

## 1 Уравнение Кортевега - де Вриза.

Уравнение Кортевега - де Вриза (КдВ) - это одно из многих нелинейных уравнений в частных производных (НУЧП). Оно является уравнением третьего порядка и имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

Где:

$u = u(x, t)$  - некоторая функция двух переменных (координата  $x$  и время  $t$ ).

Подробным образом это нелинейное уравнение в частных производных анализировалось в работе Дидерика Кортевега и Густава де Вриза в 1895 году. Данное уравнение может быть использовано для описания реальных физических процессов. Так, например, уравнение Кортевега - де Вриза описывает физический процесс распространения уединенных волн на воде, без учета явления диссипации энергии.

Для уравнения  $\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$  получено большое количество точных решений, не смотря на то, что нелинейность уравнения Кортевега - де Вриза приводит к существенному усложнению поиска решений аналитическими методами.

Среди решений данного уравнения имеются решения солитонного типа, то есть решения в виде уединенных устойчивых волн, которые не разрушаются при взаимодействии с другими волнами или с некоторыми другими возмущениями. Таким решением является, например, решение уравнения Кортевега - де Вриза следующего вида:

$$u = u(x, t) = \frac{2k^2}{\cosh^2(k(x - 4k^2t - x_0))}$$

Где:

$k$  - свободный параметр,

$x_0$  - произвольная константа.

Параметр  $k$  - определяет высоту и ширину солитона. Кроме того, этот параметр задает скорость уединенной волны.

Произвольная константа  $x_0$  зависит от выбора точки начала отсчёта пространственной координаты на оси  $x$ .

## 2 Иерархия Кортевега - де Вриза.

Приведенное уравнение Кортевега - де Вриза вида  $\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$  является первым представителем так называемой иерархии уравнений Кортевега - де Вриза.

Эта иерархия задается следующим соотношением:

$$u_t + \frac{\partial}{\partial x} L_{n+1}[u] = 0$$

Где:

$L_n[u]$  - оператора Ленарда.

Оператор Ленарда определяется следующим рекуррентным соотношением:

$$\frac{\partial}{\partial x} L_{n+1}[u] = (\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 4u \frac{\partial}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial x}) L_n[u]$$

Начальное условие для этого рекуррентного соотношения имеет вид:

$$L_0[u] = \frac{1}{2}$$

При подстановке различных  $n = 1, 2, 3, \dots$  будут получены различные уравнения из иерархии Кортевега - де Вриза.

Порядки, получаемых нелинейных уравнений в частных производных согласно выражению  $u_t + \frac{\partial}{\partial x} L_{n+1}[u] = 0$  будут нечетными.

Найдем операторы Ленарда для  $n = 0 \dots 7$ .

Тогда получим:

$$L_0[u] = \frac{1}{2}$$

$$L_1[u] = u$$

$$L_2[u] = u_{xx} + 3u^2$$

$$L_3[u] = u_{xxxx} + 10uu_{xx} + 5u_x^2 + 10u^3$$

$$L_4[u] = u_{xxxxx} + 14uu_{xxx} + 28u_x u_{xxx} + 21u_{xx}^2 + 70u^2 u_{xx} + 70uu_x^2 + 35u^4$$

$$L_5[u] = u^{(8)}(x) + 18u^{(6)}(x)u(x) + 69u^{(3)}(x)^2 + 378u(x)u''(x)^2 + 630u(x)^2u'(x)^2 + 54u^{(5)}(x)u'(x) + 6u^{(4)}(x)(19u''(x) + 21u(x)^2) + 504u^{(3)}(x)u(x)u'(x) + 42(11u'(x)^2 + 10u(x)^3)u''(x) + 126u(x)^5$$

$$L_6[u] = u^{(10)}(x) + 22u^{(8)}(x)u(x) + 253u^{(4)}(x)^2 + 1518u^{(3)}(x)^2u(x) + 4158u(x)^2u''(x)^2 + 1342u''(x)^3 + 4620u(x)^3u'(x)^2 + 1155u'(x)^4 + 88u^{(7)}(x)u'(x) + 22u^{(6)}(x)(11u''(x) + 9u(x)^2) + 462u(x)(22u'(x)^2 + 5u(x)^3)u''(x) + 22u^{(5)}(x)(19u^{(3)}(x) + 54u(x)u'(x)) + 66u^{(4)}(x)(38u(x)u''(x) + 25u'(x)^2 + 14u(x)^3) + 132u^{(3)}(x)u'(x)(43u''(x) + 42u(x)^2) + 462u(x)^6$$

$$L_7[u] = u^{(12)}(x) + 26u^{(10)}(x)u(x) + 923u^{(5)}(x)^2 + 6578u^{(4)}(x)^2u(x) + 34892u(x)u''(x)^3 + 30030u(x)^4u'(x)^2 + 30030u(x)u'(x)^4 + 130u^{(9)}(x)u'(x) + 26u^{(8)}(x)(17u''(x) + 11u(x)^2) + 858u^{(3)}(x)^2(31u''(x) + 23u(x)^2) + 12012u(x)^2(11u'(x)^2 + u(x)^3)u''(x) + 858(83u'(x)^2 + 42u(x)^3)u''(x)^2 + 52u^{(7)}(x)(19u^{(3)}(x) + 44u(x)u'(x)) + 3432u^{(3)}(x)u'(x)(43u(x)u''(x) + 10u'(x)^2 + 14u(x)^3) + 26u^{(6)}(x)(61u^{(4)}(x) + 242u(x)u''(x) + 165u'(x)^2 + 66u(x)^3) + 572u^{(5)}(x)(19u^{(3)}(x)u(x) + 27u(x)^2u'(x) + 36u'(x)u''(x)) + 858u^{(4)}(x)(38u(x)^2u''(x) + 25u''(x)^2 + 50u(x)u'(x)^2 + 36u^{(3)}(x)u'(x) + 7u(x)^4) + 1716u(x)^7$$

### 3 Уравнения из иерархии Кортевега - де Вриза в переменных бегущей волны.

Пусть решения уравнений из иерархии Кортевега - де Вриза будут иметь следующий вид:  $u = u(x) = u(x - Ct)$

Где:

$C$  - некоторая константа.

Тогда подстановка переменных бегущей волны в уравнения с последующим домножением их на  $u_x$  и интегрированием приводит к уравнениям из иерархии Кортевега - де Вриза следующего вида:

$$L_n[u] - C_n^{(0)}u + C_n^{(1)} = 0$$

Где:  $C_n^{(0)}$  и  $C_n^{(1)}$  - некоторые константы.

Переобозначим константы  $C_n^{(0)}$  и  $C_n^{(1)}$ , как  $A_n$  и  $B_n$  и получим уравнения следующего вида:

$$L_n[u] - A_n u + B_n = 0$$

$$E_n[u] = L_n[u] - A_n u + B_n = 0$$

Для  $n = 2$  и  $n = 3$  уравнения  $E_2[u]$  и  $E_3[u]$  имеют следующий конкретный вид:

$$E_2[u] = u_{xx} + 3u^2 - A_2 u + B_2 = 0$$

$$E_3[u] = u_{xxxx} + 10uu_{xx} + 5u_x^2 + 10u^3 - A_3 u + B_3 = 0$$

### 4 Постановка задачи.

Требуется проверить существование связи в виде некоторого оператора  $\hat{A}$  между уравнениями из иерархии Кортевега - де Вриза для  $n$  и  $n + 1$ . При этом, если предполагаемый оператор существует, то значит можно определить связь между решениями уравнений из иерархии Кортевега - де Вриза, заключающуюся в том, что некоторые решения уравнений для  $n$  могут быть найдены, как решения уравнений для  $k < n$ .

### 5 Построение оператора $\hat{A}$ для уравнений $E_2[u]$ и $E_3[u]$ .

Рассмотрим сначала случай связи между уравнениями  $E_2[u]$  и  $E_3[u]$ .

Тогда:

$$E_3[u] = \hat{A}E_2[u]$$

Распишем уравнения  $E_2[u]$  и  $E_3[u]$ .

$$u_{xxxx} + 10uu_{xx} + 5u_x^2 + 10u^3 - A_3u + B_3 = \hat{A}(u_{xx} + 3u^2 - A_2u + B_2)$$

В левой части выражения максимальный порядок производной равен четырем, в правой части выражения максимальный порядок равен двум, для того чтобы исключить слагаемое вида  $u_{xxxx}$  из правой части в операторе  $\hat{A}$  необходима составляющая вида  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ . Тогда:

$$u_{xxxx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{xx} =>$$

Оператор  $\hat{A}$  без составляющей вида  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  обозначим за  $\hat{B}$ . Таким образом:

$$\hat{A} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hat{B}$$

Поддействуем оператором  $\hat{A} - \hat{B} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  на уравнение  $E_2[u]$ . Получим следующее выражение:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_2[u] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_{xx} + 3u^2 - A_2u + B_2) = u_{xxxx} + 3\frac{\partial}{\partial x}(2uu_x) - A_2u_{xx} = u_{xxxx} + 6u_x^2 + 6uu_{xx} - A_2u_{xx}$$

С помощью полученного выражения перейдем от оператора  $\hat{A}$  к оператору  $\hat{B}$ .

$$E_3[u] - \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_2[u] = \hat{B}E_2[u]$$

Выполним подстановку соответствующих уравнений.

$$u_{xxxx} + 10uu_{xx} + 5u_x^2 + 10u^3 - A_3u + B_3 - u_{xxxx} - 6u_x^2 - 6uu_{xx} + A_2u_{xx} = \hat{B}E_2[u]$$

После упрощения получим:

$$4uu_{xx} - u_x^2 + 10u^3 - A_3u + A_2u_{xx} + B_3 = \hat{B}E_2[u]$$

Анализ полученного выражения и уравнения  $E_2[u]$  показывает, что для того, чтобы исключить слагаемое вида  $4uu_{xx}$  из правой части выражения  $4uu_{xx} - u_x^2 + 10u^3 - A_3u + A_2u_{xx} + B_3 = \hat{B}E_2[u]$ , в операторе  $\hat{B}$  необходимо слагаемое вида  $4u$ .

Следовательно:

$$\hat{B} = 4u + \dots = 4u + \hat{C}$$

$$4uE_2[u] = 4uu_{xx} + 12u^3 - 4A_2u^2 + 4uB_2$$

Перейдем к введенному оператору  $\hat{C}$ .

$$\hat{B}E_2[u] - 4uE_2[u] = \hat{C}E_2[u]$$

$$\hat{C}E_2[u] = 4uu_{xx} - u_x^2 + 10u^3 - A_3u + A_2u_{xx} + B_3 - 4uu_{xx} - 12u^3 + 4A_2u^2 - 4B_2u = -u_x^2 - 2u^3 - (A_3 + 4B_2)u + 4A_2u^2 + A_2u_{xx} + B_3$$

$$A_2u_{xx} - u_x^2 - 2u^3 + 4A_2u^2 - (A_3 + 4B_2)u + B_3 = \hat{C}(u_{xx} + 3u^2 - A_2u + B_2)$$

Далее, рассуждая аналогичным образом, придем к следующему выводу:

$$\hat{C} = A_2 + \hat{D}$$

Выполним переход к оператору  $\hat{D}$ .

$$\hat{D}E_2[u] = \hat{C}E_2[u] - A_2E_2[u]$$

$$\hat{D}E_2[u] = A_2u_{xx} - A_2u_{xx} - u_x^2 + 4A_2u^2 - 3A_2u^2 - (A_3 + 4B_2)u + A_2^2u + B_3 - A_2B_2 - 2u^3$$

$$\hat{D}E_2[u] = -u_x^2 - 2u^3 + A_2u^2 + (A_2^2 - A_3 - 4B_2)u + (B_3 - A_2B_2)$$

На данном этапе, в правой части выражения  $\hat{D}E_2[u] = -u_x^2 - 2u^3 + A_2u^2 +$

$(A_2^2 - A_3 - 4B_2)u + (B_3 - A_2B_2)$  порядок производной по  $x$  меньше, чем в уравнении  $E_2[u]$ , поэтому для того, чтобы продолжить исключение кроме дифференциальных и константных сооставляющих в оператор  $\hat{A}$  требуется ввести интегральную составляющую.

Введем интегральную составляющую в оператор  $\hat{A}$  следующим образом:

$$L_2[u] = u_{xx} + 3u^2$$

$$2u_x L_2[u] dx = (2u_x u_{xx} + 6u^2 u_x) dx$$

$$2 \int u_x L_2[u] dx = u_x^2 + 2u^3 + C$$

$$\hat{D} = -2 \int u_x < . > dx + \hat{E}$$

$$(\hat{D} - \hat{E})L_2[u] = -2 \int u_x < . > dx (u_{xx} + 3u^2 - A_2 u + B_2)$$

$$-2 \int u_x < . > dx (u_{xx} + 3u^2 - A_2 u + B_2) = -2 \int [u_x u_{xx} + 3u^2 u_x - A_2 u u_x + B_2 u_x] dx = -2 \left[ \frac{u_x^2}{2} + u^3 - \frac{A_2 u^2}{2} + B_2 u \right] + C = -u_x^2 - 2u^3 + A_2 u^2 - 2B_2 u + C$$

$$\hat{E}L_2[u] = \hat{E}(u_{xx} + 3u^2 - A_2 u + B_2) = (A_2^2 - A_3 - 4B_2)u + 2B_2 u + (B_3 - A_2 B_2) - C$$

Таким образом получим окончательный вид:

$$\hat{A} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 4u + A_2 - 2 \int u_x < . > dx + \hat{E}$$

$$E_3[u] = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 4u + A_2 - 2 \int u_x < . > dx \right\} E_2[u] + (A_2^2 - A_3 - 2B_2)u + (B_3 - A_2 B_2) - C$$

$$E_3[u] = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 4u + A_2 - 2 \int u_x < . > dx \right\} E_2[u] + pu(x) + q$$

$$p = A_2^2 - A_3 - 2B_2$$

$$q = B_3 - A_2 B_2 - C$$

В полученном выражении присутствует часть, линейная относительно функции  $u = u(x)$ . Коэффициенты этой линейной части зависят от коэффициентов самих уравнений  $E_2[u]$  и  $E_3[u]$ . При правильном выборе этих коэффициентов, все решения уравнения  $E_2[u]$  будут являться решениями уравнения  $E_3[u]$ .

## 6 Построение оператора $\hat{A}$ для уравнений $E_n[u]$ , где $n = 4..7$ .

Для построения оператора  $\hat{A}$  связи между уравнениями из иерархии Кортевега - де Вриза более высоких порядок был написан скриптовый сценарий для пакета Wolfram Mathematica.

Код написанного скриптового сценария:

```
Print["eq.wl script file\n"];
```

```
L0 = 1/2;
```

```

L1 = u[x];

DL2 = D[L1, {x, 3}] + 4*u[x]*D[L1, x] + 2*D[u[x], x]*L1;
L2 = Integrate[DL2, x];
DL3 = D[L2, {x, 3}] + 4*u[x]*D[L2, x] + 2*D[u[x], x]*L2;
L3 = Integrate[DL3, x];
DL3 = D[L3, {x, 3}] + 4*u[x]*D[L3, x] + 2*D[u[x], x]*L3;
L4 = Integrate[DL3, x];
DL5 = D[L4, {x, 3}] + 4*u[x]*D[L4, x] + 2*D[u[x], x]*L4;
L5 = Integrate[DL5, x];
DL6 = D[L5, {x, 3}] + 4*u[x]*D[L5, x] + 2*D[u[x], x]*L5;
L6 = Integrate[DL6, x];
DL7 = D[L6, {x, 3}] + 4*u[x]*D[L6, x] + 2*D[u[x], x]*L6;
L7 = Integrate[DL7, x];

E2 = L2 - A2*u[x] + B2;
E3 = L3 - A3*u[x] + B3;
E4 = L4 - A4*u[x] + B4;
E5 = L5 - A5*u[x] + B5;
E6 = L6 - A6*u[x] + B6;
E7 = L7 - A7*u[x] + B7;

Print[L0];
Print[L1];
Print[L2];
Print[L3];
Print[L4];
Print[L5];

OP[L_[x]] := D[L[x], {x, 3}] + 4*u[x]*D[L[x], x] + 2*D[u[x], x]*L[x];

tmp1 = E4 - D[E3, {x, 2}];
tmp2 = tmp1 - 4*u[x]*E3;
tmp3 = tmp2 - A3*E3;
tmp33 = tmp2 + Integrate[Expand[2*u'[x]*E3], x]

tmp1 = Expand[tmp1];

```

```

tmp2 = Expand[tmp2];
tmp3 = Expand[tmp3];
tmp33 = Expand[tmp33];

a1 = E3 - D[E2, {x, 2}];
a2 = a1 - 4*u[x]*E2;
a3 = a2 + Integrate[Expand[2*u'[x]*E2], x];
a4 = a3 - A2*E2;
a3 = Simplify[Expand[a3]];
a4 = Simplify[Expand[a4]];

t1 = E5 - D[E4, {x, 2}];
t2 = t1 - 4*u[x]*E4;
t3 = t2 + Integrate[Expand[2*u'[x]*E4], x];
t3 = Expand[t3];
t4 = Simplify[Expand[t3 - A4*E2]];

b1 = E6 - D[E5, {x, 2}];
b2 = b1 - 4*u[x]*E5;
b3 = b2 + Integrate[Expand[2*u'[x]*E5], x];
b3 = Simplify[Expand[b3]];
b4 = Simplify[Expand[b3 - A5*E2]];

c1 = E7 - D[E6, {x, 2}];
c2 = c1 - 4*u[x]*E6;
c3 = c2 + Integrate[Expand[2*u'[x]*E6], x];
c3 = Simplify[Expand[c3]];
c4 = Simplify[Expand[c3 - A6*E2]];

e1 = E4 - D[E3, {x, 2}];
e2 = e1 - 4*u[x]*E3;
e3 = e2 + Integrate[Expand[2*u'[x]*E3], x];
e3 = Simplify[Expand[e3]];
e4 = Simplify[Expand[e3 - A3*E2]];

```

## 7 Построение оператора $\hat{A}$ для уравнений $E_3[u]$ и $E_4[u]$ .

Рассмотрим построение оператора  $\hat{A}$  для связи уравнений  $E_3[u]$  и  $E_4[u]$ :

$$E_3[u] = u_{xxxx} + 10uu_x + 5u_x^2 + 10u^3 - A_3u + B_3$$

$$E_4[u] = u_{xxxxx} + 14uu_{xxx} + 28u_xu_{xxx} + 21u_{xx}^2 + 70u^2u_{xx} + 70uu_x^2 + 35u^4 - A_4u + B_4$$

$$E_4[u] = \hat{A}E_3[u]$$

$$\hat{A} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 4u - 2 \int u_x < . > dx + \hat{B}$$

$$1. E_4[u] - \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_3[u] = A_3u''(x) - A_4u(x) + B_4 + 4u^{(4)}(x)u(x) + 40u(x)^2u''(x) + u''(x)^2 + 10u(x)u'(x)^2 - 2u^{(3)}(x)u'(x) + 35u(x)^4$$

$$2. E_4[u] - \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 4u \right\} E_3[u] = A_3u''(x) + 4A_3u(x)^2 - A_4u(x) - 4B_3u(x) + B_4 + u''(x)^2 - 10u(x)u'(x)^2 - 2u^{(3)}(x)u'(x) - 5u(x)^4$$

$$3. E_4[u] - \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 4u - 2 \int u_x < . > dx \right\} E_3[u] = A_3u''(x) + 3A_3u(x)^2 - A_4u(x) - 2B_3u(x) + B_4$$

$$4. E_4[u] - \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 4u - 2 \int u_x < . > dx \right\} E_3[u] - A_3E_2[u] = A_2A_3u(x) - A_3B_2 - A_4u(x) - 2B_3u(x) + B_4 = u(x)(A_2A_3 - A_4 - 2B_3) - A_3B_2 + B_4$$

$$5. \hat{B}E_3[u] = A_3u''(x) + 3A_3u(x)^2 - A_4u(x) - 2B_3u(x) + B_4$$

$$\hat{B}(u_{xxxx} + 10uu_x + 5u_x^2 + 10u^3 - A_3u + B_3) = A_3u''(x) + 3A_3u(x)^2 - A_4u(x) - 2B_3u(x) + B_4$$

## 8 Связь коэффициентов $A_n$ и $B_n$ уравнений иерархии Кортвега - де Вриза

В общем случае для уравнений  $E_n[u]$  и  $E_{n+1}[u]$  имеем:

$$E_{n+1}[u] = \hat{A}E_n[u] + A_nE_2[u] + p_n + q_nu(x)$$

$$\hat{A} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 4u - 2 \int u_x < . > dx$$

Рассмотрим  $p_n + q_nu(x)$  для  $n = 2..6$ . Тогда:

$$n = 2. u(x) (A_2^2 - A_3 - 2B_2) - A_2B_2 + B_3$$

$$n = 3. u(x)(A_2A_3 - A_4 - 2B_3) - A_3B_2 + B_4$$

$$n = 4. u(x)(A_2A_4 - A_5 - 2B_4) - A_4B_2 + B_5$$



$$n = 5. \quad u(x)(A_2A_5 - A_6 - 2B_5) - A_5B_2 + B_6$$

$$n = 6. \quad u(x)(A_2A_6 - A_7 - 2B_6) - A_6B_2 + B_7$$

Имеем два следующих уравнения:

$$\begin{cases} E_3[u] = L_3[u] - A_3u(x) + B_3 = 0, \\ E_2[u] = L_2[u] - A_2u(x) + B_2 = 0; . \end{cases}$$

Пусть  $u = u(x)$  - решение уравнения  $E_2[u] = 0$ . Следовательно.

$$E_3[u] = \widehat{A}E_2[u] + A_2E_2[u] + p_2 + q_2u(x)$$

$$E_3[u] = p_2 + q_2u(x)$$

Если:

$$\begin{cases} p_2 = 0, \\ q_2 = 0; . \end{cases}$$

Тогда  $u = u(x)$  - решение уравнения  $E_3[u] = 0$ .

Раскроем выражения  $p_2$  и  $q_2$ .

$$\begin{cases} p_2 = A_2A_2 - A_3 - 2B_2 = 0, \\ q_2 = B_3 - A_2B_2 = 0; . \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_3 = A_2A_2 - 2B_2, \\ B_3 = A_2B_2; . \end{cases}$$

Подставим значения  $A_3$  и  $B_3$  выраженные через  $A_2$  и  $B_2$  в выражение для уравнения  $E_3[u] = L_3[u] - A_3u(x) + B_3 = 0$ . Тогда:

$$E_3[u] = L_3[u] - (A_2 - 2B_2)u(x) + A_2B_2 = 0.$$

Функция  $u = u(x)$  - решение для уравнения  $E_3[u] = 0$  с такими коэффициентами.

Аналогичные действия можно проделать для уравнений  $E_n[u] = 0$ , где  $n$  больше 3.

Например, для уравнения  $E_4[u] = 0$  имеем:

$$\begin{cases} A_4 = A_2A_3 - 2B_3 = A_2(A_2^2 - 2B_2) - 2A_2B_2, \\ B_4 = A_3B_2 = (A_2^2 - 2B_2)B_2; \end{cases}$$

$$E_4[u] = L_4[u] - A_2((A_2^2 - 2B_2) - 2B_2)u(x) + (A_2^2 - 2B_2)B_2$$

## 9 Заключение

Для уравнений из иерархии Кортвега - де Вриза до  $E_7[u] = 0$ , при решении в переменных бегущей волны, найдена связь вида:

$$E_{n+1}[u] = \hat{A}E_n[u] + A_n E_2[u] + p_n + q_n u(x), \text{ где:}$$

$\hat{A}$  - интегрально-дифференциальный оператор, который может быть записан следующим образом:

$$\hat{A} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 4u - 2 \int u_x < . > dx$$