

応用問題[積分]

(例題 1)

放物線 $y = x^2 - 2x - 1$ と原点を通る直線で囲まれた面積 S の最小値とそのときの直線の方程式を求めよ。

[解]

y 軸に平行な直線 $x = 0$ だとすると、囲まれる部分ができないので不適

よって直線の傾きを m をすると、原点を通る直線は $y = mx$ とかける

交点を求めると

$$x^2 - 2x - 1 = mx$$

$$x^2 - (m + 2)x - 1 = 0$$

上記の方程式の解を $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ とすると

解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = m + 2, \alpha\beta = -1 \text{ より}$$

$$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (m + 2)^2 + 4$$

求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} (mx) - (x^2 - 2x - 1) dx = - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6}\{(m + 2)^2 + 4\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

したがって、 S の最小値は $m = -2$ のとき、 $\frac{4}{3}$ をとる

まとめると

最小値 $\frac{4}{3}$ 直線の方程式は $y = -2x$

(演習 1) p159 6

[解]

y 軸に平行な直線 $x = 1$ だとすると、囲まれる部分ができないので不適

よって直線の傾きを m をすると、 $(1, 2)$ を通る直線は $y = m(x - 1) + 2$ とかける

交点を求めると

$$x^2 = m(x - 1) + 2$$

$$x^2 - mx + m - 2 = 0$$

上記の方程式の解を $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ とすると

解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = m, \alpha\beta = m - 2 \text{ より}$$

$$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = m^2 - 4(m - 2) = (m - 2)^2 + 4$$

求める面積 S は

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \{m(x - 1) + 2\} - x^2 dx = - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx$$

$$= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6}\{(m - 2)^2 + 4\}^{\frac{3}{2}}$$

したがって、 S の最小値は $m = 2$ のとき、 $\frac{4}{3}$ をとる

まとめると

最小値 $\frac{4}{3}$ 直線の方程式は $y = 2x$

(補充 1)

放物線 $y = x^2 - 6$ と $(1, -1)$ を通る直線で囲まれた面積 S の最小値とそのときの直線の方程式を求めよ。

[解]

y 軸に平行な直線 $x = 1$ だとすると、囲まれる部分ができないので不適

よって直線の傾きを m をすると、 $(1, -1)$ を通る直線は $y = m(x - 1) - 1$ とかける

交点を求めると

$$x^2 - 6 = m(x - 1) - 1$$

$$x^2 - mx + m - 5 = 0$$

上記の方程式の解を $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ とすると

解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = m, \alpha\beta = m - 4 \text{ より}$$

$$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = m^2 - 4(m - 5) = (m - 2)^2 + 16$$

求める面積 S は

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \{m(x - 1) - 1\} - (x^2 - 6) dx = - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx$$

$$= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6}\{(m - 2)^2 + 16\}^{\frac{3}{2}}$$

したがって、 S の最小値は $m = 2$ のとき、 $\frac{32}{3}$ をとる

まとめると

最小値 $\frac{32}{3}$ 直線の方程式は $y = 2x - 3$

(例題 2)

放物線 $y = x^2 + x - 2$ と x 軸で囲まれた部分の面積を、 $(1, 0)$ を通る直線で 2 等分する。このとき直線の方程式を求めよ。

[解]

y 軸に平行な直線 $x = 1$ だとすると、領域を 2 つに分割できないので不適

よって直線の傾きを m とすると、 $(1, 0)$ を通る直線は $y = m(x - 1)$ とかける

$y = x^2 + x - 2$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S_1 は

$$S_1 = \int_{-2}^1 -(x^2 + x - 2) dx = \frac{1}{6} \{1 - (-2)\}^3 = \frac{9}{2}$$

直線と放物線で囲まれる面積 S_2 とすると

2 つの交点は $x = 1, m - 2$ より

$$S_2 = \int_{m-2}^1 \{m(x - 2)\} - (x^2 + x - 2) dx = \frac{1}{6} \{1 - (m - 2)\}^3 = \frac{1}{6} (3 - m)^3$$

$S_1 = 2S_2$ より

$$\frac{9}{2} = 2 \cdot \frac{1}{6} (3 - m)^3$$

$$(3 - m)^3 = \frac{27}{2}$$

$$3 - m = \sqrt[3]{\frac{27}{2}}$$

$$m = 3 - \sqrt[3]{\frac{27}{2}}$$

したがって、求める直線の方程式は

$$y = \left(3 - \sqrt[3]{\frac{27}{2}}\right)(x - 2)$$

(演習 2)

放物線 $y = x^2 - x$ と x 軸で囲まれた部分の面積を、原点を通る直線で 2 等分する。このとき直線の方程式を求めよ。

[解]

y 軸に平行な直線 $x = 0$ だとすると、領域を 2 つに分割できないので不適

よって直線の傾きを m とすると、原点を通る直線は $y = mx$ とかける

$y = x^2 - x$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S_1 は

$$S_1 = \int_0^1 -(x^2 - x) dx = \frac{1}{6} (1 - 0)^3 = \frac{1}{6}$$

直線と放物線で囲まれる面積 S_2 とすると

2 つの交点は $x = 0, m + 1$ より

$$S_2 = \int_0^{m+1} mx - (x^2 - x) dx = \frac{1}{6} \{(m + 1) - 0\}^3 = \frac{1}{6} (m + 1)^3$$

$S_1 = 2S_2$ より

$$\frac{1}{6} = 2 \cdot \frac{1}{6} (m + 1)^3$$

$$(m + 1)^3 = 2$$

$$m + 1 = \sqrt[3]{2}$$

$$m = \sqrt[3]{2} - 1$$

したがって、求める直線の方程式は

$$y = (\sqrt[3]{2} - 1)x$$

(補充 2)

放物線 $y = x(5 - x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積が、放物線 $y = ax^2$ によって 2 等分されるとき、定数 a の値を求めよ。

[解]

$y = x(5 - x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S_1 は

$$S_1 = \int_0^5 x(5 - x) dx = \frac{1}{6}(5 - 0)^3 = \frac{125}{6}$$

2 つの放物線で囲まれる面積 S_2 とすると

2 つの交点は $x = 0, \frac{5}{a+1}$ より

$$S_2 = \int_0^{\frac{5}{a+1}} \{x(5 - x)\} - ax^2 dx = \frac{a+1}{6} \left(\frac{5}{a+1} - 0 \right)^3 = \frac{125}{6(a+1)^2}$$

$S_1 = 2S_2$ より

$$\frac{125}{6} = 2 \cdot \frac{1}{6} \frac{125}{(a+1)^2}$$

$$(a+1)^2 = 2$$

$$a+1 = \pm\sqrt{2}$$

$$a = \pm\sqrt{2} - 1$$

ここで

$$0 < \frac{5}{a+1} < 5 \text{ より } 0 < a$$

この範囲を考慮すると

求める答えは

$$\mathbf{a = \sqrt{2} - 1}$$