

2021 年高教社杯全国大学生数学建模竞赛题目

(请先阅读“全国大学生数学建模竞赛论文格式规范”)

A 题 “FAST” 主动反射面的形状调节

中国天眼——500 米口径球面射电望远镜(Five-hundred-meter Aperture Spherical radio Telescope, 简称 FAST), 是我国具有自主知识产权的目前世界上单口径最大、灵敏度最高的射电望远镜。它的落成启用, 对我国在科学前沿实现重大原创突破、加快创新驱动发展具有重要意义。

FAST 由主动反射面、信号接收系统(馈源舱)以及相关的控制、测量和支承系统组成(如图 1 所示), 其中主动反射面系统是由主索网、反射面板、下拉索、促动器及支承结构等主要部件构成的一个可调节球面。主索网由柔性主索按照短程线三角网格方式构成, 用于支承反射面板(含背架结构), 每个三角网格上安装一块反射面板, 整个索网固定在周边支承结构上。每个主索节点连接一根下拉索, 下拉索下端与固定在地表的促动器连接, 实现对主索网的形态控制。反射面板间有一定缝隙, 能够确保反射面板在变位时不会被挤压、拉扯而变形。索网整体结构、反射面板及其连接示意图见图 2 和图 3。

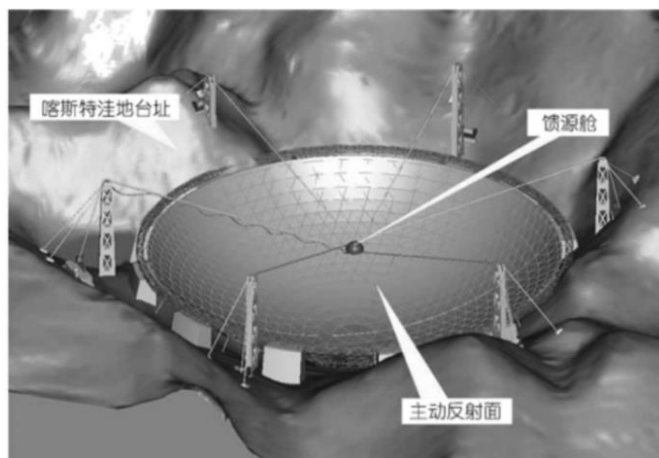


图 1 FAST 三维示意图

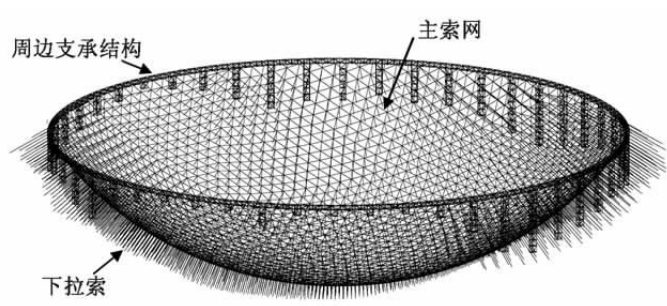


图 2 整体索网结构

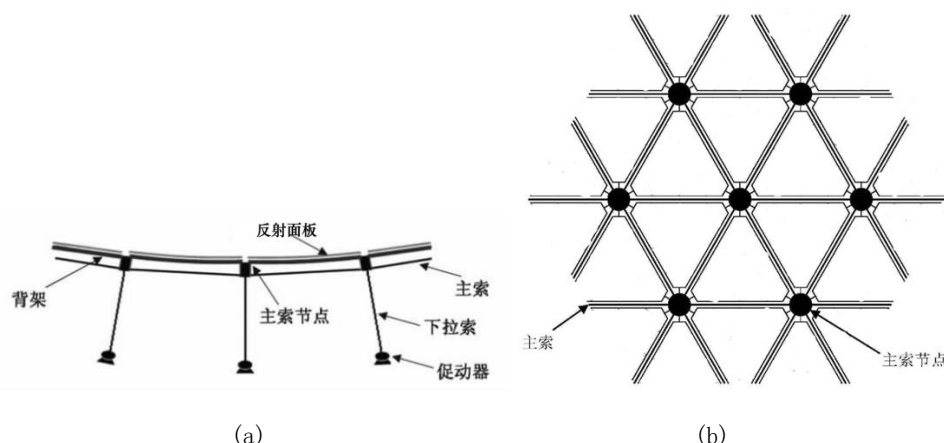


图3 反射面板、主索网结构及其连接示意图

主动反射面可分为两个状态：基准态和工作态。基准态时反射面为半径约 300 米、口径为 500 米的球面（基准球面）；工作态时反射面的形状被调节为一个 300 米口径的近似旋转抛物面（工作抛物面）。图 4 是 FAST 在观测时的剖面示意图，C 点是基准球面的球心，馈源舱接收平面的中心只能在与基准球面同心的一个球面（焦面）上移动，两同心球面的半径差为 $F=0.466R$ （其中 R 为基准球面半径，称 F/R 为焦径比）。馈源舱接收信号的有效区域为直径 1 米的中心圆盘。当 FAST 观测某个方向的天体目标 S 时，馈源舱接收平面的中心被移动到直线 SC 与焦面的交点 P 处，调节基准球面上的部分反射面板形成以直线 SC 为对称轴、以 P 为焦点的近似旋转抛物面，从而将来自目标天体的平行电磁波反射汇聚到馈源舱的有效区域。

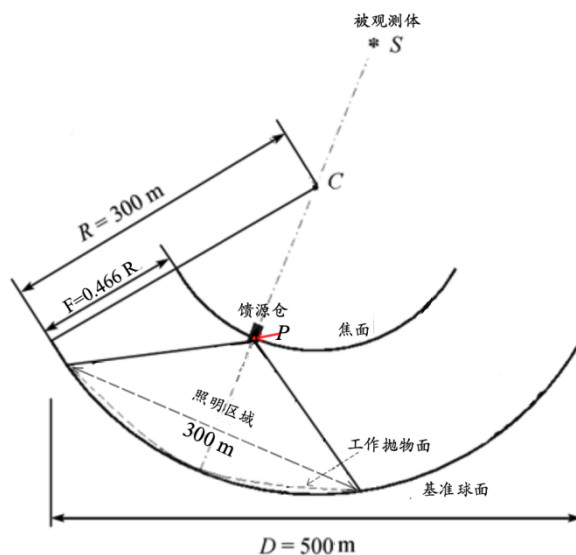


图4 FAST 剖面示意图

将反射面调节为工作抛物面是主动反射面技术的关键，该过程通过下拉索与促动器配合来完成。下拉索长度固定。促动器沿基准球面径向安装，其底端固定在地面，顶端可沿基准球面径向伸缩来完成下拉索的调节，从而调节反射面板的位置，最终形成工作抛物面。

本赛题要解决的问题是：在反射面板调节约束下，确定一个理想抛物面，然后通过调节促动器的径向伸缩量，将反射面调节为工作抛物面，使得该工作抛物面尽量贴近理想抛物面，以

获得天体电磁波经反射面反射后的最佳接收效果。

请你们团队根据附录中的要求及相关参数建立模型解决以下问题：

1、当待观测天体 S 位于基准球面正上方，即 $\alpha = 0^\circ, \beta = 90^\circ$ 时，结合考虑反射面板调节因素，确定理想抛物面。

2、当待观测天体 S 位于 $\alpha = 36.795^\circ, \beta = 78.169^\circ$ 时，确定理想抛物面。建立反射面板调节模型，调节相关促动器的伸缩量，使反射面尽量贴近该理想抛物面。将理想抛物面的顶点坐标，以及调节后反射面 300 米口径内的主索节点编号、位置坐标、各促动器的伸缩量等结果按照规定的格式（见附件 4）保存在“result.xlsx”文件中。

3、基于第 2 问的反射面调节方案，计算调节后馈源舱的接收比，即馈源舱有效区域接收到的反射信号与 300 米口径内反射面的反射信号之比，并与基准反射球面的接收比作比较。

附录：要求及相关参数

1、主动反射面共有主索节点 2226 个，节点间连接主索 6525 根，不考虑周边支承结构连接的部分反射面板，共有反射面板 4300 块。基准球面的球心在坐标原点，附件 1 给出了所有主索节点的坐标和编号，附件 2 给出了促动器下端点（地锚点）坐标、基准态时上端点（顶端）的坐标，以及促动器对应的主索节点编号，附件 3 给出了 4300 块反射面板对应的主索节点编号。

2、基准态下，所有主索节点均位于基准球面上。

3、每一块反射面板均为基准球面的一部分。反射面板上开有许多直径小于 5 毫米的小圆孔，用于透漏雨水。由于小孔的直径小于所观察的天体电磁波的波长，不影响对天体电磁波的反射，所以可以认为面板是无孔的。

4、电磁波信号及反射信号均视为直线传播。

5、主索节点调节后，相邻节点之间的距离可能会发生微小变化，变化幅度不超过 0.07%。

6、将主索节点坐标作为对应的反射面板顶点坐标。

7、通过促动器顶端的伸缩，可控制主索节点的移动变位，但连接主索节点与促动器顶端的下拉索的长度保持不变。促动器伸缩沿基准球面径向趋向球心方向为正向。假设基准状态下，促动器顶端径向伸缩量为 0，其径向伸缩范围为 $-0.6 \sim +0.6$ 米。

8、天体 S 的方位可用方位角 α 和仰角 β 来表示（见图 5）。

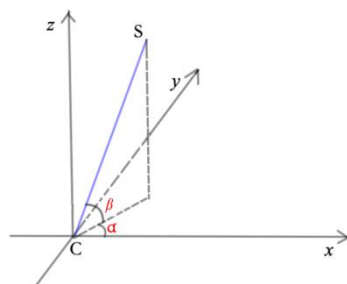


图 5 天体 S 方位角与仰角示意图