兰州大学2018～2019学年第一学期

期末试卷（A卷）

课程名称：数学分析（三）　　任课教师：王智诚

学院：萃英学院　　专业：数学　　年级：2017级

姓名：＿＿＿＿＿＿　　校园卡号：＿＿＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
分数								
阅卷教师								

1. 计算题.（每题8分，共48分）

1). 设函数$f(x)$有连续的导数，$f(0)=0$，求极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^4}\iiint_{t^2\le x^2+y^2+z^2\le 4t^2} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

$\int_{t^2}^{4t^2}\int_0^{\pi} 2\pi f(r)\, r^2\sin\varphi\, d\varphi\, dr$

$\int_0^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi = d(-\cos\varphi)$

$\frac{4\pi}{t^4}\int_{t^2}^{4t^2} r$

2). 求曲面积分$I=\iint_\Sigma -2x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是由曲面$x^2+y^2=4$被平面$x+z=2$和$z=0$所截取的部分的外侧。

3). 求重积分$I=\iint_\Omega e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Omega$是以$O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(0,1)$ 为顶点的三角形闭区域。

4). 求半球面$x^2+y^2+z^2=2(z\ge 0)$和锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围成区域的体积。

5). 求$I=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x$，其中$b>a>0$。

6). 求$I=\iint_\Omega xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Omega$由抛物线$y^2=x$, $y^2=4x$, $x^2=y$, $x^2=4y$ 围成。

2. （10分）设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\ln(1+xy)}{x}, & x\neq 0,\\ y, & x=0.\end{cases}$$

讨论$f(x,y)$在其定义域上是否连续。如果连续，请给出证明。

3. (12分) 对含参无穷积分$I(a)=\int_1^{+\infty}x^a e^{-x}\mathrm{d}x$，证明：

（1）对任意$b>0$，$I(a)$关于$a\in[0,b]$一致收敛；

（2）$I(a)$关于$a\in[0,+\infty)$不一致收敛；

（3）讨论$I(a)$在$[0,+\infty)$上的可微性。

4. (12分) 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

讨论$f(x,y)$在$(0,0)$点的连续性、可导性及可微性。

5. (10分) (1) 求$f(x,y,z)=xyz$在条件$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{r}$ $(x>0,y>0,z>0,r>0)$下的极小值;

(2) 证明不等式

$$3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^{-1}\leq\sqrt[3]{xyz},\quad \forall x>0,y>0,z>0.$$

6. (8分) 设$f(x,y,z)$在$a\leq x,y,z\leq b$上连续，令

$$\phi(x)=\max_{a\leq y\leq x}\left(\min_{a\leq z\leq b}f(x,y,z)\right),$$

则$\phi(x)$在$[a,b]$上连续。

兰州大学2019～2020学年第一学期

期末试卷（A卷）

课程名称：数学分析（三）　　任课教师：王智诚

学院：数学与统计学院　　专业：数学　　年级：2018级

姓名：＿＿＿＿＿＿　　校园卡号：＿＿＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
分数								
阅卷教师								

1. 计算题.（每题8分，共48分）

1). 求曲线积分$I=\oint_C (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，其中$C$ 是柱面$x^2+y^2=4$与平面$x+z=2$的交线，从x轴正向看去沿逆时针方向。

2). 求曲面积分$I=\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$S$是以$A(1,0,0)$、$B(0,1,0)$、$C(0,0,1)$ 为顶点的三角形，下侧为正侧。

3). 求半球面$x^2+y^2+z^2=2(z\geq 0)$和锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围成区域的体积。

4). 求$I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x$，其中$b>a>0$。

5). 求$I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

6). 设函数$f(x,y)=xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$，求$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$。

2. (10分) 对含参无穷积分$I(a)=\int_0^{+\infty}ae^{-ax}\mathrm{d}x$，证明：

（1）对任意$b>0$，$I(a)$关于$a\in[b,\infty)$一致收敛；

（2）$I(a)$关于$a\in(0,+\infty)$不一致收敛。

3. (10分) 设函数$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$. 讨论$f(x,y)$在$(0,0)$点的连续性、可导性及可微性。

4. (8分) 抛物面$x^2+y^2=z$与平面$x+y+z=1$的交线为一个椭圆。求这个椭圆到原点的最长和最短距离。

5. （8分）设E是$\mathbb{R}^m$中的有界闭集，$\{S_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$是$\mathbb{R}^m$中的一族闭集，它们中任意有限个与$E$的交都非空。证明：集合$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$与集合$E$的交也非空。

6. (8分) 设Ω是$\mathbb{R}^m$中的凸开集，$\mathbf{F}:\Omega\to\mathbb{R}^m$是可微映射，且对任意$x\in\Omega$，$D\mathbf{F}(x)$都是正定矩阵。证明：$\mathbf{F}$是单射。

7. (8分) 设 f 是 $[0,1]$ 上恒取正值的连续函数. 证明：

$$\lim_{x\to 0^+}\int_0^1 \frac{xf(y)}{x^2+y^2}\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}f(0).$$