第8周实变作业答案

第1题(8th week)

设 $f \in C([a,b])$. 若有定义在 $[a,b]$ 上的函数 $g(x)$, 满足 $g(x) = f(x)$, $a.e.$ $x \in [a,b]$, 试问: g 在 $[a,b]$ 上必是几乎处处连续的吗? 若是, 请证明, 若不是, 请举例说明.

设 $f \in C([a,b])$. 若有定义在 $[a,b]$ 上的函数 $g(x)$, 满足 $g(x) = f(x)$, a.e. $x \in [a,b]$, 试问: g 在 $[a,b]$ 上必是几乎处处连续的吗? 若是, 请证明, 若不是, 请举例说明.

解答: No. Let $f(x) = 1$ on $[0,1]$, define

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1]. \end{cases}$$

We have $g(x) = f(x)$ a.e. $x \in [a,b]$, but g is discontinuous on $[0,1]$.

第2题(8th week)

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上几乎处处连续的函数，试问是否存在 $g \in C(\mathbb{R})$，使得

$$g(x) = f(x), \quad a.e. \ x \in \mathbb{R}?$$

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上几乎处处连续的函数, 试问是否存在 $g \in C(\mathbb{R})$, 使得

$$g(x) = f(x), \quad a.e.\ x \in \mathbb{R}?$$

解答: No. For example, let

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

This is a continuous function almost every $x \in \mathbb{R}$ (jump discontinuity at $x = 0$),there exists no $g \in C(\mathbb{R})$ that $g(x) = f(x)$, a.e. $x \in \mathbb{R}$.

第3题(8th week)

设 f, f_k $(k \in \mathbb{N})$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值可测函数. 若 $\{f_k\}$ 在 E 上依测度收敛于 f, 则存在子列 $\{f_{k_i}(x)\}$, 使得

$$\lim_{i\to\infty} f_{k_i}(x) = f(x), \quad a.e.\ x \in E.$$

(请不要借助于依测度收敛列是依测度 Cauchy 列, 以及依测度 Cauchy 列是依测度收敛列的证明来证明此结论.)

第3题(8th week)

设 f, f_k $(k \in \mathbb{N})$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值可测函数. 若 $\{f_k\}$ 在 E 上依测度收敛于 f, 则存在子列 $\{f_{k_i}(x)\}$, 使得

$$\lim_{i\to\infty} f_{k_i}(x) = f(x), \quad a.e.\ x \in E.$$

(请不要借助于依测度收敛列是依测度 Cauchy 列, 以及依测度 Cauchy 列是依测度收敛列的证明来证明此结论.)

Proof: See Theorem 4.22 on Page 74.

第4题(8th week)

设在 E 上, $\{f_k(x)\}$ 几乎处处收敛于 $f(x)$, 且依测度收敛于 $g(x)$, 试问: 是否有关系式

$$g(x) = f(x), \quad a.e.\ x \in E?$$

第4题(8th week)

设在 E 上, $\{f_k(x)\}$ 几乎处处收敛于 $f(x)$, 且依测度收敛于 $g(x)$, 试问: 是否有关系式

$$g(x) = f(x), \quad a.e.\ x \in E?$$

Proof: Yes!

It follows from $f_k \xrightarrow{m} g$ that, there exists $\{f_{k_i}\}$ such taht

$$f_{k_i}(x) \to g(x) \text{ a.e. in } E.$$

And $f_{k_i}(x) \to f(x)$ a.e. in E, therefore $f(x) = g(x)$ a.e. in E.

第5题(8th week)

设 $\{f_k\}$ 在 E 上依测度收敛于零, g 是 E 上实值可测函数. 若 $|E| = +\infty$, 试说明 $\{g(x)f_k(x)\}$ 在 E 上不一定依测度收敛于零.

第5题(8th week)

设 $\{f_k\}$ 在 E 上依测度收敛于零, g 是 E 上实值可测函数. 若 $|E| = +\infty$, 试说明 $\{g(x)f_k(x)\}$ 在 E 上不一定依测度收敛于零.

解答: For example $E = \mathbb{R}$, $f_k(x) = \frac{1}{k}$, $\quad g(x) = x$. we have:
(1) $f_k \xrightarrow{m} 0$.
(2)For $\varepsilon = 1$, $\delta = 1$,

$$|\{x \in \mathbb{R} : |f_k(x)g(x)| > 1\}| = |\{x : |x| > k\}| = +\infty > 1 \, ,$$

Therefore $f_k g \stackrel{m}{\not\to} 0$.

第6题(8th week)

设 $|E| < +\infty$. 若对 $\{f_k\}$ 的任一子列 $\{f_{k_i}\}$ 中均有子列 $\{f_{k_{ij}}\}$ 在 E 上收敛于 f, 则 f_k 在 E 上依测度收敛于 f.

第6题(8th week)

设 $|E| < +\infty$. 若对 $\{f_k\}$ 的任一子列 $\{f_{k_i}\}$ 中均有子列 $\{f_{k_{ij}}\}$ 在 E 上收敛于 f, 则 f_k 在 E 上依测度收敛于 f.

Proof: Suppose $f_k \overset{m}{\not\to} f$ on E .Then there exists $\varepsilon_0, \delta_0 > 0$, such that for all $N \in \mathbb{N}^+$, $\exists\ k_N \geq N$, such that

$$|\{x \in E : |f_{k_N}(x) - f(x)| > \varepsilon_0\}| \geq \delta_0. \tag{*}$$

Then we have a subsequence $\{f_{k_N}\}$ which does not converges to f and any subsequence of $\{f_{k_N}\}$ still satisfying (*). It is a contradiction!

第7题(8th week)

设 $\{f_k\}$ 在 E 上依测度收敛于 f, $\{g_k\}$ 在 E 上依测度收敛于 g, 试证明 $\{f_k \pm g_k\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f \pm g$. 若 $|E| < \infty$, $\{f_k(x)g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)g(x)$.

第7题(8th week)

设 $\{f_k\}$ 在 E 上依测度收敛于 f, $\{g_k\}$ 在 E 上依测度收敛于 g, 试证明 $\{f_k \pm g_k\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f \pm g$. 若 $|E| < \infty$, $\{f_k(x)g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)g(x)$.

Proof: The proof for $\{f_k \pm g_k\} \xrightarrow{m} f \pm g$.

By definition, we have $\forall \varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\exists N_1$ such that $\forall k > N_1$,

$$|E_f| = |\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon/2\}| < \delta/2,$$

and $\exists N_2$, s.t. $\forall k > N_2$,

$$|E_g| = |\{x \in E : |g_k(x) - g(x)| > \varepsilon/2\}| < \delta/2.$$

Let $N = \max\{N_1, \ N_2\}$ and

$$E_{f,\ g} := \{x \in E : |(f_k + g_k)(x) - (f + g)(x)| > \varepsilon\}.$$

第7题(8th week)

For $\forall x_0 \in E_{f,\,g}$, we have

$$\begin{aligned}&|f_k(x_0) - f(x_0)| + |g_k(x_0) - g(x_0)|\\ \geq&|f_k(x_0) - f(x_0) + g_k(x_0) - g(x_0)|\\ >&\varepsilon.\end{aligned}$$

Then, it holds that

$$|f_k(x_0) - f(x_0)| > \frac{\varepsilon}{2} \text{ or } |g_k(x_0) - g(x_0)| > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Therefore,

$$x_0 \in E_f \text{ or } x_0 \in E_g,$$

i.e., $E_{f,\,g} \subseteq E_f \cup E_g$.
We have

$$|E_{f,\,g}| \leq |E_f| + |E_g| < \delta \quad \text{for } k > N.$$

The proof for $\{f_k g_k\} \xrightarrow{m} fg$.

Applying Lusin's theorem for f and g , $\forall \delta > 0$, $\exists$ closed set $F \subset E$, and $M > 0$ satisfying

$$(1)\ |E - F| < \frac{\delta}{4},$$

$$(2)\ |f(x)|, |g(x)| \leq M \text{ in } F,$$

where the boundedness of f and g comes from $|E| < \infty$.

It follows from convergence in measure that, for $\forall \varepsilon > 0$ and the above δ, there exists, $N_0 = N_0(\varepsilon,\ \delta)$, such that $\forall k > N_0$, it holds:

$$|E_f| :\triangleq |\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2(M+\varepsilon)}\}| < \frac{\delta}{3},$$

$$|E_g| :\triangleq |\{x \in E : |g_k(x) - g(x)| > \frac{\varepsilon}{2(M+\varepsilon)}\}| < \frac{\delta}{3}.$$

Denote $\widehat{E} := F \bigcap E_f^c \bigcap E_g^c$, then we have $|E - \widehat{E}| < \delta$.

第7题(8th week)

For $\forall x \in \widehat{E}$, we have,

$$|f_k(x)| \le \varepsilon + M, \ |g_k(x)| \le \varepsilon + M,$$
$$|f_k(x) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2(M+\varepsilon)}, \ |g_k(x) - g(x)| \le \frac{\varepsilon}{2(M+\varepsilon)}.$$

Therefore , we have $\forall x \in \widehat{E}$,

$$\begin{aligned} |f_k(x)g_k(x) - f(x)g(x)| &\le |f_k(x)| \cdot |g_k(x) - g(x)| + |g(x)| \cdot |f_k(x) - f(x)| \\ &\le (\varepsilon + M)\frac{\varepsilon}{2(\varepsilon + M)} + M\frac{\varepsilon}{2(\varepsilon + M)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Then,$\forall x \in \{x \in E : |f_k(x)g_k(x) - f(x)g(x) > \varepsilon|\}$, $x \in E \setminus \widehat{E}$, i.e.,

$$\{x \in E : |f_k g_k - fg| > \varepsilon\} \subseteq E \setminus \widehat{E}.$$

Therefore, we have

$$|\{x \in E : |f_k g_k - fg| > \varepsilon\}| < \delta, \ \ \text{k} > N_0.$$

第8题(8th week)

证明依测度收敛型 *Fatou* 引理. 即若非负可测函数列 $\{f_k\}$ 在 E 上依测度收敛于 f, 则

$$\int_E f(x)dx \le \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx.$$

证明依测度收敛型 *Fatou* 引理. 即若非负可测函数列 $\{f_k\}$ 在 E 上依测度收敛于 f, 则

$$\int_E f(x)dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx.$$

Proof:

Denote $L := \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx$, by definition, there exists a subsequence $\{f_{k_j}\}$ satisfying:

$$L = \lim_{j\to\infty} \int_E f_{k_j}(x)dx.$$

It follows from Riesz theorem that there exists a subsequence $\{f_{k_{j_i}}\}$ satisfying $f_{k_{j_i}}(x) \to f(x)$ a.e. in E. Applying Fatou's lemma for $\{f_{k_{j_i}}\}$, we have,

$$\int_E f(x)dx \leq \liminf_{i\to\infty} \int_E f_{k_{j_i}}(x)dx = L = \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx.$$