# 代数数论发展史简介

学院： 数学与统计学院 姓名： 贺毅 学号： 320230929311

**摘要：**数学发展到现在已经有了100多个主要分支学科，其中三大类数学构成了整个数学的核心与本体，分别是：数的部分的代数学，形的部分的几何学，沟通数形的分析学。其中代数学有着悠久的历史，是一门研究数，数量，关系，结构的数学分支。到如今已经发展出了：初等代数，高等代数，代数数论，抽象代数。本文主要介绍代数学中的代数数论的发展史。

**关键词：**代数数论；类域论；p-adic空间；自守形式；代数几何学

# 一 代数数论简介

数论：以正整数作为研究对象的学科，在20世纪蓬勃发展和丰收。这一世纪数论研究的一个突出的特点是与几何，分析，代数等其他数学领域的方法思想成果等相互渗透，不断产生重大的研究成果。与此同时，数论的广泛应用也是很重要的，应用到了计算机科学，信息工程，密码学等现代的重要科学上。

而代数数论，就是代数与数论相互应用而产生的新分支，以数的结构的角度解决数论问题，研究作用在代数数上的对称群的结构和表示理论。代数数论的中心研究对象是代数数、Galois 群表示和 L-函数。Grothendieck留下来的未完成的motif理论是最能够综合表达代数数论的中心研究问题的一套理论。代数数论在近现代蓬勃发展，已经成为数学研究领域的一大热门。

# 二 奠基的时代

代数数论在19世纪完成了奠基工作，以下列举了一部分数学家为代数数论做的奠基工作：

(1) Gauss(高斯,1777—1855): 二次型,二次域扩张, 二次互反律, 带复乘的椭圆曲线.

(2) Abel(阿贝尔, 1802 —1829): Abel积分, 五次方程没有一般根式解.

(3) Jacobi(雅可比, 1804—1851): 椭圆函数,θ-函数.

(4) Dirichlet (狄利克雷, 1805-1859): ζ-函数.

(5) Kummer(库默尔, 1810—1893): 分圆域, 交换扩张, 理想.

(6) Galois(伽罗瓦, 1811—1832): 群论在域扩张的应用.

(7) Weierstrass (魏尔斯特拉斯, 1815—1897): 椭圆函数.

(8) Hermite(埃尔米特, 1822—1901): 复数域上的二次型理论.

(9) Eisenstein (艾森斯坦, 1823—1852): 模形式, Eisenstein 级数.

(10) Kronecker(克罗内克,1823-1891)：有理数域的交换扩张.

(11) Riemann(黎曼, 1826-1866): ζ-函数的黎曼猜想, 超几何函数.

(12) Dedekind (戴德金, 1831-1916): 理想.

(13) Frobenius(弗罗贝尼乌斯, 1849—1917): 有限群.

(14) Poincaré (庞加莱, 1854 —1912): 模形式.

(15) Hensel(亨泽尔, 1861—1941): p 进数.

(16) Whittaker (惠特克, 1873—1956): 特殊函数.

# 三 类域论

这是代数数论奠基后的第一波进展（19世纪末到20世纪中叶），由Hilbert开始,经过P.Furtwängler、Takagi到E.Artin、Chevalley 、Nakayama、Tate、Serre等人完成了交换类域论 (abelian classfield theory)也就是交换扩张的Galois群的表示之上同调理论。类域论的一个核心定理是互反律，而高斯的二次互反律是互反律的鼻祖。

# 四 p-adic空间

第二波进展是由两个队伍各自进行的。第一队是由Iwasawa带领，Iwasawa在20世纪中叶提出传统类域论之外的新方向：交换岩泽理论。

岩泽认为：当代数数论中某些数域所成的塔的Galois群同构于 p 进整数Zₚ的加法群的时候，可以把这些数域所成的塔的理想类群(ideal class group)看作Zₚ模研究。理想类群Zₚ模的特征理想可以用 Kubota和Leopoldt在1960年定义的p进 L-函数的特殊值算出——岩泽主猜想，这个猜想在有理数域上的情形由 Barry Mazur (1982年柯尔奖获得者) 与 Andrew Wiles 证明。

我们可以说岩泽理论是：当Galois扩张.E/F的Galois群是p进李群时,研究E/F的p进L-函数。现今岩泽理论已经推广到了函数域上, Abel簇,模形式的应用, Skinner 和Urban的GL(2)岩泽主猜想, Coates 提出非交换岩泽理论。

第二队是E.Artin指挥的，E.Artin的两个学生Tate，Dwork各自组成队伍进行研究。Tate去了哈佛与Serre改向了Abel方向发展。他以文章J.Tate, p-divisible groups, Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966), 158-183, Springer, Berlin 开辟出新天地，之后, Fontaine 发表了Sur certains types de reprsentations p-adiques du groupe deGalois d’un corps local; construction d’un anneau de Barsotti-Tate. Ann. of Math. (2)115(1982), no. 3,529-577, 这可以说是p进Hodge理论的开始. Fontaine为其建立基础架构，日后的重要定理由Faltings和Kato的团队解决。

Dwork留在了普林斯顿，发表了许多重要论文，开辟了p进微分方程。这个理论由于解析D模，代数D模，算术D模理论交叉在一起。在最后p进Langlands对应理论中的证明同时运用了p进Hodge和p进微分方程理论。

# 五 代数群的调和分析

第三波是拓扑群无穷维表示在代数数论的应用。它是从Langlands在1967年写给Weil的一封信开始的：朗兰兹纲领，这个理论寻求一个Galois群表示与代数群的无穷维表示（自守表示）之对应。

自守形式分为调和分析部分与算术部分，其中心技术是：迹公式和代数簇的上同调群作为表示空间的计算。现在迹公式主要有两种：一种是由Selberg提出，Authur发展的，另一种是相对迹公式。在Wiles证明费马定理中自守形式发挥了重要的作用。

# 六 算术代数几何学

Wiles证明费马定理所用主要技术是p进Hodge理论的一部分，这个理论起源于两个代数几何的工作：一是Tate为了研究Abel簇的pⁿ挠点而引进的p可除群和有限平坦群概形理论，一是Fontaine为了研究Grothendieck提出的关于比较各种上同调群的函子而引进的p进周期环理想。

Grothendieck提出了交换环范畴上的代数几何学。代数数论的第四波发展就是指使用Grothendieck的代数几何学成功地解决代数数论的问题。

# 七 世界大同伦

应用同伦论的想法很早就出现在 Quillen的工作Homotopical algebra(1967),On the(co)-homology of commutative rings(1970) 中,现在已发展成为 simplicial ring范畴上的代数几何学: 即由 Jacob Lurie 和 Bertrand Toen提出的同伦代数几何学。我们可以这样看待这个进程:在Grothendieck之前人们研究的是域上的代数几何学，到了 Grothendieck便成为环上的代数几何学，今日已变为单纯形环上的代数几何学了。

今天我们已经处在代数数论的第五波发展之中，也就是这种新的simplicial com-mutative ring范畴上的代数几何学在代数数论应用的时代。

# 结语

上述代数数论的发展进程是按每次出现的新工具来划分的：p进紧李群表示论、Langlands 的非紧自守表示论、Grothendieck的交换环代数几何学、Lurie的同伦代数几何，每一个工具都是由一门深刻的理论支持的。代数数论是一个新兴的数学分支，是代数与数论的融合，它现在非常生机勃勃，正处于大发展的时候。

**参考文献**

1. PerfectlsShit.代数发展史.知乎,2023-06-23.
2. 冯克勤.初等数论及应用[M].北京：北京师范大学出版社，2003-07.
3. 黎景辉.代数数论[M].北京：高等教育出版社，2016.09.