总社一般以增加强势产品支持力度的原则优化资源配置。资源配置完成后，各个分社（分社以学科划分）根据分配到的书号数量，再重新对学科所属每个课程作出出版计划，付诸实施。资源配置是总社每年进行的重要决策，直接关系到出版社的当年经济效益和长远发展战略。由于市场信息（主要是需求与竞争力）通常是不完全的，企业自身的数据收集和积累也不足，这种情况下的决策问题在我国企业中是普遍存在的。

本题附录中给出了该出版社所掌握的一些数据资料，请你们根据这些数据资料，利用数学建模的方法，在信息不足的条件下，提出以量化分析为基础的资源（书号）配置方法，给出一个明确的分配方案，向出版社提供有益的建议。

### [附录]

附件1：问卷调查表；

附件2：问卷调查数据（五年）；

附件3：各课程计划及实际销售数据表（5年）；

附件4：各课程计划申请或实际获得的书号数列表（6年）

附件5：9个分社人力资源细目。

## 2006A题评阅要点

本题考察的重点是：从决策问题的海量的、不完全的、甚至错漏（带有噪音、错误、异型）的数据中分析出决策的逻辑结构和提取有用的数据（附录中许多数据是没有用的！）以及依赖数据信息，进而构建数学模型的能力。

本题的资源优化配置模型是规划问题，其中也包括一些预测模型。因此，理解并且实现 优化问题的基础结构是取得**基本分值**的必要条件。

### 1、目标函数的构成成分

主要包括**销售额表达式**（注意如果作者利用了附录数据说明中的假设，则赢利与销售额 等价），可以以课程为单位，也可以以学科为单位；包括由市场信息产生的对于不同课程的 调控因子（**竞争力系数**）由于数据说明中的提示，也应该包括每个课程的申报需求量的“**计划准确性因子**”（学生用词会不同）。当然，前两点更重要些。

### 2、约束条件构成

对于出版社来说，所谓产能主要是**人力资源**，即策划、编辑和版面设计人员的分布形成 主要约束；此外，**书号总量**（500）也应该作为约束条件；同时，在数据说明中指出的“**满足申请书号量的一半**”也应该以约束方式表达。

### 3、规划变量

可以以每个课程的**书号数量**，也可以以学科的**书号数**作为变量，但是得到的结果会有所 不同。

实现以上三点，对于问题的理解是比较全面的，应该得到**基本分值**。进一步提高的分值 来源于实现上述三点的具体模型的考虑和建模水平。

1) 如果注意到数据说明中提示的，同一课程的教材在**价格和销售量的同一性**，销售额 表达式是比较容易表示的：构造每个课程的、**用书号数表达的销售额**，然后将所有书号的销 售额的表达式累加，形成总社的销售额的基本表达式，这

是目标函数的主体部分。

2) 市场信息产生的对于不同课程的调控因子（也称**竞争力系数**）的表示，是一个信息不足情况下的决策模型。主要是**满意度**和**市场占有率**的恰当表示和计算（由附件 2）以及两个指标的联合形成竞争力系数问题，这里既可以使用拟合模型，也可以使用各种多因素分析模型等等，方法不同。对这个问题解决的优劣，可以导致明显的评分差别。

其中应该特别注意需求**信息是否重复使用**的问题，也就是说，如果在构造销售额表达式时已经使用了课程的销售数据，则不同课程的支持强度的不同，主要由市场竞争力参数表达。

3) 在优化问题中，应该恰当地表示“**计划准确性因子**”；数据给出的计划销量和实际销量之比应该也是比较合适的表示。

4) 加上前述约束条件构成适当的规划问题。



比较好的实现以上四点，应该得到 80%的分值。

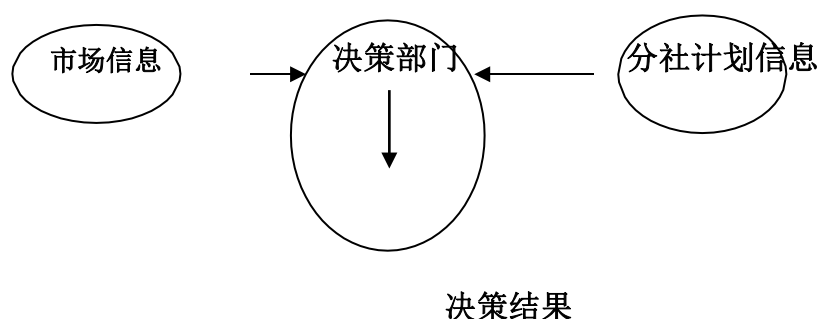
最后剩余分值是：计算出结果，创造性，论文表述和格式。[注 1] 以下给出建模所需信息和附录数据表的关系：

在问卷调查表的调查目的中提示了满意度和市场占有率是竞争力的主要组成，也提示了数据依据（附录1）课程级销售额以及销售额与利润的等价性关系（附录3）满意度和市场占有率由问卷调查数据表检索计算产生（附录2）各个课程的需求的书号数（附录4）和“计划准确性因子”（附录3）人力资源（附录5）其中附录1只是让学生了解市场调查的方法。

[注2] 学生会提出附录5和4之间在书号数与人力资源上的差别，事实上人力资源和分配到的书号数没有直接的单一因果联系如临时雇用人员、临时增加书号等。附录4的书号总和的计算错误是实际数据的错误，但是与解题无关（学生采用哪组数据应该都是可以）。附件：对问题更详细的分析过程（供参考）

本题背景是：某出版社总社汇总各个分社提交的出版需求计划，然后根据市场信息、在总社产能允许的条件下，将给定数量的书号进行分配，以期在此分配方案下，出版的图书产生最好的经济效益。由于企业的生产是市场导向的，因此市场信息是对分社计划进行调整的主要依据，同时要考虑产能的限制。这是一个资源配置的决策问题，因此需要分析决策的信息依据以及决策的逻辑过程。

### 1、决策的总体结构



各个分社提出的出版需求计划是决策的基础，而市场信息是调整分社计划达

到效益最大化的主要调节依据。在以上总体结构下，需要将各个分社的计划信息和市场信息的信息产生结构分析清楚。

## **2、分社计划信息**

在附录4中给出了各个分社06年申请的书号计划数,即分社所属课程的计划数的列表。该出版社中,分社是按学科划分的,学科之下又有若干课程,问题的决策对象可以分两级:课程级以及学科级。也就是说,可以以课程作为基本分配对象,学科数据可以通过汇总得到;也可以先将数据汇总到学科,然后以学科作为配置单位。两种方法计算结果会有所不同。

**3、市场信息** 相关的市场信息主要包括两个方面:需求信息和竞争力信息,包括它们的变化趋势。

**3.1 需求信息。** 课程级的销售额是决策的目标函数的基础组分（附录 4 中提示了销售 额与盈利的等价性）在根据课程级的需求计划计算销售额时，需要用过去五年该课程的实 际销售量去预测当年的销售量。这样就已经考虑了市场的需求信息，因此在总社的进一步分 析中不必要重复使用这类市场信息。另一方面，由于分社有夸大需求的倾向（附录4 提示） 将课程级的计划销售量与实际销售量之比作为“计划准确性系数”在课程级的销售额中作 为权重是恰当的考虑。

**3.2 竞争力信息。** 企业在战略决策中的主要原则是：重点支持竞争 力强、竞争力发展趋势强的产品（题目中已经提示）虽然企业也要关注现实竞争力不强、 但有潜力的产品，但这不是主要的决策原则，这是一个恰当的简化。竞争力因素很多，但是 对于本题，由于只给出了两方面的数据（A. 对教材的课程级的满意度，B. 该出版社的课程 级的市场占有率）因此也只有用这两个数据产生对于各个课程的不同竞争力系数，这是 总社的主要调控手段，应体现在规划问题的目标函数中。

**4、建模过程** 如何从给定数据中提取需要的每项市场信息，  
是本题建模的关键之一。

**4.1 市场需求信息。** 这里主要是课程级的需求量预测。从历年的销售数据，即已经出 版过的同课程的历年销售数据，可得到目标函数的主要表达式：

$$[(\text{课程级销量} \times \text{平均书价}) / \text{当年的该课程的获得书号数}] = \text{该课程的书号的平均销售额}$$

**4.2 产品满意度。** 在问卷调查中的本出版社的满意度（课程级）的均值除以所有出版 社的满意值的均值，可以作为该课程的满意度，这里“度”是率的含意。

**4.3 市场份额占有率。** 在问卷调查的统计中已经给出了关于课程与出版社市 场份额分 布表，而通过五年的市场份额分布表可以回归出预测的市场份额占有率。

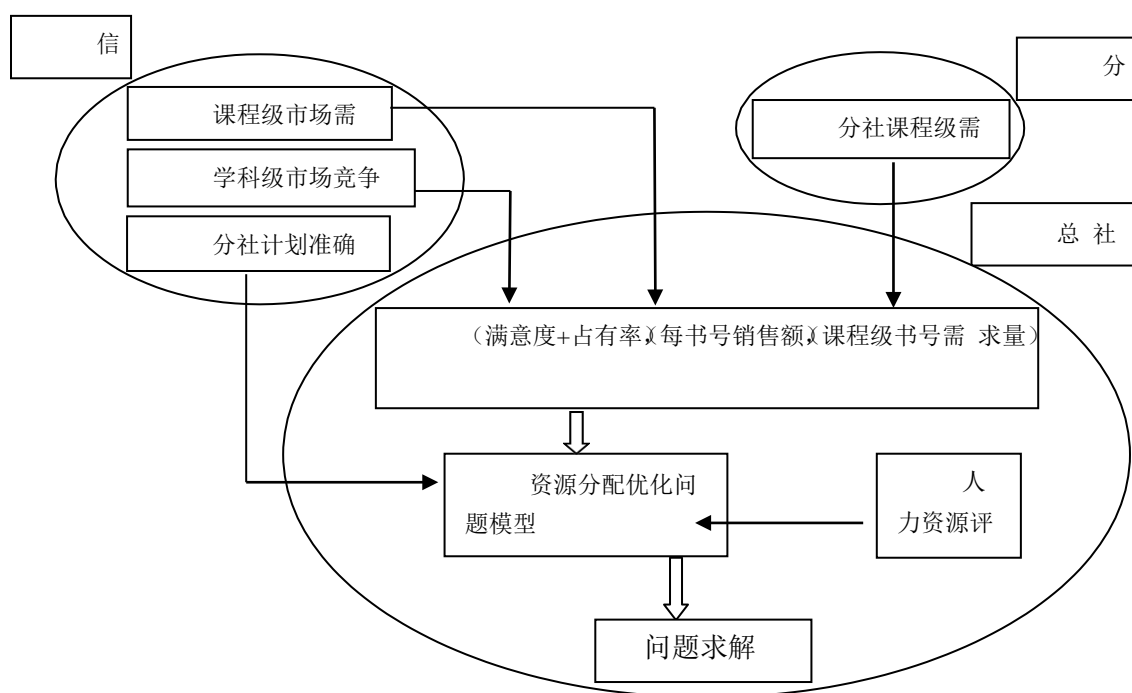
**4.4 竞争力系数。** 以上两点可以产生单一的竞争力系数（通过模型方法）加入 到目标 函数中，例如，可以从五年的历史数据拟合得到加权系数，再进行加权 求和等，方法各异。

由以上4 点以及考虑到3.1 中的“计划准确性系数”可以构成规划的目标函数。

**4.5 约束条件：**该社的产能即人力资源的约束，书号总量的限制以及至少满足申请数 一半的要求（附录4）即可得到规划问题的完整表示。

**5、 决策的逻辑结构** 通过以上分析我们可以用以

下信息流转图表示决策问题的结构：



## 2006B 题:艾滋病疗法的评价及疗效的预测

艾滋病是当前人类社会最严重的瘟疫之一从1981 年发现以来的20 多年间，  
它已经吞噬了近3000 万人的生命。

艾滋病的医学全名为“获得性免疫缺损综合症”，英文简称AIDS，它是由艾 滋病毒（医学全名为“人体免疫缺损病毒”，英文简称 HIV）引起的。这种病毒 破坏人的免疫系统，使人体丧失抵抗各种疾病的能力，从而严重危害人的生命。 人类免疫系统的 CD4 细胞在抵御 HIV 的入侵中起着重要作用，当 CD4 被 HIV 感染而裂解时，其数量会急剧减少，HIV 将迅速增加，导致AIDS 发作。

艾滋病治疗的目的，是尽量减少人体内 HIV 的数量，同时产生更多的  
CD4，至少要有效地降低CD4 减少的速度，以提高人体免疫能力。

迄今为止人类还没有找到能根治AIDS 的疗法，目前的一些AIDS 疗法不仅对人体有副作用，而且成本也很高。许多国家和医疗组织都在积极试验、寻找更 好的AIDS 疗法。

现在得到了美国艾滋病医疗试验机构ACTG 公布的两组数据。ACTG320( 见附件1)是同时服用zidovudine(齐多夫定),lamivudine(拉美夫定)和indinavir (茚地那韦) 3 种药物的300 多名病人每隔几周测试的CD4 和HIV 的浓度 (每 毫升血液里的数量) 193A (见附件2) 是将1300 多名病人随机地分为4 组，每组按下述4 种疗法中的一种服药，大约每隔8 周测试的CD4 浓度 (这组数据缺 HIV 浓度，它的测试成本很高) 4 种疗法的日用药分别为：600mg zidovudine 或400mg didanosine (去羟基苷) 这两种药按月轮换使用；600 mg zidovudine 加2.25 mg zalcitabine (扎西他滨)；600 mg zidovudine 加400 mg

didanosine; 600 mg zidovudine 加400 mg didanosine, 再加400 mg nevirapine  
(奈韦拉平)

请你完成以下问题:

(1) 利用附件 1 的数据, 预测继续治疗的效果, 或者确定最佳治疗终止时间(继续治疗指在测试终止后继续服药, 如果认为继续服药效果不好, 则可选择提前终止治疗)

(2) 利用附件 2 的数据, 评价 4 种疗法的优劣(仅以 CD4 为标准)并对较优的疗法预测继续治疗的效果, 或者确定最佳治疗终止时间。

(3) 艾滋病药品的主要供给商对不发达国家提供的药品价格如下: 600mg zidovudine 1.60 美元, 400mg didanosine 0.85 美元, 2.25 mg zalcitabine 1.85 美元, 400 mg nevirapine 1.20 美元。如果病人需要考虑 4 种疗法的费用, 对(2)中的评价和预测(或者提前终止)有什么改变。

## 2006 B题评阅要点

**问题(1)** 利用附件1 的数据预测继续治疗的效果, 或者确定最佳治疗终止时间。

1. **分析数据** 随机取若干个病人, 画出他们 CD4 和HIV 浓度随时间变化的图 形(折线)可以看出CD4 大致有先增后减的趋势, HIV 有先减后增的趋势, 启示应建立时间的二次函数模型(若先用一次函数模型, 应与二次函数模型 做统计分析比较)附件1 中个别病人缺CD4 或HIV 数据(数据表中为空) 计算时应注意。

2. **建立模型** 可能有以下形式的回归模型:

1) 总体回归模型 用全部数据拟合一个模型, 如

$y_{ij}=b_0+b_1t_{ij}+b_2t_{ij}^2$ ,  $t_{ij}$  为第  $i$  病人第  $j$  次测量时间,  $y_{ij}$  为第  $i$  病人第  $j$  次测量值 (CD4, HIV) 或测 量值与初始值之比。一次与二次函数模型比较, 二次较优用数据估计  $b_0, b_1, b_2$ , 对 CD4,  $b_2<0, b_1>0$ ,  $t=-b_1/2b_2$  达到最大; 对 HIV,  $b_2>0, b_1<0$ ,  $t=-b_1/2b_2$  达到 最小。一般在 25~30 (周) CD4 达到 最大、HIV 达到最小。可以合理地确定 最佳治疗终止时间。

2) 个人回归模型 用每个病人的数据拟合一个模型如上式  $b_k$  改为  $b_{ik}$ ,  $k=0, 1, 2$ ) 计算  $b_{ik}$  的均值和均方差, 用均值同1) 可得CD4 的最大点和HIV 的最小点, 一般为20~30 (周) 可对CD4 统计  $b_{2i}<0, b_{1i}>0$  (存在正最大点) 及  $b_{2i}>0$  (不存在最大点) 的频率, 对HIV 统计  $b_{2i}>0, b_{1i}<0$  (存在正最小点) 及  $b_{2i}<0$  (不存在最小点) 的频率, 在一定条件下可以作为终止治疗与继续治疗的概率(一般为 0.6~0.8 与 0.3~0.2) 也可用  $b_{ik}$  的均值和均方差在一定分布的假定下直接计算这些概率。

3) 分段时序模型 对  $y_{ij}$  用  $j$  以前的资料如  $y_{i,j-1}, t_{ij}-t_{i,j-1}, j-1$  段的斜率等 为变量建立模型 ( $j=3, 4, 5, 6$ ) 由数据估计系数, 预测  $y_{ij}$ , 然后

对 CD4 统计 预测的  $y_{ij}$  大于实际的  $y_{i, j-1}$  的频率, 对 HIV 统计预测的  $y_{ij}$  小于实际的  $y_{i, j-1}$  的频率, 由此得到应终止治疗的时段。

4) 纵向数据回归模型 (处理这类问题的专门方法) 将模型 2) 的  $b_{ik}$  分解为固定效应参数  $b_k$ , 与随机效应参数  $\cdot i_k$  之和 ( $k=0, 1, 2$ ) 设  $\cdot i_k$  服从零均值 正态分布, 利用极大似然估计可以得到  $b_k$  的估计值及  $\cdot i_k$  的方差。  $b_k$  的估计值 用于计算 CD4 的最大点和 HIV 的最小点, 它与  $\cdot i_k$  的方差一起可以像 2) 一样 在正态分布假定下计算终止治疗与继续治疗的概率。

**注 1** 建立几种模型相互比较、验证者较优。

**注 2** 不能只有模型, 不做统计分析; 对模型结果进行统计分析, 考虑与数据 拟合程度、注意去除异常数据者较优。

**注 3** 注意到有一些数据是当出现 CD4 下降、HIV 上升就及时结束的, 并做



出适当考虑者较优。

**注 4** 注意到题目中“艾滋病治疗的目的，是尽量减少人体内 HIV 的数量，同时产生更多的 CD4，至少要有效地降低 CD4 减少的速度。”并对结果 做出适当考虑者较优。

**问题（2）** 利用附件2 的数据，评价4 种疗法的优劣，并对较好疗法预测继续治 疗的效果，或者确定最佳治疗终止时间。

## 回归模型方法

**1. 分析数据** 对于每种疗法随机取若干个病人，画出他们 CD4 随时间变化的图 形（折线），可以看出疗法1~3 的 CD4 基本上水平，略有下降，而疗法4 有 先增后减的趋势启示应建立时间的一次与二次函数模型经统计分析比较，确定哪种较优。

### 2. 建立模型

1) 回归模型 可以引入4（或3）个0-1 变量表示4 种疗法建立统一模型，或者对每种疗法各建立一个模型（一般来说前者较优）仍可利用问题（1）中的各种模型。以总体回归模型为例，分别用一次与二次时间函数模 型进行比较，可知疗法 1~3 用一次模型较优，且一次项系数为负，即 CD4 在减少，从数值看疗法3 优于疗法2 和1；疗法4 用二次模型较优，即 CD4 先增后减，在  $t=20$  左右达到最大。可以通过4 条回归曲线进行比较，显示疗 法 4 在30 周之前明显优于其它。

年龄的处理：简单地增加年龄变量；按年龄分组，考虑不同年龄的影响。

2) 用假设检验做疗法有无显著性差异的两两比较 用 1 个 0-1 变量构造 两种疗法的统一模型，可以用 t 检验作回归系数是否为零的假设检验（与回归 系数置信区间是否含零点等价）结果是疗法1 与2 无显著性差异，而疗法 1 与3，2 与3，3 与4 均有显著性差异。

注 注意问题(1)的几个注。线

### 性规划模型方法

1. **数据分析** 考虑到治疗的效果与患者的年龄有关, 将患者按年龄分组, 如 14~25 岁, 25~35 岁, 35~45 岁及 45 岁以上 4 组。每组中按照 4 种疗法和 4 个治疗阶段 (如 0~10 周, 10~20 周, 20~30 周, 30~40 周) 构造 16 个决策单元。取 4 种药品量为输入, 治疗各个阶段末患者的 CD4 值与开始治疗时 CD4 值的比值为输出。

2. **建立模型** 利用相对有效性评价方法, 建立分式规划模型并经过变换, 转化为线性规划模型求解, 对各年龄组患者在各阶段的治疗效率进行评价。计算结果: 对第 1 年龄组疗法 2 和 4 在整个治疗中效率较高, 在第 4 阶段仍然有

效；对第2 年龄组疗法1 在第1, 2 阶段有效；对第3 年龄组疗法1, 2, 3 在第1 阶段有效；对第4 年龄组疗法1, 2 在第1, 2 阶段有效。表明只有14~25 岁的年轻患者，才能在治疗的最后阶段仍然有有效的疗法。

由线性规划模型的对偶形式建立预测模型，对各年龄组各种疗法下一阶段的疗效进行预测。若由某决策单元得到的实际输出大于预测输出，则该决策单元相对有效；反之，说明该种疗法对该组患者在治疗的未来阶段不再有效，应该转换疗法。

**问题（3）**如果病人需要考虑4 种疗法的成本，对（2）中的评价和预测（或者提前终止）有什么改变。

根据提供的价格疗法1~4 每天的费用分别为1.60, 3.45, 2.45, 3.65, 取最大值。显然若经济允许应采用疗法4，否则可设定包含疗效和费用的决策函数，进行决策。

#### 考虑费用的线性规划模型

将问题（2）中的输入改为4 种疗法的费用，计算结果是疗法2 的效率大

大降低，而疗法4 对第1 年龄组仍然是最有效的；疗法1 对其它年龄组有效且费用低。

可以类似地建立预测模型，并进行预测。

## 2007A题：中国人口增长预测

中国是一个人口大国，人口问题始终是制约我国发展的关键因素之一。根据已有数据，运用数学建模的方法，对中国人口做出分析和预测是一个重要问题。

近年来中国的人口发展出现了一些新的特点，例如，老龄化进程加速、出生人口性别比持续升高，以及乡村人口城镇化等因素，这些都影响着中国人口的增长。2007 年初发布的《国家人口发展战略研究报告》（附录 1）还做出了进一步的分析。

关于中国人口问题已有多方面的研究，并积累了大量数据资料。附录 2 就是从《中国人口统计年鉴》上收集到的部分数据。

试从中国的实际情况和人口增长的上述特点出发，参考附录 2 中的相关数据

（也可以搜索相关文献和补充新的数据）建立中国人口增长的数学模型，并由 此对中国人口增长的中短期和长期趋势做出预测；特别要指出你们模型中的优点 与不足之处。

附录 1 《国家人口发展战略研究报告》

附录2 人口数据《中国人口统计年鉴》中的部分数据）及其说明

## 2007 A题评阅要点

模型的建立必须考虑我国近年来人口发展的总趋势例如老龄化进程加速、出生人口性别比持续升高、乡村人口城镇化等因素。以下几点供阅卷参考。

1. 分析数据（据此做出合理的假设）  
对于一个地区或一类人群而言：

人口的自然增长率 = 出生率 - 死亡率；

而

出生率 = 育龄妇女的生育率 × 育龄妇女在总人口中所占的比例。

利用附录2 中数据对上述相关参数进行分析，可以看到：

（1）生育率：城镇和农村育龄妇女的生育率有下降趋势，但农村总体数据偏高，因此有必要将城镇人口和农村人口（或比例）分离开来考虑；

（2）出生人口的男女性别比：通常应当是 105 : 100 左右，但数据分析表明远超过了这个比例，且农村出生人口的性别比例又超过城市。这影响到未来育龄妇女在总人口中的比例以及出生率。因此有必要将男女性别比的因素考虑进去。

（3）死亡率：不同年龄段的死亡率都是不同的：0——3 岁孩子死亡率较高，

3——50 岁死亡率较低的幼青壮年期，50 岁以上的人死亡率不断升

高。

可以把3——50 岁年龄段人口的死亡率看成是接近于零。

(4) 人口的年龄分布：从某一年(比如 2005 年)分年龄段的人口数量分析，并

结合死亡率的观察，可以看出在过去50 年的人口出生的变化情况，也可 以看出中国人口未来的老龄化趋向。

(5) 在《中国人口统计年鉴》(附录2)中的人口数据都是按市、镇和乡(或 县)给出的。但按“报告”附录 1)市和镇放在一起，称为“城镇，”而乡单列，称为“乡村”或“农村”。本题“城镇化”也可以这样理解。这时就需要对“城镇”的每个要用到数据进行加工，即按附录 2 最右边 给出的每年人口的抽样调查数据进行换算。

(6) 附录 2 中给出的数据都是抽样数据，因此都是相对的。如需要用到每年

各类人口的总数据，可在政府网站上查到。比如，在政府公布的《中国人口现状》

[http://www.gov.cn/test/2005-07/26/content\\_17363.htm](http://www.gov.cn/test/2005-07/26/content_17363.htm)

中就有2005年的详细数据。从中也可以看出，附录2中给出的2005年人口数据就是大约1%的抽样调查数据。从网上及文献中还可以查到更多数据，这里不一一列出。

(7) 在本题的数据说明中曾指出“个别数据有异常，原文如此，可酌情处理”。实际上，这些异常数据在个别年份才会出现，如果把他们从总体上进行拟合，对整个模型的建立应该是没有很大影响的。而且一些异常通过查阅其他资料也可得到纠正。附录2中最大的异常是关于2003年育龄妇女的生育率数据，这里按原《年鉴》中说法以千分比计，实际应该是百分比，相差十倍（在该附录最后几行给出的总生育率中已把它们恢复正常）。正如一开始及下面所强调的，本题的重点是要根据我国近年来人口发展的总趋势和特点来建立模型，因此，必须从总体上来把握数据。

(8) 如果有学生考虑人口分布的地区和产业等差别，也是可以的，但需要自己补充相关数据。

## 2. 建立模型

(1) 基本假设：从中国人口增长的特点出发，可以提出如下假设作为建立模型的依据：老龄化进程加速；农村育龄妇女的生育率明显高于城镇；出生人口的男女性别比持续升高；农村人口不断城镇化。根据这些假设，区分模型中的状态变量和参数。

(2) 状态变量的设置根据上述假设和数据分析可以把城镇人口与农村人口，及男女性别区分开来。另一方面，注意到育龄妇女的生育率是决定

人口增长的主要因素，可以对人口的年龄分布按不同年龄段进行简化，以减少状态变量。

(3) 老龄化的影响：数据分析表明，在每一类人(比如城镇妇女)中，老年人口在该类总人口中的比例逐年上升，而青壮年和幼年人口比例逐年下降。可以通过对人口矩阵的迭代，或用其他模型方法，找出他们上升或下降的一般规律。

(4) 农村人口以一定规律转化为城镇人口。



(5) 人口增长有迟滞效应。在附录1 中提到“由于20世纪80年代至90年代

第三次出生人口高峰的影响”，导致在2005-2020年出生人口数量会“出现一个小高峰”，这就是迟滞效应。如果在模型中适当引进迟滞项，就可预测到这种“小高峰”现象。当然，此时的初值应当是一个近几十年来的 人口变化函数。这个函数可以从网上搜索到，也可以用1(4)提示的方法找出。当然，这可能有一定难度，不一定作为必须要考虑的要求。如果有同学考虑到这种迟滞效应，应该说是是有创意的。

(6) 由上述 (1) 至 (4)，即可建立起关于中国人口增长的数学模型。它可以是 微分方程组或差分方程组的初值问题。如果还考虑到 (5)，则会是迟滞微分方程组。方程组中出现的各个参数和用到的初值可以通过附录2中给出的数据，并参考上面1(6)的说明，来确定。

**3. 模型的求解和预测** 用适当的数值方法求解所得的数学模型，即可得到今后几十年的预测结

果。可以把这些结果与附录 1（《国家人口发展战略研究报告》）或其他文献 中的结果进行对照分析。如出现较大差异，则应找出原因，予以改进，或提出自己的看法。

#### 4. 关于文献与模型的“自我评价”

(1) 本问题提供的文献(附录 1)是要求重点阅读的。此外，还应列出自己查阅 过并引用的比较可靠和权威的文献，包括论文、著作和数据，都要注明出 处。如果是网上的，则应列出网址。

(2) 在评阅学生对自己模型的优点与不足的评价时，一定要注意是否实事求是。

## 2007 B题：乘公交，看奥运

我国人民翘首企盼的第 29 届奥运会明年 8 月将在北京举行，届时有大量观众到现场观看奥运比赛，其中大部分人将会乘坐公共交通工具（简称公交，包括公汽、地铁等）出行。这些年来，城市的公交系统有了很大发展，北京市的公交线路已达 800 条以上，使得公众的出行更加通畅、便利，但同时也面临多条线路的选择问题。针对市场需求，某公司准备研制开发一个解决公交线路选择问题的自主查询计算机系统。

为了设计这样一个系统，其核心是线路选择的模型与算法，应该从实际情况出发考虑，满足查询者的各种不同需求。请你们解决如下问题：

1、仅考虑公汽线路，给出任意两公汽站点之间线路选择问题的一般数学模型与算法。并根据附录数据，利用你们的模型与算法，求出以下 6 对起始站→终到站之间的最佳路线（要有清晰的评价说明）

- |                 |                                 |
|-----------------|---------------------------------|
| (1)、S3359→S1828 | (2)、                            |
| S1557→S0481     | (3)、S0971→S0485 (4)、S0008→S0073 |
|                 | (5)、S0148→S0485 (6)、            |
| S0087→S3676     |                                 |

2、同时考虑公汽与地铁线路，解决以上问题。

3、假设又知道所有站点之间的步行时间，请你给出任意两站点之间线路选择的数学模型。【附录1】基本参数设定

相邻公汽站平均行驶时间(包括停站时间)： 3 分钟

相邻地铁站平均行驶时间(包括停站时间)： 2.5 分钟

公汽换乘公汽平均耗时： 5 分钟(其中步行时间2 分钟)

地铁换乘地铁平均耗时： 4 分钟(其中步行时间2 分钟)

地铁换乘公汽平均耗时： 7 分钟(其中步行时间4 分钟)

公汽换乘地铁平均耗时： 6 分钟(其中步行时间4 分钟)

公汽票价：分为单一票价与分段计价两种，标记于线路后；其中分段计价的票价为：0~20 站：1 元；21~40 站：2 元；40 站以上：3 元

地铁票价：3 元（无论地铁线路间是否换乘） 注：以上参数均为简化问题而作的假设，未必与实际数据完全吻合。

【附录2】公交线路及相关信息 （见数据文件B2007data.rar）

## 2007 B题评阅要点

**命题思路** 本题根据公交线路查询系统研制的实际需求简化改编而成问题容易理解,相关参考文献也较多,但涉及到公汽与地铁线路的联系,以及换乘时间等细节的处理,加上需要处理的数据量较大,问题并不十分简单。这是一个多目标优化问题,换乘次数最少、费用最省、时间最短显然是乘客在选择乘车线路时最关心的几个目标,从该问题的实际背景来看,采取加权合成将问题转化为单目标优化问题的解题思路不太合适。比较适当的方法是对每个目标寻求最佳线路,然后让乘客按照自己的需求进行选择。本题 1、2 问要求在不知道站点地理信息的条件下给出解决线路选择问题的模型与算法,并就题目给定的数据计算得到线路选择结果,此二问主要考核建模及编程能力。第3 问加上了步行因素,建模难度更大一些。

### 问题1 不考虑地铁线路时的公交线路选择

可能主要有以下几种解法。

1、图论模型,这可能是最常使用的方法,首先要考虑如何根据不同目标建立有向赋权图(如利用不同的矩阵表示)然后再求给定点对之间的最小换乘次数或最短路。求两点间最短路有Dijkstra 算法与Floyd 算法等,但并不能将这两种算法直接套用于本问题,还需要处理好换乘和换乘时间问题,阅卷时需要重点关注。

2、规划模型,包括0-1 规划方法与动态规划方法等。

3、数据库模型,利用数据库技术直接对线路及站点数据进行搜索。

[注] (1) 本问的关键点是换乘时间的处理及最短时间线路的选择。

(2) 若算法运算时间比较长, 可事先计算出所有最佳线路, 将结果存入数据库备查。因此算法的运算时间问题不是本题的考察重点。

(3) 对于原始数据中出现的一些异常数据,同学可根据自己的理解作出假设和处理。如:

- 对于个别线路相邻站点名相同,可以采取去掉其中 1 个点或不作处理等方式,一般不会影响实例计算中线路选择的结果。
- 对于 L406 未标明是环行线的问题,无论学生是否将其当作环线处理,一般不会影响到实例的计算结果。
- 对于 L290 标明是环线,但首尾站点分别为 1477 与 1479 的问题,可将所有线路中 1477 与 1479 统一为 1477 后计算。同学也可以按照各自认为合理的方式处理,包括不当作环线,实例计算用到的是该线路中部的几个站点,一般不会影响实例计算结果。

## **问题2    考虑地铁线路时的公交线路选择**

本问可以有多种处理方法,关键是看合理性与可操作性。换乘时间的处理较第一问要复杂,需重点关注。

## **问题3    已知站点间步行时间条件下的公交线路选择**

这是比较一般的线路选择问题,更接近实际。由于增加了步行因素,每个站点的可换乘方案大大增加了,于是用图论方法处理的难度也会有很大增加。最常用的目标有:换车次数最少,乘车的总站数最少,步行的总时间最少,总车费最少等等,应该针对不同的情况分别写出模型。

## 实例结果

[注] (1) 本计算结果由命题人提供，并不一定完全准确（如最优可能仅为次优），仅供参考。此外，由于假设的不同（如对换乘时间的处理不同），结果也可能会有差异。

(2) 下表中每行第 1 目标为最优结果（带 \* 号者），其余两个目标在第 1

目标最优条件下为最优或次优结果。(表中“时间”包括起始站点处的3 分钟等 车时间)

		仅考虑公汽			同时考虑公汽与		
点		换			换		
站	1	垂	间 (	田	垂	间	田
S33 59→	换						
	垂	1*	104	2	1*	104	2
	间	2	67*	2	2	67*	2
	田	2	67	2*	2	67	2*
S15 57→	换						
	垂	2*	100	2	2*	100	2
	间	2	02	4	2	02	4
	田	2	100	2*	2	100	2*
S09 71→	换						
	垂	1*	121	2	1*	121	2
	间	2	06	2	4	05	7
	田	2	106	2*	2	106	2*
S00 08→	换						
	垂	1*	86	2	1*	86	2
	间	4	62*	5	2	6.5	5
	田	1	86	2*	1	86	2*
S01 48→	换				2*	109	3
	垂次			2	2*	90.5	5
	间	2	05	4	2	0.5	6
	田	2	100	2*	2	100	2*
S00 87→	换						
	垂	1*	68	2	0*	20	2
	间	2	40*	2	0	20*	2
	田	1	68	2*	1	68	2*



## 2008A题 数码相机定位

数码相机定位在交通监管(电子警察)等方面有广泛的应用。所谓数码相机定位是指用数码相机摄制物体的相片确定物体表面某些特征点的位置。最常用的定位方法是双目定位,即用两部相机来定位。对物体上一个特征点,用两部固定于不同位置的相机摄得物体的像,分别获得该点在两部相机像平面上的坐标。只要知道两部相机精确的相对位置,就可用几何的方法得到该特征点在固定一部相机的坐标系中的坐标,即确定了特征点的位置。于是对双目定位,精确地确定两部相机的相对位置就是关键,这一过程称为系统标定。

标定的一种做法是:在一块平板上画若干个点,同时用这两部相机照相,分别得到这些点在它们像平面上的像点,利用这两组像点的几何关系就可以得到这两部相机的相对位置。然而,无论在物平面或像平面上我们都无法直接得到没有几何尺寸的“点”。实际的做法是在物平面上画若干个圆(称为靶标),它们的圆心就是几何的点了。而它们的像一般会变形,如图1所示,所以必须从靶标上的这些圆的像中把圆心



的像精确地找到,标定就可实现。

图 1 靶标上圆的像

有人设计靶标如下,取1个边长为100mm的正方形,分别以四个顶点(对应为A、C、D、E)为圆心,12mm为半径作圆。以AC边上距离A点30mm处的B为圆心,12mm为半径作圆,如图2所示。

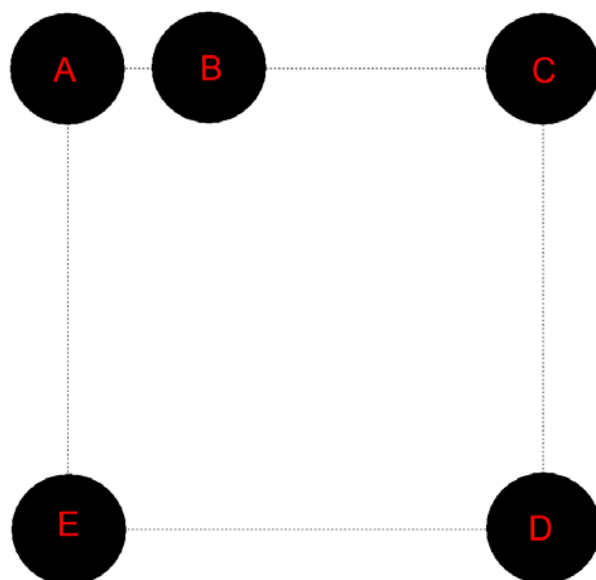


图 2 靶标示意图

用一位置固定的数码相机摄得其像，如图3 所示。

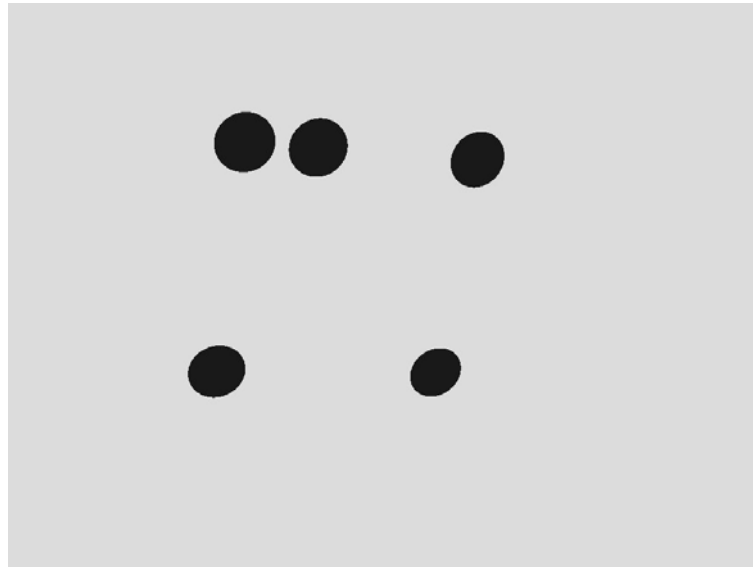


图 3 靶标的像

请你们：

- (1) 建立数学模型和算法以确定靶标上圆的圆心在该相机像平面的像坐标，这里坐标系原点取在该相机的光学中心， $x-y$  平面平行于像平面；
- (2) 对由图2、图3 分别给出的靶标及其像，计算靶标上圆的圆心在像平面上的像坐标，该相机的像距（即光学中心到像平面的距离）是 1577 个像素 单位(1 毫米约为3.78 个像素单位)，相机分辨率为  $1024 \times 768$ ；
- (3) 设计一种方法检验你们的模型，并对方法的精度和稳定性进行讨论；
- (4) 建立用此靶标给出两部固定相机相对位置的数学模型和方法。

## 2008 A题评阅要点

(1) 靶标上圆的像是椭圆,但圆心的像一般不是椭圆的形心.对给定的坐标系,由相片可获取靶标圆的像的边界坐标数据,根据这些边界点的原像落在靶标平面且落在对应圆周上的性质,利用光学成像原理可建立确定靶标平面方程和靶标圆的圆心坐标的非线性方程组数学模型,进而求得靶标圆心像的坐标.模型求解可直接求解非线性方程组,也可化为优化问题求解.由于在某些情形模型可能有多解化为优化问题后,目标函数有可能为多峰,在求解时应加以注意.

(2) 要以模型的合理性和优劣作为主要评价标准,不要以数值结果好坏作为评价的唯一标准.

(3) 模型检验是数学建模的一个重要环节.但以往重视不够.对本问题,应对于靶标平面具有已知特殊倾角的情形,分别对有无误差的情形逆向设计数据,即在靶标平面方程和圆方程已知的情况下,根据光学成像原理,计算获得圆周像的各点坐标和圆心像的坐标.利用圆周像的各点坐标数据(并加上随机误差)用建立的模型和方法,计算出圆心的像坐标,并与通过光学成像原理计算所得的圆心像坐标进行比较,检验模型与方法的有效性与稳定性.精度是一个复杂的问题,鼓励学生发挥自己的想象力加以研究.

(4) 对两部相机各自取固定在其上的坐标系,决定它们相对位置即确定这两个坐标系之间的变换关系.此变换可分解为一个平移和一个绕原点的旋转.于是确定一个三维平移向量  $t$  和一个旋转变换矩阵  $R$ ,  $R$  是一个正交阵,因此需要确定 6 个未知的参数.从靶标上若干个圆的圆心的像坐标可以得到它们分别在两个相机坐标系中的坐标.根据这些点的坐标变换关系,可得一个方程组,足以确定 6 个未知参数,从而确定变换关系.

[注] 关于最早公布的题中存在的个别错误之处地说明：按照题中所给图像，同学应该能够判断出相机分辨率是  $1024*768$ ，而不是  $1024*786$ ；如果同学按最早公布的题中所说的像距就是焦点（正确的说法应该是光心）到像平面的距离建模和计算，可能会影响到数值结果，但这些问题本质上对模型和算法及其检验、分析的影响不大。

## 2008B题 高等教育学费标准探讨

高等教育事关高素质人才培养、国家创新能力增强、和谐社会建设的大局，因此受到党和政府及社会各方面的高度重视和广泛关注。培养质量是高等教育的一个核心指标，不同的学科、专业在设定不同的培养目标后，其质量需要有相应的经费保障。高等教育属于非义务教育，其经费在世界各国都由政府财政拨款、学校自筹、社会捐赠和学费收入等几部分组成。对适合接受高等教育的经济困难的学生，一般可通过贷款和学费减、免、补等方式获得资助，品学兼优者还能享受政府、学校、企业等给予的奖学金。

学费问题涉及到每一个大学生及其家庭，是一个敏感而又复杂的问题：过高的学费会使很多学生无力支付，过低的学费又使学校财力不足而无法保证质量。学费问题近来在各种媒体上引起了热烈的讨论。

请你们根据中国国情，收集诸如国家生均拨款、培养费用、家庭收入等相关数据并据此通过数学建模的方法就几类学校或专业的学费标准进行定量分析，得出明确、有说服力的结论。数据的收集和分析是你们建模分析的基础和重要组成部分。你们的论文必须观点鲜明、分析有据、结论明确。

最后，根据你们建模分析的结果，给有关部门写一份报告，提出具体建议。

## 2008B 题评阅要点

高等教育学费标准是社会关注的热点之一，是一个相当开放的问题，许多媒体的讨论都缺乏数据的支持和定量的分析。评阅中除了题目中的明确要求外，要特别注意以下问题：

1. 应多角度、全面、综合地考虑学费标准问题。模型中至少应考虑教育质量的保证和承受能力两个方面；例如，培养成本、成本分担、承受能力、长远收益、国际比较、历史比较等方面的考虑。

2. 数据的收集非常重要。应该收集充分的、有根据、有说服力的数据，并能支持建模的结论。估计可能收集到的数据有：国民经济增长数据，教育经费的比例，国家生均拨款和其它教育投入，培养一个大学生平均每年所需费用、学校每年的运营开支、每年报考大学的人数和录取人数、学生分布结构，家庭经济收入分布、困难学生的人数、每个学生每年的学费、生活费、奖学金、助学金、贷款、捐赠款等。

3. 应该通过数据的统计分析和建模深入细致地讨论学费标准问题，并要有明确的结论。

## 2009 A 题 制动器试验台的控制方法分析

汽车的行车制动器(以下简称制动器)联接在车轮上,它的作用是在行驶时使车辆减速或者停止。制动器的设计是车辆设计中最重要的一环之一,直接影响着人身和车辆的安全。为了检验设计的优劣,必须进行相应的测试。在道路上测试实际车辆制动器的过程称为路试,其方法为:车辆在指定路面上加速到指定的速度;断开发动机的输出,让车辆依惯性继续运动;以恒定的力踏下制动踏板,使车辆完全停止下来或车速降到某数值以下;在这一过程中,检测制动减速度等指标。假设路试时轮胎与地面的摩擦力为无穷大,因此轮胎与地面无滑动。

为了检测制动器的综合性能,需要在各种不同情况下进行大量路试。但是,车辆设计阶段无法路试,只能在专门的制动器试验台上对所设计的路试进行模拟试验。模拟试验的原则是试验台上制动器的制动过程与路试车辆上制动器的制动过程尽可能一致。通常试验台仅安装、试验单轮制动器,而不是同时试验全车所有车轮的制动器。制动器试验台一般由安装了飞轮组的主轴、驱动主轴旋转的电动机、底座、施加制动的辅助装置以及测量和控制系统等组成。被试验的制动器安装在主轴的一端,当制动器工作时会使主轴减速。试验台工作时,电动机拖动主轴和飞轮旋转,达到与设定的车速相当的转速(模拟实验中,可认为主轴的角速度与车轮的角速度始终一致)后电动机断电同时施加制动,当满足设定的结束条件时就称为完成一次制动。

路试车辆的指定车轮在制动时承受载荷。将这个载荷在车辆平动时具有的能量(忽略车轮自身转动具有的能量)等效地转化为试验台上飞轮和主轴等机构转动时具有的能量,与此能量相应的转动惯量(以下转动惯量简称为惯量)在本题中称为等效的转动惯量。试验台上的主轴等不可拆卸机构的惯量称为基础惯量。飞轮组由若干个飞轮组成,使用时根据需要选择几个飞轮固定到主轴上,这些飞轮的惯量之和再加上基础惯量称为机械惯量。例如,假设有 4 个飞轮,其单个惯量分别是:



10、20、40、80  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ,基础惯量为10  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ,则可以组成10,20,30, $\cdots$ ,

$160 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  的16 种数值的机械惯量。但对于等效的转动惯量为 $45.7 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 的情况，就不能精确地用机械惯量模拟试验。这个问题的一种解决方法是：把机械惯量设定为 $40 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 然后在制动过程中,让电动机在一定规律的电流控制下参与工作，补偿由于机械惯量不足而缺少的能量，从而满足模拟试验的原则。

一般假设试验台采用的电动机的驱动电流与其产生的扭矩成正比（本题中比例系数取为 $1.5 \text{ A/N} \cdot \text{m}$ ）且试验台工作时主轴的瞬时转速与瞬时扭矩是可观测的离散量。

由于制动器性能的复杂性，电动机驱动电流与时间之间的精确关系是很难得到的。工程实际中常用的计算机控制方法是：把整个制动时间离散化为许多小的时间段，比如  $10 \text{ ms}$  为一段，然后根据前面时间段观测到的瞬时转速与/或瞬时扭矩，设计出本时段驱动电流的值，这个过程逐次进行，直至完成制动。

评价控制方法优劣的一个重要数量指标是能量误差的大小，本题中的能量误差是指所设计的路试时的制动器与相对应的实验台上制动器在制动过程中消耗的能量之差。通常不考虑观测误差、随机误差和连续问题离散化所产生的误差。

现在要求你们解答以下问题：

1. 设车辆单个前轮的滚动半径为 $0.286 \text{ m}$ ，制动时承受的载荷为 $6230 \text{ N}$ ，求等效的转动惯量。

2. 飞轮组由3 个外直径 $1 \text{ m}$ 、内直径 $0.2 \text{ m}$  的环形钢制飞轮组成，厚度分别为

$0.0392 \text{ m}$ 、 $0.0784 \text{ m}$ 、 $0.1568 \text{ m}$ ，钢材密度为 $7810 \text{ kg/m}^3$ ，基础惯量为 $10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，问可以组成哪些机械惯量？设电动机能补偿的能量相应的惯量的范围为  $[-30, 30] \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，对于问题 1 中得到的等效的转动惯量，需要用电动机补偿多大的惯量？

3. 建立电动机驱动电流依赖于可观测量的数学模型。

在问题1 和问题2 的条件下，假设制动减速度为常数，初始速度为50 km/h，制动5.0 秒后车速为零，计算驱动电流。

4. 对于与所设计的路试等效的转动惯量为 $48 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，机械惯量为 $35 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，主轴初转速为514 转/分钟，末转速为257 转/分钟，时间步长为10 ms 的情况，用某种控制方法试验得到的数据见附表。请对该方法执行的结果进行评价。
5. 按照第 3 问导出的数学模型，给出根据前一个时间段观测到的瞬时转速与/或瞬时扭矩设计本时间段电流值的计算机控制方法并对该方法进行评价。
6. 第5 问给出的控制方法是否有不足之处？如果有，请重新设计一个尽量完善的计算机控制方法，并作评价。

## 2009 A题评阅要点

因为本题涉及到一些重要概念，所以请各赛区评阅专家在阅卷前务必用比较多的时间 来研读本评阅要点， 千万不要简单地以数值结果来评分。

评阅时请注意具体情况具体对待， 特别要注意在处理误差分析时有没有闪光点。

这是一个物理模拟问题,模拟的原则是试验台上制动器的制动过程与所设计的路试时车 上制动器的制动过程理论上应该一致,所以制动过程中试验台主轴的瞬时转速与车轮的瞬时 转速理论上随时一致，制动扭矩也理论上随时一致，另外理论上制动时间也相同。

1. 设前轮的半径为  $R$ ，制动时承受的载荷为  $G$ ，等效的转动惯量为  $J$ ，线速度为  $v$ ，角速度

为  $\omega$  重力加速度为  $g$  应该利用能量法得到

$$\frac{1}{2} G v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega_0^2, v = R \omega. \quad \text{从而 } J = GR^2/g.$$

$$2 \quad g^2$$

利用数据计算得到  $J = 52 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。(计算结果如不正确适当扣分，但不影响后面的分数)

2. 记飞轮的外半径为  $R_1$ ，内半径为  $R_0$ ，厚度为  $h$ ，密度为  $\rho$ ，则飞轮的惯量为

$$J = \frac{1}{2} \rho \pi h (R_1^4 - R_0^4)$$

2 — , 利用数据计算得到三个飞轮的惯量分别为  $30 \text{ kg} \cdot \text{m}$  、  
 $0 \text{ } 60 \text{ kg} \cdot \text{m}$  、  
 $120 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  , 它们和基础惯量一起组成的机械惯量可以有 8 种情况: 10,  
 40, 70, 100, 130,  
 $160, 190, 220 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。

对于问题 1 中得到的等效的转动惯量, 用电动机补偿能量对应的惯量(简称电机惯量)有两种方案:  $12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  或  $-18 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。(写出一个即可, 绝对值较小的模拟效果较好)

3. 导出数学模型的一种方法为: 记需要模拟的单轮的等效的转动惯量为  $J$  , 主轴转速为

$\omega(t)$  , 机械惯量  $J_1$  , 则  $J$  关于主轴的制动扭矩  $M(t)$  为,

$$M(t) = J \frac{d\omega}{dt} \quad \text{——} \quad (1)$$

$J_1$  关于主轴的扭矩为

$$\frac{d}{dt} J_1 \quad (2)$$

从而电流产生的扭矩  $M_e(t)$  应为

$$\frac{d}{dt} M_e(t) = \frac{d}{dt} (J_1 - J) \quad (3)$$

由于电机的驱动电流  $I(t) = k_0 M_e(t)$ ，所以

$$\frac{d}{dt} I(t) = k_0 \frac{d}{dt} (J_1 - J) \quad (4)$$

控制时可由  $\dot{J}_k$  的测量值差分后得到  $I_{k+1}$ 。

或者由(3)除以  $\frac{d}{dt} J$ ，则有

$$\frac{d}{dt} \frac{M_e(t)}{J} = \frac{d}{dt} \frac{J_1 - J}{J} \quad (1), \text{ 得到}$$

$$I(t) = k_0 \frac{d}{dt} \frac{J_1 - J}{J} M(t)$$

(5)

控制时由  $M_k$  的测量值得到  $I_k \cdot 1$ 。(4)和(5)就是驱动电流依赖于两个可观测量的数学模

型。

记初速度为  $V_0$ ，末速度为  $V_1$ ，车轮的滚动半径为  $R$ ，制动时间为  $T$ ，则

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{V_1 - V_0}{RT} = \frac{50 \cdot 10^3 / 3600}{0.286 \cdot 5} = -9.71 \text{ (rad / s}^2\text{)}$$

$$I = k \frac{J_1}{J} \cdot \frac{d\omega}{dt} = k \frac{J_1}{J} \cdot (-9.71) = -262.17 \text{ A}$$

电机的驱动电流分别为174.78 A（电机惯量12）或 -262.17 A（电机惯量 -18）。

4. 将时间离散化：把整个刹车过程等分为  $N$  个时间段，记  $t_k = k \Delta t$ ， $\Delta t$  为时间步长，第  $k$  个时间段为  $[t_{k-1}, t_k]$ 。设  $t_k$  时的角速度为  $\omega_k$ ，制



动扭矩为  $M_k$ ，等效的转动惯量为  $J$ ，初始角速度为  $\omega_0$ 。则在整个制动过程中，理论上能量应该减少

$$E_N = \frac{1}{2} J (\omega_0^2 - \omega_N^2) - \sum_{i=1}^N M_i \omega_i \Delta t$$

而实际上能量减少为

$$E_N = \frac{1}{2} J \omega_N^2 + \sum_{i=1}^N M_i \omega_i \Delta t$$

于是，相对误差定义为

$$RE = \frac{\left| \frac{1}{2} J (\omega_0^2 - \omega_N^2) - \sum_{i=1}^N M_i \omega_i \Delta t \right|}{\frac{1}{2} J (\omega_0^2 - \omega_N^2)}$$

计算得到总能量的相对误差为  $RE = 5.30\%$ 。

**注：**这里是用总能量的相对误差作为评价标准。不排除其他的评价标准和方法。

5. 记第  $k$  时间段末观察到制动扭矩和角速度值分别为  $M_k$  与  $\omega_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

用一阶的形式构造递推控制方法可以有多种方式,就是只采用前一时间段的信息决定

本时间段的电流值。例如,由3.的数学模型可知  $I(t) = k \cdot J_1 + J_M$  (t), 其中  $k, J$ ,

$$0 \quad J \quad 0$$

$J_1$  都是已知常数。

$I_k = J_1$ ,  $k = 1, 2, \dots, n + 1$ ,  $I_1 = 0$ , 这设计控制  $J_1 + J_M$  就是一种控制方法。  
策略为  $k_0 = \frac{J_1}{J}$

$$k$$

如果不是这种策略那么应该说明怎样通过3.的数学模型在怎样的假设下设计的策略, 否则应扣分。

还应该对给出的控制策略进行评价。

6. 应该分析出一阶递推的控制方法不够好, 然后设计利用前面已知的更多信息决定本时段 电流的控制方法, 设计中使总体能量误差越小越好。

例如, 在要决定第  $k + 1$  步的电流值时, 注意到此时前面  $k$  步的累积误差可以用已

经知道的  $M_1, M_2, \dots, M_k$  表述出来, 即理论上的制动能量为

$J_1 + J_2 + \dots + J_k$ , 而  $M_1 + M_2 + \dots + M_k$ , 二者之差为能量误差。于是让第  $k + 1$  实际制动能量为

$$\begin{array}{lcl}
 2 & \bullet & i \quad i \\
 0 & & i \bullet 1 \\
 k & &
 \end{array}$$

步的电流值将这个能量误差补偿上，再加上第  $k+1$  步原来应该的电流值。这样总能量误差就会随着  $k$  的增大而不断减小。

## 2009B题 眼科病床的合理安排

医院就医排队是大家都非常熟悉的现象，它以这样或那样的形式出现在我们面前，例如，患者到门诊就诊、到收费处划价、到药房取药、到注射室打针、等待住院等，往往需要排队等待接受某种服务。

我们考虑某医院眼科病床的合理安排的数学建模问题。

该医院眼科门诊每天开放，住院部共有病床 79 张。该医院眼科手术主要分

四大类：白内障、视网膜疾病、青光眼和外伤。附录中给出了 2008 年 7 月 13 日至2008 年9 月11 日这段时间里各类病人的情况。

白内障手术较简单，而且没有急症。目前该院是每周一、三做白内障手术，此类病人的术前准备时间只需1、2 天。做两只眼的病人比做一只眼的要多一些，大约占到60%。如果要做双眼是周一先做一只，周三再做另一只。

外伤疾病通常属于急症，病床有空时立即安排住院，住院后第二天便会安排手术。

其他眼科疾病比较复杂，有各种不同情况，但大致住院以后 2-3 天内就可以接受手术，主要是术后的观察时间较长。这类疾病手术时间可根据需要安排，一般不安排在周一、周三。由于急症数量较少，建模时这些眼科疾病可不考虑急症。

该医院眼科手术条件比较充分，在考虑病床安排时可不考虑手术条件的限制，但考虑到手术医生的安排问题，通常情况下白内障手术与其他眼科手术（急症除外）不安排在同一天做。当前该住院部对全体非急症病人是按照FCFS(First come, First serve) 规则安排住院，但等待住院病人队列却越来越长，医院方面希望

你们能通过数学建模来帮助解决该住院部的病床合理安排问题，以提高对医院资源的有效利用。

问题一：试分析确定合理的评价指标体系，用以评价该问题的病床安排模型

的优劣。

问题二：试就该住院部当前的情况，建立合理的病床安排模型，以根据已知的第二天拟出院病人数来确定第二天应该安排哪些病人住院。并对你们的模型利用问题一中的指标体系作出评价。

问题三：作为病人，自然希望尽早知道自己大约何时能住院。能否根据当时住院病人及等待住院病人的统计情况，在病人门诊时即告知其大致入住时间区间。

问题四：若该住院部周六、周日不安排手术，请你们重新回答问题二，医院的手术时间安排是否应作出相应调整？

问题五：有人从便于管理的角度提出建议，在一般情形下，医院病床安排可采取使各类病人占用病床的比例大致固定的方案，试就此方案，建立使得所有病人在系统内的平均逗留时间含等待入院及住院时间最短的病床比例分配模型。



## 2009 B题评阅要点

**命题思路：**本题来源于人们常见的实际问题，问题本身比较容易理解，学生很自然地会将其归类于排队论问题，但由于问题本身存在较多的细节需要处理，如直接应用排队论理论解决问题可能会比较困难，可以考虑应用仿真方法解决问题。本题的主要考点为：(1) 分布拟合检验；(2) 合理的评价指标体系；(3) 仿真方法应用；(4) 满足一定置信度的统计预测模型的建立；(5) 排队论优化模型的建立。本题解题方法可能会比较多，结果也未必一致，评阅时主要应以解题过程中体现出的对问题的理解程度与建模能力为依据。

### 必要的假定与数据检验

根据数据和文献资料,对病人预约排队的分布以及手术后住院时间的分布作适当拟合和 检验，做出必要的假定。因数据中无男女性别数据，可假定无性别限制。

**第一问：**在一般的排队系统中，系统内平均逗留时间是主要的优化指标，但我们当前 面临的是一个超拥挤系统，服务员（病床）始终没有空闲时间，因此，从长期来看，这一指 标是一个常值，由系统服务能力及病人到达数量所决定，无法优化。本问题中需要优化的主 要指标是病床有效利用率和公平度，这两个指标可以有各种不同的定义，其合理性是评分依 据。此问主要考核对问题的考虑是否全面、周到，对问题实质的理解是否到位。

## 第二问：

主要优化目标为：提高病床有效利用率以及提高公平度。

由于问题的复杂性，很难利用现成的排队论结论来处理，采用仿真方法是一种选择。就提高病床有效利用率而言，病人术后住院时间是一个不可优化的量，所以只能在术前

等待时间上作文章。经对问题的分析可知：对白内障病人的入院时间加以限制成为提高效率的必然选择。需要制定一种对白内障病人的“可入院日”加以一定限制的方案，并与 FCFS (First Come, First Serve, 先来先服务) 方案进行比较。

本问主要考核能否协调处理好提高病床有效利用率及提高公平度之间的关系，给出一个相对合理的病床安排模型，以及仿真计算的能力，仿真步骤应清晰交代。

### 第三问：

此问希望学生给出一个满足一定置信度（例如：95%）的预约住院时间区间，并且区间长度越短越好。这里介绍一种方法——自适应区间方法：根据当前系统内（含住院及等待）人数，利用该类病人每日出院人数的统计平均值，计算得到当前病人预计住院时间，然后再通过统计数据得到置信度为95%的置信区间，并通过仿真方法检验其效果，该方法对当前排队人数有一定的自适应功能。

本问可以有其他各种解法，只要思路合理，效果好，步骤清晰即可。

若仅按照住院平均时间给出一个预计住院时间（不是区间）应视为此问未完成。

### 第四问：

与问题二的分析相同，仍采用“入院限制方案”，但简单沿用第二问方法进行仿真的结果将不理想，主要原因是对视网膜与青光眼病人而言，会造成病床使用效率降低，需改进手术时间安排。如果采取“二四方案”，即周二、周四为白内障病人手术时间，周一、三、五为其他病人手术时间，病床使用效率会有所提高。

此问评分比重应小于前两问。

### 第五问：

#### 服务强度平衡模型

基本思想：当各类病人构成的排队系统的服务强度相同时，总的系统服

务效率达到最佳。

五类病人排队系统的参数分别记为：

平均到达率  $\lambda_i$  ,  $\mu_i$   $m_i$   $i = 1, 2, 3, 4, 5$   
 平均服务率 , 病床数  $m_i$  ,

系统服务强度  $\rho_i$   $i = 1, 2, 3, 4, 5$  , 总 5  
 度:  $\rho_i$   $\rho_i$  床位数:  $m_i$   $\rho_i$   

$$\frac{\lambda_i}{\mu_i}$$
 ,  $\rho_i$   

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$$

当各系统服务强度相等  
 时可得,

$$x_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^m \lambda_j} \quad i = 1, 2, 3, \dots, m$$

其中,  $\lambda_i$ ,  $\mu_i$  可以由统计数据得到。按上述比例得到的各类病人床位比例即为最佳比例。实际操作时, 急症病人床位数可以根据需要作变动。

如果利用排队理论求解此问, 要注意此时由于服务时间不服从负指数分布, 故不是 M/M/m 系统, 而是M/G/m 系统 (G 代表一般分布) 故不能直接应用M/M/m 模型的结论, 可以通过经验近似公式来建立两个系统之间的联系, 然后应用M/M/m 模型的结论。

亦可通过模拟计算得到相应结论。此问评分比重大致可与第四问相同。

## 2010高教社杯全国大学生数学建模竞赛A题评阅要点

[说明]本要点仅供参考，各赛区评阅组应根据对题目的理解及学生的解答，自主地

进行评阅。

该问题是来自于加油站设备研究与生产企业的实际课题，问题由两大部分组成：

(1) 为了观察检验罐体变位对罐容表的影响，在已知变位参数的情况下，检测出油位高度和油量的对应数值，建模分析罐容表的变化规律，并给出修正的罐容表，属于“正问题”。

(2) 根据实际检测数据，正确识别罐体是如何变位的，具体变了多少？同时要给出罐容表的修正标定方法和结果，属于“反问题”。

具体需要把握以下几个方面：

### 第一部分：小椭圆型实验罐的有关问题

(1) 要明确给出小椭圆型油罐正常体位（无变位）的不同油位高度与储油量的计算模型和公式，正确的结果（具体表达形式不唯一）是：

$$V = \left[ \frac{1}{2} \pi ab + \frac{a^2 \sqrt{2bh - h^2}}{2} + ab \arcsin \frac{h - b}{b} \right] L,$$

其中  $a$ ,  $b$ ,  $L$  分别为罐体截面椭圆的长半轴、短半轴和罐体长度， $h$  为罐内的油位高度。通过代入几

何参数计算得到正常（即标准）的罐容表对应值。

表1：正常情况下小椭圆罐的罐容表部分结果

油位	油	油位	油	油位	油	油位	油
1	16	4	11	7	24	1	36
2	45	5	16	8	29	1	39
3	80	6	20	9	33	1	41

(2) 讨论罐体变位的影响，要求给出纵向倾斜变位后修正模型，用不同方法可能有不同的表达形式，但需要分别考虑罐体两端有油/无油的不同情况。将变位参数代入模型，计算出修正后的罐容表标定值，并与正常的标定值进行比较，分析罐体变位的影响。实际上，对于纵向倾斜变位的影响明显，最大误差在257L以上，平均误差达到190L以上，平均相对误差达30%以上。

表 2：小椭圆罐的修正罐容表的部分结果（ $\times 10^3$ ）

油位	油	油位	油	油位	油	油位	油
----	---	----	---	----	---	----	---

	70.	4	965.	7	2232	1	3450
	281.	5	1371	8	2661	1	3776
	595.	6	1798	9	3072	1	4012

**第二部分：实际大储油罐的有关问题**

（1）根据储油罐纵向的变位方向，对于不同的油位高度，分别考虑油罐的两端有油和一端有油的情况建模分析，可以得到罐内实际储油量  $V$  与纵向倾斜变位参数  $\cdot$ 、横向偏转变位参数  $\cdot$  和油位高度  $h$  的关系模型，即  $V \cdot F(\cdot, \cdot, h)$ 。详细的解析模型表述形式比较复杂，重在分析过程，注意油罐两端含油的不同情况。

当然，也可能通过实际数据采用数值方法、工程方法或几何方法等近似方法实现，但应关注引入变位参数的方法和表示形式的合理性。

（2）必须明确给出变位参数的辨识准则。因为实际罐内油量初值未知，所以罐内储油量的准确值是未知的。由附件 2 的检测数据可以知

道不同时刻的出油量  $\cdot V^*$ ，同时可以计算出相应油位高度的改变量  $\cdot h \cdot h \cdot h$ ，并由模型表达式

$$V \cdot F(\cdot, \cdot, h)$$
 计算得到实际储油量的改变量  $\Delta V_i \cdot F(\cdot, \cdot, h_i) \cdot F(\cdot, \cdot, h_{i+1})$ ，问题可归结为求解非线性最小二乘问题：

$$\min_{V^*} S(\cdot, \cdot) = \sum_{i=1}^n (V_i - V^*)^2$$

$$\min S(\cdot, \cdot) = \sum_{i=1}^n (V_i - V^*)^2, \text{ 或 } \min S(\cdot, \cdot) = \sum_{i=1}^n (V_i - V^*)^2$$

利用附件2 中的部分数据如前半部分借助于工具软件或各种数值方法求解得到参数估计值  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ 。

其具体的数值用不同的方法会有差别，但结果应是纵向倾斜变位角  $\hat{\alpha}$  略大于  $2^\circ$  度，横向偏转变位角  $\hat{\beta}$  影响不敏感。

如果直接使用附件2 中的显示储油量  $V_i$  和对应的  $h_i$  做参数估计，即求问题

$$\min_{V^*} S(\cdot, \cdot) = \sum_{i=1}^n (V_i - V^*)^2$$

的解，这是不对的，因为  $V_i$  是无变位时的显示储油量。若储油量的体积公式  $V \cdot F(\cdot, \cdot, h)$  是正确 的，则用该方法得到的参数  $\hat{\alpha}$  值会很小。

如果经分析说明横向偏转变位的影响不大，则可以直接考虑纵向变位的单参数辨识。

(3) 根据修正模型  $V \cdot F(\cdot, \cdot, h)$  及参数估计值  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ ，可以得到变位后的罐容表（参见表3 并利用附件2 的实际检测数据（如后半部分）分析检验模型的正确性与方



法的可靠性。

表 3：变位后储油罐的修正罐容表部分结果（使用参数  $\cdot \cdot 2.11^0$  ,  $\cdot \cdot 4.31^0$  ）

油位高	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1
油量/L	35	1	2	3	5	7	9	1	1	1
油位高			1	1	1	1	1	1	1	2
油量/L	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4
油位高			2	2	2	2	2	2	2	3
油量/L	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6

\*\*用不同的方法，结果会有误差。

（4）为便于比较计算结果，这里给出实际储油罐无变位情况的罐容表部分标定值（见表4）

表4：无变位情况下油罐的罐容表部分结果

油位高	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
油量/L	59	16	31	47	66	87	11	13	15	18
油位高	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
油量/L	21	23	26	29	32	35	37	40	43	46
油位高										
油量/L	48	51	53	55	57	59	61	62	64	64

本参考要点给出的仅是一种可行解决方法，学生可以使用各种数值方法、工程方法和近似处理方法，请根据实际情况评判。

## 2010高教社杯全国大学生数学建模竞赛B题评阅要点

[说明]本要点仅供参考，各赛区评阅组应根据对题目的理解及学生的解答，自主

---

地进行评阅。

本题是一道比较开放的题目，同学对问题的理解和所关注的侧面（角度）的不同，会导致答卷 的多样性。以下几点在评阅中值得特别关注：

1. 影响力的定义，即因素的选定：考虑到3天时间不太可能进行一个全面的影响力分析，如何恰当地选择一个影响力的侧面极其相关因素是解题的基本前提。容易考虑到的影响力包括经济、旅游、社会、文化等多个方面，也可以是一个较小的侧面（比如表演、自愿者、摄影）。要求有明确具体的定义，要有合理的论证，要有数据支撑。

2. 因素的组织结构模型和有关信息的搜索：因素的相关性、信息的完备性等都是值得注意的问题。鼓励直接从网络采集因素数据，比如词汇搜索量、点击率等等。

3. 定量建模，数据的收集和分析：要注意模型的合理性，注意数据之间的可比性与归一化。鼓励纵向（时间）和横向（其它重大事件）的比较。

4. 科学、直观地表达结论：结论一般不应该是一个简单常识。

张愿章个人

感受：一、评委

工作量

评阅论文时间两天16 小时，除去标准研讨2 小时，每天休息1 小时，一般12 小时完成115-120

篇论文，10 篇/小时，即6 分钟/篇；第3 天为分数校正时间。

所以正文要控制在15 页以内，当数据较多时正文只标出处（数据放附件内）像GM(1,1)、层次分析法等常见模型评委均很熟悉正文不要再讲原理，除非你论文不够 10 页。

二、论文打分

每篇论文 3 人评，每个评委独立评阅，再把评委分数标准化，其公式为：

$$x_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{S_j} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, m$$

其中：

$$S_j = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2}$$

$x_{ij}$  为第  $i$  个评委对  $j$  人的原始分， $\bar{x}_j$  的标准分， $\bar{x}_i$  为第  $i$  个的均分， $S$  为其方差

—  $\bar{x}$  为所有评委的均分， $\sigma$  为标准差。

在评阅中如同一论文3 评委分差大于19 必须重评，统一不了请第4 人来评。

三、论文违规问题 要严格按论文规范（字体、字号、间距、页边距等）绝不能有页眉、目录等正文无关内容，摘要和关键词要单独一页，两部分中间不用空太多。 四、关于2010B 题

研究内容大多是旅游、经济、就业方面，个别是居民幸福指数、公民意识、城建、科技带动、

低碳、文化、媒体、官网的，用到方法：GM(1, 1)、层次分析法、模糊综合评判、生产函数、回归、拟合、时间序列、BP 网络，个别用方程、主成分、本底趋势线……

注意：方法要做的完整，如AHP 要灵敏度检验，回归对函数要检验(显著性、 $t, f, r^2$ )

2010 年全国获奖比例：河南省推荐到全国组委会98 个，其中1、2 等奖各49，最终获1 等奖6 个，二等奖63 个，分别占推荐总比例的6.01%和70.4。

## 2010高教社杯全国大学生数学建模竞赛B题评阅细则

B 题是开放性很强的题目，要更多关注论文的内容、建模方法和模型的表达形式、数据收集的可靠性和数据的处理方法，以及评价结果的可信度。重点关注研究内容和研究方法等方面有特设的论文。 **1. 摘要 10 分，4 分起评。**

要求清除阐述所做的工作，包括研究的内容、研究的方法、数学模型、求解方法、主要的结果和特色。

**注意：大多评委基本以摘要定全文。根据摘要对论文按档次分类，再进行评阅，其重要性可见一斑。**

### 2. 论文的主题内容（80 分）

1) 研究对世博影响侧面（角度）及相关因素的分析（30 分）

a. 研究侧面明确，与世博会的密切程度，特色性，影响的长远性。问题不宜过大，可能更多的讨论旅游、经济、GDP 等短期的影响因素，更应关注世博会后的影响明显的方面，如政治、社会、精神、人文、科技、环境等方面的研究。

b. 研究侧面相关因素分析要具体、详实 2)

数据信息的手机和处理（10 分） 数据的类型和

来源可靠性；数据的分析与预处理方法。 3) 模

型的建立于求解（30 分）

建模方法的适用性和科学性，建模过程的清晰性，定量模型的正确性，求解算法和结果的正确性。 4) 结果分析（10 分） 问题的结果和结论的可信度、科学分析。要重点关注对世博会主题的影响力。

### 3. 总体印象（10 分） 论文结构、语

言的表述、模型的假设、创新点。

## 2011 高教社杯全国大学生数学建模竞赛 A 题评阅要点

[说明]本要点仅供参考,各赛区评阅组应根据对题目的理解及学生的解答,自主地进行评阅。本问题的数据来源于某城市对土壤环境的实地监测。评阅时,应着重注意数学模型的建立、计算方法(或所选软件的程序语句)及选择该方法的理由。

(1) 可用插值拟合的方法获得各重金属污染物浓度的空间分布。再参考由背景值确定的阈值,定量分析城区各区域的污染程度。由于空间数据是不规则的,较好的方法是用散乱数据插值,例如Kriging插值、Shepard插值等。也可以用其他方法插值拟合,但应明确所使用的方法,并作出分析,不能只简单套用软件。各个污染元素浓度的最大值与插值后浓度的最大值距离不会太远。

(2) 分析污染产生的原因,必须有充分的数据分析以及明确的结论。例如,可以根据各区域的污染浓度信息进行聚类,考察污染物出现的相关性,发现某些污染物结伴出现(如Cr与Ni, Cd与Pb的相关性较高),这与污染物产生的原因是密切相关的,由此可大致确定出产生这些污染的原因。:

(3) 本小题可以在不同的假设下建立相应的模型,但必须有合理的假设、建立明确的数学模型,并根据模型和所给的数据进行数值计算。例如,由于雨水的作用是重金属在土壤表层中传播的主要原因之一,可以假设传播以对流形式为主,由此建立对流方程,并以给出的重金属污染物浓度数据作为初始值(实际上是终值),从而得到偏微分方程的定解问题。类似于(1),采用插值拟合的方法,可以得到地形高度函数。利用特征线法,可以得到各区域在各个时间点上的重金属污染物浓度数据,从而可以得到各时间的污染范围,由此确定出污染源的位置。

(4) 本问题只给出一个时间点上的数据,信息量明显不足,需要补充更多的信息。如果学生考虑到多个时间点上的采样信息,给出更好的演化模式,应予以鼓励。

## 2011 高教社杯全国大学生数学建模竞赛 B 题评阅要点

[说明]本要点仅供参考,各赛区评阅组应根据对题目的理解及学生的解答,自主地进行评阅。针对这个题目,评阅时请注意“数学模型、求解方法、结果与分析”这三个方面。数学模型:尽量用数学语言、符号和公式表述,优化模型要给出明确的决策变量、目标函数和约束条件,表述准确全面。求解方法:尽量用数学语言对算法的思路、步骤、数据的处理过程、所使用的软件给出明确的描述。结果与分析:要有明确的数值结果,表达简明、清晰。

### 第一部分:

(1)要求明确给出分配各个交巡警服务平台具体管辖范围的数学模型和具体的管辖范围(一般指路口,也可考虑相关道路)合理性主要体现在两个方面:所有平台最长出警时间尽可能短,且它们的工作量(每天的出警次数)尽量均衡,优秀论文中应该给出这两个量化指标。

参考结果:最大出警时间大于3分钟的有6个路口最长出警时间约为5.7分钟;同时应有工作量均衡性的度量指标。

(2)要求给出决定对13个路口实施封锁的数学模型,通过求解模型,具体给出

13个目标路口各由哪一个平台实施封锁,以及对每个路口的封锁时间和完成封锁的最大时间。

参考结果:最优方案的最大的封锁时间约为8分钟。

(3)模型应该考虑增设平台后,使其减少最大出警时间与各平台间工作量的均衡性效果,要具体给出需增加新平台的个数和位置,且给出其定量依据。

### 第二部分:

(1)应该根据最大出警时间和工作量的均衡性这两个因素建立模型,求解给出最大出警时间和工作量均衡性的具体指标,分析现有平台设置方案的合理性。依据这些结果,对明显不合理的提出改进方案:如增加平台或移动平台,都必须要有具体的平台数量和位置,且阐述这样做的理由和定量依据。

(2)要求给出能封锁住嫌疑人的数学模型,并给出算法和具体结果。能封锁住的基本约束条件是:“出事地点到将要封锁的路口所需时间加3分钟大于等于指派平台到封锁路口的所需时间。”在这个约束条件之下给出最优封锁方案。

## 2012高教社杯全国大学生数学建模竞赛A题评阅要点

本题目希望学生利用数学模型和附件1-3 中的数据对评酒员的品评结果给出分析，对酿酒葡萄的质量给出评价，并探讨葡萄和葡萄酒的理化指标与酒的质量的关系。

**问题1.** 附件1 中给出的是评酒员对27 种红葡萄酒和28 种白葡萄酒的两组品评结果。这两组评酒员各不相同，两组中的每个酒样都取自相同葡萄酒厂家的同一批次的产品。要求学生给出判断这两组评价结果好坏的原理、模型和方法，给出具体的结果，并对结果进行说明。好的品评结果应该是对同一酒样评价时这些评酒员之间的差距小、且 这些酒样之间的区分度明确（注：一些学生的模型和方法仅考虑评酒员的打分差距）参考：红酒中样品23 是好酒，样品12 是较差的酒。

**问题 2.** 给出根据酿酒葡萄的理化指标和葡萄酒的质量对这些酿酒葡萄进行分级

的原则、模型、算法和结果。确定酿酒葡萄质量好坏的主要依据是问题 1 中评酒员对酒 的质量的评价结果，根据这个评价结果和酿酒葡萄的各种理化指标给出确定葡萄质量的 模型，由此给出这些酿酒葡萄的分级结果。参考：分级结果中好的红葡萄应包含样品 23，差的应该包含样品12。

**问题 3.** 给出分析酿酒葡萄与葡萄酒的成分之间关系的原理、模型和方法，得到葡萄酒的理化指标是否与葡萄的理化指标相关的结论，相关时给出具体的依赖关系。求解时最好先对葡萄的理化指标（包括芳香物质）进行分类和筛选，然后进行评价。注：仅 把葡萄的全部理化指标进行简单回归不够完整。

**问题4.** 建立模型分析酿酒葡萄和葡萄酒的理化指标与葡萄酒质量之间的关系，在模型的基础上给出具体结论，并对结论给出详细的分析说明。注：评价葡萄酒质量时不一定需要包含所有的理化指标，但根据经验知道花色苷、总酚和单宁是红葡萄酒的重要指标。

附注：学生答卷中应该说明对缺失数据和异常数据的处理方式。



## 2012高教社杯全国大学生数学建模竞赛B题评阅要点

本题评阅时请注意：建模的准备工作、数学模型的建立、求解方法及过程、结果的表述、图示 及分析和第三问的创新性。

**建模的准备工作：**这部分是建模及解答的基础（集中或分散描述）

(1) 倾斜面总辐射强度的计算。这里涉及到：太阳时、时角、赤纬角、太阳高度角和太阳方位角等 概念，还需要了解斜面的阳光直射辐射强度与散射辐射强度的计算。

(2) 附件 4 提供的辐射强度是离散数据，需要将数据连续化，  
计算光照辐射量。 **问题1：只考虑贴附安装方式建立数学模型及求解**

(1) 建立模型：单目标模型或多目标模型，可考虑发电总量、单位发电费用、经济效益和投资回收年 限等。希望学生能够全面地分析问题，建立相应的优化模型。

(2) 模型求解： 要求给出求解方法的详细描述。

(3) 结果表述：结果的表述、分析要清楚明确：要求给出电池铺设图及所配用的逆变器列表。例如， 一种可行的铺设方式是：顶面可铺设40 多块A3 电池，南面可铺设30 多块C10 电池，西面可铺 设C1 和C10 电池各10 多块，东、北两面可不铺设（此例只是可行方案之一）

**问题2：考虑架空安装方式建立数学模型及求解**

(1) 重点考虑屋顶上架空的光伏电池平面的最佳倾角，约为30多度。

(2) 其他要求同问题 1.

**问题3：小屋设计**

(1) 需要计算南墙的最佳朝向， 光伏电池板的最优铺设。

(2) 根据计算结果，设计“最佳”小屋。

(3) 本问题重点是考查学生的创造性。

## 2013高教社杯全国大学生数学建模竞赛A题评阅要点

本题的难点在于通过视频资料获得车流数据，并以此为基础建立数学模型，分析部分车道被占用后，道路拥塞程度与上游来车量的关系。评阅时请关注如下方面：建模的准备工作（视频中车流数据的提取，包括视频缺失及错误的处理）模型的建立、求解和分析方法，结果的表述，模型的合理性分析及其模型的拓广。

### 问题1.

．道路被占用后，实际的通行能力需要通过视频中的车流数据得到，不能仅由交通道路设计标准估计；

．应该根据视频信息给出不同时段、不同情况下车流量的变化，需要给出通行能力的计算方法、理由的陈述或分析；

．在被占用道路没有车辆排队时，通行能力等同于单车道情形，但当被占用道路有车辆排队时，由于被占用道路车辆的变道抢行，会使道路的通行能力下降，好的结果应该明确指出这一点。

### 问题2.

2.1. 对于视频2的分析同视频1，需要通过视频2与视频1的数据对比给出通行能力的差异及原因分析；

2.2. 由于事故横断面下游交通流方向需求不同，会导致上游每条车道分配到的车辆数不同，使两种情况事故所处道路横断面形成多车道排队的机率不同，从而影响实际通行能力。如果在模型中注意到这一点则更好。

### 问题3.

3.1. 建立数学模型，给出交通事故所引起的路段车辆排队长度与事故横断面实际通行能力、事故持续时间、路段上游车流量间的关系；

3.2. 模型的形式可以多样，但需要包含上述各种因素。关键考察模型假设的合理性、参数确定的原则、及模型的可计算性。

### 问题 4.

4.1. 本问题是问题1及问题3的扩展，可利用问题1得到的通行能力及问题3的模型计算结果；

4. 2. 和问题1、3 不同，当事故横断面离红绿灯路口较近时，司机无充分时间调整车道，会增大车道占用情形，影响通行能力，模型计算中应考虑这一点；

4. 3. 附件中给出了上游路口信号灯的控制方案，会影响上游来车的流量分布，如果学生能够利

用附件给出上游路口信号灯配时方案和交通组织方案则更好。

## 2013高教社杯全国大学生数学建模竞赛B题评阅要点

本题要求对数据提取合适的特征、建立合理有效的碎纸片拼接复原模型。可以考虑的特征有邻边灰度向量的匹配、按行或按列对灰度求和、行距等。关于算法模型，必须有具体的算法过程（如流程图、算法描述、伪代码等）及设计原理。虽然正确的复原结果是唯一的，但不能仅从学生提供的复原效果来评定学生解答的好坏，而应根据所建的数学模型、求解方法和计算结果（如复原率）三方面的内容做出评判。另一方面，评判中还需要考虑人工干预的多少和干预时间节点的合理性。

**问题 1. 仅有纵切文本的复原问题** 由于“仅有纵切”碎纸片较大，所以信息特征较明显。一种比较直观的建模方法是：按照某种特征定义两条碎片间的（非对称）距离，采用最优Hamilton 路或最优Hamilton 圈（即TSP）的思想 建立优化模型。关于TSP 的求解方法有很多，学生在求解过程中需要注意到非对称距离矩阵或者是 有向图等特点。

还可能有种优化模型与算法，只要模型合理，复原效果好，都应当认可。本问题相对简单，复原过程可以不需要人工干预，复原率可以接近或达到100%。

**问题2. 有横、纵切文本的复原问题** 一种较直观的建模方法是：首先利用文本文件的行信息特征，建立同一行碎片的聚类模型。在得到行聚类结果后，再利用类似于问题 1 中的方法完成每行碎片的排序工作。最后对排序后的行，再作纵向排序。

本问题的解法也是多种多样的，应视模型和方法的合理性、创新性及其有效性进行评分。例如，考虑四邻近距离图，碎片逐步增长，也是一种较为自然的想法。

**问题 3. 正反两面文本的复原问题** 这个问题是问题 2 的继续，基本解决方法与问题2 方法相同。但不同的是：这里需要充分利用 双面文本的特征信息。该特征信息利用得好，可以提升复原率。

在阅卷过程中，可以考虑学生对问题的扩展。例如，在模型的检验中，如果学生能够自行构造 碎片，用以检验与评价本队提出的拼接复原模型的复原效

果，可考虑适当加分。

阅卷时应有程序，程序的运行结果应和论文给出的结果一致。

# 2014高教社杯全国大学生数学建模竞赛A题评阅要点

对本问题应该给出合理的建模假设，譬如：惯性坐标、二体问题等，并加以分析说明。

问题 1：在已知的条件下，确定嫦娥三号在环月轨道上近月点与远月点的相对位置和速度

(1) 建立合理适用的坐标系。

(2) 对嫦娥三号进行受力分析，建立其运动学和准备轨道的数学模型（譬如：微分方程等模型）。

(3) 通过求解数学模型得出数值结果。 问题 2：确定软着陆轨道与 6 阶段的控制策略

由问题对着陆轨道 6 个阶段的要求，每个阶段都应给出起止状态（速度和位置）和最优控制策略（推力大小和方向），以满足各阶段起止状态的需求。

(1) 建立各阶段的最优控制模型，明确给出控制变量、状态变量、状态方程、约束条件和目标函数。

(2) 在粗避障和精细避障阶段选择落点时，需要综合考虑月面的平整度、光照条件、着陆控制误差等因素，确定最理想的着陆地点。

(3) 各阶段的控制问题是一个无穷维的优化问题，可以通过合理的简化（譬如离散化为有限维的优化问题）求解得出合理的数值结果，即最优的控制策略。

(4) 若未按题目要求按 6 阶段设计最优控制策略，而照抄某些文献的两阶段或三阶段的处理方法，不能视为较好的论文。

问题 3：着陆轨道设计和控制策略的误差分析与敏感度分析

对问题的稳定性有影响的误差包括：

(1) 着陆准备轨道参数（近月点位置和速度）的误差； (2) 分阶段分析发动机推力（大小和方向）的控制误差；

(3) 模型的简化假设、模型的近似与求解过程等综合分析误差；

如果能针对以上几个因素对问题结果的影响及程度做相应的敏感

度分析，应给予肯定。

## 2014高教社杯全国大学生数学建模竞赛B题评阅要点

本题主要考查学生对直纹面的描述、建模和计算能力。

问题 1. 对于给定的材料和设计目标建模。要求模型能表达从平板到最终桌子成形的变化过程。可以用每根木条的动态变化过程的函数形式表达,也可以用直纹面的参数形式表达。同时要求明确给出桌腿木条开槽的长度等设计加工参数。桌子成形后的桌腿边缘线可以用离散的点表达(如每根木条下端中点的空间坐标),也可用连续的曲线方程表达(如木条下端中点所在的空间曲线方程)。寻求连续的曲面和曲线方程的方案应给予鼓励。钢筋应理解为没有弹性、不可弯曲的直线。

问题 2. 本小题限定为长方形平板材料和圆形桌面。要求先就任意给定的桌子高度和桌面直径建立模型,然后再对桌高 70 cm,桌面直径 80 cm 的特例给出计算结果。合理的稳固性指标建立是问题的关键之一,需要对桌脚进行受力分析。应给出最优的平板长度、钢筋位置和开槽长度,以保证可行性、稳固性,并降低成本。

问题 3. 本小题没有限定平板材料和桌面的形状,但基于美观性的考虑,折叠后桌腿的外形应呈直纹曲面,而不应是平面。同时,钢筋是必须的,且为直线,否则很难实现折叠桌的使用方便和产品稳固性。通过问题 1 和问题 2 的解决,可以初步掌握折叠桌高度、桌面边缘线和桌脚边缘线与平板材料及设计参数之间关系的规律。由于客户画的桌面和桌脚边缘线形状有随意性,为了加工的可行性,两条边缘线须有一定的关联(但不应限定材料为长方形)。所建模型应能对客户画的两条边缘线做适当修正,并在此基础上给出加工参数。结果要求参赛队给出有创意的产品设计和设计理念,并作出至少 8 张动态变化过程的示意图。

注:本课题来自荷兰设计师 Robert van Embricqs 的创意。如果参赛队给出的产品是网上已有的,不应认为是好的结果。



# 2015高教社杯全国大学生数学建模竞赛 A 题评阅要点

本题要求根据视频中物体的太阳影子，建立数学模型确定视频拍摄地点和日期。主要考察学生关于空间几何问题的建模能力以及非线性优化问题的求解能力，对求解精度具有一定的要求。

评阅时应注意：“北京时间”与“北京当地时间”的不同，经度与时间的关系，日期关于春分、秋分、冬至、夏至的近似对称性等。大气折射会导致太阳高度角产生一定偏转，所以考虑大气折射情形的模型更佳。

对能够自行构造数据进行模型检验的论文，应给予较好的评价。

## 问题 1

在已知视频拍摄时间及地点的条件下求影子的数学模型，并分析长度关于日期、时间、经纬度等参数的变化规律。有较多的参考文献给出这一问题的模型，若直接采用文献中的模型，需指明出处。

## 问题 2

在已知物体影子顶点真实坐标及拍摄日期与北京时间的条件下，根据问题 1 得到的影子长度变化模型，反解出纬度及当地时间，根据当地时间和北京时间之间的关系确定经度。附件 1 的位置是 ( $109.5^{\circ}$  E,  $18.3^{\circ}$  N) 海南三亚。

评阅时应以模型和方法为主，结果仅作为参考。要尽可能使用所给数据的全部信息。

## 问题 3

与问题 2 相比，问题 3 中拍摄日期未知，反演难度有所增加，同时使用长度和角度信息反演效果更好。附件 2 的位置是 ( $79.75^{\circ}$  E,  $39.52^{\circ}$  N) 新疆，日期是 7 月 20 日；附件 3 的位置是 ( $110.25^{\circ}$  E,  $29.39^{\circ}$  N) 湖南省张家界，日期是 1 月 20 日。

由于日期相近的影子长度和角度变化较小，导致参数反演问题的近似解较多。可以将日期、经纬度一定范围内的结果都认为是近似正确的。

评阅时应以模型和方法为主，结果仅作为参考。

## 问题 4

建立影子顶点大地坐标与视频坐标之间的关系，然后反演模型中的参数。由

于反演参数的增加，以及视频数据提取时产生的误差，导致模型求解精度下降、确定拍摄地点的难度增加。评阅时，主要关注模型是否合理、正确。

## 2015高教社杯全国大学生数学建模竞赛 B 题评阅要点

该问题是一个即时性、开放性、实用性很强的热点问题，可以针对某一个地区或一个城市的实际情况进行研究。解决问题需要一定的数据支持，必须收集到某地区或城市出租车的相关数据，要充分体现“互联网+”的特点与作用。通过对数据的分析，统计挖掘出相关规律，来支持所建立的数学模型和模型的结论。

问题（1）：分析不同时空出租车资源的供求匹配程度

（1）通过分析，定义能够反映不同时空变化规律的合理性供求关系指标。（2）利用实际数据（真实、可靠），统计计算不同时空下的供求关系指标，对供求关系的时间、空间的分布规律和匹配程度进行具体的分析讨论。

（3）供求关系指标的定义方法是不唯一的，主要看是否能够反映出出租车的供求关系，并充分说明其合理性。仅用宏观统计数据分析问题不是一种好做法。

问题（2）：分析各公司推出的补贴方案是否能缓解“打车难”

各公司推出的补贴方案基本上都是采用等额的补贴方式，依据实际问题，可以从不同的角度做定性分析，最好是用定量分析，或用机理分析方法建模研究是否能缓解“打车难”的问题。

（1）允许用不同的方法，给出不同的观点和结论，但要有充分合理的分析论证和说明。

（2）可以分析比较不同公司推出的补贴方案的不同作用，包括对出租车司机和乘客正反两个方面的影响作用。

（3）要利用实际数据来检验其模型，验证说明相应结论的正确性。

问题（3）：设计更合理的补贴方案

所设计的补贴方案要有针对性地缓解“打车难”的相关问题。

（1）合理的补贴方案一般应该是非等额补贴，或通过“奖励”与“惩罚”机制，能够促使出租车司机不挑单，或有单即接的效果。

（2）对于方案的合理性或可行性应该给出检验或仿真说明。