常系数微分方程组求解算法

目录

基础理论

考虑一个常系数线性微分方程系统：

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = A\varphi(t)$$

其中，A 是一个 $n \times n$ 的常数矩阵。求解该系统的关键在于计算矩阵指数 e^{At}，其解可以表示为：

$$\varphi(t) = e^{At}\varphi(0)$$

为了计算 e^{At}，我们通常需要对矩阵 A 进行特征值分解或使用广义特征向量方法。

解空间分解与矩阵指数的计算

假设 A 的不同特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$，其重数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_k$，则对应于每个 λ_j，有一个 n_j 维的子空间 U_j，满足：

$$(A - \lambda_j E)^{n_j} u = 0$$

整个 n 维空间可以表示为这些子空间的直和：

$$\mathbb{R}^n = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$$

对于任意解 $\varphi(t)$，可以表示为：

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_j t} \left[\sum_{i=0}^{n_j - 1} \frac{t^i}{i!} (A - \lambda_j E)^i \right] v_j$$

其中，v_j 是对应于 λ_j 的特征向量或广义特征向量。

矩阵指数的计算步骤总结

1. 求特征值和特征向量： 找出矩阵 A 的所有特征值 λ_j 及其对应的特征向量 v_j。
2. 构造广义特征向量： 对于重特征值，构造广义特征向量以确保解的线性无关性。
3. 构造基解矩阵： 通过特征值和特征向量（包括广义特征向量）构造基解矩阵 $\Phi(t)$。
4. 计算矩阵指数： 使用公式 $e^{At} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)$，由于 $\Phi(0) = E$，因此 $e^{At} = \Phi(t)$。
5. 写出通解： 通过基解矩阵与常数向量相乘得到微分方程的通解。

求解步骤与算法

以下是求解常系数线性微分方程系统的具体算法步骤：

1. 求特征值：
   - 计算矩阵 A 的特征多项式 $\det(A - \lambda E) = 0$。
   - 求解特征多项式得到所有特征值 λ_j。
2. 求特征向量和广义特征向量：
   - 对每个特征值 λ_j，求解方程 $(A - \lambda_j E)v = 0$ 得到特征向量。
   - 若特征值的代数重数大于几何重数，需构造广义特征向量：
     - 解 $(A - \lambda_j E)^k v = 0$，其中 k 是最小满足解空间不再扩大的整数。
     - 选择使 $(A - \lambda_j E)^{k-1} v \neq 0$ 的向量作为广义特征向量。

3. 确定广义特征向量的阶数：
   - 对于每个广义特征向量 v，确定其阶数 m，即最小的 m 使得 $(A-\lambda_j E)^m v = 0$。
   - 该阶数决定了解中 t 的多项式项的最高次数。
4. 构造基解矩阵 $\Phi(t)$：
   - 对于每个特征值及其对应的特征向量和广义特征向量，构造对应的解形式：

     $$\varphi_j(t) = e^{\lambda_j t}\left[\sum_{i=0}^{m_j-1} \frac{t^i}{i!}(A-\lambda_j E)^i\right] v_j$$

   - 将所有独立解作为列向量组成基解矩阵 $\Phi(t)$。
5. 计算矩阵指数 e^{At}：
   - 利用基解矩阵：

     $$e^{At} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)$$

6. 写出通解：
   - 通解为：

     $$\varphi(t) = e^{At}\mathbf{c}$$

     其中，$\mathbf{c}$ 是包含初始条件的常数向量。

例 9：求解方程组及矩阵指数

考虑方程组：

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 + x_3, \\ x_2' = 2x_1 + x_3, \\ x_3' = x_1 - x_2 + 2x_3, \end{cases}$$

系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

初值条件：

$$\boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{\eta}.$$

目标

求满足初值条件的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$，并求矩阵指数 e^{At}。

求解步骤

步骤 1：求特征值

首先，求矩阵 A 的特征值 λ，即解特征方程：

$$\det(\lambda E - A) = 0,$$

其中 E 为单位矩阵。

计算行列式：

$$\det(\lambda E - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda & -1 \\ -1 & 1 & \lambda - 2 \end{bmatrix}.$$

利用展开法计算行列式：

$$\begin{aligned} \det(\lambda E - A) &= (\lambda - 3) \cdot \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} - 1 \cdot \det \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} - 1 \cdot \det \begin{bmatrix} -2 & \lambda \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= (\lambda - 3)\left(\lambda(\lambda - 2) - (-1)(1)\right) - 1\left((-2)(\lambda - 2) - (-1)(-1)\right) - 1\left((-2)(1) - \lambda(-1)\right) \\ &= (\lambda - 3)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) - 1(-2\lambda + 4 - 1) - 1(-2 + \lambda) \\ &= (\lambda - 3)(\lambda - 1)^2 + (2\lambda - 3) + (-\lambda + 2) \\ &= (\lambda - 3)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) + \lambda - 1 \\ &= \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 3\lambda^2 + 6\lambda - 3 + \lambda - 1 \\ &= \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4. \end{aligned}$$

因此，特征方程为：

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0.$$

通过因式分解，发现 $\lambda = 1$ 是一个实根。进行多项式除法，将 $\lambda - 1$ 因子除去：

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2.$$

因此，特征值为：

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2 \quad (\text{重数} = 2).$$

步骤 2：求特征向量和广义特征向量

特征值 $\lambda_1 = 1$

求解 $(\lambda_1 E - A)v = 0$：

$$(\lambda_1 E - A) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

解方程组：

$$\begin{cases} -2v_1 + v_2 - v_3 = 0, \\ -2v_1 + v_2 - v_3 = 0, \\ -v_1 + v_2 - v_3 = 0. \end{cases}$$

简化得到：

$$\begin{gathered} -2v_1 + v_2 - v_3 = 0 \quad (\text{方程}1) \\ -v_1 + v_2 - v_3 = 0 \quad (\text{方程}3). \end{gathered}$$

从方程3得：

$$v_1 = v_2 - v_3.$$

代入方程1：

$$-2(v_2 - v_3) + v_2 - v_3 = -2v_2 + 2v_3 + v_2 - v_3 = -v_2 + v_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = v_3.$$

设 $v_3 = t$，则:

$$v_1 = v_2 - v_3 = t - t = 0, \quad v_2 = t, \quad v_3 = t.$$

因此，特征向量为:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

特征值 $\lambda_2 = 2$（重数 2）

求解 $(\lambda_2 E - A)v = 0$:

$$(\lambda_2 E - A) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

解方程组:

$$\begin{cases} -v_1 + v_2 - v_3 = 0, \\ -2v_1 + 2v_2 - v_3 = 0, \\ -v_1 + v_2 = 0. \end{cases}$$

从第三个方程得:

$$v_1 = v_2.$$

代入第一个方程:

$$-v_1 + v_1 - v_3 = -v_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_3 = 0.$$

因此，特征向量为:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

几何重数：1（只有一个线性无关的特征向量），因此需要构造一个广义特征向量。

构造广义特征向量 v_g

求解 $(\lambda_2 E - A)v_g = v_2$:

$$(\lambda_2 E - A) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

设 $v_g = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

解方程:

$$\begin{cases} -a + b - c = 1, \\ -2a + 2b - c = 1, \\ -a + b = 0. \end{cases}$$

从第三个方程得:

$$a = b.$$

代入第一个方程:

$$-a + a - c = -c = 1 \quad \Rightarrow \quad c = -1.$$

代入第二个方程:

$$-2a + 2a - c = -c = 1 \quad \Rightarrow \quad c = -1 \quad (\text{已满足}).$$

因此，广义特征向量为:

$$v_g = \begin{pmatrix} a \\ a \\ -1 \end{pmatrix}.$$

取 $a = 0$（任意值），则:

$$v_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

步骤 3：构造基解矩阵 $\Phi(t)$

基于特征向量和广义特征向量，构造基解矩阵 $\Phi(t)$。

特征值 $\lambda_1 = 1$ 的解：

$$\varphi_1(t) = e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

特征值 $\lambda_2 = 2$ 的解：

1. 特征向量部分：

$$\varphi_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. 广义特征向量部分：

$$\varphi_3(t) = e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = e^{2t} \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ -1 \end{pmatrix}$$

因此，基解矩阵为：

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \varphi_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e^{2t} & -te^{2t} \\ e^t & e^{2t} & -te^{2t} \\ e^t & 0 & -e^{2t} \end{bmatrix}$$

步骤 4：计算矩阵指数 e^{At}

根据定义：

$$e^{At} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0).$$

计算 $\Phi(0)$：

$$\Phi(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

计算 $\Phi^{-1}(0)$

$$\Phi(0)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

因此

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 0 & e^{2t} & -te^{2t} \\ e^t & e^{2t} & -te^{2t} \\ e^t & 0 & -e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}. = e^{At} = \begin{bmatrix} e^{2t}(1+t) & -te^{2t} & te^{2t} \\ e^{2t}(1+t) - e^t & e^t - te^{2t} & te^{2t} \\ e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

微分方程组解答汇总

以下是根据给定算法对三题进行求解的结果整理。

问题 5(1)

给定矩阵和初始条件：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

特征值与特征向量

- **特征值：**

  $$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = -1$$

- **对应特征向量：**

  $$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

基解矩阵 $\Phi(t)$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{5t} & e^{-t} \\ 2e^{5t} & -e^{-t} \end{bmatrix}$$

矩阵指数 e^{At}

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \dfrac{e^{5t} + 2e^{-t}}{3} & \dfrac{e^{5t} - e^{-t}}{3} \\ \dfrac{2e^{5t} - 2e^{-t}}{3} & \dfrac{2e^{5t} + e^{-t}}{3} \end{bmatrix}$$

通解

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{5t} + e^{-t} \\ 4e^{5t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

问题 5(2)

给定矩阵和初始条件：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}$$

特征值与特征向量

- **特征值：**

> $$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 2 + \sqrt{7}, \quad \lambda_3 = 2 - \sqrt{7}$$

- **对应特征向量：**

> $$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{7} - 1 \\ 11 - 3\sqrt{7} \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} -\sqrt{7} - 1 \\ 11 + 3\sqrt{7} \\ 2 \end{bmatrix}$$

基解矩阵 $\Phi(t)$

$$\Phi(t) = \left[e^{-3t}\boldsymbol{v}_1,\ e^{(2+\sqrt{7})t}\boldsymbol{v}_2,\ e^{(2-\sqrt{7})t}\boldsymbol{v}_3\right]$$

通解

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = c_1 e^{-3t}\boldsymbol{v}_1 + c_2 e^{(2+\sqrt{7})t}\boldsymbol{v}_2 + c_3 e^{(2-\sqrt{7})t}\boldsymbol{v}_3$$

其中，系数 c_1, c_2, c_3 通过初始条件确定。

问题 5(3)

给定矩阵和初始条件：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

特征值与特征向量

- **特征值：**

  > $$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1 \text{ (代数重数 2)}$$

- **对应特征向量：**

  > $$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- **广义特征向量：**

  > $$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

基解矩阵 $\Phi(t)$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{3t} & -2e^{-t} & (1-2t)e^{-t} \\ e^{3t} & e^{-t} & (-2+t)e^{-t} \\ 2e^{3t} & 2e^{-t} & 2te^{-t} \end{bmatrix}$$

矩阵指数 e^{At}

$$e^{At} = \Phi(t) \cdot \Phi(0)^{-1}$$

其中:

$$\Phi(0) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi(0)^{-1} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -4 & -2 & 5 \\ 0 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

通解

根据初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，求解得到:

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \frac{1}{4}e^{3t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}e^{-t} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} \\ \frac{e^{3t}-e^{-t}}{4} \\ \frac{e^{3t}-e^{-t}}{2} \end{bmatrix}$$

最终解：

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \begin{bmatrix} \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} \\ \frac{e^{3t}-e^{-t}}{4} \\ \frac{e^{3t}-e^{-t}}{2} \end{bmatrix}$$

总结

通过以上步骤，我们系统地介绍了如何使用**解空间分解与矩阵指数**的方法求解常系数线性微分方程系统。关键步骤包括：

1. 求解特征值与特征向量： 确定矩阵 A 的所有特征值及其对应的特征向量。
2. 构造广义特征向量（如需要）： 对于代数重数大于几何重数的特征值，构造广义特征向量以确保解的完整性。
3. 构造基解矩阵： 利用特征向量和广义特征向量构造基解矩阵 $\Phi(t)$。
4. 计算矩阵指数： 通过基解矩阵 $\Phi(t)$ 和其逆矩阵 $\Phi^{-1}(0)$ 计算矩阵指数 e^{At}。
5. 写出通解： 将矩阵指数与初值条件相结合，得到微分方程的通解。