

指数・対数関数

①指数関数

(1)指数・指数関数とは

例) $2^3, (-2)^4, \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$a^b \leftarrow a$ を _____、 b を _____ (_____) とよぶ

指数関数とは b (_____) の部分が変化していく関数

(2)指数計算

<指数法則> $a \neq 0, b \neq 0, m, n$ は有理数

● $a^m a^n = a^{m+n}$ 例) $2 \cdot 4 = 2^1 \cdot 2^2 = 8 = 2^3 \rightarrow \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$

● $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ 例) $\frac{8}{2} = \frac{2^3}{2^1} = 4 = 2^2 \rightarrow \underline{\quad} - \underline{\quad} = \underline{\quad}$

● $(a^m)^n = a^{mn}$ 例) $(2^3)^2 = 8^2 = 64 = 2^6 \rightarrow \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad}$

● $(ab)^n = a^n b^n$ 例) $(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36 = 2^2 \cdot 3^2$

● $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$ 例) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = \frac{3^2}{2^2}$

以上が指数法則と呼ばれる計算だが、暗記する必要はなく、例のように具体例使って計算すればどうなっているかわかる

(キーワード)

掛け算は_____

割り算は_____

(ポイント)

1. 0 乗は_____

例) $2^0 = 1, (-3)^0 = 1$

2. - は_____

例) $2^{-2} = \frac{1}{2^2}, (-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3}$

例題)

(I) $a^6 \times a^{-2}$

(II) $a^3 \div (a^3)^{-3}$

(III) $2^7 \div 2^2 \times 2^{-3}$

(演習)

(i) $a^4 \times a^{-3}$

(ii) $a^2 \div a^{-5}$

(iii) $(a^3)^{-2}$

$$(iv) 2^3 \times 2^{-5} \div 2^2$$

$$(v) (3^2)^{-3} \times 3^3 \div 3^{-4}$$

$$(vi) (2^{-3} \times 2^6)^3 \div 16$$

(3)累乗根の計算

これから指数に有理数(分数)が含まれる計算を行っていく

$x^n = a$ の解を x の n 乗根と言い、その解を $x = \underline{\hspace{1cm}}$ とかく

$$\text{例題) } x^3 = a$$

$$x^5 = a^3$$

$$x^4 = 3$$

$$x =$$

$$x =$$

$$x =$$

(注意) $\sqrt[n]{a}$ は \sqrt{a} のように 2 が省略される

次に上記の形を本来の指数の形に持っていきたい

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

よって、上記の答えはそれぞれ

$$\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}, \sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{3}{5}}, \sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}} \text{ と変形出来る}$$

本来の指数の形に持っていけば、指数法則を使って計算できる

<累乗根の法則>

- $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- $(\sqrt[n]{a})^m = (a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}} = \sqrt[np]{a^{mp}}$

例題)

$$(I) \sqrt[3]{4}\sqrt[3]{16}$$

$$(II) \frac{\sqrt[6]{27}}{\sqrt[6]{3}}$$

$$(III) \sqrt[3]{\sqrt{125}}$$

(ポイント)

計算するとき、底は一番_____に合わせると良い

(演習)

$$(i) 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{3}} \div 3^{\frac{1}{6}}$$

$$(ii) \sqrt[4]{2^3} \times \sqrt{2}$$

$$(iii) \sqrt{\sqrt[3]{36}}$$

$$(\text{iv}) (\sqrt[6]{27})^2$$

$$(\text{v}) \frac{\sqrt[5]{128}}{\sqrt[5]{4}}$$

[応用]

$$(\text{vi}) \sqrt{2}\sqrt[6]{200}\sqrt[3]{25}$$

$$(\text{vii}) \sqrt{\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}}$$

$$(\text{viii}) (a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}})$$

(4)指数関数のグラフ

$$y = 3^x \text{ と } y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
3^x							
$\left(\frac{1}{3}\right)^x$							

(グラフの性質) $y = a^x$

1. 定義域(x の範囲)は_____全体で値域(y の範囲)は_____全体

2. $a > 1$ のとき_____ (常に増加する)

$0 < a < 1$ のとき_____ (常に減少する)

→ y のある値に対して、それをみたす x が 1 つに定まる

3. $(0, 1)$ を通り、 x 軸に_____する (y の値は 0 に近づくが 0 にはならない)

(注意)

$a \leq 0, a = 1$ のグラフは基本的に出でこない(出せない)

(理由)

$y = 0^x$ については 0^0 の値が定まらない

$y = 1^x$ についてはどんな x に対しても $y = 1$ となるので直線になるから

$a < 0$ のときの $y = a^x$ は $a^{\frac{3}{2}} = a^{1.5}$ などの指数部が整数以外の符号が定まらない

(まとめ)

底 a が $a > 1$ の時と $0 < a < 1$ でグラフが変わる(グラフは概形が分かれば良い)

→ 考える関数の底がどちらのグラフになるのか考えること

(5)指数の大小関係

例題)次の数の大小を比較せよ

$$(I) \sqrt[4]{5}, \sqrt[8]{15}$$

$$(II) \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{5}}, 2^{\frac{1}{3}}, 4^{\frac{1}{4}}$$

(不等式の性質)

$a > 0, b > 0, n$ は有理数

$$a > b \rightarrow a^n > b^n$$

指数関数は常に正の数になるので何乗しても良い

(演習) 次の数の大小を比較せよ

(i) $\sqrt[3]{4}, \sqrt[6]{14}$

(ii) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{3}}, 9^{\frac{1}{8}}$

(6)指数方程式

(解法)

1. _____ (_____)を揃えるように変形する
2. 指数部の等式を解く

例題 1)

(I) $3^{x+2} = 27$

(II) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x(x+3)} = 4$

(演習)

$$(i) 4^{x-3} = 64$$

$$(ii) \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 27$$

[応用]

$$(iii) 3 \cdot 9^x = 1$$

例題 2)置き換え

$$(I) 2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$$

(演習)

$$(i) 3^{2x} + 8 \cdot 3^x - 9 = 0$$

$$(ii) 4^x - 5 \cdot 2^{x+2} + 64 = 0$$

[応用]

$y = 4^x - 2^{x+1}$ の最小値とそのときの x の値を求めよ(ヒント: $t = 2^x$ とおく)

(7)指数不等式

(解法)

1. _____(_____)を揃えるように変形する
2. 指数部の不等式を解く(底によって不等号の向きが変わる)

$$a > 1 \text{ のとき } a^x > a^y \rightarrow$$

$$0 < a < 1 \text{ のとき } a^x > a^y \rightarrow$$

例題 1)

$$(I) 2^x > 8$$

$$(II) 3^{x-2} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

(演習)

$$(i) 4^{x-1} < 64$$

$$(ii) \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} \geq 64$$

例題 2)置き換え

$$(I) 3^{2x} + 3^x - 12 \geq 0$$

(演習)

$$(i) 4^{2x} - 15 \cdot 4^x - 16 \geq 0$$

$$(ii) 4^x \leq 2(1 + 2^{x-1})$$

$$(iii) \left(\frac{1}{9}\right)^x - \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} - 54 < 0$$

(8)[応用]式の値

(問題)関数 $y = 4^x + 4^{-x} - 4(2^x + 2^{-x}) + 7 \dots$ ① について最小値を求めよ

(step1) $t = 2^x + 2^{-x}$ とおく

$$t^2 =$$

①の式を t を使って表すと

t の定義域は _____ より

$$2^x + 2^{-x}$$

よって最小値は $t =$ _____ のとき

そのときの x は _____ より

②対数関数

(1)対数・対数関数とは

指数関数から派生してできた関数

例) $\log_2 6$, $2\log_5 4$

$$2^x = 4 \rightarrow x = 2$$

$$2^x = 3 \rightarrow x = ? \quad \leftarrow \underline{\hspace{2cm}}$$

よって $a > 0, a \neq 1, R > 0$

$$a^r = R \leftrightarrow r = \log_a R$$

$\log_a R$ において a の部分を _____、 R の部分を _____ という

対数関数とは R (_____) が変化していく関数

(2)対数計算

<対数の性質> $a > 0, a \neq 1, R > 0, S > 0, p$ は有理数

$$1. \log_a RS = \log_a R + \log_a S \quad \text{例) } \log_2 15 = \log_2 3 \cdot 5 = \log_2 3 + \log_2 5$$

$$2. \log_a \frac{R}{S} = \log_a R - \log_a S \quad \text{例) } \log_2 \frac{5}{3} = \log_2 5 - \log_2 3$$

$$3. \log_a R^p = p \log_a R \quad \text{例) } \log_2 5^3 = 3 \log_2 5$$

$$4. \log_a a = 1 \quad \text{例) } \log_2 2 = 1$$

$$5. \log_a 1 = 0 \quad \text{例) } \log_2 1 = 0$$

(証明)

1. $\log_a R = x, \log_a S = y$ として $\log_a RS = x + y$ を示す

$$\log_a R = x \text{ より } R = a^x, \log_a S = y \text{ より } S = a^y$$

$$RS = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\text{よって } x + y = \log_a RS$$

2. 1 と同様に $\log_a \frac{R}{S} = x - y$ を示す

$$\frac{R}{S} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\text{よって } x - y = \log_a \frac{R}{S}$$

3. $\log_a R = x$ として $\log_a R^p = px$ を示す

$$\log_a R = x \text{ より } R = a^x$$

$$\text{両辺 } p \text{ 乗すると } R^p = (a^x)^p = a^{px}$$

$$\text{よって } px = \log_a R^p$$

4. $a^1 = a$ より

$$1 = \log_a a$$

5. $a^0 = 1$ より

$$0 = \log_a 1$$

例題)

(I) $\log_2 16$

(II) $\log_3 \sqrt[3]{9}$

(III) $\log_3 12 + \log_3 36 + \log_3 \frac{1}{16}$

(IV) $\log_{10} \sqrt{2} - \frac{1}{2} \log_{10} \frac{1}{3} - \frac{3}{2} \log_{10} \sqrt[3]{6}$

(演習)

(i) $\log_4 64$

(ii) $\log_5 \frac{1}{\sqrt{125}}$

$$(iii) \log_{10} 2 + \log_{10} \sqrt{15} - \frac{1}{2} \log_{10} \frac{3}{5}$$

$$(iv) 3 \log_4 2 - \frac{1}{2} \log_4 7 + \log_4 \frac{\sqrt{7}}{2}$$

<底の変換公式>

次に底が異なっていたらどのように計算するのか

→底を揃えると計算できる

→底を揃うように変形したい

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

(証明)

$$\log_a b = x \text{ とすると } b = a^x$$

両辺に c が底の対数を取ると

$$\log_c b = \log_c a^x = x \log_c a$$

$$x = \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

(ポイント)揃える底は _____ にすること

例題)以下の式を底の変換公式で変形せよ

(I) $\log_{81} 3\sqrt{3}$

(II) $\log_{\frac{1}{25}} 5\sqrt[4]{5}$

(III) $\log_2 5 \cdot \log_5 8$

(IV) $\log_2 3 \cdot \log_3 8 \cdot \log_4 8$

(演習)以下の式を底の変換公式で変形せよ

(i) $\log_{16} 1024$

(ii) $\log_{\frac{1}{8}} 128$

(iii) $\log_3 6 \cdot \log_6 9$

(iv) $\log_4 3 \cdot \log_9 25 \cdot \log_5 2$

[応用](v) $3^{4\log_3 2}$

(3)対数関数のグラフ

$$y = \log_3 x \text{ と } \log_{\frac{1}{3}} x$$

x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
$\log_3 x$							
$\log_{\frac{1}{3}} x$							

(グラフの性質) $y = \log_a x$

1. 定義域(x の範囲)は_____全体で値域(y の範囲)は_____全体

2. $a > 1$ のとき _____ (常に増加する)

$0 < a < 1$ のとき _____ (常に減少する)

→ y のある値に対して、それをみたす x が 1 つに定まる

3. $(1, 0)$ を通り、 y 軸に _____ する (x の値は 0 に近づくが 0 にはならない)

4. $y = a^x$ のグラフと _____ に関して対称

[応用]逆関数(詳しくは数学Ⅲで)

x と y を入れ替えてできる関数を逆関数といい、 $y = x$ に関して対称となる

$$y = a^x \leftrightarrow x = \log_a y$$

右側の式の x と y を入れ替えると $y = \log_a x$

(他の例)

$$y = x^2 \text{ と } y = \pm\sqrt{x} \quad y = \sin x \text{ と } y = \sin^{-1} x$$

(4)対数の大小関係

例題)

(I) $2, \log_3 7$

(II) $\log_2 3, \log_4 7, \log_8 28$

(演習)

(i) $3, \log_2 9$

(ii) $\log_3 5, \log_9 20, \log_{27} 126$

(5)対数方程式

(解法)

1. _____を確認する
2. _____を揃えて、左辺・右辺ともに同じ底の対数 1 つずつになるように変形する
3. 真数の等式を解く
4. 真数条件を満たしているか確認する

例題 1)

$$(I) \log_2 x + \log_2(x - 2) = 3$$

$$(II) (\log_{10} x)^2 - 4 \log_{10} x + 3 = 0$$

[応用](Ⅲ) $\log_2 8x - 6 \log_x 2 = 4$

(演習)

(i) $\log_{12} x + \log_{12}(x + 1) = 1$

(ii) $(\log_2 x)^2 - \log_2 x^3 + 2 = 0$

[応用](iii) $\log_3 x - \log_x 81 = 3$

[応用] x についての方程式 $\log_a(x-2) - \log_a(x+1) - \log_a(x-1) = 1$ が解を持つように、定数 a の値の範囲を求めよ。

(6)対数不等式

(解法)

1. _____を確認する
2. _____を揃えて、左辺・右辺ともに同じ底の対数1つずつになるように変形する
3. 真数の不等式を解く(底によって不等式の向きが変わる)

$$a > 1 \text{ のとき } \log_a x < \log_a y \quad \rightarrow$$

$$0 < a < 1 \text{ のとき } \log_a x < \log_a y \rightarrow$$

4. 真数条件と合わせる範囲を答える

例題)

$$(I) \log_3 x + \log_3(2x - 1) > 1$$

$$(II) (\log_2 x)^2 + \log_2 x^2 - 3 \leq 0$$

[応用](Ⅲ) $\log_2 x + 3 \log_x 4 - 7 < 0$

(演習)

(i) $2 \log_2(x - 1) < \log_2(3 - x)$

(ii) $(\log_3 x)^2 - \log_3 x^2 - 8 \leq 0$

[応用](iii) $\log_{\frac{1}{3}} x - 2 \log_x \frac{1}{9} + 3 > 0$

[応用]関数 $y = -2(\log_2 x)^2 + 2 \log_2 x^2 - 3$ $\left(\frac{1}{4} \leq x \leq 8\right)$ の最大値・最小値とその時の x の値を求めよ。[ヒント: $t = \log_2 x$ とおく]

[応用] $\log_2 x + \log_2 y = 3$ のとき、 $4x + y$ の最小値を求めよ。

また、そのときの x, y の値を求めよ。

(7)常用対数

常用対数とは … 底が 10 の対数のこと $\log_{10} x$

何のために → 桁数問題

数が大きい場合、常用対数をとって計算すると値を小さくできる

例)

$$1000 \rightarrow \log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3$$

$$10000 \rightarrow \log_{10} 10000 = \log_{10} 10^4 = 4 \quad [4 \text{ 桁の数字の値は } 3.\cdots \text{になる}]$$

以上より、計算した値によって、その数の桁数がわかる

→ 具体的に正確な値はわからないが、だいたいどのくらいか(桁数)はわかる

[補足]

$$a = \log_{10} 2 = 0.3010, b = \log_{10} 3 = 0.4771 \text{ とする}$$

$$\log_{10} 1 =$$

$$\log_{10} 2 =$$

$$\log_{10} 3 =$$

$$\log_{10} 4 =$$

$$\log_{10} 5 =$$

$$\log_{10} 6 =$$

$$\log_{10} 7 =$$

$$\log_{10} 8 =$$

$$\log_{10} 9 =$$

例題 1) 3^{20} の数の桁数と最高位の数字を求めよ

(但し、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする)

(例題 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ を小数で表すとき、はじめて 0 でない数字が現れるのは小数第何位か。また、その数字はいくつか。(但し、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする)

(演習 1) 6^{20} の数の桁数と最高位の数字を求めよ。

(但し、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする)

(演習 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{15}$ を小数で表すとき、はじめて 0 でない数字が現れるのは小数第何位か。また、その数字はいくつか。(但し、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする)