第 28 卷 第 1 期　　数学的实践与认识　　Vol. 28 No. 1
1998 年 1 月　　MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY　　Jan., 1998

零件的参数设计

何华海　李江滔　束礼宝

指导教师：薛剑耿

(中国科技大学，合肥 230026)

编者按　本文深入分析了零件参数设计中的优化问题，将其归结为一个有约束的非线性规划问题，并提出"分两步走"的策略来简化问题. 采用了蒙特卡罗方法模拟和线性近似计算了总体参数的最优解. 从实用角度文章又引入了一个目标函数，使得整个处理大大简化. 本文对模型的检验也有特色，一方面用拟合优度检验了 y 是否服从正态的检也很有特色，另一方面也对分两步走策略的有效性进行了检验.

摘　要　本文对零件参数设计问题提出了有效的算法，零件参数设计可以归结为在一定约束条件下求总费用（成本和质量损失的总和）最小的一个非线性规划问题. 我们采用分两步走的策略来简化问题，即首先选定零件参数的标定值，再在此基础上选取零件容差等级.

设计的总费用是由 y 的具体分布所决定的. 我们采用了两种方法来计算 y 的概率分布：一种是用蒙特卡罗方法来模拟；另一种是将 y 的经验公式作线性近似，得到 y 近似服从正态分布. 我们又引入了函数 $E(y-1.5)^2$. 以此作为新的目标函数对问题进行简化. 对模型的求解，我们采用了梯度法来搜索目标函数在限定区域内的最优解. 得到相应的总费用（单件产品）为 430 元，远低于原设计方案的 3150 元.

通过检验，我们发现通过线性近似得到 y 服从正态分布的结论是基本可靠的，分两步走策略也是合理、有效的. 最后我们还讨论了当质量损失函数为连续（特例为抛物线）时的情形.

一、问题的提出（略）

二、模型的假设

1. 各个零件的参数 $x_1, x_2, \cdots, x_7$ 是互相独立的正态分布随机变量；
2. 标定值在容许范围内都可以取，并且在此范围内 y 是二阶可导的；
3. 产量 1000 是大数，可以用各种概率上的极限定理；
4. 所有零件的均方差都是其容差的三分之一；
5. 1000 个产品中，每个产品都用相同等级的零件；
6. 假设产品当 $1.4<y<1.6$ 时为正品，此时无质量损失；当 $1.2<y\le 1.4$ 或 $1.6\le y\le 1.8$ 为次品，损失 1000 元；当 $y\le 1.2$ 或 $y\ge 1.8$ 时为废品，损失 9000 元.

三、符号约定

$x_i(i=1,2,\cdots,7)$	零件参数，$\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_7)$，
$\mu_i(i=1,2,\cdots,7)$	零件参数的标定值，$\vec{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_7)$，
σ_i 或 $\sigma_{x_i}(i=1,2,\cdots,7)$	零件参数的均方差，
$a_i,b_i(i=1,2,\cdots,7)$	x_i 标定值的上下界，
y:	产品性能的参数，
y_0:	y 的目标值 $(y_0=1.5)$，
σ: 或 σ_y:	产品参数的均方差，
$f(y)$:	y 的概率密度函数，
$g(y)$:	单件产品 y 偏离 y_0 造成的损失;
$p_i(\frac{3\sigma_i}{\mu_i})$:	第 i 个零件选取容差为 $\frac{3\sigma}{\mu_i}$ 时的成本

四、问题的分析

单件产品的费用包括两部分：一是七个零件的总成本，二是由产品性能参数 (y) 偏离目标值 (y_0) 而造成的损失．零件的成本是由零件的容差等级决定的；对于大批产品，y 偏离 y_0 而造成的损失则由 y 的具体分布决定，而 y 的分布又取决于各零件的标定值和容差等级．因此，原问题归结为在一定约束条件下求某目标函数的最小值的一个非线性规划问题．这里的目标函数就是零件参数设计的总费用，而约束条件则是各零件标定值的容许范围和可能的容差等级．

由于容差等级和零件参数标定值是结合在一起决定总费用，因此，为求得总费用的最小值，必须将两者结合起来考虑．由于七个零件容差等级选取总共可以有 $1^2\times2^2\times3^3=108$ 种，使问题变得很复杂为简便起见，求解这个非线性规划问题时，我们可以分两步来考虑．首先固定各零件容差等级 (对应固定零件参数的方差和成本)，选择零件参数标定值使得损失质量最小；然后在此基础上，固定各零件参数标定值，在所有容差等级选取方法 (共 108 种) 中选取使得成本最小的配置．这种分两布走的方法虽然并不完全等价于原来的非线性规划，但它却可以是问题大大简化．实际上，这也是工业上采用的零件参数设计的一般方法．

我们假设了七个零件参数 $x_i(i=1,2,\cdots,7)$ 是互相独立的正态分布随机变量．产品的性能参数 y 由这些零件参数所决定，但是由于 y 的经验公式很复杂，我们无法解析地给出 y 的具体分布．一种处理的方法是采用蒙特卡罗方法，通过计算机模拟来获得 y 的分布；另外也可通过对 y 的经验公式作某种近似 (如线性化等)，以期能解析地给出 y 的近似分布．

五、模型的建立

1. 目标函数

我们的目标函数是总的费用 F，它包含两项，质量损失 L 和零件成本 C，即 $F=L+C$．

对于大批产品的平均质量损失，有 $L=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)g(y)dy$，其中 $f(y)$ 为 y 的概率密度函数，$g(y)$ 为单件产品参数 y 偏离 y_0 造成的损失函．我们假设了 $g(y)$ 呈阶梯状，也就是说产品当 $1.4<y<1.6$ 时为正品，此时无质量损失；当 $1.2<y\leq1.4$ 或 $1.6\leq y<1.8$ 为次品，损失 1000 元；当 $y\leq1.2$ 或 $1.6\leq y<1.8$ 时为废品，损失 9000 元．

$$\begin{aligned}L&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)g(y)dy\\&=9000\left(\int_{-\infty}^{1.2}+\int_{1.8}^{+\infty}\right)f(y)dy+1000\left(\int_{1.2}^{1.4}+\int_{1.4}^{1.6}\right)f(y)dy\\&=9000-8000\int_{1.2}^{1.8}\int_{1.2}^{1.6}f(y)dy-1000\int_{1.4}^{1.8}f(y)dy\end{aligned}$$

因此单个产品的成本 C 为各个零件的成本总和，$C=\sum_{i=1}^{7}p_i(\sigma_i/\mu_i)$，其中 $p_i(\sigma_i/\mu_i)$ 第 i 种零件容差为 $(3\sigma_i/\mu_i)$ 等级对应的成本 $(i=1,2,\cdots,7)$．

我们的目标是使总费用最小，即求解如下非线性规划问题：

$$\begin{aligned}\min\quad & F=L+C=F(\mu_1,\cdots,\mu_i;\sigma_i,\cdots,\sigma_7)\\ \text{s.t.}\quad & a_i\leq\mu_i\leq b_i\\ & 3\frac{\sigma_i}{\mu_i}=1\%\text{ 或}5\%\text{ 或}10\%,\ i=1,2,\cdots,7.\end{aligned}$$

根据我们前面提出的两步走策略，这个问题可以分解为以下两个子问题：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}_1: &\quad \min L = L(\mu_i, \cdots, \mu_7), \\
&\quad \text{s.t. } a_i \le \mu_i \le b_i, \quad \frac{\sigma_I}{\mu_i} \text{ 给定}, \\
\mathrm{P}_2: &\quad \min F = L + C = F(\sigma_1, \cdots, \sigma_7), \\
&\quad \text{s.t. } 3\frac{\sigma_i}{\mu_i} = 1\% \text{ 或 } 5\% \text{ 或 } 10\%,
\end{aligned}
$$

依次求解 P_1 和 P_2 后，可得到近似的最优解，其中求解 P_1 时给定一组 $\frac{\sigma_i}{\mu_i}(i=1,2,\cdots,7)$, 而求解 p_2 时则使用 P_1 给出的一组标定值.

2. 目标函数的求值

(1) 蒙特卡罗方法

如果给定 $\mu_1,\cdots,\mu_7; \sigma_1,\cdots,\sigma_7$ 则 y 的分布是一定的，但是，由于 y 的经验公式很复杂，我们难以给出解析形式．而求目标函数值又必须要用到 $f(y)$ 的函数值．一种方法是使用蒙特卡罗法，借助于计算机的伪随机数模拟去近似 $f(y)$.

由计算机可直接得到 $U[0,1]$, 再用舍取法产生标准正态分布 $N(0,1)$, 由 $N(0,1)$ 经过变换即可得到一般正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. 从而可模拟 $x_1,x_2,\cdots,x_7$ 这七个两两独立的正态分布的随机变量．每模拟一次，都可根据 y 的经验公式得到 y 的一个样本．知道了大量的 y 的样本，自然很容易求出 $f(y)$ 来，从而可以得到目标函数值.

(2) 线性近似

由于每求一次目标函数值都需用蒙特卡罗法模拟 y 的分布，这样运算量便很大．一种简单的方法是用解析的形式给出 y 的近似分布.

对 y 在 $(\mu_1,\cdots,\mu_7)$ 处作泰勒展开，近似到一阶，得到 y 的近似表达式

$$
y(x_1,\cdots,x_7) = y(\mu_1,\cdots,\mu_7) + \sum_{i=1}^{7} \left.\frac{\partial_y(x_i,\cdots,x_7)}{\partial \mu_i}\right|_{\vec{x}=\vec{\mu}} \cdot (x_i - \mu_i),
$$

可见 y 已被近似为 7 零件参数的线性组合．由于 x_i 是相互独立的正态分布随机变量，$x_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$ 由概率知识容易知道 y 是服从均值为 μ_y, 方差为 σ_y^2 的正态分布随机变量，其中

$$
\mu_i = Ey = y(\mu_1,\cdots,\mu_7), \qquad \sigma_y^2 \mathrm{Var}\, y \sum_{i=1}^{7} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}^2
$$

于是， y 的概率密度函数为

$$
f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \exp\left\{-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right\}
$$

从而质量损失

$$
L = 9000 - 1000\left[8\Phi\left(\frac{1.8-\mu}{\sigma}\right) - 8\Phi\left(\frac{1.2-\mu}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{1.6-\mu}{\sigma}\right) - Phi\left(\frac{1.4-\mu}{\sigma}\right)\right]
$$

其中

$$
\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2}\pi}, \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz.
$$

3. 新的目标函数

从总费用的表达式可以看出，只要 y 尽可能地分布于 y_0 周围，则可以使 $P(1.4<y<1.6)$ 和 $P(1.2<y<1.8)$ 尽可能地大，从而使总费用最低. 基于这种考虑，我们提出了一个新的目标函数：$E(y-y_0)2$, 并在原有约束下求此目标函数的最小值.

$$E(y-y_0)^2 = \mathrm{Var}\,(y-y_0)^2 + [E(y-y_0)]^2 = \mathrm{Var}\,y + (Ey-y_0)^2$$

类似于线性模型

$$\mathrm{Var}\,y = \sigma_y^2 = \sum \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\vec{\mu}} \sigma_i \right)^2, \quad Ey = f(\vec{\mu})$$

因此 $E(y-y_0)^2=\sigma^2+[f(\vec{\mu})-y_0)]^2$ 这样问题就转化为在给定约束条件下，求上式的最小值.

六、模型求解

1. 子问题 P_1 的求解

我们的目的是使目标函数 $L(\mu_1,\cdots,\mu_7)$ 最小化，这是一个有约束 $(a_i\le\mu_i\le b_i, i=1,\cdots,7)$ 的非线性规划问题. 我们使用梯度算法 [3] 来求得极值. 并假设在约束范围内有极值且可由一组初始值求得.

所谓梯度法就是逐点确定寻优方向，再通过一维寻优确定步长的求解多维无约束非线性规划问题的方法.

为了使 $L(\mu_1,\cdots,\mu_7)$ 最小，我们列出主要步骤如下：

(1) 给定一初始值 $\vec{\mu}^{(0)}$ 与精度 $\epsilon>0, R>0$;

(2) 若 $\|\nabla g(\vec{\mu}^{(k)})\|\le\epsilon$ 则停止，并求出最小值 $\vec{\mu}^*=\vec{\mu}^{(k)}$; 否则转 (3);

(3) 由 $\min(g(\vec{\mu}^{(k)}-\lambda\nabla g(\vec{\mu}^{(k)})))$ 求得 λ_k, 并令 $\vec{\mu}^{(k+1)}=\vec{\mu}^{(k)}-\lambda_k\nabla g(\vec{\mu}^{(k)})$, 令 $=k+1$ 转入 (2).

对子问题的求解给出的极值点就是我们选择的标定值.

2. 对 P_1 子问题的求解

在选定标定值的基础上，我们从所有可能的容差选择方式 (共 108 种) 中选取使总费用最低的一种 (或几种) 作为我们的设计的容差等级.

由于零件的容差也影响 y 的质量. 必须综合考虑零件标定值和容差，并一起调整使之最优. 但是若每次都穷举容差的话，会计算复杂度大大增加可设想先使各零件等级最低，求出 $\mu_1\sim\mu_7$ 的一组值，分析相应的效益值，然后可删除成本过高的等级，再进行穷举.

七、结　果

使用梯度法，代入初值 $x_i\sim x_7$, 并对零件的各个等级遍历，求出一组局部最优解. 由于 y 的分布是用计算机随机数模拟出来的，所以每次运行结果都不一定相同，目标函数波动为 15.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	等级	费用
初始值	0.1	0.3	0.1	0.1	1.5	16	0.75	$BCCCCCB$	3150
蒙特卡罗法	0.093	0.302	0.096	0.101	1.50	16	0.75	$BBBCCBB$	430
线性近似	0.079	0.305	0.087	0.104	1.401	12.0	0.60	$BBBCCBB$	435
新目标函数	0.093	0.302	0.096	0.101	1.500	16	0.75	$BBBCCBB$	754

八、模型的检验

1. 用正态分布近似 y 的分布的可行性检验

在线性模型中，我们用正态分布 $N(\mu_y,\sigma_y^2)$ 来近似 y 的分布. 对此，我们在最优解处作了拟合优度检验.

i) 由蒙特卡洛法模拟产生 y 的 N 个样本值；

ii) 把 y 的可能取值范围分成 $k(k=14)$ 个区间，并判断样本落在各区间的频数 v_i，(并使 $Np_i \geq 5$)；

iii) 计算统计量 $Z=\sum(Np_i-v_i)^2/Np_i$，其中 p_i 为正态分布 $N(\mu_y,\sigma_y^2)$ 在第 i 个区间内的理论概率；

iv) 拟合优度 $p(Z)=1-\chi_{k-1}^2(Z)$.

通过计算，我们得到 $p(Z)=0.19$，这说明我们用正态分布 $N(\mu_y,\sigma_y^2)$ 来近似 y 的实际分布是可靠的。

2. 模拟的误差

我们用蒙特卡洛法模拟 y 的分布时使用的样本个数是 1000，与成批生产的产量一致，但是计算机模拟的统计量必然有一定的波动性，我们对同样一组标定值和等级进行多次模拟，发现目标函数的波动程度在 15 元左右. 因此，我们的模型所给出的精度顶多也只能达到这个值.

3. 参数选择分两步走的有效性

若同时对标定值和容差等级求最优解，则计算复杂度过大，为此我们采用了两步走的近似方法：

第一步 使各零件都取最低容差等级，求出各零件标定值的最优解 (梯度法)；

第二步 固定标定值，求容差等级的最优解 (遍历).

作为对比，在线性模型中，我们同时考虑标定值和容差等级，也用梯度法求得极值，结果为 430 元，这和分两步走的结果 435 元非常接近，这说明了我们的分两步策略是十分有效的.

八、讨 论

1. 质量损失 $g(y)$ 的另一种理解

有些产品参数，离目标值越近越好，甚至于突破人为的等级限制，即 $g(y)$ 随 y 连续变化，而不是如假设 6 所述的阶梯函数. 一种可能的情况是 $g(y)=k(y-1.5)^2$，其中 $k=10^5$，此时 $L=\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy=kE(y-1.5)^2$ 这正是我们前面提出的第二个目标函数以这种解释求得的目标函数最优解 780.

2. 局部最优解和全局最优解

我们的模型给出的都是局部的最优解 (区域内的极值 ()，这不一定就是目标函数在整个区域内的最优解. 但是，如果多取几个初始值求极值的话，可以尽可能缩小我们的结果与最优解的差距，甚至达到最优解.

3. 优缺点分析

1. 线性模型避免了蒙特卡洛法所需的大量模拟，从而提高了运算速度；
2. 线性模型在一般的情况下也能给出比较理想的结果；
3. 分两步走的策略有效地简化了问题，同时也给出了非常接近最优解的结果；
4. 我们给出的都是局部的最优解，并不能保证它就是问题的全局最优解；
5. 由于进行蒙特卡洛方法模拟的次数有限 (1000)，这使得我们给出的总费用精度有限，误差为 ±15 元.

参 考 文 献

[1] 严颖、成世学，运筹学随机模型，中国人民大学出版社，北京， 1995.

[2] 盛昭瀚、曹忻，最优化方法基本教程，东南大学出版社，南京， 1993.

[3] 徐士良， C 常用算法程序集，清华大学出版社，北京， 1994.

[4] 陈希孺，概率论与数理统计，中国科技大学出版社，合肥， 1993.