高等代数教程参考答案

魏子豪, 伍文超, 卓铭鑫, 赵斓, 杨传禹, 周文杰, 王博凡

2018 年 11 月 24 日

写在前面

针对郭爷爷在《高等代数教程》前言中提到的“教材的语言固然严忌艰涩，也切忌所谓‘通俗易懂，便于自学’”的的问题，我们希望更多的后来者能够较好的进入高等代数的学习，虽然这可能不太利于之后的学习，但是能让大家更好的入门，体会到数学虽然艰涩但亦有可琢磨之处。同样，我们希望大家不要一味的抄袭答案，这样是和我们的初衷不符的，也是我们为什么说不利于之后学习的原因。除此之外，我们还希望大家能够有更多更好的想法，这样我们才能在学习的过程中逐渐的成长，有所进步。

最后，祝大家能够在学习中体验数学的快乐。

目录

第零章　整数，数域与多项式

解答

1. 已知

$$\begin{aligned} A &= \{x\in\mathbb{R}|-1\le x<1\} \\ B &= \{x\in\mathbb{R}|-2<x<1\} \\ C &= \{x\in\mathbb{R}|x<0\} \end{aligned} \tag{1}$$

计算 $A\cap(B\cup C)$、$A\cup(B\cap C)$；

解：有志与力者，应当养成严格遵循定义的习惯。

$$\begin{aligned} &A\cap(B\cup C) \\ =&A\cap\{x|[x\in B]\vee[x\in C]\} \\ =&A\cap\{x|[x\in\{x\in\mathbb{R}|-2<x<1\}]\vee[x\in\{x\in\mathbb{R}|x<0\}]\} \\ =&A\cap\{x\in\mathbb{R}|[-2<x<1]\vee[x<0]\} \\ =&\{x\in\mathbb{R}|-1\le x<1\}\cap\{x\in\mathbb{R}|x<1\} \\ =&\{x|[x\in\{x\in\mathbb{R}|-1\le x<1\}]\wedge[x\in\{x\in\mathbb{R}|x<1\}]\} \\ =&\{x\in\mathbb{R}|[-1\le x<1]\wedge[x<1]\} \\ =&\{x\in\mathbb{R}|-1\le x<1\} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &A\cup(B\cap C) \\ =&A\cup\{x|[x\in B]\wedge[x\in C]\} \\ =&A\cup\{x|[x\in\{x\in\mathbb{R}|-2<x<1\}]\wedge[x\in\{x\in\mathbb{R}|x<0\}]\} \\ =&A\cup\{x\in\mathbb{R}|[-2<x<1]\wedge[x<0]\} \\ =&\{x\in\mathbb{R}|-1\le x<1\}\cup\{x\in\mathbb{R}|-2<x<0\} \\ =&\{x|[x\in\{x\in\mathbb{R}|-1\le x<1\}]\vee[x\in\{x\in\mathbb{R}|-2<x<0\}]\} \\ =&\{x\in\mathbb{R}|[-1\le x<1]\vee[-2<x<0]\} \\ =&\{x\in\mathbb{R}|-2<x<1\} \end{aligned} \tag{3}$$

注：注意利用集合恒等式

$$A = \{x|x \in A\} \tag{4}$$

2. 求证：$M \subseteq N \to [M \cap N = M] \wedge [M \cup N = N]$

$$\begin{aligned}
&M \subseteq N \\
\to&(\forall x \in M)[x \in N] \\
\to&[\{x|[x \in M] \wedge [x \in N]\} = M] \wedge [N \subseteq M \cup N \subseteq N \cup N \subseteq N] \\
\to&[M \cap N = M] \wedge [M \cup N = N]
\end{aligned} \tag{5}$$

3.

$$\begin{aligned}
&M \cap (N \cup L) \\
=&\{x|[x \in M] \wedge [x \in \{x|[x \in N] \vee [x \in L]\} \\
=&\{x|[x \in M] \wedge ([x \in N] \vee [x \in L])\} \\
=&\{x|([x \in M] \wedge [x \in N]) \vee ([x \in M] \wedge [x \in L])\} \\
=&\{x|[x \in M] \wedge [x \in N]\} \cup \{x|[x \in M] \wedge [x \in L]\} \\
=&(M \cap N) \cup (M \cap L)
\end{aligned} \tag{6}$$

4.

$$\begin{aligned}
&((A - B) \cup (B - A))^C \\
=&\{x|[x \in C] \wedge ([x \notin \{x|[x \in A] \wedge [x \notin B]\}] \wedge [x \notin \{x|[x \notin A] \wedge [x \in B]\}])\} \\
=&\{x|[x \in C] \wedge (\neg([x \in A] \wedge [x \notin B]) \wedge \neg([x \notin A] \wedge [x \in B]))\} \\
=&\{x|[x \in C] \wedge (([x \in A] \wedge [x \in B]) \vee ([x \notin A] \wedge [x \notin B]))\} \\
=&(A \cap B) \cup (A \cup B)^C
\end{aligned} \tag{7}$$

5. 例：

$$\begin{aligned}
&f(x) = 4 - x \\
&g(x) = 3 \\
&f(g(x)) = 1 \\
&g(f(x)) = 3
\end{aligned} \tag{8}$$

6. (1)

$$\begin{aligned}
&[\forall x, y \in \mathbb{R}^+)] \wedge [a^x = a^y] \to [x = \frac{\ln(a^x)}{\ln a} = \frac{\ln(a^y)}{\ln a} \\
&(\forall b \in \mathbb{R})[a^{\frac{\ln b}{\ln a}} = b]
\end{aligned} \tag{9}$$

故 f 是双射。

(2)

$$\begin{aligned}&[x,y\in\mathbb{R}^+]\wedge[x^{-1}=y^{-1}]\to[x=y]\\&(\forall a\in\mathbb{R}^+)[(a^{-1})^{-1}=a]\end{aligned}\tag{10}$$

故 g 是双射。

(3)

(4)

7. (1)

$$\begin{aligned}&([x,y\in A]\wedge[g(f(x))=g(f(y))]\to[x=y])\\\to&(([x,y\in A]\wedge[f(x)=f(y)]\to([x,y\in A]\wedge[g(f(x)=g(f(y))]\to[x=y])\\\to&(\forall c\in C)(\exists x\in A)[g(f(x))=c]\\\to&(\forall c\in C)(\exists b\in B)[g(b)=c]\end{aligned}\tag{11}$$

反之不真。例:

$$\begin{aligned}&f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}\\&g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}\\&f(x)=x,g(x)=0\\&f(x)=0,g(x)=x\end{aligned}\tag{12}$$

前者不是单射，后者不是满射。

(2) 首先证明一个引理，即逆映射在原映射的像上的唯一性。
引理一、记:

$$\begin{aligned}&f:A\mapsto B\\&(\forall a\in A)(\exists!x\in B)[f(x)=a]\\&C=\{y|(\exists x\in A)[f(x)=y]\}\\&\mathscr{F}=\{g:C\mapsto A|(\forall x\in A)(\forall y\in C)[g(f(x))=x,f(g(y))=y]\}\end{aligned}\tag{13}$$

则有 $|\mathscr{F}|=1$, 即

$$(\exists!f^{-1}\in f)(\forall x\in A)[f^{-1}(f(x)))=f(f^{-1}(x))=x]\tag{14}$$

引理一的证明：

$$\begin{aligned}
&(\forall x \in A)(\forall g, h \in \mathscr{F})[g(f(x)) = h(f(x)) = x] \\
\to&(\forall y \in C)[g(y) = h(y)] \\
\to&[g = h] \\
\to&1 = |\{f^{-1} : C \mapsto A | (\forall c \in C)(\exists! x \in \{x \in A | f(x) = c\})[f^{-1}(c) = x]\}| \leq \mathscr{F}| \leq 1 \\
\to&|\mathscr{F}| = 1
\end{aligned} \tag{15}$$

回到原题。实际上我们有：

$$f^{-1}(g^{-1}(g(f(x)))) = x \tag{16}$$

故

$$h = f^{-1} \circ g^{-1} \tag{17}$$

8. (1) 显然

$$1 \cdot 1! = 1 = (1+1)! - 1 \tag{18}$$

$$(\forall n \in (\mathbb{Z} \cap (0, +\infty)))[\sum_{i=1}^{n+1} i \cdot i! = (n+1)(n+1)! + (n+1)! - 1 = (n+2)! - 1 \tag{19}$$

事实上

$$(\forall n \in (\mathbb{Z} \cap (0, +\infty)))[\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = \sum_{i=1}^{n}((i+1)! - i!) = (n+1)! - 1 \tag{20}$$

(2)

$$\begin{aligned}
&(\forall h \in ((0, +\infty) \cap \mathbb{Z}))[(1+h)^1 \geq 1 + 1 \cdot h] \\
&(\forall n \in ((1, +\infty) \cap \mathbb{Z}))(\forall h \in ((0, +\infty) \cap \mathbb{Z}))[(1+h)^n \geq 1 + nh] \\
&\to [(1+h)^{(}n+1) \geq (1+h)(1+nh) \geq 1 + (n+1)h] \\
\therefore&(\forall n \in ((1, \infty) \cap \mathbb{Z}))(\forall h \in ((0, \infty) \cap \mathbb{Z}))[(1+h)^n \geq 1 + nh]
\end{aligned} \tag{21}$$

事实上

$$\begin{aligned}
&(1+h)^n \\
=&|([0, h] \cap \mathbb{Z})^n| \\
\geq&|\{x \in ([0, h] \cap \mathbb{Z})^n | \|x\|_1 = \|x\|_\infty\}| \\
=&1 + nh
\end{aligned} \tag{22}$$

(3) 缺：归纳证法事实上设

$$A=\{a_i|i\in([1,n+1]\cap\mathbb{Z})\} \tag{23}$$

有

$$\begin{aligned}&\binom{n+1}{r+1}\\=&|\{B||B|=r+1,B\subseteq A\}|\\=&|\{B||B|=r,B\subseteq(A-\{a_{n+1}\})\}|+|\{B||B|=r+1,B\cap\{a_{n+1}\}=\emptyset\}\\=&\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}\end{aligned} \tag{24}$$

(4)

9. 法一：证明：首先，由最大公因数的定义，

$$(a_1,b_1)|a_1,(a_1,b_1)|b_1 \tag{25}$$

由整除定义，

$$(\exists m,n\in\mathbb{Z})[m(a_1,b_1)=a_1,n(a_1,b_1)=b_1] \tag{26}$$

两边同乘以 d，

$$(\exists m,n\in\mathbb{Z})[dm(a_1,b_1)=da_1=a,dn(a_1,b_1)=db_1=b] \tag{27}$$

即

$$d(a_1,b_1)|a,d(a_1,b_1)|b \tag{28}$$

于是

$$d(a_1,b_1)|(a,b) \tag{29}$$

由整除定义，

$$(\exists k\in\mathbb{Z})[kd(a_1,b_1)=(a,b)] \tag{30}$$

而由最大公因数定义，

$$kd(a_1,b_1)=(a,b)|a=da_1,kd(a_1,b_1)=(a,b)|a=db_1, \tag{31}$$

于是由整除定义，

$$(\exists s,t\in\mathbb{Z})[ksd(a_1,b_1)=da_1,ktd(a_1,b_1)=db_1] \tag{32}$$

两边同除以 d，有

$$ks(a_1,b_1)=a_1,kt(a_1,b_1)=b_1 \tag{33}$$

于是由最大公因数定义，

$$k(a_1,b_1)|(a_1,b_1) \tag{34}$$

由整除定义，

$$(\exists l \in \mathbb{Z})[kl(a_1,b_1) = (a_1,b_1)] \tag{35}$$

有

$$kl = 1 \tag{36}$$

故 $k \neq 0, l \neq 0$
而 $k, l \in \mathbb{Z}$
故 $|k| \geq 1$,$|l| \geq 1$
但 $k|1$,$l|1$
于是 $|k| \leq 1, |l| \leq 1$
故 $k \in \{-1,1\}$,$l \in \{-1,1\}$
而 $kl = 1$
故只有 $k = 1$,$l = -1$ 或 $k = -1$,$l = 1$ 于是

$$(a,b) = |kd(a_1,b_1)| = |k||d|(a_1,b_1) = |d|(a_1,b_1) \tag{37}$$

法二：证明：首先，由最大公因数的定义，

$$(a_1,b_1)|a_1, (a_1,b_1)|b_1 \tag{38}$$

由整除定义，

$$(\exists m, n \in \mathbb{Z})[m(a_1,b_1) = a_1, n(a_1,b_1) = b_1] \tag{39}$$

移项，得

$$m = \frac{a_1}{(a_1,b_1)} \in \mathbb{Z}, n = \frac{b_1}{(a_1,b_1)} \in \mathbb{Z} \tag{40}$$

故

$$a = da_1 = d(a_1,b_1)\frac{a_1}{(a_1,b_1)}, b = db_1 = d(a_1,b_1)\frac{b_1}{(a_1,b_1)} \tag{41}$$

于是

$$d(a_1,b_1)|(a,b)|d(a_1,b_1) \tag{42}$$

故

$$(a,b) = |d|(a_1,b_1) \tag{43}$$

法三：对 a_1、b_1 作辗转相除：
令 $r_0 = a_1$，$r_1 = b_1$，

$$(\forall n \in ((0,+\infty) \cap \mathbb{Z}))[r_n = r_{n+1}q_{n+1} + r_{n+2}] \wedge [q_n, r_n \in \mathbb{Z}] \wedge [r_{n+2} \in (0, r_{n+1})] \tag{44}$$

则

$$(\exists! m\in(\mathbb{Z}\cap(0,+\infty)))[r_m=0,r_{m-1}\neq 0] \tag{45}$$

事实上

$$|r_{m-1}|=(a_1,b_1) \tag{46}$$

然后构造两个数列

$$(\forall n\in((0,+\infty)\cap\mathbb{Z}))[Q_n=dq_n,R_n=dr_n] \tag{47}$$

于是

$$a=R_0,b=R_1,(a,b)=|R_{m-1}|=|d||r_{m-1}|=|d|(a_1,b_1) \tag{48}$$

评注：请注意评判这几种证法的优劣，并在日后养成批判着阅读证明的习惯。

10. 显然若 $p_i|a$，则

$$p_i|(\prod_{i=1}^{n}p_i+1)-\prod_{i=1}^{n}p_i|p_i \tag{49}$$

故 $p_i=1$，矛盾。再假定素数有限，则由唯一素因子分解定理，必有一个素数 $p\notin\{p_i|i\in(\mathbb{Z}\cap[1,n])\}$ 满足 $p|a$，矛盾。所以素数无限。

11. 我们首先对 m、n 作辗转相除：
令 $r_0=a_1$，$r_1=b_1$，

$$(\forall n\in((0,+\infty)\cap\mathbb{Z}))[r_n=r_{n+1}q_{n+1}+r_{n+2}]\wedge[q_n,r_n\in\mathbb{Z}]\wedge[r_{n+2}\in(0,r_{n+1})] \tag{50}$$

则

$$(\exists! m\in(\mathbb{Z}\cap(0,+\infty)))[r_s=0,r_{s-1}\neq 0] \tag{51}$$

事实上

$$|r_{s-1}|=(a_1,b_1) \tag{52}$$

而由熟知的等比数列求和公式有

$$2^{qn}-1=(\sum_{k=0}^{q-1}2^{kn})(2^n-1) \tag{53}$$

故令 $R_n=2^{r_n}-1,Q_n=\sum_{k=0}^{q_n-1}2^{kr_{n+1}}$，显然

$$(\forall n\in((0,+\infty)\cap\mathbb{Z}))[R_n=R_{n+1}Q_{n+1}+R_{n+2}]\wedge[Q_n,R_n\in\mathbb{Z}]\wedge[R_{n+2}\in(0,R_{n+1})] \tag{54}$$

故

$$(2^m-1,2^n-1)=R_{s-1}=2^(m,n)-1 \tag{55}$$

12. (1)$\mathbb{Q}[i]$ 是数域。显然

$$
\begin{aligned}
(\forall a_1,b_1,a_2,b_2\in\mathbb{Q})\Big[a_1+b_1i,a_2+b_2i\in\mathbb{Q}[i]&\\
&(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i\in\mathbb{Q}[i]\\
&-(a_1+b_1i)=(-a_1)+(-b_1)i\in\mathbb{Q}[i]\\
&(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i\in\mathbb{Q}[i]\\
&(a_1+b_1i)^{-1}=\frac{a_1}{a_1^2+b_1^2}-\frac{b_1}{a_1^2+b_1^2}i\in\mathbb{Q}[i]\Big]
\end{aligned}
\tag{56}
$$

故 $\mathbb{Q}[i]$ 是数域。

(2)S 不是数域。因为 $\frac{1}{2^1},\frac{1}{2^2}\in S$，但 $\log_2\frac{3}{4}=\log_2 3-1\in(0,1)$，故 $\log_2\frac{3}{4}\notin S$，故 $\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}\notin S$，故 S 不是数域。

(3)$\mathbb{Z}[\pi]$ 是数域。
显然

$$
\begin{aligned}
(\forall a_1(\pi),b_1(\pi),a_2(\pi),b_2(\pi)\in\mathbb{Z}[\pi])\Big[\frac{a_1(\pi)}{b_1(\pi)},\frac{a_2(\pi)}{b_2(\pi)}\in\mathbb{Z}(\pi)&\\
&\frac{a_1(\pi)}{b_1(\pi)}+\frac{a_2(\pi)}{b_2(\pi)}=\frac{a_1(\pi)b_2(\pi)+a_2(\pi)b_1(\pi)}{b_1(\pi)b_2(\pi)}\in\mathbb{Z}(\pi)\\
&-\frac{a_1(\pi)}{b_1(\pi)}=\frac{-a_1(\pi)}{b_1(\pi)}\in\mathbb{Z}(\pi)\\
&a_1(\pi)b_1(\pi)\frac{a_2(\pi)}{b_2(\pi)}=\frac{a_1(\pi)a_2(\pi)}{b_1(\pi)b_2(\pi)}\in\mathbb{Z}(\pi)\\
&(\frac{a_1(\pi)}{b_1(\pi)})^{-1}=\frac{b_1(\pi)}{a_1(\pi)}\in\mathbb{Z}(\pi)\Big]
\end{aligned}
\tag{57}
$$

故 $\mathbb{Z}[\pi]$ 是数域。

13. 比较系数，得

$$
\begin{cases}
\ell-2k &=5\\
2-\ell k-1 &=m\\
\ell+k &=-1
\end{cases}
\tag{58}
$$

解得

$$
\begin{cases}
\ell=1\\
k=-2\\
m=3
\end{cases}
\tag{59}
$$

14. 如表。

$f(x)$	$g(x)$	$\partial(f(x)+g(x))$	$\max\{\partial f(x), \partial g(x)\}$	$\min\{\partial f(x), \partial g(x)\}$
$x+1$	$-x$	0	1	1
$x+1$	x	1	1	1

15. (1) 若两边均不为 0，则两边多项式最高次项系数均为正实数，计算两边多项式次数得

$$2\partial f = \max\{2\partial g, 2\partial h\} + 1 \tag{60}$$

而显然左边为偶数，右边为奇数，矛盾。
故两边只能为 0，即

$$(\forall x \in \mathbb{R})[f(x) = g(x) = h(x) = 0] \tag{61}$$

(2) 对于复数情形，有反例：

$$\begin{cases} f(x) & = 0 \\ g(x) & = x \\ h(x) & = ix \end{cases} \tag{62}$$

16. 显然

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n} \frac{\prod_{0\le j<k}(j-x)}{k!} \\ = & \sum_{k=0}^{n} (-1)^n \left(\frac{\prod_{1\le j<k}(x-j)}{k!} - \frac{\prod_{0\le j<k-1}(x-j)}{(k-1)!}\right) \\ = & (-1)^n \frac{\prod_{1\le j<n+1}(x-j)}{n!} \end{aligned} \tag{63}$$

17. 比较两边 k 次项系数是常见的方法。而更组合的方法，则是像这样：
设集合 A、B 满足：$|A| = m, |B| = n, A \cap B = \emptyset$，则由熟知的加法原理与乘法原理，

$$\begin{aligned} & \binom{m+n}{k} \\ = & |\{C | C \subseteq (A\cup B), |C| = k\}| \\ = & \sum_{j=0}^{k} \left|\left\{C\cap A \middle| C \subseteq (A\cup B), |C\cap A| = j\right\}\right| \left|\left\{C\cap B \middle| C \subseteq (A\cup B), |C\cap B| = k-j\right\}\right| \\ = & \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j} \end{aligned} \tag{64}$$

18.

$$\partial f(x) \le \max\{\partial q(x)g(x), \partial r(x)\} = \partial q(x) + \partial g(x) \le \max\{\partial f(x), \partial r(x)\} = \partial f(x) \tag{65}$$

故 $\partial q(x)=\partial f(x)-\partial g(x)$

19. 首先 $f_1\neq 0$，而 $f_1(x)|g_1(x)$，故 $g_1(x)\neq 0$

$$g_1(x)g_2(x)|f_1(x)f_2(x)|f_2(x)g_1(x) \tag{66}$$

即

$$(\exists q(x)\in\mathbb{Z}[x])[g_1(x)(g_2(x)q(x)-f_2(x))=0] \tag{67}$$

于是

$$(\exists q(x)\in\mathbb{Z}[x])[g_2(x)q(x)-f_2(x)=0] \tag{68}$$

即

$$g_2(x)|f_2(x) \tag{69}$$

20. 设

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k \tag{70}$$

则

$$f(g_1(x))-f(g_2(x))=(\sum_{k=0}^{n}a_k\sum_{j=0}^{k-1}((g_1(x))^j(g_2(x))^{k-1-j}))(g_1(x)-g_2(x)) \tag{71}$$

故 $g_1(x)-g_2(x)|f(g_1(x))-f(g_2(x))$

21. (1) 比较等式两边系数，有

$$\begin{cases} a & =1 \\ am+b & =0 \\ b-a & =p \\ -b & =q \end{cases} \tag{72}$$

整理得

$$m=-b=q=-p-1,a=1 \tag{73}$$

(2)

$$\begin{cases} a & =1 \\ am+b & =0 \\ a+bm+c & =p \\ cm+b & =0 \\ c=q \end{cases} \tag{74}$$

整理得

$$a=1,m=0,b=0,c=q=p-1 \tag{75}$$

或

$$a=1,c=1,q=1,m=-b\neq 0,p=2-b^2 \tag{76}$$

22. (1) $2x^5-5x^3-8x=(2x^4-6x^3+13x^2-39x+109)(x+3)-327$

(2) $x^3-x^2-x=(x^2-2i+3-2i)(x-1+2i)-(1+8i)$

(3) $x^4+x^3+2x^2+x-2=(x^2-2x+7)(x^2+3x+1)-18x-9$

23. (1)、

$$\begin{aligned}&x^5\\ =&(x-1+1)^5\\ =&\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(x-1)^k\\ =&(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)+1\end{aligned} \tag{77}$$

(2)、$x^4-2x^2+3=(x-2)^4+8(x-2)^3+22(x-2)^2+24(x-2)+11$

(3)、$x^4+2ix^3-(1+i)x^2-3x+7+i=(x+i)^4-2i(x+i)^3-(1+i)(x+i)^2-5(x+i)+9+7i$

注：实际上这就是泰勒公式。

24. 显然由第 20 题结论及整除定义有

$$(\exists A(x),B(x)\in\mathbb{Z}[x])[\sum_{k=0}^{n-1}f_k(x^n)x^i=A(x)(f(x^n)-a)+\sum_{k=0}^{n-1}f_k(a)x^i=B(x)(f(x^n)-a)] \tag{78}$$

于是

$$(\exists A(x),B(x)\in\mathbb{Z}[x])[\sum_{k=0}^{n-1}f_k(a)x^i=(A(x)-B(x))(x^n-a)] \tag{79}$$

即

$$\sum_{k=0}^{n-1}f_k(a)x^i|x^n-a \tag{80}$$

但是

$$\partial(\sum_{k=0}^{n-1}f_k(a)x^i)=n-1<n=\partial(x^n-a) \tag{81}$$

于是

$$(\forall k\in(\mathbb{Z}\cap[0,n-1]))[f_k(a)=0] \tag{82}$$

由零点-因子定理知

$$(\forall k\in(\mathbb{Z}\cap[0,n-1]))[x-a|f_k(x)] \tag{83}$$

25. (1)、

$$\begin{aligned}
x^4+x^3-2x^2-4x-1&=x(x^3+x^2x-1)-x^2-3x-1\\
x^3+x^2-x-1&=(-x+2)(-x^2-3x-1)+4x+1\\
-x^2-3x-1&=(-\frac{1}{4}x-\frac{11}{16})(4x+1)-\frac{5}{16}\\
(-\frac{1}{4}x-\frac{11}{16})&=(\frac{4}{5}x+\frac{11}{5})(-\frac{5}{16})+0
\end{aligned}\tag{84}$$

故

$$(x^4+x^3-2x^2-4x-1,x^3+x^2-x-1)=1\tag{85}$$

(2)、

$$\begin{aligned}
x^3-3x+1&=(\frac{1}{3}x+\frac{13}{3})(3x^2-13x+4)+3x^2-13x+4\\
3x^2-13x+4&=(\frac{3}{52}x-\frac{627}{2604})(52x-\frac{49}{3})+\frac{175}{2604}\\
52x-\frac{49}{3}&=(\frac{1563024}{175}x-\frac{21228}{75})\cdot\frac{175}{2604}+0
\end{aligned}\tag{86}$$

故

$$(x^3-3x+1,3x^2-13x+4)=1\tag{87}$$

(3)、

$$x^4-10x^2+1=x^4-4\sqrt{2}x^3+6x^2+4\sqrt{2}+1+(4\sqrt{2}x^3-16x^2-4\sqrt{2}x)\tag{88}$$

$$x^4-4\sqrt{2}x^3+6x^2+4\sqrt{2}x+1=(\frac{\sqrt{2}}{8}x-\frac{1}{2})(4\sqrt{2}x^3-16x^2-4\sqrt{2}x)-x^2+2\sqrt{2}x+1\tag{89}$$

$$4\sqrt{2}x^3-16x^2-4\sqrt{2}x=(-4\sqrt{2}x)(-x^2+2\sqrt{2}x+1)+0\tag{90}$$

(91)

故

$$(x^4-10x^2+1,x^4-4\sqrt{2}x^3+6x^2+4\sqrt{2}+1)=-x^2+2\sqrt{2}x+1\tag{92}$$

26. (1)、

$$\begin{aligned}
x^4+2x^3-x^2-4x-2&=x^4+x^3-x^2-2x-2+x^3-2x\\
x^4+x^3-x^2-2x-2&=(x+1)(x^3-2x)+(x^2-2)\\
x^3-2x&=(x^2-2)(x)
\end{aligned}\tag{93}$$

故

$$(x^4+2x^3-x^2-4x-2,x^4+x^3-x^2-2x-2)=x^2-2\tag{94}$$

于是

$$
\begin{aligned}
&x^2-2\\
=&x^4+x^3-x^2-2x-2-(x+1)((x^4+2x^3-x^2-4x-2)-(x^4+x^3-x^2-2x-2))\\
=&(x+2)(x^4+x^3-x^2-2x-2)-(x+1)(x^4+x^3-x^2-2x-2)
\end{aligned}
\tag{95}
$$

(2)、

$$
\begin{aligned}
4x^4-2x^3-16x^2+5x+9&=(2x)(2x^3-x^2-5x+4)-6x^2-3x+9\\
2x^3-x^2-5x+4&=(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3})(-6x^3-3x+9)-x+1\\
-6x^2-3x+9&=(-x+1)(-6x+9)
\end{aligned}
\tag{96}
$$

故

$$(4x^4-2x^3-16x^2+5x+9,2x^3-x^2-5x+4)=x-1 \tag{97}$$

于是

$$
\begin{aligned}
&x-1\\
=&(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3})((4x^4-2x^3-16x^2+5x+9)-2x(2x^3-x^2-5x+4))-2x^3-x^2-5x+4\\
=&(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3})(4x^4-2x^3-16x^2+5x+9)+(\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1)(2x^3-x^2-5x+4)
\end{aligned}
\tag{98}
$$

(3)、

$$
\begin{aligned}
x^4-x^3-4x^2+4x+1&=(x^2-3)(x^2-x-1)+x-2\\
x^2-x-x&=(x+1)(x-2)+1
\end{aligned}
\tag{99}
$$

故

$$(x^4-x^3-4x^2+4x+1,x^2-x-1)=1 \tag{100}$$

于是

$$
\begin{aligned}
1&=(x^2-x-1)-(x+1)((x^4-x^3-4x^2+4x+1)-(x^2-3)(x^2-x-1))\\
&=-(x+1)(x^4-x^3-4x^2+4x+1)+(x^3+x^2-3x-2)(x^2-x-1)
\end{aligned}
\tag{101}
$$

27. 设

$$
\begin{cases}
x^3+(1+t)x^2+2x+2u & =x^3+tx+u+(1+t)x^2+(2-t)x+u\\
x^3+tx+u & =(ax+b)((1+t)x^2+(2-t)x+u)
\end{cases}
\tag{102}
$$

比较系数得：

$$\begin{cases} 1 &= a(1+t) \\ 0 &= a(2-t)+(1+t) \\ t &= au+b(2-t) \\ u &= bu \end{cases} \tag{103}$$

解得

$$\begin{cases} t_1 &= \frac{-1-\sqrt{11}i}{2} \\ u_1 &= 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t_2 &= \frac{-1+\sqrt{11}i}{2} \\ u_2 &= 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t_3 &= \frac{-1-\sqrt{11}i}{2} \\ u_3 &= -7+\sqrt{11}i \end{cases} \quad \begin{cases} t_4 &= \frac{-1+\sqrt{11}i}{2} \\ u_4 &= -7-\sqrt{11}i \end{cases} \tag{104}$$

28. 显然

$$(f(x),g(x))|u(x)f(x)+v(x)g(x)|d(x)|(f(x),g(x)) \tag{105}$$

即

$$d(x)=(f(x),g(x)) \tag{106}$$

29. 令 $f(x)=f_1(x)(f(x),g(x))$， $g(x)=g_1(x)(f(x),g(x))$， 则 $(f_1(x),g_1(x))=1$，自然

$$(f(x)h(x),g(x)h(x))=(f(x),g(x))(f_1(x),g_1(x))h(x)=(f(x),g(x))h(x) \tag{107}$$

30. 显然

$$(f(x),g(x))(u(x),v(x))|u(x)f(x)+v(x)g(x)|(f(x),g(x))|(f(x),g(x))(u(x),v(x)) \tag{108}$$

故

$$(f(x),g(x))(u(x),v(x))=(f(x),g(x)) \tag{109}$$

此时唯有

$$(u(x),v(x))=1 \tag{110}$$

31. 由定理 0.6.4 显然.

32.

$$1|(\prod_{k=1}^{m}f_k(x),\prod_{k=1}^{n}g_k(x))|\prod_{k=1}^{m}(f_k(x),\prod_{k=1}^{n}g_k(x))|\prod_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{n}(f_j(x),g_k(x))|1 \tag{111}$$

故

$$(\prod_{k=1}^{m}f_k(x),\prod_{k=1}^{n}g_k(x))=1 \tag{112}$$

33.

$$1|(f(x)+g(x),f(x)g(x))|(f(x)+g(x),f(x))(f(x)+g(x),g(x))|(f(x),g(x))^2=1 \tag{113}$$

故

$$(f(x)+g(x),f(x)g(x))=1 \tag{114}$$

34. 显然

$$f(x)|g(x)f(x) \tag{115}$$

于是

$$f(x)|f(x)g(x)|f(x) \tag{116}$$

故有常数 c 使

$$f(x)g(x)=cf(x) \tag{117}$$

只能有

$$g(x)=c \tag{118}$$

故

$$(f(x),g(x))=1 \tag{119}$$

35. 显然

$$f(x)|\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))},g(x)|\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))} \tag{120}$$

于是

$$\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}|f(x)g(x)|\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))} \tag{121}$$

故有常数 c 使

$$\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}=cf(x)g(x) \tag{122}$$

只能有

$$(f(x),g(x))=1 \tag{123}$$

36. 不妨设 $\partial f(x)\geq\partial g(x)$（如果不是，则令 $f(x)$、$g(x)$ 互换），对 $f(x)$、$g(x)$ 作辗转相除：令 $r_1(x)=f(x)$，$r_2(x)=g(x)$，

$$(\forall n\in(\mathbb{Z}\cap(0,+\infty)))[r_n=q_nr_{n+1}+r_{n+2},\partial r_{n+2}(x)<r_{n+1}(x)] \tag{124}$$

而设 s 满足

$$s\in(\mathbb{Z}\cap(0,+\infty)),r_s(x)=0,r_{s-1}(x)\neq 0 \tag{125}$$

则 $r_{s-1}(x)=(f(x),g(x))=1$，
再设

$$(\forall n\in(\mathbb{Z}\cap(0,+\infty)))[Q_n(x)=q_n(x^m),R_n(x)=r_n(x^m)] \tag{126}$$

则

$$(f(x^m),g(x^m))=R_{s-1}(x)=r_{s-1}(x^m)=1 \tag{127}$$

37.

$$\begin{aligned}(f(x),g(x))&=(\frac{ad-bc}{d}f(x),cf(x)+dg(x))\\&=(af(x)+bg(x),cf(x)+dg(x))=(f_1(x),g_1(x))\end{aligned} \tag{128}$$

38. 不妨设 f、g 均为首一多项式。对 $f(x)$、$g(x)$ 作辗转相除：令 $r_1(x)=f(x)$，$r_2(x)=g(x)$，

$$(\forall n\in((0,+\infty)\cap\mathbb{Z})[r_n(x)=q_n(x)r_{n+1}(x)+r_{n+2}(x)]\wedge[\partial r_{n+2}(x)<\partial r_{n+1}(x)] \tag{129}$$

则

$$(\exists! s\in(\mathbb{Z}\cap(0,+\infty)))[r_s(x)=0]\wedge[r_{s-1}(x)\neq 0] \tag{130}$$

于是

$$(f(x),g(x))=r_{s-1}(x) \tag{131}$$

令 $u_{s-2}(x)=0$，$v_{s-2}(x)=1$；

$$(\forall n\in((0,s-2)\cap\mathbb{Z}))\left[\begin{cases}u_n(x)&=v_{n+1}(x)\\ v_n(x)&=u_{n+1}(x)-q_{n+1}(x)v_{n+1}(x)\end{cases}\right] \tag{132}$$

我们有

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x)) \tag{133}$$

由 18，我们有

$$\partial u(x)<\partial\frac{g(x)}{(f(x),g(x))},\partial v(x)<\partial\frac{f(x)}{(f(x),g(x))} \tag{134}$$

39. 显然

$$\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))^2}\Big|\Big[\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\Big]\Big|\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))^2} \tag{135}$$

故

$$[f(x),g(x)]=\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))} \tag{136}$$

40. 由 *Bézout* 定理

$$p(x)f(x)+q(x)g(x)=1 \tag{137}$$

作辗转相除：

$$p(x)u(x)g(x)+q(x)v(x)f(x)=Q(x)f(x)g(x)+A(x) \tag{138}$$

显然此 $A(x)$ 即为所求。

41.

$$
\begin{aligned}
&(\Phi(x),\Psi(x))\\
=&((x^3-1)f(x)+(x^3-x^2+x-1)g(x),(x^2-1)f(x)+(x^2-x)g(x))\\
=&((x-1)f(x)+(x-1)g(x),(x^2-1)f(x)+(x^2-x)g(x))\\
=&((x-1)f(x)+(x-1)g(x),(x-1)f(x))\\
=&((x-1)f(x),(x-1)g(x))\\
=&(x-1)(f(x),g(x))\\
=&x-1
\end{aligned}
\tag{139}
$$

42. 设 $p(x)=u(x)v(x)$。1) 若 $p(x)$ 在 $\mathbb{P}$ 上不可约，此时 $\{u(x),v(x)\}=\{f(x),1\}$,$\{d(x):d(x)|p(x)\}=\{1,p(x)\}$

$$(p(x),f(x))|p(x) \tag{140}$$

于是唯有

$$(p(x),f(x))\in\{p(x),1\} \tag{141}$$

2) 反之，若 $\{(f(x),p(x))|f(x)\in\mathbb{P}[x]\}=\{1,p(x)\}$，若

$$d(x)|p(x) \tag{142}$$

则

$$d(x)=(d(x),p(x))\in\{(f(x),p(x))|f(x)\in\mathbb{P}[x]\}=\{1,p(x)\} \tag{143}$$

于是 $p(x)$ 在 $\mathbb{P}$ 上不可约。

67. 由引理 0.8.3，我们设 $f(x)$ 可以在 $\mathbb{Z}[x]$ 上写成两个整多项式的乘积：

$$f(x)=p(x)q(x) \tag{144}$$

则

$$(\forall i\in((0,n+1)\cap\mathbb{Z}))[f(a_i)=p(a_i)q(a_i)=-1] \tag{145}$$

于是

$$(\forall i\in((0,n+1)\cap\mathbb{Z}))[p(a_i)+q(a_i)=0] \tag{146}$$

于是 $\partial(p(x)+q(x))\geq n$
于是 $\{p(x),q(x)\}=\{1,f(x)\}$
即 f 不可约。

第一章　矩阵代数

习题

1. 计算:

$$(1)\begin{bmatrix}3&-2\\5&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&4\\2&5\end{bmatrix};\quad(2)\begin{bmatrix}1&-3&2\\3&-4&1\\2&-5&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&5&6\\1&2&5\\1&3&2\end{bmatrix};$$

$$(3)\begin{bmatrix}1&5&-3&2\\-1&4&-2&6\\3&8&7&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&7\\0&2&6\\1&3&-2\\-1&5&3\end{bmatrix};\quad(4)\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}^n;$$

$$(5)\begin{bmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{bmatrix}^n;\quad(6)\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}^n$$

2. 用初等变换求下列矩阵的逆:

$$(1)\begin{bmatrix}2&5&7\\6&3&4\\5&-2&-3\end{bmatrix}\quad(2)\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&2\\1&1&1&-1\\1&0&-2&-6\end{bmatrix}$$

$$(3)\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

3. 解方程:

$$(1)\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}3&5\\5&9\end{bmatrix};$$

$$(2)\begin{bmatrix}1&2&-3\\3&2&-4\\2&-1&0\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}1&-3&6\\10&2&7\\10&7&8\end{bmatrix}.$$

4. 如果 $AB=BA$, 就称矩阵 B 与 A 可交换. 令

$$(1)\ A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix};\quad (2)\ A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix};\quad (3)\ A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\3&1&2\end{bmatrix}.$$

求所有与 A 可交换的矩阵.

5. 利用分块矩阵计算.AB.

$$(1)A=\begin{bmatrix}1&2&0&0&0&0\\2&1&0&0&0&0\\0&0&2&1&0&0\\0&0&1&3&0&0\\0&0&0&0&3&2\\0&0&0&0&2&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\3\\2\\1\end{bmatrix};$$

$$(2)A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&3&2\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{bmatrix}.$$

6. 令 $A=D_{a_k,k}$,(参见 1.1.1 小节)$a_i\neq a_j,i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j$. 证明: 与 A 可交换的矩阵只能是对角矩阵.

7. 令 $A=\begin{bmatrix}a_1E_{n1}&0&\cdots&0\\0&a_2E_{n2}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_rE_{nr}\end{bmatrix}$, 其中 $a_i\neq a_j,o,j=1,2,\cdots,r,i\neq j,1\leq n_i\leq n,\Sigma_{i=1}^{r}n_i=n$. 证明: 与 A 可交换的矩阵只能为准对角矩阵

$$\begin{bmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_r\end{bmatrix}$$

其中 A_i 为 n_i 阶方阵,$i=1,2,\cdots,r$.

8. 令 $A=\frac{1}{2}(B+E)$. 证明: 当且仅当 $B^2=E$ 时,$A^2=A$.

9. 令 A 为实对称矩阵 (参见 1.1.3 小节). 证明:$A^2=O$ 当且仅当 $A=O$.

10. 令 A,B 都是 n 阶对称矩阵. 证明:AB 对称当且仅当 A 与 B 可交换.

11. 令 $A\in R^{n\times n}$. 证明: 若对于某一正整数 k 有 $A^k=O$, 则

$$(E=A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}.$$

12. 称 $A\in R^{n\times n}$(R 为实数域) 为 n 阶正交矩阵, 如果 $A^{-1}=A'$. 列如,

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

分别为二阶, 三阶正交矩阵. 证明: 下列三个命题等价:
(1)$A=(a_{ij}\in R^{n\times n})$ 为一正交矩阵;
(2)$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}=\delta_{ij},i,j=1,2,\cdots,n$;
(3)$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj}=\delta_{ij},i,j=1,2,\cdots,n$;
(其中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

称 δ_{ij} 为 Kroneker 函数).

13. 已经 $X=\begin{bmatrix}O & A\\ C & O\end{bmatrix}$, A,C 为 n 阶可逆矩阵, 求 X^{-1}.

14. 称 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是反对称的, 如果 $a_{ij}=-a_{ji},i,j=1,2,\cdots,n$. 证明: 任意方阵都可以表示为一对称矩阵与一反对称矩阵之和.

15. 令 $A\in P^{n\times n}$. 证明: 若对于任意 $X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\in P^{n\times 1}$, $AX=O$, 则 $A=O$.

16. 令 A,D 分别为 m,n 阶可逆矩阵. 证明: 分块矩阵 $H=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$ 可逆的充要条件是 $A-BD^{-1}C$ 或 $D-CA^{-1}B$ 可逆.

17. 令 S 是一些 n 阶方阵组成的集合, 对任意 $A, B \in S, AB \in S$, 且 $(AB)^3 = BA$, 证明:

$$\forall A, B \in S, \quad AB = BA.$$

18. 令 A, B, X_n 都是三阶方阵, 且 $X_{n+1} = AX_n + B, n = 0, 1, \cdots$. 当

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

时, 求 X_n.

19. 证明: 不存在 n 阶方阵,A, B 满足 $AB - BA = E$.

20. 令 A 为 n 阶方阵.A 的主对角线上的元素的和称为 A 的迹, 并记为 $\mathrm{tr}(A)$. 证明: 若对于任意 n 阶方阵 X, 都有 $\mathrm{tr}(A)$=0, 则 $A = O$.

21. 称 A 为对合矩阵, 如果 $A^2 = E$. 令 A, B 都是对合矩阵. 证明:AB 是对合矩阵的充分必要条件是 $AB = BA$.

22. 称 A 为幂等矩阵, 如果 $A^2 = A$. 令 A, B 都是对合矩阵. 证明:AB 是幂等矩阵的充分必要条件是 $AB = BA = O$.

23. 令 A 为 n 阶方阵,$A^3 = 2E, B = A^2 - 2A - E$. 求 B^{-1}.

24. 令 A, B 都是 n 阶方阵,$A + B, A - B$ 都可逆,$D = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$, 求 D^{-1}.

25. 令 $f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m, m \geq 1, a_0 \leq 0$. 证明:

(1) 若 A 不可逆, 且 $a_m \leq 0$, 则 $f(A) \leq O$;

(2) 若 A 可逆, 且 $f(A) = O$, 则当 $a_m = 0$ 时, 存在一个 $m-1$ 次多项式 $g(x)$, 使得 $g(A) = O$; 当 $a_m \leq 0$ 时,A 的逆家族 A^{-1} 可表示成 A 的多项式, 且次数是 $m - 1$.

26. 令

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_s \end{bmatrix}, \quad 其中 A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}), i = 1, 2, \cdots, s.$$

证明:$A'A = \sum_{i=1}^{s} A_i'A_i$.

27. 用分块矩阵的方法求下列矩阵的逆矩阵:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.

28. 证明: 任意 n 阶方阵可表示为一个数量矩阵 (数与单位机组的数乘) 与迹为零矩阵的和.

29. 令 A,B 为 n 阶实对称矩阵,C 为 n 实反对称矩阵, 且 $A^2+B^2=C^2$. 证明:

$$A=B=C=O.$$

30. 令 A,BA 为同阶方阵, 且 $A,B,A+B$ 均可逆, 证明:$A^{-1}+B^{-1}$ 可逆, 并求其逆.

31. 令 A,B 为 n 阶方阵, 且 $A+B=AB$. 证明:$AB=BA$.

解答

1. 令 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,$B=(b_{kj})_{n\times p}$. 我们定义 A 与 B 的乘积为 $m\times p$ 阶矩阵 $C=(c_{ij})$, 其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\quad i=1.2.\cdots.m, j=1.2.\cdots.p.$$

记为 $A\times B=C$ 或 $AB=C$(左行乘右列).

(1) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 1 & 9 & -7 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} -4 & 11 & 49 \\ 3 & 32 & 39 \\ 5 & 62 & 70 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{bmatrix}$

2. (1)

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3(-1)} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & -4 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1+2(1)+3(1)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -3 & -4 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\{3-1(5)\}]{[2+1(1)+3(1)]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -5 & 5 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[3+2(2)]{2(-1)+3(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & 12 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -27 & 29 & -24 \end{bmatrix} \xrightarrow[3(-1)]{2+3(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -38 & 41 & -34 \\ 0 & 0 & 1 & 27 & -29 & 24 \end{bmatrix} \xrightarrow[2+3(1)]{3(-1)}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}.$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

(3)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

(不难发现，此逆中 $\bar{a_{ij}} = \frac{1}{4}a_{ij}$. 可以适当记住此矩阵).

3.

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \Longrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

若 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, 则 $\mathbf{A}^{-1} = |A|^{-1}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

(1)$\mathbf{X} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(2)$\begin{bmatrix} 6 & 4 & -19 \\ 2 & 1 & -46 \\ 3 & 3 & -39 \end{bmatrix}$.

4. 欲得 $AB = BA$, 已知 A，不妨设 B 为同阶矩阵，根据矩阵的乘法，又若矩阵 $A = B$，则 $a_{ij} = b_{ij}$

(1) 设 B 为 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{bmatrix} = AB$$

$$\text{即：}\begin{cases} a+c &= a \\ b+d &= a+b \\ c &= c \\ d &= c+d \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c &= 0 \\ a &= d \end{cases}$$

$$\text{故：B}=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}(\forall a\text{、}b\in \boldsymbol{R})$$

5.

$$\left[\begin{array}{cc:cc:cc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \hdashline 1 \\ 3 \\ \hdashline 2 \\ 1 \end{array}\right]$$

$$AB=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \\ 10 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

6. 同第四题，设出矩阵分析即可。

$$\text{不妨设：}B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}(b_{ij}\neq 0, if i\neq j)$$

$$
\begin{aligned}
&AB = BA\\
\Longrightarrow &\begin{bmatrix} a_1b_{11} & a_1b_{12} & \cdots & a_1b_{1n} \\ a_2b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_2b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_nb_{n1} & a_nb_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_{11} & a_2b_{12} & \cdots & a_nb_{1n} \\ a_1b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_nb_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1b_{n1} & a_2b_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{bmatrix}\\
\Longrightarrow &a_ib_{ij} = a_jb_{ij}(i \neq j)\\
\Longrightarrow &a_i = a_j(i \neq j)
\end{aligned}
$$

.

矛盾, 故 $b_{ij} = 0(i \neq j)$

7. 同上题。

8. 必要性:

$$A = \frac{1}{2}(B+E) \Rightarrow B = (2A-E) \Rightarrow B^2 = (2A-E)^2 = E.$$

充分性:

$$B = (2A-E) \Rightarrow 4A^2 - 4A + E = E \Rightarrow A^2 = A.$$

9. 必要性:
由于 A 为实对称矩阵, 设 $A^2 = (b_{ij})_{n\times n}$
则: $b_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij}a_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{ij}^2 \geqslant 0(\text{if} \quad a_{ij} = 0, a_{ij}^2 = 0) \Longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{O}$
充分性:
显然

10. 充分性:

$$(AB)^T = AB = B^TA^T = BA$$

必要性:

$$(AB)^T = B^TA^T = BA = AB$$

11. 由 $(E-A)(E+A+A^2+A^3+\cdots+A^{k-1}) = E$ 即得.

12. $\delta_{ij}=\begin{cases} 1 & if \quad i=j \\ 0 & if \quad i\neq j \end{cases}$

欲证此三款命题等价，只需证 (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (1)

(1) $\Longrightarrow$ (2)

由于 $A^{-1}=A^T$，即：$AA^T=(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk})_{n\times n}=E\Longrightarrow\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}=\delta_{ij}$

(2) $\Longrightarrow$ (3)

$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}=\delta_{ij}\Longrightarrow AA^T=E\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow A^TA=E\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{k_j}=\delta_{ij}.$

(3) $\Longrightarrow$ (1)

上已证。

13.

$$X^{-1}=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix} AA_3 & AA_4 \\ CA_1 & CA_2 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow A_3=A^{-1} \quad A_2=C^{-1} \quad A_4=A_1=O$$

14. 令 $\begin{cases} a_{ij} & = & b_{ij}+c_{ij} \\ a_{ji} & = & b_{ji}+c_{ji} \end{cases}$

当 $b_{ij}=b_{ji}$,$c_{ij}=-c_{ji}$ 时，上述方程有解.

故命题成立.

15. 取 $X=e_i=(\delta_{i1},\delta_{i2},,\cdots,\delta_{in})$,$(i=1、2、3、\cdots、n)$（克罗内克符号）

则由 $AX=O$ 可知：$a_{ki}=0(k=1、2、3、\cdots、n)$

即：$A=O$

16. 由 A、D 可知：

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} A-BD^{-1}C & 0 \\ C & D \end{bmatrix}(\begin{bmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}) \\ &\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} A-BD^{-1}C & 0 \\ O & D \end{bmatrix}(\begin{bmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}) \\ &\Longleftrightarrow A-BD^{-1}C(D-CA^{-1}B)reversible.\end{aligned}$$

17. $\forall\ A、B\in S, AB\in S$，且 $(AB)^3=BA$，有：

$$(AB)^9 = (BA)^3 = (AB)$$
$$(AB)^9 = ((ABAB)(AB))^3 = (ABABAB) = BA$$

故：$AB = BA$

18. 我们从表达式可看到，A 实际上是对 X_n 做了三次初等行变换，(1-3，3-2 ，2-1)，这其实是一个 3-轮换，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，可知其以三为周期，且迭代三次之后矩阵 X_n 整体每个元素加一。因此有：

$$X_n = \begin{cases} \begin{bmatrix} k & k & k \\ k & k & k \\ k & k & k \end{bmatrix} & \text{n=3k} \\ \begin{bmatrix} k+1 & k & k \\ k & k+1 & k \\ k & k & k+1 \end{bmatrix} & \text{n=3k+1} \\ \begin{bmatrix} k+1 & k+1 & k \\ k & k+1 & k+1 \\ k+1 & k & k+1 \end{bmatrix} & \text{n=3k+2} \end{cases}$$

19. 若存在，则有

$$(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{ji}) = c_{ii} = 1 \qquad i = 1 \cdot 2 \cdots n$$

故

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}b_{ji} - b_{ij}a_{ji}) = n$$

但是：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}b_{ji} - b_{ij}a_{ji}) = 0$$

矛盾。因此不存在这样的 A、B。

20. 设：$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$ 则：

AX 的对角元素为 $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_{ki}(i = 1、2、3、\cdots、n.)$

欲证 $A = O$, 只需证 $a_{ij} = 0$, 因此不妨令 X_{ij} 为 x_{ij} 为 1，其余元素为 0 的矩阵.

这样由 $\forall X$,$tr(AX) = 0$ 可知：$a_{ji} = 0(i、j = 1、2、3、\cdots、n.)$, 即 $A = O$.

21. 充分性:
$ABAB = AABB = E$
必要性:
$AB = BA$
$\Longrightarrow ABA = BAA = B$
$\Longrightarrow ABAB = BB = E.$

22. 充分性:
$(A+B)^2 = AA + AB + BA + BB = AA + BB = A + B$
必要性:
$(A+B)^2 = A + B = AA + BB + AB + BA$
$\Longrightarrow AB + BA = O$
$\Longrightarrow ABA + BAA = O, AAB + ABA = O$
$\Longrightarrow BA = AB = O$

23. 由: $A^3 = 2E$
$\Longrightarrow A^3 - E = E$
$\Longrightarrow (A-E)(A^2 + A + E) = E$
$\Longrightarrow B^{-1} = ((A-E)^2)^{-1}$
$\Longrightarrow B^{-1} = (A^2 + A + E)^2 = 3A^2 + 4A + 5E$

24. 设: $D^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$
则有:

$$\begin{cases} AA_1 + BA_3 = 1 \\ AA_2 + BA_4 = 0 \\ BA_1 + AA_3 = 0 \\ BA_2 + AA_4 = 1 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$

$$A_1 = A_4 = \frac{(A-B)^{-1} + (A+B)^{-1}}{2}, A_2 = A_3 = \frac{(A+B)^{-1} - (A-B)^{-1}}{2}$$

25. (1) 若 $f(A) = O$, 则有:

$$(-\frac{a_0}{a_m}A^{m-1} - \cdots - \frac{a_{m-1}}{a_m})A = E$$

即 A 可逆, 矛盾。
(2) 当 $a_m = 0$ 时, 显然有 $a_0A^{m-1} + a_1A^{m-2} + \cdots + a_{m-1}E = O$, 因此存在一个次数为 m-1 的
多项式 $g(x)$ 使得 $g(A) = O$
. 当 $a_m \neq 0$ 时, 同 (1) 即可

26.

$$A' = [A'_1.A'_2.\cdots.A'_n]$$

故：

$$A'A = \sum_{i=1}^{n} A'_i A_i$$

27.

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} O_{(n-1)\times 1} & A_{(n-1)\times(n-1)} \\ A_{1\times 1} & O_{1\times(n-1)} \end{pmatrix} \\
B &= \begin{pmatrix} B_{1\times(n-1)} & B_{1\times 1} \\ B_{(n-1)\times(n-1)} & B_{(n-1)\times 1} \end{pmatrix} \\
AB &= \begin{pmatrix} A_{(n-1)\times(n-1)}B_{(n-1)\times(n-1)} & A_{(n-1)\times(n-1)}B_{(n-1)\times 1} \\ A_{1\times 1}B_{1\times(n-1)} & A_{1\times 1}B_{1\times 1} \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \\
B_{1\times(n-1)} &= O_{1\times(n-1)} \\
B_{1\times 1} &= \frac{1}{a_{11}} \\
B_{(n-1)\times(n-1)} &= A^{-1}_{(n-1)\times(n-1)} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{i=2}^{n} a_{ii} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii} \end{pmatrix} \\
B_{(n-1)\times 1} &= O_{(n-1)\times 1}
\end{aligned}$$

28. 只需要考虑对角线上的元素即可。
不妨设数量矩阵对角元素为 k, 迹为零的矩阵的对角元素为 $b_i(i = 1、2、3、\cdots、n.)$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc}
b_1 & + & b_2 & + & b_3 & + & \cdots & + & b_n & & & = & 0 \\
b_1 & + & & & & & & & & + & k & = & a_{11} \\
& & b_2 & + & & & & & & + & k & = & a_{22} \\
& & & & b_3 & + & & & & + & k & = & a_{33} \\
& & & & & \vdots & & & & & & & \\
& & & & & & & & b_n & + & k & = & a_{nn}
\end{array}\right.$$

即：$\bar{H}\bar{b} = \bar{a}$

其中:

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\bar{b} = (b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n, k)^T \bar{a} = (0, a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn})^T$ $\bar{H}$ 显然可逆（只需将第一行加到下面的 n-1 行即可），故方程组有唯一解。

29.

$$A^2 = A * A', B^2 = B * B'$$
$$\Rightarrow a_{ii}^* = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \geq 0, b_{ii}^* = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \geq 0$$
$$C = -C'$$
$$c_{ii} = 0, c_{ii}^* \leq 0$$
$$C^2 = A^2 + B^2$$
$$\Rightarrow a_{ij} = b_{ij} = c_{ij} = 0$$

30. 由于 $A(A^{-1} + B^{-1})B = B + A$
$\Longrightarrow (A^{-1} + B^{-1})(B(B + A)^{-1}A) = E$
故 $A^{-1} + B^{-1}$ 可逆。

31. 欲证：$AB = BA$
即证 $A + B = BA$
$\Leftrightarrow BA - A - B + E = E$
$\Leftrightarrow (B - E)(A - E) = E$
$\Leftrightarrow (A - E)(B - E) = E$
$\Leftrightarrow AB = A + B$
显然

第二章　一类特殊线性方程组的行列式法则 (Cramer 法则)

习题

1. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ a+c & b & 1 \end{vmatrix}$,　　(2) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix}$, 其中 ε 为 $x^3-1=0$ 的任意一个根;

(4) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$　(5) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ 1 & 5 & 9 & 13 \end{vmatrix}$　(7) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

(8) $\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{(b+c)}{2} & \frac{(a+c)}{2} & \frac{(a+b)}{2} & 1 \end{vmatrix}$

(9) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$

(10) $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}$; (提示: 分 $n=1, n=2$ 和 $n \geq 3$ 三种情况.)

(11) $\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

(12) $\begin{vmatrix} \frac{1-a_1^n b_1^n}{1-a_1 b_1} & \frac{1-a_1^n b_2^n}{1-a_1 b_2} & \cdots & \frac{1-a_1^n b_n^n}{1-a_1 b_n} \\ \frac{1-a_2^n b_1^n}{1-a_2 b_1} & \frac{1-a_2^n b_2^n}{1-a_2 b_2} & \cdots & \frac{1-a_2^n b_1^n}{1-a_2 b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1-a_n^n b_1^n}{1-a_n b_1} & \frac{1-a_n^n b_2^n}{1-a_n b_2} & \cdots & \frac{1-a_n^n b_n^n}{1-a_n b_n} \end{vmatrix}$;

(13) $\begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a & 0 \\ a & a & a & \cdots & 0 & b \\ a & a & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & 0 & b & \cdots & b & b \\ 0 & b & b & \cdots & b & b \end{vmatrix}$;

(14) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ a & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ a & a & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 2 \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}$;

(15) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

(16) $\begin{vmatrix} 2^n-2 & 2^{n-1}-2 & \cdots & 2^3-2 & 2^2-2 \\ 3^n-3 & 3^{n-1}-3 & \cdots & 3^3-3 & 3^2-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^n-n & n^{n-1}-n & \cdots & n^3-n & n^2-n \end{vmatrix}$;

(17) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a_2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \cdots & n+a_n \end{vmatrix}$, 其中 $\prod_{i=1}^{n} a_i \neq 0$;

(18) $\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix}$;

(19) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$;

(20) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix}$;

(21) $\begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & a_1+a_3 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & a_2+a_3 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & a_n+_3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$;

(22) $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$;

(23) $\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}_{2n}$;

2. 证明:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$;

(2) 已知 204,527,255 都是 17 的倍数. 则

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

也是 17 的倍数;

(3) 若 $(a_{ij})_n$ 为正交矩阵, 则 $|a_{ij}| = \pm 1$;

(4) 若 $(a_{ij})_n$ 反对称, 则当 n 为奇数时,$|a_{ij}| = 0$;

(5) 若 $i+j \geq n+1$ 时,$a_{ij} = -1, i+j < n+1$ 时,$a_{ij} = 1, i, j = 1, 2, \cdots, n$, 则

$|a_{ij}| \neq 0$;

(6) 可逆的上 (下) 三角矩阵的逆矩阵仍为上 (下) 三角矩阵;

(7) 若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 1 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 1 \end{vmatrix},$$

D_i 表示用 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},1$ 取代 D 的第 i 行所得的行列式, 其中 x_i 为 P 上的变量,$i=1,2,\cdots,n-1$, 则

$$D=\sum_{i=1}^{n} D_i,$$

(提示: 计算 $\sum_{i=1}^{n} D_i$, 将 D_i 依第 i 行展开.)

3. 令 n 阶方阵 A 的所有元素仅为 1 或-1. 证明:$2^{n-1} \mid |A|$.

4. 令 n 阶行列式 D 的所有元素仅为 1,-1 或 0. 证明: 当 $n \geq 3$ 时,

$$D \leq (n-1)!(n-1).$$

5. 证明:n 为奇数时, 下列行列式 D 一定非零.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots & n^2 & (n+1)^2 \\ 3^3 & 4^3 & 5^3 & \cdots & (n+1)^3 & (n+1)^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n^n & (n+1)^n & (n+1)^n & \cdots & (n+1)^n & (n+1)^n \end{vmatrix}$$

6. 证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = |A| + x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij};$$

其中 $|A|=|a_{ij}|, A_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式.

7. 证明:4 阶行列式不能有对角线法计算.

8. 证明: 如果 n 阶行列式在 k 个行和 h 个列的交点处的元素都为零, 且 $k+h>n$, 则行列式为零.

9. 令 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶实方阵,$0 \leq a_{ij} \leq \delta, i,j=1,2,\cdots,n$. 证明:

$$|A| \leq \delta^n 2^{-n}(n+1)^{\frac{n+1}{2}}$$

10. 令 a_{ij} 为整数,$i,j=1.2.\cdots,n$. 证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\frac{1}{m} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\frac{1}{m} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\frac{1}{m} \end{vmatrix} \neq 0(\text{整数}m \neq 0,1-1).$$

11. 令 $A=a_{ij}$ 为 n 阶方阵 $(n \geq 2)$,A^* 为 A 的伴随矩阵. 证明:

(1)$|A^*|=|A|^{n-1}$;

(2)$\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}|A|^{n-2}$, 其中 $|A| \neq 0, A_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式.

12. Cramer 法则解下列方程组:

(1)$\begin{cases} 2x+3y+5z=10, \\ 3x+2y+4z=3, \\ x+2y+2z=3; \end{cases}$

(2)$\begin{cases} 5x+2y+3z+2=0, \\ 2x-2y+5z+2=0 \\ 3x+4y+2z+x=0; \end{cases}$

(3)$\begin{cases} 6x+5y-2z+4t+4=0, \\ 9x-y+4z-t-13=0, \\ 3x+4y+2z-2t-1=0, \\ 3x-9y+2z \qquad -14=0. \end{cases}$

13. 用 Cramer 法则解引言中的习题 7 和习题 8.

解答

1. (1):$\begin{vmatrix} \text{a+b} & \text{c} & 1 \\ \text{b+c} & \text{a} & 1 \\ \text{a+c} & \text{b} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{a+b+c} & \text{c} & 1 \\ \text{a+b+c} & \text{b} & 1 \\ \text{a+b+c} & \text{c} & 1 \end{vmatrix} = 0$

(2):$\begin{vmatrix} sin^2\alpha & 1 & cos^2\alpha \\ sin^2\beta & 1 & cos^2\beta \\ sin^2\gamma & 1 & cos^2\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & cos^2\alpha \\ 1 & 1 & cos^2\beta \\ 1 & 1 & cos^2\gamma \end{vmatrix} = 0$

(3): $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ \text{x} & \text{y} & \text{z} \end{vmatrix} = x(\varepsilon-\varepsilon^4)-y(1-\varepsilon^3)+z(\varepsilon^2-\varepsilon^2)=0$

(4): $\begin{vmatrix} 1 & \mathrm{a} & a^2 \\ 1 & \mathrm{b} & b^2 \\ 1 & \mathrm{c} & c^2 \end{vmatrix}$=$(c-a)(c-b)(b-a)$(Vandermonde 行列式)

(5): $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$=2*5=10

(6): $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ 1 & 5 & 9 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$=0

(7): $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} -5 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

= -5(-4+3*12-3*20-2*12+12+3*12)=20

(8): $\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{a+c}{2} & \frac{b+a}{2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c+b & a+c & b+a & 2 \\ \frac{b+c)}{2} & \frac{a+c}{2} & \frac{b+a}{2} & 1 \end{vmatrix}$=0

(9): $\begin{vmatrix} \mathrm{x} & \mathrm{y} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{x} & \mathrm{y} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{x} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{x} & \mathrm{y} \\ \mathrm{y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{x} \end{vmatrix}$

$=x \begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} y \begin{vmatrix} y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}$

$=x^n + (-1)^{n+1} y^n$

(10): 当 $n \geq 3$ 时:

$$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-a_1 & a_2-a_1 & \cdots & a_2-a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-a_1 & a_n-a_1 & \cdots & a_n-a_n \end{vmatrix} = 0$$

当 $n=2$ 时:

$$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 \end{vmatrix} = (a_1-a_2)(b_1-b_2)$$

当 $n=1$ 时:

a_1-b_1

(11): $$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = (x+(n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= (x+(n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} = (x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}$$

(12): $$|A| = \begin{vmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} a_1^k b_1^k & \sum_{k=0}^{n-1} a_1^k b_2^k & \cdots & \sum_{k=0}^{n-1} a_1^k b_n^k \\ \sum_{k=0}^{n-1} a_2^k b_1^k & \sum_{k=0}^{n-1} a_2^k b_2^k & \cdots & \sum_{k=0}^{n-1} a_2^k b_n^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=0}^{n-1} a_n^k b_1^k & \sum_{k=0}^{n-1} a_n^k b_2^k & \cdots & \sum_{k=0}^{n-1} a_n^k b_n^k \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1^{n-1} & b_2^{n-1} & \cdots & b_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$= \Pi_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)\Pi_{1\le i<j\le n}(b_i-b_j)$

(13): 若 b,a 为零, 则 $|A_n|$ 为 0.

若 b,a 相等且不为零, 则

$|A| = (-1)^{n^2+n-2}(n-1)a^n$

否则, 有:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a & b \\ a & a & a & \cdots & 0 & b \\ a & a & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & 0 & b & \cdots & b & b \\ 0 & b & b & \cdots & b & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a & -b \\ a & a & a & \cdots & 0 & 0 \\ a & a & a & \cdots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & 0 & b & \cdots & b & 0 \\ 0 & b & b & \cdots & b & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b-a & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -a & b-a & \cdots & b-aa & b \\ -a & b-a & b-a & \cdots & b-a & b \end{vmatrix} - b|A_{n-1}|$$

$$= (-1)^{\frac{n^2+n-2}{2}} a^{n-1} b - b|A_{n-1}|$$

$$= (-1)^{\frac{n^2+n-2}{2}} \Pi_{i=1}^{n} a^{n-i} b^{i}$$

$$(14)\text{: } |A| = \begin{vmatrix} 1-a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1-a & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1-a & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a & a & a & \cdots & 1-a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1-a & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-a & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & a & a & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= (1-a)^n + \begin{vmatrix} -a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & a-1 & -a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= (1-a)^n + a(-1)^{n-1}a^{n-1} = (-1)^n((a-1)^n - a^n)$$

(15): $|A_n| = 2|A_{n-1}| - |A_{n-2}|$ 故 $|A_n|$ 为等差数列 $|A_n| = (n-1)(|A_2| - |A_1|) + |A|_1 =$

$n+1$

$$(16):\ |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 2^n-2 & 2^{n-1}-2 & \cdots & 2^3-2 & 2^2-2 \\ 0 & 3^n-3 & 3^{n-1}-3 & \cdots & 3^3-3 & 3^2-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n^n-n & n^{n-1}+-n & \cdots & n^3-n & n^2-n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2^n & 2^{n-1} & \cdots & 2^3 & 2^2 \\ 3 & 3^n & 3^{n-1} & \cdots & 3^3 & 3^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & n^n & n^{n-1} & \cdots & n^3 & n^2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 2^n & 2^{n-1} & \cdots & 2^3 & 2^2 & 2 \\ 3^n & 3^{n-1} & \cdots & 3^3 & 3^2 & 3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^n & n^{n-1} & \cdots & n^3 & n^2 & n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 \\ 3^{n-1}(3-2) & 3^{n-2}(3-2) & \cdots & 3^2(3-2) & 3^1(3-2) & 3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^{n-1}(n-2) & n^{n-2}(n-2) & \cdots & n^2(n-2) & n^2(n-2) & n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2n+1+n-1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 3^{n-1}(3-2) & 3^{n-2}(3-2) & \cdots & 3^2(3-2) & 3^1(3-2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n^{n-1}(n-2) & n^{n-2}(n-2) & \cdots & n^2(n-2) & n^2(n-2) \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2n+1+n-1}(n-2)! \begin{vmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 3^{n-1} & 3^{n-2} & \cdots & 3^2 & 3^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n^{n-1} & n^{n-2} & \cdots & n^2 & n^1 \end{vmatrix}$$

$$= -2(-3)(2)\Pi_{k=3}^n(k-2)\Pi_{k=4}^n(k-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^{n-2} & n^{n-3} & \cdots & n^1 \end{vmatrix}$$

$$= -n\Pi_{k=2}^{n-1}(-k^2)\Pi_{2\le i<j\le n}(j-i)$$

$$= (-1)^{n-1}\Pi_{i=0}^n(n-i)!$$

$$(17):\ |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 2+a_2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & n & n & \cdots & n+a_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= (1+\textstyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})\Pi_{j=1}^{n}a_j$$

$$(18):|A_n| = \begin{vmatrix} z & y & y & \cdots & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-z & y & y & \cdots & y \\ 0 & x & y & \cdots & y \\ 0 & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} z & y-y & y-y & \cdots & y-y \\ z & x-y & y-y & \cdots & y-y \\ z & z-y & x-y & \cdots & y-y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z & z-y & z-y & \cdots & x-y \end{vmatrix} + (x-z)|A_{n-1}|$$

$= z(x-y)^{n-1} + (x-z)|A_{n-1}| \qquad (1)$

同理可得

$|A_n| = y(x-z)^{n-1} + (x-y)|A_{n-1}| \qquad (2)$

$(1)(x-y)-(2)(x-z)$: 可得:

$|A_n| = \frac{z(x-y)^n - y(x-z)^n}{z-y}$

$(19):|A_1| = cos\alpha, |A_2| = 2cos^2\alpha - 1 = cos2\alpha, |A_3| = cos3\alpha$. 不妨猜测 $D_n = cosn\alpha$ 下面用数学归纳法证明:

a) 当 $n=1$ 时, 结论显然成立.

b) 假设当 $k \leq n-1$ 时都成立, 则当 $k=n$ 时:

$D_n = 2cos\alpha D_{n-1} - D_{n-2}$

$= 2cos\alpha cos(n-1)\alpha - cos(n-2)\alpha$

$= cosn\alpha + cos(n-2)\alpha - cos(n-2)\alpha$

$= cosn\alpha$

故猜想正确.

$$(20):|A_n| = \begin{vmatrix} 1 & y & y^2 & \cdots & y^{n-1} & y^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} & a_2^n \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-1} & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} & a_n^n \end{vmatrix}$$

$= (a_1-y)(a_2-y)(a_3-y)\cdots(a_n-y)\cdots(a_n-a_{n-1})$

可知原行列式为此行列式 y^{n-1} 的系数 $*(-1)^n$:

$(-1)^n(-1)^{n-1}(\sum_{i=1}^n \Pi_{1\leq j_1<j_2\leq n})(a_{j_2}-a_{j_1}) = -(\sum_{i=1}^n \Pi_{1\leq j_1<j_2\leq n})(a_{j_2}-a_{j_1})$

$$(21):|A| = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ 0 & a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix}
1 & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\
0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\
a_1 & -1 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\
a_2 & -1 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_n & -1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
1-\frac{n}{2} & \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j} & -1 & -1 & \cdots & -1 \\
\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{2} & 1-\frac{n}{2} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\
0 & 0 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n
\end{vmatrix}
$$

$$
=(-2)^n\Pi_{i=1}^{n}a_i\begin{vmatrix}
1-\frac{n}{2} & \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j} \\
\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{2} & \frac{n}{2}
\end{vmatrix}
$$

$$
=(-2)^n\Pi_{i=1}^{n}a_i[(n-2)^2-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_j}{a_i}]
$$

(22): $|A_n|=$

$$
\begin{vmatrix}
\alpha & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta
\end{vmatrix}
$$

$$
+\begin{vmatrix}
\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha
\end{vmatrix}+\beta|A_{n-1}|=\alpha\begin{vmatrix}
\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \alpha & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha
\end{vmatrix}+\beta|A_{n-1}|
$$

$$
=\alpha^n+\beta|A_{n-1}|
$$

当 $\alpha=\beta$ 时,

$|A_n|=\alpha^n+\alpha|A_{n-1}|=(n-2)\alpha^n+|A_2|=(n+1)\alpha^n$

当 $\alpha\neq\beta$ 时有:

$|A_n|=\alpha^n+\beta|A_{n-1}| \qquad (1)$

$|A_n|=\beta^n+\alpha|A_{n-1}| \qquad (2)$

$(1)\alpha-(2)\beta$, 有:

$(\alpha-\beta)|A_n|=\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}$

$|A_n|=\sum_{i=1=0}^{n}\alpha^i\beta^{n-i}$

(亦可用三对角线的递推方法).

$$(23):\ |A_n|=\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & / & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & / & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}$$

$=(a^2-b^2)|A_{n-1}|$

$=(a^2-b^2)^n$

2. (1):

$$\text{左边}=\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & b-a & c(a-b) \\ 0 & c-a & b(a-c) \end{vmatrix}=(c-a)(c-b)(b-a)=\text{右边}$$

(2): 第一列 *100、第二列 *10，加到第三列即可。

(3):

定义：$A^{-1}=A^T$

故：$A^{-1}A=E$

$\Rightarrow A^TA=E$

$\Rightarrow |A^T||A|=|A|^2=1$

$\Rightarrow |A|=\pm1$

(4):

定义：$A^T=-A$

$|A^T|=(-1)^n|A|$

$\Rightarrow |A|-(-1)^n|A|=0$

当 n 为奇数时，有 $2|A|=0\Rightarrow|A|=0$

(5):

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & \cdots & -2 & 0 \end{vmatrix}$$
$$=(-1)^{1+n}*(-1)^{\{(1+n-1)+(1+n-2)+\cdots+(1+1)\}}*(-1)*(-2)^{n-1}$$
$$=(-1)^{\frac{n^2+5n}{2}}2^{n-1}\neq 0$$

(6): 只证可逆的上三角阵的逆矩阵仍为上三角阵。

(7):

$$\sum_{k=1}^{n}D_k=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}x_iA_{ji}(x_n=1)=\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{n}A_{ji}(x_n=1)=A_1+\cdots+A_n=A_n=D$$

(其中表示将 D 第 i 行变为 x_i)。

3. 当至少存在两行（列）成比例时，$|A|=0$, 命题显然成立。
当任意两行和两列不成比例时，将第 1 行依次加到 2、3$\cdots$ n 行，由于任意两行不成比例，故 $a_{ij}^*(j=2、3、4\cdots n)$ 至少存在一个 2 或者-2，其他元素为零，$a_{i1}=0(i=2、3、4\cdots n)$, 从 $2-n$ 行中提 2 出来有 $|A_n|=2^{n-1}|B_{n-1}|$，显然 $|B_{n-1}|$ 不为零，否则 $|A_n|=0$。命题得证。

4. 由于做初等变换，行列式只有符号改变，故先不考虑正负。做行列变换，使得 $a_{11}=1$, 并将第一行加到 2-n 行，故 $a_{ij}^*(j=2、3、4\cdots n)$ 的元素为 1、-1、0、2、-2, $a_{i1}=0(i=2、3、4\cdots n)$, 故 $|A_n|=(-1)_1^i|B_{n-1}|$

5. 不妨将 D 按最后一列展开:
$$D=(-1)^{1+n}n\begin{pmatrix} 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots & n^2 \\ 3^3 & 4^3 & 5^3 & \cdots & (n+1)^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^n & (n+1)^n & (n+1)^n & \cdots & (n+1)^n \end{pmatrix}+D_2$$
$=(-1)^{1+n}nD_1+D_2$ 由于 n 为奇数, 因此 $n+1$ 为偶数, 故 D_2 为偶数.
D_1 也按照 D 类似的展开, 可得到一个数和一个偶数的和, 又有:
$D_2^{(n-2)}=(n-1)^{(}n-1)(n+1)^n-n^{(2n-1)}$
故:D 必可以分解成一个奇数和一个偶数之和. 故其不为零.

6. $|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21} & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$
$= |B_1| + |B_2|$
$|B_2| = \begin{vmatrix} x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ x & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$
$= x\sum_{j=1}^{n} A_{1j}$
$|B_1| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21} & x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$
$= |B_1^1| + |B_2^1|$
$|B_2^1| = \begin{vmatrix} a_{11} & x & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & x & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$
$= x\sum_{j=1}^{n} A_{1j}$
$|B_1^1| = |B_1^2| + |B_2^2| \cdots$
故：$|B| = |B_1^{n-1}| + \sum_{k=0}^{n-1}|B_2^j| = |A| + x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}$

7. 4 阶行列式按一般展开应有 24 项，但按对角线展开 8 项，缺项，故二者不等。

8. 由于 $h+k>n$, 不妨设 $h \geq k$, 不考虑符号变化，将零元素全部变换至左上角得到 A_1, 将其按 Laplace 展开（第 1 行到第 k 行的 k 阶行列式）即可得到 $A_1 = B_{(n-k)\times(n-k)}B_{k\times k}$ 其中 $B_{k\times k}$ 有至少一列为零，故 $B_{k\times k} = 0$

9. 可参考阿达玛不等式

10. $\begin{vmatrix} a_{11}-\frac{1}{m} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\frac{1}{m} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\frac{1}{m} \end{vmatrix}$
设 $\frac{1}{m} = \lambda$, 将行列式展开可以得到如下的一个多项式:

$$A = f(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0, b_0 = (a_{ij}), b_i \quad .$$

若 $f(\lambda)=0$, 则等式两边同时乘以 $\frac{}{1}\lambda^{n-1}$, 得到:$(-1)^n\lambda=-b_{n-1}-\cdots-\frac{1}{\lambda^{n-1}}b_0$
可知等式左端为小数，等式右端为整数。

11. (1) $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*\Rightarrow A^*=|A|A^{-1}\Rightarrow|A^*|=|A|^n|A|^{-1}=|A|^{n-1}$

(2)

12. (1) $x=\dfrac{\begin{vmatrix}10&3&5\\3&2&4\\3&2&2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&3&5\\3&2&4\\1&2&2\end{vmatrix}}\qquad y=\dfrac{\begin{vmatrix}2&10&5\\3&3&4\\1&3&2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&3&5\\3&2&4\\1&2&2\end{vmatrix}}\qquad z=\dfrac{\begin{vmatrix}2&3&10\\3&2&3\\1&2&3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&3&5\\3&2&4\\1&2&2\end{vmatrix}}$

(2)

(3)

第三章　线性方程组的一般理论

习题

1. 证明下面 (1), (2) 中 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 线性无关, 再将 $\boldsymbol{x}$ 表示成 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 的线性组合.

   (1) $\boldsymbol{e}_1 = (1,1,1), \boldsymbol{e}_2 = (1,1,2), \boldsymbol{e}_3 = (1,2,3), \boldsymbol{x} = (6,9,14)$;

   (2) $\boldsymbol{e}_1 = (2,1,-3), \boldsymbol{e}_2 = (3,2,-5), \boldsymbol{e}_3 = (6,1,-5), \boldsymbol{x} = (6,2,-7)$.

2. 确定下列向量组的秩, 并找出所有的极大无关组.

   (1) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (4,-1,3,-2), \boldsymbol{\alpha}_2 = (8,-2,6,-4), \boldsymbol{\alpha}_3 = (3,-1,4,-2), \boldsymbol{\alpha}_4 = (6,-2,8,-4)$;

   (2) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,4,5), \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,3,5,6), \boldsymbol{\alpha}_3 = (3,4,6,7), \boldsymbol{\alpha}_4 = (4,5,7,8)$;

   (3) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,3), \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,3,4), \boldsymbol{\alpha}_3 = (3,2,3), \boldsymbol{\alpha}_4 = (4,3,4); \boldsymbol{\alpha}_5 = (1,1,1)$.

3. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (0,1,-1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,2,2), \boldsymbol{\alpha}_3 = (-1,0,\lambda)$. 选择 λ 使 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可以被 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出.

4. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (2,3,5), \boldsymbol{\alpha}_2 = (3,7,8), \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,-6,1), \boldsymbol{\beta} = (7,-2,\lambda)$. 选择 λ 使 $\boldsymbol{\beta}$ 可以被 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

5. 求下列矩阵的秩.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & -6 & 2 \\ 6 & 3 & -9 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 15 & 17 \\ 7 & -6 & -7 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. 判断下列方程组是否有解.

(1)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1, \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5; \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3. \end{cases}$$

7. 求下列方程组的一个基础解系, 并构造与它们具有同样解集的含三个方程的方程组.

(1)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0; \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$$

8. 求下列方程组的一个特解, 然后写出通解.

(1)

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2; \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3+2x_4=2, \\ 2x_1+3x_2+2x_3+5x_4=3, \\ 9x_1+x_2+4x_3-5x_4=1, \\ 2x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 7x_1+x_2+6x_3-x_4=7. \end{cases}$$

9. 讨论 λ, a, b 取什么值时下列方程组有解, 并于有解时求其解.

(1)

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda, \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2; \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} (\lambda+3)x_1+x_2+2x_3=\lambda, \\ \lambda x_1+(\lambda-1)x_2+x_3=2\lambda, \\ 3(\lambda+1)x_1+\lambda x_2+(\lambda+3)x_3=3; \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=4, \\ x_2+bx_2+x_3=3, \\ x_2+2bx_2+x_3=4. \end{cases}$$

10. 证明: 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 也线性无关.

11. 证明: 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 且可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出, 则 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 也线性无关.

12. 证明: 若两组向量有相同的秩, 且其中一组可由另一组线性表出, 则它们等价 (即可以相互线性表出).

13. 证明: 对于任意正整数 $n \geqslant 1$, 任意 $n+1$ 个 n 元向量必然线性相关.

14. 证明: 若 $t_1, t_2, \cdots, t_r$ 是两两不同的数, 且 $r \leqslant n$, 则下列向量组线性无关:

$$\boldsymbol{\alpha}_i = (1, t_i, t_i^2, \cdots, t_i^{n-1}), \quad i=1,2,\cdots,r.$$

15. 证明: 由 $x_1 - x_2 = a_1, x_2 - x_3 = a_2, x_3 - x_4 = a_3, x_4 - x_5 = a_4, x_5 - x_1 = a_5$ 组成的线性方程组有解当且仅当

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = 0,$$

在有解时求出它的一般解.

16. 证明:

(1) 令 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别为 $m \times n$ 矩阵和 $n \times p$ 矩阵. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$, 则 $r_{\boldsymbol{A}} + r_{\boldsymbol{B}} \leqslant n$. 怎样刻画 $r_{\boldsymbol{A}} + r_{\boldsymbol{B}} = n$ 的情形?

(2) 令 $\boldsymbol{A}$ 为 r 阶方阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $r \times n$ 矩阵, 且 $r_{\boldsymbol{B}} = r$. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}(\boldsymbol{B})$, 则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}(\boldsymbol{E})$.

(3) 令 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{P}^{m \times n}$. 若 $r_{\boldsymbol{A}} = r$, 则存在 $\boldsymbol{B} \in \mathbb{P}^{m \times r}, \boldsymbol{C} \in \mathbb{P}^{r \times n}$, 使得 $r_{\boldsymbol{B}} = r_{\boldsymbol{C}} = r$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BC}$.

(4) 令 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{P}^{n \times n}$. 则 $\boldsymbol{A}$ 可分解为一可逆矩阵与一对称矩阵的乘积.

17. 证明: 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为一组线性无关向量, 且

$$\boldsymbol{\beta}_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} \boldsymbol{\alpha}_j, \quad i = 1, 2, \cdots, r,$$

则 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关当且仅当 $|a_{ij}| \neq 0$.

18. 在线性方程组

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, \\ i = 1, 2, \cdots, n-1 \end{cases}$$

的系数矩阵 $(a_{ij})_{(n-1)\times n}$ 中划去第 i 列剩下的 $(n-1)$ 阶子式用 M_i 表示, $i = 1, 2, \cdots, n$. 证明:

(1) $(M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{i-1} M_i, \cdots, (-1)^{n-1} M_n)$ 是方程组的一个解;

(2) 若 $r_{(a_{ij})_{(n-1)\times n}} = n - 1$, 则方程组的解都是 (1) 中解的倍数.

19. 令 $\boldsymbol{\alpha}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}), i = 1, 2, \cdots, s$; $\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$. 若方程组

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, \\ i = 1, 2, \cdots, s \end{cases}$$

的解都是方程

$$\sum_{j=1}^{n} b_j x_j = 0$$

的解, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出.

20. 证明: 若 $(a_{ij})_n$ 满足条件

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad i=1,2,\cdots,n,$$

则 $|a_{ij}| \neq 0$.

21. 令 $\boldsymbol{\eta}_0$ 为式 (3.10) 的一个解, $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 为式 (3.10) 的导出方程组的一个基础解系, 又令

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{\eta}_0, \boldsymbol{\gamma}_2=\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_0,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{t+1}=\boldsymbol{\eta}_t+\boldsymbol{\eta}_0.$$

证明: 式 (3.10) 的任一解 $\boldsymbol{\gamma}$ 都可以表示成

$$\boldsymbol{\gamma}=\sum_{i=1}^{t+1} u_i\boldsymbol{\gamma}_i,$$

其中 $\sum\limits_{i=1}^{t+1} u_i = 1$.

22. 证明: 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, $n \geqslant 2$, 则

$$r_{\boldsymbol{A}^*}=\begin{cases} n, & r_{\boldsymbol{A}}=n, \\ 1, & r_{\boldsymbol{A}}=n-1, \\ 0, & r_{\boldsymbol{A}}<n-1, \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 (见第 2 章 2.3 节注 2.4).

23. 证明: 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ ($\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \mathbf{0}$) 线性相关的充要条件是, 至少有一个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ ($1 < i \leqslant s$) 可被前面的 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表出.

24. 令向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出. 证明: 表示法唯一的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

25. 令向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出, 但不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$ 线性表出. 证明:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_r$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$ 线性表出;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_r$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性表出.

26. 令向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关. 证明: 当且仅当 n 为奇数时, 向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1$$

也线性无关.

27. 令向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ $(m \geqslant 2)$ 中的 $\boldsymbol{\alpha}_m \neq \mathbf{0}$. 证明: 对任意的数 $k_1, k_2, \cdots, k_{m-1}$, 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + k_1\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + k_2\boldsymbol{\alpha}_m, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{m-1} = \boldsymbol{\alpha}_{m-1} + k_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

28. 令向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩 $r > 0$. 证明:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意 r 个线性无关的向量都构成它的一个极大线性无关组;

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中任一个向量都可以由其中某 r 个向量线性表出, 则这 r 个向量必为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大无关组.

29. 证明: 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中有 r 个向量, 使得任一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由这 r 个向量唯一线性表出, 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r.

30. 证明: n 个 n 元向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充要条件是单位向量 $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出.

31. 令向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t; \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$$

的秩分别为 r_1, r_2, r_3. 证明:

$$\max(r_1, r_2) \leqslant r_3 \leqslant r_1 + r_2.$$

32. 令向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m; \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m; \boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_m$$

的秩分别为 r_1, r_2, r_3, 其中 $\boldsymbol{\gamma}_i = \boldsymbol{\alpha}_i - \boldsymbol{\beta}_i$, $i = 1, 2, \cdots, m$. 证明:

$$r_1 \leqslant r_2 + r_3,\ r_2 \leqslant r_1 + r_3,\ r_3 \leqslant r_1 + r_2.$$

33. 令向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 线性相关. 证明: 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\gamma}$ 不等价, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 中有且仅有一个向量可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出.

34. 令方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = d_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = d_2, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = d_m \end{cases}$$

有解, 且系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r_1, 而方程组

$$\begin{cases} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1s}x_s=c_1, \\ b_{21}x_1+b_{22}x_2+\cdots+b_{2s}x_s=c_2, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{m1}x_1+b_{m2}x_2+\cdots+b_{ms}x_s=c_m \end{cases}$$

无解, 且系数矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩为 r_2. 证明: 矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1s} & d_1 & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{21} & \cdots & b_{2s} & d_2 & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{ms} & d_m & c_m \end{bmatrix}$$

的秩 $\leqslant r_1+r_2+1$.

35. 令方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1}$$

与

$$\begin{cases} A_{11}x_1+A_{12}x_2+\cdots+A_{1n}x_n=c_1, \\ A_{21}x_1+A_{22}x_2+\cdots+A_{2n}x_n=c_2, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{n1}x_1+A_{n2}x_2+\cdots+A_{nn}x_n=c_n \end{cases} \tag{2}$$

中的 A_{ij} 为 a_{ij} 在系数行列式 $D=|a_{ij}|$ 中的代数余子式, $i,j=1,2,\cdots,n$. 证明: 方程组 (1) 有唯一解的充要条件是 (2) 有唯一解.

36. 令 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为 s 个线性无关的 n 元向量. 证明: 存在含 n 个未知量的齐次线性方程组, 使得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是它的一个基础解系.

37. 令 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, a_{ij},b_i 均为实数. 则线性方程组

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}$$

必有解.

解答

1. 为证明 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 线性无关, 只需指出以它们为列向量的齐次线性方程组只有零解 (这可以通过求解方程组证明). 至于将 $\boldsymbol{x}$ 表示成 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 的线性组合, 只需求解关于 k_1,k_2,k_3 的线性方程组
$$k_1\boldsymbol{e}_1'+k_2\boldsymbol{e}_2'+k_3\boldsymbol{e}_3'=\boldsymbol{x}'$$
即可.

   (1) $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$;

   (2) $\boldsymbol{x}=\dfrac{3}{2}\boldsymbol{e}_1+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{e}_3$.

2. (1) 注意到 $\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_3$, 而 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关 (因它们各分量不成比例), 所以此向量组的秩为 2, 所有的极大无关组为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4$, $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$.

   (2) 施行涉及向量的初等变换, 得到 $\boldsymbol{\alpha}_5=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,4,5),\boldsymbol{\alpha}_6=\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_7=\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,1,1),\boldsymbol{\alpha}_8=\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1,1)$. 变换后的向量组的秩显然为 2, 所以原向量组的秩也为 2. 而原向量组中的向量两两不成比例, 故所有的极大无关组是它们的组合 (共 6 组).

   (3) 施行涉及向量的初等变换, 得到 $\boldsymbol{\alpha}_6=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_5=(0,1,2),\boldsymbol{\alpha}_7=\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_5=(0,1,2),\boldsymbol{\alpha}_8=\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_5=(1,0,1),\boldsymbol{\alpha}_9=\boldsymbol{\alpha}_4-3\boldsymbol{\alpha}_5=(1,0,1),\boldsymbol{\alpha}_{10}=\boldsymbol{\alpha}_5=(1,1,1)$. 继续做初等变换, 发现向量组的秩为 3. 经计算知, 在所有 10 种组合中, 只有 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5\},\{\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5\}$ 线性相关, 其余 8 组皆构成极大无关组.

3. 令 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3$ 成立, 则这一关系关于这些向量的前两个分量也成立. 解方程组
$$\begin{bmatrix}0&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$$
得 $k_1=2,k_2=-1$. 所以 $\lambda=-k_1+2k_2=-4$.

4. 令 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$, 对此方程组的增广矩阵作行初等变换:
$$\begin{bmatrix}2&3&1&7\\3&7&-6&-2\\5&8&1&\lambda\end{bmatrix}\xrightarrow{[2-1(1)]}\begin{bmatrix}2&3&1&7\\1&4&-7&-9\\5&8&1&\lambda\end{bmatrix}\xrightarrow[{[3-2(5)]}]{[1-2(2)]}$$
$$\begin{bmatrix}0&-5&15&25\\1&4&-7&-9\\0&-12&36&\lambda+45\end{bmatrix}\xrightarrow{[3-1(\frac{12}{5})]}\begin{bmatrix}0&-5&15&25\\1&4&-7&-9\\0&0&0&\lambda-15\end{bmatrix}.$$
由 $\boldsymbol{\beta}$ 能被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出, 知 $\lambda=15$.

5.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&-3&1\\4&2&-6&2\\6&3&-9&3\\1&1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[{[3-4(3)]}]{[1,4][2-4(2)]}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\2&1&-3&1\end{bmatrix}\xrightarrow[{[2-1(2)]}]{[2,4]}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-5&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

故 $r_{\boldsymbol{A}}=2$.

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}5&2&-3&1\\4&1&-2&3\\1&1&-1&-2\\3&4&-1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[{[4-3(3)]}]{[1-3(5)][2-3(4)]}\begin{bmatrix}0&-3&2&11\\0&-3&2&11\\1&1&-1&-2\\0&1&2&8\end{bmatrix}\xrightarrow[{[4-3(1)][3+2(3)]}]{[1,3][2,4]}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&-1&-2\\0&1&2&8\\0&0&8&35\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

故 $r_{\boldsymbol{B}}=3$.

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2&-1&3&1\\4&-3&1&3\\3&-2&3&4\\4&-1&15&17\\7&-6&-7&0\end{bmatrix}\xrightarrow[{[4-3(4)][5-3(7)][1,3]}]{[3-1(1)][1-3(2)][2-3(4)]}\begin{bmatrix}1&-1&0&3\\0&1&1&-9\\0&1&3&-5\\0&3&15&5\\0&1&-7&-21\end{bmatrix}\xrightarrow[{[5-2(1)]}]{[3-2(1)][4-2(3)]}$$

$$\begin{bmatrix}1&-1&0&3\\0&1&1&-9\\0&0&2&4\\0&0&12&32\\0&0&-8&-12\end{bmatrix}\xrightarrow[{[5+3(4)]}]{[4-3(6)]}\begin{bmatrix}1&-1&0&3\\0&1&1&-9\\0&0&2&4\\0&0&0&8\\0&0&0&4\end{bmatrix}.$$

故 $r_{\boldsymbol{C}}=4$.

6. 对增广矩阵作初等变换:

(1)

$$\begin{bmatrix}2&-1&1&-1&3\\4&-2&-2&3&2\\2&-1&5&-6&1\\-2&-1&-3&4&5\end{bmatrix}\xrightarrow[{[2+1(1)][3+1(2)][4+1(1)]}]{[3,4][2,3][1,2]}\begin{bmatrix}-2&-1&-3&4&5\\0&-2&-2&3&8\\0&-4&-8&11&12\\0&-2&2&-2&6\end{bmatrix}\xrightarrow[{[4-2(1)]}]{[3-2(2)]}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{[4+3(1)]} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

系数矩阵的秩小于增广矩阵的秩, 从而方程组无解.

(2)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 12 & -9 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 9 & -7 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[1-2(2)]}]{[2-1(1)][3-1(2)][4-1(1)]} \begin{bmatrix} 0 & -15 & 15 & -13 & -3 \\ 1 & 9 & -8 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -8 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[4-3(2)]}]{[1,2]}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 9 & -8 & 7 & 2 \\ 0 & -15 & 15 & -13 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩, 从而方程组有解.

7. 对系数矩阵作初等变换:

(1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[4-1(3)]}]{[2-1(3)][3-1(4)]} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[4-2(2)]}]{[2(-1)][3+2(3)]}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{[1-2(2)]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

移项得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -8 \\ 6 \end{bmatrix} x_3 - \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix} x_4.$$

故方程组的一个基础解系为

$$T_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

上面变换过程中的第二步的前三行可以构成一个同解的方程组.

(2)

$$\begin{bmatrix}3&2&1&3&5\\6&4&3&5&7\\9&6&5&7&9\\3&2&0&4&8\end{bmatrix}\xrightarrow[{[4-1(1)]}]{[2-1(2)][3-1(3)]}\begin{bmatrix}3&2&1&3&5\\0&0&1&-1&-3\\0&0&2&-2&-6\\0&0&-1&1&3\end{bmatrix}\xrightarrow[{[4+2(1)]}]{[3-2(2)]}$$

$$\begin{bmatrix}3&2&1&3&5\\0&0&1&-1&-3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[{[1(\frac{1}{3})]}]{[1-2(1)]}\begin{bmatrix}1&\frac{2}{3}&0&\frac{4}{3}&\frac{8}{3}\\0&0&1&-1&-3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

移项得

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_3\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\0\end{bmatrix}x_2-\begin{bmatrix}\frac{4}{3}\\-1\end{bmatrix}x_4-\begin{bmatrix}\frac{8}{3}\\-3\end{bmatrix}x_5.$$

故方程的一个基础解系为

$$T_1=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},T_2=\begin{bmatrix}-\frac{4}{3}\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix},T_3=\begin{bmatrix}-\frac{8}{3}\\0\\3\\0\\1\end{bmatrix}.$$

上面变换过程中的第二步的前三行可以构成一个同解的方程组.

8. (1)

$$\begin{bmatrix}2&7&3&1&6\\3&5&2&2&4\\9&4&1&7&2\end{bmatrix}\xrightarrow[{[1-2(2)]}]{[3-2(3)][2-1(1)]}\begin{bmatrix}0&11&5&-1&10\\1&-2&-1&1&-2\\0&-11&-5&1&-10\end{bmatrix}\xrightarrow[{[1(11)]}]{[1,2][3+2(1)]}$$

$$\begin{bmatrix}11&-22&-11&11&-22\\0&11&5&-1&10\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{[1+2(2)]}\begin{bmatrix}11&0&-1&9&-2\\0&11&5&-1&10\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

移项得

$$11\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\10\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1\\5\end{bmatrix}x_3-\begin{bmatrix}9\\-1\end{bmatrix}x_4.$$

从而

$$11\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}-2\\10\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-5\\11\\0\end{bmatrix}x_3+\begin{bmatrix}-9\\1\\0\\11\end{bmatrix}x_4,$$

通解为

$$
\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{11}\\ \frac{10}{11}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{11}\\ -\frac{5}{11}\\ 1\\ 0\end{bmatrix}k_1+\begin{bmatrix}-\frac{9}{11}\\ \frac{1}{11}\\ 0\\ 1\end{bmatrix}k_2.
$$

(2)

$$
\begin{bmatrix}3&2&2&2&2\\2&3&2&5&3\\9&1&4&-5&1\\2&2&3&4&5\\7&1&6&-1&7\end{bmatrix}\xrightarrow[{[4-1(2)][5-1(7)]}]{[1-2(1)][2-1(2)][3-1(9)]}\begin{bmatrix}1&-1&0&-3&-1\\0&5&2&11&5\\0&10&4&22&10\\0&4&3&10&7\\0&8&6&20&14\end{bmatrix}\xrightarrow[{[3,4][3(5)]}]{[3-2(2)][5-4(2)]}
$$

$$
\begin{bmatrix}1&-1&0&-3&-1\\0&5&2&11&5\\0&20&15&50&35\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[{[1(35)][2(7)]}]{[3-2(4)]}\begin{bmatrix}35&-35&0&-105&-35\\0&35&14&77&35\\0&0&7&6&15\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[{[3(5)]}]{[2-3(2)][1+2(1)]}
$$

$$
\begin{bmatrix}35&0&0&-40&-30\\0&35&0&65&5\\0&0&35&30&75\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},
$$

移项整理可得通解

$$
\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}-\frac{6}{7}\\ \frac{1}{7}\\ \frac{15}{7}\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{8}{7}\\ -\frac{13}{7}\\ -\frac{6}{7}\\ 1\end{bmatrix}k_1.
$$

9. (1) 对增广矩阵施行初等变换:

$$
\begin{bmatrix}\lambda&1&1&1\\1&\lambda&1&\lambda\\1&1&\lambda&\lambda^2\end{bmatrix}\xrightarrow{[1,3]}\begin{bmatrix}1&1&\lambda&\lambda^2\\1&\lambda&1&\lambda\\\lambda&1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[{[3-1(\lambda)]}]{[2-1(1)]}
$$

$$
\begin{bmatrix}1&1&\lambda&\lambda^2\\0&\lambda-1&1-\lambda&\lambda(1-\lambda)\\0&1-\lambda&1-\lambda^2&1-\lambda^3\end{bmatrix}\xrightarrow{[3+2(1)]}
$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & (1-\lambda)(1+\lambda)^2 \end{bmatrix}.$$

从而方程组在 $\lambda \neq -2$ 时有解. 若 $\lambda = 1$, 方程化为 $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, 其解为

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} k_1 + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} k_2.$$

若 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$, 方程组有唯一解

$$\boldsymbol{X} = \left(-\frac{1+\lambda}{2+\lambda}, \frac{1}{2+\lambda}, \frac{(1+\lambda)^2}{2+\lambda}\right)'.$$

(2) 对增广矩阵施行初等变换:

$$\begin{bmatrix} \lambda+3 & 1 & 2 & \lambda \\ \lambda & \lambda-1 & 1 & 2\lambda \\ 3(\lambda+1) & \lambda & \lambda+3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[2(3)]}]{[1-2(1)][3-2(3)]} \begin{bmatrix} 3 & 2-\lambda & 1 & -\lambda \\ 3\lambda & 3\lambda-3 & 3 & 6\lambda \\ 3 & 3-2\lambda & \lambda & 3-6\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[{[3-1(1)]}]{[2-1(\lambda)]}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2-\lambda & 1 & -\lambda \\ 0 & \lambda^2+\lambda-3 & 3-\lambda & \lambda^2+6\lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 3-5\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[{[3-2(\lambda-1)]}]{[2+3(\lambda+2)]}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2-\lambda & 1 & -\lambda \\ 0 & -1 & \lambda^2+1 & -4\lambda^2-\lambda+6 \\ 0 & 0 & -\lambda^2(\lambda-1) & (\lambda^2-3)(4\lambda-3) \end{bmatrix}.$$

故方程组在 $\lambda \notin \{0, 1\}$ 时有解. 这时它具有唯一解

$$\left(\frac{\lambda^3+3\lambda^2-15\lambda+9}{\lambda^2(\lambda-1)}, \frac{\lambda^3+12\lambda-9}{\lambda^2(\lambda-1)}, -\frac{(\lambda^2-3)(4\lambda-3)}{\lambda^2(\lambda-1)}\right)'.$$

(3) 对增广矩阵施行初等变换:

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[3-1(1)]}]{[1,2][2-1(a)]} \begin{bmatrix} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & 1-ab & 1-a & 4-3a \\ 0 & b & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[3-2(b)]}]{[2+3(a)]}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1-a & 4-2a \\ 0 & 0 & b(a-1) & 1+2b(a-2) \end{bmatrix}.$$

故方程组在

$$\begin{cases} b(a-1)=0, \\ 1+2b(a-2)\neq 0 \end{cases}$$

时无解, 即方程组在 $b=\dfrac{1}{2}$ 或 $\begin{cases} b\neq 0 \\ a\neq 1 \end{cases}$ 时有解. 若有 $a=1, b=\dfrac{1}{2}$, 方程组化为

$$\begin{cases} x_1+\dfrac{1}{2}x_2+x_3=3, \\ x_2=4. \end{cases}$$

其解为

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}k_1.$$

否则, 为使方程组有解, 必有 $b\neq 0$ 且 $a\neq 1$. 此时方程组有唯一解

$$\left(\frac{2b-1}{b(a-1)}, \frac{1}{b}, \frac{1+2b(a-2)}{b(a-1)}\right)'.$$

10.

$$\begin{aligned} & k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{\theta} \\ \Rightarrow & (k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\theta} \\ \Rightarrow & k_1+k_3=k_1+k_2=k_2+k_3=0 \\ \Rightarrow & k_1=k_2=k_3=0. \end{aligned}$$

当然, 本题是 26 题的一个特例.

11. 由替换定理, $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^s$ 和 $\{\boldsymbol{\beta}_j\}_{j=1}^s$ 等价. 再由推论 3.1.8, $r_{\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^s}=r_{\{\boldsymbol{\beta}_j\}_{j=1}^s}=s$, 故 $\{\boldsymbol{\beta}\}_{j=1}^s$ 线性无关.

12. 设 $r_{\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^s}=r_{\{\boldsymbol{\beta}_j\}_{j=1}^t}$, 且 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^s$ 可被 $\{\boldsymbol{\beta}_j\}_{j=1}^t$ 线性表出. 不妨设 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^r$ 线性无关, $\{\boldsymbol{\beta}_j\}_{j=1}^r$ 线性无关, 则 $\{\boldsymbol{\beta}_j\}_{j=1}^r$ 可以线性表出 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^r$. 由替换定理, $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^r$ 可以线性表出 $\{\boldsymbol{\beta}_j\}_{j=1}^r$. 从而 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^s$ 可以线性表出 $\{\boldsymbol{\beta}_j\}_{j=1}^t$. 于是两个向量组等价.

13. 反设 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^{n+1}$ 线性无关, 但它们能被单位向量组 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_i\}_{i=1}^n$ 线性表出, 由替换定理, $n+1\leqslant n$, 矛盾.

14. 由 $t_1, t_2, \cdots, t_r$ 两两不同知 Vandermonde 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1^{r-1} & t_2^{r-1} & \cdots & t_r^{r-1} \end{vmatrix}\neq 0.$$

从而由推论 3.1.3 知上述行列式的各列组成的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r'$ 线性无关. 再由推论 3.1.4 知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

15. 对增广矩阵作初等变换, 并记 $s=\sum\limits_{i=1}^{5}a_i$, 有

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & a_1\\ & 1 & -1 & & & a_2\\ & & 1 & -1 & & a_3\\ & & & 1 & -1 & a_4\\ -1 & & & & 1 & a_5 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[5+3(1)][5+4(1)]}]{[5+1(1)][5+2(1)]} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & a_1\\ & 1 & -1 & & & a_2\\ & & 1 & -1 & & a_3\\ & & & 1 & -1 & a_4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[{[1+2(1)]}]{[3+4(1)][2+3(1)]} \begin{bmatrix} 1 & & & & -1 & a_1+a_2+a_3+a_4\\ & 1 & & & -1 & a_2+a_3+a_4\\ & & 1 & & -1 & a_3+a_4\\ & & & 1 & -1 & a_4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}.$$

从而知方程组有解当且仅当 $s=0$, 这时它的一般解为

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} a_1+a_2+a_3+a_4\\ a_2+a_3+a_4\\ a_3+a_4\\ a_4\\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}k_1.$$

16. (1) 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 知 $\boldsymbol{B}$ 的每一列均为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解. 当 $r_{\boldsymbol{A}}=n$ 时, 该方程只有零解, 所以 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$, $r_{\boldsymbol{A}}+r_{\boldsymbol{B}}=n+0=n$.

当 $r_{\boldsymbol{A}}<n$ 时, 由定理 3.3.3, 该方程组具有 $n-r_{\boldsymbol{A}}$ 个向量组成的基础解系, 即 $\boldsymbol{B}$ 的每一列均能由这一基础解系线性表出. 于是 $r_{\boldsymbol{B}}\leqslant n-r_{\boldsymbol{A}}$, 即 $r_{\boldsymbol{A}}+r_{\boldsymbol{B}}\leqslant n$. 联系补充题 1, 此题也可视为 Sylvester 秩不等式的特例.

(2) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 则由 (1) 立即有 $r_{\boldsymbol{A}}\leqslant 0$, 故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}$, 由于 $r_{\boldsymbol{B}}=r$, 令 $\boldsymbol{B}_1$ 为 $\boldsymbol{B}$ 中线性无关的 r 列组成的方阵, 于是 $\boldsymbol{B}_1$ 可逆, 且 $\boldsymbol{AB}_1=\boldsymbol{B}_1$. 两边同时右乘 $\boldsymbol{B}_1^{-1}$ 得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$.

(3) 本题可视作 114 页例 2 的推广. 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行的这一分解称为**秩因子分解** (Rank Factorization). $r=0$ 时, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 分别取 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为相应大小的零矩阵即可. 下面设 $r>0$, 且

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),$$

不妨令 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^r$ 线性无关, 则它们构成 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^n$ 的一个极大线性无关组. 设

$$\boldsymbol{\alpha}_j=\sum_{i=1}^r c_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i,\quad j=r+1,r+2,\cdots,n.$$

记 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^r$ 组成的矩阵为 $\boldsymbol{B}$, 又记

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0&c_{1,r+1}&\cdots&c_{1n}\\0&1&\cdots&0&c_{2,r+1}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1&c_{r,r+1}&\cdots&c_{rn}\end{bmatrix},$$

容易验证 $r_{\boldsymbol{B}}=r_{\boldsymbol{C}}=r$, 且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$.

(4) 令 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的等价标准形, 则 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 为对称矩阵, 且存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Q}')^{-1}\boldsymbol{Q}'\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{Q}$, 其中 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Q}')^{-1}$ 可逆, $\boldsymbol{Q}'\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{Q}$ 为对称矩阵.

17. 记 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_r)'$. 则由于 $\{\boldsymbol{\alpha}_j\}_{j=1}^r$ 线性无关,

$$\sum_{i=1}^r x_i\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\theta}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^r\sum_{j=1}^r x_ia_{ij}\boldsymbol{\alpha}_j=\boldsymbol{\theta}\Leftrightarrow\sum_{j=1}^r\boldsymbol{\alpha}_j\left(\sum_{i=1}^r x_ia_{ij}\right)=\boldsymbol{\theta}\Leftrightarrow$$
$$\sum_{i=1}^r x_ia_{ij}=0,j=1,2,\cdots,r\Leftrightarrow\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\theta}.$$

从而

$$\{\boldsymbol{\beta}_i\}_{i=1}^r\text{线性无关}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^r x_i\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\theta}\text{ 蕴含}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\theta}\Leftrightarrow\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\theta}\text{只有零解}\Leftrightarrow|a_{ij}|\neq 0.$$

18. (1) 由定理 2.3.1,

$$\sum_{j=1}^n(-1)^{i+j}a_{ij}M_j=0,\quad i=1,2,\cdots,n-1,$$

于是

$$\sum_{j=1}^n(-1)^{j-1}a_{ij}M_j=0,\quad i=1,2,\cdots,n-1,$$

即 $(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{i-1}M_i,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)$ 是方程组的一个解.

(2) 由秩 $=n-1$ 知系数矩阵的全体 $n-1$ 阶子式 $M_1,M_2,\cdots,M_n$ 至少有一个不为零, 从而 (1) 中的解非零. 又由定理 3.3.3, 方程组具有 $n-r_{(a_{ij})_{(n-1)\times n}}=1$ 个向量组成的基础解系, 所以方程组的解都是 (1) 中解的倍数.

19. 由已知, 方程组

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j=0,\quad i=1,2,\cdots,s$$

与方程组

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, s, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} b_j x_j = 0\end{cases}$$

同解. 由定理 3.3.3, 它们的系数矩阵的秩相等, 即 $r_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s} = r_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}}$. 设 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^{s}$ 线性表出, 我们取后者的一个极大线性无关组, 不妨令其为 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^{r}$, 则由引理 3.1.1, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}$ 线性无关, 矛盾.

应当指出, 这里结论反过来也对, 即若 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^{s}$ 线性表出, 则方程组 (1) 的解都是方程

$$\sum_{j=1}^{n} b_j x_j = 0$$

的解.

20. 我们称满足题设条件的矩阵为**严格对角占优**的. 记 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_n$, 为证 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 由推论 2.3.1, 只需指出以 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{\theta}$ 只有零解. 反设其有非零解 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$, 并记 $|x_i| = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|$. 由 $\boldsymbol{X}$ 满足上述线性方程组的第 i 个方程, 有

$$a_{ii}x_i = -\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j.$$

从而

$$|a_{ii}| = \left|\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}\frac{x_j}{x_i}\right| \leqslant \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|\left|\frac{x_j}{x_i}\right| \leqslant \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|,$$

矛盾.

21. 由定理 3.3.4, 式 (3.10) 的任一解 $\boldsymbol{\gamma}$ 可以表示成 $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\eta}_0 + \sum\limits_{i=1}^{t} k_i\boldsymbol{\eta}_i$, 其中 $k_i \in \mathbb{P}, i = 1, 2, \cdots, t$. 取 $u_{i+1} = k_i, i = 1, 2, \cdots, t$, $u_1 = 1 - \sum\limits_{i=1}^{t} u_{i+1}$, 则

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\eta}_0 \sum_{i=1}^{t+1} u_i + \sum_{i=1}^{t} u_{i+1}\boldsymbol{\eta}_i = u_1\boldsymbol{\eta}_0 + \sum_{i=1}^{t} u_{i+1}(\boldsymbol{\eta}_i + \boldsymbol{\eta}_0) = \sum_{i=1}^{t+1} u_i\boldsymbol{\gamma}_i.$$

22. (1) 由注 3.8 知, n 阶方阵的满秩, 可逆和非奇异是一致的. 从而 $r_{\boldsymbol{A}} = n$ 时, $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 我们有

$$\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = \boldsymbol{E}.$$

所以 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆. 于是 $r_{\boldsymbol{A}^*} = n$.

(2) 由 $r_{\boldsymbol{A}} = n-1$ 知存在 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $n-1$ 阶子式不为 0, 故 $\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{O}$, $r_{\boldsymbol{A}^*} \geqslant 1$. 另一方面, 由于 $\boldsymbol{AA}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$, 联系 16 题的 (1) 知 $r_{\boldsymbol{A}} + r_{\boldsymbol{A}^*} \leqslant n$, 即 $r_{\boldsymbol{A}^*} \leqslant 1$. 所以 $r_{\boldsymbol{A}^*} = 1$.

(3) $r_{\boldsymbol{A}} < n-1$ 蕴含 $\boldsymbol{A}$ 的任一 $n-1$ 阶子式为 0, 从而 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{O}$, $r_{\boldsymbol{A}^*} = 0$.

23. 充分性显然, 下证必要性. 设 $\sum\limits_{i=1}^{s} k_i\boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{0}$, 由 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^{s}$ 线性相关知, 存在 $1 < r \leqslant s$, 使得 $r = \max\{i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant s, k_i \neq 0\}$ (由 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \mathbf{0}$ 知 $r \neq 1$). 则通过移项可知 $\boldsymbol{\alpha}_r$ 能被 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{r-1}$ 线性表出.

24. (联系注 3.1) 充分性: 设 $\boldsymbol{\beta} = \sum\limits_{i=1}^{r} k_i\boldsymbol{\alpha}_i = \sum\limits_{i=1}^{r} l_i\boldsymbol{\alpha}_i$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{r}(k_i - l_i)\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\theta}$. 由 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^{r}$ 线性无关知 $k_i = l_i, i = 1, 2, \cdots, r$.

必要性: 若 $\boldsymbol{\beta} = \sum\limits_{i=1}^{r} k_i\boldsymbol{\alpha}_i$, 且这一线性表出是唯一的, 又设 $\sum\limits_{i=1}^{r} l_i\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\theta}$, 于是 $\boldsymbol{\beta} = \sum\limits_{i=1}^{r}(k_i + l_i)\boldsymbol{\alpha}_i$. 由 $\boldsymbol{\beta}$ 被表出的唯一性知 $l_i = 0, i = 1, 2, \cdots, r$, 所以 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^{r}$ 线性无关.

25. 设 $\boldsymbol{\beta} = \sum\limits_{i=1}^{r} k_i\boldsymbol{\alpha}_i$.

(1) 若存在 $l_1, l_2, \cdots, l_{r-1}$, 使得 $\boldsymbol{\alpha}_r = \sum\limits_{i=1}^{r-1} l_i\boldsymbol{\alpha}_i$, 则 $\boldsymbol{\beta} = \sum\limits_{i=1}^{r-1}(k_i + k_r l_i)\boldsymbol{\alpha}_i$, 矛盾.

(2) 由 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{r-1}$ 线性表出知 $k_r \neq 0$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_r = \dfrac{1}{k_r}\boldsymbol{\beta} - \sum\limits_{i=1}^{r-1} \dfrac{k_i}{k_r}\boldsymbol{\alpha}_i$.

26. 由 17 题知, 向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1} + \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_n + \boldsymbol{\alpha}_1$$

线性无关当且仅当矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

非奇异. 沿第一列展开, 易知其行列式等于 $1 + (-1)^{n+1}$. 所以这一矩阵非奇异当且仅当 n 为奇数.

27. 对任意的数 $k_1, k_2, \cdots, k_{m-1}$ 和 $l_1, l_2, \cdots, l_{m-1}$, 有

$$\sum_{i=1}^{m-1} l_i\boldsymbol{\beta}_i = \boldsymbol{\theta} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m-1} l_i(\boldsymbol{\alpha}_i + k_i\boldsymbol{\alpha}_m) = \boldsymbol{\theta} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m-1} l_i\boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\alpha}_m \sum_{i=1}^{m-1} l_i k_i = \boldsymbol{\theta}.$$

故

$$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{m-1}\text{线性无关} \Leftrightarrow \text{上式左端蕴含} l_1=l_2=\cdots=l_{m-1}=0 \Leftrightarrow$$
$$\text{上式右端蕴含} l_1=l_2=\cdots=l_{m-1}=\sum_{i=1}^{m-1} l_i k_i=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\text{线性无关}.$$

28. (1) 不妨设这 r 个线性无关向量是 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^r$. 若它们不构成 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^s$ 的极大线性无关组, 由定义 3.1.5 知, 存在 $\boldsymbol{\beta}\in\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^s$, $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^r$ 线性表出. 由引理 3.1.1 知, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关, 联系注 3.3, 这与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r 矛盾.

    (2) 不妨设这 r 个向量是 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^r$, 由定义 3.1.5, 只需再证 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^r$ 线性无关. 由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r 知, 它们中存在含 r 个向量的极大线性无关组. 由已知, 这一极大线性无关组中的 r 个向量均可由 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^r$ 线性表出, 由 11 题知 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^r$ 线性无关.

29. 由 24 题知这 r 个向量线性无关. 再由定义 3.1.5, 这些向量即构成一个极大线性无关组. 故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r.

30. 充分性: 显然 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_i\}_{i=1}^n$ 线性无关. 若它们能由 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^n$ 线性表出, 由 11 题知 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^n$ 也线性无关.
必要性: 由 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^n$ 线性无关知以它们为各列向量的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异, 从而线性方程组
$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\varepsilon}_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$
有 (唯一) 解. 这就说明 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_i\}_{i=1}^n$ 可由 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^n$ 线性表出.

31. 记这 3 个向量组分别为 I, II, III. 因为 I, II 都能由 III 线性表出, 所以 $\max(r_1,r_2)\leqslant r_3$. 另一方面, 记 IV 为 I, II 中的极大线性无关组之并, 则由于 IV 能线性表出向量组 III, 有 $r_3\leqslant r_{\mathrm{IV}}\leqslant r_1+r_2$.
推论: 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $m\times s$ 矩阵, 则 $\max(r_{\boldsymbol{A}},r_{\boldsymbol{B}})\leqslant r_{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}}\leqslant r_{\boldsymbol{A}}+r_{\boldsymbol{B}}$.

32. 完全类似于 31 题中第二个不等式的证明.
推论: 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵, 则 $r_{\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}}\leqslant r_{\boldsymbol{A}}+r_{\boldsymbol{B}}$.

33. 分别记向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\gamma}$ 为 I 和 II. 先设 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 都能由 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^m$ 线性表出. 显然这与 I, II 不等价的条件相矛盾.
再设 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 都不能由 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^m$ 线性表出, 则由引理 3.1.1, 向量组 I 线性无关. 但向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性相关, 再次使用引理 3.1.1 知, $\boldsymbol{\gamma}$ 能由 I 线性表出. 同理 $\boldsymbol{\beta}$ 能由 II 线性表出, 这与 I, II 不等价的条件相矛盾.

34. 我们知道, 方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解当且仅当 $\boldsymbol{B}$ 能由 $\boldsymbol{A}$ 的各列向量线性表出. 依题意, $(d_1,d_2,\cdots,d_m)'$ 能由

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

的各列向量线性表出, 但 $(c_1,c_2,\cdots,c_m)'$ 不能由

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms} \end{bmatrix}$$

的各列向量线性表出. 由引理 3.1.1,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & d_m \end{bmatrix}$$

的秩为 r_1,

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} & c_1 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms} & c_m \end{bmatrix}$$

的秩为 r_2+1, 再由 31 题, 所求矩阵的秩 $\leqslant r_1+r_2+1$.

35. 记方程组 (1) 的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 由 22 题, $r_{\boldsymbol{A}}=n$ 的充要条件是 $r_{\boldsymbol{A}^*}=n$, 从而方程组 (1) 有唯一解的充要条件是 (2) 有唯一解.

36. (联系 4.5 节) $s=n$ 时, 注意到任意 n 元向量 $\boldsymbol{X}$ 都是方程组

$$\boldsymbol{OX}=\boldsymbol{0} \tag{3.1}$$

的解, 即方程组 (3.1) 的解集为 $\mathbb{P}^n$. 由 13 题, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{X}$ 线性相关. 再由引理 3.1.1, $\boldsymbol{X}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出, 从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为方程组 (3.1) 的一个基础解系.

$s\neq n$ 时, 必有 $1\leqslant s<n$, 这时记 $\boldsymbol{A}_{s\times n}$ 是以 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 为第 i 行的矩阵, $i=1,2,\cdots,s$. 则由 $r_{\boldsymbol{A}}=s$ 知,

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$$

有 $n-s$ 个解构成的基础解系 $\{\gamma_i\}_{i=1}^{n-s}$. 这时有

$$\boldsymbol{\alpha}_i \cdot \boldsymbol{\gamma}_j = 0, i = 1, 2, \cdots, s, j = 1, 2, \cdots, n-s. \tag{3.2}$$

令 $\boldsymbol{C}_{(n-s)\times n}$ 是以 $\boldsymbol{\gamma}_i$ 为第 i 行的矩阵, $i = 1, 2, \cdots, n-s$. 则由 (3.2) 知, $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是方程组

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0} \tag{3.3}$$

的解, 再由 $r_{\boldsymbol{C}} = n - s$ 知, $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^{s}$ 构成方程组 (3.3) 的基础解系.

37. 提示: 第 5 章注 5.9.

考查齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ (I) 和 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ (II). I 的解一定是 II 的解. 现在设 $\boldsymbol{X}$ 为 II 的解, 则 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$, 所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$. 且

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{0} = 0.$$

这指出 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$, 所以 II 的解也是 I 的解, 从而 I, II 同解. 由定理 3.3.3, I, II 的系数矩阵的秩相等, 即 $r_{\boldsymbol{A}} = r_{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}}$. 联系 31 题推论和补充题 1 的 (1),

$$r_{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}} \leqslant r_{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}} = r_{\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})} \leqslant r_{\boldsymbol{A}'} = r_{\boldsymbol{A}} = r_{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}},$$

于是 $r_{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}} = r_{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}}$, 即方程组

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}$$

有解.

注意: 复数域中, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 不一定同解, 如

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}.$$

补充

1. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别为 $m \times n$ 矩阵和 $n \times s$ 矩阵, 则

(1) $r_{\boldsymbol{AB}} \leqslant \min(r_{\boldsymbol{A}}, r_{\boldsymbol{B}})$;

(2) (Sylvester 秩不等式)$r_{\boldsymbol{A}} + r_{\boldsymbol{B}} \leqslant n + r_{\boldsymbol{AB}}$.

证:

(1) $\boldsymbol{AB}$ 的列向量可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表出, 所以 $r_{\boldsymbol{AB}} \leqslant r_{\boldsymbol{A}}$. $\boldsymbol{AB}$ 的行向量可由 $\boldsymbol{B}$ 的行向量线性表出, 所以 $r_{\boldsymbol{AB}} \leqslant r_{\boldsymbol{B}}$.

(2) 考查 $(n+m)\times(n+s)$ 矩阵

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_{n\times n} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}_{m\times s}\end{bmatrix},$$

可以证明: $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 各自的列极大线性无关组所在的列线性无关, 因此 $r_{\boldsymbol{A}}+r_{\boldsymbol{B}}\leqslant r_{\boldsymbol{C}}$. 令

$$\boldsymbol{P}_{(n+m)\times(n+m)}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_{n\times n} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_{m\times m}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{Q}_{(n+s)\times(n+s)}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_{n\times n} & -\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{s\times s}\end{bmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{PCQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_{n\times n} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{AB}\end{bmatrix}.$$

易知 $|\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{Q}|=1$, 故 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 均可逆, 所以 $r_{\boldsymbol{C}}=r_{\boldsymbol{PCQ}}=r_{\boldsymbol{E}_{n\times n}}+r_{-\boldsymbol{AB}}=n+r_{\boldsymbol{AB}}$. 于是 $r_{\boldsymbol{A}}+r_{\boldsymbol{B}}\leqslant n+r_{\boldsymbol{AB}}$.

第四章　线性空间与线性方程组

题目

1. 判断下列集合对于所指出的合成是否构成数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间。

(1) 正整数（整数、实数、复数）全体对于通常的加法和数乘，$\mathbb{P}=\mathbb{R}$(实数域)；

(2) $\mathbb{P}$ 上的 n 阶上三角矩阵（可逆矩阵、对称矩阵、反对称矩阵）全体对于通常的矩阵加法和数乘；

(3) $\mathbb{P}$ 对于通常的 n 元向量加法和如下的数乘：

$$(\forall\alpha\in\mathbb{P}^n\&\forall k\in\mathbb{P})\,k\alpha=\alpha_0,$$

其中 α_0 为一固定元素；

(4) $(x_1,x_2)|x_1,x_2\in\mathbb{P},x_1+x_2=p\in\mathbb{P}$ 对于通常的加法和数乘，其中 p 为 $\mathbb{P}$ 中一固定数；

(5) $\mathbb{P}^2$ 对于下面的合成：

$$(\forall(x_1,x_2)\in\mathbb{P}^2,(y_1,y_2)\in\mathbb{P}^2)\,(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_2,0),$$

$$(\forall(x_1,x_2)\in\mathbb{P}^2,\&k\in\mathbb{P})\,k(x_1,x_2)=(kx_1,0);$$

(6) $\mathbb{P}$ 对于下面的合成：

$$(\forall(x_1,x_2)\in\mathbb{P}^2,(y_1,y_2)\in\mathbb{P}^2)\,(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_2,x_2),$$

$$(\forall(x_1,x_2)\in\mathbb{P}^2,\&k\in\mathbb{P})\,k(x_1,x_2)=(kx_1,x_2);$$

(7) $\mathbb{P}$ 对于下面的合成：

$$(\forall(x_1,x_2)\in\mathbb{P}^2,(y_1,y_2)\in\mathbb{P}^2)\,(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_2,x_2+y_2+x_1y_1),$$

$$(\forall(x_1,x_2)\in\mathbb{P}^2,\&k\in\mathbb{P})\,k(x_1,x_2)=(kx_1,kx_2+\frac{k(k-1)}{2}x_1^2);$$

(8) 平面上不平行于某一向量的向量全体对于通常的加法和数乘，$\mathbb{P}\in\mathbb{R}$;

(9) 令

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\omega&0\\0&0&\omega^2\end{pmatrix},\quad \omega=\frac{(-1+i\sqrt{3})}{2},$$

$\{f(A)|f(x)\in\mathbb{R}[x]\}$ 对于通常的加法和数乘,$\mathbb{P}\in\mathbb{R}$.

2. 确定下列线性空间的维数，给出它的一个基底，并写出向量在该基地下的坐标的一般表达式：

(1) 上题中的那些线性空间；

(2) $\mathbb{P}^5$ 的子空间 $G[\alpha_1,\alpha_2\alpha_3]$, 其中

$$\alpha_1=(1,1,-1,-1,2),\alpha_2=(2,1,0,1,0),\alpha_3=(3,2,-1,0,2);$$

(3) $\mathbb{P}^4$ 中，下面线性方程组的解空间：

$$\begin{cases}3x_1+2x_2-5x_3+4x_4=0\\3x_1-x_2+3x_3-3x_4=0\\3x_1+5x_2-13x_3+11x_4=0\end{cases}\tag{4.1}$$

3. 证明：实函数函数空间中，1 $\cos^2 x,\cos 2x$ 线性相关。

4. 令 V 为某一数域上的线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in V$。证明：若 $r_{\{\alpha_i\}_{i=1}^n}=r$, $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots$, α_{i_m} 为 $r\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ 中任意 m 个向量，则

$$r_{\{\alpha_{i_j}\}_{j=1}^m}\geqslant r+m-n.$$

5. 令 V 为某一数域上的一个线性空间，$\alpha_1,\ldots,\alpha_s;\beta_1,\ldots,\beta_t\in V$. 证明：若 $r_{\{\alpha_i\}_{i=1}^s}=r_1,r_{\{\beta_j\}_{j=1}^t}=r_2,r_{\{\alpha_i\}_{i=1}^s\cup\{\beta_j\}_{j=1}^t}=r_3$, 则：

$$max\{r_1,r_2\}\leqslant r_3\leqslant r_1+r_2.$$

6. 令 $A,B\in\mathbb{P}^{m\times n},C\in\mathbb{P}^{n\times p}$. 证明：$r_{A+B}\leqslant r_A+r_B,r_{AC}\leqslant r_A,r_C$, 当 A(C) 可逆时，

$$r_{AC}=r_A,(r_C)$$

7. 令 V 为某一数域上的一个 n 为线性空间，$V_1,V_2\leqslant V$. 证明：若 $dimV_1+dimV_2>n$, 则 $V_1\cap V_2$ 不是零空间。反之不然，试举例说明。

8. 令 V_1,V_2,V_3 为线性空间的子空间。证明：若 $V_1\supseteq V_2$, 则

$$V_1\cap(V_2+V_3)=(V_1\cap V_2)+(V_1\cap V_3)=V_2+V_1\cap V_3$$

举例说明，对于上述事实，条件 $V_1\supseteq V_2$ 是必要的。

9. 令 V 是某一数域上的一个 $n(n \geqslant 1)$ 维线性空间。证明：存在 V 的无限子集 S，使得 S 中任意 n 个向量都是线性无关的。

10. 假设如上题。证明：若 $V_i < V, i = 1, 2, \ldots, m$, 则存在 $\alpha \in V$, 使得 α 不属于 $V_i, i = 1, 2, \ldots, m$.

11. 令 $A \in \mathbb{P}^{n \times n}$.

    (1) 证明：
    $$C(A) = B \in \mathbb{P}^{n \times n} | AB = BA \leqslant \mathbb{P}^{n \times n};$$

    (2) 当 $A = D_{a_k, n}$ 时，其中 $a_k = k, k = 1, 2, \ldots, n$, 求 $C(A), dimC(A)$ 以及 $C(A)$ 的一个基底。

12. 令 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为数域 $\mathbb{P}$ 中 n 个两两不同的数，
$$f_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x - a_j), i = 1, 2, \ldots, n.$$
证明：
$$(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$$
为 $\mathbb{P}_{n-1}[x]$ 的一个基底。当 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为所有 n 次单位根时，求基底 $(1, x, x^2, \ldots, x^{n-1})$ 到 $(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ 的过渡矩阵。

13. 证明：维数相等的两个子空间若有包含关系，则它们必相同。

14. 证明：在任意线性空间中，若
$$\sum_{i=1}^{3} k_i \alpha_i = \theta, \text{且} k_1 k_2 \neq 0, \text{则}$$
$$G[\alpha_1, \alpha_3] = G[\alpha_2, \alpha_3].$$

15. 令 V_1, V_2 为线性空间 V 的子空间。证明 $V_1 \cup V_2 \subseteq V_1 + V_2$, 等号成立当且仅当 $V_1 \subseteq V_2$或$V_2 \subseteq V_1$.

16. 在 $\mathbb{P}^4$ 中，求由基底 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ 到基底 $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$ 的过渡矩阵，并求向量在所指基底下的坐标。

    (1)
    $$\begin{array}{ll} \varepsilon_1(1,0,0,0) & \delta_1(2,1,-1,1) \\ \varepsilon_2(0,1,0,0) & \delta_2(0,1,2,2) \\ \varepsilon_3(0,0,1,0) & \delta_3(-1,1,1,2) \\ \varepsilon_4(0,0,0,1) & \delta_4(1,3,1,8) \end{array}$$

$\alpha = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ 在 $(\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4)$ 下的坐标.

(2)

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= (1,2,-1,0), & \delta_1 &= (2,1,0,1), \\ \varepsilon_2 &= (1,-1,1,1), & \delta_2 &= (0,1,2,2), \\ \varepsilon_3 &= (-1,2,1,1), & \delta_3 &= (-2,1,1,2), \\ \varepsilon_4 &= (-1,-1,0,1), & \delta_4 &= (1,3,1,2), \end{aligned}$$

$\alpha = (1,3,1,2)$ 在 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ 下的坐标。

(3)

$$\begin{aligned} \varepsilon_1&(1,1,1,1), & \delta_1&(1,1,0,1), \\ \varepsilon_2&(1,1,-1,-1), & \delta_2&(2,1,3,1), \\ \varepsilon_3&(1,-1,1,-1), & \delta_3&(1,1,0,0), \\ \varepsilon_4&(1,-1,-1,1), & \delta_4&(0,1,-1,-1). \end{aligned}$$

$\alpha = (1,1,1,1)$ 在 $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$ 下的坐标。

17. 求非零向量 $\alpha \in \mathbb{P}^4, \alpha$ 在上题（1）的两个基底下的坐标相同。

18. 令 $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ 是 n 维线性空间 V 的一个基底。证明:

(1) $(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \cdots, (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n))$ 也是 n 维线性空间 V 的一个基底;

(2) 令向量 α 关于基底 $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ 的坐标是 $(n, n-1, \ldots, 2, 1)$. 求 α 在基底 $(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \cdots, (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n))$ 下的坐标。

19. 证明:

$$W = \{f(x) \in \mathbb{R} | f(1) = 0, \partial f(x) \leqslant n, 或 f(x) = 0\}$$

是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，并求出它的一个基底。

20. 令 $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ 是 n 维线性空间 V 的一个基底，$A \in \mathbb{P}^{n\times n}$,

$$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = ((\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)A.$$

(1) 令 $r_A = r$, 且 A 的列向量的极大线性无关组为 $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r})$. 则 β_{i_1},β_{i_2}, . . .,β_{i_r} 是 $\beta_1, \beta_2\ \ldots, \beta_s$ 的一个极大线性无关组;

(2) $dimG[\beta_1, \beta_2\ \ldots, \beta_s] = r_A$.

21. 令 V_1, V_2 是 n 维线性空间 V 的一个子空间，且

$$dim(V_1 + V_2) = dim(V_1 \cap V_2) + 1$$

. 则 $V_1 \subseteq V_2$ 或 $V_1 \supseteq V_2$.

22. 令 $V_1, V_2, \ldots, V_s$ 是 n 维线性空间 V 的 s 个真子空间。证明：在 V 中存在一个基底 $(\beta_1, \beta_2\ \ldots, \beta_n)$, 使得每个 β_j 不属于一切 $V_i (i = 1, 2, ldots,)$

23. 令 $AX = \theta$ 和 $BX = \theta$ 为数域 $\mathbb{P}$ 上线性方程组，其中 $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{s\times n}$,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

证明：若它们的一般解中含参数的个数的和大于 n，则这两个方程组有非零的公共解。

24. 令 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 和 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ 是 $\mathbb{P}^n$ 中两个线性无关的向量组，

$$V_1 = G[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s], V_2 = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t], \quad (1)$$

$$x_1\alpha_1 + \cdots + x_s\alpha_s + x_{s+1}\beta_1 + \cdots + x_{s+t}\beta_t = \theta, \quad (2)$$

W 为齐次线性方程（2）的解空间。证明：$dimW = dim(V_1 \cap V_2)$.

25. 令 W 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 维线性空间 $\mathbb{P} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in \mathbb{P}$ 的平凡子空间。证明：若关于 W 的每一个向量 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, 或者 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, 或者每一个 a_i 都不等于零，则

$$dimw = 1$$

26. 令

$$f(x), g(x) \in \mathbb{P}[x], 且 (f(x), g(x)) = 1, A \in \mathbb{P}^{n\times n}.$$

证明：齐次线性方程组

$$f(A)g(A)X = 0$$

的解空间 V 是 $f(A)X = 0$ 与 $g(A)X = 0$ 的解空间 V_1, V_2 的直和，其中

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'.$$

27. 令 $\mathbb{P}$ 为一数域，

$$\mathbb{P}_0[x] = \left\{ \sum a_i x^i | a_i \in \mathbb{P}, i \geqslant 1, i 为奇数 \right\},$$

$$\mathbb{P}_1[x] = \left\{ \sum b_i x^i | b_j \in \mathbb{P}, j \geqslant 0, j 为偶数 \right\},$$

证明：$\mathbb{P}_0[x]$ 与 $\mathbb{P}_1[x]$ 均为 $\mathbb{P}[x]$ 的子空间，且 $\mathbb{P}_0[x]$ 与 $\mathbb{P}_1[x]$ 同构。

28. 证明：实数域 $\mathbb{R}$ 作为它自身上的线性空间与正实数的全体 $\mathbb{R}^+$, 关于

$$(a, b \in \mathbb{R}^+) a \oplus b = ab, (\forall a \in \mathbb{R}^+ \& \forall k \in \mathbb{R}) k \cdot a = a_k$$

构成的 $\mathbb{R}$ 上的线性空间同构。

29. 证明：线性空间 $\mathbb{P}[x]$ 可以同它的无穷多个真子空间同构。

30. 令 A 为数域 $\mathbb{P}$ 上一 n 阶可逆矩阵。任意将 A 分成两个子块 $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, 证明：n 维线性空间 $\mathbb{P}^n$ 是齐次线性方程组 $A_1X = \theta$ 与 $A_2X = \theta$ 的解空间 V_1 与 V_2 的直和。

31. 令 A 为任一 $m \times n$ 矩阵。将 A 任意分块成

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_s \end{pmatrix},$$

证明：n 元齐次线性方程组 $AX = \theta$ 的解空间 V 是所有齐次线性方程组 $A_iX = \theta$ 的解空间的交，$i = 1, 2 \ \ldots, s$.

32. 令 V 为数域 $\mathbb{P}$ 上一 n 维线性空间，V 中有 s 组向量，每一组均含有 t 个线性无关的向量 $\beta_{i1}, \beta_{i2} \ \ldots, \beta_{it}, i = 1, 2, \ldots, s, t < n$. 证明：V 中必有 $n - t$ 个向量存在，它们与任一组的 t 个向量合在一起构成 V 的一个基底。

33. 令 V 为数域 $\mathbb{P}$ 上一线性空间。证明：不存在 V 的五个子空间 $V_1, V_2, \ldots, V_5$, 使下述四个条件均成立：

(1) $V_1, V_2, \ldots, V_5$, 两两不等；

(2) 任意两个 V_i, V_j 之和 $V_i + V_j$ 与交 $V_i \cap V_j$ 仍属于这五个子空间；

(3) $V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset V_5; V_1 \subset V_4 \subset V_5$;

(4) V_2 与 V_4, V_3 与 V_4 之间没有包含关系。

34. 证明：n 维线性空间的任何真看见均可表示为若干个 $n - 1$ 维子空间的交。

解答

1. (1) 构成线性空间的有: 实数和复数全体; 不构成线性空间的有: 正整数和整数全体.

   (2) 构成线性空间的有: 上三角, 对称和反对称矩阵全体; 不构成线性空间的有: 可逆矩阵全体.

(3) 不构成线性空间 (条件 viii 中的 “1” 不存在).

(4) $p=0$ 时构成线性空间; $p \neq 0$ 时, 加法不封闭, 不构成线性空间.

(5) 不构成 (无零元素).

(6) 不构成 (加法不满足交换律).

(7) 构成 (请同学们耐心计算, 一定要亲自动手算一下).

(8) 不构成.

(9) 构成.

2. (1) i) 实数构成的线性空间:
维数: 1 维;
基底: 整数 1;
坐标: 对于实数 r, 坐标就是 r.

ii) 复数构成的线性空间:
维数: 2 维;
基底: 1, i;
坐标: 对于复数 $a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, 坐标为 (a, b).

iii) 上三角矩阵全体构成的线性空间;
维数: $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;
基底: $\boldsymbol{E}_{ij}(i=1,2,\ldots,n; j=1,2,\ldots,n; j \geqslant i)$ (第 ij 元素为 1, 其他为 0);
坐标: 上三角矩阵上半部分每个元素的值.

iv) 对称矩阵全体构成的线性空间:
维数: $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;
基底: $\boldsymbol{E}_{ij}^{1}(i=1,2,\ldots,n; j=1,2,\ldots,n; j \geqslant i)$ (第 ij, ji 元素为 1, 其他为 0);
坐标: 对应元素的值.

v) 反对称矩阵构成的线性空间:
维数:$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;
基底: $\boldsymbol{E}_{ij}^{2}(i=1,2,\ldots,n; j=1,2,\ldots,n; j \geqslant i)$ (第 ij 元素为 1, 第 ji 元素为 -1, 其他为 0);
坐标: 对应元素的值.

vi) 第 1 题 (7) 对应的线性空间: 维数: 2 维;
基底: (0,1), (1,0);
坐标: 对 $\mathbb{P}^2$ 中的向量 (x, y) 坐标为 $\left(x, y-\dfrac{x(x-1)}{x}\right)$.

vii) 第 1 题 (9) 对应的线性空间: 维数: 3 维;
基底: $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2$;
坐标: 对于 $f(\boldsymbol{A})$, 即为其系数.

(2) 维数: 2 维;

基底: $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$;

坐标: 当 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)'$ 时, 坐标为: $\left(\frac{a_2 - a_4}{2}, \frac{a_2 + a_4}{2}\right)$.

(提示: 将 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 以列向量的形式组成一个 5×3 的矩阵, 然后进行初等行变换)

(3) 维数: 2 维;

基底: $\left(-\frac{1}{9}, \frac{8}{3}, 1, 0\right)', \left(\frac{2}{9}, -\frac{7}{3}, 0, 1\right)'$;

坐标: 对于解空间的一个向量 $(x_1, x_2, x_3, x_4)'$, 其在上述基底下的坐标为 (x_3, x_4).

3. 提示: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

4. 证明: 我们考虑如下两个方程组:

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\theta} \qquad \text{(I)}$$

$$x_{i_1}\boldsymbol{\alpha}_{i_1} + x_{i_2}\boldsymbol{\alpha}_{i_2} + \cdots + x_{i_m}\boldsymbol{\alpha}_{i_m} = \boldsymbol{\theta} \qquad \text{(II)}$$

要证原式, 只需证明:

$$n - r \geqslant m - r_{\{\alpha_{i_j}\}_{j=1}^m}.$$

上式左端为 (I) 的基础解系的向量个数, 右端为 (II) 的基础解系的向量个数. 对于方程 (II) 的每一解, 我们令方程 (I) 中除了与方程 (II) 相同的变量之外都取为 0, 则方程 (II) 的一个解可以唯一确定方程 (I) 的一个解, 所以方程 (II) 基础解系的个数小于等于方程 (I) 基础解系的个数, 故有上述不等式. □

5. 证明: 令

$$V_1 = G[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s],$$

$$V_2 = G[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_t],$$

$$V = G[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_t].$$

易知 $\dim V_1 = r_1, \dim V_2 = r_2, \dim V = r_3$; 第一个不等式显然成立, 为证第二个不等式, 我们由维数公式:

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) \geqslant \dim(V_1 + V_2),$$

即: $r_1 + r_2 \geqslant r_3$. 当且仅当向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关时等号成立. □

6. 证明:

(1) 由于 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的列向量组可以由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性表示, 故易得 $r_{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} \leqslant r_{\boldsymbol{A}}+r_{\boldsymbol{B}}$.

(2) 令

$$\boldsymbol{ACX}=\boldsymbol{\theta} \qquad (\mathrm{I})$$

$$\boldsymbol{CX}=\boldsymbol{\theta} \qquad (\mathrm{II})$$

若 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 (II) 的解, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 也是 (I) 的解, 即 (II) 的解集是 (I) 的解集的子集, 所以有

$$n-r_{\boldsymbol{C}} \leqslant n-r_{\boldsymbol{AC}} \Rightarrow r_{\boldsymbol{AC}} \leqslant r_{\boldsymbol{C}}.$$

又因为转置不改变秩, 即:

$$r_{\boldsymbol{AC}}=r_{(\boldsymbol{AC})'}=r_{\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}'}.$$

应用上面已证明的结论可得:

$$r_{\boldsymbol{AC}}=r_{\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}'} \leqslant r_{\boldsymbol{A}'}=r_{\boldsymbol{A}}, \text{即} r_{\boldsymbol{AC}} \leqslant r_{\boldsymbol{A}}.$$

所以有

$$r_{\boldsymbol{AC}} \leqslant r_{\boldsymbol{A}}, r_{\boldsymbol{C}}.$$

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为初等矩阵的乘积:

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s,$$

则

$$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{C}.$$

因为初等变换不改变矩阵的秩, 所以当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, 有 $r_{\boldsymbol{AC}}=r_{\boldsymbol{C}}$, 同理可知另外的结论. □

7. 证明: (反证法) 假设 V_1, V_2 的交是零空间, 即

$$V_1 \cap V_2=\{\boldsymbol{\theta}\},$$

则

$$\dim(V_1 \cap V_2)=0.$$

由维数公式

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1 \cap V_2)=\dim(V_1+V_2),$$

设 V_1 的基底为:

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s,$$

V_2 的基底为:

$$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_t,$$

则 $V_1 + V_2$ 的基底为:

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_t.$$

又

$$V_1, V_2 \leqslant V,$$

故

$$s + t \leqslant n.$$

即

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) \leqslant n.$$

这与 $\dim V_1 + \dim V_2 > n$ 矛盾.

反之, 在平面直角坐标系中取 $V_1 = \{(a, 0) | a \in \mathbb{R}\}$, $V_2 = \{(0, b) | b \in \mathbb{R}\}$, 则 $V_1 \cap V_2 = \{(0, 0)\}$, 但有

$$\dim V_1 + \dim V_2 = 1 + 1 = 2 = \dim V_3,$$

所以反之不成立. □

8. 证明:

(1) a) 令 $\boldsymbol{\alpha} \in V_1 \cap (V_2 + V_3)$, 则

$$\boldsymbol{\alpha} \in V_1 \text{且} \boldsymbol{\alpha} \in V_2 + V_3.$$

由 $\boldsymbol{\alpha} \in V_2 + V_3$ 知, $\exists \boldsymbol{\alpha}_2 \in V_2 \subseteq V_1, \boldsymbol{\alpha}_3 \in V_3$, 使

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3,$$

结合 $\boldsymbol{\alpha} \in V_1$, 有

$$\boldsymbol{\alpha}_2 \in V_1 \cap V_2, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_2 \in V_1 \cap V_3.$$

故

$$\boldsymbol{\alpha} \in (V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap V_3),$$

即

$$V_1 \cap (V_2 + V_3) \subseteq (V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap V_3).$$

b) 若

$$\boldsymbol{\alpha} \in (V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap V_3),$$

则 $\boldsymbol{\alpha}$ 存在分解

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_4 + \boldsymbol{\alpha}_5, \text{其中}\, \boldsymbol{\alpha}_4 \in V_1 \cap V_2, \boldsymbol{\alpha}_5 \in V_1 \cap V_3.$$

则

$$\boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5 \in V_1,$$

则

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_4 + \boldsymbol{\alpha}_5 \in V_1,$$

同理有

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_4 + \boldsymbol{\alpha}_5 \in V_2 + V_3,$$

故

$$\boldsymbol{\alpha} \in V_1 \cap (V_2 + V_3),$$

即

$$V_1 \cap (V_2 + V_3) \supseteq (V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap V_3).$$

由上得

$$V_1 \cap (V_2 + V_3) = (V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap V_3).$$

(2) 要证

$$(V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap V_3) = V_2 + V_1 \cap V_3,$$

即证

$$V_1 \cap V_2 = V_2,$$

因为

$$V_2 \subseteq V_1,$$

故显然成立, 所以结论成立. 举例略, 可参考三维欧式空间举例. □

9. 证明: 我们用同构的思想来证明该命题.

我们知道 n 维线性空间是与 $\mathbb{P}^n$ 同构的, 所以只需在 $\mathbb{P}^n$ 中说明有一个无限子集 S 满足题意即可.

我们在 $\mathbb{P}^n$ 中找下面这种类型的向量:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2^2 \\ \vdots \\ 2^{n-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3^2 \\ \vdots \\ 3^{n-1} \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} 1 \\ n \\ n^2 \\ \vdots \\ n^{n-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ n+1 \\ (n+1)^2 \\ \vdots \\ (n+1)^{n-1} \end{bmatrix}, \cdots$$

由于自然数是无限的, 所以上述向量组也是无限的. 仔细观察可以发现, 这个向量组任何 n 个向量合起来取行列式后为 Vandermonde 行列式, 由于两两自然数不为零, 所以行列式是非零的, 那么就可以说明任何 n 个向量是线性无关的, 由于同构的空间有相同的性质, 所以在 V 中我们可以找到满足题意的 S. □

10. (这个题说明了 V 的有限个真子空间的并不能覆盖 V)

证明: 我们用数学归纳法来证明这个命题吧.

i) $m=2$ 时, 令 V_1, V_2 为 V 的非平凡子空间, 任取 $\boldsymbol{\alpha} \in V \backslash V_1$, 若 $\boldsymbol{\alpha} \notin V_2$, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 即为所求; 若 $\boldsymbol{\alpha} \in V_2$, 则由 V_2 为非平凡子空间, $\exists \boldsymbol{\beta} \in V \backslash V_2$.

断言

$$(\forall k \in \mathbb{P}) k\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \notin V_2,$$

因为如果

$$k\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \in V_2,$$

则由

$$(k\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})-k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta} \in V_2,$$

产生矛盾. 现在取

$$k_1 \neq k_2,$$

则断言

$$k_1\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\ k_2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \text{ 不全都属于 } V_1,$$

因为如果全都在 V_1 中, 则

$$(k_1\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})-(k_2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=(k_1-k_2)\boldsymbol{\alpha} \in V_1,$$

矛盾, 所以必有其中之一不在 V_1 中, 且由前可知该元素也不在 V_2 中. 所以, 当 $m=2$ 的时候结论成立.

ii) 假设 $m-1$ 时结论成立, 即

$$(\exists \boldsymbol{\alpha} \in V)\boldsymbol{\alpha} \notin V_i, \quad i=1,2,\ldots,m-1.$$

若 $\boldsymbol{\alpha} \notin V_m$, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 即为所求的向量, 若 $\boldsymbol{\alpha} \in V_m$, 因为 $V_m < V$, 则

$$\exists \boldsymbol{\beta} \in V \backslash V_m,$$

构造 $k\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$, 那么仿照前面的证明, 我们可以得到

$$k\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \notin V_m.$$

接着取 $k_1 \neq k_2$, 则

$$k_1\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, k_2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$$

不能同时属于 V_i 中 $(i=1,2,\ldots,m-1)$ (这同样是仿照前面的证明). 然后取 m 个不同的数 $k_1,k_2,\ldots,k_m$, 根据抽屉原理,

$$k_1\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, k_2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\ldots,k_m\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$$

中至少有一个不在任意一个 V_i 中 $(i=1,2,\ldots,m-1)$. 又因为其不在 V_m 中, 所以便找到了一个向量满足题意. 由数学归纳法故得证. □

11. 证明:

(1) i) 因为 $\boldsymbol{E} \in C(\boldsymbol{A})$, 故 $C(\boldsymbol{A})$ 非空.

ii) 若

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}, \boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA},$$

则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A},$$

故

$$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C} \in C(\boldsymbol{A}).$$

iii) 若

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA},$$

则

$$\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})=k(\boldsymbol{AB})=k(\boldsymbol{BA})=(k\boldsymbol{B})\boldsymbol{A},$$

即

$$k\boldsymbol{B} \in C(\boldsymbol{A}).$$

综上,

$$C(\boldsymbol{A}) \leqslant \mathbb{P}^{n\times n}.$$

(2) $C(\boldsymbol{A})$ 为全体 n 阶对角矩阵. $\dim C(\boldsymbol{A})=n$. 它的一组基底为: $\boldsymbol{E}_{ii}(i=1,2,\ldots,n)$. □

12. 证明: 令

$$k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+\cdots+k_nf_n(x)=0,$$

依次将 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 代入上式, 注意 $f_i(a_i)\neq 0, i=1,2,\ldots,n$, 且 $f_i(a_j)=0, i,j=1,2,\ldots,n, i\neq j$, 我们得到

$$k_if_i(a_i)=0,\quad i=1,2,\ldots,n,$$

从而

$$k_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

故

$$(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$$

线性无关, 故其为 $\mathbb{P}_{n-1}[x]$ 的一个基底.

由 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为 n 次单位根, 得:

$$x^n - 1 = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) = (x - a_i) f_i(x).$$

又

$$a_i^n = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

故对 $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} f_i(x) &= \frac{x^n - 1}{x - a_i} = \frac{x^n - a_i^n}{x - a_i} \\ &= \frac{(x - a_i)(x^{n-1} + x^{n-2} a_i + \cdots + x a_i^{n-2} + a_i^{n-1})}{x - a_i} \\ &= x^{n-1} + x^{n-2} a_i + \cdots + x a_i^{n-2} + a_i^{n-1} \\ &= (1, x, x^2, \ldots, x^{n-1})(a_i^{n-1}, a_i^{n-2}, \ldots, a_i, 1)'. \end{aligned}$$

故 $(1, x, x^2, \ldots, x^{n-1})$ 到 $(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ 的过渡矩阵为:

$$\begin{bmatrix} a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

13. 证明: 由题

$$V_1, V_2 \leqslant V; \quad V_1 \leqslant V_2; \quad \dim V_1 = \dim V_2.$$

令 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 为 V_1 的基底, 则

$$\dim V_1 = s.$$

又

$$V_1 \subseteq V_2,$$

则

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s \in V_2.$$

因为

$$\dim V_1 = \dim V_2 = s,$$

且

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s$$

线性无关, 故其也是 V_2 的一组基底. 因为 V_1, V_2 有相同的基底, 故有

$$V_1 = V_2.$$

□

14. 证明: 由题,

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\theta}.$$

因为

$$k_1k_2 \neq 0,$$

故

$$k_1 \neq 0, k_2 \neq 0.$$

因为

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_1 + 1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_3, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = -\frac{k_1}{k_2}\boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{k_3}{k_2}\boldsymbol{\alpha}_3,$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出. 故

$$G[\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3] \subseteq G[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3].$$

同理可知

$$G[\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3] \supseteq G[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3],$$

故有

$$G[\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3] = G[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3].$$

□

15. 证明:

i) 令

$$\boldsymbol{\alpha} \in V_1 \cup V_2,$$

则

$$\boldsymbol{\alpha} \in V_1 \text{或} \boldsymbol{\alpha} \in V_2.$$

若

$$\boldsymbol{\alpha} \in V_1,$$

则由

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\theta}, \text{其中}\, \boldsymbol{\alpha} \in V_1, \boldsymbol{\theta} \in V_2$$

知

$$\boldsymbol{\alpha} \in V_1 + V_2.$$

同理若

$$\boldsymbol{\alpha} \in V_2,$$

也有

$$\boldsymbol{\alpha} \in V_1 + V_2.$$

故有

$$V_1 \cup V_2 \subseteq V_1 + V_2.$$

ii) 当

$$V_1 \subseteq V_2,$$

有

$$V_1 \cup V_2 = V_2.$$

而对于

$$\forall \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \in V_1 + V_2,$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1 \in V_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in V_2,$$

因为

$$V_1 \subseteq V_2,$$

故也有

$$\boldsymbol{\alpha}_1 \in V_2.$$

所以

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \in V_2,$$

即

$$V_1 + V_2 \subseteq V_2.$$

又显然

$$V_2 \subseteq V_1 + V_2,$$

故

$$V_2 = V_1 + V_2,$$

即有

$$V_1 \cup V_2 = V_1 + V_2.$$

当 $V_2 \subseteq V_1$ 时, 同理等号成立.

iii) 若 $V_1 \cup V_2 = V_1 + V_2$, 由第 10 题, V_1, V_2 不可能全为 $V_1 + V_2$ 的真子空间, 不妨设 $V_1 = V_1 + V_2$, 这时任取 $\boldsymbol{\beta} \in V_2$, 则 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\beta} \in V_1 + V_2 = V_1$. 所以 $V_2 \subseteq V_1$. 若 $V_2 = V_1 + V_2$, 同理可证 $V_1 \subseteq V_2$. □

16. (1) 过渡矩阵为:

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{\varepsilon}_4)^{-1}(\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2, \boldsymbol{\delta}_3, \boldsymbol{\delta}_4) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 8 \end{bmatrix},$$

坐标为:

$$\boldsymbol{A}^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 2x_1 + 16x_2 - 2x_3 - 6x_4 \\ 6x_1 + 10x_3 - 2x_4 \\ -11x_1 + 24x_2 - 5x_3 - 7x_4 \\ x_1 - 8x_2 - x_3 + 5x_4 \end{bmatrix}.$$

(2) 过渡矩阵为:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

坐标为:

$$(1, 1, 1, 0).$$

(3) 过渡矩阵为:

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

坐标为:

$$\left(1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right).$$

17. 令

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{\varepsilon}_4)$ 下的坐标为:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

我们令:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},$$

解得:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} -2k \\ -\dfrac{3}{2}k \\ -k \\ k \end{bmatrix} \text{(k 为任意常数)}.$$

18. 证明:

(1) 令

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + k_n(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_n) = \boldsymbol{\theta},$$

整理得

$$(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_2 + k_3 + \cdots + k_n)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\theta}.$$

则由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为基底, 得

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + \cdots + k_n = 0 \\ \qquad k_2 + \cdots + k_n = 0 \\ \qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad\qquad k_n = 0 \end{cases}$$

解得

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0.$$

故

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_n$$

线性无关, 也是 V 的一个基底.

(2) 易知

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$$

到

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n)$$

的过渡矩阵为:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基底 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n)$ 下的坐标为:

$$\boldsymbol{A}^{-1}\begin{bmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

□

19. 证明: 线性空间的证明就略吧, 相信看到这里的一定会知道怎么证明 (抓住定义).

令

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1} x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0 \in W.$$

由

$$f(1)=0,$$

得

$$a_n+a_{n-1}+\cdots+a_0=0,$$

即

$$a_0=-(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1).$$

故

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n+a_{n-1} x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0 \\ &= a_n x^n+a_{n-1} x^{n-1}+\cdots+a_1 x-(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1) \\ &= a_n(x^n-1)+a_{n-1}(x^{n-1}-1)+\cdots+a_1(x-1). \end{aligned}$$

故 W 的一个基底为

$$(x^n-1, x^{n-1}-1, \ldots, x-1).$$

$\square$

20. (1) 证明: 令

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_s),$$

由题:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\beta}_{i_1}, \boldsymbol{\beta}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{\beta}_{i_r}) = & \\ & ((\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}_{i_1}, (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}_{i_2}, \ldots, (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}_{i_r}).\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}k_1\boldsymbol{\beta}_{i_1}+\cdots+k_r\boldsymbol{\beta}_{i_r} &= k_1(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}_{i_1}+\cdots+k_r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}_{i_r} \\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)(k_1\boldsymbol{A}_{i_1}+\cdots+k_r\boldsymbol{A}_{i_r})=\boldsymbol{\theta},\end{aligned}$$

由

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)$$

为基底知, 其对应的矩阵可逆, 那么在

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)(k_1\boldsymbol{A}_{i_1}+\cdots+k_r\boldsymbol{A}_{i_r})=\boldsymbol{\theta}$$

两端左乘以

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)^{-1}$$

得

$$k_1\boldsymbol{A}_{i_1}+\cdots+k_r\boldsymbol{A}_{i_r}=\boldsymbol{\theta}.$$

所以有

$$k_1=k_2=\cdots=k_r=0.$$

故

$$\boldsymbol{\beta}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{\beta}_{i_r}\text{线性无关}.$$

由

$$\boldsymbol{A}_{i_1}, \boldsymbol{A}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{A}_{i_r}$$

的极大性, 可得

$$\boldsymbol{\beta}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{\beta}_{i_r}$$

得极大性. 故

$$\boldsymbol{\beta}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{\beta}_{i_r}$$

为

$$\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_s$$

的一个极大线性无关组.

(2) 证明:

$$\dim G[\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_s]$$

为

$$\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_s$$

中极大线性无关组中向量的个数, 由 (1) 知其等于 $r_{\boldsymbol{A}}$. 故得证. □

21. 证明: 由已知

$$\begin{aligned}\dim V_1 + \dim V_2 &= \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)\\ &= 2\dim(V_1 \cap V_2) + 1,\end{aligned}$$

所以有

$$(\dim V_1 - \dim(V_1 \cap V_2)) + (\dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)) = 1,$$

则有

$$\dim V_1 = \dim(V_1 \cap V_2) \text{ 或 } \dim V_2 = \dim(V_1 \cap V_2).$$

若

$$\dim V_1 = \dim(V_1 \cap V_2),$$

但又

$$V_1 \cap V_2 \subseteq V_1,$$

故

$$V_1 \cap V_2 = V_1 (\text{由 } 13 \text{ 题}).$$

易得

$$V_1 \subseteq V_2,$$

若

$$\dim V_2 = \dim(V_1 \cap V_2),$$

则同理有

$$V_2 \subseteq V_1.$$

□

22. 证明: 我们先建立 V 与 $\mathbb{P}^n$ 之间的同构, 在此基础上, V 中的向量与 $\mathbb{P}^n$ 中的一个列向量对应, V 中的真子空间与 $\mathbb{P}^n$ 中的真子空间对应. 对于题中的 $V_1, V_2, \ldots, V_s$, 我们在其中找形如

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \\ \vdots \\ a^{n-1} \end{bmatrix}$$

的向量来分别构成 $V_1, V_2, \ldots, V_s$ 的基底. (这是可以办到的) 我们按 “最坏” 情况处理. 这些子空间都是 $n-1$ 维的, 且 $n-1$ 个基底向量互不相同. 但由于正整数的无限性, 我们还是可以找到 n 个线性无关的向量, 它们是 $\mathbb{P}^n$ 的基底, 但是它们中任一个都不属于 $V_i\,(i=1,\ldots,s)$ (因为不能被 V_i 的基底线性表示). $\square$

23. 我们知道

$$\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$$

的解集中基础解系的向量个数为

$$n - r_{\boldsymbol{A}}.$$

同理 $\boldsymbol{BX} = \mathbf{0}$ 为

$$n - r_{\boldsymbol{B}}.$$

由题有, 若

$$n - r_{\boldsymbol{A}} + n - r_{\boldsymbol{B}} > n,$$

则有

$$r_{\boldsymbol{A}} + r_{\boldsymbol{B}} < n.$$

令

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix},$$

则

$$r_{\boldsymbol{C}} \leqslant r_{\boldsymbol{A}} + r_{\boldsymbol{B}} < n.$$

故方程 $\boldsymbol{CX} = \mathbf{0}$ 有非零解. 设其为 $\boldsymbol{\alpha}$, 则

$$\boldsymbol{C\alpha} = \mathbf{0}.$$

即

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}.$$

故有

$$\boldsymbol{A\alpha} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{B\alpha} = \boldsymbol{0}.$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 即为其公共非零解. $\square$

24. 证明: 由题

$$\dim V_1 = s, \quad \dim V_2 = t.$$

则由维数公式

$$\begin{aligned}\dim(V_1 \cap V_2) &= s + t - \dim(V_1 + V_2) \\ &= s + t - \dim(G[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_t]) \\ &= s + t - r_{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_t}.\end{aligned}$$

再由线性方程组解空间的理论 (定理 3.3.3), 上式等于 $\dim W$. $\square$

25. 证明: (反证法) 我们假设 $\dim W \geqslant 2$, 不妨就令 $\dim W = 2$, 则 W 中存在两个线性无关向量, 不妨令

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

且 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta} \neq \boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\alpha} \neq k\boldsymbol{\beta}$. 那么考虑

$$\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{bmatrix},$$

它不可能是 $\boldsymbol{\theta}$, 因为 $\boldsymbol{\alpha} \neq k\boldsymbol{\beta}$ (取 $k = 1$ 即知), 但其第一个分量为 0, 所以 $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} \notin W$, 矛盾. 故 $\dim W = 1$. $\square$

26. 证明: 易知

$$V_1, V_2 \leqslant V.$$

因为若

$$\boldsymbol{\alpha} \in V_1,$$

则

$$f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0} \Rightarrow f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha} = g(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} \in V,$$

故 $V_1 \leqslant V_2$. 同理 $V_2 \leqslant V$. 由

$$\begin{aligned}(f(x), g(x)) = 1 &\Rightarrow (\exists\, u(x), v(x) \in \mathbb{P}[x]) f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1 \\ &\Rightarrow (\exists\, u(x), v(x) \in \mathbb{P}[x]) f(\boldsymbol{A})u(\boldsymbol{A}) + g(\boldsymbol{A})v(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{E},\end{aligned}$$

设 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 则

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{\alpha} = (f(A)u(A) + g(A)v(A))\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2,$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = f(\boldsymbol{A})u(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = g(\boldsymbol{A})v(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha},$$

则

$$g(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}_1 = g(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{A})u(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha} = u(\boldsymbol{A})(f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0},$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1 \in V_2$. 同理有 $\boldsymbol{\alpha}_2 \in V_1$, 即有 $V = V_1 + V_2$.

现在令 $\boldsymbol{\beta} \in V_1 \cap V_2$, 则有

$$f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}, \quad g(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}.$$

于是

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{\beta} = (f(\boldsymbol{A})u(\boldsymbol{A}) + g(\boldsymbol{A})v(\boldsymbol{A}))\boldsymbol{\beta} = u(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\beta} + v(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0},$$

即

$$V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\},$$

综上

$$V = V_1 \oplus V_2.$$

□

27. 证明: 容易验证

$$(\forall f(x), g(x) \in \mathbb{P}_0[x])\, f(x) + g(x) \in \mathbb{P}_0[x],$$

$$(\forall f(x) \in \mathbb{P}_0[x], \forall k \in \mathbb{P})\, kf(x) \in \mathbb{P}_0[x].$$

故 $\mathbb{P}_0[x]$ 为 $\mathbb{P}[x]$ 的子空间, 同理 $\mathbb{P}_1[x]$ 也是 $\mathbb{P}[x]$ 的子空间. 下面我们说明 $\mathbb{P}_0[x]$ 与 $\mathbb{P}_1[x]$ 之间有同构关系.

我们建立这样的映射, 对 $\forall \sum a_i x^i \in \mathbb{P}_0[x]$,

$$\varphi(\sum a_i x^i) = \sum a_i x^{i-1} \in \mathbb{P}_1[x].$$

我们首先可以证明 φ 是单射且是满射, 接着证明其满足线性关系, 则可以说明 $\mathbb{P}_0[x]$ 与 $\mathbb{P}_1[x]$ 有同构关系. 这些相信大家都是可以证明的, 就不再写了. □

28. 证明: 令 $\varphi(a) = e^a$, 显然 $\varphi(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}^+$ 的双射.

因为

$$\varphi(a+b) = e^{a+b} = e^a \cdot e^b = \varphi(a) \oplus \varphi(b),$$

$$\varphi(ka) = e^{ka} = (e^a)^k = k \cdot e^a = k \cdot \varphi(a),$$

故 φ 为 $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ 的一个同构映射. 于是 $\mathbb{R}^+$ 与 $\mathbb{R}$ 同构. □

29. 证明: 我们先来证明 $\mathbb{P}[x]$ 可以与其一个真子空间同构.

令

$$V = \{f(x)u_0(x) \,|\, f(x) \in \mathbb{P}[x], u_0[x]\text{为一个固定多项式}\},$$

令

$$\varphi(f(x)) = f(x)u_0(x).$$

易知 φ 为一双射, 且

$$\varphi(f_1(x) + f_2(x)) = (f_1(x) + f_2(x))u_0(x) = \varphi(f_1(x)) + \varphi(f_2(x)),$$

$$\varphi(kf(x)) = kf(x)u_0(x) = k\varphi(f(x)).$$

故存在 $\mathbb{P}[x]$ 与 V 的一个同构映射, 这个映射与 $u_0(x)$ 有关. 我们改变 $u_0(x)$ 为 $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$, 故有无穷多个真子空间与 $\mathbb{P}[x]$ 同构. □

30. 证明: 由 31 题, 得

$$V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}.$$

设 $\boldsymbol{A}_1$ 的秩为 $n-r$, $\boldsymbol{A}_2$ 的秩为 r, 则

$$\dim V_1 = n - r, \quad \dim V_2 = r.$$

取 V_1 的基底:

$$\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

V_2 的基底为:

$$\boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_r.$$

令

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r} + k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{\eta}_r = \mathbf{0},$$

令

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}, \quad \boldsymbol{\beta} = -(k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{\eta}_r),$$

则有

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}.$$

又

$$\boldsymbol{\alpha} \in V_1, \boldsymbol{\beta} \in V_2, \text{且} V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\},$$

故

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0},$$

故

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0.$$

故

$$\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}, \boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_r$$

为 V 的一个基底, 所以 $V = V_1 \oplus V_2$. □

31. 证明:

i) 若 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 即

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_s \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}.$$

故

$$\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \ldots, s,$$

即

$$\boldsymbol{\alpha} \in V_i, \quad , i = 1, 2, \ldots, s.$$

故

$$\boldsymbol{\alpha} \in V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_s,$$

故

$$V \subseteq V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_s.$$

ii) 若

$$\boldsymbol{\alpha} \in V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_s,$$

则

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \ldots, \boldsymbol{A}_s\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0},$$

故

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_s \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{\alpha} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_s\boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

即 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 即 $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_s \subseteq V$.

综上有 $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_s = V$. □

32. 证明: 在这一个题目里, 我们还是借助同构的思想, 和前面的第 9 题和第 22 题类似, 并且要找的向量和前面的也一样, 所以就不详细写过程了, 看到这里的小伙伴们一定知道怎么做.

33. 证明: 假设满足四个条件的子空间存在, 我们来推出矛盾.

由条件 (2) (3) (4) 得:

$$V_2 \cap V_4 = V_3 \cap V_4 = V_1,$$
$$V_2 + V_4 = V_3 + V_4 = V_5.$$

则由维数公式

$$\dim V_2 + \dim V_4 = \dim(V_2 + V_4) + \dim(V_2 \cap V_4) = \dim V_5 + \dim V_1,$$
$$\dim V_3 + \dim V_4 = \dim(V_3 + V_4) + \dim(V_3 \cap V_4) = \dim V_5 + \dim V_1.$$

故推得

$$\dim V_2 = \dim V_3, \quad \text{又} V_2 \subseteq V_3,$$

所以由 13 题的结论, 我们有

$$V_2 = V_3,$$

矛盾, 故不存在满足题意的子空间. □

34. 证明: 让我们一起来考虑一个 n 元方程吧. (还是借助了同构的方法)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0$$

各系数不全为零时, 我们知道其解空间是 $n-1$ 维的. 由 31 题, 我们令

$$\boldsymbol{A}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}),$$

则 $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的解空间均为 $n-1$ 维 $(i = 1, 2, \ldots, s)$, 且其交为 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 的解空间, 其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_s \end{bmatrix}.$$

这个解空间维数为 $n - r_{\boldsymbol{A}}$. 由于 $r_{\boldsymbol{A}} \geqslant 1$, 故有

$$0 \leqslant n - r_{\boldsymbol{A}} < n,$$

即 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 的解空间为 $\mathbb{P}^n$ 的真子空间. 如此即证明了 $\mathbb{P}^n$ 的任何真子空间都可以表示为若干个 $n-1$ 维子空间的交. 由 n 维线性空间与 $\mathbb{P}^n$ 的同构关系, 即得原命题也成立. □

第五章 对称双线性度量空间与线性方程组

习题

1. 令 V 为数域 P 上一 3 维线性空间，$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ 为 V 的一个基底.
   (1) 若 f 为 V 上一线性函数, 使得

$$f(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = 1, f(\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3) = -1, f(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = -3.$$

   求 $f(x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3)$. (2) 求线性函数 f, 使得

$$f(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) = f(\varepsilon_1 - 2\varepsilon_3) = 0, f(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = 1.$$

2. 令 V 为数域 P 上一 n 维线性空间. 证明: 若 V 上线性函数 f 非零 (不是零函数), 即

$$(\exists \in V) \quad f(\alpha) \neq 0,$$

   则存在 V 的一个人基底 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, 使得

$$(\forall \alpha \in V), f(\alpha) = x_1^\alpha$$

   其中 x_1^α 为 α 在该基底下的第一个坐标分量.

3. 令 V 为数域 P 上一 n 维线性空间,$f_1, f_2, \cdots, f_k$ 为 V 上 k 个线性函数. (1) 证明:

$$W = \alpha \in V | f_i(\alpha) = 0, i = 1, 2, \cdots, k \leq V,$$

   称 W 为 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 的零化子空间;
   (2) 证明: 若 $W \leq V$, 则存在 V 上的线性函数 $f_1, f_2, \cdots, f_k$, 使得 W 为 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 的零化子空间.
   注意: 这里从全新角度讨论了 4.5 节的内容.

4. 令 $A \in p^{m\times m}$, 定义 P 上线性空间 $p^{m\times n}$ 上一二元函数 f 如下

$$(\forall X, Y \in P^{m\times n}) \quad f(X,Y) = tr(X'AY)$$

(1) 证明:f 为 $P^{m\times n}$ 上的上线性函数;

(2) 求 f 在基底 $(E_{11}, \cdots, E_{1n}, E_{21}, \cdots, E_{2n}, \cdots, E_{m1}, \cdots, E_{mn})$ 下的度量矩阵, 其中 E_{ij} 为 (i,j) 为 1 而其他元素为零的 $m \times n$ 矩阵.

5. 在 P 上线性空间 P^4 上定义以下双线性函数 f 如下:

$$(\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) \qquad X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in P^4)$$

$$f(X,Y) = 3x_1y_2 - 5x_2y_1 + x_3y_4 - 4x_4y_3,$$

(1) 求 f 在基底 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ 下的度量矩阵, 其中

$$\varepsilon_1 = (1,-2,-1,0), \qquad \varepsilon_2 = (1,-1,1,0)$$
$$\varepsilon_3 = (-1,2,1,1), \qquad \varepsilon_4 = (-1,-1,0,1)$$

(2)(1) 求 f 在基底 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ 下的度量矩阵, 其中

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)T$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. 令 V 是复线性空间,$dimV > 1$,f 为 V 上一对称双线性函数.

(1) 证明:

$$(\exists \theta \neq \zeta \in V) \quad f(\zeta,\zeta) = 0;$$

(2) 证明: 若 f 非奇异, 则存在线性无关向量 ζ, η, 使得

$$f(\zeta,\eta) = 1, f(\zeta,\zeta) = f(\eta,\eta) = 0.$$

7. 令 V 为数域 P 上一 n 维线性空间 ,$V_1 < V, \zeta \notin V_1, f$ 为 V 上一双线性函数. 证明:

$$(\exists 0 \neq \eta \in V_1 + G[\zeta])(\forall \alpha \in V_1) \quad f(\zeta, \alpha) = 0.$$

8. 假设如第七题.

(1) 证明: 若 $V_1 \bigcap V_2^{\perp} = \theta$, 则 $V = V_1 + V_1^{\perp}$;

(2) 证明: 若 f 限制在 V_1 上非奇异, 则 $V = V_1 + V_1^{\perp}$. 并证明 f 在 $V_1^{\perp}$ 上非奇异当且仅当 f 在 V 上非奇异.

9. 令 $A \in R^{n\times n}$ 为正定矩阵, 在线性空间 R^n 上定义

$$(\forall\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) \qquad \beta = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in P^4)$$

$$(\alpha, \beta) = \alpha' A\beta.$$

(1) 证明:(α, β) 为 R^n 上一内积;

(2) 求 (α, β) 在 R^n 的自然基底下的度量矩阵;

(3) 具体写出此空间的柯西不等式.

10. 在 Euclid 空间 R^4 中, 求 α, β 的夹角 $<\alpha, \beta>$:

(1)$\alpha = (2,1,3,2), \beta = (1,2,-2,1)$;

(2)$\alpha = (1,2,2,3), \beta = (3,1,5,1)$;

(3)$\alpha = (1,1,1,2), \beta = (3,1,-1,0)$.

11. 在 Euclid 空间 R^4 中, 求一与 $(1,1,-1,1), (1,-1,-1,1), (2,1,1,3)$ 正交的单位向量 $(x-1, x_2, x_3, x_4)$.

12. 令 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ 为 3 维 Euclid 空间 V 的一个标准正交基底. 证明:$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 也是 V 的一个标准正交基底, 其中

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}(2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3)$$
$$\alpha_2 = \frac{1}{3}(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3)$$
$$\alpha_3 = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3)$$

13. 令 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5)$ 为 5 维 Euclid 空间 V 的一个标准正交基底.$G[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, 其中

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_5$$
$$\alpha_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4$$
$$\alpha_3 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

求 V_1 的一个标准正交基底.

14. 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+ & x_2- & x_3+ & x_4 & -3x_5 & =0 \\ x_1+ & x_2- & x_3 & & +x_5 & =0 \end{cases}$$

的解空间的一个标准正交基底.

15. 在 $R_3[x]$ 关于

$$(f(x),g(x))=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

构成的 Euclid 空间中, 将基底 $(1,x,x^2)$ 标准正交化.

16. 令 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 实对称. 证明:A 正定当且仅当 A 的顺序主子式

$$|A_k|=|a_{ij}|_{k\times k}>0, k=1,2,\cdots,n.$$

17. 令 V 为一 n 维 Euclid 空间,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关当且仅当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的 Gram 矩阵的行列式

$$|G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)|\neq 0.$$

18. 令 V_1,V_2 为 Eucild 空间 V 的子空间. 证明:

$$(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\bigcup V_2^{\perp},$$
$$(V_1\bigcap V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}+V_2^{\perp}$$

19. 令 V 为一 n 维 Euclid 空间,$\alpha\neq\theta$ 是 V 中一固定向量. 证明:
(1)$V_1=\beta|(\beta,\alpha)=0,\beta\in V\ V\quad;$
(2)$dimV_1=n-1$.

20. (1) 证明: 在任意非零 Euclid 空间 V 中一定存在向量 $\alpha_1\neq\beta_1$, 使得

$$(\alpha_1,\beta_1)>0;$$

也同时存在 $\alpha_2\neq\beta_2$, 使得

$$(\alpha_2,\beta_2)<0.$$

(2) 令 M 为内积为正的一切向量对 $\alpha,\beta((\alpha,\beta)>0)$ 所做成的集合, 而 N 为内积为负的一切向量对 $\alpha,\beta((\alpha,\beta)>0)$ 所做成的集合. 证明:M 与 N 之间存在一个双射.

21. 令 V 为一 n 维 Euclid 空间. 证明: 对于任意 $\alpha,\beta,\gamma\in V$, 有

$$d(\alpha,\beta)-d(\beta,\gamma)\le d(\alpha,\gamma)\le d(\alpha,\beta)+d(\beta,\gamma)$$

22. 令 V 为一 n 维 Euclid 空间,α 为 V 中一向量. 证明:
(1)$f(\beta)=(\beta,\gamma)$ 定义 V 上一线性函数 f.
(2) 若 g 由 $g(\eta)=(\eta,\beta)$ 定义,$\beta\neq\alpha$, 则 $f\neq g$;
(3) 对于 V 上任意线性函数 f, 都存在向量 α, 使得 f 可由 $f(\eta)=(\eta,\alpha)$ 定义.

23. 令 α,β 为 n 维 Euclid 空间 V 中两个不同的向量, 证明 $(\alpha,\beta)\neq 1$.

24. 令 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 为 Euclid 空间 V 的两组向量. 证明: 若

$$(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j),\qquad i,j=1,2,\cdots,m,$$

则子空间 $V_1=G[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m],V_2=G[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m]$ 是 Euclid 同构的.

25. 令 V_1,V_2 为一 n 维 Euclid 空间 V 的子空间, 且 $dimV_1<dimv_2$. 证明:V_2 中有非零向量与 V_1 正交.

26. 令 α 是 Euclid 空间 V 中一非零向量,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in V$ 满足条件
(1)$(\alpha_i,\alpha)>0,i=1,2,\cdots,n$;
(2)$(\alpha_i,\alpha_j)\le 0,i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j$.
证明:$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

27. 令 V 为一 n 维 Euclid 空间. 证明:V 中至多有 $n+1$ 个向量, 其两两夹角都为钝角.

28. 在 Euclid 空间 R^n 中, 证明: 非零向量 α,β 正交的充分必要条件是 $|\alpha+\beta|=|\alpha-\beta|$.

29. 令 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的一个标准正交向量组. 证明: 对于 V 中任意向量 β 有不等式

$$\sum_{i=1}^{m}(\beta,\alpha_i)^2\le|\beta|^2.$$

30. 求下列线性方程组的最小二乘解 (精确到小数点后两位数字):

$$\begin{cases}0.39x-1.89y=1\\0.61x-1.80y=1\\0.93x-1.68y=1\\1.35x-1.50y=1\end{cases}$$

并用" 向量到子空间的距离" 的语言表述这一解的几何意义.

解答

1. (1)

$f(\varepsilon_1+\varepsilon_3)=f(\varepsilon_1)+f(\varepsilon_3)=1$

$f(\varepsilon_2-2\varepsilon_3)=f(\varepsilon_2)-f(2\varepsilon_3)=-1$

$f(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=f(\varepsilon_1)+f(\varepsilon_2)=-3$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f(\varepsilon_1)\\f(\varepsilon_2)\\f(\varepsilon_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}f(\varepsilon_1)&f(\varepsilon_2)&f(\varepsilon_3)\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}4&-7&-3\end{pmatrix}^T$

$f(x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3)=4x_1-7x_2-3x_3$

(2):

定义。

$f(\varepsilon_1+\varepsilon_3)=f(\varepsilon_1)+f(\varepsilon_3)=0$

$f(\varepsilon_1-2\varepsilon_3)=f(\varepsilon_1)-f(2\varepsilon_3)=0$

$f(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=f(\varepsilon_1)+f(\varepsilon_2)=1$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&-2\\1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f(\varepsilon_1)\\f(\varepsilon_2)\\f(\varepsilon_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}f(\varepsilon_1)&f(\varepsilon_2)&f(\varepsilon_3)\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}0&1/2&0\end{pmatrix}^T$

2. (考虑 $f^{-1}(0)$) 由于存在 α 使得 $f(\alpha)=k\neq 0$, 记: $\frac{\alpha}{k}=\alpha^*$, 并令 $\alpha^*=\alpha_1$, 再取 $\alpha_2,\alpha_3\cdots,\alpha_n$, 使得 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 为一基底。

则 $\forall\alpha\in V,f(\alpha)=f(x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n)=k=kf(\alpha^*)=f(k\alpha^*)$

$\Rightarrow f((x_1-k)\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n)=0$

只需令:$f(\alpha_1)=1$, 其余为零即可.

3. (1):

显然若 $\forall\alpha,\beta\in W,k\in P$, 则: $\alpha+\beta\in W,k\alpha\in W$

故 $W\leq V$

(2);

设: $dimW=m,dimV=n$, 若 $m=n$, 则令 f 为一零函数即可。

若 $m<n$, 设 $V=G[\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\cdots,\alpha_n],W=G[\alpha_1,\cdots,\alpha_m]$, 因为 V 上所有的线性函数的集合 $L(V,P)$ 到 P^n 的双射。

故存在 $f_k(\alpha_i)=0,f_k(\alpha_{k+m})=1(i=1,2,\cdots,m\quad k=1,2,\cdots,n-m)$, 使得 $\forall\alpha\in W,f_k(\alpha)=0$, 故 W 为零化子空间.

4. (1):

$f(X,kY+lZ)=tr(X'A(kY+lZ))=ktr(X'AY)+ltr(X'AZ)=kf(X,Y)+lf(X,Z)$

同理可得：$f(kY+lZ,X)=kf(Y,X)+lf(Z,X)$

(2):

$f(E_{ij},E_{lk})=a_{il}\quad if\quad j=k$

否则：为零。

5. (1)

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 & -14 \\ -1 & 2 & 2 & -7 \\ 0 & -11 & 1 & 14 \\ 15 & 4 & -15 & -2 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} -6 & 46 & 8 & 24 \\ -18 & 26 & 16 & -72 \\ -2 & -38 & 0 & 0 \\ -6 & 86 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. (1):

由于 $dimV>1$，故 $\exists\alpha,\beta\in V,st\quad\alpha,\beta$ 线性无关

设 $f(\alpha,\alpha)=a,f(\beta,\beta)=b.$

i): 当 a,b 中至少有一个为零时，符合题意。

ii): 若二者皆不为零，则 $f(\alpha+t\beta,\alpha+t\beta)=f(\beta,\beta)t^2+2f(\alpha,\beta)t+f(\alpha,\alpha)$

$t\in C$ 有解 t_1，因此 $\exists\eta=\alpha+t_1\beta\quad st\quad f(\eta,\eta)=0.$

(2):

由(1)可得，$\exists\zeta\in V,st\quad f(\zeta,\zeta)=0$，又因为 f 非奇异，因此 $\exists\theta\in V,st\quad f(\zeta,\theta)=b\neq 0$

故 $f(\zeta,\frac{\theta}{b})=1.$

令 $\frac{\theta}{b}=\xi$

i): 若 $f(\xi,\xi)=0$，则令 $\eta=\xi$ 即可。

ii): 若 $f(\xi,\xi)=a$，则令 $\eta=\xi+t\zeta$

$f(\zeta,\xi+t\zeta)=f(\zeta,\xi)=1$

$f(\xi+t\zeta,\xi+t\zeta)=f(\xi,\xi)+2tf(\xi,\zeta)+t^2f(\zeta,\zeta)=0\Rightarrow t=-\frac{a}{2}$

故令 $\eta=\xi-\frac{a}{2}\zeta$，即有 $f(\eta,\eta)=0$

7. 即证 $\eta\in V^{\perp}\Rightarrow(V_1+G[\zeta])\bigcap V_1^{\perp}\neq 0.$

设 $dimV_1=m$，由于 $V_1\bigcap G[\zeta]=\{0\}$，故 $dim(V_1+G[\zeta])=m+1,dimV_1^{\perp}=n-m,$

故由维数公式即可知 $dim((V_1+G[\zeta])\bigcap V_1^{\perp})\neq 0.$

8. (1):

$V_1+V_1^{\perp}\in V$ 显然

由于 $dim(V_1 \bigcap V_1^{\perp}) = 0$, 故 $dim(V_1 + V_1^{\perp}) = n = dimV$
$\Rightarrow V = V_1 \bigoplus V_1^{\perp}$
(2):
只需由 f 在 V_1 上非奇异 $\Rightarrow V_1 \bigcap V_1^{\perp} = 0$ 即可
由二者之定义即可得到。
$(\forall \Theta \neq \alpha \in V_1)(\exists \beta \in V) f(\alpha, \beta) \neq 0.$
$V^{\perp} = \alpha \in V | (\forall \beta \in V_1) f(\alpha, \beta) = 0 \leq V$
显然，$V_1 \bigcap V_1^{\perp} = 0.$
$(\forall \Theta \neq \alpha \in V_1)(\exists \beta \in V) f(\alpha, \beta) \neq 0.$
a): 若 f 在 $V_1^{\perp}$ 上非奇异, 所以 $V = V_1 \bigoplus V_1^{\perp}$.
又可得：若 f 在 $V_1^{\perp}$ 上非奇异，那么其在 V_1 上非奇异. 若否，与直和矛盾。
因此 $\forall \Theta \neq \alpha \in V$, 若 $\alpha \in V_1$, 则 $\exists \alpha_1 \in V_1$ 使得命题成立。
若 $\alpha \in V_1^{\perp}$ 则 $\exists \alpha_1 \in V_1^{\perp}$ 使得命题成立。
故 $\forall \Theta \neq \alpha \in V \exists \alpha_1 \in V st \quad f(\alpha, \alpha_1) \neq 0$. 必要性得证
b): 若 f 在 V 上非奇异，而 f 在 $V_1^{\perp}$ 上奇异，则 $\exists \beta \in V_1^{\perp}, st \quad \forall \beta_1 \in V_1^{\perp}, f(\beta, \beta_1) = 0,$
又因为 $\forall \beta_2 \in V_1$ 有，$f(\beta, \beta_2) = 0.$
因此 $\exists \beta \in V, st \quad \forall \beta_3 \in V, f(\beta, \beta_3) = 0$, 故 f 在 V 上奇异，矛盾。
故 f 在 $V_1^{\perp}$ 上非奇异.

9. (1):
由正定矩阵的性质可得。
(2):
作矩阵；$B = \begin{pmatrix} (\varepsilon_1, \varepsilon_1) & (\varepsilon_1, \varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_1, \varepsilon_n) \\ (\varepsilon_2, \varepsilon_1) & (\varepsilon_2, \varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_2, \varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varepsilon_n, \varepsilon_1) & (\varepsilon_n, \varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_n, \varepsilon_n) \end{pmatrix}$ 得到 $A = B$
(3):
$Cauchy - Bunjakovski : (\alpha, \beta)^2 \leq (\alpha, \alpha)(\beta, \beta)$
直接写出即可

10. (1):$< \alpha, \beta >= cos^{-1}(\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}) = cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$
(2):$< \alpha, \beta >= cos^{-1}(\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}) = cos^{-1}(45^{\circ}) = \frac{\pi}{4}$
(3):$< \alpha, \beta >= cos^{-1}(\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}) = cos^{-1}(\frac{3}{\sqrt{77}})$

11. 由题意可得：

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & =0 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & =0 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & +3x_4 & =0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解得 $\begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}^T$ 为一所求解

12. 首先

$$|\alpha_1| = \tfrac{1}{9}(4+4+1) = 1$$

$$|\alpha_2| = \tfrac{1}{9}(4+1+4) = 1$$

$$|\alpha_3| = \tfrac{1}{9}(1+4+4) = 1$$

又有:

$$(\alpha_1, \alpha_2) = \tfrac{1}{9}(4-2-2) = 0$$

$$(\alpha_1, \alpha_3) = \tfrac{1}{9}(2-4+2) = 0$$

$$(\alpha_3, \alpha_2) = \tfrac{1}{9}(2+2-4) = 0$$

故命题得证。

13. 由线性无关的定义可知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。
事实上:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha + k_3\alpha_3 = (k_1+k_2+2k_3)\varepsilon_1 + (k_3-k_2)\varepsilon_2 + k_1\varepsilon_3 + k_4\varepsilon_\varepsilon 4 + k_5\varepsilon_5$$

$\Longrightarrow k_i = 0$
由 Smith 正交化法可得

$$\beta_1 = \alpha_1\varepsilon_1 + \varepsilon_5$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \frac{1}{2}\varepsilon_5$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_5$$

现只需将其标准化化即可
$|\beta_1| = \sqrt{2}, |\beta_2| = \frac{\sqrt{10}}{2}, |\beta_3| = 2$

14. 解得

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\varepsilon_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\varepsilon_1=\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

同上有:
$\beta_1=(0,1,1,0,0),\beta_2=(-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1,0),\beta_3=(1,\frac{1}{2},\frac{5}{2},3,1)$
标准化即可

15.

$$\beta_1=1$$

$$\beta_2=x-\frac{(x,1)}{(1,1)}=x-\frac{1}{2}$$

$$\beta_3=x^2-\frac{(x^2,1)}{(1,1)}-\frac{(x^2,x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2},x-\frac{1}{2})}(x-\frac{1}{2})=x^2-\frac{2}{7}x-\frac{4}{21}$$

$$|\beta_1|=\sqrt{2}$$

$$|\beta_2|=\frac{\sqrt{42}}{6}$$

16. 必要性:
令:

$$\forall\varepsilon_i=(\delta_{i1},\delta_{i2},\cdots,\delta_{in})$$

$$\delta_{ij}\neq 0(j\leq i)$$

$$\delta_{ij}=0(j>i)$$

由于 A 正定，则有

$$\varepsilon_i A\varepsilon_i^T>0$$

$$\Rightarrow(\delta_{i1},\delta_{i2},\cdots,\delta_{ii})A_i(\delta_{i1},\delta_{i2},\cdots,\delta_{ii})^T>0$$

$$\Rightarrow|A_i|>0$$

充分性:
运用数学归纳法证明。

i)$k=1$ 时，显然成立。ii) 假设当 $k=n-1$ 时，其结果成立，则当 $k=n$ 时：
令：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_n n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & O \\ -\alpha^T A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_n n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & -A_{n-1}^{-1} \\ O & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{n-1} & O \\ O & a_{nn}-\alpha^T A_{n-1}^{-1}\alpha \end{pmatrix}$$

有又因为 $\exists n-1$ 阶可逆矩阵 G，

$$st \quad G'A_{n-1}G=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_{n-1} \end{pmatrix}$$

令:$T_2=\begin{pmatrix} G & O \\ O & 1 \end{pmatrix}$

则:$T_2'T_1'A_nT_1T_2=\begin{pmatrix} G^T & O \\ O & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{n-1} & O \\ O & d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G & O \\ O & 1 \end{pmatrix}$

. $$=\begin{pmatrix} G^T A_{n-1}G & O \\ O & d_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

其中 $d_n=a_{nn}-\alpha^T A_{n-1}^{-1}\alpha$
$|T_2'T_1'A_nT_1T_2|=|T_1|^2|T_2|^2|A_n|=\Pi_{i=1}^{n}\Rightarrow d_n>0$

17.

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$$

$\Rightarrow$

$$k_1(\alpha_1,\alpha_1)+k_2(\alpha_2,\alpha_1)+\cdots+k_n(\alpha_n,\alpha_1)=0$$
$$k_1(\alpha_1,\alpha_2)+k_2(\alpha_2,\alpha_2)+\cdots+k_n(\alpha_n,\alpha_2)=0$$
$$\vdots$$

$$k_1(\alpha_1,\alpha_n)+k_2(\alpha_2,\alpha_n)+\cdots+k_n(\alpha_n,\alpha_n)=0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_1) & \cdots & (\alpha_n,\alpha_1) \\ (\alpha_1,\alpha_2) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_n,\alpha_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\alpha_1,\alpha_n) & (\alpha_2,\alpha_n) & \cdots & (\alpha_n,\alpha_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

此方程有零解当且仅当系数矩阵可逆，即：

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关 $\Rightarrow |G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)|\neq 0$

18. (1):
先证：$(V_1+V_2)^{\perp}\subset V_1^{\perp}\bigcap V_2^{\perp}$
$\forall\alpha\in V_1+V_2$
$\exists\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2,st\quad \alpha=\alpha_1+\alpha_2$
若 $\beta\in(V_1+V_2)^{\perp},\forall\alpha\in V_1+V_2$，有 $(\alpha,\beta)=0$，分别令 $\alpha_1=0,\alpha_2=0$，则有 $(\alpha_2,\beta)=0,(\alpha_1,\beta)=0$
由 α_1,α_2 的任意性，可得：$\beta\in V_1^{\perp}$ 且 $\beta\in V_2^{\perp}$
即：$(V_1+V_2)^{\perp}\subset V_1^{\perp}\bigcap V_2^{\perp}$
再证：$(V_1+V_2)^{\perp}\supset V_1^{\perp}\bigcap V_2^{\perp}$
$\forall\beta\in V_1^{\perp}\bigcap V_2^{\perp}$
$(\alpha,\beta)=(\alpha_1,\beta)+(\alpha_2,\beta)=0\Rightarrow\beta\in(V_1+V_2)^{\perp}$
(2):
先证：$dim((V_1\bigcap V_2)^{\perp})=dim(V_1^{\perp}+V_2^{\perp})$
$dim(V_1^{\perp}+V_2^{\perp})=dimV_1^{\perp}+dimV_2^{\perp}-dim(V_1^{\perp}\bigcap V_2^{\perp})$
$=2n-dimV_1-dimV_2-dim((V_1+V_2)^{\perp})$
$=n-dimV_1-dimV_2+dim(V_1+V_2)$
$=n-dim(V_1\bigcap V_2)$
$=dim((V_1\bigcap V_2)^{\perp})$
再证：$(V_1\bigcap V_2)^{\perp}\supset V_1^{\perp}+V_2^{\perp}$
$\forall\beta_1\in V_1^{\perp},\beta_2\in V_2^{\perp},(\beta_1+\beta_2,\alpha)=(\beta_1,\alpha)+(\beta_2,\alpha)=0$
由第四章第十三题引理可证命题成立。

19. (1):$(\beta-\gamma,\alpha)=(\beta,\alpha)-(\gamma,\alpha)=0\Rightarrow\beta-\gamma\in V_1$
$(k\beta,\alpha)=0\Rightarrow k\beta\in V_1$
故其为 V 的一个子空间
(2): 以 $\frac{\alpha}{|\alpha|}$ 为 β_1，找出 V 的一组正交基底 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 可知 $(\beta_1,\beta_i)=0(i=2,3,\cdots,n)$ 故 $V_1=G[\beta_2,\cdots,\beta_n]$
即 $dimV_1=n-1$

20. (1):

由于 $\forall\alpha\neq 0$ 有 $(\alpha,\alpha)>0$, 故 $(2\alpha,\alpha)>0(2\alpha,-\alpha)<0$.

(2):

$\forall\eta\in M$，有 $-\eta\in N$, 因此 M 中的元素与 N 的的一个子集中的元素一一对应。

同理，N 中的元素与 M 的一个子集中的元素一一对应。故 N 中的元素与 M 中的元素一一对应

或者做一个映射:

$$\varphi: M\to N$$
$$\{\alpha,\beta\}\to\{-\alpha,\beta\}$$

证 φ 是单射和 φ 是满射即可.

21.

$$d(\alpha,\gamma)=|\alpha-\gamma|\leq|\alpha-\beta|+|\beta-\gamma|=d(\alpha,\beta)+d(\beta,\gamma)$$

同理，将不等式左侧移项，可得:

$$d(\alpha,\gamma)+d(\beta,\gamma)\geq d(\alpha,\beta)$$

22. (1):$f(k\gamma+l\beta)=(k\gamma+l\beta,\alpha)=kf(\beta)+lf(\gamma)$

(2): 若 $f=g$, 则: $(f-g)(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta,\alpha-\beta)=0$, 矛盾。

(3): 令 $V=G[\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n]$ 其中 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为标准正交基底

则:

$$\begin{cases} f(\varepsilon_1)=k_1(\varepsilon_1,\varepsilon_1)+k_1(\varepsilon_1,\varepsilon_2)+\cdots+k_n(\varepsilon_1,\varepsilon_n)\\ f(\varepsilon_2)=k_1(\varepsilon_2,\varepsilon_1)+k_1(\varepsilon_2,\varepsilon_2)+\cdots+k_n(\varepsilon_2,\varepsilon_n)\\ \vdots\\ f(\varepsilon_n)=k_1(\varepsilon_n,\varepsilon_1)+k_1(\varepsilon_n,\varepsilon_2)+\cdots+k_n(\varepsilon_n,\varepsilon_n)\end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}(\varepsilon_1,\varepsilon_1) & (\varepsilon_1,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_1,\varepsilon_n)\\ (\varepsilon_2,\varepsilon_1) & (\varepsilon_2,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_2,\varepsilon_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (\varepsilon_n,\varepsilon_1) & (\varepsilon_n,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_n,\varepsilon_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(\varepsilon_1)\\f(\varepsilon_2)\\\vdots\\f(\varepsilon_n)\end{pmatrix}$$

由于 $L(V,P)$ 与 P^n 同构,故对 $\forall f\in L(V,P)$,存在唯一相应的 $(f(\varepsilon_1),f(\varepsilon_2),\cdots,f(\varepsilon_n))$, 从而存在唯一相应的 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$，即相应（唯一）的 α, 使得此定义为一良定义。

23.

$$(\alpha-\beta,\alpha-\beta)=(\alpha,\alpha)+(\beta,\beta)-2(\alpha,\beta)\neq 0$$

$$(\alpha,\beta)\neq 1$$

24. 由于 $(\alpha_i, \alpha_j) = (\beta_i, \beta_j)$

可知 $\alpha_1 \cdots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 中相同位置的任意个数的元素具有相同的线性关系。

事实上，取 $\alpha_1, \cdots, \alpha_l, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$，有：

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_l\alpha_l = 0$$
$$l_1\beta_1 + \cdots + l_l\beta_l = 0$$

因此有：

$$\begin{pmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_l) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \dots & (\alpha_2,\alpha_l) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\alpha_l,\alpha_1) & (\alpha_l,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_l,\alpha_l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} (\beta_1,\beta_1) & (\beta_1,\beta_2) & \cdots & (\beta_1,\beta_l) \\ (\beta_2,\beta_1) & (\beta_2,\beta_2) & \dots & (\beta_2,\beta_l) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\beta_l,\beta_1) & (\beta_l,\beta_2) & \cdots & (\beta_l,\beta_l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

由：$G(\alpha_1 \cdots, \alpha_n)$=$G(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$、、即知二者线性关系相同。可知

$$dim(G[\alpha_1, \cdots, \alpha_n]) = dim(G[\beta_1, \cdots, \beta_n])$$

故 $V_1.V_2$ 是 Euclid 空间同构的。

25. 令 $V_1 = G[\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{m_1}], V_2 = G[\zeta_1, \cdots, \zeta_{m_2}]$

且 $m_1 < m_2$，其中基底为标准正交基。

取 $\zeta_i \in V_2$ 且 $\zeta_i \neq V_1$，显然：$(\zeta_i, \varepsilon_i) = 0$, 故 ζ_i 与 V_1 正交。

事实上，这样的 ζ_i 是肯定存在的，否则 V_2 中的任意元素都可以被 V_1 的基底表示，则 $m_2 \leq m_1$. 矛盾。

或

取 $\zeta = k_1\zeta_1 + \cdots + k_{m_2}\zeta_{m_2}$

若 ζ 与 V_1 正交，则 $(\zeta, \alpha_i) = 0$，即：

$$\begin{pmatrix} (\zeta_1,\alpha_1) & (\zeta_2,\alpha_1) & \cdots & (\zeta_{m_2},\alpha_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\zeta_1,\alpha_{m_1}) & (\zeta_2,\alpha_{m_1}) & \cdots & (\zeta_{m_2},\alpha_{m_1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{m_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

因为 $m_1 < m_2$, 因此，此方程有非零解。即存在 $\zeta \in V_2$ 与 V_1 正交。

26. 不妨设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关，即存在不全为零的 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$
故 $k_1(\alpha_1, \alpha) + k_2(\alpha_2, \alpha) + \cdots + k_n(\alpha_n, \alpha) = 0$ 因此 k_i 有正有负有零。不妨调整一下 α_i 的顺序，使得设 $l_1, l_2, \cdots, l_i$ 为正，$l_{i+1}, l_{i+2}, \cdots, l_j$ 为负, 其余为零。故 $l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_i\alpha_i = -l_{i+1}\alpha_{i+1} - \cdots - l_j\alpha_j$

$$
\begin{aligned}
&(l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_i\alpha_i, -l_{i+1}\alpha_{i+1} - \cdots - l_j\alpha_j) \\
=&(l_1\alpha_1, -l_{i+1}\alpha_{i+1} - \cdots - l_j\alpha_j) + \cdots + (l_1\alpha_i, -l_{i+1}\alpha_{i+1} - \cdots - l_j\alpha_j) \\
=&-(l_1\alpha_1, l_{i+1}\alpha_{i+1}) - \cdots - (l_1\alpha_1, l_{i+1}\alpha_{i+1}) - \cdots - \\
&-(l_i\alpha_i, l_{i+1}\alpha_{i+1}) - \cdots - (l_i\alpha_i, l_j\alpha_j) \\
<&0
\end{aligned}
$$

与 $(\alpha, \alpha) > 0$ 矛盾。故其线性无关

27. 不妨假设存在 $n+2$ 个向量，其两两夹角为钝角。设为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+2}$. 则由夹角定义可得 $(\alpha_i, \alpha_j) < 0$ 又因为存在 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_{n+1} + \alpha_{n+1} = 0$.
$k_1(\alpha_1, \alpha_{n+2}) + \cdots + k_{n+1}(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}) = 0$
故 k_i 有正有负有零。不妨调整一下 α_i 的顺序，使得设 $l_1, l_2, \cdots, l_i$ 为正，$l_{i+1}, l_{i+2}, \cdots, l_j$ 为负, 其余为零。故 $l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_i\alpha_i = -l_{i+1}\alpha_{i+1} - \cdots - l_j\alpha_j$

$$
\begin{aligned}
&(l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_i\alpha_i, -l_{i+1}\alpha_{i+1} - \cdots - l_j\alpha_j) \\
=&(l_1\alpha_1, -l_{i+1}\alpha_{i+1} - \cdots - l_j\alpha_j) + \cdots + (l_1\alpha_i, -l_{i+1}\alpha_{i+1} - \cdots - l_j\alpha_j) \\
=&-(l_1\alpha_1, l_{i+1}\alpha_{i+1}) - \cdots - (l_1\alpha_1, l_{i+1}\alpha_{i+1}) - \cdots - \\
&-(l_i\alpha_i, l_{i+1}\alpha_{i+1}) - \cdots - (l_i\alpha_i, l_j\alpha_j) \\
<&0
\end{aligned}
$$

与 $(\alpha, \alpha) > 0$ 矛盾。故假设错误，即最多存在 $n+1$ 个这样的向量。

28.

$$|\alpha + \beta| = |\alpha - \beta|$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta, \alpha + \beta) = (\alpha - \beta, \alpha - \beta)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha, \beta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha, \beta \text{ 正交.}$$

29. 令 $\beta = k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n$, 其中 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为 V 的一组标准正交向量组。
则有:

$$|\beta|^2 = (k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n, k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n) =$$

$$k_1^2+\cdots+k_n^2$$

$$(\beta,\alpha_i)=k_i\Rightarrow\sum_{i=1}^{m}=k_1^2+\cdots+k_m^2\leq\sum_{i=1}^{n}k_i^2=k_1^2+\cdots+k_n^2$$

30.

$$A=\begin{pmatrix}0.39&-1.89\\0.61&-1.80\\0.93&-1.68\\1.35&-1.50\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$X=(A'A)^{-1}(A'B)=\begin{pmatrix}47.79\\-99.43\end{pmatrix}$$

几何意义：当 $X=\begin{pmatrix}47.79\\-99.43\end{pmatrix}$ B 到 $G[\alpha_1,\alpha_2]$ 的距离最小, 其中:

$$\alpha_1=(0.39,0.61,0.93,1.35)$$
$$\alpha_2=(-1.89,-1.80,-1.68,-1.50)$$

第六章　线性空间上的线性变换

习题

1. 判断:

(1) 对于某一 $\boldsymbol{B} \in \mathbb{P}^{m\times n}$,

$$(\forall \boldsymbol{A} \in \mathbb{P}^{m\times m}) \quad f : \boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}$$
$$((\forall \boldsymbol{A} \in \mathbb{P}^{p\times m}) \quad g : \boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$$

是否提供 $\mathbb{P}^{m\times m}$ 到 $\mathbb{P}^{m\times n}$ ($\mathbb{P}^{p\times m}$ 到 $\mathbb{P}^{p\times n}$) 的线性映射;

(2) 下列变换是否提供 $\mathbb{P}^{m\times m}$ 到 $\mathbb{P}$ 的线性映射 (即 $\mathbb{P}^{m\times m}$ 上的线性函数):

$$f : \boldsymbol{A} = (a_{ij}) \mapsto \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij},$$
$$g : \boldsymbol{A} = (a_{ij}) \mapsto \sum_{i=1}^{m} ka_{i1}, k \text{ 为 } \mathbb{P} \text{ 中一固定数.}$$

2. 对于任意取定的 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{P}^{m\times m}$,$\boldsymbol{X}_0 \in \mathbb{P}^{m\times p}$, 当且仅当在什么条件下,

$$f : \boldsymbol{X} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}_0, \quad \boldsymbol{X} \in \mathbb{P}^{m\times p}$$

提供 $\mathbb{P}^{m\times p}$ 到 $\mathbb{P}^{m\times p}$ 的线性映射.

3. 判断下列变换哪些是线性的:

(1) 在 $\mathbb{P}^3$ 中,

$$\mathbf{A}_1 : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (2x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1),$$
$$\mathbf{A}_2 : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1^2, x_2 + x_3, x_3^2);$$

(2) 在 $\mathbb{P}[x]$ 中,

$$\mathbf{A}_1 : f(x) \mapsto f(x+1),$$
$$\mathbf{A}_2 : f(x) \mapsto f(x) + f(x_0), \quad x_0 \text{ 为 } \mathbb{P} \text{ 中一固定数;}$$

(3) 在 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 中,

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}_1:\boldsymbol{A}\mapsto\boldsymbol{A}',\\&\mathbf{A}_2:\boldsymbol{A}\mapsto\boldsymbol{BAC},\quad \boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\ \text{为}\ \mathbb{P}^{n\times n}\ \text{中的固定矩阵;}\end{aligned}$$

(4) 在 n 维 Euclid 空间 V 中,

$$\mathbf{A}:\boldsymbol{\alpha}\mapsto\begin{cases}\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|}, & \boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{\theta},\\ \boldsymbol{\theta}, & \boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta},\end{cases}$$

$$\mathbf{B}:\boldsymbol{\alpha}\mapsto\boldsymbol{\alpha}-2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\eta},\quad \boldsymbol{\eta}\ \text{为一单位向量;}$$

(5) 在 $[a,b]$ 上连续函数的实线性空间中,

$$\mathbf{A}:f(x)\mapsto\int_a^b k(x,t)f(t)dt,$$

其中 $k(x,t)$ 为定义在正方形 $a\leqslant x\leqslant b, a\leqslant t\leqslant b$ 上的一个固定的实连续函数 (此 $\mathbf{A}$ 称为 **Fredholm 算子**).

4. 令 V 为 $\mathbb{P}$ 上一 n 维线性空间, $\mathbf{A}_i\in L(V)$, $i=1,2,\cdots,s$. 证明: 若 $\mathbf{A}_i\neq\mathbf{A}_j$, $i,j=1,2,\cdots,s$, $i\neq j$, 则

$$(\exists\boldsymbol{\alpha}\in V)\quad \mathbf{A}_i\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{A}_j\boldsymbol{\alpha},\quad i,j=1,2,\cdots,s,\ i\neq j.$$

5. 在 $\mathbb{P}[x]$ 中, $\mathbf{A}f(x)=xf(x)$. 证明: $\mathbf{DA}-\mathbf{AD}=\mathbf{E}$, $\mathbf{D}^k\mathbf{A}-\mathbf{AD}^k=k\mathbf{D}^{k-1}$, 其中 $\mathbf{D}$ 为微商变换, $k>1$. 实际上, 一个结果蕴含第二个结果.

6. 求下列线性变换在指定基底下的矩阵:

(1) $m=n$ 时, 第一题 (1) 中的 g, 基底为自然基底;

(2) $\mathbb{P}_n[x]$ 中线性变换

$$(\forall f(x)\in\mathbb{P}_n[x])\quad \mathbf{A}:f(x)\longmapsto f(x+1)-f(x),$$

基底为

$$\left(1,x,\frac{x(x-1)}{2},\cdots,\frac{x(x-1)\cdots(x-n+2)}{(n-1)!}\right);$$

(3) $\mathbb{P}^{2\times 2}$ 中线性变换

$$(\forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{P}^{2\times 2})\boldsymbol{A}_1 : \boldsymbol{X} \longmapsto \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \boldsymbol{X},$$
$$(\forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{P}^{2\times 2})\boldsymbol{A}_2 : \boldsymbol{X} \longmapsto \boldsymbol{X} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$
$$(\forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{P}^{2\times 2})\boldsymbol{A}_1 : \boldsymbol{X} \longmapsto \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \boldsymbol{X} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

其中

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{P}^{2\times 2}$$

为一固定矩阵，基底为 $\mathbb{P}^{2\times 2}$ 的自然基底，即

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

7. 已知 $\mathbb{P}^3$ 中线性变换 $\mathbf{A}$ 在基底

$$\left(\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

求 $\mathbf{A}$ 在自然基底下的矩阵。

8. 在 $\mathbb{P}^3$ 中借助基底

$$\left(\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

作线性变换：

$$\mathbf{A} : \varepsilon_1 \longmapsto \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \varepsilon_2 \longmapsto \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}, \varepsilon_3 \longmapsto \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

求 $\mathbf{A}$ 在自然基底和基底 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ 下的矩阵。

9. 在 $\mathbb{P}$ 上 3 维线性空间中, 线性变换 $\mathbf{A}$ 在基底 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in P^{3\times3}$. 求 $\mathbf{A}$ 在下述基底下的矩阵:

   (1) $(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)$;

   (2) $(\alpha_1, k\alpha_2, \alpha_3)$，其中 $k \in P$, 且 $k \neq 0$:

   (3) $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

10. 在 4 维线性空间中，线性变换 $\mathbf{A}$ 在基底 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ 下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

求 $\mathbf{A}$ 在基底 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ 下的矩阵，其中

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_4, \\ \beta_2 &= 3\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4, \\ \beta_3 &= \alpha_3 + \alpha_4, \\ \beta_4 &= 2\alpha_4. \end{aligned}$$

11. 在 P_3 中借助下列两个基底

$$\left(\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right),$$

$$\left(\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$$

定义线性变换

$$\mathbf{A} : \alpha_i \longmapsto \beta_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

   (1) 写出前一基底到后一基底的过渡矩阵;

   (2) 写出 $\mathbf{A}$ 在这两个基底下的矩阵.

12. 除了应用矩阵的等价标准型, 也可应用线性变换与矩阵的对应关系证明:

(1) 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{P}^{n\times n}$, $r_{\boldsymbol{A}} = r$, 则存在可逆阵 $\boldsymbol{T} \in \mathbb{P}^{n\times n}$, 使得 $\boldsymbol{TAT}^{-1}$ 的后 $n-r$ 行全为零;

(2) 下面两个矩阵

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{i_1} & & & \\ & a_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{i_n} \end{bmatrix}$$

相似, 其中 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列.

13. 在直观几何中, 取正交坐标系 $Oxyz$, 用 $\mathbf{A}$ ($\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$) 表示绕 Ox 轴 (Oy 轴, Oz 轴) 由 Oy 向 Oz 轴 (由 Oz 轴向 Ox 轴, 由 Ox 向 Oy) 方向旋转 $90°$ 的变换, 证明 (可利用线性变换与矩阵的关系):

$$\mathbf{A}^4 = \mathbf{B}^4 = \mathbf{C}^4 = \mathbf{E},$$
$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA},$$
$$\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2 = \mathbf{B}^2\mathbf{A}^2.$$

并问 $(\mathbf{AB})^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$ 是否成立.

14. 证明: 与 V 上所有线性变换可交换的 V 上线性变换是且仅是数乘变换.

15. 证明: 在任意基底下的矩阵都相等的线性变换是且仅是数乘变换.

16. 令 V 为一 n 维线性空间, $\mathbf{A} \in L(V)$, $\boldsymbol{\alpha} \in V$. 证明: 若 $\mathbf{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{A}^k\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta}$, $k > 0$, 则 $\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}, \cdots, \mathbf{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关. 进而, 若 $k = n$, 则 $\mathbf{A}$ 在基底 $(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}, \cdots, \mathbf{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha})$ 下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

17. 考虑 $\mathbb{P}_n[x]$ 上的线性变换

$$\mathbf{D} : f(x) \longmapsto f'(x),$$
$$\mathbf{A} : f(x) \longmapsto f(x+1) - f(x),$$
$$\mathbf{B} : f(x) \longmapsto f(x+1).$$

证明: 若它们在基底

$$\left(1, x, \frac{x^2}{2!}, \cdots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)$$

下的矩阵分别为 $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, 则

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{D}^n = \boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{O}, \\ &\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} + \frac{\boldsymbol{D}^2}{2!} + \cdots + \frac{\boldsymbol{D}^{n-1}}{(n-1)!}, \\ &\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{D} + \frac{\boldsymbol{D}^2}{2!} + \cdots + \frac{\boldsymbol{D}^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

18. 证明: 若 W 是线性空间 V 上线性变换 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的不变子空间, 则 W 也是 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$ 和 $k\mathbf{A}$ 的不变子空间, 其中 k 为 V 的基础数域中的数.

19. 证明: 若 V_1, V_2 都是线性空间 V 上的线性变换 $\mathbf{A}$ 的不变子空间, 则 V_1+V_2, $V_1 \cap V_2$ 也是 $\mathbf{A}$ 的不变子空间.

20. 考虑复数域 $\mathbb{C}$ 作为实数域 $\mathbb{R}$ 上的 2 维线性空间, $Z_0 = a+bi \in \mathbb{C}$. 证明: 线性变换

$$(\forall Z \in \mathbb{C}) \quad \mathbf{A}: Z \longmapsto Z_0 Z,$$

有非平凡的不变子空间的充要条件是 $b=0$.

21. 令 W 是有限维线性空间 V 上线性变换 $\mathbf{A}$ 的不变子空间. 证明: 若 $\mathbf{A}$ 为双射, 则 W 也是 $\mathbf{A}^{-1}$ 的不变子空间.

22. 证明:

(1) 若 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2$ 分别为线性变换 $\mathbf{A}$ 相应于不同特征根 λ_1, λ_2 的特征向量, 则 $ab \neq 0$ 时, $a\boldsymbol{\varepsilon}_1 + b\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 不为 $\mathbf{A}$ 的特征向量;

(2) $\mathbf{A}$ 以空间的每一非零向量为特征向量当且仅当 $\mathbf{A}$ 为数乘变换.

23. 计算下列矩阵 (视为复矩阵) 的特征根和相应的特征向量:

$$(1)\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&4\\5&2\end{bmatrix};\qquad (2)\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&a\\-a&0\end{bmatrix};$$

$$(3)\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&4\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix};\qquad (4)\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5&6&3\\-1&0&1\\1&2&-1\end{bmatrix};$$

$$(5)\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix};\qquad (6)\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2&1\\-2&0&3\\-1&-3&0\end{bmatrix};$$

$$(7)\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&-2\end{bmatrix}.$$

24. 视上述矩阵为相应维数的复线性空间上某一线性变换在某一基底下的矩阵, 哪些线性变换有对角形表示矩阵? 在此情形, 写出相应的基底过渡矩阵 $\boldsymbol{T}$, 验算 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$, 并求 $\boldsymbol{A}^k, k\in\mathbb{Z}^+$.

25. 证明: 若 V 为 $\mathbb{C}$ 上一线性空间, 则 $\mathbf{A}(\in L(V))$ 幂零, 即存在 $m\in\mathbb{N}$, 使得 $\mathbf{A}^m=\mathbf{0}$, 当且仅当只有 0 是 $\mathbf{A}$ 的特征根.

26. 证明: 若 $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有公共的特征向量.

27. 求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}b&c&a\\c&a&b\\a&b&c\end{bmatrix}$$

的特征多项式. 证明: 下列两个矩阵与 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式相同:

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}c&a&b\\a&b&c\\b&c&a\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{bmatrix}.$$

若 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{CB}$, 则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 至少有两个特征根为零.

28. 令矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一元素都为 1. 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征根, 并求 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式.

29. 令矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}.$$

证明: 对于任意 $n\geqslant 3$, 有 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{n-2}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$, 由此计算 $\boldsymbol{A}^{100}$.

30. 令 $\boldsymbol{A}$ 为一 n 阶方阵, $k\geqslant n$. 证明: $\boldsymbol{A}^k$ 可以写成次数不大于 $n-1$ 的 $\boldsymbol{A}$ 的多项式.

31. 令 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征根 (重数计算在内). 证明:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}a_{ji}.$$

32. 令 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{P}^{n\times n}$, $f(x)\in\mathbb{P}[x]$, $\partial f(x)\geqslant 1$. 证明:

(1) 若 $f(x)|m_{\boldsymbol{A}}(x)$, 则 $f(\boldsymbol{A})$ 不可逆;

(2) 若 $(f(x),m_{\boldsymbol{A}}(x))=d(x)$, 则 $r_{f(\boldsymbol{A})}=r_{d(\boldsymbol{A})}$;

(3) $f(\boldsymbol{A})$ 可逆当且仅当 $(f(x),m_{\boldsymbol{A}})=1$.

33. 令 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times m}$, $\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{n\times n}$. 证明: 若方程

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XB}$$

有非零解, 则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有公共特征根.

34. 令

$$\begin{bmatrix}0&1&0&0&\cdots&0\\0&0&1&0&\cdots&0\\0&0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&1\\1&0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$$

为一 n 阶方阵. 计算 $\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}^3,\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}$, 并求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征根. 进而, 对于任意复行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_n&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_2&a_3&a_4&\cdots&a_1\end{vmatrix}$$

(称为**循环行列式**), 证明:

$$D=f(\omega_1)f(\omega_2)\cdots f(\omega_n),$$

其中 $f(x)=a_nx^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_2x+a_1$; $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 为全部 n 次单位根.

35. 令 V 为数域 $\mathbb{P}$ 上一 n 维线性空间, $\mathbf{A}$ 是 V 上一线性变换, 且在 $\mathbb{P}$ 上有 n 个不同的特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, $\boldsymbol{\alpha}\in V$. 证明: $\boldsymbol{\alpha},\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha},\cdots,\mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha},\cdots,\mathbf{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\alpha}_i$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是 $\mathbf{A}$ 相应于 λ_i 的特征向量, $i=1,2,\cdots,n$.

36. 令 V 为数域 $\mathbb{P}$ 上一线性空间, $V=W\dot{+}N$, $\mathbf{A},\mathbf{B}\in L(V)$. 证明: 若对于任何 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}\in V$, $\boldsymbol{\beta}\in W$, $\boldsymbol{\gamma}\in N$, $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$, 则 $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$ 当且仅当 W,N 是 $\mathbf{B}$ 的不变子空间.

37. 令 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $\Delta_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式. 证明: $\Delta_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{B})$ 不可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有公共特征根.

38. 证明: $\boldsymbol{A}$ 为幂零矩阵的充分必要条件是对任意正整数 n, 有 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^n)=0$.

39. 令 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, $\varphi(\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的实系数多项式. 求

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \varphi(\boldsymbol{A})\\ \varphi(\boldsymbol{A}) & \boldsymbol{A}\end{bmatrix}$$

的 $2n$ 个特征根和相应的特征向量.

40. 令 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, $\lambda^2-3\lambda+2$ 为其零化多项式. 求可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}$ 为对角形矩阵.

41. 令 V 为数域 $\mathbb{P}$ 上 n 阶方阵构成的线性空间 (即 $V=\mathbb{P}^{n\times n}$), $\boldsymbol{T}$ 为 V 中一固定矩阵. 定义 $\mathbf{A}(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{TB}-\boldsymbol{BT}$, $\boldsymbol{B}\in V$. 证明: 若 $\boldsymbol{T}$ 为幂零矩阵, 则 $\mathbf{A}$ 为幂零线性变换.

42. 令 n 维线性空间上线性变换 $\mathbf{A}$ 有 n 个互不相同的特征根. 证明: V 上与 $\mathbf{A}$ 可交换的线性变换都是 $\mathbf{E}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2,\cdots,\mathbf{A}^{n-1}$ 的线性组合.

43. 令 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为数域 $\mathbb{P}$ 上的两个 n 阶方阵, $\boldsymbol{A}$ 有 n 个特征根, 且两两互异. 证明: $\boldsymbol{A}$ 的特征向量恒为 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

44. 令 n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathbf{A}$ 在基底 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$ 下的矩阵为对角矩阵, 且对角线上的元素互不相同. 求 $\mathbf{A}$ 的所有不变子空间, 并决定它们的个数.

45. 令 n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathbf{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 的次数为 n, 且 $m(\lambda)$ 在基础数域 $\mathbb{P}$ 上不可约. 证明: V 不能分解成两个在 $\mathbf{A}$ 下不变的真子空间的直和.

46. 令 $\mathbf{A}$ 为 n 维线性空间 V 上一线性变换, $m(\lambda)$ 为 $\mathbf{A}$ 的最小多项式. 证明:

(1) 若 $m(\lambda)=h(\lambda)g(\lambda)$, 且 $(h(\lambda),g(\lambda))=1$, 则 V 能分解成 $\mathbf{A}$ 的不变子空间 W_1 和 W_2 的直和, 其中

$$W_1=\{\boldsymbol{\alpha}\,|\,h(\mathbf{A})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}\in V\},$$
$$W_2=\{\boldsymbol{\alpha}\,|\,g(\mathbf{A})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}\in V\},$$

并且 $h(\lambda), g(\lambda)$ 分别为 $\mathbf{A}|_{W_1} = \mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}|_{W_2} = \mathbf{A}_2$ 的最小多项式;

(2) 若 $m(\lambda) = h_1(\lambda)h_2(\lambda)\cdots h_s(\lambda)$, 且 $h_i(\lambda)$ 两两互素, $i = 1, 2, \cdots, s$, 则 V 是 $\mathbf{A}$ 的不变子空间 W_i 的直和, $i = 1, 2, \cdots, s$, 其中

$$W_i = \{\boldsymbol{\alpha} \,|\, h_i(\mathbf{A})\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha} \in V\},$$

且 $h_i(\lambda)$ 是 $\mathbf{A}|_{W_i} = \mathbf{A}_i$ 的最小多项式, $i = 1, 2, \cdots, s$.

解答

1. **解**:

(1) 对于映射 f，考虑 $\exists A_1, A_2 \in P^{m\times m}, s.t.$

$$\begin{aligned} f(A_1 + A_2) &= (A_1 + A_2)^2 B \\ &= (A_1^2 + A_2^2 + A_1A_2 + A_2A_1)B \\ &= f(A_1) + f(A_2) + A_1A_2B + A_2A_1B \\ &\neq f(A_1) + f(A_2) \end{aligned}$$

不提供线性映射。

对于映射 g，考虑 $\forall k, l \in R^1, A_1, A_2 \in P^{p\times m}$,

$$\begin{aligned} g(kA_1 + lA_2) &= (kA_1 + lA_2)B \\ &= kA_1B + lA_2B \\ &= kg(A_1) + lg(A_2) \end{aligned}$$

提供线性映射。

(2) 对于映射 f，考虑 $\forall k, l \in R^1, A, B \in P^{m\times m}$,

$$\begin{aligned} f(kA_1 + lA_2) &= \sum_{i,j=1}^{m} (ka_{ij} + lb_{ij}) \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} ka_{ij} + \sum_{i,j=1}^{m} lb_{ij} \\ &= kf(A) + lf(B) \end{aligned}$$

提供线性映射。

对于映射 g，考虑 $\forall p,q \in R^1, A,B \in P^{m\times m}$，

$$\begin{aligned} g(kA_1+lA_2) &= \sum_{i,j=1}^{m} k(pa_{ij}+qb_{ij}) \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} pka_{ij} + \sum_{i,j=1}^{m} qkb_{ij} \\ &= pg(A)+qg(B) \end{aligned}$$

提供线性映射。

2. **解**:

f 提供线性映射

$\iff f(kX_1+lX_2) = kf(X_1)+lf(X_2), \forall k,l \in R^1, X_1,X_2 \in P^{m\times p}$

$\iff A(kX_1+lX_2)+X_0 = k(AX_1+X_0)+l(AX_2+X_0)$

$\iff (k+l-1)X_0 = \theta$

$\iff X_0 = \theta$

故当且仅当 $X_0=\theta$ 时 f 提供线性变换。

3. **解**:

(1) 对于 $\mathbf{A}_1$,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1(kx+ly) &= (2(kx_1+ly_1)-(kx_2+ly_2,(kx_2+ly_2)+(kx_3+ly_3),kx_1+ly_1) \\ &= k(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)+l(2y_1-y_2,y_2+y_3,y_1) \\ &= k\mathbf{A}_1(x)+l\mathbf{A}_1(y) \end{aligned}$$

是线性的.

对于 $\mathbf{A}_2$，不妨只考虑其第一个分量，有

$\mathbf{A}_2(x_1+y_1)=(x_1+y_1)^2=x_1^2+y_1^2+2x_1y_1=\mathbf{A}_2(x_1)+\mathbf{A}_2(y_1)+2x_1y_1$ 是非线性的.

(2) 对于 $\mathbf{A}_1$,

$\mathbf{A}_1(kf(x)+lg(x)) = kf(x+1)+lg(x+1) = k\mathbf{A}_1(f(x))+l\mathbf{A}_1(g(x))$

是线性的.

对于 $\mathbf{A}_2$，由第 2 题易知，当且仅当 $f(x_0)=0$ 时，$\mathbf{A}_2$ 是线性的.

(3) 对于 $\mathbf{A}_1$,

$\mathbf{A}_1(kA+lB) = kA^{'}+lB^{'} = k\mathbf{A}_1(A)+l\mathbf{A}_1(B)$

是线性的.

对于 $\mathbf{A}_2$,

$\mathbf{A}_2(kF+lG) = B(kF+lG)C = kBFC+lBGC = k\mathbf{A}_2(F)+l\mathbf{A}_2(G)$

是线性的.

(4) 对于 $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A}(k\alpha+l\beta)=\begin{cases}\frac{k\alpha+l\beta}{|k\alpha+l\beta|}, & k\alpha+l\beta\neq\theta,\\ \theta, & k\alpha+l\beta=\theta.\end{cases}$$

即 $\mathbf{A}$ 总是将非零向量单位化，在很多情况下，不满足 $\mathbf{A}(k\alpha+l\beta)=k\mathbf{A}(\alpha)+l\mathbf{A}(\beta)$ 这一形式是显然的, 故 $\mathbf{A}$ 是非线性的.

对于 $\mathbf{B}$,
$\mathbf{B}(k\alpha+l\beta)=(k\alpha+l\beta)-2(\eta,k\alpha+l\beta)\eta=k\alpha-2k(\eta,\alpha)\eta+l\beta-2l(\eta,\beta)\eta=k\mathbf{B}(\alpha)+l\mathbf{B}(\beta)$ 是线性的.
(5) 对于 $\mathbf{A}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(kf(x)+lg(x))&=\int_a^b k(x,t)(kf(t)+lg(t))dt\\&=k\int_a^b k(x,t)f(t)dt+l\int_a^b k(x,t)g(t)dt\\&=k\mathbf{A}(f(x))+l\mathbf{A}(g(x)),\end{aligned}$$

是线性的.

4. **证明**:
令 $V_{ij}=\{\alpha|A_i\alpha=A_j\alpha\}$, 我们可以证明其是一个线性子空间（只需证明对加法和数乘封闭, 在这里就不写了）。因为 $i,j=1,2,\cdots,s$, 所以这些子空间最多只有 C_s^2 个，即有限个，那么我们根据第四章第 10 题的结论可知存在 $\alpha\notin A_{ij}\quad(i,j=1,2,\cdots,s)$，即存在 α 使得 $A_i\neq A_j$.
证毕。

5. **证明**:

$$\begin{aligned}(\mathbf{DA}-\mathbf{AD})(f(x))&=(\mathbf{DA})(f(x))-(\mathbf{AD})(f(x))\\&=\mathbf{D}(xf(x))-\mathbf{A}(f^{'}(x))\\&=xf^{'}(x)+f(x)-xf^{'}(x)\\&=\mathbf{E}(f(x)),\end{aligned}$$

即有 $\mathbf{DA}-\mathbf{AD}=\mathbf{E}$.

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{D}^k\mathbf{A}-\mathbf{A}\mathbf{D}^k)(f(x)) &= \mathbf{D}^k(xf(x))-\mathbf{A}(\mathbf{D}^{k-1}(f^{'}(x)))\\
&= \mathbf{D}^{k-1}(xf^{'}(x)+f(x))-\mathbf{A}(\mathbf{D}^{k-1}f^{'}(x))\\
&= \mathbf{D}^{k-1}(f(x))+\mathbf{D}^{k-2}(f^{'}(x))+\mathbf{D}^{k-2}(xf^{''}(x))-\mathbf{A}(\mathbf{D}^{k-2}f^{''}(x))\\
&= \cdots\\
&= k\mathbf{D}^{k-1}(f(x))+\mathbf{D}(xf^{(k)}(x))-\mathbf{A}(\mathbf{D}^0f^{(k)}(x))\\
&= k\mathbf{D}^{k-1}(f(x)),
\end{aligned}
$$

即有 $\mathbf{D}^k\mathbf{A}-\mathbf{A}\mathbf{D}^k=k\mathbf{D}^{k-1}$,
显然地，当 k=1 时，有 $\mathbf{DA}-\mathbf{AD}=\mathbf{E}$.
证毕.

6. **解**:
(1) 令

$$
B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm}\end{pmatrix}
$$

则 g 在自然基底下的表示矩阵为:

$$
A=\begin{pmatrix} B' & O & \cdots & O\\ O & B' & \cdots & O\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ O & O & \cdots & B'\end{pmatrix}
$$

(2) 设 $(1,x,\frac{x(x-1)}{2},\dots,\frac{x(x-1)\cdots(x-n+2)}{(n-1)})=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)$,
表示矩阵为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, 设 $\varepsilon_0=0$.
则有 $\mathbf{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)\boldsymbol{A}$,
$\mathbf{A}\varepsilon_i=\varepsilon_i(x+1)-\varepsilon_i=\sum_{j=1}^n\varepsilon_ja_{ji}=\varepsilon_{i-1}, i=1,2,\dots,n.$
显然地，有解 $\boldsymbol{A}=(\delta_{ij})_{n\times n}$, 其中 $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & j=i+1\\ 0, & j\neq i+1\end{cases}$

(3)

$$
A_1=\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0\\ 0 & a & 0 & b\\ c & 0 & d & 0\\ 0 & c & 0 & d\end{pmatrix}
$$

$$A_2=\begin{pmatrix} a & c & 0 & 0\\ b & d & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & c\\ 0 & 0 & b & d\end{pmatrix}$$

$$A_3=\begin{pmatrix} a^2 & ac & ab & bc\\ ab & ad & b^2 & bd\\ ac & c^2 & ad & cd\\ bc & cd & bd & d^2\end{pmatrix}$$

7. **解**:

设 $\mathbf{A}$ 在自然基底 $(\varepsilon_1^{'},\varepsilon_2^{'},\varepsilon_3^{'})$ 下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}_1$, 在基底 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ 下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}_2$,

从而　$\exists$可逆矩阵$\boldsymbol{B}$, $s.t.$

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\boldsymbol{B}=(\varepsilon_1^{'},\varepsilon_2^{'},\varepsilon_3^{'}),$$
$$\mathbf{A}(\varepsilon_1^{'},\varepsilon_2^{'},\varepsilon_3^{'})\boldsymbol{B}^{-1}=(\varepsilon_1^{'},\varepsilon_2^{'},\varepsilon_3^{'})\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_2,$$

由 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}\\ \hline \boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}^{-1}\\ \hline \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 有 $\left[\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ \hline 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ -2 & 2 & 1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \hline 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & -2\\ 3 & 0 & 1\end{array}\right]$ (这里进行了初等列变换)

从而得到 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & -2\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2\\ 3 & 1 & 1\\ 4 & -1 & 3\end{bmatrix}$

8. **解**:

设 $\mathbf{A}$在基底$\boldsymbol{B}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$下的表示矩阵为$\boldsymbol{A}_1$，设 $\boldsymbol{B}$在$\boldsymbol{A}_1$下的变换结果为$\boldsymbol{B}_1$.

得到 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}_1$, 由$\boldsymbol{B}^{-1}\left[\boldsymbol{B}\,\vdots\,\boldsymbol{B}_1\right]=\left[\boldsymbol{E}\,\vdots\,\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}_1\right]$

(进行初等行变换后) 解出 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}\frac{11}{7} & 3 & 5\\ -\frac{8}{7} & 0 & -1\\ -\frac{8}{7} & 1 & 0\end{pmatrix}$.

设 $\mathbf{A}$在自然基底$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$下的表示矩阵为$\boldsymbol{A}_2$，则 $\exists$可逆矩阵$\boldsymbol{T}$, $s.t.$

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}$$

从而

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\boldsymbol{C} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{T}\\ &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}^{-1}\\ &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_2\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}^{-1},$$

由 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\\ \hdashline \boldsymbol{B}_1\end{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{E}\\ \hdashline \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}$ (进行初等行变换后) 解出 $\boldsymbol{A}_2$.

9. **解**:

(1) $\begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31}\\ a_{23} & a_{22} & a_{21}\\ a_{13} & a_{12} & a_{11}\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13}\\ \frac{a_{21}}{k} & a_{22} & \frac{a_{23}}{k}\\ a_{31} & ka_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21}+a_{22}-a_{11}-a_{12} & a_{22}-a_{12} & a_{23}-a_{13}\\ a_{31}+a_{32} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$

10. **解**:

$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\boldsymbol{B}$, 其中

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

是过渡矩阵,$\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$ 分别为表示矩阵.

$\mathbf{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\boldsymbol{A}_1$

$\mathbf{A}(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4) = (\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\boldsymbol{A}_2$

从而有$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}$.

11. **解**:

(1)由$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\boldsymbol{A} = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)$有$\boldsymbol{A} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$,

设 $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), \beta = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

又由$\alpha^{-1}\left[\alpha \,\vdots\, \beta\right] = \left[\boldsymbol{E} \,\vdots\, \alpha^{-1}\beta\right]$(注：此处进行了初等行变换) 有

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{array}\right], \text{即} \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

(2) 设 $\mathbf{A}$在α下的矩阵为$\boldsymbol{A}_1$,在β下的矩阵为$\boldsymbol{A}_2$, 则有

$$\mathbf{A}\alpha = \alpha \boldsymbol{A}_1$$
$$\mathbf{A}\beta = \beta \boldsymbol{A}_2$$
$$\alpha \boldsymbol{A} = \beta$$

从而容易得到 $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}$.

12.

13. **证明**:

由题意可知 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 为坐标变换，从而容易写出 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 的表示矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

显然地有

$$\mathbf{A}^4 = \mathbf{B}^4 = \mathbf{C}^4 = \mathbf{D}^4 = \mathbf{E}$$
$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$
$$\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2 = \mathbf{B}^2\mathbf{A}^2$$

且有 $(\mathbf{AB})^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$ 不成立.

证毕.

14. **证明**:

我们转化为对应的矩阵的问题。充分性是显然的。必要性:

若 A 可与所有矩阵交换，先设 T 为对角矩阵，那么因为与对角矩阵交换的只能是对角矩阵，我们可得 A 一定也是对角矩阵。我们在令 $T = P(i,j)$(将 E 的 i,j 行互换) 我们设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

那么由:$TA = AT$, 且

$$TA = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & & \\ & a_{22} & & & & \\ & & \ddots & a_{jj} & & \\ & & a_{ii} & \ddots & & \\ & & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad TA = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & & \\ & a_{22} & & & & \\ & & \ddots & a_{ii} & & \\ & & a_{jj} & \ddots & & \\ & & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

得 $a_{ii} = a_{jj}$, 所以有 $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$, 即 A 为数量矩阵。

15. **证明**:
($\Longleftarrow$) 设 A 为数乘变换, A 在基底 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 下的矩阵为 kE, 则 A 在基底 $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$(设过渡矩阵为 T) 下的矩阵为

$$B = T^{-1}kET = kET^{-1}T = kE$$

所以数乘变换在任意基底下的矩阵都相等。
($\Longrightarrow$) 设 A 为一线性变换,在基底 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 下的矩阵为 A,在基底 $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ 下的矩阵为 B, 且 $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)T$, 则

$$B = T^{-1}AT,$$

即

$$TB = AT,$$

若 A 在任意基底下的矩阵都不变, 则有

$$TA = AT,$$

由上题知 A 为数量矩阵, 故结论成立。

16. **证明**(反证法):
假设 $\alpha, \mathbf{A}\alpha, \cdots, \mathbf{A}^{k-1}\alpha$ 线性相关, 则 $\exists$ $l_0, l_1, \ldots, l_{k-1}$ 不全为零,

$$s.t. \quad l_0\mathbf{E}\alpha + l_1\mathbf{A}\alpha + \cdots + l_{k-1}\mathbf{A}^{k-1}\alpha = \theta,$$

则有

$$l_0\mathbf{A}\alpha + \cdots + l_{k-1}\mathbf{A}^k\alpha = \mathbf{A}(l_0\mathbf{E}\alpha + l_1\mathbf{A}\alpha + \cdots + l_{k-1}\mathbf{A}^{k-1}\alpha) = \theta,$$

由于 $\mathbf{A}^k\alpha = \theta$, 故有

$$l_0\mathbf{A}\alpha + \cdots + l_{k-1}\mathbf{A}^k\alpha = \theta,$$

若 $l_0, l_1, \dots, l_{k-2}$ 全为零，则 $l_{k-1} \neq 0, \mathbf{A}^{k-1}\alpha = \theta$, 矛盾.
若 $l_0, l_1, \dots, l_{k-2}$ 不全为零，则 $\mathbf{A}\alpha, \cdots, \mathbf{A}^{k-1}\alpha$ 线性相关，有

$$l_0\mathbf{A}\alpha + \cdots + l_{k-2}\mathbf{A}^{k-1}\alpha = \theta,$$

进一步地，我们有

$$l_0 \neq 0\text{且}l_0\mathbf{A}\alpha = \theta,$$

有 $l_0 = 0$ 或 $\mathbf{A}\alpha = \theta$, 但无论哪一种都与题设矛盾，故 $\alpha, \mathbf{A}\alpha, \cdots, \mathbf{A}^{k-1}\alpha$ 线性无关.
当 k=n 时，

$$\mathbf{A}(\alpha, \mathbf{A}\alpha, \cdots, \mathbf{A}^{k-1}\alpha) = (\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}^2\alpha, \cdots, \mathbf{A}^k\alpha) = (\alpha, \mathbf{A}\alpha, \cdots, \mathbf{A}^{k-1}\alpha)\boldsymbol{A},$$

有 $\mathbf{A}^i\alpha = \sum_{j=0}^{k-1}\mathbf{A}^j\alpha a_{ji}, i = 1, 2, \dots, k$. 显然地，

$$\boldsymbol{A} = (\delta_{ij})_{n\times n}, \text{其中}\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i-1, \\ 0, & j \neq i-1. \end{cases}$$

证毕.

17. **证明**:

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

容易得到 $\boldsymbol{D}^n = \theta$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{1}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{D} + \frac{\boldsymbol{D}^2}{2!} + \cdots + \frac{\boldsymbol{D}^{n-1}}{(n-1)!}$$

显然有 $\boldsymbol{A}^n = \theta$.

$$
\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{1}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}+\frac{\boldsymbol{D}^2}{2!}+\cdots+\frac{\boldsymbol{D}^{n-1}}{(n-1)!}
$$

证毕.

18. **证明**:

显然有 $\mathbf{AW}\subseteq\mathbf{W},\mathbf{BW}\subseteq\mathbf{W}$, 则

$$
\forall\alpha\in\mathbf{W},\quad(\mathbf{A}+\mathbf{B})\alpha=\mathbf{A}\alpha+\mathbf{B}\alpha\in\mathbf{W},
$$

从而有 $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{W}\subseteq\mathbf{W}$, 故 $\mathbf{W}$ 也是 $(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ 的不变子空间. 类似地, $\mathbf{W}$ 也是 $\mathbf{AB}$ 和 $k\mathbf{A}$ 的不变子空间.

证毕.

19. **证明**:

由 $\mathbf{AV}_1\subseteq\mathbf{V}_1,\mathbf{AV}_2\subseteq\mathbf{V}_2$ 有

$$
\forall\alpha\in\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2,\exists\alpha_1\in\mathbf{V}_1,\alpha_2\in\mathbf{V}_2,s.t.\quad\alpha=\alpha_1+\alpha_2
$$

从而

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}\alpha=\mathbf{A}(\alpha_1+\alpha_2)&=\mathbf{A}\alpha_1+\mathbf{A}\alpha_2\in\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2,\\
\mathbf{A}(\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2)&\subseteq\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2,
\end{aligned}
$$

即 $\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2$ 也是 $\mathbf{A}$ 的不变子空间. 类似地, $\mathbf{V}_1\bigcap\mathbf{V}_2$ 也是 $\mathbf{A}$ 的不变子空间.

证毕.

20. **证明**:

由题易知 a,b 不能同时为零.

不妨将 z=x+iy 写为形式 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. 从而有

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{A}:z\longrightarrow z_0z\\
&\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\longmapsto\begin{bmatrix} ax-by \\ ay+bx \end{bmatrix}=\sqrt{a^2+b^2}\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

其中 $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, 即近似为二维坐标系进行绕 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 点的逆时针旋转变换.

则旋转后的坐标仍在原来的直线上当且仅当 $\varphi=n\cdot180^\circ,n\in z^+$, 即 b=0.

证毕.

21. **证明**:
若 W 为零子空间，结论显然，若 W 不是零字空间，记

$$W = G[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r]$$

, 有 A 为双射，故

$$A\varepsilon_1, A\varepsilon_2, \cdots, A\varepsilon_r$$

也是 W 的一组基底，即

$$W = [A\varepsilon_1, A\varepsilon_2, \cdots, A\varepsilon_r]$$

则

$$\forall \alpha \in W, \alpha = x_1 A\varepsilon_1 + x_2 A\varepsilon_2 + \cdots + x_r A\varepsilon_r$$

上式两边用 A^{-1} 作用, 有

$$\begin{aligned} A^{-1}(\alpha) &= A^{-1}(x_1 A\varepsilon_1 + x_2 A\varepsilon_2 + \cdots + x_r A\varepsilon_r) \\ &= A^{-1}A(x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_r\varepsilon_r) \\ &= x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_r\varepsilon_r \in W \end{aligned}$$

则 W 也是 A^{-1} 的不变子空间。

22. **证明**:
(1)(反证法) 设 $a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2$ 为 $\mathbf{A}$ 的特征向量，$(ab \neq 0)$, 则

$$\begin{aligned} \exists \lambda, \quad s.t.\mathbf{A}(a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2) &= \lambda(a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2) \\ \lambda_1(a\varepsilon_1) + \lambda_2(b\varepsilon_2) &= \lambda(a\varepsilon_1) + \lambda(b\varepsilon_2) \\ (\lambda_1 - \lambda)(a\varepsilon_1) &= (\lambda - \lambda_2)(b\varepsilon_2) \end{aligned}$$

由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 故 $a\varepsilon_1$ 与 $b\varepsilon_2$ 线性无关.
从而有 $\lambda_1 - \lambda = \lambda - \lambda_2 = 0$, 即 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$，矛盾.
所以 $a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2$ 不是 $\mathbf{A}$ 的特征向量.

(2) 设基底 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$

$$\forall \alpha \neq \theta, \exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}, s.t. \alpha = \textstyle\sum_{i=1}^n x_i\varepsilon_i,$$

设 $\mathbf{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\lambda_1\varepsilon_1,\lambda_2\varepsilon_2,\cdots,\lambda_n\varepsilon_n)$, 则

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}\text{以任一}\alpha\neq\theta\text{为特征向量} &\Longleftrightarrow \exists\lambda\in\mathbf{R}, s.t.\mathbf{A}\alpha=\lambda\alpha\\
&\Longleftrightarrow \mathbf{A}(\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x_i\varepsilon_i)\\
&\Longleftrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\lambda\\
&\Longleftrightarrow \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda\end{bmatrix}_{n\times n}=\lambda\boldsymbol{E}_{n\times n}\\
&\Longleftrightarrow \mathbf{A}\text{为数乘变换}.
\end{aligned}
$$

证毕.

23. **解**:
以 (1) 为例有

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-7)(\lambda+2),$$

从而有 $\lambda_1=7,\lambda_2=-2$, 分别对应特征向量 $\vec{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix},\vec{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}$.

$$\mathbf{A}\vec{u}=\lambda_1\vec{u}\Longrightarrow\begin{cases}3u_1+4u_2=7u_1,\\5u_1+2u_2=7u_2\end{cases}\Longrightarrow\vec{u}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}\vec{v}=\lambda_1\vec{v}\Longrightarrow\begin{cases}3v_1+4v_2=-2v_1\\5v_1+2v_2=-2v_2\end{cases}\Longrightarrow\vec{v}=\begin{bmatrix}-4\\5\end{bmatrix}.$$

其余结果略.

24. **解**:
对于 23 题中的矩阵，有对角形表示矩阵当且仅当其要有 n 个线性无关的特征向量.
以 (1) 为例有
令 $\boldsymbol{T}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, 因为

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

所以有

$$AT = T\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

从而有

$$\boldsymbol{A}\alpha_i = \lambda_i\alpha_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

其中 λ_i、α_i为$\boldsymbol{A}$的特征根与对应的特征向量，将所有特征向量按列拼接起来即为 $\boldsymbol{T}$. 从而有 $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{T}\boldsymbol{B}^k\boldsymbol{T}^{-1}$, 其中 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的对角形表示矩阵.

25. **证明**:
$\Longleftarrow$) 如果 **A** 的特征根只有 0，则其特征多项式为

$$\lambda^n = 0,$$

从而 **A** 幂零.
$\Longrightarrow$) 如果 **A** 幂零，则

$$\lambda^m$$

是 **A** 的零化多项式，又因为最小多项式整除零化多项式，所以易得 **A** 的特征根只能为零.
证毕.

26. **证明**:
因为 A 是复数域上的矩阵，所以其一定有特征根，设为 λ_0, 考虑有 λ_0 生成的子空间 V_{λ_0}，我们证明它也是 B 的不变子空间。对于 $\forall \quad \alpha \in V_{\lambda_0}$, 有 $A\alpha = \lambda_0\alpha$, 则

$$A(B\alpha) = B(A\alpha) = B(\lambda_0\alpha) = \lambda_0(B\alpha)$$

故 $B\alpha \in V_{\lambda_0}$, 即 V_{λ_0} 是 B 的不变子空间，我们把 B 限定在 V_{λ_0} 上，那么在复数域上 $B|_{V_{\lambda_0}}$ 在 V_{λ_0} 上一定有特征向量，此向量也是 A 的特征向量，故 A, B 有公共的特征向量。
证毕.

27. **证明**:
容易计算有

$$\begin{aligned}|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| &= |\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}| = |\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}| \\ &= (\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)-2abc-a^2(\lambda-a)-b^2(\lambda-b)-c^2(\lambda-c)\end{aligned}$$

且有

$$\boldsymbol{BC}=\begin{bmatrix} ac+ab+bc & bc+ac+ab & c^2+a^2+b^2 \\ a^2+b^2+c^2 & ab+bc+ca & ac+ba+bc \\ ab+bc+ac & a^2+b^2+c^2 & bc+ac+ab \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{CB}=\begin{bmatrix} ac+ab+bc & a^2+b^2+c^2 & ab+bc+ac \\ bc+ac+ab & ab+bc+ca & a^2+b^2+c^2 \\ a^2+b^2+c^2 & ac+ba+bc & bc+ac+ab \end{bmatrix}$$

由 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{CB}$ 有

$$bc+ac+ab=a^2+b^2+c^2 \geq bc+ac+ab,$$

当且仅当 a=b=c 时取得等号. 从而有

$$\boldsymbol{A}=abc\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$f(\lambda)=\lambda^2(\lambda-3a)$, 显然至少有两个特征根为零.
证毕.

28. **证明**:
当 $\alpha \neq \theta$ 时

$$\begin{aligned} A\alpha=\lambda\alpha &\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \alpha_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n \end{bmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \alpha_1=\cdots=\alpha_n \text{且} \lambda=n \text{或} \sum_{i=1}^n \alpha_i=0 \text{且} \lambda=0. \end{aligned}$$

又由 $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=\mathbf{Tr}(A)=n$, 有

$$\triangle_A(x) = x^{n-1}(x-n) = m_A(x).$$

故 A 的特征根为 n 与 0，其中 0 为 n-1 重根.
证毕.

29. **解**:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

当 n=3 时,$A^3 = A + A^2 + E$ 显然成立；
当 $n = k \geq 3$ 时, 假设 $A^k = A^{k-2} + A^2 - E$ 成立，

$$\begin{aligned} \text{则当 n=k+1 时} A^{k+1} &= A(A^{k-2} + A^2 - E) \\ &= A^{k-1} + A^3 - A \\ &= A^{k-1} + A^2 - E\text{成立}. \end{aligned}$$

故 $\forall n \geq 3$, 有 $A^n = A^{n-2} + A^2 - E$ 成立. 则

$$A^{100} = A^2 + 49(A^2 - E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 50 & 1 & 0 \\ 50 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

30. **证明**:
由 $\triangle_A(A) = \sum_{i=1}^n a_i A^i = 0$ 有 $A^n = -\sum_{i=1}^{n-1} a_i A^i$. 故
当 k=n 时, 有 $A^k = A^n = \sum_{i=1}^{n-1} -a_i A^i$, 次数不大于 n-1;
当 k=n+j 且 $j \geq 1$ 时,

$$A^k = A^{j+n} = A^j \cdot (-\sum_{i=1}^{n-1} a_i A^i) = -\sum_{i=1}^{n-1} a_i A^{i+j}$$

当 $k^{'} = i + j \geq n$ 时, 令 $k^{'} = n + l$, 则

$$A^{k^{'}} = A^{n+l} = A^l \cdot (-\sum_{i=1}^{n-1} a_i A^i) = -\sum_{i=1}^{n-1} a_i A^{i+l}$$

当 $k^{''} = i + l \geq n$ 时, 令 $k^{''} = i + l$. 重复上述过程直至 $k^{(m)} = n$, 有

$$A^{k^{(m)}} = A^n = -\sum_{i=1}^{n-1} a_i A^i$$

次数不大于 n-1.
证毕.

31. **证明**:

由 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 满足 $|\lambda_i E - A| = 0, i = 1, 2, \ldots, m$, 有

$$\begin{aligned} 0 &= |\lambda_i E - A|| - \lambda_i E - A| \\ &= | - \lambda_i^2 E + A^2| \\ &= (-1)^n |\lambda_i^2 E - A^2|, \end{aligned}$$

从而有 $\lambda_i^2, i = 1, 2, \ldots, n$ 为 A^2 的所有特征根，即 $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = Tr(A^2) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} a_{ji}$. 证毕.

32. **证明**:

(1) 由 $m_A(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)^{l_i}$, 而 $f(x) | m_A(x)$ 且 $\partial f(x) \geq 1$, 即

$$\exists \lambda_i, s.t. (x - \lambda_i) | f(x),$$

从而有

$$(A - \lambda_i E) | f(A).$$

由 $|\lambda_i E - A| = 0$, 有 $|f(A)| = 0$, 从而 f(A) 不可逆.

(2) 不妨设 $d(x) = \prod_{i=1}^l (x - \lambda_i)^{k_i}$, 则有

$$\begin{aligned} m_A(x) &= d(x) \cdot \prod_{i=l+1}^n (x - \lambda_i)^{k_i}, \\ f(x) &= d(x) \cdot \prod_{i=l+1}^n (x - a_i)^{b_i}, \end{aligned}$$

且

$$(\prod_{i=l+1}^n (x - \lambda_i)^{k_i}, \prod_{i=l+1}^n (x - a_i)^{b_i}) = 1$$

显然有

$$f(A) = d(A) \cdot \prod_{i=l+1}^n (x - a_i)^{b_i}$$

由于 $a_i \neq \lambda_i$, 故 $|A - a_iE| \neq 0$, 从而 $A - a_iE$ 可逆，故有 $r_{f(A)} = r_{d(A)}$.
(3)$\Longrightarrow$) 由 (2), 当 d(x)=1 时，$|f(A) \neq 0|$, 即 f(A) 可逆.
$\Longrightarrow$) 当 f(A) 可逆时，必有 $(x - \lambda_i) \quad f(x), \forall i = 1, 2, \ldots, n$, 故 $(f(x), m_A(x)) = 1$.
证毕.

33. **证明**:
若 X 非零，则存在可逆矩阵 $P, Q, s.t.$

$$PXQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

由

$$\begin{aligned}
AX = XB &\Longrightarrow PAXQ = PXBQ \\
&\Longrightarrow PAP^{-1}PXQ = PXQ^{-1}QBQ \\
&\Longrightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ O & O \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow A_{11} = B_{11}, A_{21} = O, B_{12} = O
\end{aligned}$$

则

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix} \qquad Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} B_{11} & O \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

令 $C = PAP^{-1}, D = Q^{-1}BQ$, 则有

$$\triangle_C(\lambda) = |\lambda E - A_{11}||\lambda E - A_{22}|$$

$$\triangle_D(\lambda) = |\lambda E - B_{11}||\lambda E - B_{22}|$$

又 $A_{11} = B_{11}$, 故 $|\lambda E - A_{11}| = |\lambda E - B_{11}|$, 所以 C, D 有公共特征根，又因为 C 与 A 相似，D 与 B 相似，所以 A, B 有公共特征根.

34. **解**:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \cdots, A^{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

A 的全部特征根为 n 次单位根。
由上，$|f(A)|=D$, 又因为 $f(\omega_i)$ 是 $f(A)$ 的特征根且矩阵的所有特征根之积等于其行列式，所以结论成立.
证毕.

35. **证明**:
($\Longleftarrow$), 令

$$k_1\alpha+k_2A\alpha+k_3A^2\alpha+\cdots+k_nA^{n-1}\alpha=\theta$$

将 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 代入并注意 $\alpha_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$ 为 A 的特征向量得

$$(k_1+k_2\lambda_1+\cdots+k_n\lambda_1^{n-1})\alpha_1+\cdots+(k_1+k_2\lambda_n+\cdots+k_n\lambda_n^{n-1})\alpha_n=\theta$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为特征向量，易知它们线性无关，所以我们可以得到下面的方程组

$$\begin{cases} k_1+k_2\lambda_1+\cdots+k_n\lambda_1^{n-1}=0\\ k_1+k_2\lambda_2+\cdots+k_n\lambda_2^{n-1}=0\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\\ k_1+k_2\lambda_n+\cdots+k_n\lambda_n^{n-1}=0\end{cases}$$

因为特征根两两不同，所以又范德蒙行列式可知上述方程组有唯一解零解，所以 $\alpha,A\alpha,\cdots,A^{n-1}\alpha$ 线性无关。
($\Longrightarrow$) 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 对应的特征向量，因为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 两两不同，故可知 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 也是 V 的一组基底，则由 $\alpha=l_1\varepsilon_1+l_2\varepsilon_2+\cdots+l_n\varepsilon_n$, 因为特征向量经过数乘变换以后还是特征向量，所以为了证明命题，我们只需说明 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 全不为 0。因为 $\alpha,A\alpha,A^2\alpha,\cdots,A^{n-1}\alpha$ 线性无关，则有

$$k_1\alpha+k_2A\alpha+k_3A^2\alpha+\cdots+k_nA^{n-1}\alpha=\theta\Longrightarrow k_1=k_2=\cdots=k_n=0$$

将 $\alpha=l_1\varepsilon_1+l_2\varepsilon_2+\cdots+l_n\varepsilon_n$ 代入上式整理得:

$$(k_1l_1+k_2l_1\lambda+\cdots+k_nl_1\lambda_1^{n-1})\varepsilon_1+\cdots+(k_1l_n+k_2l_n\lambda_n+\cdots+k_nl_n\lambda_n^{n-1})\varepsilon_n=\theta$$

因为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 也是基底，故有它们的系数都为 0，即得方程组:

$$\begin{cases} k_1l_1+k_2l_1\lambda_1+\cdots+k_nl_1\lambda_1^{n-1}=0\\ k_1l_2+k_2l_2\lambda_1+\cdots+k_nl_2\lambda_1^{n-1}=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ k_1l_n+k_2l_n\lambda_n+\cdots+k_nl_n\lambda_n^{n-1}=0\end{cases}$$

将 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 看做未知量，因为其只有零解，故得系数行列式不为零。又因为其系数行列式为

$$l_1l_2\cdots l_nD$$

其中 D 为范德蒙行列式. 由特征根两两不同, 知范德蒙行列式不为零, 故要求 $l_1 l_2 \cdots l_n \neq 0$, 即 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 全不为 0 证毕.

36. **证明**:
由题易知，有

$$\forall \alpha \in W, \beta \in N, \quad \mathbf{A}\beta = \beta, \mathbf{A}\gamma = \theta.$$

即 W 是 $\mathbf{A}$ 的不变子空间.
$\Longrightarrow$) 设 $\forall \beta \in W, \exists \beta_1 \in V, \quad s.t. \mathbf{B}\beta = \beta_1$, 则有

$$\mathbf{AB}\beta = \mathbf{BA}\beta \Longrightarrow \mathbf{B}\beta = \mathbf{A}\beta_1 \in W$$

从而 W 是 $\mathbf{B}$ 的不变子空间.$\forall \gamma \in N$, 有

$$\mathbf{AB}\gamma = \mathbf{BA}\lambda \Longrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{B}\gamma) = \theta \Longrightarrow \mathbf{B}\gamma \in N$$

故有 W，N 是 $\mathbf{B}$ 的不变子空间.
$\Longleftarrow$)$\forall \alpha = \beta + \gamma, \beta \in W, \gamma \in N, \exists \beta_1 \in W, \gamma_1 \in N$,s.t.

$$\mathbf{B}(\beta, \gamma) = (\beta_1, \gamma_1),$$

从而有

$$\begin{aligned} \mathbf{AB}\alpha &= \mathbf{A}(\beta_1 + \gamma_1) = \beta_1 \\ \mathbf{BA}\alpha &= \mathbf{B}\beta = \beta_1 \end{aligned}$$

故有 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$
证毕.

37. **证明**:
我们这一题要用 32（3）题的结论:

$$\triangle_A(B)\text{不可逆} \Longleftrightarrow \triangle_A(x)\text{与}m_B(x)\text{不互素} \Longleftrightarrow \triangle_A(x) \triangle_B (x)\text{不互素}$$

因为 A, B 有公共特征根，所以这是显然的。

38. (目前我只能说明这是在实数域上成立的）证明：由 25 题可知，A 幂零，则 A 只有 0 是其特征根，所以我们只需说明 A^n 的迹为 0 等价于 A 只有 0 为其特征根。又因为我们有

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = tr(A)$$

所以容易在实数域上说明结论是成立的。

39.

40. **证明**:
因为 $\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-1)(\lambda-2)$ 为其零化多项式，所以其特征根只有 1 和 2，同时我们还可以知道其最小多项式的根也只可能是 1 和 2，且是一次的，即最小多项式为一次因式的一次幂，所以 A 一定可以对角化。(可以从第六章找到相关定理，也可以从第九章找到相关定理)。
令:

$$T=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$$

则由 $T^{-1}AT=$ 得 (D_{a_k} 为对角矩阵):

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)D_{a_k}$$

进一步有:

$$A\alpha_i=d_i\alpha_i\ (i=1,2,\ldots,n)$$

即 α_i 为 A 的特征根所对应的特征向量，以为我们已经知道了 A 可以对角化，所以 A 一定有 n 个线性无关的特征向量，那么问题也就解决了。我们只需要求出 A 的 1 和 2 对应的线性无关的特征向量，再以它们为列拼起来就构成了 T。由于 A 为给出，故只能说思考方法，具体的 T 求不出来。

41.

42. **证明**:
因为 A 有 n 个两两不同的特征根，不妨设为

$$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$$

则存在 V 的一组基，使得:

$$E\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\ddots&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},A\to\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0\\0&\lambda_2&0&0\\0&0&\ddots&0\\0&0&0&\lambda_n\end{pmatrix},A\to\begin{pmatrix}\lambda_1^2&0&0&0\\0&\lambda_2^2&0&0\\0&0&\ddots&0\\0&0&0&\lambda_n^2\end{pmatrix},\cdots$$

故问题转化为与 A 可交换的矩阵是且仅是 $E,A,A^2,\ldots,A^{n-1}$ 的线性组合。
因为 A 为对角型，所以根据 $AB=BA$, 我们可以得出 B 一定也是对角矩阵，不妨设

$$B=\begin{pmatrix}b_1&0&0&0\\0&b_2&0&0\\0&0&\ddots&0\\0&0&0&b_4\end{pmatrix}$$

那么由

$$B = k_1E + k_2A + k_3A^2 + \cdots + k_{n-1}A^{n-1}$$

可得

$$\begin{cases} k_1 + k_2\lambda_1 + k_3\lambda_1^2 + \cdots + k_n\lambda_1^{n-1} = b_1 \\ k_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_2^2 + \cdots + k_n\lambda_2^{n-1} = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ k_1 + k_2\lambda_n + k_3\lambda_n^2 + \cdots + k_n\lambda_n^{n-1} = b_n \end{cases}$$

将 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 视为未知数，那么由于上面的方程组的系数行列式为范德蒙行列式，且特征值两两不同，故其值非 0，所以上面的线性方程组有唯一解，所以结论成立。

43. **证明**:
充分性: 设 λ_i 为 A 的特征根, 则 $A\alpha = \lambda_i\alpha, (\alpha \neq \theta$ 即为从属与 λ_i 的特征向量) 所以 $A\alpha = \lambda_i\alpha = 0, (A - \lambda_iE)\alpha = 0$ 由 A, B 可交换 $AB = BA$, 得 $AB - \lambda_iB = BA - \lambda_iB$ 即 $(A - \lambda_iE)B = B(A - \lambda_iE)$

故矩阵 $(A - \lambda_iE)$ 与 B 可交换, 则 $(A - \lambda_iE)$ 对应的线性变换的核是 B 的不变子空间, 又 $(A - \lambda_iE)$ 的核为 A 的从属 λ_i 的特征向量故 A 的特征向量是 B 的不变子空间里的元素, 又其是一维的故 A 的特征向量也是 B 的特征向量.

必要性: 因为 A 有 n 个特征根且两两互异, 故其有对角型矩阵, 又 A 的 n 个线性无关的特征向量也是 B 的特征向量, 故 B 也可以对角化, 设 V 的一组基为 $\eta_1, \eta_n, \cdots, \eta_n$, 则由矩阵 A 及基 $\eta_1, \eta_n, \cdots, \eta_n$ 可唯一的确定一线性变换 A, 由矩阵 B 及 $\eta_1, \eta_n, \cdots, \eta_n$, 可唯一确定一线性变换 B.
即

$$(A\eta_1, A\eta_2, \cdots, A\eta_n) = (\eta_1, \eta_n, \cdots, \eta_n)A$$
$$(B\eta_1, B\eta_2, \cdots, B\eta_n) = (\eta_1, \eta_n, \cdots, \eta_n)B$$

又因为 A, B 可对角化. 由 A 的特征向量有为 B 的特征向量, 易得 A, B 有公共的特征向量. 则有基变换 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = (\eta_1, \eta_n, \cdots, \eta_n)T$, 使得 A 为对角阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = T^{-1}AT$$

又有基变换 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)Q$,s.t$B$ 为对角阵

$$\begin{pmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_n \end{pmatrix}=Q^{-1}BQ \qquad 且 Q=T$$

因为对角可交换, 则有 $(T^{-1}AT)(T^{-1}BT)=(T^{-1}BT)(T^{-1}AT)$, 即 $AB=BA$.

44.

45. **证明**:

用反证法，我们假设 A 可以分解为两个不变的真子空间的直和，那么在 V 的某一基底下，线性变换 A 有准对角型表示矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$$

所以 A 的最小多项式为 A_1,A_2 的最小多项式的最小公倍式，这与 A 的最小多项式不可约矛盾，故原命题成立。

46. 证明: 因为 $m(\lambda)=h(\lambda)g(\lambda),(h(\lambda),g(\lambda))=1$, 由推论 7.2.1 有

$$ker(m(A))=ker(h(A))+ker(g(A))$$

又因为 $ker(m(A))=ker(\theta)=V$ 则有 $V=ker(h(A))+ker(g(A))$,

对 $\forall\alpha\in ker(h(A))$, 有 $h(A)\alpha=\theta$, 所以 $ker(h(A))$ 就是 W_1, 同理 $ker(g(A))$ 就是 W_2, 即有 $V=W_1+W_2$ 接下来证明 $h(\lambda)$ 为 $A|_{W1}=A_1$ 的最小多项式,$g(\lambda)$ 同理可证. 对 $\forall\alpha\in W_1$, 有 $h(A_1)\alpha=h(A|_m)\alpha=\theta$, 得 $h(A_1)=\theta$, 即 $h(\lambda)$ 零化 A_1, 则只需证明 $h(\lambda)$ 是次数最低的零化 A_1 的多项式即可. 我们假设有 $l(\lambda)$, 满足 $\partial(l(\lambda))<\partial(h(\lambda))$ 且 $\forall\alpha\in W_1,l(A)=\theta$, 则令 $h(\lambda)=l(\lambda)g(\lambda)$ 可得到

$$对\forall\alpha\in W_1,h(A)\alpha=l(A)g(A)\alpha=g(A)l(A)\alpha=g(A)(\theta)=\theta$$
$$\forall\beta\in W_2,h(A)\beta=l(A)g(A)\beta=l(A)(\theta)\theta=\theta$$
$$令\forall\gamma\in V,\gamma=\alpha+\beta,\alpha\in W_1,\beta\in W_2$$

则 $\forall\in V$ 有 $h(A)\gamma=h(A)(\alpha+\beta)>h(A)\alpha+h(A)\beta=\theta\Rightarrow h(A)>\theta$, 但 $\partial(h(\lambda))<\partial(m(\lambda))$ 与 $m(\lambda)$ 为最小多项式矛盾, 故不可能有 $l(\lambda)$, s.t$\partial l(\lambda)<\partial h(\lambda)$ 所以 $h(\lambda)$ 是零化 A_1 的次数最低的多项式, 且, 故 $h(\lambda)$ 即为 A_1 的最小多项式, 同理可证 $g(\lambda)$ 为 A_2 的最小多项式.

(2) 将 (1) 中的结论推广到 n 的情况.(证明略)

第七章　线性空间关于线性变换的一类直和分解

习题

1. 求习题 6 的第 2 题和第 3 题中的线性变换的像与核; 在维数有限时, 求像与核的维数.

2. 令 $\mathbf{A}$ 为 n 维线性空间上的线性变换. 则存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得

$$\mathrm{Im}\mathbf{A}^{\mathrm{m}}=\mathrm{Im}\mathbf{A}^{\mathrm{m+1}}=\cdots.$$

3. 令 $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ 为 n 维线性空间上的幂等线性变换 (即 $\mathbf{A}^2=\mathbf{A},\mathbf{B}^2=\mathbf{B}$). 证明:

   (1) $\mathrm{Im}\mathbf{A}=\mathrm{Im}\mathbf{B}$ 的充分必要条件为 $\mathbf{AB}=\mathbf{B},\mathbf{BA}=\mathbf{A}$;

   (2) $\mathrm{Ker}\mathbf{A}=\mathrm{Ker}\mathbf{B}$ 的充分必要条件为 $\mathbf{AB}=\mathbf{A},\mathbf{BA}=\mathbf{B}$.

4. 令 $\mathbf{A}$ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换, $W\leqslant V$. 证明:

$$\dim(\mathbf{A}W)+\dim(\mathrm{Ker}\mathbf{A}\cap W)=\dim W.$$

   这是定理 7.1.1 中的维数公式的推广.

5. 令 V 为数域 $\mathbb{P}$ 上一 n 维线性空间, $V_1,V_2\leqslant V,\dim V_1+\dim V_2=n$. 证明:

   (1) $(\exists\sigma\in L(V))\ \mathrm{Im}\sigma=V_1,\ \mathrm{Ker}\sigma=V_2$;

   (2) $(\exists\sigma\in L(V),\ \sigma^2=\sigma)\ \mathrm{Im}\sigma=V_1,\ \mathrm{Ker}\sigma=V_2$;

   当且仅当

$$V=V_1\oplus V_2.$$

6. 令 V 为数域 $\mathbb{P}$ 上一 n 维线性空间, $\mathcal{A}\in L(V)$. 证明以下几款等价

   (1)$V=\mathrm{Im}\mathcal{A}+\mathrm{Ker}\mathcal{A}$;　　(2)$\mathrm{Im}\mathcal{A}+\mathrm{Ker}\mathcal{A}=\mathrm{Im}\mathcal{A}\oplus\mathrm{Ker}\mathcal{A}$;

   (3)$\mathrm{Im}\mathcal{A}^2=\mathrm{Im}\mathcal{A}$;　　(4) $\mathrm{Ker}\mathcal{A}^2=\mathrm{Ker}\mathcal{A}$.

解答

1. 略.

2. 证明: 由定理 7.1.3 知, $V \supseteq \mathrm{Im}\mathbf{A} \supseteq \mathrm{Im}\mathbf{A}^2 \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{Im}\mathbf{A}^k \supseteq \mathrm{Im}\mathbf{A}^{k+1} \supseteq \cdots$, 于是有 $n = \dim V \geqslant \dim(\mathrm{Im}\mathbf{A}) \geqslant \dim(\mathrm{Im}\mathbf{A}^2) \geqslant \dim(\mathrm{Im}\mathbf{A}^3) \geqslant \cdots \geqslant \dim(\mathrm{Im}\mathbf{A}^n) \geqslant \dim(\mathrm{Im}\mathbf{A}^{n+1}) \geqslant 0$, 因此在以上 $n+1$ 个线性变换中, 必有某 $0 \leqslant k \leqslant n, k \in \mathbb{N}$, 使 $\dim(\mathrm{Im}\mathbf{A}^k) = \dim(\mathrm{Im}\mathbf{A}^{k+1})$, 又因为 $\mathrm{Im}\mathbf{A}^{k+1} \supseteq \mathrm{Im}\mathbf{A}^k$, 所以 $\mathrm{Im}\mathbf{A}^{k+1} = \mathrm{Im}\mathbf{A}^k$. 下面考虑 $\mathrm{Im}\mathbf{A}^{k+j}$ 和 $\mathrm{Im}\mathbf{A}^{k+j+1}$ $(j = 1, 2, 3, \cdots)$, 由 Sylvester 定理, 考虑 $\mathbf{A}|_{\mathbf{A}^k V}$, 有

$$\dim(\mathrm{Im}\mathbf{A}|_{\mathbf{A}^k V}) + \dim(\mathrm{Ker}\mathbf{A}|_{\mathbf{A}^k V}) = \dim(\mathbf{A}^k V)$$

由 $\mathrm{Im}\mathbf{A}^{k+1} = \mathrm{Im}\mathbf{A}^k$, 得 $\dim(\mathrm{Im}\mathbf{A}|_{\mathbf{A}^k V}) = \dim(\mathbf{A}^{k+1} V) = \dim(\mathbf{A}^k V)$, 从而

$$\dim((\mathrm{Ker}\mathbf{A}) \cap \mathbf{A}^k V) = \dim(\mathrm{Ker}\mathbf{A}|_{\mathbf{A}^k V}) = 0,$$

于是 $(\mathrm{Ker}\mathbf{A}) \cap \mathbf{A}^k V = \theta$, 又由 $\mathbf{A}^{k+j} V \subseteq \mathbf{A}^k V$, 得 $(\mathrm{Ker}\mathbf{A}) \cap \mathbf{A}^{k+j} V = \theta$, 即有 $\dim(\mathrm{Ker}\mathbf{A}|_{\mathbf{A}^{k+j} V}) = \dim((\mathrm{Ker}\mathbf{A}) \cap \mathbf{A}^{k+j} V) = 0$, 同样由 Sylvester 定理, 考虑 $\mathbf{A}|_{\mathbf{A}^{k+j} V}$, 有

$$\dim(\mathrm{Im}\mathbf{A}|_{\mathbf{A}^{k+j} V}) + \dim(\mathrm{Ker}\mathbf{A}|_{\mathbf{A}^{k+j} V}) = \dim(\mathbf{A}^{k+j} V)$$

即有, $\dim(\mathbf{A}^{k+j+1} V) = \dim(\mathrm{Im}\mathbf{A}|_{\mathbf{A}^{k+j} V}) = \dim(\mathbf{A}^{k+j} V)$, 又由 $\mathbf{A}^{k+j+1} V \subseteq \mathbf{A}^{k+j} V$, 得 $\mathbf{A}^{k+j+1} V = \mathbf{A}^{k+j} V$, 即 $\mathrm{Im}\mathbf{A}^{k+j+1} = \mathrm{Im}\mathbf{A}^{k+j}$.

综上, $\mathrm{Im}\mathbf{A}^k = \mathrm{Im}\mathbf{A}^{k+1} = \mathrm{Im}\mathbf{A}^{k+2} = \mathrm{Im}\mathbf{A}^{k+3} = \cdots$.

3. (1) 证明: “$\Leftarrow$”(必要性): 设 $\mathrm{Im}\mathbf{A} = \mathrm{Im}\mathbf{B}$. 任取 $\alpha \in \mathrm{V}$, 有 $\mathbf{A}\alpha \in \mathrm{Im}\mathbf{A} = \mathrm{Im}\mathbf{B}$, 从而存在 $\beta \in \mathrm{V}$, 使得

$$\mathbf{B}\beta = \mathbf{A}\alpha \tag{7.1}$$

将 $\mathbf{B}$ 作用于等式 (1) 两端, 就有

$$\mathbf{B}^2\beta = \mathbf{B}\mathbf{A}\alpha \tag{7.2}$$

由题目知 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, $\mathbf{B}^2 = \mathbf{B}$, 代入 (2) 式, 得

$$\mathbf{B}\mathbf{A}\alpha = \mathbf{B}^2\beta = \mathbf{B}\beta \tag{7.3}$$

再将 (1) 式代入 (3) 式, 有

$$\mathbf{B}\mathbf{A}\alpha = \mathbf{B}\beta = \mathbf{A}\alpha$$

由 α 的任意性, 得 $\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{A}$, 同理可得, $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}$.

"$\Rightarrow$"(充分性): 设 $\mathbf{AB}=\mathbf{B},\mathbf{BA}=\mathbf{A}$. 任取 $\gamma\in \mathrm{V}$, 有

$$\mathbf{A}\gamma=\mathbf{BA}\gamma=\mathbf{B}(\mathbf{A}\gamma)\in \mathrm{Im}\mathbf{B}$$

从而 $\mathrm{Im}\mathbf{A}\subseteq \mathrm{Im}\mathbf{B}$. 任取 $\delta\in \mathrm{V}$, 有

$$\mathbf{B}\delta=\mathbf{AB}\delta=\mathbf{A}(\mathbf{B}\delta)\in \mathrm{Im}\mathbf{A}$$

从而 $\mathrm{Im}\mathbf{B}\subseteq \mathrm{Im}\mathbf{A}$. 于是, $\mathrm{Im}\mathbf{A}=\mathrm{Im}\mathbf{B}$.

综上, $\mathrm{Im}\mathbf{A}=\mathrm{Im}\mathbf{B}\iff \mathbf{AB}=\mathbf{B}$, $\mathbf{BA}=\mathbf{A}$.

(2) 证明: "$\Leftarrow$": 设 $\mathrm{Ker}\mathbf{A}=\mathrm{Ker}\mathbf{B}$. 任取 $\beta\in \mathrm{V}$, 由题目得, $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$, $\mathbf{B}^2=\mathbf{B}$, 于是

$$\mathbf{A}(\beta-\mathbf{A}\beta)=\mathbf{A}\beta-\mathbf{A}^2\beta=\mathbf{A}\beta-\mathbf{A}\beta=\theta$$

从而, $\beta-\mathbf{A}\beta\in \mathrm{Ker}\mathbf{A}=\mathrm{Ker}\mathbf{B}$, 既有,

$$\mathbf{B}(\beta-\mathbf{A}\beta)=\mathbf{B}\beta-\mathbf{BA}\beta=\theta$$

由 β 的任意性得, $\mathbf{B}=\mathbf{BA}$. 同理可得, $\mathbf{A}=\mathbf{AB}$.

"$\Rightarrow$": 设 $\mathbf{AB}=\mathbf{A}$, $\mathbf{BA}=\mathbf{B}$. 任取 $\alpha\in \mathrm{Ker}\mathbf{A}$, 有,

$$\mathbf{A}\alpha=\theta$$

$$\mathbf{B}\alpha=\mathbf{BA}\alpha=\mathbf{B}(\mathbf{A}\alpha)=\mathbf{B}\theta=\theta$$

从而 $\alpha\in \mathrm{Ker}\mathbf{B}$, 即有 $\mathrm{Ker}\mathbf{A}\subseteq \mathrm{Ker}\mathbf{B}$. 任取 $\beta\in \mathrm{Ker}\mathbf{B}$, 有,

$$\mathbf{B}\beta=\theta$$

$$\mathbf{A}\beta=\mathbf{AB}\beta=\mathbf{A}(\mathbf{B}\beta)=\mathbf{A}\theta=\theta$$

从而 $\beta\in \mathrm{Ker}\mathbf{A}$, 即有 $\mathrm{Ker}\mathbf{B}\subseteq \mathrm{Ker}\mathbf{A}$. 于是, $\mathrm{Ker}\mathbf{A}=\mathrm{Ker}\mathbf{B}$.

综上, $\mathrm{Ker}\mathbf{A}=\mathrm{Ker}\mathbf{B}\iff \mathbf{AB}=\mathbf{A}$, $\mathbf{BA}=\mathbf{B}$, $Q.E.D.$

4. 证明: 考虑在子空间 W 上的 $\mathbf{A}$ 即 $\mathbf{A}|_W$, 它是 W 到 $\mathbf{A}W$ 的一个线性映射. 由于

$$\begin{aligned}\alpha\in \mathrm{Ker}(\mathbf{A}|_W)&\iff (\mathbf{A}|_W)\alpha=0\\&\iff \mathbf{A}\alpha=0,\ \alpha\in W\\&\iff \alpha\in(\mathrm{Ker}\mathbf{A})\cap W.\end{aligned}$$

因此 $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}|_W)=(\mathrm{Ker}\mathbf{A})\cap W$. 又显然有 $\mathrm{Im}(\mathbf{A}|_W)=\mathbf{A}W$, 因此

$$\dim(\mathbf{A}W)+\dim((\mathrm{Ker}\mathbf{A})\cap W)=\dim W.$$

5.

6. 证明: (1) $\iff$ (2):

"$\Rightarrow$": 设 $V = \mathrm{Im}\mathcal{A} + \mathrm{Ker}\mathcal{A}$. 由定理 4.2.2 有 $\dim(\mathrm{Im}\mathcal{A} + \mathrm{Ker}\mathcal{A}) + \dim(\mathrm{Im}\mathcal{A} \cap \mathrm{Ker}\mathcal{A}) = \dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}) + \dim(\mathrm{Ker}\mathcal{A})$ ，又由 Sylvester 定理，得 $\dim(\mathrm{Im}\mathcal{A} + \mathrm{Ker}\mathcal{A}) = \dim V = \dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}) + \dim(\mathrm{Ker}\mathcal{A})$, 从而 $\dim(\mathrm{Im}\mathcal{A} \cap \mathrm{Ker}\mathcal{A}) = 0$, 即有 $\mathrm{Im}\mathcal{A} \cap \mathrm{Ker}\mathcal{A} = \theta$ ，从而 $\mathrm{Im}\mathcal{A} + \mathrm{Ker}\mathcal{A} = \mathrm{Im}\mathcal{A} \oplus \mathrm{Ker}\mathcal{A}$.

"$\Leftarrow$": 设 $\mathrm{Im}\mathcal{A} + \mathrm{Ker}\mathcal{A} = \mathrm{Im}\mathcal{A} \oplus \mathrm{Ker}\mathcal{A}$. 则有 $\dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}) + \dim(\mathrm{Ker}\mathcal{A}) = \dim(\mathrm{Im}\mathcal{A} + \mathrm{Ker}\mathcal{A})$, 由 Sylvester 定理，得 $\dim V = \dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}) + \dim(\mathrm{Ker}\mathcal{A}) = \dim(\mathrm{Im}\mathcal{A} + \mathrm{Ker}\mathcal{A})$, 又由 $\mathrm{Im}\mathcal{A} + \mathrm{Ker}\mathcal{A} \subseteq V$ ，得，$V = \mathrm{Im}\mathcal{A} + \mathrm{Ker}\mathcal{A}$.

(2) $\iff$ (3):

"$\Rightarrow$": 设 $\mathrm{Im}\mathcal{A} + \mathrm{Ker}\mathcal{A} = \mathrm{Im}\mathcal{A} \oplus \mathrm{Ker}\mathcal{A}$. 有 $\mathcal{A}^2(V) = \mathcal{A}(\mathcal{A}V) \subseteq \mathcal{A}V$, 即 $\mathrm{Im}\mathcal{A}^2 \subseteq \mathrm{Im}\mathcal{A}$ 于是 $\forall \beta \in \mathrm{Im}\mathcal{A}, \exists \alpha \in V, s.t.\ \beta = \mathcal{A}\alpha$, 对于 α ，$\exists \alpha_1 \in \mathrm{Im}\mathcal{A}, \alpha_2 \in \mathrm{Ker}\mathcal{A}, s.t.\ \alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, 从而有 $\beta = \mathcal{A}\alpha = \mathcal{A}(\alpha_1 + \alpha_2) = \mathcal{A}\alpha_1$, 又由 $\alpha_1 \in \mathrm{Im}\mathcal{A}$, 得 $\exists \delta \in V, s.t.\ \alpha_1 = \mathcal{A}\delta$, 从而 $\beta = \mathcal{A}\alpha_1 = \mathcal{A}^2\delta \in \mathrm{Im}\mathcal{A}^2$, 即有 $\mathrm{Im}\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Im}\mathcal{A}^2$, 所以 $\mathrm{Im}\mathcal{A}^2 = \mathrm{Im}\mathcal{A}$.

"$\Leftarrow$": 设 $\mathrm{Im}\mathcal{A}^2 = \mathrm{Im}\mathcal{A}$. 由 Sylvester 定理，得 $\dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}) + \dim(\mathrm{Ker}\mathcal{A}) = \dim V = \dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}^2) + \dim(\mathrm{Ker}\mathcal{A}^2)$, 即有 $\dim(\mathrm{Ker}\mathcal{A}) = \dim(\mathrm{Ker}\mathcal{A}^2)$, 又由 $\mathrm{Ker}\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Ker}\mathcal{A}^2$, 得 $\mathrm{Ker}\mathcal{A} = \mathrm{Ker}\mathcal{A}^2$. 取 $\forall \beta \in \mathrm{Im}\mathcal{A} \cap \mathrm{Ker}\mathcal{A}$, 则 $\exists \gamma \in V, s.t.\ \beta = \mathcal{A}\gamma$ 且 $\mathcal{A}\beta = \theta$, 即有 $\mathcal{A}^2\gamma = \theta$. 从而 $\gamma \in \mathrm{Ker}\mathcal{A}^2 = \mathrm{Ker}\mathcal{A}$, 所以 $\beta = \mathcal{A}\gamma = \theta$, 所以 $\mathrm{Im}\mathcal{A} + \mathrm{Ker}\mathcal{A} = \mathrm{Im}\mathcal{A} \oplus \mathrm{Ker}\mathcal{A}$.

(3) $\iff$ (4):

由 Sylvester 定理，以及 $\mathrm{Ker}\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Ker}\mathcal{A}^2$, $\mathrm{Im}\mathcal{A}^2 \subseteq \mathrm{Im}\mathcal{A}$, 显然得证

第八章　Euclid 空间上的两类线性变换与二次型主轴问题

习题

1. 令 A 为 Euclid 空间 V 上的线性变换. 证明：A 为正交变换当且仅当 A 保持任意两个向量的距离不变 (定义 5.4.2), 即

$$(\forall \alpha, \beta \in V) \quad d(A\alpha, A\beta) = d(\alpha, \beta)$$

2. 证明：三角形正交矩阵必为对角矩阵，且对角线元素非 1 即-1.

3. 证明：每一个 n 阶实可逆矩阵 A 都有唯一分解 $A = UT$, 其中 U 为一正交矩阵，T 为上三角实矩阵且其对角线各元素都大于零.

4. 令 V 是一 Euclid 空间，$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in V$. 证明：若 $|\alpha_1| = |\beta_1|, |\alpha_2| = |\beta_2|$, 且 $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$, 则粗在正交变换 A，使得 $A\alpha_1 = \beta_1, A\alpha_2 = \beta_2$.

5. 证明：正交变换 (矩阵) 的特征多项式的根的模为 1.

6. 令 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n), (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ 都是 n 维 Euclid 空间 V 的标准正交基底,A 为 V 上的一正交变换. 证明：若 $A\alpha_1 = \beta_1$，则

$$G[A\alpha_2, A\alpha_3, \cdots, A\alpha_n] = G[\beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_n]$$

7. 令 V 为一 Euclid 空间，$\alpha \in V, \alpha \neq \theta$, 又

$$(\forall \eta \in V) \quad A\eta = \eta - \frac{2(\eta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha.$$

8. 证明：A 为 V 上一正交变换，且 $A^2 = E$. 当 $dimV = n$ 时, 证明：存在 V 的标准正交基底,A 在该基底下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} -1 & \\ & E_{n-1} \end{bmatrix}$$

(这样的线性变换称为镜面反射, 它的直观集合意义是很明显的).

9. 令 A 为一 n 维 Euclid 空间上的正交变换. 证明: 若 1 为 A 的特征根, 且 $dimKer = (A-E) = n-1$, 则 A 为镜面反射.

10. 令 A 为 n 阶正交矩阵, 且 A 有 n 个特征根. 证明:A 为实对称矩阵.

11. 令 V 为一 n 维 Euclid 空间,$\alpha, \beta \in V$, 且 $\alpha \neq \beta$. 证明: 若 $|\alpha| = |\beta|$, 则存在镜面反射 A, 使得 $A\alpha = \beta$. 进而, 再利用第 6 题, 证明:V 上的每一个正交变换都可以表示成若干镜面反射的乘积.

12. 令 A 为 n 维 Euclid 空间 V 上一线性变换. 证明: 下面三个命题中的任意两个可以推出第三个:

    (1) A 为正交变换;

    (2) A 为对称变换;

    (3) $A^2 = E$.

13. 令 A 为 n 维 Euclid 空间上一对称变换. 证明: 若 $A^2 = A$, 则存在标准正交基底, 使得 A 在该基底下的矩阵为 $E^{(r)}, r = r_A$.

14. Euclid 空间 V 上的线性变换 A 称为反对称的, 如果

$$(\forall \alpha, \beta \in V) \quad (A\alpha, \beta) = (\alpha, A\beta).$$

    建立类似定理 8.1.3 的事实, 并证明:

    (1) 若 V_1 为反对称变换 A 的不变子空间, 则 $V_1^{\perp}$ 在 A 下也不变;

    (2) 反对称变换的特征多项式的根只能为零或纯虚数.

15. 令 A 为一 n 阶反对称矩阵. 证明:

    (1) $E_n + A$ 可逆;

    (2) $U = (E_n - A)(E_n + A)^{-1}$ 是一正交矩阵.

16. 令 A 为 P 上一 n 阶方阵. 证明:

    (1) A 反对称当且仅当

$$(\forall X \in P^n) \quad X'AX = O;$$

    (2) A 对称时,$A = O$ 当且仅当

$$(\forall X \in P^n) \quad X'AX = O;$$

17. 求正交矩阵 T, 使得 $T'AT$ 成对角形, 其中 A 为

(1) $\begin{bmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

18. 化简下列实二次型到主轴形式, 并写出变数的一个相应的的正交替换:

(1) $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$;

(2) $2x_1x_2+2x_3x_4$;

(3) $x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$;

(4) $-4x_1x_2+2x_1x_3+3x_2x_3$

19. 令 A, B 为 n 维 Euclid 空间上两个对称变换, 证明: 若 $AB=BA$, 则 A 与 B 在 V 中有公共特征向量. 进而, 对于 n 用归纳法证明: 若 $A_{ii\in N}$ 为一组两两可交换的 n 阶实对称矩阵, 则存在 n 阶正交矩阵 U, 使得 $U'A_iU$ 都是对角矩阵,$i \in Z^+$.

20. 令 $A, B \in R^{n\times n}, A'=A, B'=B$. 证明: 若 A 正定, 则 B 正定当且仅当 AB 的 n 个特征根都是正的.

21. 用第 4 节中的各种化简方法化简下列二次型到标准形, 求所施的变数的可逆替换, 并进行验证:

(1) 16 题中的二次型以及 15 题的对称矩阵所对应的二次型;

(2) $x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

(3) $2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$;

(4) $-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

(5) $x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+4x_2x_3$;

(6) $\sum_{i=1}^{n-1} x_i^{i+1}$;

(7) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\sum_{i\le i<j\le n} x_ix_j$;

22. 令 A 为 n 阶实对称矩阵. 证明:

(1) 存在实数 $k>0$, 使得

$$(\forall X \in R^n) \quad |X'AX| \le kX'X;$$

(2) 若

$$(\exists X, Y \in R^n) \quad \begin{matrix} X'AX < 0 \\ Y'AY > 0 \end{matrix}$$

则

$$((\exists Z \in R^n \backslash \{\theta\}) \quad)Z'AZ = 0$$

23. 令 A, B, AB 都是 n 阶实对称矩阵,λ 为 AB 的一个特征根. 证明: 存在 A 的一个特征根 μ 和 B 的一个特征根 ν, 使得 $\lambda = \mu\nu$.

24. 令 λ, μ 为实二次型 $f(X_1, x_2, \cdots, x_n) = X'AX$ 的系数对称矩阵 A 的最大和最小特征根. 证明:

$$(\forall X \in R^n) \quad \lambda X'X \geq X'AX \geq \mu X'X.$$

25. 证明: 一个 n 元实二次型 f 可以分解为两个 n 元实一次型乘积的充要条件为 $r_f = 1$; 或者 $f_f = 2$, 符号差为 0.

26. 令

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

证明:A 与 B 实合同, 并求可逆矩阵 C, 使得 $C'AC = B$.

27. 确定下列实二次型的秩和符号差:

(1) $x_1x_2 + x_3x_4 + \cdots + x_{n-1}x_n$;

(2) $ayz + bzx + cxy$;

28. 证明: 关于任意实数 λ, 实二次型

$$\sum_{i,j=1}^{n} (\lambda ij + i + j)x_ix_j, \quad n \geq 2$$

的秩和符号差与 λ 无关.

29. 证明:$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2$ 正定当且仅当 $a > 0, b^2 - 4ac < 0$.

30. 推论 8.3.2 已经指出, n 阶实对称矩阵 A 是正定的当且仅当 n 元二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X'AX$ 是正定的, 今令 $A, B \in R^{n\times n}, A' = A, B' = B$. 证明:

(1) 若 A, B 都正定, 则对于任意 $k, l \in R, k^2 + l^2 \neq 0$ 时,$k^2A + l^2B$ 正定;

(2) 若 A 正定, 则 A^{-1}, A^* 都正定;

(3) 若 A, B 都正定, 则 AB 正定当且仅当 $AB = BA$;

(4) 若 $A = (a_{ij}, B = (b_{ij}))$ 都正定, 则 $(a_{ij}b_{ij})$ 也正定;

(5) 若 $A = (a_{ij})$ 正定,$b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为任意 n 个不为零的实数, 则 $B = (a_{ij}b_{ij})$ 也正定;

31. 令 $A \in R^{n\times n}$, 且 $|A| \neq 0$, 证明:A 可表示为一个正定矩阵与一个正交矩阵的乘积.

32. 令 $A \in R^{n\times n}, A' = A$. 证明: 当实数 t 充分大时,$tE + A$ 正定.

33. 证明:

$$n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2$$

是半正定的.

34. 证明:A 是正定矩阵当且仅当 A 的主子式 (定理 8.4.2) 都大于零.

35. 令 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶正定矩阵. 证明:

$$|A| \leq a_{11}a_{22}\cdots, a_{nn},$$

等号成立当且仅当 A 为对角矩阵.

36. 令二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} l_i^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} l_j^2$, 其中 l_i 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一次齐式,$k = 1, 2, \cdots, p+q$. 证明:$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的正惯性指数 $\leq p$, 负惯性指数 $\leq q$.

解答

1. 证明: 充分性
由距离的定义知,$d(\alpha, \beta) = \sqrt{(\alpha-\beta, \alpha-\beta)}$。则由 $d(\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\beta) = d(\alpha, \beta)$ 可得

$$(\mathbf{A}\alpha - \mathbf{A}\beta, \mathbf{A}\alpha - \mathbf{A}\beta) = (\alpha-\beta, \alpha-\beta)$$
$$(\mathbf{A}(\alpha-\beta), \mathbf{A}(\alpha-\beta)) = (\alpha-\beta, \alpha-\beta)$$

令 $\beta = \theta$ 则

$$(\forall \alpha \in V) \quad (\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\alpha) = (\alpha, \alpha)$$

故 $\mathbf{A}$ 为正交变换

必要性若 $\mathbf{A}$ 为正交变换，则有

$$(\forall \alpha \in V) \quad (\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\alpha) = (\alpha, \alpha)$$
$$(\forall \beta \in V) \quad (\mathbf{A}\beta, \mathbf{A}\beta) = (\beta, \beta)$$
$$(\mathbf{A}\alpha - \mathbf{A}\beta, \mathbf{A}\alpha - \mathbf{A}\beta) = (\alpha-\beta, \alpha-\beta)$$

即 $(\forall \alpha, \beta \in V) \quad d(\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\beta) = d(\alpha, \beta)$。

2. 证明：不妨设 A 为上三角矩阵且为正交矩阵。
因为 A 为正交矩阵 $A^{-1}=A'$, 其中 A 为上三角矩阵故 A^{-1} 亦为上三角矩阵
而 A' 为下三角矩阵故 A 为对角矩阵即 $A=A'=A^{-1}$ 故有 $A^2=E$，则 A 对角元素非 1 即 -1.

3. (提示: 考虑施密特正交化过程)
证明：存在性　由 A 为 n 阶实满秩矩阵，故

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n)$$

的列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，从而为 n 维欧式空间 R^n 的一组基，现在对其正交标准化，根据正交标准化过程，设

$$\begin{aligned}
\beta_1&=t_{11}\alpha_1\\
\beta_2&=t_{12}\alpha_1+t_{22}\alpha_2\\
&\cdots\\
\beta_n&=t_{1n}\alpha_1+t_{2n}\alpha_2+\cdots+t_{nn}\alpha_n
\end{aligned}$$

其中 $t_{ii}>0$,$i=1,2,3,\cdots,n$. 即有

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n)R^{-1}$$

其中 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_n$ 为 R^n 的一组标准正交基，

$$R^{-1}=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n}\\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn}\end{bmatrix}$$

R^{-1} 为对角线上全为正实数的上三角矩阵，从而 R 亦为这样的矩阵。
由于 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_n$ 为标准正交基,故以它为列所得 n 阶矩阵 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_n)$ 是一个正交矩阵，于是 $A=QR$.
唯一性. 设另有 $A=Q_1R_1$, 其中 Q_1 为正交矩阵，R_1 为对角线上全是正实数的上三角矩阵，则

$$QR=Q_1R_1,\quad 或\quad RR_1^{-1}=Q^{-1}Q_1$$

由于上三角矩阵的逆及乘积仍为上三角矩阵, 而正交矩阵的逆及乘积仍为正交矩阵, 故上式表明 RR_1^{-1} 即是上三角矩阵 (且对角线上的元素全为正), 又为正交矩阵. 从而由第二题可知必为单位矩阵, 即 $RR_1^{-1}=E$. 于是

$$R_1=R\quad Q_1=Q.$$

4. 证明: 令 $\mathbf{A}$ 为一线性变换且有 $\mathbf{A}\alpha_1=\beta_1,\mathbf{A}\alpha_2=\beta_2$.

   因为 $|\alpha_1|=|\beta_1|,|\alpha_2|=|\beta_2|$ 即 $|\alpha_1|=|\mathbf{A}\alpha_1|,|\alpha_2|=|\mathbf{A}\alpha_2|$, 且 $\mathbf{A}$ 亦保持夹角不变。$\mathbf{A}$ 可以正交变换。

5. 证明: 设 A 是正交矩阵，λ_0(复数) 是它的任意一个特征根,$X\neq\theta$ 是属于 λ_0 的复特征向量，即

   $AX=\lambda_0 X,\quad X=(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)'\neq\theta$
   两端取转置, 有 $X'A'=\lambda_0 X'$. 于是

$$\overline{X'A'}\cdot AX=\overline{\lambda_0 X'}\cdot\lambda_0 X$$

   即 $\overline{X'}A'AX=\overline{\lambda_0}\lambda_0\overline{X'}X.\quad\overline{X'}X=|\lambda_0|^2\overline{X'}X.$
   但因为 $X\neq\theta$, 从而 $\overline{X'}X=\overline{x_1}x_1+\overline{x_2}x_2+\overline{x_3}x_3+\cdots+\overline{x_3}x_3\neq 0$, 所以得

$$1=|\lambda_0|^2,\quad|\lambda_0|=1.$$

6. 证明: 因为 $\mathbf{A}$ 是正交变换,$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n)$ 是标准正交基，故

   $(\mathbf{A}\alpha_1,\mathbf{A}\alpha_2,\mathbf{A}\alpha_3,\cdots,\mathbf{A}\alpha_n)$ 亦为一组标准正交基且
   $G[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n]=G[\mathbf{A}\alpha_1,\mathbf{A}\alpha_2,\mathbf{A}\alpha_3,\cdots,\mathbf{A}\alpha_n]$ 由 $\mathbf{A}\alpha_1=\beta_1$, 则
   $G[\mathbf{A}\alpha_1,\mathbf{A}\alpha_2,\mathbf{A}\alpha_3,\cdots,\mathbf{A}\alpha_n]=G[\beta_1,\mathbf{A}\alpha_2,\mathbf{A}\alpha_3,\cdots,\mathbf{A}\alpha_n]$
   $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_n$ 亦为一组标准正交基, 故有
   $G[\beta_1,\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_n]=G[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n]=G[\beta_1,\mathbf{A}\alpha_2,\mathbf{A}\alpha_3,\cdots,\mathbf{A}\alpha_n]$.

   故 $G[\mathbf{A}\alpha_2,\mathbf{A}\alpha_3,\cdots,\mathbf{A}\alpha_n]=G[\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_n]$.

7. 证明:

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\eta,\mathbf{A}\eta)&=(\eta-\frac{2(\eta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha,\eta-\frac{2(\eta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha)\\&=(\eta,\eta)-2(\eta,\frac{2(\eta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha)+(\frac{2(\eta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha,\frac{2(\eta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha)\\&=(\eta,\eta)-\frac{4(\eta,\alpha)^2}{(\alpha,\alpha)}+\frac{4(\eta,\alpha)^2}{(\alpha,\alpha)^2}(\alpha,\alpha)\\&=(\eta,\eta).\end{aligned}$$

由 η 的任意性, 知 $\mathbf{A}$ 为一正交变换. 对于

$$
\begin{aligned}
(\forall \eta \in V) \quad \mathbf{A}\mathbf{A}\eta &= \mathbf{A}(\eta - \frac{2(\eta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha) \\
&= \mathbf{A}\eta - \frac{2(\eta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\mathbf{A}\alpha \\
&= \eta - \frac{2(\eta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha - \frac{2(\eta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}(\alpha - \frac{2(\alpha,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha) \\
&= \eta
\end{aligned}
$$

故有 $A^2 = E$. 当 $dim = n$ 时, 以 $(\frac{\alpha}{|\alpha|}, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots, \varepsilon_n)$ 为一标准正交基底, 则 $\mathbf{A}$ 在该基底下的矩阵为

$$
\begin{bmatrix} -1 & \\ & E_{n-1} \end{bmatrix}
$$

8.

9. 证明: 对于任意矩阵 A, 若其特征值全为实数, 则存在正交矩阵 X 使得 $X'AX = U$.(U 为一个上三角矩阵); (舒尔定理, 提示: 建议自行查找, 舒尔定理有多个, 此定理为线性代数里舒尔定理)
对上式转置得 $X'A'X = U'$, 两式相乘, 其中 A 为正交矩阵故 $A'A = E$ 且 $X'X = E$. 则有 $U'U = E$, 故 U 为对角矩阵.

$$
\begin{aligned}
X'AX &= U \\
A &= XUX' \\
A' &= XU'X' \\
&= XUX' \\
&= A
\end{aligned}
$$

故 A 为实对称矩阵.

10.

$$(\alpha,\alpha) = (\beta,\beta) = 1 \quad \alpha - \beta \neq \theta.$$

从而

$$\eta = \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|}$$

为一个单位向量. 令

$$Tx = x - 2(x,\eta)\eta,$$

则 T 是一个镜面反射，且

$$
\begin{aligned}
T\alpha &= \alpha - 2(\alpha,\eta)\eta = \alpha - 2(\alpha, \frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|}) \cdot \frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|} \\
&= \alpha - \frac{2}{|\alpha-\beta|^2}(\alpha, \alpha-\beta)(\alpha-\beta) \\
&= \alpha - \frac{2[(\alpha,\alpha)-(\alpha,\beta)](\alpha-\beta)}{(\alpha,\alpha)-2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)} \\
&= \alpha - \frac{1}{1-(\alpha,\beta)}[1-(\alpha,\beta)](\alpha-\beta) \\
&= \beta.
\end{aligned}
$$

即有 $T\alpha=\beta$

证明 2) 设 T 为 n 维欧式空间 V 的任意一正交变换，取 V 的一组标准正交基.

如果 $\eta_1=\varepsilon_1, \eta_2=\varepsilon_2, \cdots, \eta_n=\varepsilon_n$.

则 T 就是恒等变换，作镜面反射

$$T_1 x = x - 2(x,\varepsilon_1)\varepsilon_1,$$

则有

$$T_1\varepsilon_1 = -\varepsilon_1, \quad T_1\varepsilon_j = \varepsilon_j, j=2,3,\cdots,n.$$

于是此时显然有

$$T = T_1 T_1.$$

如果 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 与 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 不完全相同, 不完全相同，设 $\varepsilon_1\neq\eta_1$. 则由于 ε_1,η_1 是两个不同的单位向量，由 (1) 知，存在镜面反射 T_1, 使得 $T_1\varepsilon_1=\eta_1$. 令

$$T_1\varepsilon_j = \varepsilon_j, \quad j=2,3,\cdots,n.$$

如果 $\varepsilon_j=\eta_j, j=2,3,\cdots,n$，则 $T=T_1$, 结论成立，否则

可设 $\varepsilon_2\neq\eta_2$, 在作镜面反射 T_2:

$$T_2 x = x - 2(x,\eta)\eta, \quad \eta = \frac{\varepsilon_2-\eta_2}{|\varepsilon_2-\eta_2|}.$$

于是 $T_2\varepsilon_2=\eta_2$, 且可验证 $T_2\eta_1=\eta_1$. 如此继续下去.

则有

$$T = T_S T_{S-1}\cdots T_2 T_1.$$

其中 T_i 都是镜面反射，即 T 可表示为镜面反射的乘积.

11. 证明：(1)(2) $\Longrightarrow$(3)

A 为对称变换故有 $A=A'$

A 为正交变换故有 $A^{-1}=A'$

则

$$A^2=AA=AA'=AA^{-1}=E$$

(1)(3)$\Longrightarrow$(2)

A 为正交变换故有 $A^{-1}=A'$

$A^2=E$ 则

$$AA=E=AA'=AA^{-1},A'=A$$

(2)(3)$\Longrightarrow$(1) **A** 为对称变换故有 $A=A'$

$A^2=E$ 则

$$AA=AA'=E,A'=A^{-1}$$

A 为正交变换.

12. 证明：A 为一对称变换，存在正交矩阵 T 使得 $T'AT=D$, 其中 D 为对角矩阵. 对角线上的元素为特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda n$, 则

$$\begin{aligned}A&=A^2\\T'DT&=T'DTT'D=T'DDT\\D&=DD\\\lambda_i&=\lambda_i^2\end{aligned}$$

故 A 的特征值为 1 或 0, 调节 λ_i 的次序，即相当于乘上适当的的正交矩阵，即得

$$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{bmatrix}=E^{(r)}$$

其中 Q 为正交矩阵, 且 $r=r_A$.

13. 证明：(1)

设子空间 V_1 对反对称变换 T 不变,α 为正交补 $V_1^\perp$ 中的任一向量,β 为 V_1 中任一向量，则 $T\beta\in V_1$，且

$$(T\alpha,\beta)=-(\alpha,T\beta)=0.$$

即 $T\alpha$ 与 V_1 中任意向量正交，故

$$T\alpha\in V_1^\perp$$

即 $V_1^\perp$ 对 T 也不变.

(2) 证明: 设 A 为实反对称矩阵,λ 是它的任意一个特征根, 而 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)'\neq\theta$ 是属于特征根 λ 的一个特征向量，即

$$A\alpha=\lambda\alpha.$$

一方面，有

$$\overline{\alpha}'A\alpha=\overline{\alpha}'\lambda\alpha=\lambda\overline{\alpha}'\alpha$$

另一方面，又有

$$\overline{\alpha}'A\alpha=\overline{\alpha}'(-A')\alpha=-(\overline{A\alpha})'\alpha=-\overline{\lambda\alpha'}\alpha,$$

故 $\lambda\overline{\alpha}'\alpha=-\overline{\lambda\alpha'}\alpha$. 但是,$\overline{\alpha'}\alpha=|\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots+|\alpha_n|\neq 0$. 故

$$\lambda=-\overline{\lambda}.$$

即 λ 为零或纯虚数.

14. 证明 (1) 因为 A 为反对称矩阵, 从而 1 不可能是 A 的特征根. 因此 $|E_n-A|\neq 0$. 即 E_n-A 可逆,

$$(E_n-A)'=E_n'-A'=E_n+A$$

从而 E_n+A 可逆.

(2) 由 $U=(E_n-A)(E_n+A)^{-1}$, 易知 $U'=(E_n-A)^{-1}(E_n+A)$

又由 $E_nA=AE_n$, 可得 $(E_n+A)(E_n-A)=(E_n-A)(E_n+A)$, 从而

$$\begin{aligned}U'U&=(E_n-A)^{-1}(E_n+A)(E_n-A)(E_n+A)^{-1}\\&=(E_n-A)^{-1}(E_n-A)(E_n+A)(E_n+A)^{-1}\\&=EE\\&=E\end{aligned}$$

从而 U 是正交矩阵.

15. (1) 证明:

必要性:

$$\begin{aligned}A\text{反对称}&\Longrightarrow(\forall\alpha,\beta\in P^n)\quad(A\alpha,\beta)=-(\alpha,A\beta).\\&\Longrightarrow(\forall\alpha\in P^n)\quad(A\alpha,\alpha)+(\alpha,A\alpha)=0.\\&\Longrightarrow(\forall\alpha\in P^n)\quad 2(A\alpha,\alpha)=0.\\&\Longrightarrow(\forall x\in P^n)\quad(Ax,x)=0\\&\Longrightarrow(\forall x\in P^n)\quad X'AX=0\end{aligned}$$

充分性:

$$
\begin{aligned}
(\forall x\in P^n)\quad X'AX=0 &\Longrightarrow (\forall \alpha,\beta\in P^n)\quad (A(\alpha-\beta),\alpha-\beta)=0.\\
&\Longrightarrow (A\alpha,\alpha)-(A\alpha,\beta)-(A\beta,\alpha)+(A\beta,\beta)=0\\
&\Longrightarrow (A\alpha,\beta)+(A\beta,\alpha)=0\\
&\Longrightarrow (A\alpha,\beta)=-(\alpha,A\beta).\\
&\Longrightarrow A\text{为反对称矩阵}
\end{aligned}
$$

(2) 证明:

必要性: 显然

充分性:

$$
\begin{aligned}
(\forall x\in P^n)\quad (Ax,x)=0 &\Longrightarrow (\forall \alpha,\beta\in P^n)\quad (A(\alpha-\beta),\alpha-\beta)=0\\
&\Longrightarrow (A\alpha,\alpha)-(A\alpha,\beta)-(A\beta,\alpha)+(A\beta,\beta)=0\\
&\Longrightarrow (A\alpha,\beta)+(A\beta,\alpha)=0\quad (A\text{对称})\\
&\Longrightarrow (A\alpha,\beta)+(\beta,A\alpha)=0\\
&\Longrightarrow 2(A\alpha,\beta)=0\\
&\Longrightarrow (\forall \alpha,\beta\in P^n)\quad (A\alpha,\beta)=0\\
&\Longrightarrow A=O
\end{aligned}
$$

16. 此类题先求矩阵的特征根及其相应特征向量, 将特征向量标准正交化, 即可求得正交矩阵 T.

(1)$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-11 & -2 & 8\\ -2 & \lambda-2 & -10\\ 8 & -10 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda+9)(\lambda-18)(\lambda-9)$ 可求得相应的特征向量为 $\alpha_1=(\frac{1}{2},-1,1)',\alpha_2=(-1,\frac{1}{2},1)',\alpha_3=(2,2,1)'$. 故所求的正交矩阵为

$$
T=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}
$$

而

$$
T'AT=\begin{bmatrix}-9 & & \\ & 18 & \\ & & 9\end{bmatrix}
$$

(2)

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-17 & -8 & 4\\ -8 & \lambda-17 & -4\\ 4 & -4 & \lambda-11\end{vmatrix}=(\lambda-27)(\lambda-9)(\lambda-9)$ 可求得相应的特征向量为 $\alpha_1=(2,-2,1)',\alpha_2=(1,1,0)',\alpha_3=(-\frac{1}{2},0,1)'$. 故所求的正交矩阵为

$$T=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6}\\ 1 & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3}\end{bmatrix}$$

而

$$T'AT=\begin{bmatrix}27 & & \\ & 9 & \\ & & 9\end{bmatrix}$$

(3)

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-1 & 2\\ 0 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-4)$ 可求得相应的特征向量为 $\alpha_1=(-1,-\frac{1}{2},1)',\alpha_2=(\frac{1}{2},1,1)',\alpha_3=(2,-2,1)'$. 故所求的正交矩阵为

$$T=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

而

$$T'AT=\begin{bmatrix}1 & & \\ & -2 & \\ & & 4\end{bmatrix}$$

(4)

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-5 & 4\\ 2 & 4 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-10)$ 可求得相应的特征向量为 $\alpha_1=(-2,1,0)',\alpha_2=(2,0,1)',\alpha_3=(-\frac{1}{2},-1,1)'$. 故所求的正交矩阵为

$$T=\begin{bmatrix}-\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & -\frac{1}{3}\\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

而

$$T'AT=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 10\end{bmatrix}$$

(5)

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-(1+\sqrt{7}))(\lambda-(1-\sqrt{7}))$$ 可求得相应的特征向量为 $\alpha_1=(-1,1,0,0)'$, $\alpha_2=(-1,0,1,0)'$, $\alpha_3=(-\frac{4\sqrt{7}-7}{14+\sqrt{7}},\frac{(\sqrt{7}-7)(\sqrt{7}-1)}{2(14+\sqrt{7})},\frac{(\sqrt{7}-4)\sqrt{7}}{14+\sqrt{7}},1)'$, $\alpha_4=(-\frac{7+4\sqrt{7}}{\sqrt{7}-14},-\frac{(\sqrt{7}+7)(1+\sqrt{7})}{2(\sqrt{7}-14)},\frac{(\sqrt{7}-4)\sqrt{7}}{14+\sqrt{7}},1)'$. 故所求的正交矩阵为

$$T=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{(\sqrt{7}-4)\sqrt{7}}{\sqrt{686-140\sqrt{7}}} & \frac{\sqrt{7}(14+\sqrt{7}\sqrt{6})}{42\sqrt{49-10\sqrt{7}}}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{6}{2} & \frac{(\sqrt{7}-4)\sqrt{7}}{\sqrt{686-140\sqrt{7}}} & \frac{\sqrt{7}(14+\sqrt{7}\sqrt{6})}{42\sqrt{49-10\sqrt{7}}}\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{(\sqrt{7}-4)\sqrt{7}}{\sqrt{686-140\sqrt{7}}} & \frac{\sqrt{7}(14+\sqrt{7}\sqrt{6})}{42\sqrt{49-10\sqrt{7}}}\\ 0 & 0 & \frac{14+\sqrt{7}}{\sqrt{686-140\sqrt{7}}} & -\frac{(\sqrt{7}-4)\sqrt{6}}{42\sqrt{49-10\sqrt{7}}}\end{bmatrix}$$

而

$$T'AT=\begin{bmatrix}0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1-\sqrt{7} & \\ & & & 1+\sqrt{7}\end{bmatrix}$$

(6)

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -4 & -1\\ 0 & \lambda & -1 & -4\\ -4 & -1 & \lambda & 0\\ -1 & -4 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+5)(\lambda+3)(\lambda-3)(\lambda-5)$$ 可求得相应的特征向量为 $\alpha_1=(-1,-1,1,1)'$, $\alpha_2=(1,-1,-1,1)'$, $\alpha_3=(-1,1,-1,1)'$, $\alpha_4(1,1,1,1)'$. 故所求的正交矩阵为

$$T=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

而

$$T'AT=\begin{bmatrix}-5 & & & \\ & -3 & & \\ & & 3 & \\ & & & 5\end{bmatrix}$$

17. (1) 求其相应的系数矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{bmatrix}$$

的三个特征根，分别为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$，其相应的特征向量分别为 $\alpha_1=(2,2,1)',\alpha_2=(-1,\frac{1}{2},1)',\alpha_3=(\frac{1}{2},-1,1)$，将其标准正交化即得正交矩阵

$$T=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

即为所求正交变数替换.

(2) 求其相应的系数矩阵

$$\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

的四个特征根，分别为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-1,\lambda_3=1,\lambda_4=1$，其相应的特征向量分别为 $\alpha_1=(-1,1,0,0)',\alpha_2=(0,0,-1,1)',\alpha_3=(1,1,0,0),\alpha_4=(0,0,1,1)'$，将其标准正交化即得正交矩阵

$$T=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

即为所求正交变数替换.

(3) 求其相应的系数矩阵

$$\begin{bmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{bmatrix}$$

的三个特征根，分别为 $\lambda_1=-7,\lambda_2=2,\lambda_3=2$，其相应的特征向量分别为 $\alpha_1=(-\frac{1}{2},-1,1)',\alpha_2=(-2,1,0)',\alpha_3=(2,0,1)$，将其标准正交化即得正交矩阵

$$T=\begin{bmatrix}-1/3&-2\sqrt{5}/5&2\sqrt{5}/15\\-2/3&\sqrt{5}/5&4\sqrt{5}/15\\2/3&0&\sqrt{5}/3\end{bmatrix}$$

即为所求正交变数替换.

(4) 此题特征根为三次多项式的根，不易计算. 特征多项式为 $x^3-\frac{29}{4}x+6$，故在此略去.

18. 证明:

存在正交矩阵 Q_1, 使 $Q_1^{-1}AQ_1$ 为对角形，不妨设

$$Q_1^{-1}AQ_1=\begin{pmatrix}\lambda_1E_1 & & & \\ & \lambda_2E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_SE_S\end{pmatrix}\quad \lambda_i\neq\lambda_j,$$

这类 E_i 表示单位矩阵，因为 $AB=BA$, 故

$$Q_1^{-1}AQ_1\cdot Q_1^{-1}BQ_1=Q_1^{-1}ABQ_1=Q_1^{-1}BAQ_1\qquad =Q_1^{-1}BQ\cdot Q_1^{-1}AQ_1$$

即 $Q_1^{-1}BQ_1$ 与 $Q_1^{-1}AQ_1$ 可换，和对角矩阵可交换的只能是对角矩阵, 因此可知有

$$Q_1^{-1}BQ_1=\begin{pmatrix}B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_S\end{pmatrix}$$

并且易见 $Q_1^{-1}BQ_1$ 仍是对称的，从而 $B_i(i=1,2,\cdots,s)$ 都是对称的，于是存在正交矩阵 $P_i(i=1,2,\cdots,s)$, 使得 $P_i^{-1}B_iP_i=D_i$ 为对角矩阵。令

$$Q=Q_1\begin{pmatrix}P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_s\end{pmatrix}$$

则易见

$$\begin{aligned}QQ'&=Q_1\begin{pmatrix}P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_1' & & & \\ & P_2' & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_s'\end{pmatrix}Q_1'\\ &=Q_1\begin{pmatrix}P_1P_1' & & & \\ & P_2P_2' & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_sP_s'\end{pmatrix}Q_1'\\ &=Q_1EQ_1'=Q_1Q_1'=E,\end{aligned}$$

即 Q 是正交矩阵，且

$$
\begin{aligned}
Q^{-1}AQ &= \begin{pmatrix} P_1^{-1} & & & \\ & P_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_s^{-1} \end{pmatrix} Q_1^{-1}AQ_1 \begin{pmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} P_1^{-1} & & & \\ & P_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_s^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 E_1 & & & \\ & \lambda_2 E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s E_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 E_1 & & & \\ & \lambda_2 E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s E_s \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q^{-1}BQ &= \begin{pmatrix} P_1^{-1} & & & \\ & P_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_s^{-1} \end{pmatrix} Q_1^{-1}BQ_1 \begin{pmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} P_1^{-1} & & & \\ & P_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_s^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} P_1^{-1}B_1P_1 & & & \\ & P_2^{-1}B_2P_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_s^{-1}B_sP_s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} D_1 & & & \\ & D_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

即存在正交矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ$ 与 $Q^{-1}BQ$ 都是对角矩阵，则正交矩阵 Q 的每一列向量均为它们的公共特征向量。

对 $n=1,2$ 时，存在 n 阶正交矩阵 U, 使得 $U'A_iU$ 都是对角矩阵.
假设对 $i=n$ 时，命题成立.
当 $i=n+1$ 时，证明方法与上述类似，不再叙述，可证得命题亦成立。
综上所述，命题得证。

19. 证明：(正定矩阵的一个性质：对任意正定矩阵 A, 对任意正整数 m 都存在正定矩阵 B, 使得 $A=B^m$. 特别的有 $A=B^2$) 存在正定矩阵 $A=C^2$

$$\begin{aligned}
A\text{为正定矩阵} &\Longrightarrow AB=C^2B \\
&\Longleftrightarrow AB=C^2B=C(C'BC)C^{-1} \quad (C'=C) \\
&\Longleftrightarrow C'BC\text{与}AB\text{相似，有相同的特征根}. \\
B\text{正定} &\Longleftrightarrow C'BC\text{正定} \\
&\Longleftrightarrow C'BC\text{特征根全为正的} \\
&\Longleftrightarrow AB\text{特征根全为正的}
\end{aligned}$$

20. (1) 略

(2) $$\begin{bmatrix} A \\ E_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5/2 \\ \hdashline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{10}/10 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{10}/5 & 0 \end{array}\right]$$

(3) $$\begin{bmatrix} A \\ E_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \\ \hdashline 1 & -1/2 & -1 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hdashline \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{6}/3 \end{array}\right]$$

(4) $$\begin{bmatrix} A \\ E_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hdashline -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$(5)\begin{bmatrix} A \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$(6)f = x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$

首先, 应注意到: 若

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}, \qquad y_2 = \frac{x_1 - x_2 + x_3}{2}$$

则便有

$$y_1^2 - y_2^2 = x_1x_2 + x_2x_3$$

由此下面在分 n 为奇偶来讨论 f 的标准形,

(1) 当 n 为奇数时, 令

$$\begin{cases} y_i = \frac{x_i + x_{i+1} + x_{i+2}}{2} \\ y_{i+1} = \frac{x_i - x_{i+1} + x_{i+2}}{2} \\ y_n = x_n \end{cases} \qquad i = 1, 3, 5, \cdots, n-2$$

由此可得当 $n = 4k+1$ 及 $4k+3$ 时的代换矩阵分别为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 \\ & & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & 1 & -1 & 0 \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 & 1 \\ & & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & 1 & -1 & 0 \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

将以上代入 f, 即得 f 的标准形:

$$f = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 = \cdots + y_n^2 - y_{n-1}^2.$$

(2) 当 n 为偶数时, 令,

$$\begin{cases} y_i &= \frac{x_i+x_{i+1}+x_{i+2}}{2} \\ y_{i+1} &= \frac{x_i-x_{i+1}+x_{i+2}}{2} \\ y_{n-1} &= \frac{x_{n-1}+x_n}{2} \\ y_n &= \frac{x_{n-1}-x_n}{2} \end{cases} \qquad i=1,3,5,\cdots,n-3.$$

此时代换的方阵在 $n=4k$ 及 $n=4k+2$ 时分别为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ & & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ & & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

将以上代入 f, 得 f 的标准形为

$$f=y_1^2-y_2^2+y_3^2-y_4^2+\cdots+y_{n-1}^2-y_n^2$$

(7) 可将 f 化成

$$f=(x_1+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}x_j)^2+\frac{3}{4}(x_2+\frac{1}{3}\sum_{j=3}^{n}x_j)^2+\cdots+\frac{n}{2(n-1)}(x_{n-1}+\frac{1}{n}x_n)^2+\frac{n+1}{2n}x_n^2$$

令

$$\begin{cases} y_1=x_1+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}x_j \\ y_2=x_2+\frac{1}{3}\sum_{j=3}^{n}x_j \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1}=x_{n-1}+\frac{1}{n}x_n \\ y_n=x_n \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{3}y_3 - \cdots - \frac{1}{n-1}y_{n-1} - \frac{1}{n}y_n \\ x_2 = y_2 - \frac{1}{3}y_3 - \cdots - \frac{1}{n-1}y_{n-1} - \frac{1}{n}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} = y_{n-1} - \frac{1}{n}y_n \\ x_n = x_n \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \cdots & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \cdots & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

将代换代入 f, 即得

$$f = y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 + \cdots + \frac{2}{2(n-1)}y_{n-1}^2 + \frac{n+1}{2n}y_n^2$$

矩阵验算从略.

21. (1) 证明: 因为 A 为 n 阶实对称矩阵故有 n 个实特征根，且存在正交矩阵 T，使得 $T'AT = D$, 其中 D 为对角矩阵，对角线上的元素为矩阵 A 的特征值，设为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，令 $k = max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots, |\lambda_n|\}$。$X = TY$, 则

$$\begin{aligned} (\forall X \in R^n) \quad |X'AX| &= |Y'DY| \\ &= |\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2| \\ &\le k(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \\ &= kY'Y \\ &= kX'X \end{aligned}$$

(2) 证明:

因为 A 为实对称矩阵，可以将 A 标准标准化，由 $(\exists X, Y \in R^n)X'AX > 0, Y'AY < 0$，知 A 正惯性指数不为零且负惯性指数也不为零.
故 $\exists Z \in R^n \backslash \theta \quad Z'AZ = 0$

22. 证明：由 A, B, AB 均为对称矩阵可得 $AB = BA$，则由 (18) 的证明可知存在正交矩阵 U，使得 A, B 均为对角形. 由 $U'ABU = U'AUU'BU = D_A D_B$ 知,AB 与 $D_A D_B$ 有相同的特征根，故命题得证。

23. 证明: 因 A 为实对称的, 故存在正交矩阵 U 使

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

于是由于 $\mu \le \lambda_i \le \lambda, i = 1, 2, \cdots, n$, 故 $U^{-1}AU - \mu E = U^{-1}(A - \mu E)U$, 都是非负实数, 从而 $A - \mu E$ 是半正定的, 因此对任意 n 维向量 X 都有 $X'(A - \mu E) \ge 0$, 即 $\mu X'X \le X'AX$, 同理可证得另一边.

24. 证明: 充分性. 设实二次型 f 的秩为 2, 符号差为 0, 则 f 可通过满秩线性代换 $X = CY$ 化为

$$f = x_1^2 - y_2^2 = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2)$$

由 $Y = C^{-1}X$, 即 y_1, y_2 可由 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性表示, 代入上式, 即知 f 的秩是 1, 则 f 的规范形为 y_1^2, 根据同样的道理知, 结论成立.

必要性. 设

$$f = (a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)(b_1x_1 + \cdots + b_nx_n) \ne 0$$

若 $(a_1, \cdots, a_n)$ 与 $(b_1, \cdots, b_n)$ 成比例, 设 $b_i = ka_i$, 且 $a_1 \ne 0$, 则可对 f 进行满秩线性代换

$$\begin{cases} y_1 = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \\ y_2 = x_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

化成 $f = ky_1^2$, 此时 f 的秩为 1.

若 $(a_1, \cdots, a_n)$ 与 $(b_1, \cdots, b_n)$ 不成比例, 不妨设 (a_1, a_2) 与 (b_1, b_2) 不成比例, 从而 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \ne 0$, 则可对 f 连续进行下列满秩线性代换

$$\begin{cases} y_1 = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \\ y_2 = b_1x_1 + \cdots + b_nx_n \\ y_3 = x_3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases} y_1 = z_1 + z_2 \\ y_2 = z_1 - z_2 \\ y_3 = z_3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = z_n \end{cases}$$

得 $f = y_1y_2 = z_1^2 - z2^2$, 即此时 f 的秩为 2 且符号差为 0.

25. 证明：因为 A, B 均对称，故存在可逆矩阵 C_A, C_B，使得 $C'_A AC_A, C'_B BC_B$，为对角形.

$$
\begin{aligned}
C'_A AC_A &= \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 & 4\sqrt{5}/15 & -1/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 & 4\sqrt{5}/15 & -1/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
C'_B BC_B &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= (C_B^{-1})' C'_A AC_A C_B^{-1} \\
&= (C_A C_B^{-1})' A (C_A C_B^{-1}) \\
C &= C_A C_B^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 & 4\sqrt{5}/15 & -1/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\sqrt{5}/5 & 4\sqrt{5}/15 & -(9\sqrt{5}+5)/15 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

故 A 与 B 合同.

26. (1) 其系数矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} A \\ E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$
\longrightarrow \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & -1/4 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1/4 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1/4 \\
1 & -1/2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & 1/2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1/2 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1/2 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1/2
\end{bmatrix}
$$

故 A 的秩为 n，符号差为 0.

27. 证明:

$$
\begin{bmatrix}
\lambda+2 & 2\lambda+3 & \cdots & n\lambda+1+n \\
2\lambda+3 & 4\lambda+4 & \cdots & 2n\lambda+2+n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
n\lambda+1+n & 2n\lambda+n+2 & \cdots & nn\lambda+2n
\end{bmatrix}
\longrightarrow
\begin{bmatrix}
\lambda+2 & -1 & \cdots & n\lambda+1+n \\
-1 & 0 & \cdots & -n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
n\lambda+1+n & -n & \cdots & nn\lambda+2n
\end{bmatrix}
\longrightarrow
\begin{bmatrix}
\lambda & -1 & \cdots & n\lambda \\
-1 & 0 & \cdots & -n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
n\lambda & -n & \cdots & nn\lambda
\end{bmatrix}
\longrightarrow
\begin{bmatrix}
\lambda & -1 & \cdots & n\lambda \\
-1 & 0 & \cdots & -n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
n\lambda & -n & \cdots & nn\lambda
\end{bmatrix}
\longrightarrow
\begin{bmatrix}
\lambda & -1 & \cdots & 0 \\
-1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}
\longrightarrow
\begin{bmatrix}
0 & -1 & \cdots & 0 \\
-1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}
\longrightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & -1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}
$$

28. 证明：假设 $a, b, c \neq 0$

$$\begin{aligned} ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 &= a(x_1^2 + \frac{b}{a}x_1x_2) + cx_2^2 \\ &= a(x_1 + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}x_2^2 \end{aligned}$$

故若 $ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ 正定，当且仅当 $a > 0, b^2 - 4ac < 0$.

29. (1) 证明：A, B 均正定，故有 $\forall X \neq \theta \in R^n, X'AX > 0, X'BX > 0$, 若 $k^2 + l^2 \neq 0$, 则

$$(\forall X \neq \theta \in R^n) \quad X'(k^2A + l^2B)X = k^2X'AX + l^2X'BX > 0$$

故 $X'(k^2A + l^2B)X$ 正定.

(2) 证明：A 正定，假设 A 的特征根分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则 $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$ 因为 A 对称易证得 A^{-1}, A^*, 都为对称矩阵，而它们相应的特征根分别为 $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \cdots, \frac{1}{\lambda_n}$ 与 $\frac{|A|}{\lambda_1}, \frac{|A|}{\lambda_2}, \cdots, \frac{|A|}{\lambda_n}$, 它们都大于零，故 A^{-1}, A^* 都正定.

(3)、证明：必要性:
若 AB 正定，则有 $(AB)' = AB$
而 $(AB)' = B'A' = BA$ 即 $AB = BA$.

充分性:
$AB = BA$ 且 A, B 均对称可得 AB 亦对称. 由于 A, B 都是正定的，故存在实可逆矩阵 P, Q 使得

$$A = P'P \qquad B = Q'Q.$$

于是 $AB = P'PQ'Q$ 与 $QP'PQ' = Q(P'PQ'Q)Q^{-1} = QABQ^{-1}$ 相似，从而两者有相同的特征根，而 $QP'PQ' = (PQ')'(PQ')$ 为正定矩阵，其特征根都是正实数，故 AB 的特征根都是正实数，从而为正定矩阵.

(4)、证明:
因为 A 是正定，存在正定矩阵 $C, A = C^2$ 若用 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 表示 C 中的列向量，则

$a_{ij}=c_i'c_j$, 令 $D=(a_{ij}b_{ij})$ 则有

$$d_{ij}=a_{ij}b_{ij}=c_i'c_jb_{ij}=c_i'b_{ij}c_j=\sum_{k=1}^{n}b_{ij}c_{ik}c_{jk}$$

$$\begin{aligned}X'DX&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_id_{ij}x_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ic_i'b_{ij}c_jx_j\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}x_ic_{ik}b_{ij}c_{jk}x_j\\&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ic_{ik}b_{ij}c_{jk}x_j\\&=\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix}x_1c_{1k}\\x_2c_{2k}\\\vdots\\x_nc_{nk}\end{pmatrix}'B\begin{pmatrix}x_1c_{1k}\\x_2c_{2k}\\\vdots\\x_nc_{nk}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

因为 B 正定故有 $(\forall X\in R^n)$ $X'BX\geq 0$, 令 $X_i=(x_1c_{1i},x_1c_{1i},\cdots,x_1c_{1i})',i=1,2,\cdots,n$, 则有 $X'DX=\sum_{i=1}^{n}X_i'BX_i\geq 0$, 若 $X\neq 0$, 则存在 $i=k$ 使得 $X_k\neq 0,X_k'BX_k>0$. 而易证得 D 为对称矩阵，故 D 正定。

(5)、证明：由 $B=(a_{ij}b_ib_j)$ 知 B 对称.

$$X'BX=\sum_{i=1}^{n}x_ib_ia_{ij}x_jb_j=\begin{pmatrix}x_1b_1\\x_2b_2\\\vdots\\x_nb_n\end{pmatrix}'A\begin{pmatrix}x_1b_1\\x_2b_2\\\vdots\\x_nb_n\end{pmatrix}$$

因为 A 正定且 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是不为零的实数，故若 ,$X\neq 0,X'BX>0$ 即 B 正定.

30. 证明: 设 A 为任意一个可逆矩阵，则 AA' 是正定矩阵，存在正定矩阵 B 使

$$AA'=B^2.$$

令 $Q=B^{-1}A$, 于是 $A=BQ$，下证 Q 是正交矩阵:

$$\begin{aligned}QQ'&=B^{-1}A(B^{-1}A)'=B^{-1}AA'B^{-1}\\&=B^{-1}B^2(B^{-1})'=E\end{aligned}$$

故命题得证.

31. 证明：因为 $A'=A$，所以有 n 个实特征根，令其为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 则 $tE+A$ 的特征根为 $t+\lambda_1,t+\lambda_2,\cdots,t+\lambda_n$, 当 $t>max\{\lambda_i\},i=1,2,\cdots,n$ 时，$tE+A$ 的特征值均为正数且 $tE+A$ 为对称矩阵，故 $tE+A$ 正定.

32. 证明:

$$
\begin{aligned}
& n\sum_{i=1}^{n} x_i^2-(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 \\
&=(n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^2-2\sum_{i,j=1,i<j}^{n} x_i x_j \\
&=(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+\cdots+(x_2-x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}-x_n)^2 \\
&=\sum_{i,j=1,j>i}^{n}(x_i-x_j)^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

故 A 是半正定的.

33. 证明:

充分性: 若 A 的主子式都大于零，则存在可逆矩阵 C 使得

$$
C'AC=\begin{bmatrix} \frac{\Delta_0}{\Delta_1} & & & \\ & \frac{\Delta_1}{\Delta_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \end{bmatrix}
$$

其中 $\Delta_0=1$，故对角线上的元素都大于零，所以其正惯性指数为 n 即 A 正定.

必要性: 若 A 正定，令 A_k 为 k 行与相应 k 列组成的矩阵，则 $A_k, k=1,2,\cdots,n$ 都是正定矩阵，而正定矩阵的行列式大于零. 故 A 的主子式都大于零.

34. 证明:

当 $n=1,2$ 时，易证得命题成立。

假设 $n=k-1$ 时，命题成立.

当 $n=k$ 时，矩阵 A 可以写成

$$
A=\begin{pmatrix} A_{n-1} & a \\ a' & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

而

$$
\begin{pmatrix} E_{n-1} & O \\ -a'A_{n-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{n-1} & a \\ a' & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{n-1} & a \\ O & a_{nn}-a'A_{n-1}^{-1}a \end{pmatrix}
$$

其中 $\begin{vmatrix} E_{n-1} & O \\ -a'A_{n-1} & 1 \end{vmatrix}=1$，故 $\begin{vmatrix} A_{n-1} & a \\ O & a_{nn}-a'A_{n-1}^{-1}a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_{n-1} & a \\ a' & a_{nn} \end{vmatrix}=|A|$

$|A|=|A_{n-1}|(a_{nn}-a'A_{n-1}^{-1}a)\leq a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

即当 $n=k$ 时，命题亦成立.

综上所述, 命题得证.

35. 证明：设

$$l_i = b_{i1}x_1 + \cdots + b_{in}x_n, \quad i = 1, 2, \cdots, p+q.$$

且 f 的秩为 r, 正惯性指数为 s, 则存在满秩线性代换

$$y_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \cdots + c_{in}x_n \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

$$\text{使} \quad \begin{aligned} f &= l_1^2 + \cdots + l_p^2 - l_p^2 - \cdots - l_{p+s}^2 \\ &= y_1^2 + \cdots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \cdots - y_r^2. \end{aligned}$$

若 $s > p$, 则方程组

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{p1}x_1 + \cdots + b_{pn}x_n = 0 \\ c_{s+1,1}x_1 + \cdots + c_{s+1,n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}x_1 + \cdots + c_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (1)$$

有非零解 (因为方程个数 $p+n-s<n$), 则任取一非零解 $k_1, \cdots, k_n$ 代入 (2), 得

$$f = -l_{p+1}^2 - \cdots - l_{p+q}^2 = y_1^2 + \cdots + y_s^2$$

由于都是实数, 故只有 $y_1 = \cdots = y_s = 0$. 这 s 个等式同 (1) 中后 $n-s$ 个等式联合起来, 即得

$$\begin{cases} c_{11}k_1 + \cdots + c_{1n}k_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{s1}k_1 + \cdots + c_{sn}k_n = 0 \\ c_{s+1,1}k_1 + \cdots + c_{s+1,n}k_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}k_1 + \cdots + c_{nk}k_n = 0 \end{cases}$$

由 $k_1, \cdots, k_n$ 不全为零, 故其系数行列式等于零, 这与满秩线性代换不合, 故必为 $s \le p$.

同理可证负惯性指数 $\le q$

第九章　引申——一般矩阵的（相似）标准形

习题

1. 求下列 λ 矩阵的等价标准形:

(1) $\begin{bmatrix} \lambda^3-\lambda & 2\lambda^2 & \lambda^3+2\lambda^2-\lambda \\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda & \lambda^2+8\lambda \end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} \lambda-\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda-\lambda_2 \end{bmatrix}, \lambda_1 \neq \lambda_2$;

(4) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 & 0 \\ \lambda^2-\lambda & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. 令 $\boldsymbol{B}(\lambda) \in \mathbb{P}[\lambda]^{m\times m}, \boldsymbol{A}(\lambda) \in \mathbb{P}[\lambda]^{m\times n}(\mathbb{P}[\lambda]^{n\times m})$. 证明: 若 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 可逆, 则

$$r_{\boldsymbol{B}(\lambda)\boldsymbol{A}(\lambda)} = r_{\boldsymbol{A}(\lambda)}(r_{\boldsymbol{A}(\lambda)\boldsymbol{B}(\lambda)} = r_{\boldsymbol{A}(\lambda)}).$$

3. 证明: 任意 $\boldsymbol{A}(\lambda) \in \mathbb{P}[\lambda]^{n\times n}$ 总可以分解为一对称 λ 矩阵, 左 (右) 乘一可逆 λ 矩阵.

4. 令 $\boldsymbol{A}(\lambda) \in \mathbb{P}[\lambda]^{n\times n}, r = r_{\boldsymbol{A}(\lambda)}$. 证明: 存在 $\boldsymbol{B}(\lambda) \in \mathbb{P}[\lambda]^{m\times r}, \boldsymbol{C}(\lambda) \in \mathbb{P}[\lambda]^{r\times n}$, 使得

$$\boldsymbol{A}(\lambda) = \boldsymbol{B}(\lambda)\boldsymbol{C}(\lambda),$$

其中 $r_{\boldsymbol{B}(\lambda)} = r_{\boldsymbol{C}(\lambda)} = r$.

5. 用 λ 矩阵的初等变换, 结合行列式因子计算, 求下列矩阵的不变因子, 从而写出特征矩阵的等价标准形, 也写出它的全部初等因子:

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; (4) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -5 & 4 \\ 8 & -4 & 3 & -4 \\ 15 & 10 & 11 & -11 \end{bmatrix}$.

6. 求

$$\begin{bmatrix} \lambda^2(\lambda-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

的初等因子和不变因子 (初等因子分别在 $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ 上求).

7. 证明: 下列 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 等价, 从而, 在 $\mathbb{C}$ 上求出 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的初等因子和不变因子.

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\left[\begin{array}{ccc:ccc} \lambda-\alpha & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-\alpha & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-\alpha & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline \beta^2 & 1 & 0 & \lambda-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 1 & 0 & \lambda-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 & 0 & 0 & \lambda-\alpha \end{array}\right],$$

$$\boldsymbol{B}(\lambda)=\left[\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & r & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \end{array}\right],\quad r=(\lambda-\alpha)^2+\beta^2.$$

8. 证明: 对于任意 λ 矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$, 有

$$\boldsymbol{D}_k(\lambda)^2 \mid \boldsymbol{D}_{k-1}(\lambda)\boldsymbol{D}_{k+1}(\lambda).$$

9. 令

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

求 $\boldsymbol{A}^k, k=1,2,\cdots$.

10. 由 $\boldsymbol{A}$ 的全部不变因子写出 $\boldsymbol{A}$ 的有理标准形:

(1) $1,1,1,(\lambda-1),(\lambda-1)(\lambda+2),(\lambda-1)(\lambda+2)$;

(2) $1,1,1,(\lambda+1),(\lambda+1)^2,(\lambda+1)^3$.

11. 求 6 阶方阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

在 $\mathbb{Q}$ 上的 Jacobson 标准形.

12. 令 11 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的非常数不变因子为

$$(\lambda+7)(\lambda^2-5),\ (\lambda+7)^2(\lambda^2-5)(\lambda^2-3)^2.$$

分别求 $\boldsymbol{A}$ 在域 $\mathbb{Q},\mathbb{Q}(\sqrt{3}),\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 和 $\mathbb{R}$ 上的 Jacobson 标准形.

13. 令 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{Q}^{2n\times 2n}$. 证明: 若 $\Delta(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 的不可约因式是

$$\lambda^2+\lambda+1,\ \lambda^2-2,$$

又 $m(\lambda)$ 是 4 次的, 则在 $\mathbb{C}$ 上, $\boldsymbol{A}$ 相似于对角形.

14. 求 $\mathbb{C}$ 上下列矩阵的 Jordan 标准形:

(1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix} \sqrt{-1} & \sqrt{-1} \\ 1 & \sqrt{-1} \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$; (4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(5) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (6) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

15. 令 $\boldsymbol{A}$ 是零矩阵 (即存在正整数 k, 使得 $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{O}$). 利用 Jordan 标准形证明: $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}| = 1$.

16. 令 3 阶方阵的 Jordan 标准形是
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
且使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{J}$ 的 $\boldsymbol{P}$ 是
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$
求 $f(\boldsymbol{A})$, 其中 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2$.

17. 令 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 且 $\boldsymbol{A}^l = \boldsymbol{E}, l$ 为正整数. 证明: $\boldsymbol{A}$ 相似于对角形, 且后者对角线元素的模都是 1.

18. 证明: $\mathbb{C}$ 上的下列矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 相似.

(1) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & 1 \\ \boldsymbol{E}_{n-1} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}$, 其中, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 1 的 n 个两两不同的 n 次根;

(2)
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & * & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix},$$
其中 * 处元素任意.

19. 令 λ_1 为 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的 k 重特征根. 证明: $(\lambda_1\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^k$ 的秩为 $n-k$.

20. 令 $\boldsymbol{J}_s(\lambda)$ 为 s 阶的 Jordan 块, $\lambda \neq 0$. 求 $\boldsymbol{J}_s(\lambda)^{-1}$.

21. 令 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 又 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = J_n(\lambda)$ (对角线为 λ 的 Jordan 块). 求 $\boldsymbol{P}$ 的列向量所满足的线性方程组.

22. 求秩为 1 的 n 阶方阵的 Jordan 标准形.

23. 令 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的秩为 1. 证明: 若 $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = 1$, 则 $\boldsymbol{A}$ 必幂等 (即 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$).

24. 令 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的特征多项式为 $(\lambda-1)^n$. 证明: 对于任意正整数 $l, 2 \leqslant l \leqslant n$, $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^l$ 相似.

25. 令 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. 证明: $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}'$.

26. 令 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. 证明: $\boldsymbol{A}$ 为纯量阵当且仅当 $\partial \boldsymbol{D}_{n-1}(\lambda) = n-1$.

解答

1. (1)

$$\begin{bmatrix} \lambda^3-\lambda & 2\lambda^2 & \lambda^3+2\lambda^2-\lambda \\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda & \lambda^2+8\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[\{3+2(-1)\}]{\{3+1(-1)\}} \begin{bmatrix} \lambda^3-\lambda & 2\lambda^2 & 0 \\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\{1+2(-\frac{1}{3}\lambda-\frac{5}{3})\}}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}\lambda^3-\frac{10}{3}\lambda^2-\lambda & 2\lambda^2 & 0 \\ 0 & 3\lambda & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{[1+2(-\frac{2}{3})]} \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\lambda^3-\frac{10}{3}\lambda^2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3\lambda & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[2(\frac{1}{3})]}]{[1(3)]}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda^3-10\lambda^2-3\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[1,2]}]{\{1,2\}} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^3-10\lambda^2-3\lambda & 0 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[3+2(-\lambda)]}]{[1+2(1)]} \begin{bmatrix} 1 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{[1,3]}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1 & \lambda^2+\lambda & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[3+1(-1)]}]{[2+1(-\lambda)]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & \lambda^2+\lambda & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{[3+2(-(\lambda+1))]}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) \end{bmatrix} \xrightarrow{\{3+2(1)\}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) \end{bmatrix}$$

(3)

$$\begin{bmatrix} \lambda-\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda-\lambda_2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\{1+2(-1)\}]{[1+2(1)]} \begin{bmatrix} \lambda_2-\lambda_1 & \lambda-\lambda_2 \\ \lambda_2-\lambda & \lambda-\lambda_2 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[2+1(\frac{\lambda-\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1})]}]{\{2+1(-\frac{\lambda-\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1})\}}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_2-\lambda_1 & 0 \\ 0 & (\lambda-\lambda_2)(1+\frac{\lambda-\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}) \end{bmatrix} \xrightarrow[{[2(\lambda_2-\lambda_1)]}]{[1(\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1})]} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) \end{bmatrix}$$

(4) 化成对角阵形式:

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix},$$

则有, 其初等因子为:$\lambda, \lambda, \lambda^2, (\lambda-1), (\lambda-1), (\lambda-1)^2$, 从而不变因子为:

$$d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=\lambda(\lambda-1), d_3(\lambda)=\lambda(\lambda-1), d_4(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)^2.$$

从而, 等价标准形为:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)^2 \end{bmatrix}.$$

2. 由初等变换不改变矩阵的秩易证.

3. 证明: 令 $\bar{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 为 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的等价标准形 (详见定理 9.1.2), 则 $\bar{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 为对称矩阵, 且存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{A}(\lambda)=\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{A}}(\lambda)\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Q}')^{-1}\boldsymbol{Q}'\bar{\boldsymbol{A}}(\lambda)\boldsymbol{Q}$, 其中 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Q}')^{-1}$ 可逆, $\boldsymbol{Q}'\bar{\boldsymbol{A}}(\lambda)\boldsymbol{Q}$ 为对称矩阵.

4. 证明: 对 $\boldsymbol{A}(\lambda) \in \mathbb{P}[\lambda]^{n\times n}$, 记 $\bar{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 为 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的等价标准形, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 使得, $\boldsymbol{A}(\lambda)=\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{A}}(\lambda)\boldsymbol{Q}$. 其中 $\boldsymbol{P} \in \mathbb{P}^{m\times m}, \boldsymbol{Q} \in \mathbb{P}^{n\times n}$. 又 $\bar{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{A}}_{11}(\lambda) & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$, 其中 $\bar{\boldsymbol{A}}_{11}(\lambda) \in \mathbb{P}(\lambda)^{r\times r}$, 则 $\bar{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 可以拆分为 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_{11}(\lambda) \\ \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{11}(\lambda) & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$, 其中记 $\boldsymbol{F}(\lambda)=\begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_{11}(\lambda) \\ \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \in \mathbb{P}(\lambda)^{m\times r}, \boldsymbol{G}(\lambda)=\begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{11}(\lambda) & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \in \mathbb{P}(\lambda)^{r\times n}$. 所以

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}(\lambda)\boldsymbol{G}(\lambda)\boldsymbol{Q}$$

则取 $\boldsymbol{B}(\lambda)=\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}(\lambda), \boldsymbol{C}(\lambda)=\boldsymbol{G}(\lambda)\boldsymbol{Q}$ 即可.

5. (1) 由题得, $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ -3 & \lambda+2 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda+1 \end{bmatrix}$, 则有, $\boldsymbol{D}_1(\lambda)=1, \boldsymbol{D}_2(\lambda)=1, \boldsymbol{D}_3(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^3+3\lambda^2-2\lambda-2$. 从而,

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}=1,$$

$$d_3(\lambda)=\frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)}=(\lambda-1)(\lambda+2-\sqrt{2})(\lambda+2+\sqrt{2}).$$

综上, 特征矩阵的等价标准形为:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+2-\sqrt{2})(\lambda+2+\sqrt{2})\end{bmatrix},$$

初等因子为:

$$(\lambda-1),(\lambda+2-\sqrt{2}),(\lambda+2+\sqrt{2}).$$

(2) 由题得, $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ -1 & \lambda-2 & -1\\ 0 & 1 & \lambda-1\end{bmatrix}$, 则有, $\boldsymbol{D}_1(\lambda)=1,\boldsymbol{D}_2(\lambda)=1,\boldsymbol{D}_3(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^3-4\lambda2+7\lambda-4$. 从而,

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda)=1,d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}=1,$$

$$d_3(\lambda)=\frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)}=(\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+4).$$

综上, 特征矩阵的等价标准形为:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+4)\end{bmatrix},$$

初等因子为:

$$(\lambda-1),(\lambda^2-3\lambda+4).$$

(3) 由题得, $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda & -1 & -1\\ -1 & \lambda & -1\\ -1 & -1 & \lambda\end{bmatrix}$, 则有, $\boldsymbol{D}_1(\lambda)=1,\boldsymbol{D}_2(\lambda)=\lambda+1,\boldsymbol{D}_3(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda+1)^2(\lambda-2)$. 从而,

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda)=1,d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}=\lambda+1,$$

$$d_3(\lambda)=\frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)}=(\lambda+1)(\lambda-2).$$

综上, 特征矩阵的等价标准形为:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)(\lambda-2)\end{bmatrix},$$

初等因子为:

$$(\lambda+1),(\lambda+1),(\lambda-2).$$

(4) 由题得, $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda-1 & 1 & -1 & 1\\ 3 & \lambda-3 & 5 & -4\\ -8 & 4 & \lambda-3 & 4\\ -15 & -10 & -11 & \lambda+11\end{bmatrix}$, 则有, $\boldsymbol{D}_1(\lambda)=1,\boldsymbol{D}_2(\lambda)=1,\boldsymbol{D}_3(\lambda)=1,\boldsymbol{D}_4(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda+1)(\lambda^3+3\lambda^2-77\lambda-59)$. 从而,

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda)=1,d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}=1,d_3(\lambda)=\frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)}=1,$$

$$d_4(\lambda)=\frac{D_4(\lambda)}{D_3(\lambda)}=(\lambda+1)(\lambda^3+3\lambda^2-77\lambda-59).$$

综上, 特征矩阵的等价标准形为:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & (\lambda+1)(\lambda^3+3\lambda^2-77\lambda-59)\end{bmatrix},$$

初等因子为:

$$(\lambda+1),(\lambda^3+3\lambda^2-77\lambda-59).$$

6. 由定理 9.2.3 , 初等因子为 $\lambda^2,(\lambda-1)^2,\lambda,(\lambda-1)^3,(\lambda-1),\lambda$. 所以不变因子为 $d_1(\lambda)=1,d_2(\lambda)=\lambda(\lambda-1),d_3(\lambda)=\lambda(\lambda-1)^2,d_4(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)^3$.

7. 证明: 对 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 初等变换:

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\left[\begin{array}{ccc:ccc}\lambda-\alpha & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-\alpha & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-\alpha & 0 & 0 & -1\\ \hdashline \beta^2 & 1 & 0 & \lambda-\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta^2 & 1 & 0 & \lambda-\alpha & 0\\ 0 & 0 & \beta^2 & 0 & 0 & \lambda-\alpha\end{array}\right]\xrightarrow[\{3,6\}]{\{1,4\}\ \{2,5\}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}-1 & 0 & 0 & \lambda-\alpha & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & \lambda-\alpha & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \lambda-\alpha\\ \hdashline \lambda-\alpha & 0 & 0 & \beta^2 & 1 & 0\\ 0 & \lambda-\alpha & 0 & 0 & \beta^2 & 1\\ 0 & 0 & \lambda-\alpha & 0 & 0 & \beta^2\end{array}\right]\xrightarrow[[6+3(\lambda-\alpha)]]{[4+1(\lambda-\alpha)]\ [5+2(\lambda-\alpha)]}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 0 & 0 & \lambda-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \lambda-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \lambda-\alpha \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \beta^2+(\lambda-\alpha)^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^2+(\lambda-\alpha)^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^2+(\lambda-\alpha)^2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\{6+3(\lambda-\alpha)\}]{\{4+1(\lambda-\alpha)\}\ \{5+2(\lambda-\alpha)\}} \left[\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & r & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \end{array}\right] = \boldsymbol{B}(\lambda).$$

所以 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 等价于 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ ，则 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 和 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 有相同的初等因子和不变因子, 所以要求 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的不变因子和初等因子只需求 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 的不变因子和初等因子. 考虑 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 的 5 阶行列式因子有, 取 1,2,3,5,6 列和 1,2,3,4,5 行的子式为 -1 ，为 0 次多项式，所以 $D_5(\lambda)=1$ ，即有 $D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=D_3(\lambda)=D_4(\lambda)=D_5(\lambda)=1$, 又 $D_6(\lambda)=|\boldsymbol{B}|=-r^3$, 所以不变因子为

$$1,1,1,1,1,-[(\lambda-\alpha)^2+\beta^2]^3=-[(\lambda-\alpha+|\beta|i)(\lambda-\alpha-|\beta|i)]^3$$

初等因子为

$$(\lambda-\alpha-|\beta|i)^3,(\lambda-\alpha+|\beta|i)^3$$

8. 证明: 由推论 9.2.1 ，有 $d_k(\lambda)=\frac{D_k\lambda}{D_{k-1}(\lambda)}, d_{k+1}(\lambda)=\frac{D_{k+1}\lambda}{D_k(\lambda)}$. 又由于 $d_k(\lambda)|d_{k+1}(\lambda)$ ，有 $\frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)} \mid \frac{D_{k+1}(\lambda)}{D_k(\lambda)}$ ，即有 $D_k(\lambda)^2 \mid D_{k-1}(\lambda)D_{k+1}(\lambda)$.

9. $\boldsymbol{A}^k=\begin{bmatrix} \lambda^k & 0 & 0 \\ k\lambda^{k-1} & \lambda^k & 0 \\ \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} & k\lambda^{k-1} & \lambda^k \end{bmatrix}$, 下证之.

证明: 1° $k=1$. 命题成立.

2° 假设 $k=n$ 时, 命题成立, 即有

$$\boldsymbol{A}^n=\begin{bmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ n\lambda^{n-1} & \lambda^n & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} & n\lambda^{n-1} & \lambda^n \end{bmatrix},$$

$k=n+1$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^{n+1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{n})&=\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\1&\lambda&0\\0&1&\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda^{n}&0&0\\n\lambda^{n-1}&\lambda^{n}&0\\\frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}&n\lambda^{n-1}&\lambda^{n}\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}\lambda^{n+1}&0&0\\n\lambda^{n}+\lambda^{n}&\lambda^{n+1}&0\\\frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-1}+n\lambda^{n-1}&n\lambda^{n}+\lambda^{n}&\lambda^{n+1}\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}\lambda^{n+1}&0&0\\(n+1)\lambda^{n}&\lambda^{n+1}&0\\\frac{n(n+1)}{2}\lambda^{n-1}&(n+1)\lambda^{n}&\lambda^{n+1}\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

所以, 命题在 $k=n+1$ 时成立.

由 $1^\circ,2^\circ$ 知原命题成立, 从而, $\boldsymbol{A}^{k}=\begin{bmatrix}\lambda^{k}&0&0\\k\lambda^{k-1}&\lambda^{k}&0\\\frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}&k\lambda^{k-1}&\lambda^{k}\end{bmatrix}$.

10. (1) $\left[\begin{array}{c|cc|cc}1&0&0&0&0\\\hline 0&0&2&0&0\\0&1&-1&0&0\\\hline 0&0&0&0&2\\0&0&0&1&-1\end{array}\right]$.

(2) $\left[\begin{array}{c|cc|ccc}1&0&0&0&0&0\\\hline 0&0&-1&0&0&0\\0&1&-2&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&0&-1\\0&0&0&1&0&-3\\0&0&0&0&1&-3\end{array}\right]$.

11. 由题, 得 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda-1&0&0&0&0&0\\0&\lambda+1&0&0&0&0\\0&0&\lambda-2&0&0&0\\0&0&0&\lambda-1&0&0\\0&0&0&0&\lambda-3&1\\0&0&0&0&-2&\lambda\end{bmatrix}$, 经过初等变换可得, 原

矩阵等价于 $\begin{bmatrix}\lambda-1&0&0&0&0&0\\0&\lambda+1&0&0&0&0\\0&0&\lambda-2&0&0&0\\0&0&0&\lambda-1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&(\lambda-1)(\lambda-2)\end{bmatrix}$. 从而由定理 9.2.3 , 矩

阵的全体初等因子为: $(\lambda-1),(\lambda+1),(\lambda-2),(\lambda-1),(\lambda-1),(\lambda-2)$. 所以, Jacobson 标准形为:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

12. 1° 在域 $\mathbb{Q}$ 上:
由题目得, 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子为: $(\lambda+7),(\lambda+7)^2,(\lambda^2-5),(\lambda^2-5),(\lambda^2-3)^2$. 从而, Jacobson 标准形为:

$$\begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2° 在域 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 上:
由题目得, 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子为: $(\lambda+7),(\lambda+7)^2,(\lambda^2-5),(\lambda^2-5),(\lambda-\sqrt{3})^2,(\lambda+\sqrt{3})^2$. 从而, Jacobson 标准形为:

$$\begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

2° 在域 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 上:
由题目得, 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子为: $(\lambda+7),(\lambda+7)^2,(\lambda-\sqrt{5}),(\lambda+\sqrt{5}),(\lambda-\sqrt{5}),(\lambda+$

$\sqrt{5}), (\lambda^2-3)^2$. 从而, Jacobson 标准形为:

$$\left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c:c:cccc}
-7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline
0 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline
0 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right].$$

13. 证明: 由推论 9.4.3 有, $\Delta(\lambda)$ 的不可约因式 $\lambda^2+\lambda+1, \lambda^2-2$ 都是 $m(\lambda)$ 的因式, 且 $d_n(\lambda)=m(\lambda)$. 又由 $m(\lambda)$ 是 4 次的, 得 $m(\lambda)=(\lambda^2+\lambda+1)(\lambda^2-2)$, 即有在 $\mathbb{C}$ 上, $m(\lambda)=(\lambda+\frac{1-\sqrt{3}i}{2})(\lambda+\frac{1+\sqrt{3}i}{2})(\lambda-\sqrt{2})(\lambda+\sqrt{2})$, 所以有 $d_n(\lambda)=m(\lambda)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的不可约因式都是一次的, 从而 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{C}$ 上的初等因子都是一次的, 所以 $\boldsymbol{A}$ 的 Jacobson 标准形为对角形矩阵, 即有 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角形矩阵.

14. (1) 由题得, $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda-2 & 1 & -1\\ -2 & \lambda-2 & 1\\ -1 & -2 & \lambda+1\end{bmatrix}$. 由于右上角的二阶子式为 $(\lambda-1)$, 而左下角二阶子式为 $(\lambda+2)$, 所以 $D_2(\lambda)=1$, 即有 $D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=1$, 又 $D_3(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^3$, 从而,

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}=1, d_3(\lambda)=\frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)}=(\lambda-1)^3.$$

即有初等因子为 $(\lambda-1)^3$. 所以矩阵的 Jordan 标准形为:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

(2) 由题得, $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda-i & -i\\ -1 & \lambda-i\end{bmatrix}$. 进行初等变换, 有

$$\begin{bmatrix}\lambda-i & -i\\ -1 & \lambda-i\end{bmatrix}\xrightarrow[\{2+1(\lambda-i)\}\ \{1(-1)\}]{[1,2]\ [2+1(\lambda-i)]}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda^2-2i\lambda-i-1\end{bmatrix}.$$

由于 $\lambda^2-2i\lambda-i-1=[\lambda-\frac{\sqrt{2}}{2}-(1+\frac{\sqrt{2}}{2})i][\lambda+\frac{\sqrt{2}}{2}-(1-\frac{\sqrt{2}}{2})i]$, 所以初等因子为 $[\lambda-\frac{\sqrt{2}}{2}-(1+\frac{\sqrt{2}}{2})i]$, $[\lambda+\frac{\sqrt{2}}{2}-(1-\frac{\sqrt{2}}{2})i]$ 所以矩阵的 Jordan 标准形为

$$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}+(1+\frac{\sqrt{2}}{2})i & 0\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}+(1-\frac{\sqrt{2}}{2})i\end{bmatrix}.$$

(3) 由题得, $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda-3 & 0 & -8\\ -3 & \lambda+1 & -6\\ 2 & 0 & \lambda-5\end{bmatrix}$. 由于右上角的二阶子式为 $8(\lambda+1)$, 而 1,3 列和 2,3 行的二阶子式为 $(-3\lambda+27)$, 所以 $D_2(\lambda)=1$, 即有 $D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=1$, 又 $D_3(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda+1)(\lambda^2-8\lambda+31)$, 从而,

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}=1, d_3(\lambda)=\frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)}=(\lambda+1)(\lambda^2-8\lambda+31).$$

即有初等因子为 $(\lambda+1),(\lambda-4-\sqrt{15}i),(\lambda-4+\sqrt{15}i)$. 所以矩阵的 Jordan 标准形为:

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 4+\sqrt{15}i & 0\\ 0 & 0 & 4-\sqrt{15}i\end{bmatrix},$$

(4) 由题得, $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda-1 & -2 & -3 & -4\\ 0 & \lambda-1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & \lambda-1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1\end{bmatrix}$. 由于右上角的三阶子式为 $-4\lambda(\lambda+1)$, 而右下角的三阶子式为 $(\lambda-1)^3$, 所以 $D_3(\lambda)=1$, 即有 $D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=D_3(\lambda)=1$, 又 $D_4(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^4$, 从而,

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}=1,$$

$$d_3(\lambda)=\frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)}=1, d_4(\lambda)=\frac{D_4(\lambda)}{D_3(\lambda)}=(\lambda-1)^4.$$

即有初等因子为 $(\lambda-1)^4$. 所以矩阵的 Jordan 标准形为:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

(5) 由题得, $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda\end{bmatrix}$. 由于右上角的 $n-1$ 阶子式为 $(-1)^{n-1}$ 为零次多项式, 所以 $D_{n-1}(\lambda)=1$, 即有 $D_1(\lambda)=\cdots=D_{n-1}(\lambda)=1$, 又

$$D_n(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| =\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1\\ \lambda^n-1 & \lambda^{n-1} & \lambda^{n-2} & \cdots & \lambda^2 & \lambda \end{bmatrix}=\lambda^n-1,\ \text{从而},$$

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda)=1,\cdots,d_{n-1}(\lambda)=\frac{D_{n-1}(\lambda)}{D_{n-2}(\lambda)}=1,$$

$$d_n(\lambda)=\frac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}=\lambda^n-1=(\lambda-1)(\lambda-\omega)(\lambda-\omega^2)\cdots(\lambda-\omega^{n-1}).$$

其中 ω 为 n 次本原根, 即有初等因子为 $(\lambda-1),(\lambda-\omega),\cdots,(\lambda-\omega^{n-1})$. 所以矩阵的 Jordan 标准形为:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \omega & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega^{n-2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \omega^{n-1} \end{bmatrix},$$

(6) 由题得, $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$. 经过初等变换可得, 原矩阵等价于 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda^3-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^3-1 \end{bmatrix}$. 从而由定理 9.2.3, 又 $\lambda^3-1=(\lambda-1)[\lambda-\frac{(-1+i\sqrt{3})}{2}][\lambda+\frac{(1+i\sqrt{3})}{2}]$, 矩阵的初等因子的全体为 $(\lambda-1),[\lambda-\frac{(-1+i\sqrt{3})}{2}],[\lambda+$

$\frac{(1+i\sqrt{3})}{2}], (\lambda-1), [\lambda-\frac{(-1+i\sqrt{3})}{2}], [\lambda+\frac{(1+i\sqrt{3})}{2}]$. 所以矩阵的 Jordan 标准形为:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

15. 证明: 设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, α 为其对应的特征向量, 则有 $\boldsymbol{A}\alpha=\lambda\alpha$, 即有 $\boldsymbol{A}^k\alpha=\lambda^k\alpha$。由题有 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$, 则 $\lambda^k\alpha=0$, 又由于 α 不为零向量, 所以 $\lambda=0$, 即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都为 0, 所以 $\Delta_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda^n$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子都是 λ 的幂次形式, 所以 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形对角线上元素都为 0. 设 $\boldsymbol{J_a}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{J_a}\boldsymbol{T}$. 则

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{J_a}\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T}|=|\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{J_a}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{T}|=|\boldsymbol{J_a}+\boldsymbol{E}|=1$$

16. 由题, 计算可得 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PJP}^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. 于是 $f(\boldsymbol{A})=$ $\boldsymbol{A}^3-4\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{J}^3-4\boldsymbol{J}^2+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

17. 证明: 由题有 $\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{E}$, 即 $\boldsymbol{A}^l-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$, 所以 λ^l-1 为 $\boldsymbol{A}$ 的零化多项式, 从而 $m(\lambda)|\lambda^l-1$. 由于在复数域上 $\lambda^l-1=(\lambda-1)(\lambda-\omega)\cdots(\lambda-\omega^{l-1})$, 其中 ω 为本原根. 所以 $m(\lambda)$ 的不可约因式都是一次的, 由于

$$d_1(\lambda)|d_2(\lambda)|\cdots|d_n(\lambda)=m(\lambda)|\lambda^l-1=(\lambda-1)(\lambda-\omega)\cdots(\lambda-\omega^{l-1})$$

所以初等因子的不可约因式都是一次的, 即有 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为对角形, 且对角线上元素为 1 或 ω 的幂次, 所以对角线元素的模均为 1.

18. (1) 类似于本章习题 14(5), 可求得 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形即为 $\boldsymbol{B}$.

(2) 由题得, $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \lambda & -1 & & & \\ & \lambda & -1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}$; $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \lambda & -1 & & & \\ & \lambda & -1 & -* & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}$.

由于 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 右上角 $n-1$ 阶子式为 $(-1)^{n-1}$ 为零次多项式, 所以有 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$

阶行列式因子为 1. 而对于 $\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$, $\lambda=0$ 为其左上角 $n-1$ 阶子式的根, 取其右上角的 $n-1$ 阶子式, 并令 $\lambda=0$ 代入得其值为 $(-1)^{n-1} \neq 0$, 所以 $\lambda=0$ 不为右上角 $n-1$ 阶子式的根, 所以这两个 $n-1$ 阶子式互质, 所以有 $\boldsymbol{B}$ 的 $n-1$ 阶行列式因子为 1. 即有

$$d_1^a(\lambda)=d_2^a(\lambda)=\cdots=d_{n-1}^a(\lambda)=1, d_n^a(\lambda)=\lambda^n$$

$$d_1^b(\lambda)=d_2^b(\lambda)=\cdots=d_{n-1}^b(\lambda)=1, d_n^b(\lambda)=\lambda^n$$

所以 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的不变因子相同, 所以 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 相似.

19. 证明: 由题, 假设在复数域上矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\Delta_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^k(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 互不相同, 记 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为 $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{J}_s \end{bmatrix}$ 不妨设 $\boldsymbol{A}$ 前 l 个 Jordan 块对角线元素都为 λ_1, 由定理 9.6.3 有这 l 个 Jordan 块阶数之和为 k (这 l 个 Jordan 块为对角线的矩阵相当于定理 9.6.3 中的 "Jordan 标准形矩阵 $\boldsymbol{J}_1$"), 且 $\lambda_1 \boldsymbol{E}-\boldsymbol{J}_i$ 都形如 $\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & -1 & 0 \end{bmatrix}$ $(i=1,2,\cdots,l)$, 由于每个块的阶数不超过 k, 所以有 $(\lambda_1 \boldsymbol{E}-\boldsymbol{J}_i)^k=\boldsymbol{O},(i=1,2,\cdots,l)$. 而对于其他的 $\lambda_1 \boldsymbol{E}-\boldsymbol{J}_j, j=l+1, l+2,\cdots,s$, 由于 $\boldsymbol{J}_j$ 的对角线元素不为 λ_1, 则有 $\begin{vmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{E}-\boldsymbol{J}_{l+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \boldsymbol{E}-\boldsymbol{J}_s \end{vmatrix} \neq 0$,

记 $\boldsymbol{B}_0=\begin{bmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{E}-\boldsymbol{J}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \boldsymbol{E}-\boldsymbol{J}_l \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{E}-\boldsymbol{J}_{l+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \boldsymbol{E}-\boldsymbol{J}_s \end{bmatrix}$, 所以有 $\boldsymbol{B}_0^k=\boldsymbol{O}, r(\boldsymbol{B}_1)=n-k$, $\boldsymbol{B}_1$ 可逆. 由于对于 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{T}$, 则

$$(\lambda_1 \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^k=(\boldsymbol{T}^{-1}(\lambda_1 \boldsymbol{E}-\boldsymbol{J})\boldsymbol{T})^k=\boldsymbol{T}^{-1}(\lambda_1 \boldsymbol{E}-\boldsymbol{J})^k\boldsymbol{T}=$$

$$\boldsymbol{T}^{-1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_0^k & \\ & \boldsymbol{B}_1^k \end{bmatrix}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{-1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_{k\times k} & \boldsymbol{O}_{k\times(n-k)} \\ \boldsymbol{O}_{(n-k)\times k} & \boldsymbol{B}_1^k \end{bmatrix}\boldsymbol{T}.$$

又因为 $, r(\boldsymbol{B}_1)=n-k$, $\boldsymbol{B}_1$ 可逆, 所以 $r((\lambda_1 \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^k)=n-k$.

20. 由题得, $\boldsymbol{J}_s(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda & & & & \\ 1 & \lambda & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & \lambda & \\ & & & 1 & \lambda\end{bmatrix}$, 则 $|\boldsymbol{J}_s(\lambda)|=\lambda^s\neq 0$, 且有

$$\boldsymbol{J}_{i,j}=\begin{cases}0, & i>j\\ (-1)^{i+j}\lambda^{s-1}, & i=j\\ (-1)^{i+j}\lambda^{s-j+i-1}, & i<j\end{cases}$$

则有

$$\boldsymbol{J}_s(\lambda)^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{J}_s(\lambda)|}\boldsymbol{J}_s(\lambda)^*=\lambda^{-s}\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_{1,1} & \boldsymbol{J}_{2,1} & \cdots & \boldsymbol{J}_{s,1}\\ \boldsymbol{J}_{1,2} & \boldsymbol{J}_{2,2} & \cdots & \boldsymbol{J}_{s,2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{J}_{1,s} & \boldsymbol{J}_{2,s} & \cdots & \boldsymbol{J}_{s,s}\end{bmatrix}$$

$$=\lambda^{-s}\begin{bmatrix}\lambda^{s-1} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -\lambda^{s-2} & \lambda^{s-1} & 0 & \cdots & 0\\ \lambda^{s-3} & -\lambda^{s-2} & \lambda^{s-1} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ (-1)^{s+1} & (-1)^{s+2}\lambda^1 & \cdots & -\lambda^{s-2} & \lambda^{s-1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -\lambda^{-2} & \lambda^{-1} & 0 & \cdots & 0\\ \lambda^{-3} & -\lambda^{-2} & \lambda^{-1} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ (-1)^{s+1}\lambda^{-s} & (-1)^{s+2}\lambda^{-(s-1)} & \cdots & -\lambda^{-2} & \lambda^{-1}\end{bmatrix}$$

21. 由题有, $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}J_n(\lambda)$, 将 $\boldsymbol{P}$ 列分块有 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$. 于是有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix}\lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda\end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_n)=(\lambda\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\lambda\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\lambda\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n,\lambda\boldsymbol{\alpha}_n)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = \lambda\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \lambda\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 \\ \quad\vdots \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_{n-1} = \lambda\boldsymbol{\alpha}_{n-1} + \boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n = \lambda\boldsymbol{\alpha}_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 = \theta \\ (\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3 = \theta \\ \quad\vdots \\ (\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_{n-1} - \boldsymbol{\alpha}_n = \theta \\ (\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_n = \theta \end{cases}$$

所以 $\boldsymbol{P}$ 列向量满足的线性方程组为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{E} & & & \\ & \boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{E} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{E} \\ & & & & \boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_{n-1} \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{O}$$

22. 因为 $r(\boldsymbol{A}) = 1$ 所以 $\boldsymbol{A}$ 有 0 特征值, 又由 $\boldsymbol{A}\alpha = 0$ 的解空间的维数为 $n-1$, 所以特征多项式中 λ 的重数大于等于 $n-1$. 所以有

$$\Delta_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \lambda^k(\lambda - \lambda_1),\ k \geqslant n-1.$$

若 $k = n-1$, 则 Jordan 标准形为

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

若 $k = n$, 则由于 $r(\boldsymbol{A}) = 1$, $\boldsymbol{A}$ 相似于含有一个二阶若当块 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $n-2$ 个一阶若当块的 Jordan 标准形, 即

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

23. 证明: 由于相似矩阵的迹相等, 记矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为 $\boldsymbol{J}$, 则有 $tr(J) = tr(A) =$

1, 又由第 22 题的结论有 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形只能为

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{J}^2=\boldsymbol{J}$. 由于 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{T}$, 有 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{J}^2\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{A}$.

24. 证明: 由于 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $(\lambda-1)^n$, 所以其初等因子都是 $(\lambda-1)^s$ 的形式. 设其初等因子为 $(\lambda-1)^{n_1},(\lambda-1)^{n_2},\cdots,(\lambda-1)^{n_s}$, Jordan 标准形为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_s \end{bmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{J}_i=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}_{n_i\times n_i},\quad \boldsymbol{J}_i^l=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l & 1 & & & \\ * & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & l & 1 & \\ * & \cdots & * & l & 1 \end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$$

$$\boldsymbol{A}^l\sim\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1^l & & & \\ & \boldsymbol{J}_2^l & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_s^l \end{bmatrix}$$

对于每个 $\boldsymbol{J}_i^l$, 考虑 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{J}_i^l$ 左上角和左下角两个 n_i-1 阶子式

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & & & & \\ -l & \lambda-1 & & & \\ -* & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & -l & \lambda-1 & \\ -* & \cdots & -* & -l & \lambda-1 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} -l & \lambda-1 & & & \\ -* & -l & \lambda-1 & & \\ -* & -* & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & -* & -l & \lambda-1 \\ -* & \cdots & -* & -* & -l \end{vmatrix}$$

当 $\lambda=1$ 时, 一个子式为 0 , 另一个子式的值为 $(-l)^{n_i-1}\neq 0$, 所以这两个 n_i-1 阶子式是互素的, 从而其 n_i-1 级行列式因子为 1, 所以 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{J}_i^l$ 的初等因子为 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{J}_i^l|=(\lambda-1)^{n_i}$, 所以 $\boldsymbol{A}^l$ 的初等因子为 $(\lambda-1)^{n_1},(\lambda-1)^{n_2},\cdots,(\lambda-1)^{n_s}$, 和 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子相同, 所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^l$ 相似

25. 证明: 首先证明对于任意若当块 $\boldsymbol{J}_n(a)$, 都有 $\boldsymbol{J}_n(a) \sim \boldsymbol{J}_n(a)'$. 由于

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_n \\ \gamma_{n-1} \\ \vdots \\ \gamma_1 \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n-1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_1)$$

因此

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{E}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

从而有 $\boldsymbol{J}_n(a) \sim \boldsymbol{J}_n(a)'$.

由于 $\boldsymbol{A}$ 是复数域上的矩阵, 因此 $\boldsymbol{A}$ 有 Jordan 标准形

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{r_1}(\lambda_1) & & & \\ & \boldsymbol{J}_{r_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_{r_m}(\lambda_m) \end{bmatrix}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 可能有相同, $r_1+r_2+\cdots+r_m=n$. 由上所证明, $\boldsymbol{J}_{r_i}(\lambda_1)\sim \boldsymbol{J}_{r_i}(\lambda_i)'$, 且存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_i=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&1&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&1&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\end{bmatrix}$ 使得 $\boldsymbol{P}_i^{-1}\boldsymbol{J}_{r_i}(\lambda_1)\boldsymbol{P}_i=\boldsymbol{J}_{r_i}(\lambda_i)'$. 令 $\boldsymbol{p}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_1&&&\\&\boldsymbol{P}_2&&\\&&\ddots&\\&&&\boldsymbol{P}_m\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}'$. 从而 $\boldsymbol{J}\sim\boldsymbol{J}'$. 由于 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{J}$, 因此 $\boldsymbol{A}'\sim\boldsymbol{J}'$ 从而 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}'$.

26. 证明: “$\Rightarrow$” : 若 $\boldsymbol{A}$ 为纯量阵, 则显然 $\partial\boldsymbol{D}_{n-1}(\lambda)=n-1$.
“$\Leftarrow$” : 设 $\partial\boldsymbol{D}_{n-1}(\lambda)=n-1$, 由于 $\partial\boldsymbol{D}_n(\lambda)=n$ 且有 $\boldsymbol{D}_{n-1}(\lambda)|\boldsymbol{D}_n(\lambda)$, 所以 $\partial d_n(\lambda)=\partial\frac{\boldsymbol{D}_n(\lambda)}{\boldsymbol{D}_{n-1}(\lambda)}=1$. 由于 $d_1(\lambda)|d_2(\lambda)|\cdots|d_n(\lambda)$, 所以 $\partial d_1(\lambda)\leqslant\partial d_2(\lambda)\leqslant\cdots\leqslant\partial d_n(\lambda)=1$, 又由于 $\sum_{i=1}^n\partial d_i(\lambda)=n$, 所以 $\partial d_1(\lambda)=\partial d_2(\lambda)=\cdots=\partial d_n(\lambda)=1$, 所以有 $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=\cdots=d_n(\lambda)=\lambda-\lambda_1$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 为纯量阵.