兰州大学2020～2021学年第一学期
期末考试试卷（A卷）

课程名称 常微分方程　　任课教师 李万同，温紫娟

学　　院 数学院　　专业 数学　　年级 2019级

姓　　名　　校园卡号

题　号	一	二	三	四	五						总分
得　分											
阅卷教师											

一、求下列方程的解（每题5分，共20分）.

1. $\frac{dx}{dt}=rx\,(1-x)\ (r>0)$.　2. $y=e^x+\int_0^x y(t)dt$.

3. $(x+2y)dx+xdy=0$.　4. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x^3+3xy^2+x}{3x^2y+2y^3-y}$.

二. (20分) 给定积分方程$\phi(t)=\eta+\int_{t_0}^{t}[A(s)\phi(s)+f(s)]\,ds$, $a\le t\le b$, 其中$A(t)$是$[a,b]$上$n\times n$连续矩阵, $f(t)$是$[a,b]$上n维连续列向量, η是n维列向量。则积分方程在区间$[a,b]$上存在唯一连续解. 试用逐步逼近法证之.

三. (20分) 求阻尼强迫振动方程$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2}+6\frac{d\phi(t)}{dt}+9\phi(t)=\sin t$的解，并说明所得解的物理学意义。

e^{it}

四. (20分) 求方程组$x'=Ax+f(t)$的解$\phi(t)$,其中

$\phi(0)=\binom{0}{1}=\binom{2}{1}$

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\-1&3\end{bmatrix},\quad f(t)=\begin{bmatrix}e^{-t}\\0\end{bmatrix},\quad \phi(0)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

五. (20分) 研究微分方程$\frac{d^2x}{dt^2}+\alpha\frac{dx}{dt}+\sin x=0$零平衡态的稳定性，其中$\alpha\ge 0$.

令 $y=\frac{dx}{dt}$

$\therefore \frac{dy}{dt}+\alpha y+\sin x=0$

$\therefore \lambda^2+\alpha\lambda+1$

$\lambda=$ [illegible]

$\because \alpha\ge 0$

五、(15分) 设随机变量 X, Y 独立，且分别服从自由度为 m 和 n 的 χ^2 分布，求 $\frac{X}{X+Y}$ 与 $X+Y$ 的联合密度函数与边缘密度函数，它们是否独立？其中自由度为 n 的 χ^2 分布的密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}},\quad x>0.$$

六、(20分) (a) 设随机变量 X 具有密度函数

$$f(x)=\frac{3}{(x+1)^4},\quad x>0.$$

求 X 的数学期望和方差.

(b) 设二元随机变量 (X,Y) 具有密度函数

$$f(x,y)=2-x-y,\quad 0<x<1,\ 0<y<1$$

求相关系数 ρ_{XY}.

七、(15分) 有一批钢材，其中百分之80的长度不小于3m，现从钢材中随机取出100根，求小于3m的钢材不超过30根的概率.（参考：$\Phi_0(1)=0.8413$, $\Phi_0(2)=0.9772$, $\Phi_0(2.5)=0.9938$, $\Phi_0(3)=0.9987$.）

2009－2010学年第一学期期末考试试卷（A卷）

课程名称 常微分方程　　任课教师 李万同、孙红蕊

学　院 数学与统计学院　　专业＿＿＿＿　年级 2008级

姓　名＿＿＿＿　　学号＿＿＿＿

题　号	一	二	三	四	五						总分
得　分											
阅卷教师											

一、求下列方程的解（每题5分，共20分）

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2xy}$

2. $y=e^x+\int_0^x y(t)dt$

3. $(\cos x+\frac{1}{y})dx+(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2})dy=0$

4. $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+5}{x-y-2}$

二、(20分) 计算方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}-2x=\cos t-3\sin t$$

的通解，进而计算方程关于初值 $x(0)=1$, $x'(0)=2$ 的解.

三、(20分) 考虑方程组 $x'=Ax+f(t)$，其中

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix},\quad f(t)=\begin{bmatrix}\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}$$

(1) 试验证

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}e^{2t}&te^{2t}\\0&e^{2t}\end{bmatrix}$$

兰州大学 2006－2007 学年第 1 学期

期末考试试卷（A 卷）

课程名称：常微分方程　任课教师：李万同

学院：数学　专业：数学基地/专业　年级：2005级

姓名：　　　校园卡号：

题号	一	二	三	四	五	总分
分数						
阅卷教师						

一、（每小题 8 分，共 32 分）．求解下列微分方程的通解：

1. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y+5}{x-y-2}$

2. $(3x^2+y)dx+(2x^2y-x)dy=0$

3. $x''-4x'+4x=e^t+e^{2t}+1$

4. 已知 $x(t)=\dfrac{\sin t}{t}$ 是方程 $x''+\dfrac{2}{t}x'+x=0$ 的解.

二、（18 分）．设 $y(x)$ 在 $0\le x<+\infty$ 上连续可微，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}(y'(x)+y(x))=0$，求证 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$.

令 $y'(x)+y(x)=f(x)$　$\dfrac{dy}{dx}+y=f(x)$　常数变易

三、（20 分）．设 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}$，$f(t)=\begin{bmatrix}e^{-t}\\ 0\end{bmatrix}$（1）求方程 $x'=Ax$ 的一个基解矩阵.

（2）求方程 $x'=Ax+f(t)$ 满足初始条件 $\varphi(0)=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ 的解.

四、（20 分）．设 $f(x,y)$ 在带域 $\alpha\le x\le\beta$ 上连续且关于 y 满足 Lipschitz 条件，则方程 $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ 满足条件 $y(x_0)=y_0$，$x_0\in[\alpha,\beta]$ 的解于整个区间 $[\alpha,\beta]$ 上存在且唯一. 试用逐步逼近法证之.

五、（18 分）．设 l,m,g 均为正数，$\mu\ge 0$．研究微分方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$$

平衡态的稳定性

二、（20 分）描述 $[0,1]$ 上 Cantor 三分集 C 的构造，并证明

1）C 无内点；

2）C 是完全集，并有 $\bar{C}=C$.

三、（15 分）设 $E\subset R^n$ 是可测集，$f(x)$，$f_k(x)$ [illegible]

函数的可测函数且 $m(E)$ [illegible] $f_k(x)\to f(x)$.

对 $\varepsilon>0$，记

$$E_k(\varepsilon)=\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\ge\varepsilon\},$$

证明：$\lim\limits_{j\to\infty}m\left(\bigcup\limits_{k=j}^{\infty}E_k(\varepsilon)\right)=0$.

四、（15 分）设 $f\in L(R^n)$，证明：$\lim\limits_{N\to\infty}\int_{|x|\ge N}|f(x)|dx=0$.

五、（15 分）设 $\Omega\subset R^n$ 是可测集，$m(\Omega)<+\infty$．若 $f_k\in L(\Omega)$ $(k=1,2,\cdots)$ 且 $f_k(x)$ 在 Ω 上一致收敛到 $f(x)$．证明 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_\Omega f_k(x)dx=\int_\Omega f(x)dx$.

六、（15 分）设 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是可测集 $E\subset R^n$ 上的几乎处处有限的可测函数列，$m(E)>0$．如果 $f_n(x)$ 在 E 上几乎处处收敛，证明存在常数 C 和正测度集 $E_0\subset E$，使得对任意 $x\in E_0$ 和 $n=1,2,\cdots$ 成立 $|f_n(x)|\le C$.

七、（10 分）设 $\Omega\subset R^n$ 是可测集，$f,f_k\in L(\Omega)$ $(k=1,2,\cdots)$．证明下面两条结论等价：

1）$\lim\limits_{k\to\infty}\int_\Omega|f_k(x)-f(x)|dx=0$；

2）f_k 在 Ω 上依测度收敛到 f 且 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_\Omega|f_k(x)|dx=\int_\Omega|f(x)|dx$.

2

63

兰州大学2013～2014学年第一学期
期末考试试卷（A卷）

课程名称 常微分方程　　任课教师 李万同 温紫娟

学　院 数学与统计学院　　专业＿＿＿＿　　年级 2012级

姓　名＿＿＿＿＿＿＿＿　　校园卡号＿＿＿＿＿＿＿＿

题　号	一	二	三	四	五						总分
得　分											
阅卷教师											

一、求下列方程的解（每题5分，共20分）.

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y+1}{x-2y+1}$. 2. $ydx+(y-x)dy=0$.

3. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y}$. 4. $\frac{du}{dt}=ru\left(1-\frac{u}{K}\right)$ $(r>0,K>0)$.

1. $\begin{cases}2x-y+1=0\\ x-2y+1=0\end{cases}$ 解得 $(\alpha,\beta)=(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

令 $X=x+\frac{1}{3}$　$Y=y-\frac{1}{3}$

原式可化为 $\frac{dY}{dX}=\frac{2X-Y}{X-2Y}$

令 $\frac{Y}{X}=u$ 则

二、(20分) 求阻尼强迫振动方程 $\frac{d^2x(t)}{dt^2}+2\frac{dx(t)}{dt}+4x(t)=\cos t$ 的解，并说明所得解的物理学意义。

$e(A\cos t+B\sin t)$

三、(20分) 求方程组 $x'=Ax+f(t)$ 的解 $\phi(t)$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\quad f(t)=\begin{bmatrix}e^{-t}\\0\end{bmatrix},\quad \phi(0)=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}.$$

四、(20分) 设 m,g,l 均为正数，研究振动方程在 $|\phi|\le\pi$ 时

$$\frac{d^2\phi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\phi}{dt}+\frac{g}{l}\sin\phi=0$$

平衡态的可能类型及稳定性，其中 $\mu\ge0$。

五、(20分) 假设 $f(x,y)$ 在 $G=\{(x,y)|\alpha\le x\le\beta,y\in R\}$ 上连续，且关于 y 满足Lipschitz条件。试证初值问题 $dy/dx=f(x,y)$，$y(x_0)=y_0$ 的解在整个区间 $[\alpha,\beta]$ 上存在唯一。$x_0\le x\le x_0+h$

解的延拓

$x\in[\alpha,\beta]$　$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$

$y\in R$

$y(x_0)=y_0$

兰州大学2012～2013学年第一学期
期末考试试卷（A卷）

课程名称 常微分方程　　任课教师 李万同 马智慧

学　院 数学与统计学院　　专业＿＿＿＿　　年级 2011级

姓　名＿＿＿＿＿＿＿＿　　校园卡号＿＿＿＿＿＿＿＿

题　号	一	二	三	四	五						总分
得　分											
阅卷教师											

一、求下列方程的解（每题5分，共20分）.

1. $\boxed{\frac{du}{dt}=ru\left(1-\frac{u}{K}\right)}$ $(r>0,K>0)$. 2. $ydx-(x+y^2)dy=0$.　$1=\frac{x}{y}-\frac{1}{3}y^2$

3. $\frac{dy}{dx}-\frac{n}{x}y=e^xx^n$ (n为常数). 4. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y+1}{x-2y+1}$.　$x^2+y^2-xy+x-y+C$

$e^x\cdot x^n+C\cdot x^n$

二、(20分) 求无阻尼强迫振动方程

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+9x(t)=\sin t$$

的解，并说明所得解的物理学意义.

三、(20分) 求方程组 $x'=Ax+f(t)$ 的解 $\phi(t)$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix},\quad f(t)=\begin{bmatrix}e^t\\1\end{bmatrix},\quad \phi(0)=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}.$$

四、(20分) 研究微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+\mu\frac{dx}{dt}+\sin x=0$ 零平衡态的稳定性，其中 $\mu\ge0$.

五、(20分) 设 $f(x)$ 定义于 $-\infty<x<+\infty$，满足条件：

$$\|f(x_1)-f(x_2)\|\le N\|x_1-x_2\|,$$

其中 $N<1$，证明方程 $x=f(x)$ 存在唯一的一个解。

$\frac{df(x)}{dx}=1$　　$y=x$.　$z=\frac{dx}{dt}$

$\frac{dy}{dt}=z$　　$\frac{dz}{dt}=-\mu z-\sin y$

$(0,0)$　$(\pi,0)$

$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$= -ry + \frac{r}{K}$

$c(t)e^{-rt}$

兰州大学2011～2012学…

B卷

一. 1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$ $\left(\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}\right)$　2. $(3x^3+y)dx-(2x^2y-x)dy=0$　3. $\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$ $z=y^{-2}$

4. $x''+x'-2x=8\sin 2t$　5. $x''-\frac{1}{t}x'+(x')^2=0$

二. 若 $\frac{d^nx}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0$ 的解 $x_1(t), x_2(t) \ldots x_n(t)$ 在$[a,b]$上线性无关，则 $W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)] \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$

三. 求解方程组 $x'=Ax+f(t)$，其中 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$ $f(t)=\begin{pmatrix}1\\ e^{-t}\end{pmatrix}$ $x(0)=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$

四. 证明：若 $p(x)$ $Q(x)$ 在 $a\le x\le b$ 上连续，则对 $a\le x\le b$ 上的 $\forall x_0$ 及任一初值 $\frac{dy}{dx}=p(x)y+Q(x)$ 存在唯一解 $y(x)$：定义于整个 $a\le x\le b$ 上 连续且满足初值条件 $y(x_0)=y_0$.

五. 考虑弹簧振子的自由振动 $\frac{d^2\phi}{dt^2}+\frac{k}{m}\phi=0$. 其中 $m>0$, $k\neq 0$

(1) 求通解. (2). 将方程化为~~等~~ 等价的一阶微分方程组.

(3). 分别在 $k>0$. $k<0$ 的情形判断(2)中方程组奇点类型及稳定性. 并画出相图.

$(y-x)dx = x\,dy$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - x$

$u + x\frac{du}{dx} = u - x$

$\frac{du}{dx} = -1$

$du = -dx$

$u = -x + C$

$\frac{y}{x} = -x + C$

$y = -x^2 + xC$

$\frac{dy}{dx} = e^x + y(x)$

$P(x) = y(x)$　$Q(x) = e^x$

$y = e^{\int y(x)dx}\left(\int Q(x)e^{-\int y(x)dx}dx + \tilde{c}\right)$

令 $p = \frac{dy}{dx}$

$y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dp^2}{dx} - \frac{dxp}{dx} + \frac{1}{2}\frac{dx^2}{dx}$

$p = \quad -(x\frac{dp}{dx} + p) + x$

1. 令 $y=x^{-1}$

$\frac{dy}{dt}=-ry+\frac{r}{K}$

$y=C(t)e^{-rt}$

$y=(\frac{1}{K}t+c)e^{-rt}$

即 $\frac{1}{x}=\frac{rt}{Ke^{rt}}+\frac{KC}{Ke^{rt}}$

$x=\frac{Ke^{rt}}{rt+KC}$ U $x=0$

2. $\frac{\partial M}{\partial y}=1$ $\frac{\partial N}{\partial x}=-1$

$\varphi(x)=-\frac{2}{x}$, $\mu=e^{\int-\frac{2}{x}dx}=\frac{1}{x^2}$

$(\frac{y}{x^2}-1)dx-\frac{1}{x}dy=0$

$\frac{y}{x^2}dx-\frac{1}{x}dy-dx=0$

$d(-\frac{y}{x})+d(-x)=0$

$-\frac{y}{x}-x=C$

即 $\frac{y}{x}+x=C$

3. $\frac{dy}{dx}=e^x+y(x)$

$\frac{dy}{dx}=y(x)$

$y=Ce^x$

$y=C(x)e^x \Rightarrow C(x)=x+C$

$y=(x+C)e^x$

兰州大学2011～2012学年第一学期
期末考试试卷（A卷）

课程名称 常微分方程　　任课教师 李万同 [illegible]

学　院 数学与统计学院　　专业 [illegible]　　年级 2010级

姓　名 [illegible]　　校园卡号 [illegible]

题　号	一	二	三	四	五						总分
得　分											
阅卷教师											

一、求下列方程的解（每题5分，共20分）

$\frac{dx}{dt}=rx(1-\frac{x}{K})$

1. $\frac{dx}{dt}=rx(1-\frac{x}{K})$. 2. $(y-x^2)dx-xdy=0$.

3. $y=e^x+\int_0^x y(t)dt$. 4. $y=(\frac{dy}{dx})^2-x\frac{dy}{dx}+\frac{x^2}{2}$

隐函数

二、(20分) 求阻尼强迫振动方程 $\frac{d^2\phi(t)}{dt^2}+2\frac{d\phi(t)}{dt}+4\phi(t)=sint$ 的解，并说明所得解的物理学意义。

$\lambda^2+2\lambda+4=0$ $\lambda=-2$ $\tilde{x}=-\frac{5}{28}\sin t-\frac{2}{14}\cos t$

$e^{-2t}(C+Ct)+\tilde{x}$

三、(20分) 求方程组 $x'=Ax+f(t)$ 的解 $\phi(t)$，其中

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 5\\ -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2-1+5=0$ $\lambda^2+4=0$ $\lambda=\pm2i$

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -5\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad f(t)=\begin{bmatrix}1\\ t\end{bmatrix},\quad \phi(0)=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

四、(20分) 求方程组

$p=-11$ $q=10$

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=7x+3y-7,\\ \frac{dy}{dt}=6x+4y-6,\end{cases}$$ $(1,0)$

的奇点（平衡点），判断其类型和稳定性，并画出相图。

$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=7x+3y\\ \frac{dy}{dt}=6x+4y\end{cases}$

$\cancel{\lambda^2}$ $\cancel{\lambda^2-11\lambda}$ 不稳定结

五、(20分) 叙述并用逐步逼近法证明微分方程 $\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)$ 的解的存在唯一性定理，其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数。

$\begin{cases}7x+3y-7=0\\ 6x+4y-6=0\end{cases}$

$=7x+3y$

$\begin{cases}-28x-12y+28=0\\ 18x+12y-18=0\end{cases}$

$-10x+10=0$

$x=1$

$y=0$

兰州大学2009～2010学年第一学期
期末考试试卷（A卷）

课程名称 常微分方程　　任课教师 李万同 [illegible]

学　院 数学与统计学院　　专业　　年级 2008级

姓　名　　校园卡号

题　号	一	二	三	四	五						总分
得　分											
阅卷教师											

一、求下列方程的解（每题5分，共20分）

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y}$

2. $y=e^x+\int_0^x y(t)dt$.

3. $(\cos x+\frac{1}{y})dx+(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2})dy=0$.

4. $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+5}{x-y-2}$.

二、(20分) 计算方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}-2x=\cos t-3\sin t$$

的通解，进而计算方程关于初值 $x(0)=1$, $x'(0)=2$ 的解。

三、(20分) 考虑方程组 $x'=Ax+f(t)$，其中

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix},\quad f(t)=\begin{bmatrix}\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}$$

(1) 试验证

$$\phi(t)=\begin{bmatrix}e^{2t} & te^{2t}\\ 0 & e^{2t}\end{bmatrix}$$

解 $\det(\lambda E-A)=$ [illegible] $\lambda_1=\lambda_2=2$

$(A-2E)\vec{a}=$