第21卷 第7期
2004年12月

工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 21 No. 7
Dec. 2004

文章编号:1005-3085(2004)07-0124-07

饮酒驾车的优化模型

王 毅, 李 妃, 钟书亮
指导教师: 颜文勇, 梁 兵, 王 科
(成都电子机械高等专科学校, 成都 610031)

编者按: 本文的模型假设周密合理，尤其是列入了"大李在第一次检验到第二次喝酒之间间隔为半小时"。这样，使得作者可以由数学结果合理地推出问题一的结论。文章的一个缺点是推导了酒精在人体内的积累公式，但在给出能否天天喝酒的结论时，没有运用所得到的这一数学结果。

摘 要: 本文通过分析啤酒中酒精在人体体内胃肠（含肝脏）与体液（含血液一）之间的交换机理，分别建立了在短时间内喝酒和长时间喝酒两种情况下，胃肠和体液（含血液）中的酒精含量的微分方程模型。对给出的数据，利用非线性最小二乘数据拟合及高斯-牛顿算法，确定了酒精含量以及酒精从胃肠进入血液的速度系数和酒精从血液渗透出体外的速度系数。继而，对不同喝酒方式下，血液中酒精浓度进行分析；该模型可以预测喝酒后任一时刻血液中的酒精浓度。对于第一问假设大李在第一次检查后半小时喝酒，由于体液中有残留的酒精，故第二次检查时酒精浓度为20.2448毫克/百毫升。

关键词: 饮酒; 微分方程; 高斯—牛顿算法

分类号: AMS(2000) 65L80 **中图分类号**: O241.81 **文献标识码**: A

1 模型假设

1. 假设喝啤酒后，啤酒中的酒精全部进入胃肠（含肝脏），然后经过胃肠渗透到体液中。
2. 假设酒精从胃肠向体液的转移速度，与胃肠中的酒精浓度（或含量）成正比。
3. 假设体液中的酒精消耗（向外排出、分解或吸收）的速度，与体液中的酒精浓度（或含量）成正比。
4. 对问题一，假设大李在下午6点接受检查，之后由于停车、等待等原因耽误了一定时间T_0（这里不妨设$T_0=0.5$小时），即大李从第一次检验到第二次喝酒之间间隔为半个小时。
5. 对问题一，假设大李在两次喝酒时都是将酒瞬时喝下去并立即进入胃肠中，没有时间耽搁。
6. 假设酒在很短的时间内喝完即将酒瞬时喝下去并立即进入胃肠中，没有时间耽搁。
7. 假设酒在较长一段时间内喝时是匀速喝下去。
8. 假设体液的密度为1千克/升。

2 模型建立

一个人的血中酒精含量取决于他的饮酒量、体内原有的酒精含量以及喝酒方式等。由科普知识知道，酒精是经胃肠（主要是肝脏）的吸收与分解进入体液的。因此本文酒精从胃肠（含肝脏）向体液转移情况用图1直观地表示。

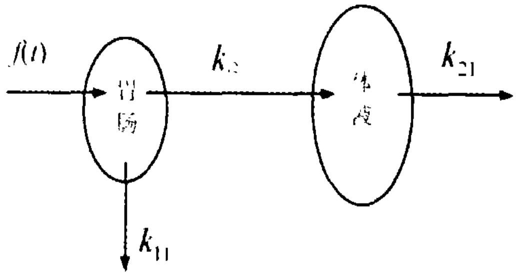

图 1:

其中k_{11}为酒精从胃肠渗透到（除体液外）其它地方的速率系数；k_{12}为酒精从胃肠进入体液的速率系数；k_{21}为酒精在体液中消耗（向外排除或分解或吸收）的速率系数；$f(t)$为酒精进入胃肠的速率。

问题一：

要解释大李碰到的情况，就要证明大李在中午12点喝一瓶啤酒后在下午6点时体内血液中的酒精含量小于20毫克/百毫升，在晚饭时再喝一瓶啤酒后在凌晨2点时体内血液中的酒精含量大于或等于20毫克/百毫升。

由于酒精在血液中的含量与在体液中的含量相同,下面讨论人喝酒后胃肠与体液中的酒精含量。根据假设的条件及图1可以看出：$x_1(t)$的变化率由从胃肠进入体液的酒精$-k_{11}x_1$和从胃肠渗透到（除体液外）其它地方的酒精$-k_{12}x_1$组成；$y_1(t)$的变化率是由从胃肠进入体液的酒精$k_{12}x_1$与在体液中消耗（向外排出、分解或吸收）的酒精$-k_{21}y_1$组成。所以，可以建立如下的微分方程：

$$\begin{cases} x_1' = -k_{11}x_1 - k_{12}x \\ y_1' = k_{12}x_1 - k_{21}y_1 \end{cases} \tag{1}$$

1)　大李在中午12点喝一瓶啤酒时，即在$t=0$时，胃肠中的酒精量$x_1(0)$为一瓶酒中的酒精a与饮酒瓶数N的乘积Na，而此时体液中的酒精量$y_1(0)$为零。因此初始条件为

$$\begin{cases} x_1(0) = Na \\ y_1(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

体液（或血液）中酒精的浓度为：

$$C(t) = \frac{y_1(t)}{V} \tag{3}$$

根据以上建立的微分方程模型，求出当$N=1$时$C(6)=\frac{y_1(6)}{V}$的值，并判定$C(6)<20$（毫克/百毫升）是否成立，若成立，则说明大李在中午12点喝一瓶啤酒后在下午6点时符合驾车标准。

2)　大李第二次喝酒时胃肠和体液中已经有酒精，所以在第二次喝酒即$t=0$时胃肠中的酒精量$x_2(0)$为N瓶酒中的酒精质量Na与第一次喝酒后残留在胃肠中的酒精质量$x_1(T_1)$之和，而此时体液中的酒精质量$y_1(0)$为第一次喝酒后残留在胃肠中的酒精质量$y_1(T_1)$。因此大李第二次喝酒的模型如下：

$$\begin{cases} x_2' = -k_{11}x_2 - k_{12}x_2 \\ y_2' = k_{12}x_2 - k_{21}y_2 \\ x_2(0) = x_1(T_1) + aN \\ y_2(0) = y_1(T_1) \\ C(t) = \frac{y_2(t)}{V} \end{cases}$$

根据题意，判断$C(14-T_1)=\frac{y_2(14-T_1)}{V}\geqslant 20$是否成立。

问题二：

1)　问题二的第一问与问题一中大李第一次喝酒的情况相同。

2)　对于第二问，$x(t)$的变化率由从胃肠进入体液的酒精$-k_{11}x$，从胃肠渗透到（除体液外）其它地方的酒精$-k_{12}x$以及酒精进入胃肠的速率$f(t)$组成。$y(t)$的变化率由从胃肠进入体液的酒精$k_{12}x$与在体液中消耗（向外排出、分解或吸收）的酒精$-k_{21}y$组成。在饮酒期间（$0<t<T$），假设酒精进入胃肠的速度是匀速的，则酒精进入胃肠的速率为$f(t)=\frac{Na}{T}$，饮酒后，无酒精进入胃肠，所以$f(t)=0$，因此，建立微分方程模型如下:

$$\begin{cases} x'(t) = -k_{11}x - k_{12}x + f(t) \\ y'(t) = k_{12}x - k_{21}y \end{cases}, \quad 其中\ f(t) = \begin{cases} \frac{Na}{T} & (0 < t < T) \\ 0 & (t \geqslant T) \end{cases}$$

下面讨论初始条件，因在$t = 0$时胃肠中的酒精质量$x(0)$和体液中的酒精质量$y(0)$都为零。故初始条件为

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

体液（或血液）中酒精的浓度为：$C(t) = \frac{y(t)}{V}$。

问题二即求满足$C(t) \geqslant 20$的时间t范围。

问题三：

问题三分为两种情况：第一种情况是酒在很短的时间内喝的，第二种情况是酒在较长一段时间内喝的。

第一种情况:酒在很短的时间内喝的,要求血液中酒精含量最高的时间，即求体液中酒精含量函数$y(t)$的最值点。用极值与最值的关系，因最值存在，且驻点唯一，故可通过求解驻点得到。即求满足$y'(t) = 0$的时间t。其中$y(t)$满足以下微分方程(1)及初始条件(2)，(3)。

第二种情况为：酒在较长一段时间内喝完，同理为求满足$y'(t) = 0$ 的时间t。其中$y(t)$满足以下微分方程

$$\begin{cases} x'(t) = -k_{11}x - k_{12}x + f(t) \\ y'(t) = k_{12}x - k_{21}y \end{cases}, \quad 其中 f(t) = \begin{cases} \frac{Na}{T} & (0 < t < T) \\ 0 & (t \geqslant T) \end{cases}$$

初始条件为： $x(0) = 0$，$y(0) = 0$。

问题四：

如果天天喝酒，设每天喝N瓶，第i次饮酒与第$i+1$次饮酒的间隔时间为T_i，每日饮酒量为Na，按照与问题一同样的思路，得第一天体液中酒精含量满足的微分方程为：

$$\begin{cases} x_1'(t) = -k_{11}x_1 - k_{12}x_1 \\ y_1'(t) = k_{12}x_1 - k_{21}y_1 \\ x_1(0) = Na \\ y_1(0) = 0 \end{cases}$$

第二天体液中酒精含量满足的微分方程为： 第n天体液中酒精含量满足的微分方程为：

$$\begin{cases} x_2'(t) = -k_{11}x_2 - k_{12}x_2 \\ y_2'(t) = k_{12}x_2 - k_{21}y_2 \\ x_2(0) = Na + x_1(T_1) \\ y_2(a) = y_1(T_1) \end{cases} \quad \cdots \quad \begin{cases} x_n' = -(k_{11} + k_{12})x_n \\ y_n' = k_{12}x_n - k_{21}y_n \\ x_n(0) = Na + x_{n-1}(T_{n-1}) \\ y_n(a) = y_{n-1}(T_{n-1}) \end{cases}$$

3 模型求解

问题一的求解:

微分方程

$$\begin{cases} x_1' = -k_{11}x_1 - k_{12}x & (4) \\ y_1' = k_{12}x_1 - k_{21}y_1 & (5) \end{cases}$$

(4)是可分离变量的微分方程，(5)是一阶线性非齐次微分方程，通过求解，得出它满足初始条件

$$\begin{cases} x_1(0) = Na \\ y_1(0) = 0 \end{cases}$$

的特解为

$$x_1 = Nae^{-(k_{11}+k_{12})t}, \quad y_1 = -\frac{Nak_{12}}{k_{11}+k_{12}-k_{21}}(e^{-(k_{11}+k_{12})t} - e^{-k_{21}t})$$

令

$$k_{11}+k_{12} = \alpha, \quad k_{21} = \beta, \quad ak_{12} = \gamma$$

解可转化为

$$x_1 = Nae^{-\alpha t}, \quad y_1 = \frac{N\gamma}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$$

根据题目中所给的饮两瓶啤酒的数据，此时$N = 2$。对于利用非线性最小二乘法拟合及高斯-牛顿算法可得：$\alpha = 2.180, \beta = 0.1755, \gamma = -54468$。
拟合图形见图2。图2中圆圈表示的点是题中表示的参考数据，曲线为拟合后的图形。
将以上数据代入问题一的模型中，可求得大李在中午12点饮一瓶啤酒，即$N = 1$时，到下午6点第一次检查时体液中的酒精含量（即血液中的酒精含量）

$C(6) = \frac{y_1(6)}{V} = 19.9616 < 20$，所以大李通过了第一次检查。

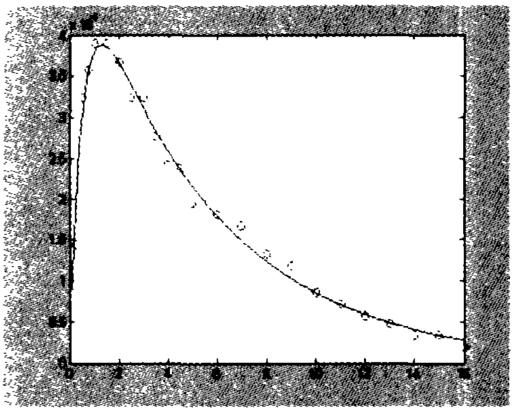

图 2:

大李第二次喝酒模型的方程解为

$$x_2 = aN(1+e^{-\alpha T_1})e^{-\alpha t}, \quad y_2 = \frac{N\gamma}{\beta-\alpha}((1+e^{-\alpha T_1})e^{-\alpha t} - (1+e^{-\beta T_1})e^{-\beta t})$$

考虑到大李在下午6点接受检查，之后由于停车等待等原因耽误了一定时间，假设大李从第一次检验到第二次喝酒之间间隔0.5小时，代入数据计算可得第二次检验时，大李血液中酒精含量为：20.2448（毫克/百毫升）。这就解释了大李在第一次喝酒通过检查，第二次喝同样的酒且经过更长的时间检查却被定为饮酒驾车的情况，因为第二次喝酒时有第一次喝酒的残留量。

问题二的求解:

我们分别考虑喝了3瓶啤酒和半斤低度白酒在短时间和2小时内喝下的情况。

短时间内喝下的模型，已在问题一求解中解得到求解。

在一个较长时间内喝下的微分方程中，$f(t)$是个分段函数，所以需要分段求解，我们将其转

化为两个微分方程：

$$\begin{cases} x_1'(t) = -k_{11}x_1 - k_{12}x_1 + Na/T \\ y_1'(t) = k_{12}x_1 - k_{21}y_1 \\ x_1(0) = 0 \\ y_1(0) = 0 \\ 0 \leqslant t \leqslant T \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} x_2'(t) = -k_{11}x_2 - k_{12}x_2 \\ y_2'(t) = k_{12}x_2 - k_{21}y_2 \\ x_2(0) = x_1(T) \\ y_2(0) = y_1(T) \end{cases} \tag{7}$$

微分方程组(6)的解为：$x_1 = \frac{aN}{\alpha T}(1-e^{-\alpha t})$，$y_1 = \frac{N\gamma}{\alpha T}e^{-\beta t}(\frac{e^{\beta t}}{\beta} - \frac{e^{(\beta-\alpha)t}}{\beta-\alpha} + \frac{1}{\beta-\alpha} - \frac{1}{\beta})$

微分方程组(7)的解为：$x_2 = y_1(T)e^{-\alpha t}$, $y_2 = y_1(T)(\alpha-\beta)e^{-\beta t} - x_1(T)k_{12}(e^{-\beta t} - e^{-\alpha t})$

再代入具体参数值进行计算可得多少时间内驾车违反新规定，列表如下：

	3瓶啤酒(500ml, 5°)	半斤白酒(38°)
短时间内喝完	12.25小时	13.6小时
2小时内喝完	13.28小时	14.63小时

问题三的求解:

第一种情况是酒在很短的时间内喝下的,我们在问题一中已求得：$y = \frac{N\gamma}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$。

令$y' = 0$可得$t = \frac{\ln\beta - \ln\alpha}{\beta-\alpha}$。

可见无论喝多少酒，体液中酒精的含量达到最高所用的时间均为1.3255小时。

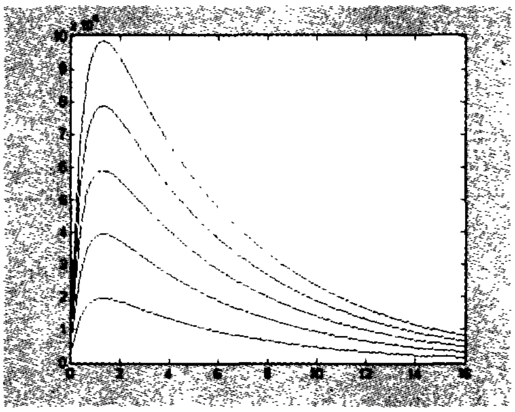

图3

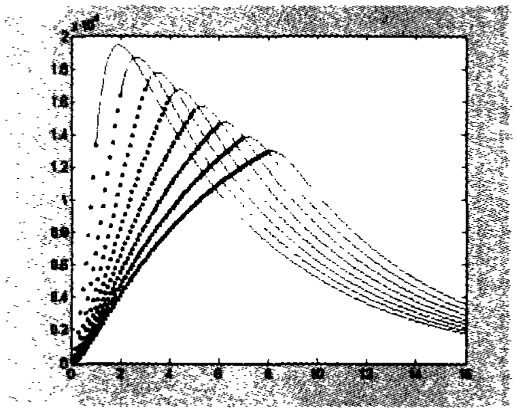

图4

图3中曲线分别表示喝1瓶，2瓶，$\cdots$，5瓶啤酒体液中酒精含量的走势图。

第二种情况是酒在较长一段时间内喝的，其体液中酒精含量的表达式为分段函数，并可证明其最高值在后半段到达。令$y' = 0$，可得

喝酒所用的时间 (单位:小时)	1	2	3	4	5	6	7	8
酒精含量达到最高点所用的时间 (单位:小时)	1.9139	2.6510	3.4835	4.3713	5.2917	6.2329	7.0880	8.1530

图4为一瓶啤酒在不同的时间内喝完的图形，8条曲线从左到右分别为1-8个小时内喝完酒体液中酒精含量走势图。其中每条曲线的最高点为体液中酒精含量的最高值。图中点组成的图形表示持续喝酒时体液中酒精含量的变化，曲线表示喝完酒后体液中的酒精含量变化。

对于其它的情况也可用同样的方法估计血液中的酒精含量在什么时间最高。

问题四的求解:

先求出x_n和y_n的表达式，它们都是等比数列，再求极限。

$$x_n = Na(1+e^{-\alpha T}+e^{-2\alpha T}+\cdots+e^{-(n-1)\alpha T})e^{-\alpha t} = Na\frac{1-e^{-n\alpha T}}{1-e^{-\alpha T}}e^{-\alpha t}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{Na}{1-e^{-\alpha T}}e^{-\alpha t}$$

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{N\gamma}{\beta-\alpha}[(1+e^{-\alpha T}+\cdots+e^{-(n-1)\alpha T})e^{-\alpha t}-(1+e^{-\beta T}+\cdots+e^{-(n-1)\beta T})e^{-\beta t}] \\ &= \frac{N\gamma}{\beta-\alpha}\left[\frac{1-e^{-n\alpha T}}{1-e^{-\alpha T}}e^{-\alpha t}-\frac{1-e^{-n\beta T}}{1-e^{-\beta T}}e^{-\beta t}\right] \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{N\gamma}{\beta-\alpha}\left[\frac{1}{1-e^{-\alpha T}}e^{-\alpha t}-\frac{1}{1-e^{-\beta T}}e^{-\beta t}\right]$$

通过代入数值计算，如果一个70kg的人天天喝酒，（每天喝酒一次，每次喝酒时间固定，且短时间内喝完），每天喝的酒量一致，喝酒以后6小时后再开车，则每天最多喝1瓶啤酒；如果喝酒以后10小时以后再开车，则每天最多喝2瓶啤酒。

每天喝啤酒瓶数	1	2	3	4	5
多少小时以后可以开车	6	10	13	14	16

短文（略）。

4 模型的分析与检验

本文分别建立了在短时间内喝酒和长时间喝酒两种情况下体液（含血液）中的酒精含量的模型，对给出的数据，利用非线性最小二乘数据拟合及高斯-牛顿算法，确定了酒精含量以及酒精从胃肠进入血液的速度系数和酒精从血液渗透出体外的速度系数。根据模型得到的结果基本符合实际。模型具有较好的稳定性，能够根据每天喝的酒量来算出可安全驾车的时间限定。

5 模型的评价与推广

模型很好的描述了酒精在体内的变化规律，在酒精摄入的不同（即喝不同量的酒）时能够较为准确的预测出不同时间的血液酒精浓度。对司机安排喝酒与开车的关系有指导性作用。能够有效的防止酒后驾车的发生。

模型的优点：1. 本模型简明易懂，具有较好的通用性。2. 模型把复杂的生理循环问题转化为胃肠与体液之间的简单变化。模型的缺点：本模型存在近似误差，是通过拟合产生的；本模型未考虑不同的人对酒精的消耗速率可能存在差异。模型的推广：模型稍作修改可以用于药物动力学，对药物在体内的浓度的变化进行研究。也可以推广到化学方面。

参考文献：

[1] 姜启源、谢金星、叶俊.《数学模型》第三版[M]. 高等数学出版社，2003年8月

[2] 同济数学研究室、《高等数学》[M]、北京，高等数学出版社，2002年6月

[3] 飞思科技产品研发中心.《MATLAB 6.5 辅助优化计算与设计》[M]、电子工业出版社，2003年4月

[4] 苏金明、张莲花、刘波等、《MATLAB 工具箱应用》[M]、电子工业出版社，2004年1月

[5] 王灵儿、周汉桥、人体酒精含量与交通事故率密切相关、
网址：http://www.cnhubei.com/200406/ca481390.htm，访问时间(2004年9月17日)。

[6] 梁静平、董少广. 酒成为第二大健康杀手警惕慢性酒精中毒
网址：http://finance.sina.com.cn/o/20020730/1508238349.html，访问时间(2004年9月17日)。

Optimum Model of Drinking and Driving

WANG Yi, LI Fei, ZHONG Shu-liang

Advisor: YAN Wen-yong, LIANG Bing, WANG Ke

(Chengdu Electro-mechanical College, Chengdu 610031)

Abstract: In this paper, we give two differential equations concerning situations, in which a certain amount of alcohol drinks is given in a short time vs. in a long time by analysing the exchange mechanism of alcohol between the stomach (including the liver) and the body fluid (including the blood). Each coefficient is solved, based on given datas by nonlinear least square method and Gauss-Newton's algorithm. As results, we can explain why the density of alcohol in big Li's body is more than 20 milligram / one hundred milliliters in the second inspection.

Keywords: drinking; differential equations; Gauss-Newton's algorithm

(上接146页)

Optimum Project on the Advertisement for Officers

HE Xiang, MA Yan, GAO Su-qin
Advisor: PEI Chong-jun

(Anhui University of Finance and Economics, Bengbu Anhui 233061)

Abstract: In the paper, the authors design the mathematical optimized models on the assignment of employees.

The specialties and wishes of the candidates, demands and conditions of the employing department are firstly given numerical evaluations to make corresponding arrows; and then based on the Euclid distance, the authors figure out the approach degree to the specialties of the candidates and demands of the employing department to get a matrix of the approach degree. By making a fuzzy classification, we can get an optimized distribution according to need without considering the wishes of the candidates. In the same way to get a matrix of the approach degree by working out the approach degree to the wishes of the candidates and the conditions of the employing department. They get a matrix of compound approach degree by giving a rate to the two matrixes to make a linear combination respectively. Making a fuzzy classification in order to get an assignment fit for wishes of candidates and needs of the employing department, and explain that the project can also be used in the situation when there are N candidates applying for M employing departments. Considering the preference of the needs of the employer and the candidates' wishes, the authors give a discussion on the problem above in detail, and make a brief evaluation on it.

Keywords: Euclid distance; approach degree; fuzzy classification