1 Уравнение Кортевега - де Вриза.

Уравнение Кортевега - де Вриза (КдВ) - это одно из многих нелинейных уравнений в частных производных (НУЧП). Оно является уравнением третьего порядка и имеет следующий вид:
$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$
Где:
$u = u(x, t)$ - некоторая функция двух переменных (координата x и время t).
Подробным образом это нелинейное уравнение в частных производных анализировалось в работе Дидерика Кортевега и Густава де Вриза в 1895 году.
Данное уравнение может быть использовано для описания реальных физических процессов. Так, например, уравнение Кортевега - де Вриза описывает физический процесс распространения уединенных волн на воде, без учета явления диссипации энергии.
Для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$ получено большое количество точных решений, не смотря на то, что нелинейность уравнения Кортевега - де Вриза приводит к существенному усложению поиска решений аналитическими методами.
Среди решений данного уравнения имеются решения солитонного типа, то есть решения в виде уединненых устойчивых волн, которые не разрушаются при взаимодействии с другими волнами или с некоторыми другими возмущениями. Таким решением является, например, решение уравнения Кортевега - де Вриза следующего вида:
$u = u(x, t) = \frac{2k^2}{cosh^2(k(x-4k^2t-x_0)}$
Где:
k - свободный параметр,
x_0 - произвольная константа.
Параметр k - определяет высоту и ширину солитона. Кроме того, этот параметр задает скорость уединенной волны.
Произвольная константа x_0 зависит от выбора точки начала отсчёта пространственной координаты на оси x.

2 Иерархия Кортевега - де Вриза.

Приведенное уравнение Кортевега - де Вриза вида $\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$ является первым представителем так называемой иерархии уравнений Кортевега - де Вриза.

Эта иерархия задается следующим соотношением:

$u_t + \frac{\partial}{\partial x} L_{n+1}[u] = 0$

Где:

$L_n[u]$ - оператора Ленарда.

Оператор Ленарда определяется следующим рекуррентным соотношением:

$\frac{\partial}{\partial x} L_{n+1}[u] = (\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 4u\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial x}) L_n[u]$

Начальное условие для этого рекуррентного соотношения имеет вид:

$L_0[u] = \frac{1}{2}$

При подстановке различных $n = 1, 2, 3, ...$ будут получены различные уравнения из иерархии Кортевега - де Вриза.

Порядки, получаемых нелинейных уравнений в частных производных согласно выражению $u_t + \frac{\partial}{\partial x} L_{n+1}[u] = 0$ будут нечетными.

Найдем операторы Ленарда для $n = 0...7$.

Тогда получим:

$L_0[u] = \frac{1}{2}$

$L_1[u] = u$

$L_2[u] = u_{xx} + 3u^2$

$L_3[u] = u_{xxxx} + 10uu_{xx} + 5u_x^2 + 10u^3$

$L_4[u] = u_{xxxxxx} + 14uu_{xxxx} + 28u_x u_{xxx} + 21u_{xx}^2 + 70u^2 u_{xx} + 70uu_x^2 + 35u^4$

$L_5[u] = u^{(8)}(x) + 18u^{(6)}(x)u(x) + 69u^{(3)}(x)^2 + 378u(x)u''(x)^2 + 630u(x)^2u'(x)^2 + 54u^{(5)}(x)u'(x) + 6u^{(4)}(x)(19u''(x) + 21u(x)^2) + 504u^{(3)}(x)u(x)u'(x) + 42(11u'(x)^2 + 10u(x)^3)u''(x) + 126u(x)^5$

$L_6[u] = u^{(10)}(x) + 22u^{(8)}(x)u(x) + 253u^{(4)}(x)^2 + 1518u^{(3)}(x)^2u(x) + 4158u(x)^2u''(x)^2 + 1342u''(x)^3 + 4620u(x)^3u'(x)^2 + 1155u'(x)^4 + 88u^{(7)}(x)u'(x) + 22u^{(6)}(x)(11u''(x) + 9u(x)^2) + +462u(x)(22u'(x)^2 + 5u(x)^3)u''(x) + 22u^{(5)}(x)(19u^{(3)}(x) + 54u(x)u'(x)) + 66u^{(4)}(x)(38u(x)u''(x) + 25u'(x)^2 + 14u(x)^3) + 132u^{(3)}(x)u'(x)(43u''(x) + 42u(x)^2) + 462u(x)^6$

$L_7[u] = u^{(12)}(x) + 26u^{(10)}(x)u(x) + 923u^{(5)}(x)^2 + 6578u^{(4)}(x)^2u(x) + 34892u(x)u''(x)^3 + 30030u(x)^4u'(x)^2 + 30030u(x)u'(x)^4 + 130u^{(9)}(x)u'(x) + 26u^{(8)}(x)(17u''(x) + 11u(x)^2) + 858u^{(3)}(x)^2(31u''(x) + 23u(x)^2) + 12012u(x)^2(11u'(x)^2 + u(x)^3)u''(x) + 858(83u'(x)^2 + 42u(x)^3)u''(x)^2 + 52u^{(7)}(x)(19u^{(3)}(x) + 44u(x)u'(x)) + 3432u^{(3)}(x)u'(x)(43u(x)u''(x) + 10u'(x)^2 + 14u(x)^3) + 26u^{(6)}(x)(61u^{(4)}(x) + 242u(x)u''(x) + 165u'(x)^2 + 66u(x)^3) + 572u^{(5)}(x)(19u^{(3)}(x)u(x) + 27u(x)^2u'(x) + 36u'(x)u''(x)) + 858u^{(4)}(x)(38u(x)^2u''(x) + 25u''(x)^2 + 50u(x)u'(x)^2 + 36u^{(3)}(x)u'(x) + 7u(x)^4) + 1716u(x)^7$

3 Уравнения из иерархии Кортевега - де Вриза в переменных бегущей волны.

Пусть решения уравнений из иерархии Кортевега - де Вриза будут иметь следующий вид: $u = u(x) = u(x - Ct)$

Где:

C - некоторая константа.

Тогда подстановка переменных бегущей волны в уравнения с последующим домножением их на u_x и интегрированием приводит к уравнениями из иерархии Кортевега - де Вриза следующего вида:

$L_n[u] - C_n^{(0)} u + C_n^{(1)} = 0$

Где: $C_n^{(0)}$ и $C_n^{(1)}$ - некоторые константы.

Переобозначим константы $C_n^{(0)}$ и $C_n^{(1)}$, как A_n и B_n и получим уравнения следующего вида:

$L_n[u] - A_n u + B_n = 0$

$E_n[u] = L_n[u] - A_n u + B_n = 0$

Для $n = 2$ и $n = 3$ уравнения $E_2[u]$ и $E_3[u]$ имеют следующий конкретный вид:

$E_2[u] = u_{xx} + 3u^2 - A_2 u + B_2 = 0$

$E_3[u] = u_{xxxx} + 10uu_{xx} + 5u_x^2 + 10u^3 - A_3 u + B_3 = 0$

4 Постановка задачи.

Требуется проверить существование связи в виде некоторого оператора $\widehat{A}$ между уравнениями из иерархии Кортевега - де Вриза для n и $n+1$. При этом, если предполагаемый оператор существует, то значит можно определить связь между решениями уравнений из иерархии Кортевега - де Вриза, заключающуюся в том, что некоторые решения уравнений для n могут быть найдены, как решения уравнений для $k < n$.

5 Построение оператора $\widehat{A}$ для уравнений $E_2[u]$ и $E_3[u]$.

Рассмотрим сначала случай связи между уравнениями $E_2[u]$ и $E_3[u]$.

Тогда:

$E_3[u] = \widehat{A} E_2[u]$

Распишем уравнения $E_2[u]$ и $E_3[u]$.

$u_{xxxx} + 10uu_{xx} + 5u_x^2 + 10u^3 - A_3u + B_3 = \widehat{A}(u_{xx} + 3u^2 - A_2u + B_2)$
В левой части выражения максимальный порядок производной равен четырем, в правой части выражения максимальный порядок равен двум, для того чтобы исключить слагаемое вида u_{xxxx} из правой части в операторе $\widehat{A}$ необходима составляющая вида $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Тогда:
$u_{xxxx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{xx} =>$
Оператор $\widehat{A}$ без составляющей вида $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ обозначим за $\widehat{B}$. Таким образом:
$\widehat{A} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \cdots = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \widehat{B}$
Подействуем оператором $\widehat{A} - \widehat{B} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ на уравнение $E_2[u]$. Получим следующее выражение:
$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_2[u] = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_{xx} + 3u^2 - A_2u + B_2) = u_{xxxx} + 3\frac{\partial}{\partial x}(2uu_x) - A_2u_{xx} = u_{xxxx} + 6u_x^2 + 6uu_{xx} - A_2u_{xx}$
С помощью полученного выражения перейдем от оператора $\widehat{A}$ к оператору $\widehat{B}$.
$E_3[u] - \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_2[u] = \widehat{B}E_2[u]$
Выполним подстановку соответствующих уравнений.
$u_{xxxx} + 10uu_{xx} + 5u_x^2 + 10u^3 - A_3u + B_3 - u_{xxxx} - 6u_x^2 - 6uu_{xx} + A_2u_{xx} = \widehat{B}E_2[u]$
После упрощения получим:
$4uu_{xx} - u_x^2 + 10u^3 - A_3u + A_2u_{xxx} + B_3 = \widehat{B}E_2[u]$
Анализ полученного выражения и уравнения $E_2[u]$ показывает, что для того, чтобы исключить слагаемое вида $4uu_{xx}$ из правой части выражения $4uu_{xx} - u_x^2 + 10u^3 - A_3u + A_2u_{xxx} + B_3 = \widehat{B}E_2[u]$, в операторе $\widehat{B}$ необходимо слагаемое вида $4u$.
Следовательно:
$\widehat{B} = 4u + \cdots = 4u + \widehat{C}$
$4uE_2[u] = 4uu_{xx} + 12u^3 - 4A_2u^2 + 4uB_2$
Перейдем к введенному оператору $\widehat{C}$.
$\widehat{B}E_2[u] - 4uE_2[u] = \widehat{C}E_2[u]$
$\widehat{C}E_2[u] = 4uu_{xx} - u_x^2 + 10u^3 - A_3u + A_2u_{xx} + B_3 - 4uu_{xx} - 12u^3 + 4A_2u^2 - 4B_2u = -u_x^2 - 2u^3 - (A_3 + 4B_2)u + 4A_2u^2 + A_2u_{xx} + B_3$
$A_2u_{xx} - u_x^2 - 2u^3 + 4A_2u^2 - (A_3 + 4B_2)u + B_3 = \widehat{C}(u_{xx} + 3u^2 - A_2u + B_2)$
Далее, рассуждая аналогичным образом, придем к следующему выводу:
$\widehat{C} = A_2 + \widehat{D}$
Выполним переход к оператору $\widehat{D}$.

$\widehat{D}E_2[u] = \widehat{C}E_2[u] - A_2E_2[u]$
$\widehat{D}E_2[u] = A_2u_{xx} - A_2u_{xx} - u_x^2 + 4A_2u^2 - 3A_2u^2 - (A_3 + 4B_2)u + A_2^2u + B_3 - A_2B_2 - 2u^3$
$\widehat{D}E_2[u] = -u_x^2 - 2u^3 + A_2u^2 + (A_2^2 - A_3 - 4B_2)u + (B_3 - A_2B_2)$
На данном этапе, в правой части выражения $\widehat{D}E_2[u] = -u_x^2 - 2u^3 + A_2u^2 +$

$(A_2^2 - A_3 - 4B_2)u + (B_3 - A_2B_2)$ порядок производной по x меньше, чем в уравнении $E_2[u]$, поэтому для того, чтобы продолжить исключение кроме дифференциальных и константных сооставляющих в оператор $\widehat{A}$ требуется ввести интегральную составляющую.

Введем интегальную составляющую в оператор $\widehat{A}$ следующим образом:

$L_2[u] = u_{xx} + 3u^2$

$2u_x L_2[u]dx = (2u_x u_{xx} + 6u^2 u_x)dx$

$2\int u_x L_2[u]dx = u_x^2 + 2u^3 + C$

$\widehat{D} = -2\int u_x <.> dx + \widehat{E}$

$(\widehat{D} - \widehat{E})L_2[u] = -2\int u_x <.> dx(u_{xx} + 3u^2 - A_2u + B_2)$

$-2\int u_x <.> dx(u_{xx} + 3u^2 - A_2u + B_2) = -2\int[u_x u_{xx} + 3u^2u_x - A_2uu_x + B_2u_x]dx = = -2[\frac{u_x^2}{2} + u^3 - \frac{A_2u^2}{2} + B_2u] + C = = -u_x^2 - 2u^3 + A_2u^2 - 2B_2u + C$

$\widehat{E}L_2[u] = \widehat{E}(u_{xx} + 3u^2 - A_2u + B_2) = = (A_2^2 - A_3 - 4B_2)u + 2B_2u + (B_3 - A_2B_2) - C$

Таким образом получим окончательный вид:

$\widehat{A} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 4u + A_2 - 2\int u_x <.> dx + \widehat{E}$

$E_3[u] = \left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 4u + A_2 - 2\int u_x <.> dx\right\} E_2[u] + (A_2^2 - A_3 - 2B_2)u + (B_3 - A_2B_2) - C$

$E_3[u] = \left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 4u + A_2 - 2\int u_x <.> dx\right\} E_2[u] + pu(x) + q$

$p = A_2^2 - A_3 - 2B_2$

$q = B_3 - A_2B_2 - C$

В полученном выражении присутствует часть, линейная относительно функции $u = u(x)$. Коэффициенты этой линейной части зависят от коэффициентов самих уравнений $E_2[u]$ и $E_3[u]$. При правильном выборе этих коэффициентов, все решения уравнения $E_2[u]$ будут являться решениями уравнения $E_3[u]$.

6 Построение оператора $\widehat{A}$ для уравнений $E_n[u]$, где $n = 4..7$.

Для построения оператора $\widehat{A}$ связи между уравнениями из иерархии Кортевега - де Вриза более высоких порядок был написан скриптовый сценраий для пакета Wolfram Mathematica.

Код написанного скриптового сценария:

```
Print["eq.wl script file\n"];


L0 = 1/2;
```

```
L1 = u[x];

DL2 = D[L1, {x, 3}] + 4*u[x]*D[L1, x] + 2*D[u[x], x]*L1;
L2 = Integrate[DL2, x];
DL3 = D[L2, {x, 3}] + 4*u[x]*D[L2, x] + 2*D[u[x], x]*L2;
L3 = Integrate[DL3, x];
DL3 = D[L3, {x, 3}] + 4*u[x]*D[L3, x] + 2*D[u[x], x]*L3;
L4 = Integrate[DL3, x];
DL5 = D[L4, {x, 3}] + 4*u[x]*D[L4, x] + 2*D[u[x], x]*L4;
L5 = Integrate[DL5, x];
DL6 = D[L5, {x, 3}] + 4*u[x]*D[L5, x] + 2*D[u[x], x]*L5;
L6 = Integrate[DL6, x];
DL7 = D[L6, {x, 3}] + 4*u[x]*D[L6, x] + 2*D[u[x], x]*L6;
L7 = Integrate[DL7, x];


E2 = L2 - A2*u[x] + B2;
E3 = L3 - A3*u[x] + B3;
E4 = L4 - A4*u[x] + B4;
E5 = L5 - A5*u[x] + B5;
E6 = L6 - A6*u[x] + B6;
E7 = L7 - A7*u[x] + B7;

Print[L0];
Print[L1];
Print[L2];
Print[L3];
Print[L4];
Print[L5];

OP[L_[x]] := D[L[x], {x, 3}] + 4*u[x]*D[L[x], x] + 2*D[u[x], x]*L[x];


tmp1 = E4 - D[E3, {x, 2}];
tmp2 = tmp1 - 4*u[x]*E3;
tmp3 = tmp2 - A3*E3;
tmp33 = tmp2 + Integrate[Expand[2*u'[x]*E3], x]


tmp1 = Expand[tmp1];
```

```
tmp2 = Expand[tmp2];
tmp3 = Expand[tmp3];
tmp33 = Expand[tmp33];


a1 = E3 - D[E2, {x, 2}];
a2 = a1 - 4*u[x]*E2;
a3 = a2 + Integrate[Expand[2*u'[x]*E2], x];
a4 = a3 - A2*E2;
a3 = Simplify[Expand[a3]];
a4 = Simplify[Expand[a4]];


t1 = E5 - D[E4, {x, 2}];
t2 = t1 - 4*u[x]*E4;
t3 = t2 + Integrate[Expand[2*u'[x]*E4], x];
t3 = Expand[t3];
t4 = Simplify[Expand[t3 - A4*E2]];

b1 = E6 - D[E5, {x, 2}];
b2 = b1 - 4*u[x]*E5;
b3 = b2 + Integrate[Expand[2*u'[x]*E5], x];
b3 = Simplify[Expand[b3]];
b4 = Simplify[Expand[b3 - A5*E2]];

c1 = E7 - D[E6, {x, 2}];
c2 = c1 - 4*u[x]*E6;
c3 = c2 + Integrate[Expand[2*u'[x]*E6], x];
c3 = Simplify[Expand[c3]];
c4 = Simplify[Expand[c3 - A6*E2]];

e1 = E4 - D[E3, {x, 2}];
e2 = e1 - 4*u[x]*E3;
e3 = e2 + Integrate[Expand[2*u'[x]*E3], x];
e3 = Simplify[Expand[e3]];
e4 = Simplify[Expand[e3 - A3*E2]];
```

7 Построение оператора $\widehat{A}$ для уравнений $E_3[u]$ и $E_4[u]$.

Рассмотрим построение оператора $\widehat{A}$ для связи уравнений $E_3[u]$ и $E_4[u]$:
$E_3[u] = u_{xxxx} + 10uu_x + 5u_x^2 + 10u^3 - A_3u + B_3$
$E_4[u] = u_{xxxxxx} + 14uu_{xxxx} + 28u_xu_{xxx} + 21u_{xx}^2 + 70u^2u_{xx} + 70uu_x^2 + 35u^4 - A_4u + B_4$
$E_4[u] = \widehat{A}E_3[u]$

$\widehat{A} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 4u - 2\int u_x < . > dx + \widehat{B}$

1. $E_4[u] - \frac{\partial^2}{\partial x^2}E_3[u] = \text{A3}u''(x) - \text{A4}u(x) + \text{B4} + 4u^{(4)}(x)u(x) + 40u(x)^2u''(x) + u''(x)^2 + 10u(x)u'(x)^2 - 2u^{(3)}(x)u'(x) + 35u(x)^4$

2. $E_4[u] - \left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 4u\right\}E_3[u] = \text{A3}u''(x) + 4\text{A3}u(x)^2 - \text{A4}u(x) - 4\text{B3}u(x) + \text{B4} + u''(x)^2 - 10u(x)u'(x)^2 - 2u^{(3)}(x)u'(x) - 5u(x)^4$

3. $E_4[u] - \left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 4u - 2\int u_x < . > dx\right\}E_3[u] = \text{A3}u''(x) + 3\text{A3}u(x)^2 - \text{A4}u(x) - 2\text{B3}u(x) + \text{B4}$

4. $E_4[u] - \left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 4u - 2\int u_x < . > dx\right\}E_3[u] - \text{A3}E_2[u] = \text{A2A3}u(x) - \text{A3B2} - \text{A4}u(x) - 2\text{B3}u(x) + \text{B4} = u(x)(\text{A2A3} - \text{A4} - 2\text{B3}) - \text{A3B2} + \text{B4}$

5. $\widehat{B}E_3[u] = \text{A3}u''(x) + 3\text{A3}u(x)^2 - \text{A4}u(x) - 2\text{B3}u(x) + \text{B4}$
$\widehat{B}(u_{xxxx} + 10uu_x + 5u_x^2 + 10u^3 - A_3u + B_3) = \text{A3}u''(x) + 3\text{A3}u(x)^2 - \text{A4}u(x) - 2\text{B3}u(x) + \text{B4}$

8 Связь коэффициентов A_n и B_n уравнений иерархии Кортевега - де Вриза

В общем случае для уравнений $E_n[u]$ и $E_{n+1}[u]$ имеем:
$E_{n+1}[u] = \widehat{A}E_n[u] + A_nE_2[u] + p_n + q_nu(x)$
$\widehat{A} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 4u - 2\int u_x < . > dx$
Рассмотрим $p_n + q_nu(x)$ для $n = 2..6$. Тогда:
n $= 2$. $u(x)\left(\text{A2}^2 - \text{A3} - 2\text{B2}\right) - \text{A2B2} + \text{B3}$
n $= 3$. $u(x)(\text{A2A3} - \text{A4} - 2\text{B3}) - \text{A3B2} + \text{B4}$
n $= 4$. $u(x)(\text{A2A4} - \text{A5} - 2\text{B4}) - \text{A4B2} + \text{B5}$

n = 5. $u(x)(\mathrm{A2A5} - \mathrm{A6} - 2\mathrm{B5}) - \mathrm{A5B2} + \mathrm{B6}$
n = 6. $u(x)(\mathrm{A2A6} - \mathrm{A7} - 2\mathrm{B6}) - \mathrm{A6B2} + \mathrm{B7}$
Имеем два следующих уравнения:

$$\begin{cases} E_3[u] = L_3[u] - A_3u(x) + B_3 = 0, \\ E_2[u] = L_2[u] - A_2u(x) + B_2 = 0;. \end{cases}$$

Пусть $u = u(x)$ - решение уравнения $E_2[u] = 0$. Следовательно.
$E_3[u] = \widehat{A}E_2[u] + A_2E_2[u] + p_2 + q_2u(x)$
$E_3[u] = p_2 + q_2u(x)$
Если:

$$\begin{cases} p_2 = 0, \\ q_2 = 0;. \end{cases}$$

Тогда $u = u(x)$ - решение уравнения $E_3[u] = 0$.
Раскроем выражения p_2 и q_2.

$$\begin{cases} p_2 = A_2A_2 - A_3 - 2B_2 = 0, \\ q_2 = B_3 - A_2B_2 = 0;. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_3 = A_2A_2 - 2B_2, \\ B_3 = A_2B_2;. \end{cases}$$

Подставим значения A_3 и B_3 выраженные через A_2 и B_2 в выражение для уравнения $E_3[u] = L_3[u] - A_3u(x) + B_3 = 0$. Тогда:
$E_3[u] = L_3[u] - (A_2 - 2B_2)u(x) + A_2B_2 = 0$.
Функция $u = u(x)$ - решение для уравнения $E_3[u] = 0$ с такими коэффициентами.
Аналогичные действия можно проделать для уравнений $E_n[u] = 0$, где n больше 3.
Например, для уравнения $E_4[u] = 0$ имеем:

$$\begin{cases} A_4 = A_2A_3 - 2B_3 = A_2(A_2^2 - 2B_2) - 2A_2B_2, \\ B_4 = A_3B_2 = (A_2^2 - 2B_2)B_2; \end{cases}$$

$E_4[u] = L_4[u] - A_2((A_2^2 - 2B_2) - 2B_2)u(x) + (A_2^2 - 2B_2)B_2$

9 Заключение

Для уравнений из иерархии Кортевега - де Вриза до $E_7[u] = 0$, при решении в переменных бегущей волны, найдена связь вида:
$E_{n+1}[u] = \widehat{A}E_n[u] + A_n E_2[u] + p_n + q_n u(x)$, где:
$\widehat{A}$ - интегрально-дифференциальный оператор, который может быть записан следующим образом:
$\widehat{A} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 4u - 2\int u_x < . > dx$