微分　応用問題集

(例題 1)関数 $f(x)=2x^3-3kx^2+k^2x$ の極大値と極小値との差が 1 となるような定数 k を求めよ

[解] $f'(x)=6x^2-6kx+k^2$

極値を持つ $\leftrightarrow$ $f'(x)$ の判別式 $D>0$

$\frac{D}{4}=(-3k)^2-6\cdot k^2=3k^2>0$ より $k\neq 0$

$f'(x)=0$ の解 α,β $(\alpha<\beta)$ とすると

解と係数の関係から

$\alpha+\beta=k\ ,\alpha\beta=\frac{k^2}{6}$

3 次関数の x^3 の係数が正より

$f(\alpha)$ が極大値、$f(\beta)$ が極小値となるので

$$\begin{aligned}f(\alpha)-f(\beta)&=(2\alpha^3-3k\alpha^2+k^2\alpha)-(2\beta^3-3k\beta^2+k^2\beta)\\&=2(\alpha^3-\beta^3)-3k(\alpha^2-\beta^2)+k^2(\alpha-\beta)\\&=(\alpha-\beta)\{2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-3k(\alpha+\beta)+k^2\}\\&=(\alpha-\beta)\{2(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-3k(\alpha+\beta)+k^2\}\end{aligned}$$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=k^2-\frac{2}{3}k^2=\frac{1}{3}k^2$ より

$\alpha-\beta=-\frac{|k|}{\sqrt{3}}\left(\alpha<\beta\text{より}\right)$

よって

$$\begin{aligned}f(\alpha)-f(\beta)&=-\frac{|k|}{\sqrt{3}}\left(2k^2-2\cdot\frac{k^2}{6}-3k\cdot k+k^2\right)\\&=\left|\frac{k}{\sqrt{3}}\right|^3=1\text{ より }\ \boldsymbol{k=\pm\sqrt{3}}\ \left(k\neq 0\text{ を満たす}\right)\end{aligned}$$

(演習)関数 $f(x)=x^3+x^2+kx-1$ の極大値と極小値との差が 4 となるような定数

k を求めよ

[解]

$f'(x)=3x^2+2x+k$

$\frac{D}{4}=1-3k>0$ より $k<\frac{1}{3}$

$f'(x)=0$ の解 $\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$ とすると

解と係数の関係から

$\alpha+\beta=-\dfrac{2}{3},\alpha\beta=\dfrac{k}{3}$

3 次関数の x^3 の係数が正より

$f(\alpha)$ が極大値、$f(\beta)$ が極小値となるので

$$f(\alpha)-f(\beta)=(\alpha^3+\alpha^2+k\alpha-1)-(\beta^3+\beta^2+k\beta-1)$$

$$=(\alpha^3-\beta^3)+(\alpha^2-\beta^2)+k(\alpha-\beta)$$

$$=(\alpha-\beta)\{(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha+\beta)+k\}$$

$$=(\alpha-\beta)\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta+(\alpha+\beta)+k\}$$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\left(-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{3}k=\frac{4-12k}{9}$ より

$\alpha-\beta=-\frac{2\sqrt{1-3k}}{3}\left(\alpha<\beta\text{より}\right)$

よって

$f(\alpha)-f(\beta)=-\frac{2\sqrt{1-3k}}{3}\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{3}k-\frac{2}{3}+k\right)=-\frac{2\sqrt{1-3k}}{3}\cdot\left\{-\frac{2(1-3k)}{9}\right\}=\frac{4}{27}(1-3k)^{\frac{3}{2}}=4$ より

$(1-3k)^{\frac{3}{2}}=27$

$(1-3k)^{\frac{3}{2}}=9^{\frac{3}{2}}$

$1-3k=9$

$\boldsymbol{k=-\frac{8}{3}}\ \left(k<\frac{1}{3}\text{ を満たす}\right)$

(例題 2) 関数 $f(x)=x^3-6ax^2$ の $0\leq x\leq 2$ の最大値・最小値を求めよ

[解] $f'(x)=3x^2-12ax=3x(x-4a)$　極値の候補は $x=0\,,4a$ となる

最大値・最小値を求めるのに候補となるのは極値と端点である

つまり、極値が区間 $0\leq x\leq 2$ によって場合分けする

(ⅰ) $4a<0$ つまり $a<0$ のとき

増減表は　　　　　　　　　　　　よって **最大値 $\boldsymbol{8-24a}$ $(\boldsymbol{x=2})$ 最小値 $\boldsymbol{0}$ $(\boldsymbol{x=0})$**

x	0	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$8-24a$

(ⅱ) $0\leq 4a\leq 2$ つまり $0\leq a\leq\frac{1}{2}$ のとき

増減表は

x	0	$\cdots$	$4a$	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-32a^3$	$\nearrow$	$8-24a$

最大値の候補は $0\,,8-24a$ よりそこでも場合分けすると

$\boldsymbol{0\leq a<\frac{1}{3}}$ のとき 最大値 $\boldsymbol{8-24a}$ $(\boldsymbol{x=2})$ 最小値 $\boldsymbol{-32a^3}$ $(\boldsymbol{x=4a})$

$\boldsymbol{a=\frac{1}{3}}$ のとき　　最大値 $\boldsymbol{0}$ $(\boldsymbol{x=0\,,2})$ 最小値 $\boldsymbol{-\frac{32}{27}}$ $\boldsymbol{\left(x=\frac{4}{3}\right)}$

$\boldsymbol{\frac{1}{3}<a\leq\frac{1}{2}}$ のとき 最大値 $\boldsymbol{0}$ $(\boldsymbol{x=0})$ 最小値 $\boldsymbol{-32a^3}$ $(\boldsymbol{x=4a})$

(ⅲ) $2<4a$ つまり $\frac{1}{2}<a$ のとき

増減表は　　　　　　　　　　　　よって **最大値 $\boldsymbol{0}$ $(\boldsymbol{x=0})$ 最小値 $\boldsymbol{8-24a}$ $(\boldsymbol{x=2})$**

x	0	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$8-24a$

(類題 1)p137 **4**

[解]$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x-a)(x+a)$ 極値候補は $x=\pm a$

$0<a<2$ より最大値・最小値の候補となるのは $x=a$

増減表は

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-2a^3$	↗	$-6a^2+8$

最大値の候補は 0 , $-6a^2+8$ よりそこで場合分けする

$0<a<\frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき 最大値 $-6a^2+8$ $(x=2)$ 最小値 $-2a^3$ $(x=a)$

$a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき　最大値 0 $(x=0,2)$ 最小値 $-2a^3$ $(x=a)$

$\frac{2\sqrt{3}}{3}<a<2$ のとき　最大値 0 $(x=0)$ 最小値 $-2a^3$ $(x=a)$

(類題 2) $a<0$ とする。関数 $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$ の$-2\leq x\leq 2$ における

最大値・最小値を求めよ

[解] $f'(x)=6x^2-6(a+1)x+6a=6(x-1)(x-a)$ 極値候補は $x=1\,,a$

$a<0$ であることを考え、$x=a$ が区間 $-2\leq x\leq 2$ に含まれるかで場合分けする

(ⅰ) $a<-2$ のとき

増減表は

x	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-24a-28$	↘	$3a-1$	↗	4

最大値の候補は $x=-2\,,2$　 $a<-2$ より $f(-2)>f(2)$

よって　**最大値 $-24a-28\ (x=-2)$ 最小値 $3a-1\ (x=1)$**

(ⅱ) $-2\leq a<0$ のとき

増減表は

x	-2	$\cdots$	a	$\cdots$	1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-24a-28$	↗	$-a^3+3a^2$	↘	$3a-1$	↗	4

最大値の候補は $x=a\,,2$ 最小値の候補は $x=-2\,,1$

$-2\leq a<-1$ のとき $f(a)>f(2)\,,f(-2)>f(1)$

$a=-1$ のとき $f(a)=f(2)\,,f(-2)=f(1)$

$-1<a<0$ のとき $f(a)<f(2)\,,f(-2)<f(1)$

したがって

$-2<a<-1$ のとき 最大値 $-a^3+3a^2\ (x=a)$ 最小値 $3a-1\ (x=1)$

$a=-1$ のとき 最大値 $4\ (x=a\,,2)$ 最小値 $-4\ (x=-2\,,1)$

$-1<a<0$ のとき 最大値 $4\ (x=2)$ 最小値 $-24a-28\ (x=-2)$

(類題 3)p143 **7**

[解] $f'(x) = 6x^2 - 6ax = 6x(x-a)$ 極値候補は $x = 0\,, a$

$a > 0$ であることを考え、$x = a$ が区間$-1 \leq x \leq 4$ に含まれるかで場合分けする

(ⅰ)$0 < a \leq 4$ のとき

増減表は

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	a		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-3a-2$	↗	0	↘	$-a^3$	↗	$-48a+128$

最大値の候補は $x = 0\,, 4$　最小値の候補は $x = -1\,, a$

$0 < a < 2$ のとき $f(0) < f(4)\,, f(-1) < f(a)$

$a = 2$ のとき $f(0) < f(4)\,, f(-1) = f(a)$

$2 < a < \frac{8}{3}$ のとき $f(0) < f(4)\,, f(-1) > f(a)$

$a = \frac{8}{3}$ のとき $f(0) = f(4)\,, f(-1) > f(a)$

$\frac{8}{3} < a \leq 4$ のとき $f(0) > f(4)\,, f(-1) > f(a)$

よって

$0 < a < 2$ のとき 最大値 $-48a + 128$ $(x = 4)$ 最小値 $-3a - 2$ $(x = -1)$

$a = 2$ のとき 最大値 32 $(x = 4)$ 最小値 -8 $(x = -1\,, 2)$

$2 < a < \frac{8}{3}$ のとき 最大値 $-48a + 128(x = 4)$ 最小値 $-a^3$ $(x = a)$

$a = \frac{8}{3}$ のとき 最大値 0 $(x = 0\,, 4)$ 最小値 $-\frac{512}{27}$ $\left(x = \frac{8}{3}\right)$

$\frac{8}{3} < a \leq 4$ のとき 最大値 0 $(x = 0)$ 最小値 $-a^3$ $(x = a)$

（ⅱ）$4 \leq a$ のとき

増減表は

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-3a-2$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-48a+128$

最小値の候補は $x=-1\,,4$

$4 \leq a$ のとき $f(-1) > f(4)$

よって

最大値 $\boldsymbol{0}\ (\boldsymbol{x=0})$ 最小値 $\boldsymbol{-48a+128}\ (\boldsymbol{x=4})$