

## 忆阻神经网络在联想记忆中的研究与实现

### 摘 要

多年以来，人们尝试用神经网络设计人工智能，尤其是联想记忆的能力。忆阻的发现为神经网络的物理实现提供了新的可能性，忆阻可以良好地实现同时具备存储与计算功能的突触。因此，本文对基于忆阻神经网络的联想记忆实现进行了如下研究。

首先介绍了神经网络与动力学、忆阻与忆阻神经网络、联想记忆的发展背景。然后研究了如何设计忆阻神经网络，并给出一个普适的忆阻神经网络框架，能够实现任意的离散的或连续的神经网络。接着研究了神经网络的动力学，讨论了基于初态的全稳定与多稳定，基于输入的流形转换与神经网络的控制理论。最后研究了联想记忆的相关模型与理论，讨论了自联想、异联想与复杂联想的基于 hopfield 神经网络的一致模型与算法。

**关键字** 忆阻 神经网络 hopfield 动力学 联想记忆

# **Memristor-based Neural Network's Reasearch and Implementation in Associative Memory**

## **ABSTRACT**

Over the years, people have tried to design artificial intelligence with neural network, especially the ability of associative memory. The discovery of the memristor provides new possibilities for the physical realization of the neural network, when memristor can help build synapse with both function of storage and computation.. Therefore, this paper carries out the following research on associative memory based on memristive neural networks.

Firstly, the background of neural network and dynamics, memristor based neural network, and the associative memory are introduced. And then study how to design the memristive neural network, and presents a universal framework, which can realize arbitrary discrete or continuous neural network. Then we discuss dynamics patterns of neural network, including dynamics based on the initial state, conversion of input manifold and the neural network control theory. In the end, the related models and theories of associative memory were studied, consistent models based on hopfield network for auto-associative memory、hetero-associative memory and complex associative memory respectively are researched.

**KEY WORDS** memristor neural network hopfield dynamics associative memory

# 目 录

第一章 绪论.....	1
1.1 神经网络.....	1
1.1.1 神经网络.....	1
1.1.2 神经网络的动力学.....	2
1.2 忆阻.....	2
1.3 联想记忆.....	3
1.4 研究的目的与意义以及本文结构安排.....	3
第二章 忆阻与忆阻神经网络.....	5
2.1 忆阻.....	5
2.1.1 忆阻的阻值修改与阈值效果.....	5
2.1.2 串联、并联忆阻.....	7
2.2 忆阻神经网络.....	8
第三章 神经网络动力学.....	12
3.1 神经网络状态动力学与联想记忆模式.....	12
3.2 神经网络动力学基本定性分析.....	13
3.3 基于初态的全稳定与多稳定判定.....	14
3.3.1 单稳定性分析.....	15
3.3.2 多稳定分析.....	16
3.3.3 仿真.....	17
3.4 基于输入的稳定模式.....	20
3.5 神经网络动力学的控制理论.....	21
第四章 联想记忆及学习.....	25
4.1 联想记忆基本概念.....	25
4.2 自纠错联想.....	25
4.3 异联想.....	27
4.4 混沌控制联想记忆.....	28
4.5 其他.....	30
第五章 总结.....	31
参考文献.....	32
致 谢.....	33

# 第一章 绪论

## 1.1 人工神经网络

### 1.1.1 人工神经网络

人的自身的智能以及更多的智能可能性一直是极吸引人同时极富挑战的科学问题之一。计算机科学蓬勃发展的时代，关于智能的定义与实现也得到了许多的拓展。普通的智能(AGI)依赖于普通的计算。在众多计算模式中，人工神经网络，作为对人脑生物神经网络模拟的模型，本身在结构与信息处理功能上表现出了良好的性质：普适性、并行性、容错性、自适应性、非线性、复杂性。这些性质既解释了人脑神经网络的生物功能，也使得人工神经网络成为一个富有巨大潜力的可发展的计算模式，在现在以及未来能够为我们解决问题、创造各种计算系统包括智能系统提供良好的基础支撑。

人工神经网络有许多不同的模型。这里主要指那些被高度简化的神经网络，而不包括细化建模的生物神经网络。人工神经网络主要分为前馈神经网络与递归神经网络。前者注重信息的序列处理，后者加入反馈使得功能更加合理。人脑是同时包含前馈与递归神经网络的复杂系统。人工神经网络还可以分为连续神经网络与离散神经网络，区分是时间上的取值是连续的还是离散的。神经网络的实现可以分为软件实现与硬件实现，所谓软件实现是指在现代冯诺依曼式计算机上编写程序，然后用存储与计算分离的模式去实现神经网络的计算(也许是离散仿真连续)，而硬件实现是指直接用硬件电路的计算实现神经网络的计算，即适合神经网络计算的计算机。

本文主要研究连续递归神经网络，即 hopfield 神经网络。带有时滞的递归神经网络模型如下：

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -d_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(x_j(t - \tau_{ij})) + u_i \quad \text{式 (1-1)}$$

其中 $d_i$ ,  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ 是网络的连接权值， $u_i$ 是系统外部的输入与阈值的总和， $x_i$ 是神经元的内部状态， $f$ 、 $g$ 是激励函数， $f_j(x_j(t))$ 、 $g_j(x_j(t - \tau_{ij}))$ 是激发的输出状态。

上述神经网络是一个超高维的非线性动力学系统<sup>[1]</sup>。神经网络表现为2个动力学系统，状态动力学子系统与权值动力学子系统。状态动力学子系统解释神经网络的推理即联想记忆、思考等功能，权值动力学子系统解释神经网络的学习、记忆存储、记忆衰退等功能，2个系统高度耦合，互相影响。上述的神经网络已经表达了状态动力学系统，权值动力学系统可以表达如下

$$\frac{dw(t)}{dt} = G(x, t) \quad \text{式 (1-2)}$$

不同的学习有不同的具体实现，比如一般的 hebb 学习  $\frac{dw(t)}{dt} = -dw + \eta xy$

值得一提的是神经网络记忆的可塑性不仅是权值的大小，还包括结构可塑性，空结构与0的权值有些不同。结构与权值一起作为神经网络的基础，它决定了神经网络的状态动力学，即在不同初态与输入下的系统状态的运动轨迹；状态动力学是权值更新即权值动力学子系统的直接动机。

另外需要注意的是，神经网络中可以存在控制动力学子系统。即有一部分状态是为了控制而不是表征知识。控制动力学系统也可以包含对应的权值。

一些改进的模型包括

#### 1. 双向联想记忆神经网络(BAM Neural Network)

1987年，Koslo 提出了双向联想记忆神经网络。BAM 神经网络限制了 hopfield 神经网络的结构特性，从全互联变成了2分网络。这种限制，减少了模型的复杂性，使得 BAM 神经网络可以实现异联想序列联想，在图像信号处理、自动控制、人工智能等方面有广泛的应用。

#### 2. 细胞神经网络(Celluar neural Networks)

细胞神经网络（CNN）是由 L.O.Chua 和 L.Yang 于1988年最先提出的。它将元胞自动机的特性引入神经网络，它同样限制了结构，互联只有在每个细胞附近产生，并且这种相关性规则对所有神经元是一致的。

#### 3. Cohen-Grossberg 神经网络

M.A.Cohen 和 S.Grossberg 于1983年提出竞争、合作的模型以产生自组织、自适应的神经网络构成方式。Cohen-Grossberg 是 hopfield 神经网络的泛化，它提供的一些变量可以使神经网络具有更大的表达能力，并且在 C-G 神经网络上获得的结论可以同样适合其他神经网络。

#### 4. 为了引入不确定性与模糊性，Yang 和 Chua 在细胞神经网络中引入了模糊逻辑得到了模糊细胞神经网络。

##### 1.1.2 神经网络的动力学

以上我们已经看到神经网络是一个高维的非线性的动力学系统。动力学系统的稳定性理论已经发展了许多年了，这些理论可以作为研究神经网络稳定性理论的基础。我们这里只讨论状态动力学子系统的稳定性理论；权值动力学子系统的变化轨迹实际上就是权值对应的系统的状态动力学的变化，我们期望的是权值能够学习得到合适的状态动力学以表达面对的流形与模式。

关于神经网络稳定性的综述可以参见<sup>[2]</sup>。

## 1.2 忆阻

忆阻是美国学者 Leon Chua 根据变量的对称性提出的第4种基本电子元件[3]。2008年，HP 实验室实现了一种物理忆阻[4]。忆阻最重要的特性是系统内部状态记录了历史影响的总和。

泛化的忆阻的公式是

$$y(t) = g(\mathbf{x}, u, t)u(t),$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

式 (1-3)

其中  $\mathbf{u}(t)$  是输入信号,  $\mathbf{y}(t)$  是输出信号, 向量  $\mathbf{x}$  是描述系统的  $n$  个内部变量,  $\mathbf{g}$ 、 $\mathbf{f}$  是连续函数。对于电流控制的忆阻系统,  $\mathbf{u}(t)$  代表电流信号,  $\mathbf{y}(t)$  代表电压信号; 对于电压控制的忆阻系统,  $\mathbf{u}(t)$  代表电压信号,  $\mathbf{y}(t)$  代表电流信号。所谓电流控制欲电压控制是指数学上的表达, 是可以相互转化的, 物理上是一致的。

忆阻可以建造新型的非易失的存储器, 比如在非易失存储领域, **RRAM** 由于它的高密度、高速计算、低能耗以及 **CMOS** 兼容性已经作为一种主流的对闪存的替代品。同时, 忆阻也被考虑作为神经网络权值的良好载体, 基于忆阻的神经网络有许多成果, 包括 **SNN** 神经网络, 忆阻与联想记忆, 忆阻神经网络的建造方法, 忆阻神经网络的动力学等等。

### 1.3 联想记忆

联想记忆首先考虑怎么在系统中建立原子模式的表征, 然后考虑建立复合的模式, 蕴含模式间的联系。对于一个输入或者说初始态, 它可能蕴含着不全的或者有噪音的信息, 联想记忆能从中回复到合理的信息模式。输入与输出是同一个变量空间的, 我们称为自联想; 输入与输出是一个变量空间的, 我们称为异联想。

在连续神经网络中, 记忆模式通过权值存储在神经网络状态动力学空间的一些模式中, 吸引域中的初态或输入在该权值对应的状态空间寻找记忆模式。常见的模式包括稳定点、极限环、混沌态, 单峰的模式, 复合的模式序列等等。一般有基于初态与基于输入时2种基本的联想记忆模式建立方式。联想记忆的学习就是修正权值来修正神经网络的状态动力学系统, 从而完成记忆模式的存储。

神经网络有许多实现联想记忆的模型。前馈模型, 盒中脑模型, 双向联想记忆(**BAM**), **hopfield** 神经网络, **Hamming** 神经网络, **Boltzman** 机都可以作为自联想与异联想神经网络(经过一些改进)。

衡量一个联想记忆模型系统有3个主要参数, 一是储存容量, 即能够同时稳定在网络中的记忆模式的最大数目; 二是提取的效率, 即提取期望模式需要的时间; 三是容错性, 即稳态的吸引域或者对于输入的敏感程度。

联想记忆基本的问题是: 设计联想记忆的模型(对应于状态动力学与控制动力学描述); 设计权值学习的算法(对应于权值动力学); 过程与结果的分析。

### 1.4 研究的目的与意义以及本文结构安排

联想记忆作为人脑区别于现代计算机的主要能力, 是智能的一种重要能力体现。忆阻的实现又使得联想记忆能够使用忆阻神经网络实现, 所以研究这个课题的意义是毋庸置疑的。这个结果不仅是加深对人智能的理解, 更是用计算、工程的方式开始超越生物智能, 就像工业革命的飞机超越鸟的飞行一样, 计算智能的成果会促进社会的变革。

本文对忆阻神经网络的联想记忆实现进行了如下研究。

1. 第一部分介绍了神经网络与动力学、忆阻与忆阻神经网络、联想记忆的发展背景。
2. 第二部分介绍了忆阻的性质，研究了如何设计忆阻神经网络，并给出一个普适的忆阻神经网络框架，能够实现任意的离散的或连续的神经网络。
3. 第三部分研究了神经网络的动力学，定性分析动力学受哪些因素影响。研究基于初态的动力学，一般的指数稳定性与基于不连续激发函数的忆阻神经网络的多稳定性。最后讨论了神经网络的控制理论。
4. 第四部分研究了联想记忆的相关模型与理论，讨论了自联想、异联想与复杂联想的基于 hopfield 神经网络的一致模型与算法。
5. 第五部分，总结了研究成果，展望了继续研究的方向。

## 第二章 忆阻与忆阻神经网络

### 2.1 忆阻

HP 实验室的忆阻公式如下

$$v(t) = (R_{on}x(t) + R_{off}(1 - x(t)))i(t) \quad \text{式 (2-1)}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mu \frac{R_{on}}{D^2} i(t) \quad \text{式 (2-2)}$$

其中 $R_{on}$ 、 $R_{off}$  是电阻的范围。 $X(t)$ 是填充的比例， $u$  是粒子的漂移率。

如果增加一个边界的处理，粒子非线性漂移， $f(x)$ 是非线性漂移的函数

$$f(x) = 1 - (2x - 1)^{2p} \quad \text{式 (2-3)}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mu \frac{R_{on}}{D^2} i(t) f(x) \quad \text{式 (2-4)}$$

如果写成电导的形式，如下

$$i(t) = G(t) * v(t) \quad \text{式 (2-5)}$$

$$G(t) = f(G, v, t) \quad \text{式 (2-6)}$$

以下对忆阻的基本特性进行分析。

#### 2.1.1 忆阻的阻值修改与阈值效果

图(1-1)表明了阻值的修改范围，以及边界效应。

从 $\frac{dx(t)}{dt} = \mu \frac{R_{on}}{D^2} i(t)$ 可以看出电阻的变化速率与电流成正比，如果是电压驱动的，就

是与电压成正比。另外，当电压驱动的时候， $\frac{di(t)}{dt * I} = \frac{(R_{off} - R_{on}) \frac{dx(t)}{dt}}{(R_{on}x(t) + R_{off}(1 - x(t)))}$ 与 $\frac{dx(t)}{dt}$ 成正比，即与电压成正比。

以上证明了，当电压比较小，不仅阻值修改比较小，电流的变化比例的速度即 $\frac{di(t)}{dt * I}$ 也比较小。这启示我们可以通过一个小的电流或电压对系统进行纯读取操作。对不同的电压，忆阻形成的滞回曲线如图 1-2 (a)、图 1-2 (b)所示。不同的电压，电流变化的比例如图1-3所示。



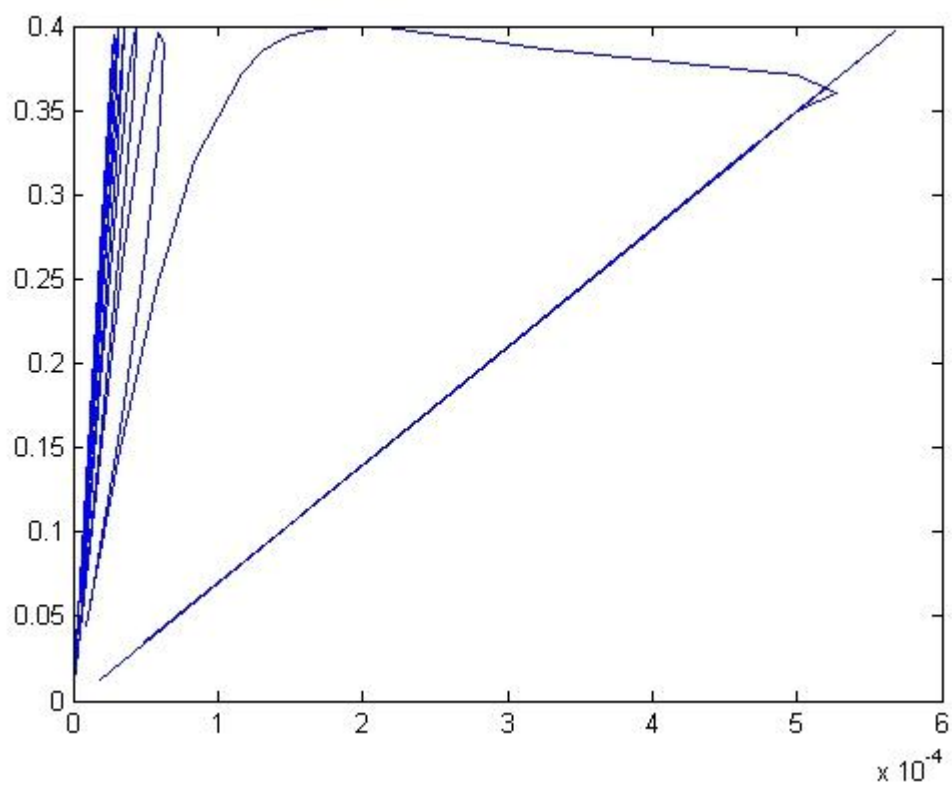
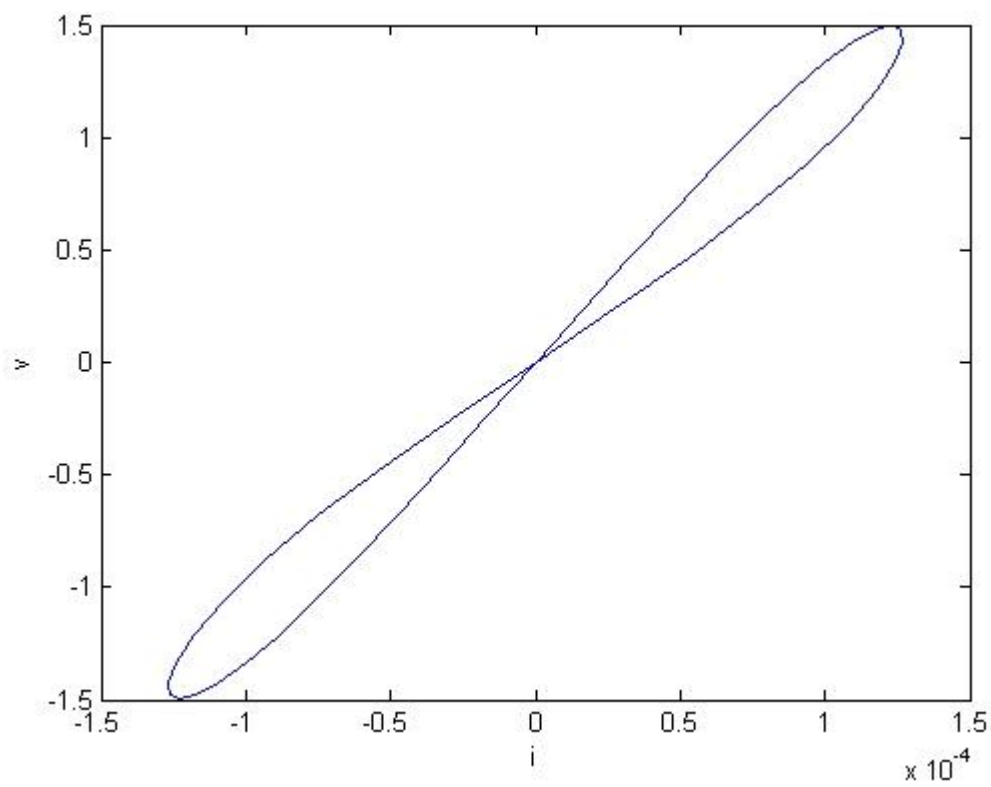


图 1-1 非线性漂移下电压与电流的关系图



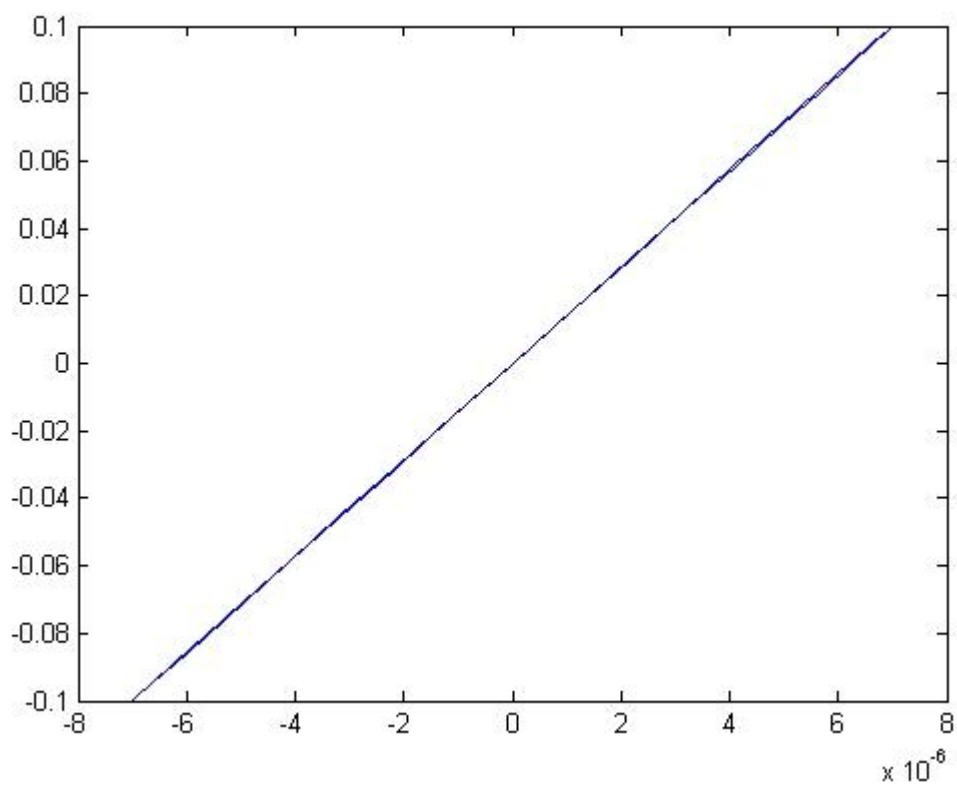


图 1-2 (a b) 非线性漂移假设下，忆阻两端 $v(t)$ ,  $i(t)$ 的关系图

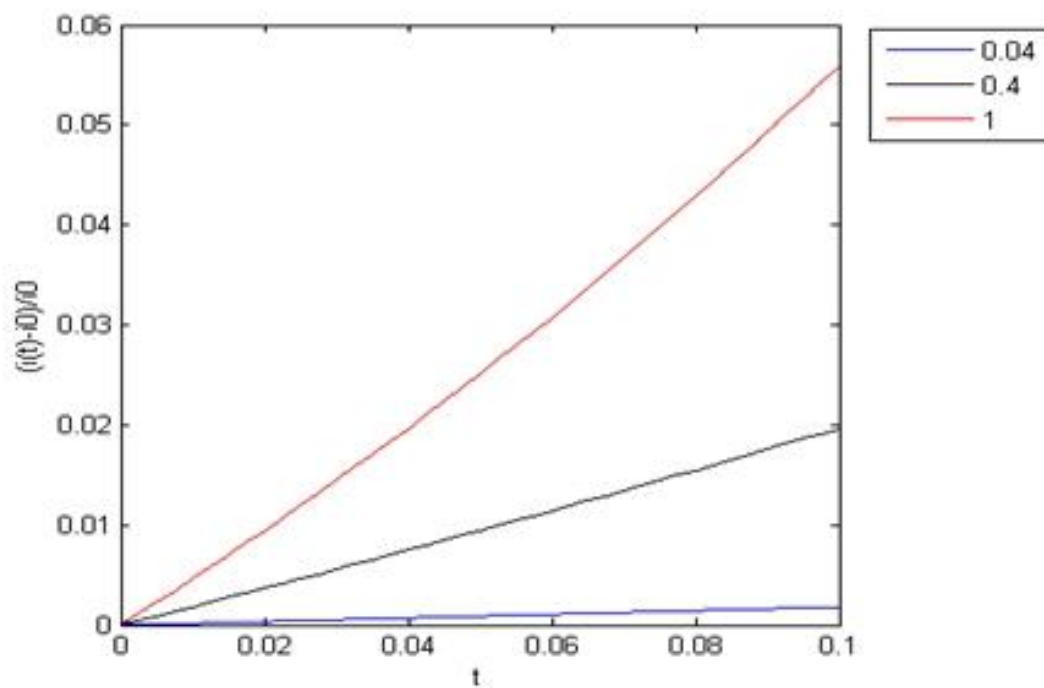


图 1-3 不同的电压 电流变化比例的示意图

### 2.1.2 串联、并联忆阻

忆阻串并联会形成更复杂的忆阻系统。

2个忆阻串联，电流一样，那么这2个忆阻的动力学是独立的，电阻以及电阻的变化就是对应的相加。如果我们把  $N$  个相同的忆阻正向连接，且处于同相的状态，那么就相当于一个新的忆阻，它的最大与最小电阻分别是每个电阻的  $N$  倍，电阻的变化速度也是所有电阻的  $N$  倍。如果是反向连接，那么一个电阻会增加，另一个电阻会减少，如果是相同的忆阻，那么当忆阻线性变化的时候，整个系统的电阻保持不变。

并联的时候，2个忆阻依旧是独立，根据并联对电流的分流决定了各自的变化。如果是完全相同且同相的电阻，并联形成的新的忆阻的最小电阻、最大电阻以及变化速度都是原本单个忆阻的  $1/N$  倍。如果存在反向连接，电阻的变化表现出单峰的特点。

这个结论可以1. 帮助我们用简单忆阻实现数值上放缩的忆阻，有时候，权值的要求超出了我们简单忆阻的范围，比如说太大超出范围，或者太小超出范围或者分辨率不够，那么我们就可以使用这种技术按需实现复合的忆阻，有效地实现我们期望的神经网络。在动态学习的过程中，这些动态组合的能力提供了强大的物理表达能力。2. 复杂的忆阻互联可以表达复杂的忆阻系统，这种复杂性主要是由于学习带来的系统的复杂性。关于如何运用复杂互联的忆阻系统实现复杂的功能，还需要继续研究。

## 2.2 忆阻神经网络

用忆阻实现忆阻神经网络，既要考虑到忆阻的复杂性，又要考虑到神经网络的复杂性。以下仅就忆阻概念提出实现普适神经网络的方法。

1. Daniel Soudry 等提出了普适的忆阻神经网络框架<sup>[5]</sup>，如下所示。

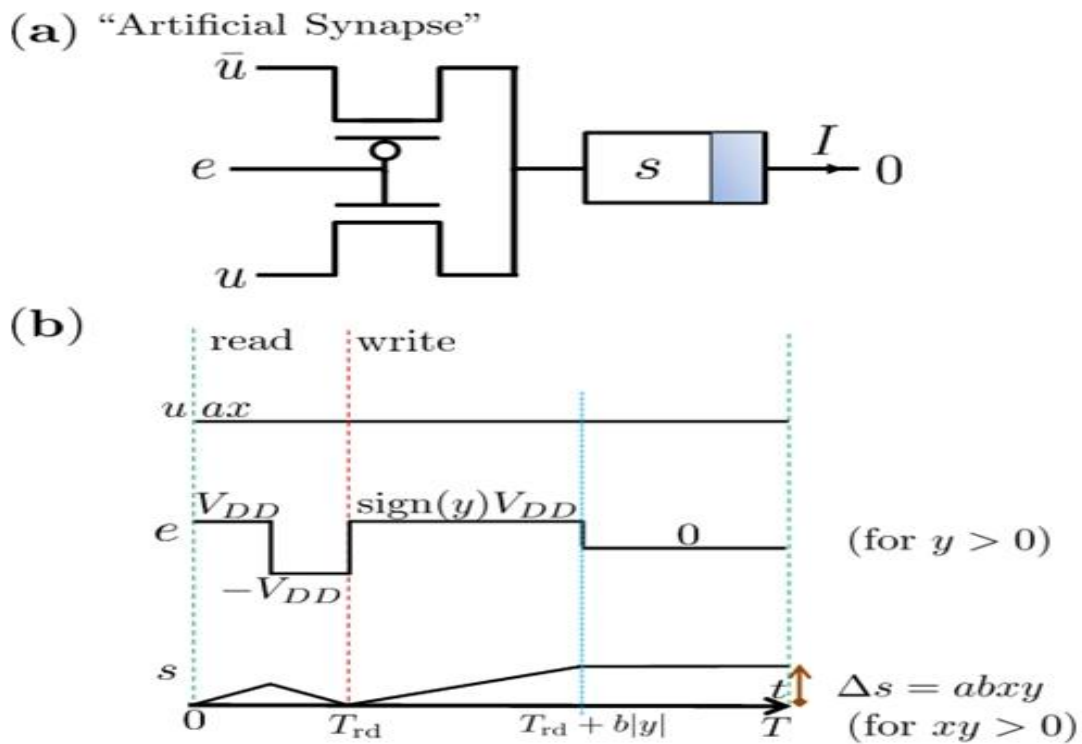


图 1-4 Daniel Soudry 提出的突触

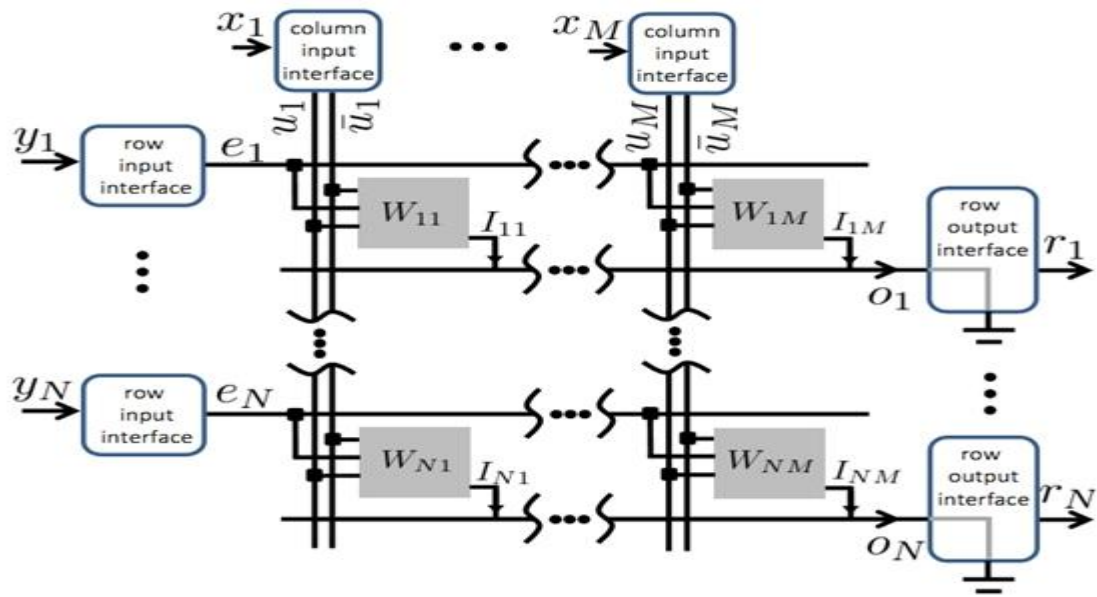


图 1-5 多个突触的架构

普适通用的忆阻神经网络设计需要实现神经网络与忆阻系统的映射。

如图（1-4 a），用2个 mosfet 晶体管与1个忆阻实现了突触。一共3个输入信号  $u, -u, e$ ，一个输出信号  $I$ 。2个晶体管实现电压选择的功能，通过  $e$  来控制突触的非学习运行与学习，如图（b）所示。当  $e$  为0，突触并不运行；系统的非学习是通过一个负电流来消除学习效应的；计算完  $y$  之后，通过控制  $e$  产生  $y$  相关的时长来完成一定量的学习。

多个突触的系统架构如图所示。 $Y$  产生  $e$  这个时序控制信号； $x$  产生  $u$  与  $\tilde{u}$ ，作为可供选择的电压；突触输出  $Y$  通过这个框架可以实现各种离散神经网络的计算。

另外，Daniel Soudry 采取了将权值缩放映射为忆阻一个点附近的线性增量的方式。这种映射可以消除忆阻非线性运算带来的麻烦。值得注意的是，我们可以通过放缩所有的权值而对时间进行映射，让神经网络的状态动力学可以加速运行。

### 分析与改进

下面我们讨论与改进这个框架，让可以实现连续的神经网络的计算。

第一、需要强调的是，上述突触结构只描述了突触计算的部分，而把其他计算比如神经元计算放在一些封装的接口去处理。神经网络或者类似的计算中，主要有2种成分。可失去成分，非易失成分。非易失成分用忆阻这些稳定的对象实现，可失去成分用电压、电流这些成分实现。更大野心的是，一些电子电路对象与编程接口，可以实现各种各样的计算。所以，比如那些接口，最好也是由分布的电路对象实现计算，而不是由 host 计算机实现。

第二、上面的神经网络设计主要面对离散神经网络的权值更新，所以他能把  $y$  用时间去处理。如果是连续神经网络，我们把他离散化，也并不能用这种方式去处理，因为在一个实时的环境中，用不确定的时间去处理学习，很可能导致实时信息的丢失或者是反应并不能对应时变，延时太大。

解决这个问题的办法是通过修改电压的值来提供学习的量。在足够小的时间尺度中，我们认为环境是不变的。我们设计为4个相等的周期，第一个周期正运行，第2个周期负运行，第3个周期依赖其他计算部件计算出应当执行的学习电压，第4个周期放空。由于计算学习电压的可能的复杂性，我们可以并不要求这里的学习电压就是前第一个周期对应的学习，只要是已完成的计算的学习累积电压即可。我们还可以通过参数设定来控制时控信号，比如放弃负循环，而把负循环的消学习任务放在学习累积计算中进行，比如控制正常运行与学习运行的时间比例可以帮助减少状态转换的消耗。电压的选择电路与上突触类似。

在这样的基本架构中，通过设计神经网络与忆阻的映射，权值学习的规则与学习电压的计算的映射以及时序控制等等，就可以实现一个普适的连续忆阻神经网络。

接下来我们以时滞神经网络网络为例说明对应的忆阻神经网络实现。

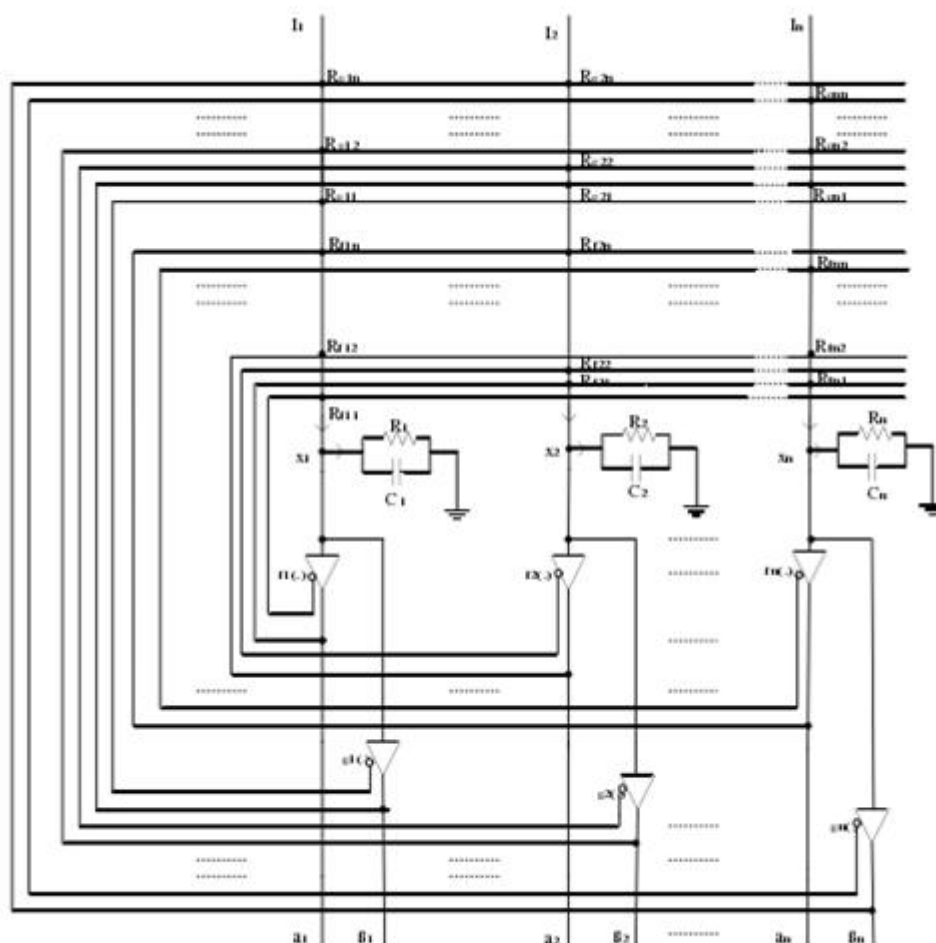


图 1-6 忆阻时滞反馈神经网络

图1-5中的神经网络结构是未定义的。图1-6是基本的时滞神经网络物理结构实现。用电容两端的电压存储神经元状态，用电流作为修改状态的刺激，用忆阻的电导实现权值，用与电压相连所有电导和作为自我抑制的权值。

$$a_{ij} = \frac{1}{R_{ij}}; b_{ij} = \frac{1}{\overline{R_{ij}}}; d_i = \frac{1}{R_i} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_{ij}} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\overline{R_{ij}}} \quad \text{式 (2-7)}$$

非学习的计算可以用小电压或者(正+负)做状态动力学的计算；如果要更新权值则通过另外的刺激源来实现忆阻阻值的更新。一个非实时学习的神经网络就可以通过事先刺激形成权值后形成对应的神经网络。

我们把上述实现突触替换这里简单的忆阻，即为电阻实现电压选择的供能，就可以实现时滞神经网络的可学习模式。选择的电压包括正向电压、反向电压、学习电压；时序控制信号预先编程设计。

## 第三章 神经网络动力学

### 3.1 神经网络状态动力学与联想记忆模式

第一章已经介绍了神经网络动力学与联想记忆的关系。状态动力子系统对应推理、想象、思考等联想记忆的运行，权值与状态模式的映射说明了权值如何表达出知识以及知识的关联，权值动力子系统以及对应的整体状态动力学的修正对应着学习过程以及伴随着的知识结构的变化。

本章我们主要讨论神经网络的状态动力子系统与对应的模式。

模式在神经网络中被实现为状态动力学子系统的轨迹。在前馈神经网络中，知识就是由任意时刻神经元的状态表示的，复合的知识是由大量相互关联的状态共同描述的。在带时滞的前馈神经网络中，模式还表示为时序上与结构上的序列，比如  $X=X_1$  状态引起了  $Y=Y_2$  状态，然后  $Y=Y_2$  态引起了  $Z=Z_3$  状态，然后  $Z=Z_3$  状态受外部刺激变成了  $Z=Z_4$  状态。必须强调的是，如果有一共有这些系统  $S_1, S_2 \cdots S_M$ ，总的系统是由  $(S_1=?, S_2=? \cdots S_M=?)$  共同表述的，表述的值为空即代表没有激发；每个子系统内部同样蕴含了类似的描述。复合的轨迹是基于这个复合的系统分布表达的。

反馈的动机是自然的，因为知识之间存在相互而不是单向的联系。在时滞连续反馈神经网络动力学中，模式包括稳定点、极限环、混沌、单峰模式、时序模式。

前馈网路是无环网络，稳定与更新都是自然的、任意的。但是在反馈神经网络中，并不能任意地处于稳定点。这个特性能说明在相互联系的反馈背景下，模式是蕴含联系并且更大约束的，这种约束正是知识规则的体现。比如说在较大时间尺度上看，稳定输入下，感知受认识影响产生的知觉就是在反馈背景下形成的稳态；持续的心理状态也与反馈的稳态有关；反馈网络的稳态可能是人脑中基本的模式，即反馈不仅存在于高级认知中，还在许多更小的尺度上作为知识的基本储存结构以及控制结构。

极限环代表着振荡状态。神经科学发现了许多振荡的模式。

混沌是一种有序产生无序，无序中包含有序的现象。神经网络尤其是反馈的非线性神经网络肯定能自然地产生混沌模式。然而关于混沌模式究竟起到了什么作用，或者说哪些作用，研究给出了不同的结论。Babloyantz 等人分析了人在不同精神状态下脑电波的低维混沌，认为混沌可以提高脑的共振容量而对外界刺激产生非常丰富的影响；Nicolis 考虑丘脑皮层的相互作用，认为混沌是参考逻辑发生器，这种自参考性质是通用计算的基础；Amit 认识到混沌不仅不会妨碍新模式的学习，而且若没有护盾肯呢个只加深以前学习过的模式而并不是去记忆新模式；Tauda 证明一个由地位混沌动力学组成的混沌神经网络具有很强的从外界传递有效信息的能力，特别是随时间变化的外部输入信息。近年来关于非线性神经网络的研究表明，混沌被看作是一个“我不知道”(I don't know) 状态。Parisi 提出一个思想来区分任意一个非对称神经网络是处于正确回忆状态还是处于迷惑状态，他认为不依赖于时间的状态就是可以接受的回忆状态，而依赖于时间的混沌就是迷惑状态；Yao & Freeman 考察兔子嗅觉系统，把气味编码成嗅觉势能的周期(或近周期) 活性，如果兔子闻到了一种新的气味，嗅球活性会变成低维(至少4维) 混

沌的，就好象它是一个新颖滤波器，或换句话说“ I don 'tknow” 状态, Freeman 还提出了混沌的一种重要作用，认为如果没有混沌，动物就不会记住新气味。因此，从这些研究来看，混沌对人脑是有益的，并且正常人的脑电波应该是混沌的，这样人才能适应万变的环境，才能与自然界产生共鸣，当然从另一方面而言，混沌有使轨道发散的性质，有其不利的一面，有时应该避免。

为了模拟生物神经元的混沌性质，一个混沌的神经元模型于1990年被 aihara 提出，之后许多混沌联想记忆的模型被开发出来。所以之后我也仿真实现了一个混沌联想记忆的算法。

单峰模式参见3.5的耗散设计；复合模式参见4.2,4.3,4.4中各种联想记忆模型。

我们可以通过隐含层增加系统的表达能力，也可以通过增加控制状态与控制权值来实现同样的功能。

综上所述，神经网络的动力学表征了知识模式，研究神经网络的动力学是研究联想记忆的基础。本章首先定性讨论了神经网络的动力学，然后给出神经网络全稳定与基于分段或不连续激励函数的多稳定的一个判定。然后讨论了基于输入的神经网络动力学。最后我讨论了神经网络的控制子系统，给出一些能量控制的设计。

### 3.2 神经网络动力学基本定性分析

本节给出了一些关于动力学的定性分析，以此说明神经网络动力学如何受各种因素影响。

#### 单个神经元

$$\frac{dx(t)}{dt} = -d \cdot x + a \cdot f(x(t)) + b \cdot g(x(t - \tau)) + u \quad \text{式 (3-1)}$$

可以看出该神经元受自身抑制，自身的反馈，U 等的影响。U 是系统外输入、自身阈值的总和。

如果  $b=0$ ,  $\frac{dx(t)}{dt} = -d \cdot x(t) + a \cdot f(x(t)) + u$  记

$y = L(x) = -d \cdot x + a \cdot f(x) + u = a \cdot \left( f(x) - \left( \frac{d}{a} \cdot x - \frac{u}{a} \right) \right) = 0, f(x) = \frac{d}{a} \left( x - \frac{u}{d} \right)$ 。右边是过  $x=u/d, y=0$  的一条直线， $f(x)$  是激发函数。容易根据动力学判断系统主要表现为围绕稳定点或发散点的稳定或发散情况，当  $dy/dt|_{x=x_0} = af'(x_0) - d < 0$  则发散，否则收敛。

如果  $b \neq 0$ , 那么  $x(t_0 - \tau, t_0)$  的情况会很大影响动力学的情况。如果历史表现为稳态，系统也是单向的(稳定或发散)，如果历史是周期的，系统也会是周期情况，如果历史是混沌的，系统也可能表现为混沌情况。

另外  $u(t)$  的形态也会影响  $x(t)$  的形态，当  $x$  总有往关于  $u(t)$  的稳定点收敛的趋向。可以看出  $u(t)$  的影响与神经元相互影响是一致的。

#### 神经网络系统



$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -d_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(x_j(t - \tau_{ij})) + u_i$$

这里我们假设  $B=0$ , 即不考虑时滞成分。那么

1) 系统  $X$  要受  $A, U$  的影响（自身抑制设为1）不同的  $A$  决定了系统不同的动力学。

2) 初态  $X_0$  依赖  $A, U$  决定了轨迹的演化方向, 初态作为地址模式

考虑平衡点  $(t_0, x)$  附近,

$$\frac{dy}{dt} = -d \cdot y + a \cdot (f(x(t) + y) - f(x(t))) = -d \cdot y + a \cdot (f'(x_0) \cdot y) = y(a \cdot f'(x_0) - d), y = x(t) - x(t_0)$$

3)  $U$  依赖  $A$  决定了固定的初态  $X_0=0$  的系统动力学, 输入作为地址模式

4) 同时基于输入与初态的模式分析: 1) 如果确定的  $U$  对应一个确定的吸引子与吸引域。不同的  $U$  对应不同的吸引子, 吸引域基本重叠（比如全稳定）. 那么稳态模式就是与输入唯一相关的, 形成一个函数映射模型。2) 如果确定的  $U$  对应多个吸引子, 那么依旧是  $X$  从一个吸引子跳到另一个吸引子, 后者的吸引域包含前者的稳定域, 形成一个马尔科夫模型。这个结论适用于稳定点, 极限环, 奇怪吸引子。

### 3.3 基于初态的全稳定与多稳定判定

本节首先给出了一个全稳定的判定, 然后给出了一个基于2个不同函数的多稳定的判定。<sup>[6][7]</sup>

带时滞的神经网络的微分方程如下所示。

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -d_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(x_j(t - \tau_{ij})) + u_i(t)$$

初态  $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)^T$ , 其中  $\phi_i \in C([t_0 - \tau, t_0], \mathbb{R})$ . 用  $x(t; t_0, \Phi)$  表示神经网络带有初始条件  $\Phi$  的解。

**定义1** 如果存在常数  $\alpha > 0, \beta > 0$  使得  $\forall t \geq t_0$ , 下面的式子成立

$$\|x(t; t_0, \Phi) - x^*\| \leq \beta \|\Phi - x^*\| e^{-\alpha(t-t_0)}$$

那么递归神经网络的平衡点  $x^*$  是指数稳定的, 其中所有的满足上式的  $\Phi$  的集合  $Z$  称为  $x^*$  的吸引域。尤其当  $\Phi_i$  是一个常数时, 对应的吸引域即是  $\mathbb{R}^n$  的子集。这里我们只讨论  $\Phi_i$  是常数的情况。

**定义2**  $\|x\|_p$  是指一个向量的  $p$  范数; 当  $p = \infty, \|x\|_\infty = \max_{i=1,2,\dots,n} |x_i|$ .

**前提** 激发函数  $f, g$  定义为李普希兹连续的, 即对  $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$  存在实数  $l_j$  与  $\kappa_j$  导致

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq l_j |x_1 - x_2| \quad \text{式 (3-2)}$$

$$|g(x_3) - g(x_4)| \leq \kappa_j |x_3 - x_4| \quad \text{式 (3-3)}$$

**引理** 若  $Z$  是  $\mathbb{R}^n$  中一个有界闭集,  $H$  是度量空间  $(Z, \|\cdot\|)$  上的一个映射, 其中  $\forall x, y \in Z, \|x - y\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}$  在  $D$  中是可测的。如果  $H(Z) \subset Z$  且存在一个常数  $\alpha < 1$  满足  $\forall x, y \in Z, \|H(x) - H(y)\| \leq \alpha \|x - y\|$ , 那么存在唯一一个  $x^*$  使得等式  $H(x^*) = x^*$  成立。

定义  $f, g$  是有界的。由于  $f, g$  是有界的, 容易由 Schauder 不动点定理中获得神经网络至少存在一个平衡点。将其定义为  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ , 然后定义关于平衡点的偏移  $y$  以及关于  $y$  动力学微分方程。

定义  $y = (x_1(t) - x_1^*, \dots, x_n(t) - x_n^*)$  我们得到以下微分方程

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = -d_i y_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{f}_j(y_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} \tilde{g}_j(y_j(t - \tau_{ij})) \quad \text{式 (3-4)}$$

其中  $\tilde{f}_j = f_j(y_j(t) + x_j^*) - f_j(x_j^*)$ ,  $\tilde{g}_j(y_j(t - \tau_{ij})) = g_j(y_j(t - \tau_{ij}) + x_j^*) - g_j(x_j^*)$

### 3.3.1 单稳定性分析

**引理** 如果存在  $\eta_i \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  满足

$$\begin{aligned} & -(d_i + \eta_i(t)) \exp \left\{ \int_{t_0}^t \eta_i(s) ds \right\} \\ & + \sum_{j=1}^n \mu_j a_{ij}^* \exp \left\{ \int_{t_0}^t \eta_j(s) ds \right\} \\ & + \sum_{j=1}^n w_j b_{ij}^* \exp \left\{ \int_{t_0}^{t-\tau_{ij}(t)} \eta_j(s) ds \right\} < 0 \end{aligned}$$

其中  $a_{ij}^* = \max_{1 \leq j \leq n} a_{ij}$ ,  $b_{ij}^* = \max_{1 \leq j \leq n} b_{ij}$ , 那么

$$v_i(t) \leq \bar{v}(t_0) \exp \left\{ \int_{t_0}^t \eta_i(s) ds \right\}$$

其中  $\bar{v}(t_0) = \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{t_0 - \tau \leq s \leq t_0} v_i(s)$ . 当  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t \eta_i(s) ds = -\infty$  那么 (3.8) 的平衡点是全局渐进稳定的。如果存在常数  $\delta > 0, \zeta > 0$  使得  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \exp \left\{ \int_{t_0}^t \eta_j(s) ds \right\} \leq \delta \exp \{-\zeta(t - t_0)\}$  那么 (1) 的平衡点对每一个  $d_i, a_{ij}, b_{ij}$  在限定的范围内都是全局指数稳定的。

### 定理1

如果存在正数 $\theta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 使得对于 $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$-(d_i + \theta)\alpha_i + \sum_{j=1}^n \alpha_j |a_{ij}| l_j + \sum_{j=1}^n \alpha_j |b_{ij}| k_j \exp\{\theta \tau_{ij}(t)\} \leq 0$$

那么神经网络是全局指数稳定的。

**定理2** 如果非奇异的  $M$  矩阵，那么神经网络是全局指数稳定的。

**定义**  $M$  矩阵是指一个矩阵满足：

- 1)  $a_{ii} < 0; a_{ij} > 0, i \neq j$
- 2) 所有的特征根实部为正数

### 3.3.2 多稳定分析

我们讨论如下2种激励函数的神经网络的多稳定性

$$f_1(r) = \begin{cases} 3 - 4k, r \in (-\infty, 3 - 4k] \\ 2r + 4k - 3, r \in (3 - 4k, 5 - 4k] \\ \dots, \\ 2r + 5, r \in (-5, -3] \\ -1, r \in (-3, -1] \\ r, r \in (-1, 1) \\ 1, r \in [1, 3) \\ 2r - 5, r \in [3, 5) \\ \dots, \\ 2r - (4k - 3), r \in [4k - 5, 4k - 3) \\ 4k - 3, r \in [4k - 3, +\infty) \end{cases}$$

$$f_2(r) = \begin{cases} 3 - 4k, r \in (-\infty, 3 - 4k] \\ 5 - 4k, r \in (3 - 4k, 5 - 4k] \\ \dots, \\ -3, r \in (-5, -3) \\ -1, r \in (-3, -1) \\ 0, r \in (-1, 1) \\ 1, r \in (1, 3) \\ 3, r \in (3, 5) \\ \dots, \\ 4k - 5, r \in (4k - 5, 4k - 3) \\ 4k - 3, r \in (4k - 3, +\infty) \end{cases}$$

分段函数把状态空间分为如下的区间。

$$\Omega_k = \left\{ \prod_{i=1}^n \chi^i, \chi^i = (-\infty, 3 - 4k) \text{ or } (3 - 4k, 5 - 4k) \text{ or } \dots (4k - 3, +\infty) \right\}$$

$$\tilde{\Omega}_k = \left\{ \prod_{i=1}^n \chi^i, \chi^i = (-\infty, 3 - 4k) \text{ or } (5 - 4k, 7 - 4k) \text{ or } \dots (4k - 3, +\infty) \right\}$$

$|\Omega_k| = (4k-1)^n$ ,  $|\tilde{\Omega}_k| = (2k)^n$ , 于  $\Omega_k$  的间隔取。

我们给出对应的多稳态结论。

**定理** 给定指数  $k \geq 1, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 如果对每一组系数, 下面式子成立

$$a_{ii} + b_{ii} - (4k-3) \sum_{j=1, j \neq i}^n (a_{ij} + b_{ij}) - |u_i| > d_i \quad \text{式 (3-5)}$$

$$a_{ii} + b_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n (a_{ij} + b_{ij}) + \frac{|u_i|}{4k-3} < (1 + \frac{2}{4k-3})d_i \quad \text{式 (3-6)}$$

那么 f1 相应的忆阻神经网络在  $\Omega_k$  中有  $(4k-1)^n$  个平衡点, 在  $\tilde{\Omega}_k$  中有  $(2k)^n$  个指数稳定的平衡点, f2 相应的忆阻神经网络在  $\Omega_k$  中有  $(4k-1)^n$  个局部指数稳定的平衡点。

### 3.3.3 仿真

仿真1: 对全稳进行仿真

选取

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1 & 1/6 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/6 \\ 1/2 & 1 & 1/6 \\ 1/2 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 41/10 & 0 & 0 \\ 0 & 31/10 & 0 \\ 0 & 0 & 31/10 \end{bmatrix}$$

另外  $U=0$ ,  $f=g=\tanh$  那么  $\iota = \kappa = 1$

$$D - |\tilde{A}| - |\tilde{B}| = \begin{bmatrix} 6.1 & -1.5 & -0.5 \\ -1.0 & 1.1 & -0.3333 \\ -1.5 & -2.25 & 3.1 \end{bmatrix}$$

特征值是 6.5122, 0.4026, 3.3852, 可以证明这是 M 矩阵。仿真结果如图 3-1。

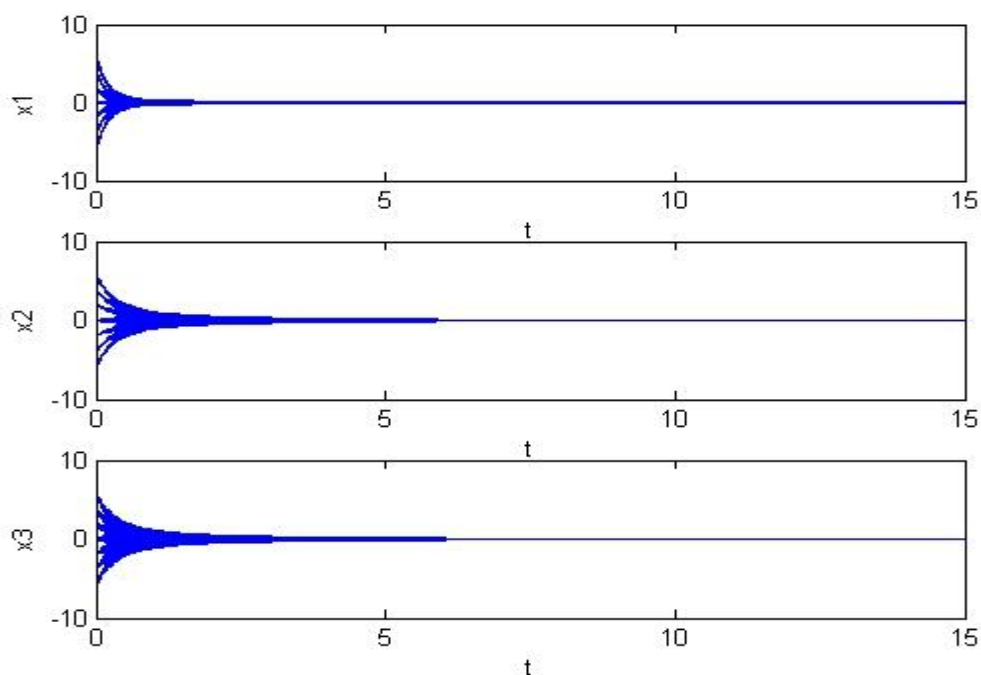


图 3-1 不同的  $x_1, x_2, x_3$  随着时间变化的图

仿真2：对多稳定进行仿真

$$A = \begin{bmatrix} 0.64 & -0.02 \\ -0.01 & 0.5 \end{bmatrix}$$

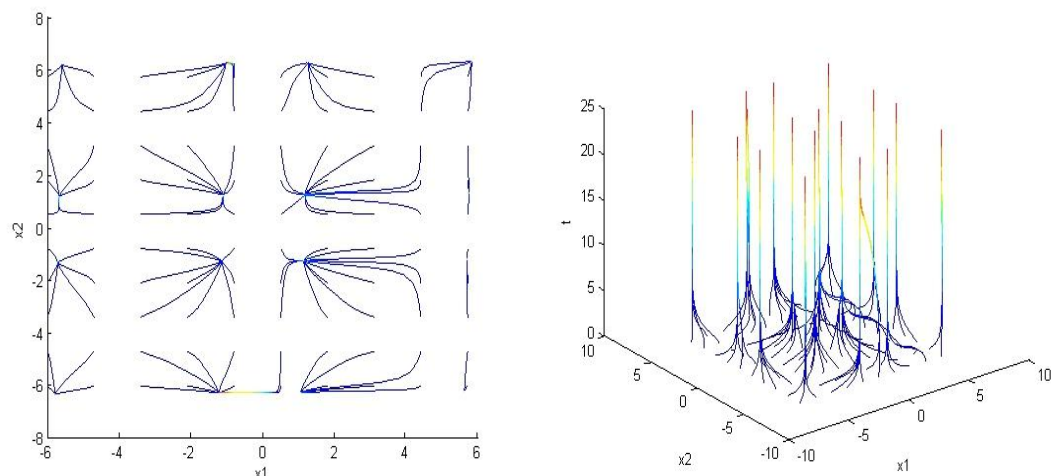
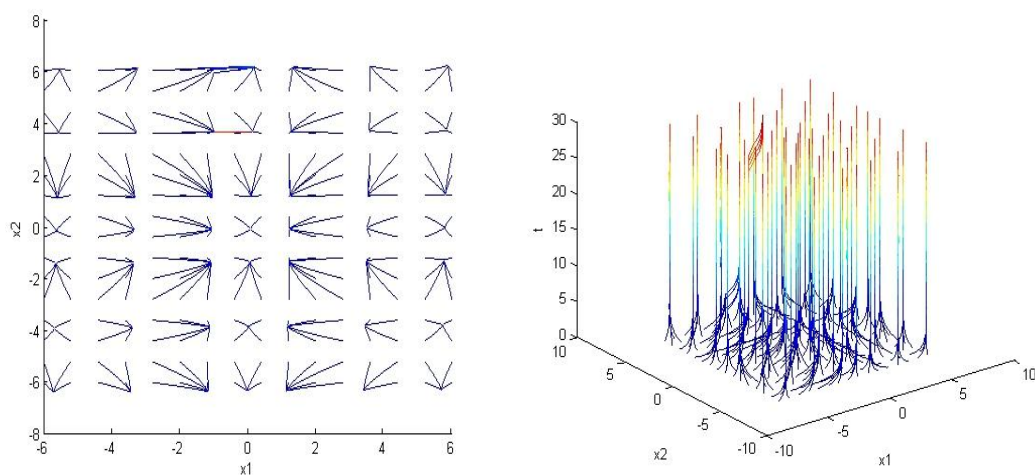
$$B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.04 \\ 0.02 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$\text{delay} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0.08 \\ -0.08 \end{bmatrix}$$

分别设置  $f=g=f_1, f=g=f_2, f=g=\tanh$  得到图 (3-2) 与图 (3-3)。

图 3-2 (a、b)  $f_1$  函数下的多稳态图3-3 (a、b)  $f_2$  函数下的多稳态

仿真3:  $U$  的形态会影响吸引子的形态。

以下仅以周期函数为例，结论适用于各种  $U$  的形态。

让  $u = u_0 \sin(10t)$ ，其他与仿真2一样，对于不同的  $u_0 = [0.8; -0.8]$ ,  $[8; -8]$  得到以下的结果。

可以看出  $u$  的变化导致稳定点的不断变化，即  $u$  的形态影响了  $x$  轨迹的形态，但又不完全是，比如下图中  $x$  的变化范围小于  $[-4, 4]$ ，是自身稳定与输入变化的总和。随着周期范围的变大，吸引子发生了融合。

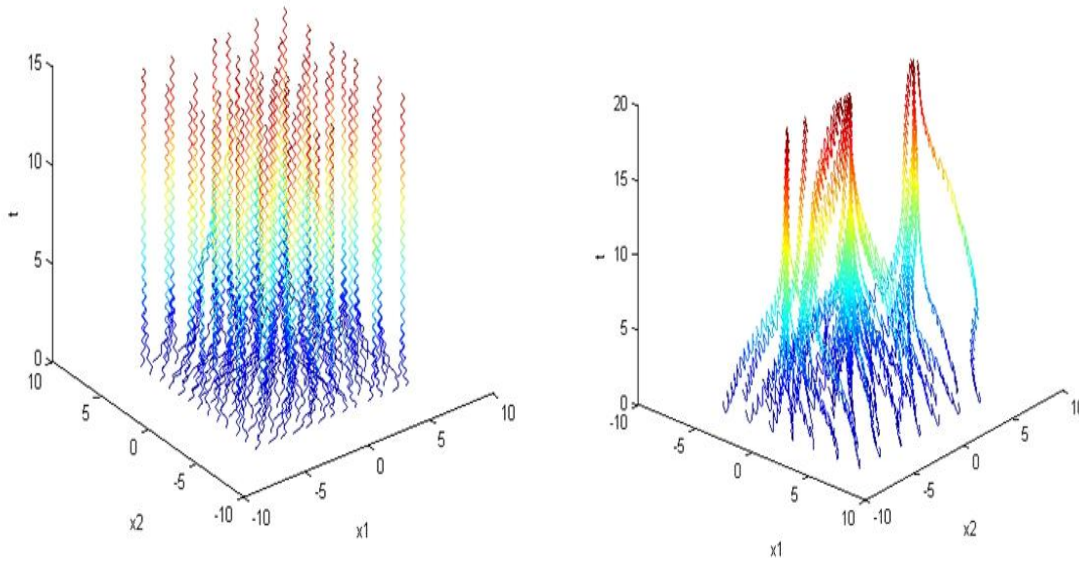


图 3-4 （a、b）不同的输入下的稳态

### 3.4 基于输入的稳定模式

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -d_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(x_j(t - \tau_{ij})) + u_i$$

考虑稳定点的模式怎么受  $u$  影响。令  $g=f$ 。

考虑稳定点的模式怎么受  $u$  影响。令  $g=f$ 。

$$0 = -DX + Af(X) + Bf(X) + U = -DX + (A + B)f(X) + u$$

我们希望获得的是稳定点  $X$  与  $U$  的关系,  $f(X)$  关于  $U$  的雅克比矩阵  $J_2 = J_1 \circ f'(X)$ , 其

中  $\circ$  运算定义为  $T = C \circ x, T_{ij} = C_{ij} * x_i$ 。

$$-D \cdot dX + (A + B) \circ f'(X) \cdot dX + dU = 0$$

记为

$$dU = Z dX$$

$$Z = D - (A + B) \circ f'(X)$$

我们可到  $Z(X)$  定义了流形的相对转化。一个孤立的输入  $U$  是均匀的, 经过 hopfield 神经网络之后, 就转化为带有  $Z(X)$  势的新的流形。许多网络连接, 势也不断相乘。当  $f$  固定, 流形转化由  $D, A, B$  定义。上式的另一个意思是如果有  $(X_0, U_0)$  我们可以得带其他任意的  $X$  对应的  $U$ 。

不同的  $U$  有不同的稳定点动力学, 包括位置与数量。暗示式 ( ) 可能解释了稳定点的合并与分离。稳定点的分离:  $cu_1 = Z(X)cx_1, cu_1 = Z(X)cx_2$ 。

### 3.5 神经网络动力学的控制理论

这里的控制是指通过修改神经网络的权值来影响动力学。比如说，我们期望存在能量竞争。一个模式可以被激发，也可以自发的消散。一个低能模式可以通过加强信号回忆起相关的细节。一个混乱的模式依赖控制寻找一个稳定的期望的模式。

能量控制的动机是自然的 1) 不同的计算有不同的价值 2) 功能存在合作与竞争 3) 生物体的能力是有限的，包括空间能量、意识关注等。

形成控制的基本模式是在原本的权值中增加一些控制状态的变量，它会随着时间变化，拥有自身的动力学，从而完成控制的目的。以下我以几个自发激活与消散的能量控制；关注的能量控制为例怎么进行神经网络控制模型的设计。由于更合理的控制需要考虑工程环境，这里只是简单的示例。

#### 1. 基于输入的自发激发与耗散

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -d_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(x_j(t - \tau_{ij})) + u_i + I_i(t) \quad \text{式 (3-7)}$$

当模式是基于输入的，很容易形成自发耗散的机制：即当存在输入的时候，模式激发；输入消散，模式自动消散。

上式中  $u_i$  是阈值， $I_i(t)$  是系统外部输入。当  $I_i(t)$  偏小的时候，未能消除阈值的影响，在一些激励函数中不能产生影响，或者产生过小的影响而稳定于靠近0的地方；当  $I_i$  达到一定限制，自然形成模式。

注意到这里耗散的结果是与  $X$  的状态相关的，即所谓耗散即当  $I_i(t)=0$ ,  $X$  从初态(非耗散的稳态)进入到新的稳态。这依赖于对应的神经网络动力学与  $X$ 。所以我们期望  $I_i(t)=0$  对应的是一个单稳定。

这一点是基于初态的模式办不到的。自发的激发与耗散是意识的一种来源（不讨论 consciousness hard problem 的背景下）。

仿真：激发函数取为  $f_1$  的右侧，即当  $x < 0$  时， $f(x)=0$ 。阈值取  $[-10; -10]$ ；初态  $[0; 0]$ 。输入如图3-8, 状态动力学如图3-9。



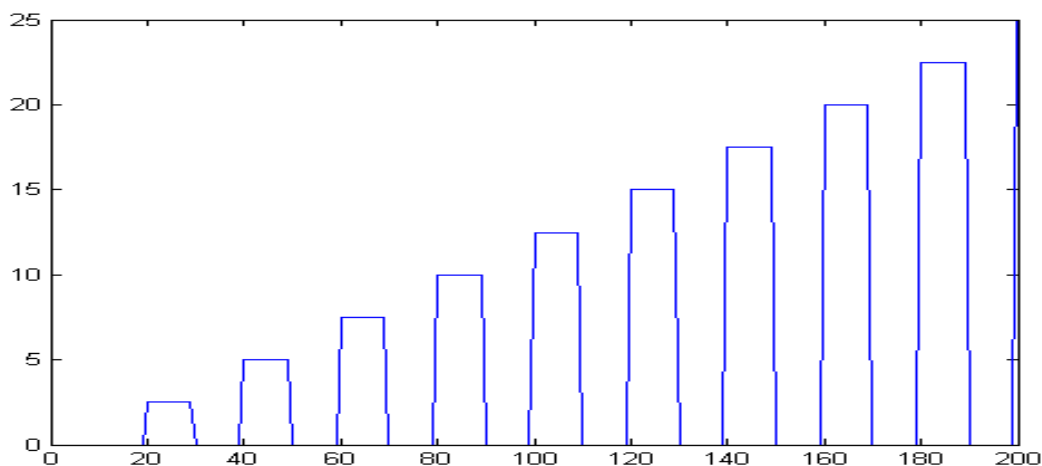


图 3-8 输入随时间变化的曲线

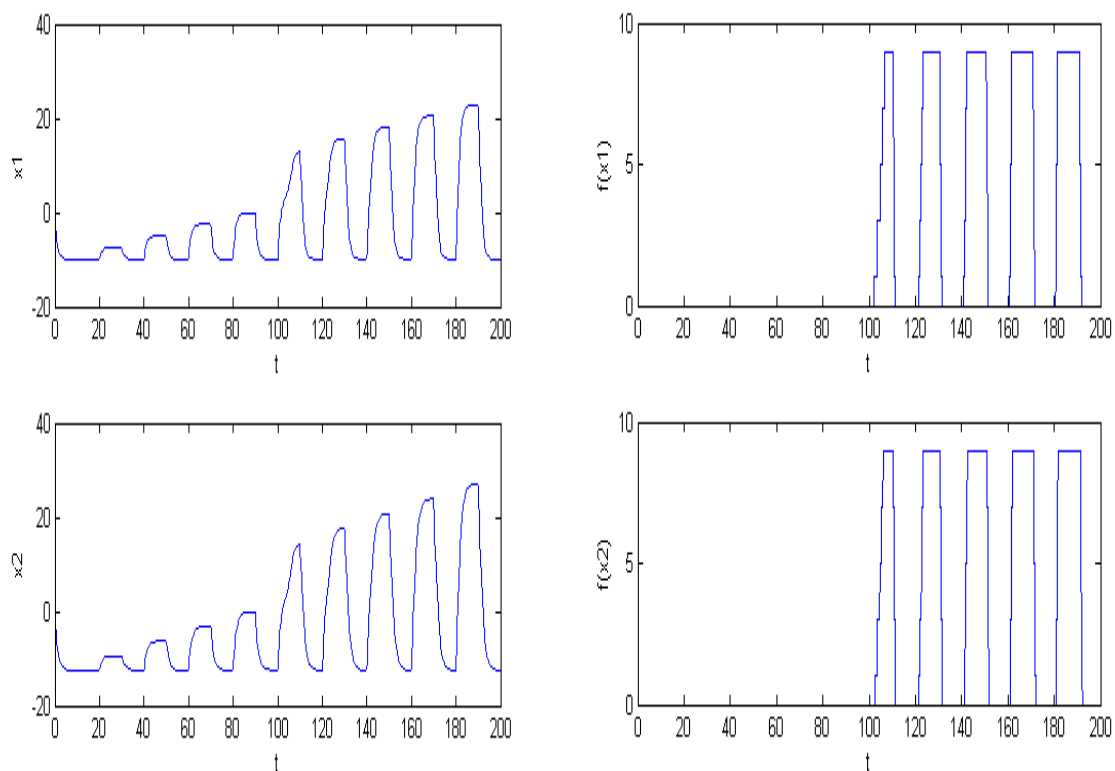


图 3-9 状态随时间变化的曲线

我们看到这里的耗散就是基于输入的动力学的一个自发结果，不同的输入对应不同的稳态，这里不同的输入甚至会导致同的动力学，当输入为0时表现一个全稳定，当输入为10时表现多稳定。具体参考上面的基于输入的动力学分析。

2. 上面展示了一种自动的基于输入的耗散机制。同时我们也看到了，这种耗散依赖于神经网络的动力学，只有当  $U$  对应的神经网络是一个以耗散状态为全局吸引子的时候才成立。这里，我们设计一种新的耗散机制，它定义了每个神经元上的懒惰性(或

者称为能量),从而完成控制的机制。它的应用包括让一个信号封闭的系统(即不存在外部神经元输入)耗散。

一种简单的实现如下所示。

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -d_i x_i(t) + \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) * h(EC_i(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(x_j(t - \tau_{ij})) h(EC_i(t - \tau_{ij})) \right] + u_i \quad \text{式 (3-8)}$$

$$dEC_i(t) = -EC_i(t) + \text{flag} * hh * \left| \frac{\frac{dx_i(t)}{dt}}{x_i(t) + 0.01} \right| \quad \text{式 (3-9)}$$

$$h(a) = \begin{cases} 1, & a > 0.5 \\ 0, & a \leq 0.5 \end{cases} \quad \text{式 (3-10)}$$

其中,  $EC_i(t)$ 即定义在神经元上的能量函数。一般的,  $EC(t)$ 反应了所有激发神经元的供能程度,能量控制总的分为3个部分:价值计算、能量计算、控制表达。价值计算(判断一个区域的价值 $\left| \frac{dx_i(t)}{dt} \right|$ )、能量计算(即价值如何完成  $EC(t)$  的流动、变化,上式中不存在竞争),控制表达(上式中就是  $h(EC)$  来实现)。Flag 是懒惰保持的突变记号,避免系统在懒惰( $EC < 0.5$ )与非懒惰( $EC > 0.5$ )不停变化

上面的能量函数  $EC(t)$  仅受自身影响,价值计算与能量计算形成一个新的能量控制神经网络。通过拓展,我们有可能定义能量函数间直接的影响,而不是基于状态的间接的相互影响。

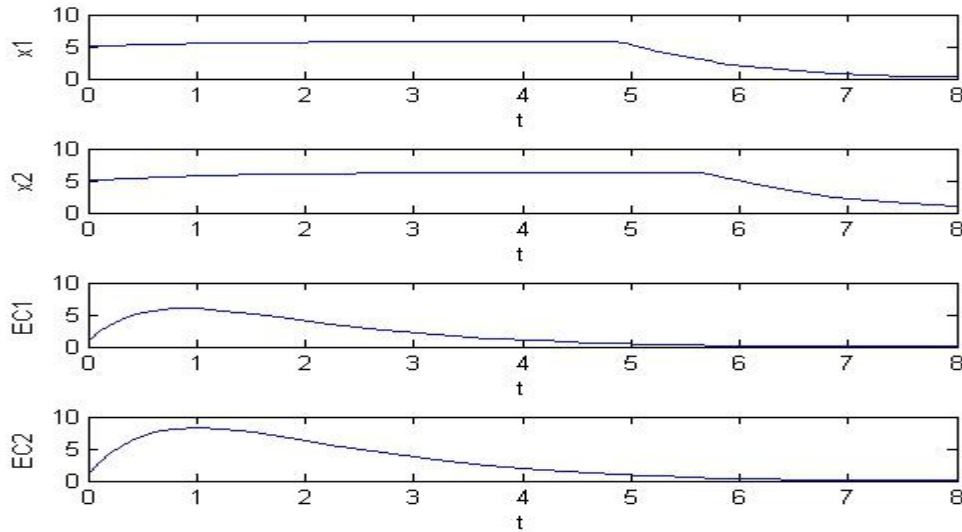


图 3-9 不同状态随时间变化的曲线

### 3. 关于能量竞争的讨论

这里我们说明能量竞争的概念。上面展示的能量是按神经元状态的价值提供能量的一个基本的控制变量。然而,有时候一个系统的稳态消散与否并不是仅仅由自身决定的。

能量竞争发挥着很大的作用。能量竞争是指能量函数 EC 怎么在系统相互合作、排斥以完成 EC 的动力学。竞争也应该是多尺度的，复杂的。

以一个简单的例子说明，这里用  $A(x_1, x_2), B(x_3, x_4)$  分别代表 2 个独立的神经群。我们在 1 的基于输入的模式的基础上设置 2 个神经群的竞争关系以影响模式的表达。

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -d_i x_i(t) + \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) * h(EC_i(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(x_j(t - \tau_{ij})) h(EC_i(t - \tau_{ij})) \right] + u_i \quad \text{式 (3-11)}$$

$$dEC_i(t) = -EC_i(t) + \text{Compete}_i(t) \quad \text{式 (3-12)}$$

$$h(a) = \tanh(a) \quad \text{式 (3-13)}$$

$$y_i(t) = f(x_i(t)) \quad \text{式 (3-14)}$$

$$d\text{Compete}_i(t) = \begin{cases} -d\text{Compete}_i(t) + \frac{y_i(t) + y_{i+1}(t)}{\sum_{i=1}^n y_i(t)}, & i \text{ 是奇数} \\ -d\text{Compete}_i(t) + \frac{y_i(t) + y_{i-1}(t)}{\sum_{i=1}^n y_i(t)}, & i \text{ 是偶数} \end{cases} \quad \text{式 (3-15)}$$

上面的能量 EC 是一种竞争的关注 Compete。可以认识到这种能量控制正是关注能选择意识反应的缘由。

#### 4. 总结

上述的权值变换是在一个常态动力学系统与抑制系统之间的切换，切换的方式是依赖一个能量函数的控制。我们不仅可以控制状态的抑制与加强，也可以考虑控制状态动力学，即控制系统描述了以 X 状态空间稳态为状态的动力学转化。这种隐含变量控制与神经网络隐含层的作用是类似的。

举例：我们平常形成一个知识，比如说关于一个对事物本质的描述，并不能立刻恢复，需要我们不断搜寻，这个搜索包括广度上拓展的搜索（联系知识即通过网络结构上反馈形成模式），深度上动力学的搜索（通过自身隐含变量的动力学搜索稳态）。在第 4 章讨论了混沌联想记忆的控制系统。

## 第四章 联想记忆及学习

本章介绍了联想记忆的模型与算法。第3章关注神经网络的动力学与基本模式，本章则讨论了联想记忆的模型与算法，包括数据结构、记忆联想过程、性能度量、学习过程等。首先通过一个简单的 willshaw 模型介绍联想记忆的相关概念，然后介绍自纠错联想，异联想，自序列联想，基于控制的混沌联想记忆。

### 4.1 联想记忆基本概念

考虑计算机科学常用的算法：查询或者搜索。与联想记忆相同的是，2者都是基于内容的搜索问题。我们把模式存储在数据结构中，通过算法去查询。查询与联想记忆的概念是一致的。只不过常用的方法中，神经网络是把模式相关信息存储在权值中，通过权值对输入映射输出模式，而一般的查询算法是把所有的模式都精确地存储下来，通过键值的比较比如 hash、索引来定位。2者有区别，但并非有一定的优劣之分，以及并非完全不可相互转化。

经典的联想记忆描述方式<sup>[8]</sup>是

$$\{(\mathbf{u}^\mu \rightarrow \mathbf{v}^\mu): \mu = 1, \dots, M\}.$$

其中  $\mathbf{u}^\mu$ 、 $\mathbf{v}^\mu$  分别称为地址模式与目标模式。给出一个可能含有噪音或者残缺的输入模式  $\tilde{\mathbf{u}}$ ，期望可以找到对应的  $\mathbf{v}^\mu$ ，使得对应的  $\mathbf{u}^\mu$  与  $\tilde{\mathbf{u}}$  比较接近。应用范围非常广，包括聚类分析，语音、图像识别，大数据信息提取。我们期望设计的模型既可以有效地存储模式对信息，依赖于新模式对合理地修正信息，也能高效正确地提取模式。由于这个描述的广泛性，不同的模式可以用不同的模型去处理。这里讨论类似人脑的联想记忆信息处理，应当包含普通表达、容错性、学习性等特征。常见的指标包括

- (1) 存储容量：指最大能够存储的信息量或者模式对数量；
- (2) 提取速率：指提取模式所需要的时间；
- (3) 容错率：指错误的容忍能力。

一般地，提取速率、容错率与存储容量负相关。在神经网络中， $\mathbf{u}^\mu$  通过一个神经元群来表达， $\mathbf{v}^\mu$  通过另一个神经元群来表达。当2个神经元群不相同，即表达是2个不同的模式空间的时候，称之为异联想(hetero-associative)。当2个神经群即是同一个神经元时，称之为自联想(auto-associative)。值得强调的是，比如语言生成中，并非是上述的自联想。上述的自联想是通过模式本身的一些残缺或者含噪音的信息收敛到完整的模式，而语言生成中需要一个环境决定词神经群的下一个模式，实际上蕴含异联想或者双向联想记忆。为了区分，分别称之为自纠错联想、自序列联想。

常用的联想记忆学习方法包括 hebb 学习、反向传播学习、微分 hebb 学习、伪逆设计方法、特征等等。我们希望学习的结果能够很好地表达数据，而没有过多的伪模式<sup>[9]</sup>。

### 4.2 自纠错联想

自纠错联想有基于初态的与基础输入的2种基本方法，即地址模式被储存在初态或者输入。储存在初态时，默认输入为0， $U_i$  为阈值。储存在输入时，默认初态为0。

可以是连续的或者离散的。自联想神经网络的基本结构如下所示。其中  $U$  代表要表达的模式群，input 代表地址模式， $S$  代表隐含层。网络动力学与式(1-1)一致， $U, S$  内部与之间没有单向的限制。可以认为是把式(1-1)中向量  $x(1:k)$  作为模式状态， $x(k+1:J)$  作为隐含层，初态为0。隐含层的形态也是无定义的，一般地我们希望  $S$  仅与  $U$  相关，如果并不是，那么  $S$  就可以作为一个分离的神经元群。

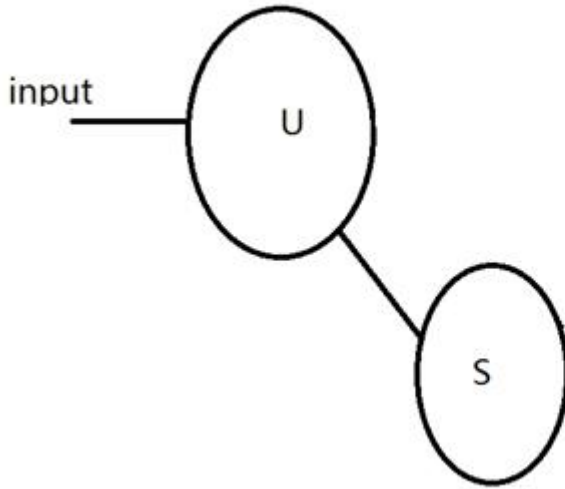


图 4-1 自联想模型

现在的问题是：给定一组模式： $(\alpha^i, i = 1, 2, \dots, m)$ ，（这里的模式指稳定点）设计、学习对应的模型与权值，使得

- 1)  $(\alpha^i, i = 1, 2, \dots, m)$  是系统  $U$  的外稳定点
- 2) 伪模式尽量少
- 3\*) 最好能增量学习

最常见的自联想记忆是基于0/1模式的联想记忆，基于高容量的联想记忆的可行性与优缺点还需要仔细分析。如第2章所示的高容量多稳定点，离散的有穷的模式，然而任意的一个高维模式可以通过低多个低维的复合而成，并且低维的对应神经网络能提供更加充分的计算可能性。高容量的编码是一个很大的问题。0/1模式的自定义的，然而高容量的模式，如果模式距离按欧几里得，那么高容量就没那么样的意义，如果这些高容量模式有对应的新的结构定义，实际上高容量并没有带来新的信息。需要继续探究。

### 基于初态的自联想

特征结构法的基本流程如下<sup>[9]</sup>

- 1) 适当地选择向量  $\beta^i, i = 1, 2, \dots, M$ ，以及一个正的对角矩阵  $A$ ，满足  $\theta^i = A\beta^i = u\alpha^i, u > 0$ 。
- 2) 计算
- 3)  $Y = [y^1, \dots, y^{m-1}] = [\alpha^1 - \alpha^m, \dots, \alpha^{m-1} - \alpha^m]$   
 $Z = [\theta^1 - \theta^m, \dots, \theta^{m-1} - \theta^m]$

4) 对  $Y$  进行奇异值分解,  $Y = [U_1 \ U_2] \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}$

其中  $D$  是对角矩阵 ( $r \times r$ ),  $r = \text{rank}(Y)$

5)  $T = ZV_1D^{-1}U_1^T + WU_2^T$ , 其中  $W$  是一个任意的矩阵

6) 选择合适的  $A, B$  满足  $A+B=T$ ,  $I=\theta^m - T\alpha^m$

备注: 在忆阻神经网络中, 我们可以通过脉冲电流实现对应的权值的嵌入, 这也就意味着一个忆阻神经网络可以通过脉冲的修正电流完成多个联想记忆网络。

$$\text{Patterns} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{得到 } A = B = \begin{bmatrix} 0.55 & 0 & 0 \\ 0 & 0.55 & 0 \\ 0 & 0 & 0.55 \end{bmatrix}$$

可以通过仿真发现结果所有的尽可能多的模式都被表示了。即他没有剔除伪模式。剔除伪模式的综述参见<sup>[10]</sup>

### 基于输入的自联想

基于输入的自联想就是根据  $U$  得到自联想网络。对应的输出流形定义为以  $U$  为核心的一些多峰的分布。

## 4.3 异联想

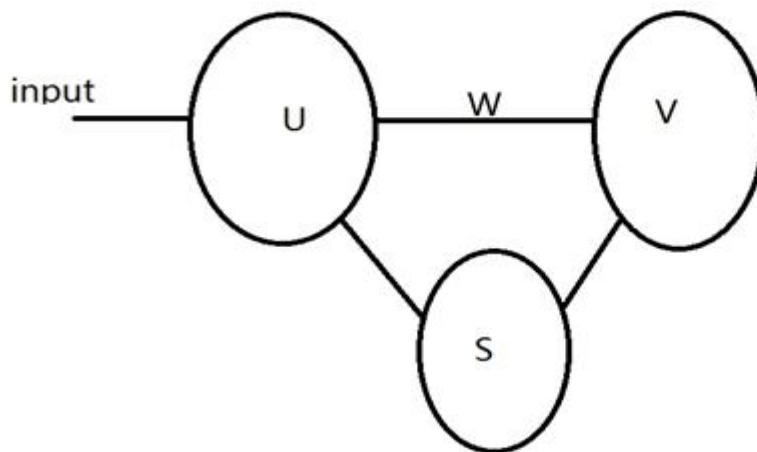


图 4-2 异联想模型

与自联想类似, 基于 hopfield 神经网络的异联想保持 hopfield 网络的一致性。同样有离散与连续的形式; 有基于输入的与基于初态的形式。一共抽象为3个神经元群, 输入神经元群  $U$ , 输出神经元群  $V$ , 中间神经元群  $S$ 。

基于初态与基于输入的异联想, 介绍如下。

- 1) 如果是完全基于初态的模式储存方式,那么从  $U$  的模式往  $V$  的模式进行迁移的时候,必须使用离散的方式。即首先  $U$  通过连续的  $\text{hopfield}$  进入自身的稳态,然后  $V_{\text{start}}=f(U*W)$  作为  $V$  的初态,然后由  $V$  进入自身的稳态。破坏了连续神经网络的一致性。我们可以把整个系统全都修改为离散的神经网络来保持一致性。
- 2) 如果是基于输入的模式储存方式,由  $\text{input}$  激发,然后系统自动按照神经网络动力学发展,最后得到  $V$  的稳态。一旦  $\text{input}$  取消,  $U, V$  进入一个无激发的模式,有可能就是 0 状态。如果并不能进入 0 状态,如果有需求,可以通过耗散使状态归 0。

第 1 种方式下的双向就是  $\text{BAM}$  的变型。我们主要考虑第 2 种,第 2 种情况更具有神经网络的普遍性。系统依旧可能产生各种的动力学模式。最简单的是形成一个连接反馈的稳态。复杂的情况包括混沌,这里的混沌可以作为自序列联想的一种实现。我们把  $U(t)-V-U(t+r)$  作为关注的模式转化。

$$\{(u^\mu \rightarrow v^\mu): \mu = 1, \dots, M\}..$$

一种简单在已知模型中学习异联想的基本算法是:

1. 将  $U$  与  $V$  通过基于输入的自联想实现在对应的神经群上。无监督学习要体现频度与吸引域大小的关系。关于自联想的设计方法已经在上面讨论过了。
2. 然后将  $V$  转化为对应的吸引域序列  $G$ 。现在就是要学习  $W$ , 满足  $V' = W*U$ , 其中  $V'$  在  $G$  内部, 对于任意的  $i$  可以通过  $\text{hebb}$  学习或者反向传播实现。
3. 当不能直接通过  $W$  实现映射时,即需要关于联系的隐含层(这个隐含层与上面的自联想隐含层并不是同一个神经群)。怎么自适应的修改(增加、减少)隐含层神经网络的结构以提高表示的能力,是需要进一步学习的。
4. 增量学习的方法需要每次运行都同时修改自联想记忆网络( $U, V$  内部)与异联想记忆网络( $W, S$ ),
5. 应当强调的是,这里考虑的是基本的稳态模式。如果模式是蕴含时间的模式序列,那么训练就要做修改,比如说基于时间的反向传播等。需要更深入的研究。

#### 4.4 混沌控制联想记忆

联想记忆与混沌有什么关系呢?混沌可以作为基础的模式,在高层上的混沌可以作为搜索的手段。

我们应当认识到,一个混沌经过反馈或者控制后,能收敛到稳态。这就是某种基于混沌的搜索手段,甚至它的表征动力学并不是混沌了。但是它有混沌的潜质,在非反馈与非控制状态下是遍历的混沌,在反馈与控制状态下能够完成期望的定位。

混沌神经网络是基于混沌神经元的神经网络,即单个神经元也能表现混沌的动力学。

$$y(t+1) = ky(t) - \alpha f(y(t)) + a \quad \text{式 (4-1)}$$

$$x(t+1) = f(y(t+1)) \quad \text{式 (4-2)}$$

$$f(x) = 1/(1 + \exp(-\frac{x}{\epsilon})) \quad \text{式 (4-3)}$$

其中,  $y(t)$  是神经元的内部状态,  $x(t)$  是外部输出,  $k$  表示消散继承的比例,  $\alpha$  表示自我影响的权值,  $a$  表示外部影响与阈值的总和。

可以发现某些时候  $y(t)$  与  $x(t)$  表现出混沌的特性。

混沌神经网络如下所示

$$x_i(t+1) = f(p_i(t+1) + q_i(t+1)) \quad \text{式 (4-4)}$$

$$p_i(t+1) = k_f * p_i(t) + \sum_j^N w_{ij} * x_j(t) \quad \text{式 (4-5)}$$

$$q_i(t+1) = k_r * q_i(t) - \alpha x_i(t) + a_i \quad \text{式 (4-6)}$$

混沌控制的方式如下所示

$$q(t+1) = k_r * q_i(t) - \alpha \gamma^{k_n u_n(t)} x_i(t) + a_i \quad \text{式 (4-7)}$$

$$u_n(x) = \sum_i^N |x_i(t) - x_i(t-\tau)| \quad \text{式 (4-8)}$$

通过这样的控制, 当  $x$  趋向稳定,  $u$  趋向 0, 即方程趋向原本的混沌神经网络; 当系统处于混沌,  $u$  的值使得复合的变小, 有可能使得神经网络进入稳态。所以带控制的神经网络会进入一些极限环、周期中, 在稳态与混沌间不断转化。由于混沌的敏感性, 微弱的噪音可能带来周期的不同。图4-3 图4-4展示了部分的结论。

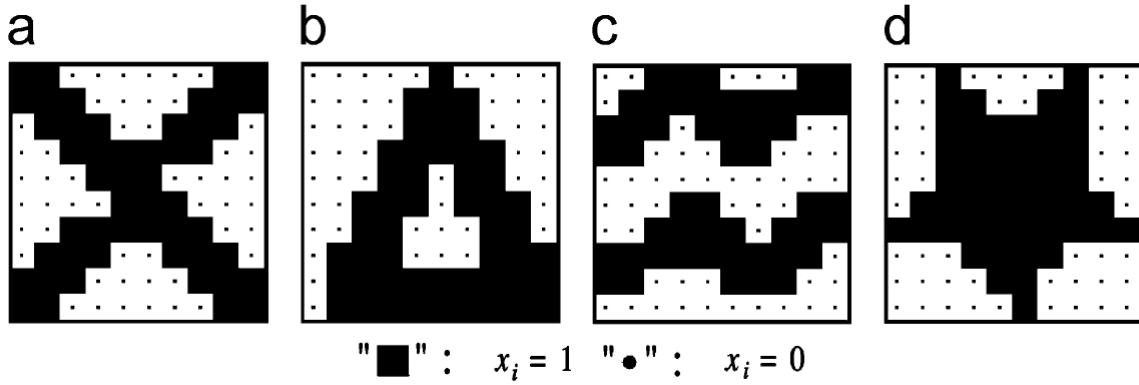
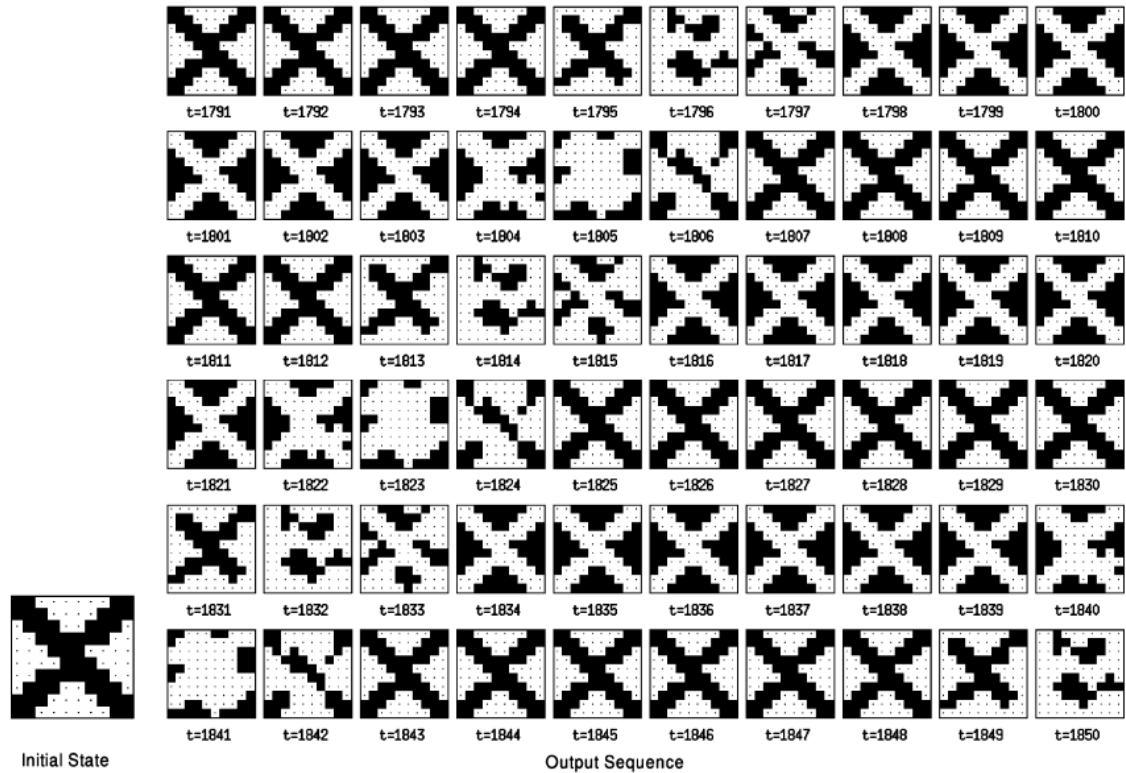


图 4-3 论文<sup>[11]</sup>中输入模式图



图 4-4 论文<sup>[11]</sup>中结果图

## 4.5 其他

### 复杂联想记忆神经网络

复杂网络的联想记忆，一方面多个任务同时运行的，另外一方面一个复杂模式是许多个神经元群分布表达的，联想记忆既表现为分布进行以及相互影响(空间)，也需要时序上的考虑(时间)。

#### 工作/短期记忆、长期记忆、短期记忆与长期记忆的转化：

工作记忆保留在未耗散的状态模式中，长期记忆则储存在权值对应的状态模式中。一个工作记忆能演变为长期记忆需要持续的学习以加强该模式的吸引域、提取效率。不学习的模式，生物环境中会自发遗忘，工程环境以及生物环境中会被其他学习模式抢占。

如果我们能实现忆阻的自发耗散的设计，依据耗散速度的不同，就能实现一个类似人的记忆系：能够遗忘与学习。长期记忆耗散的慢，不易被抢占，中期记忆耗散的快，即耗散的速率受存储数据影响<sup>[12]</sup>。

#### 时序：

上面没有讨论时序。这里关注蕴含时序的模式。最简单的时序模式就是序列模式，所有的时序被简化为时间的先后。复杂的时序要考虑时间的尺度。问题是时序怎么被编码？我们知道时滞神经网络中本身蕴含着时序。可是如果我们期望能对时间进行学习呢，我们提供的异联想模式中还包含了时间的信息，

## 第五章 总结

以上依次对忆阻神经网络、神经网络动力学、联想记忆模型与理论进行了研究。研究的成果主要是理解了忆阻神经网络的构造方法，理解了基本的神经网络动力学，建立了连续神经网络联想记忆的体系结构。关于在忆阻上建立联想记忆算法的问题，由于忆阻神经网络的普适性，主要还是归结于忆阻神经网络的工程与神经网络联想记忆理论的深入研究。

建立普适的忆阻神经网络的动机在于，忆阻的表达能力与生物的复杂模型是不同的，前者更为单一，后者更为复杂。我们可以尝试增加忆阻的表达能力，但是在构造计算机上，就可编程性而言，首先考虑的是普适的机器而不是特殊架构的机器，就像一般计算机与专用型单片机的区别，只不过这里都是可学习的机器。

神经网络的动力学是神经网络理论与相关应用的核心。神经网络的动力学主要包括状态系统动力学、权值系统动力学、控制系统动力学。神经网络动力学理论的分析对象主要分为基于初态的模式，基于输入的模式，以及模式主要包括全稳定，多稳定，极限环，混沌，时序模式。控制系统动力学为神经网络带来新的表达能力，它为神经网络应用的相关应用提供了理论基础。

联想记忆概念上类似于查询、搜索。我们建立了连续反馈神经网络的联想记忆模型，讨论了学习的算法。同时我们讨论了基于控制的联想记忆的方法，怎么通过控制将混沌收敛到期望的模式。

由于精力与能力问题，许多问题并没有解决，算法还需要深入考虑，比如说怎么学习消除伪模式，怎么建立可应用的联想记忆系统，时序模式的研究，复杂的结构自适应网络的学习等等。

## 参考文献

- [1] 徐健学, 蒋耀林. 人工神经网络非线性动力学及应用[J]. 力学进展, 1998, (2):145-162.
- [2] Zhang H, Wang Z, Liu D. A Comprehensive Review of Stability Analysis of Continuous-Time Recurrent Neural Networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks & Learning Systems, 2014, 25(7):1229 - 1262.
- [3] Chua L. Memristor-the missing circuit element, " Circuit Theory[J]. IEEE Transactions on, 1971, 18(5):507 - 519.
- [4] Strukov D B, Snider G S, Stewart D R, et al. The missing memristor found.[J]. Nature, 2008, 453(7191):80-83 (1 May 2008) | doi :10.1038/nature06932.
- [5] D Soudry, DD Castro, A Gal Hebbian Learning Rules with Memristors, Citeseer 2013 September Report
- [6] 鲍刚. 基于忆阻递归神经网络的联想记忆分析与设计[D]. 华中科技大学, 2012.
- [7] Zeng Z, Wang J, Liao X. Global exponential stability of a general class of recurrent neural networks with time-varying delays[J]. IEEE Trans.circuits Syst.i Fundam.theory Appl, 2003, 50(10):1353 - 1358.
- [8] Knoblauch A. Neural associative memory for brain modeling and information retrieval[J]. Information Processing Letters, 2005, 95(6):537 - 544.
- [9] Liu D, Michel A N. Sparsely interconnected neural networks for associative memories with applications to cellular neural networks[J]. Circuits & Systems II Analog & Digital Signal Processing IEEE Transactions on, 1994, 41(4):295 - 307.
- [10] Athithan G, Dasgupta C. On the problem of spurious patterns in neural associative memory models[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1997, 8(6):1483 - 1491.
- [11] He G, Chen L, Aihara K. Associative memory with a controlled chaotic neural network[J]. Neurocomputing, 2008, 71(13-15):2794-2805.
- [12] Chang T, Jo S H, Wei L. Short-term memory to long-term memory transition in a nanoscale memristor.[J]. Acs Nano, 2011, 5(9):7669-7676.

## 致 谢

我用近三个月时间完成了本科毕业设计以及论文的书写。研究过程中，遇到的一些困难以及犯的错误，要感谢李丽香老师的帮助，感谢老师的耐心指导。同时我也感谢我的父母与家人一直给我的支持与鼓励。还要感谢这些已有的成果与工作，没有前辈的严谨的工作成果，就不会有我的研究与进步；感谢开放的学术分享环境与现代作业系统，可以更好地进行科研。同时也感谢自己的辛勤努力。再次感谢老师、家人与社会！

由于我们的水平有限，所写论文是初步的研究，其中难免有错误或者值得讨论的地方，恳请大家不吝指正！