

月球探测器软着陆的最优控制

徐 敏, 李俊峰

(清华大学 工程力学系, 北京 100084)

**摘 要:** 为研究月球探测器从月球泊轨道向月面软着陆的最优控制问题,提出了一种两次制动变轨的软着陆方案:探月器从月球停泊轨道出发,启动变轨发动机进行第一次制动后飞向月球,在月面附近第二次制动以实现软着陆。在两次制动变轨时,对固定推力发动机的情况,采用 Pontryagin 极大值原理对燃料最省变轨控制问题进行了分析,并引入遗传算法数值求解两点边值问题,得到了制动变轨的初始、终端位置和发动机推力方向角的最优控制规律。

**关键词:** 月球探测器; 软着陆; 最优控制; 遗传算法

**中图分类号:** V 412.4

**文章编号:** 1000-0054(2001)08-0087-03      **文献标识码:** A

Optimal control of lunar soft landing

XU Min, LI Junferg

(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** This paper presents an optimal control scheme that contains two deceleration phases for soft landing of a lunar lander to the moon. The lunar lander decelerates from a moon parking orbit to the moon. Then the lander is showed again for soft landing as it arrives at the moon surface. The minimum fuel orbit coplanar transfers with constant thrust during two deceleration phases were studied using the Pontryagin maximum principle. The optimal start and end positions of the orbit transfer and the optimal control history of the thrust direction are obtained by solving a two-point boundary value problem using the genetic algorithm.

**Key words:** lunar lander; soft landing; optimal control; genetic algorithm

在月球建立空间基地或对月面勘测时,需要使探月器以很小的速度降落到月面,以保证仪器设备的安全<sup>[1]</sup>。探月轨道分为地球逃逸轨道、地-月转移轨道、月球俘获轨道和月面着陆轨道几个部分。Pieson B L 等<sup>[2]</sup>研究了前三段轨道的最优控制问题。月面着陆分为硬着陆和软着陆。硬着陆对探月器着陆时的速度没有限制,软着陆则要求探月器以无速度地着陆在月面上。由于月球上没有空气,不能

通过大气阻力来减速,必须用探月器上的发动机来制动。所设计的探月器采用固定推力发动机,从月球停泊轨道出发,通过两次点火制动实现在月面的软着陆。变轨控制问题是以消耗燃料最少为目标,采用 Pontryagin 极大值进行分析<sup>[3]</sup>,得到了最优变轨时发动机点火和关车的最佳位置,以及推力方向的最优控制规律。在数值求解最优控制问题时采用了遗传算法<sup>[4]</sup>,具有鲁棒性强、易于并行处理、适用于求解一些复杂的非线性最优化问题等特点。

1 两次制动的软着陆方案

探月器先在月球停泊轨道上飞行,经过第一次制动,从停泊轨道变轨到近地点在月球表面、远地点在停泊轨道上的椭圆轨道,接近月面时再进行第二次制动,以实现软着陆。如图 1 所示,其中带“\*”的部分表示制动段。按照此方案,探月器在从停泊轨道下降到月面附近的阶段,利用了月球引力的作用,发动机无须点火,不消耗燃料;在两次制动减速阶段,以消耗燃料最少为目标进行最优控制,按照所得的

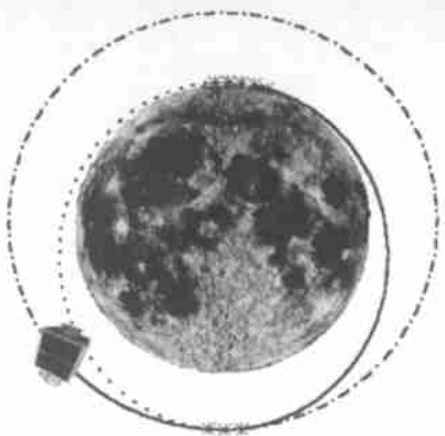


图 1 软着陆两次制动示意图

最佳位置让发动机点火或关车,并在发动机工作时,对其推力方向进行控制,从而实现消耗燃料最少的目标。

## 2 探月器软着陆最优变轨控制

探月器的两次制动,都需要在星际探测器上启动推力发动机,固定推力发动机(推力为常值,推力方向可控)由于具有体积小、工作时间长且多次点火等特点,得到广泛的应用。针对固定推力发动机的情况,研究探月器制动变轨的燃料消耗最少控制问题。

### 2.1 探月器制动阶段的动力学方程

探月器在月球引力场中的动力学方程用极坐标表示为:

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{v_r}{v_\theta} r, \\ \dot{v}_r = v_\theta - \frac{\mu}{rv_\theta} + \frac{Fr\sin u}{mv_\theta}, \\ \dot{v}_\theta = -v_r + \frac{Fr\cos u}{mv_\theta}, \\ \dot{m} = -C \frac{r}{v_\theta}, \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $\mu = 4.90 \times 10^3 \text{ km}^3/\text{s}^2$ , 为月球引力常数;  $m$  为探月器的质量;  $F$  为探月器发动机推力, 为常值;  $C$  为燃料质量变化率;  $u$  为发动机推力方向与横向速度的夹角, 作为控制变量。

软着陆第一次制动时, 开普勒轨道的轨道方程和探月器的径向速度和横向速度为:

$$\begin{cases} r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta-\omega)}, \\ v_r = \frac{\mu}{a(1-e^2)} \sin(\theta-\omega), \\ v_\theta = \frac{\mu}{a(1-e^2)} (1+e\cos(\theta-\omega)), \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $a$  为轨道的半长轴,  $e$  为轨道偏心率,  $\omega$  为近地点幅角。

探月器制动变轨的开始和结束位置为待优化参数, 设其极角分别为  $\theta_1$  和  $\theta_2$ 。当给出一组  $\theta_1$  和  $\theta_2$  时, 由式(2)可得探月器的位置和速度在制动变轨的初终值条件。探月器质量的初值  $m_0$  为已知, 终值自由。综合起来则可得到式(1)的边界条件。

第二次制动时, 变轨的初始条件与第一次类似, 可由开普勒轨道的性质得到。终端条件为:

$$r = 1738 \text{ km}, v_r = 0, v_\theta = 0. \quad (3)$$

也可以根据不同的软着陆要求具体给出。

### 2.2 燃料最省控制问题

将方程(1)写为以下形式

$$\dot{X} = f(X, u), \quad (4)$$

该式称为系统的状态方程, 式中  $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [r, v_r, v_\theta, m]^T$ , 称为状态变量。

设状态变量的初、终值为  $X(\theta_1) = X_1$  和  $X(\theta_2) = X_2$ , 由上一节分析可得变轨的边界条件:

$$g_1(X_1) = 0, g_2(X_2) = 0. \quad (5)$$

按照燃料最省的要求, 取变轨结束时探月器质量的负值为性能指标, 即

$$J = -m(\theta_2) = -x_4(\theta_2). \quad (6)$$

引入辅助的 Hamilton 函数:

$$H = \lambda_1 \frac{v_r}{v_\theta} + \lambda_2 \left[ v_\theta - \frac{\mu_1}{rv_\theta} + \frac{Fr\sin u}{mv_\theta} \right] + \lambda_3 \left[ -v_r + \frac{Fr\cos u}{mv_\theta} \right] - \lambda_4 C \frac{r}{v_\theta}, \quad (7)$$

式中  $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4]^T$ , 称为协态变量。

根据 Pontryagin 极大值原理可以得到如下最优条件。

协态变量满足协态方程:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X}. \quad (8)$$

最优推力方向角

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \\ u^* = \arctan \frac{\lambda_2}{\lambda_3}. \quad (9)$$

横截条件: 存在一常向量  $v_i$  使得  $\lambda$  在端点满足

$$\lambda_i = \sum_j v_j \frac{\partial g_{ij}}{\partial X}, \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

由于变轨的初始位置和终端位置不定, 则有:

$$H(\theta_i^*) = -\frac{\partial J}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_i} - v^T \frac{\partial g}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_i}, \quad i = 1, 2. \quad (11)$$

最优控制问题可以通过求解式(4)、(5)和(7)~(11)得到, 这是一个复杂的两点边值问题。用打靶法求解对迭代初值的选择十分敏感, 需要丰富的初值猜测经验。采用遗传算法进行数值计算, 可避免对初值猜测。

### 2.3 应用遗传算法求解最优控制问题

首先将上述最优控制问题转化成一个最优化问题: 寻找最优参数  $\theta_1, \theta_2, \lambda_1(\theta_1), \lambda_2(\theta_1), \lambda_3(\theta_1), \lambda_4(\theta_1)$ , 使状态变量的终值满足边界条件, 并使性能指标取最小值。

然后引入“伴随-控制”变换<sup>[5]</sup>,利用协态变量与控制变量存在的依赖关系,用控制变量 $u(\theta_1)$ 及其导数 $\dot{u}(\theta_1)$ 的初始值得到协态变量的初值 $\lambda_1(\theta_1) \sim \lambda_4(\theta_1)$ ,从而使待优化参数的数目从6个减少到4个,减少了运算量。

采用实数编码的遗传算法,把 $\theta_1, \theta_2, u(\theta_1), \dot{u}(\theta_1)$ 作为个体子串,当给出一个初值时,由“伴随-控制”变换和初始条件,得到协态变量和状态变量的初值。然后求解初值问题式(4),(8),同时由式(9)确定 $u(\theta)$ ,于是在 $\theta = \theta_2$ 时,得到状态变量的终值 $x_1(\theta_2), \dots, x_4(\theta_2)$ ,选择适应函数为:

$$F(\theta_1, \theta_2, u(\theta_1), \dot{u}(\theta_1)) = -x_4(\theta_2) + C g_2(X_2),$$

(12)

式中 $C$ 为自定义的权系数。通过遗传操作进行迭代,当 $F$ 取极小值时得到最优的 $\theta_1^*, \theta_2^*, u^*(\theta_1^*), \dot{u}^*(\theta_1^*)$ ,解初值问题式(4),(8)可以得到最优轨线 $x_i^*(\theta)$ 和 $\lambda_i^*(\theta)$ ,再由式(9)可求得最优控制规律 $u^*(\theta)$ 。

### 3 算例

设探月器质量 $m = 150\text{ kg}$ ,发动机推力 $F = 500\text{ N}$ ,比冲 $I_{sp} = 400\text{ s}$ 。探月器从 $200\text{ km}$ 高的月球停泊轨道出发,经过第一次变轨制动,减速到近地点为 $1\,738\text{ km}$ (即月球半径),远地点为 $1\,938\text{ km}$ 的椭圆轨道上。在接近月面附近时进行第二次制动,实现在月面的软着陆。计算结果如表1所示。

表1 软着陆两次制动变轨

制动	点火位置 (°)	关机位置 (°)	工作时间 s	消耗燃料 kg
第一次	-1.004	-0.4137	12.72	16.22
第二次	-10.05	2.795	424.5	54.15

两次制动,发动机推力方向随时间的变化曲线分别如图2,3所示:

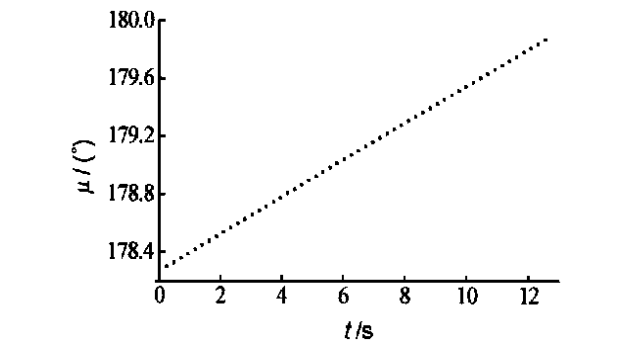


图2 第一次制动阶段推力方向变化曲线

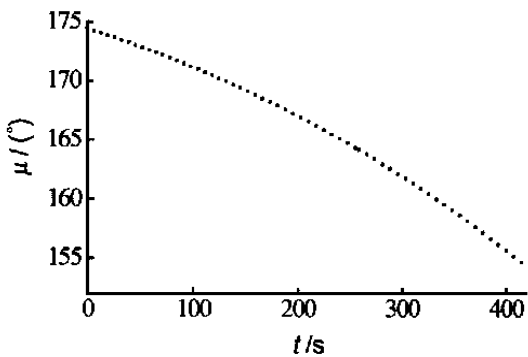


图3 第二次制动阶段推力方向变化曲线

### 4 结论

以燃料消耗最少为目标,提出了通过两次制动来实现探月器软着陆的方案。采用Pontryagin极大值原理,分析了燃料最省变轨控制问题,得到了发动机推力方向角的最优控制规律。在数值计算上,首先将上述最优控制问题转化成为一个参数最优化问题,然后应用遗传算法搜索最优参数,把最优控制问题的数值计算转化成对参数最优化问题的寻优计算,避免初值猜测,提高计算效率。这一方法适用于其它变轨控制问题。

### 参考文献 (References)

[1] 列凡托夫斯基. 宇宙飞行力学基础 [M]. 凌服根. 北京: 国防工业出版社, 1979.  
Levantovsky V I. Introduction to Spacecraft Flight Dynamics [M]. LING Fugen. Beijing: National Defence Industry Press, 1979. (in Chinese)

[2] Pieson B L, Kluever C A. Three-stage approach to optimal low-thrust earth-moon trajectories [J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1994, 17(6): 1275-1282.

[3] 王照林. 现代控制理论基础 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1981.  
WANG Zhaolin. Introduction to Modern Control Theory [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1981. (in Chinese)

[4] 潘正君, 康立山, 陈毓屏. 演化计算 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1998.  
PAN Zhengjun, KANG Lishan, CHEN Yuping. Evolutionary Computation [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1998. (in Chinese)

[5] 王明春, 荆武兴, 杨 涤, 等. 能量最省有限推力同平面轨道转移 [J]. 宇航学报, 1992, 13(3): 24-31.  
WANG Mingchun, JING Wuxing, YANG Di, et al. Minimum fuel orbit coplanar transfers with finite thrust [J]. Journal of Astronautics, 1992, 13(3): 24-31. (in Chinese)