1 Szenario

Gegeben sind 2 Koordinatensysteme V $(\vec{v^1}, \vec{v^2}, \vec{v^3})$und W$(\vec{w^1}, \vec{w^2}, \vec{w^3})$. Ihre Ursprünge O_V und O_W sind voneinander verschieden. Wie bestimmt man die Rotationsmatrix R und die Translation p von Koordinatensystem V nach W?

2 Idee

Ein Richtungscosinus zwischen 2 Winkeln ist definiert als der Winkel der zwischen den beiden Vektoren liegt. Als kurzes Beispiel sei α der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$, dann lässt sich α wie folgt errechnen:

$$cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Man kann sich nun vorstellen, einen Vektor $\vec{v}$ aus dem Koordinatensystem V in einen anderen Vektor $\vec{w}$ aus W zu übertragen. Dabei muss der Vektor $\vec{v}$ einen gewissen Anteil um jede der Achsen gedreht werden.Dieser Anteil wird genau durch den Richtungscosinus dargestellt, es ergibt sich also folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} w_x &= a_{11} \cdot v_x + a_{12} \cdot v_y + a_{13} \cdot v_z \\ w_y &= a_{21} \cdot v_x + a_{22} \cdot v_y + a_{23} \cdot v_z \\ w_z &= a_{31} \cdot v_x + a_{32} \cdot v_y + a_{33} \cdot v_z \end{aligned}$$

Anzumerken ist auch hier, dass die Indizes keineswegs zufällig gewählt wurden,sondern es fällt auf, dass obiges Gleichungssystem auch als Matrix-gleichung geschrieben werden kann.

$$\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Die einzelnen Einträge der Matrix R lassen sich wie folgt bestimmen:

$$R = \begin{pmatrix} \vec{w^1}\vec{v^1} & \vec{w^2}\vec{v^1} & \vec{w^3}\vec{v^1} \\ \vec{w^1}\vec{v^2} & \vec{w^2}\vec{v^2} & \vec{w^3}\vec{v^2} \\ \vec{w^1}\vec{v^3} & \vec{w^2}\vec{v^3} & \vec{w^3}\vec{v^3} \end{pmatrix}$$

Nachdem nun die Rotationsmatrix zwischen beiden Koordinatensystemen gefunden wurde,bestimmt man nun noch die Translation $\vec{p}$. Aus 2 gegebenen Punkten O_V und O_W kann man sofort den Verschiebungsvektor $\vec{p}$ wie folgt bestimmen :

$$\vec{p} = O_W - O_v$$

Die oben bestimmte Prozedur kann wie folgt mit Hilfe der Bibliothek gelöst werden:

```
Vector3D v1(1,0,0);
Vector3D v2(0,1,0);
Vector3D v3(0,0,1);
Vector3D w1(1,2,3);
Vector3D w2(0,0,4);
Vector3D Ov (0,0,0);
Vector3D Ow(1,1,1);

CoordinateFrame3D V(v1,v2,v3,Ov); //Erstelle V
CoordinateFrame3D W(w1,w2,Ow);  //Erstelle W
Matrix4D M = V.mapTo(W);   //M enthält p und R
```

Interessiert jetzt die Translation $\vec{p}$ und die Rotation R, so kann diese wie folgt extrahiert werden:

```
Matrix3D R = M.getRotation();
Vector3D p = M.getTranslation();
```

Aus dieser Rotationsmatrix kann auch sehr leicht das dazugehörige Quaternion oder die entsprechenden Yaw, Pitch und Roll Winkel gewonnen werden

```
YPR Y(R);
Quaternion q=R.toQuaternion();
```