

文章编号: 1005-3085 (2002) 05-0047-07

# 血管管道的三维重建

丁峰平, 周立丰, 李孝朋

指导教师: 数模组

(浙江工业大学 98 提高班, 杭州 310032)

编者按: 该文作者能正确运用几何方法重建了等径管道序列切片的中轴线模型及管道形状。其特色是能利用所求得的半径的球沿着该中轴线滚动重新生成管道, 并再作截面图与原切片图形作比较, 验证了模型的可信性。

摘 要: 文章对血管管道的三维重建进行了讨论。根据题目所给信息, 首先读取 100 张血管切面图, 把它们转换成数据矩阵, 然后分三步进行处理: 第一步, 通过搜索切面最大内切圆求出管道的半径, 提出两种方案, 分别是切线法和最大覆盖法; 第二步, 轨迹的搜索, 本文提出了三种方法, 分别为网格法、蒙特卡罗法和非线性规划法; 第三步, 中轴线在三平面上投影的精确定位, 分别用最小二乘和分段最小二乘进行了曲线的拟合。最后又对三维重建的血管管道进行了检验和误差分析。利用以上算法较好地进行了管道的重建, 从而得出所求半径为 29.529, 中轴线上 100 点的坐标见表 1, 其在  $XY$ 、 $YZ$  和  $XZ$  平面上的投影分别为图 8 到图 15。

关键词: 三维图象重建; 轨迹; 最大覆盖

分类号: AMS(2000) 65D17

中图分类号: O242.1

文献标识码: A

## 1 问题的重述

### 1.1 问题

断面可用于了解生物组织、器官等的形态。例如, 将样本染色后切成厚约  $1\mu m$  的切片, 在显微镜下观察该横断面的组织形态结构。如果用切片机连续不断地将样本切成数十、成百的平行切片, 可依次逐片观察。根据拍照并采样得到的平行切片数字图象, 运用计算机可重建组织、器官等准确的三维形态。

假设某些血管可视为一类特殊的管道, 该管道的表面是由球心沿着某一曲线(称为中轴线)的球滚动包络而成。例如圆柱就是这样一种管道, 其中轴线为直线, 由半径固定的球滚动包络形成。

现有某管道的相继 100 张平行切片图象, 记录了管道与切片的交。图象文件名依次为 0. bmp、1. bmp、... 99. bmp, 宽、高均为 512 个像素(pixel)。为简化起见, 假设: 管道中轴线与每张切片有且只有一个交点; 球半径固定; 切片间距以及图象像素的尺寸均为 1。

取坐标系的  $Z$  轴垂直于切片, 第 1 张切片为平面  $Z=0$ , 第 100 张切片为平面  $Z=99$ 。

试计算管道的中轴线与半径, 给出具体的算法, 并绘制中轴线在  $XY$ 、 $YZ$ 、 $ZX$  平面的投影图。

### 1.2 切片的重组

为了便于直观的分析, 我们对切片图象提取轮廓后进行三维重组, 得出图 1 (为了防止轮



廓过密而不易观察,这儿每三幅图片提取一次)。

## 2 问题的分析

由题意可知,整个管道的表面是由球心沿着某一曲线(中轴线)的球滚动包络而成,且管道中轴线与每张切片有且仅有一个交点,这样经过这个交点必切下球的最大圆面且这个交点为球滚动时的球心,又因为每一个切面都可以看成由无数个球切面叠加而成,根据两个定理:

**定理1** 球的任意切面都为圆。

**定理2** 经过球心的球切面是所有球切面当中半径最大的切面。

所以我们可以得到每张管道切面的最大内切圆就是经过球心的球切面,而且这样的切面具有唯一性(因为管道中轴线与每张切片有且仅有一个交点)。因此我们只要在每张切面图上找到最大的内切圆面,它的圆心及半径就是我们要找的球心及球的半径,把所有的球心连接起来的曲线,就是中轴线的轨迹。

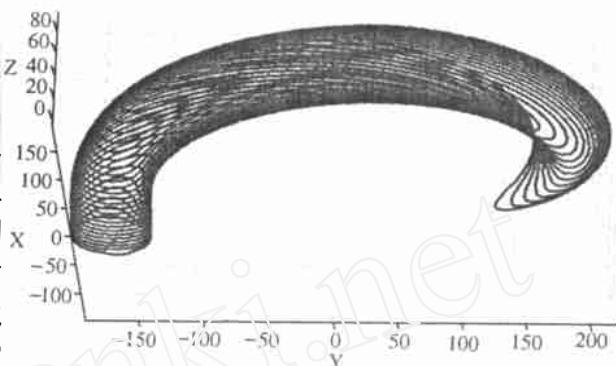


图1 切面重组后的三维立体图

## 3 模型的建立

根据以上对问题的分析,我们采用先通过最大覆盖法求球半径,然后用非约束优化算法搜索中轴线的轨迹坐标,最后通过轨迹在三个面上的投影的点的坐标,用最小二乘法进行曲线拟合,就能得到中轴线曲线在  $XY$ 、 $YZ$ 、 $YZ$  在投影图。

以上问题的解决都是基于对 100 幅切面图的处理,即找出每一幅图  $512 \times 512$  的像素矩阵,这儿我们利用 MATLAB 的图象读取函数 `Imread` 函数得到像素矩阵,其值为 0 或 1 (0 表示有黑点,1 表示白点)。

### 3.1 最大内切圆寻找及半径的确定

#### 方法1 切线法

此方法可以从切面的外围轮廓线分析着手。由题意分析知道,所给的图片切面是由无数个球切面组成的。而且外围轮廓线与最大内切圆有且仅有两个交点,所以经过这两点的外围轮廓线的两条切线平行且间距最大。基于上述分析,我们可以通过找到这两条切线来找到最大内切圆的圆心及半径。

在实际操作中,由于对图片的像素提取的离散性,我们在计算导数时是用差分来代替。

#### 方法2 最大覆盖法

最大覆盖法就是在切面中找到最佳的圆心位置和半径长度,从而使得由这个圆心和半径所决定的圆面,能最大面积地覆盖管道切面的图形,这样搜索到的圆一定是最大内切圆,这个圆的圆心就是我们所要找的球的球心,这个圆的半径就是我们所要找的球的半径。

从上述两种方法分析及考虑到我们所使用的工具和材料,可以得出方法二更加直观,计算机实现更容易,计算复杂度更低,所以我们采用后者。

具体实现中,我们先得到任意一张图片的像素矩阵,然后将用于匹配的圆根据其圆心和半

将其圆周离散(即以像素表示),并映射到  $512 \times 512$  的图中,其中圆周上的点为 0,其余的点为 1,即形成另一个像素矩阵。这两个矩阵在相同位置点上的值进行逻辑或运算,如果其值为 0,则为匹配点,即此点在管道切面图形内,否则其在切面图形外。这样搜索到的匹配点最多同时半径最大的就是所要找的最大内切圆。图 2 和图 3 就是分别从图 1.bmp 和图 89.bmp 搜索到的最大匹配圆(内部白色部位为管道切面图形,深色圈为最大匹配圆)。

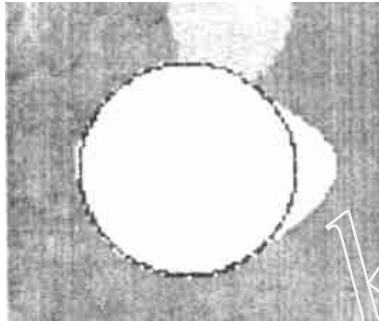


图 2 1.bmp 的最大匹配图



图 3 89.bmp 的最大匹配图

根据以上算法,我们抽取了所有的切片图进行半径的提取,然后再求其平均值,求其均值得到球的半径为 29.529。

### 3.2 轨迹的搜索

#### 3.2.1 目标函数的确立

在求出半径以后,轨迹的搜索就可以建立在半径确定的基础上,当然我们也可以求出每一个切面图形的最大内切圆,然后得到每个圆心的坐标,即中轴线坐标,但这样做计算机的运算量会很大,同时由于最大内切圆搜索法的稳定性不高,从而会造成搜索的不精确,所以采用定半径搜索。

我们通过定圆(半径为  $R$ )来找其中轴线,也就是用定圆覆盖到切面图形上去,找到匹配点数最多的一个位置,从而得到此定圆圆心的位置。

具体实现时只要用定圆的圆心位置进行变化,设其为  $A(x, y)$ ,则由  $A$  点可以得到整个圆周的离散坐标  $R_{ij}$ ,令  $f(R_{ij})$  为匹配点数的函数,其计算方法与最大内切圆求法相同,即将  $R_{ij}$  根据圆心  $A$  的坐标和半径  $R$ (固定)离散化形成矩阵后和切面图形矩阵作逻辑与操作,从而达到匹配最大,则优化目标函数就是:

$$\max [f(R_{ij})] \quad A \quad 512 \times 512 \text{ 坐标面上的点}$$

#### 3.2.2 目标函数的求解

目标函数要求求出一圆心  $A$ ,使得定圆覆盖切面图形最大,即多元函数极值最优解,这是一个以  $X$  和  $Y$  为自变量二元函数,这样可以通过以下三种方法来求得:

##### (1) 用直接搜索求最优解(网格法)

搜索过程中,对每一个圆心的坐标  $X$  和  $Y$ ,在其取值的范围内均取 100 个步长,分为  $100^2$  个网格,这样,在一定的精度范围内,可以求的一个较好的最优解。

##### (2) 蒙特卡罗法

蒙特卡罗法,也就是随机实验试点法。它的基本思想是:在函数的可行域内随机地选取实验点,由于随机取得的点在区域中分配比较均匀,所以对函数的大致形态能较好的体现。

模型中,随机点用以下方法产生的。

$$x = x_0 + (x_1 - x_0) \times \text{rand}(1)$$

$$y = y_0 + (y_1 - y_0) \times \text{rand}(1)$$

其中,  $(x_0, x_1)$  为  $X$  的取值范围,  $(y_0, y_1)$  为  $Y$  的取值范围。

### (3) 非线性规划

非线性规划即无约束优化,以数值迭代为基本思想,基本步骤为选取初值  $A(X_0, Y_0)$ ,进行  $k$  次迭代并求出迭代解,由迭代解得到搜索方向和步长,如果  $k+1$  次迭代符合给定的迭代终止条件,则停止迭代,得出最优解;否则继续迭代。

非线性规划的关键是搜索方向、步长和初值。我们用拟牛顿法来选定搜索方向,拟牛顿法是在牛顿法基础上,克服牛顿法中黑赛阵不仅计算复杂、而且会出现变态、不正定等情况,同时保持了较快收敛的优点,从而得到最好的下降方向。搜索步长的确定使用线性搜索的方法,或更为有效的插值方法。由于此搜索程序的初值对于程序正确有效的搜索影响很大,又因为相邻的切片只有一个像素单位的距离,可以认为中轴线的变化很小,所以我们可以把前一次确定的球心作为下一次搜索的起点,从而大大提高搜索的效率和准确性。但由于转角处变化较大,在这种情况下搜索起点会不够逼近而导致优化搜索的失效。我们采用回溯技术来避免这种现象。即当球心间距前后相差较大时(采用工程上的观点,以 6 倍为基线),回退一次搜索,并以当前球心作为回退搜索的起点,这样就可以把各个球心间距变得比较匀称,从而相应的消除了转角上的搜索失效。

从上述对三种方法的分析可以得到网格法和蒙特卡罗法实现思路简单,程序容易实现,但网格法搜索的精度不高,误差较大,搜索时间长,同样蒙特卡罗法的实现对采点的数目要求很高,计算量大;非线性规划法的实现复杂,但搜索速度快,计算量少,而且通过 MATLAB 的优化工具箱的函数可以很方便地实现,所以非线性规划法较优。

轨迹搜索结束以后,我们可以得到中轴线的 100 个点,用所求半径的球定位在这些点上和轮廓线相交就可以得到图 4。

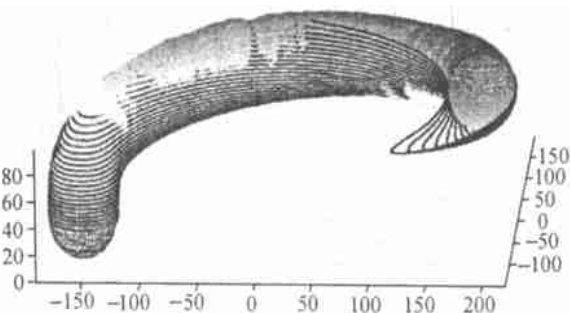


图 4 血管立体还原

从上图可以看到把图形重组后出现了不平滑点,也就是说直接用这些中轴线上的点构成的管道还不平滑,所以我们采用曲线拟合的方法来精确定位中轴线。

#### 3.3 中轴线的在 XY、YZ、ZX 平面投影的精确定位

通过以上对轨迹的搜索,我们可以得到中轴线上 100 点的三维坐标,然后转化成相应投影面的二维坐标,对这些坐标做恰当的处理,就可以减少由于搜索过程、半径的取值和数值离散化带来的误差,比较精确的对中轴线在各个投影面上进行定位。

##### 方法 1 最小二乘拟合

直接最小二乘拟合,是在投影面上对得到的 100 点二维坐标进行一次性最小二乘拟合。图 5 是中轴线在 yz 平面上投影点连线(左图)和投影点最小二乘拟合线(右图)的比较图(+表示中轴线的投影点)。

从上图可以看出运用 15 阶多项式最小二乘法拟合后的曲线比直接投影点的连线光滑,更贴近实际的情况。但是高阶多节点的多项式很容易出现振荡,上图中在  $z$  方向 80 到 100 的曲线出现了微弱的振荡。

##### 方法 2 分段最小二乘拟合

分段最小二乘拟合,是在投影面上对得到的 100 点二维坐标进行分区(我们采用 4 个分区),对各个分区进行拟合,在连接点采用三次样条插值技巧来避免由于高阶多项式引起的龙

格现象。图 6 是中轴线在  $yz$  平面上投影点连线(左图)和投影点分段最小二乘拟合线(右图)的比较图。

从图 6 可以看出拟合后的曲线比直接投影点的连线更光滑,贴近实际的情况,而且从图 6 和图 5 拟合的投影曲线比较可以发现分段最小二乘拟合出来的曲线优于直接用最小二乘拟合的曲线,而且消除了振荡现象。

所以采用分段最小二乘拟合能更好的反映曲线上每一点的位置。图 7 是采用拟合后曲线作为中轴线,并用球来定位。

从图 7 和图 4 比较就可以发现中轴线经过拟合后形成的立体还原图更加光滑、平整。

#### 4 模型的求解

球的半径 球的半径通过对每一幅切片最大内切圆的搜索,分别得到  $R_1$ 、 $R_2$ 、 $\dots$ 、 $R_{99}$ 、 $R_{100}$ ,为减少搜索过程和离散化过程所引入的误差,我们采用求均值的方法来得到球的半径,可以得到半径  $R$  为:29.529。

管道的中轴线

管道的中轴线由轨道搜索而得,表 1 中左边三列给出了直接搜索到的 100 点中轴线在切面上的点的坐标(依次为  $x$ 、 $y$ 、 $z$ ),右边三列为中轴线经过分段曲线拟合得到的曲线在相应点上的坐标。

表 1 中轴线的坐标

直接得到的 $x$ 轴坐标	直接得到的 $y$ 轴坐标	直接得到的 $z$ 轴坐标	曲线拟合后的 $x$ 轴坐标	曲线拟合后的 $y$ 轴坐标	曲线拟合后的 $z$ 轴坐标
0.94557	-160.01	0	3.2166	-160.2	0
1.0959	-159.95	1	2.4788	-160.19	1
(中间数据略)					
47.72	180.4	99	48.94	179.84	99

中轴线在  $XY$ 、 $YZ$ 、 $ZX$  平面的投影图

首先根据搜索到的中轴线在每一切面上的坐标投影到三个平面上,图 8、10、12 是直接将这些投影点相连得到的曲线,图 9、11、13 是投影点经过拟合得到的曲线。图 14 和图 15 分别是中轴线的三维直接搜索图和拟合后的立体图(其中小圈中轴线的投影点)。

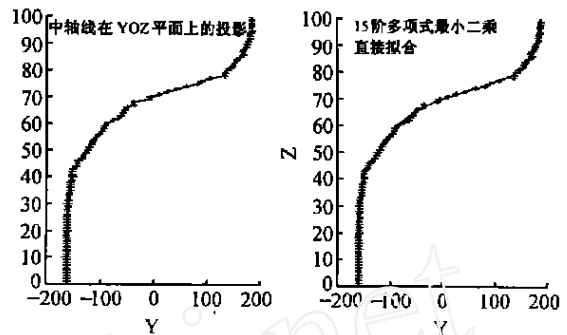


图 5 最小二乘拟合前后投影曲线的比较

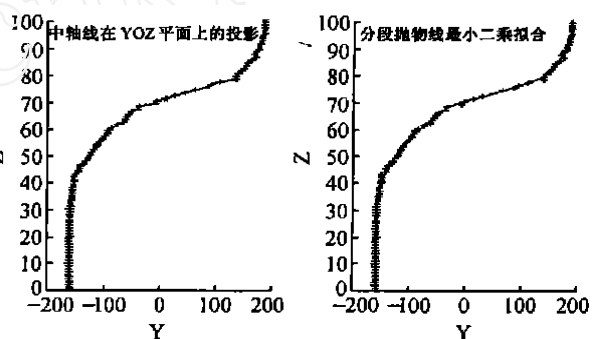


图 6 分段最小二乘拟合前后投影曲线的比较

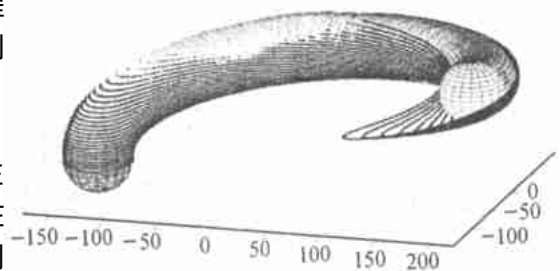


图 7 管道中轴线拟合后的立体还原图

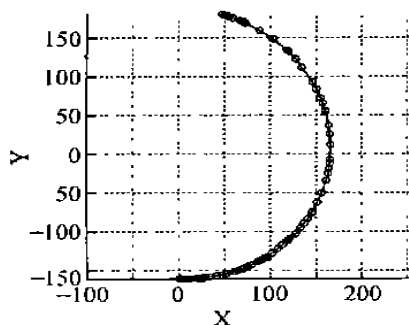
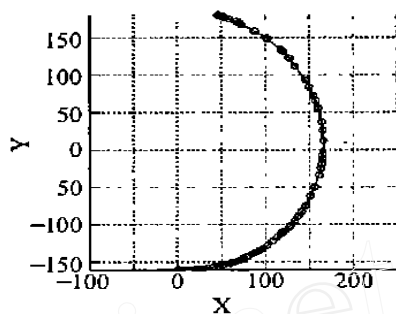
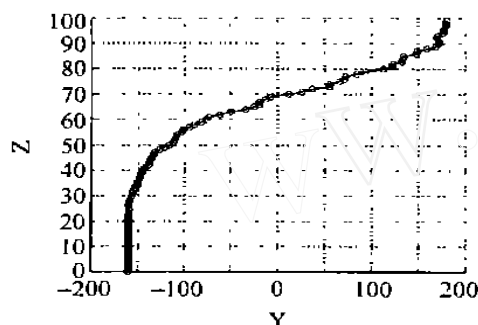
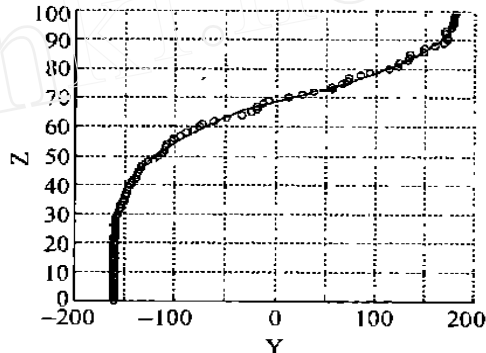
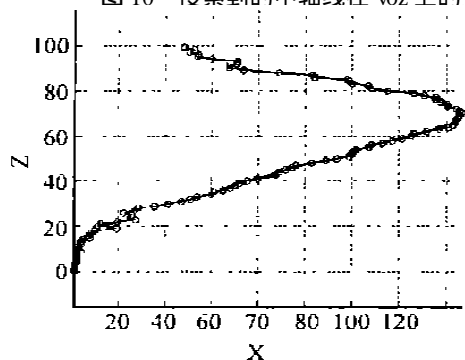
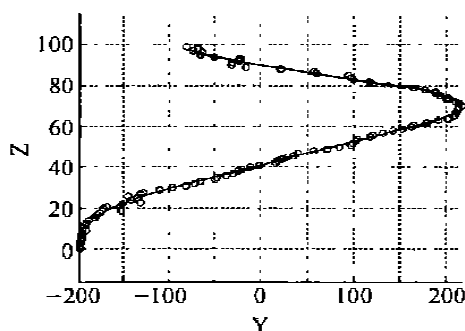
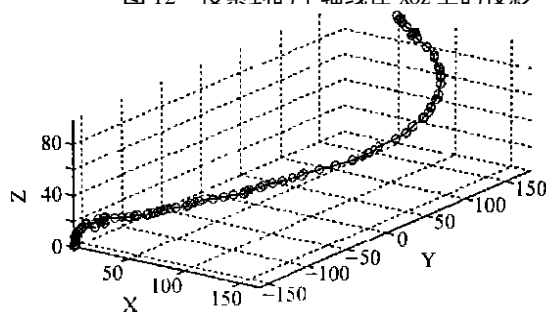
图8 搜索到的中轴线在  $xoy$  上的投影图9 拟合后的中轴线在  $xoy$  上的投影图10 搜索到的中轴线在  $yoZ$  上的投影图11 拟合后的中轴线在  $yoZ$  上的投影图12 搜索到的中轴线在  $xoz$  上的投影图13 拟合后的中轴线在  $xoz$  上的投影

图14 搜索到的中轴线的立体图

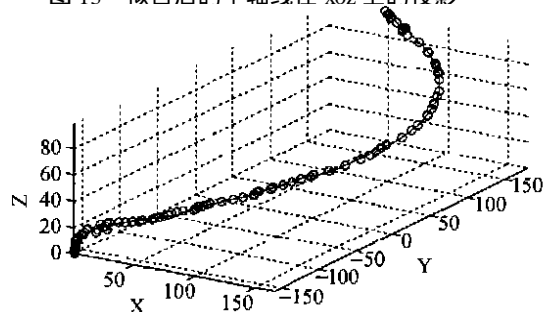


图15 拟合后的中轴线的立体图

## 5 管道的三维重建

这儿通过模型求解的中轴线的最佳拟合线得到管道的三维重建如图16。

从图 16 可以发现此时的三维重建已经非常的好,每个切面的外轮廓都能在重建图中看到。

## 6 模型检验和误差分析

### 6.1 模型的检验

从管道的三维重建图(图 16)沿 Z 轴作切面,就可以得到切面。这样我们可以先从中取出第 5 张切片和第 50 张切片,再和第 5 张切面图片(即 4. bmp)和第 50 张切面图片(即 49. bmp)的外轮廓线分别作在同一张图片上得到图 17 和 18,来验证模型的准确性(图中深色的为外轮廓线,浅色的为切面所截下来的球切面的外轮廓线)。

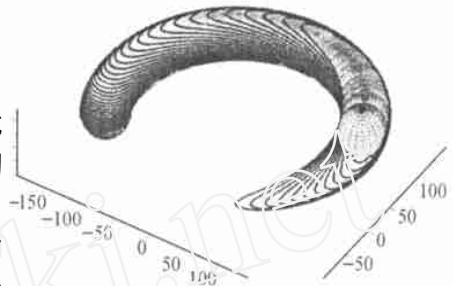


图 16 血管三维重建后的立体图

从这两张可以得出结论:按照我们建立的模型求出来的解与实际的情况基本符合,切面得到的球的所有球的切面构成了整张的切面图形,外轮廓基本重合,这有力的证明了我们的模型的准确性和算法的合理性。

### 6.2 误差的分析

当然整个模型存在一定的误差:

(1) 切面图本身存在像素上的误差(这是题目本身所带入的,而非模型所致)。

(2) 数值离散化时带入误差,主要体现在搜索最大内切圆和中轴线轨迹时圆周的离散化运算中。

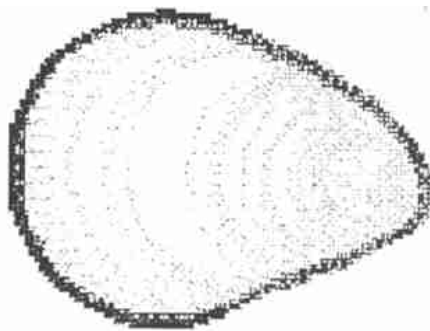


图 17 第 5 切面的验证图



图 18 第 50 切面的验证图

(3) 在最小内切圆搜索和轨迹搜索时,由于步长、初始点等因素的限制而造成误差。

## 7 模型的评价与改进

此模型的优点:

(1) 所建立的模型简洁、明了,便于使用数学工具,如 MATLAB 等,降低了编程求解的难度,缩短了运行时间,提高了工作效率。

(2) 对不同问题求解提出了多种的解决方案,并通过比较分析找到最佳的模型。

(3) 模型结果较优,且经过大量数据模拟验证,与实际情况吻合得很好。非线性优化和分段曲线拟合使曲线更准确。

当然,模型还存在改进的地方,比如可将所给的 bmp 图由  $512 \times 512$  变为  $1024 \times 1024$  像素的图,从而提高精确度,减少误差等等。

### 参考文献:

- [1] 张宜华. 精通 MATLAB 5[M]. 北京:清华大学出版社, 1999.
- [2] 姜启源. 数学建模[M]. 北京:高等教育出版社, 1978.
- [3] 阿达玛 J. 著,朱德祥译. 几何(立体部分)[M]. 上海:上海科学技术出版社, 1980.

(下转 74 页)

## 参考文献：

- [1] 徐光辉. 随机服务系统(第二版)[M]. 北京:科学出版社,1986
- [2] 周义仓,赫孝良. 数学建模实验[M]. 西安:西安交通大学出版社,1999
- [3] 李 涛,贺勇军,刘志俭. Matlab 工具箱应用指南——应用数学篇[M]. 北京:电子工业出版社,2000

## The Optimum Mathematical Model on the Bus Dispatch

BO Li-jun, YAO Wei-peng, WANG Yan-hui

Adviser: LIU Hong-wei

(XiDian University, Xi'an 710071)

**Abstract :** This paper presents an optimal method of peak curve according to the Fisher algorithm of serial specimen clustering. We conclude 5 uphill passenger-flow peak ranges: 5:00-6:00, 6:00-9:00, 9:00-16:00, 16:00-18:00, 18:00-23:00, and 5 downhill passenger-flow peak ranges: 5:00-7:00, 7:00-9:00, 9:00-16:00, 16:00-19:00, 19:00-23:00.

Then, under the peak ranges, two algorithm models, and , are established. Comparing the calculated results of the foregoing models, we conclude: model is applied to two interval high peaks, and model is applied to three others. With the smooth method between every two time-sections, we make the bus time schedule of two starting stations, and get 47 needed buses at least. In this scheme, passengers' satisfaction rate is 98.2%, and the bus company's is 76.23%.

By the end, we set a random optimum model by the theory of random service system, and give the probability sensitivity and error analysis. Further, we get a better scheme for collecting operation data.

**Key words :** serial specimen clustering; passenger-flow; peak; bus number; smooth method; random service

- - - - -