入試問題集

<要項>

　これは2学期の入試問題演習における補足問題である。

指定した問題について通常の入試問題演習と同様毎回予習してもらう。

大学名を見ればわかると思うが、難関国公立の問題を持ってきている。

しかし、絶対解けない問題は当然のごとく持ってきていない。時間かければ解けるもの、解説を聞けばきちんと理解できるものしか持ってきていない。現在の力でどこまで自分が解けるか見るためのものなので、出来るところまで挑戦してみて欲しい。(絶対予習で出来なきゃいけない訳でない)

つまり、2回目解くときにきちんと解ければいいのである。

<方式>

1. 指定された問題を配布する用紙に予習する

2. 授業で解説され、正解　→ その解答をその日に提出

　　　　　　　　　　不正解 → 次回解き直しを提出

<補足>

指定しなかった問題については、各自で解くか、解かないかは自由である。

解いて解答が欲しい人は渡します。

<図形と方程式>

[1] a を正の実数とする。2 つの関数

$$y=\frac{1}{3}ax^2-2a^2x+\frac{7}{3}a^3\ ,\ y=-\frac{2}{3}ax^2+2a^2x-\frac{2}{3}a^3$$

のグラフは、2 点 A , B で交わる。但し、A の x 座標は B の x 座標より小さいとする。また、2 点 A , B を結ぶ線分の垂直二等分線を l とする。

(1) 2 点 A , B の座標を a を用いて表せ。

(2) 直線 l の方程式を a を用いて表せ。

(3) 原点と直線 l の距離 d を a を用いて表せ。また、$a>0$ の範囲で d を最大にする a の値を求めよ。

[2017 筑波大]

[2] 座標平面上の点 $P(x\,,y)$ が $4x+y\leq 9\,,x+2y\geq 4\,,2x-3y\geq -6$ の範囲を動くとき、$2x+y\,,x^2+y^2$ のそれぞれの最大値と最小値を求めよ。

[2010 京都大]

[3] 実数 t に対して 2 点 $P(t\,, t^2)\,, Q(t+1\,, (t+1)^2)$ を考える。

t が $-1 \leq t \leq 0$ の範囲を動くとき、線分 PQ が通過してできる図形を図示し、その面積を求めよ。

[2014 名古屋大]

[4] 座標平面上の点$(x\,, y)$ が次の方程式を満たす。

$$2x^2 + 4xy + 3y^2 + 4x + 5y - 4 = 0$$

このとき、x のとりうる最大の値を求めよ。

[2012 東京大]

<指数・対数関数>

[1](1)　$3^x = a, 12^y = a, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$ を満たす実数 x, y が存在するような a の値の範囲を求めなさい。

(2) 正の実数 b, c, z が

$$\left(\log_2 \frac{z}{b}\right)\left(\log_2 \frac{z}{c}\right) + 1 = 0$$

を満たすとき、$\frac{c}{b}$ の取りうる値の範囲を求めなさい。

[2009　首都大]

[2](1) 実数 x に関する連立不等式

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ 2 \cdot 3^x + a \cdot 3^{-x} \leq 1 \end{cases}$$

が解をもつような実数 a の範囲を求めよ。

(2)　$x \geq -1$ を満たす全ての実数 x に対して不等式

$$3^x + a \cdot 3^{-x} \geq a$$

が成り立つような実数 a の範囲を求めよ。

[2011　東北大]

[3] 実数 a, b は、$a \geq 1, b \geq 1, a + b = 9$ を満たす。

⑴ $\log_3 a + \log_3 b$ の最大値と最小値を求めよ。

⑵ $\log_2 a + \log_4 b$ の最大値と最小値を求めよ。

[2017 一橋大]

<三角関数>

[1](1) 等式$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ を示せ。

(2) $2\cos 80^\circ$ は 3 次方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ の解であることを示せ。

(3) $x^3 - 3x + 1 = (x - 2\cos 80^\circ)(x - 2\cos\alpha)(x - 2\cos\beta)$ となる角 α, β を求めよ。但し、$0^\circ < \alpha < \beta < 180^\circ$ とする。

[2009 筑波大]

[2] $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ で定義された関数

$$f(\theta) = 4\cos 2\theta \sin\theta + 3\sqrt{2}\cos 2\theta - 4\sin\theta$$

を考える。

(1) $x = \sin\theta$ とおく。$f(\theta)$ を x で表せ。

(2) $f(\theta)$ の最大値と最小値、およびそのときの θ の値を求めよ。

[2012 北海道大]

[3] 2 つの関数を

$$t = \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$$

$$y = -4\cos 3\theta + \cos 2\theta - \sqrt{3}\sin 2\theta + 2\cos\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta$$

とする。

⑴ $\cos 3\theta$ を t の関数で表せ。

⑵ y を t の関数で表せ。

⑶ $0° \leq \theta \leq 180°$ のとき、y の最大値、最小値とそのときの θ の値を求めよ。

[2003 東北大]

＜ベクトル＞

[1] 座標平面における次の 3 つの直線 $l\,,m\,,n$ を考える:

l は点 $A(1\,,0\,,-2)$ を通り、ベクトル $\vec{u}=(2\,,1\,,-1)$ に平行な直線である

m は点 $B(1\,,2\,,-3)$ を通り、ベクトル $\vec{v}=(1\,,-1\,,1)$ に平行な直線である

n は点 $B(1\,,-1\,,0)$ を通り、ベクトル $\vec{w}=(1\,,2\,,1)$ に平行な直線である

P を l 上の点として、P から $m\,,n$ へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q , R とする。このとき、PQ^2+PR^2 を最小にするような P と、そのときの PQ^2+PR^2 を求めよ。

[2014 京都大]

[2] 正四面体 OABC の 1 辺の長さを 1 とする。辺 OA を 2:1 に内分する点を P、辺 OB を 1:2 に内分する店を Q とし、$0<t<1$ を満たす t に対して、辺 OC を $t{:}\,1-t$ に内分する点を R とする。

⑴ PQ の長さを求めよ。

⑵ △PQR の面積が最小となるときの t の値を求めよ。

[2008 一橋大]

[3] 1 辺の長さが 1 である正四面体 OABC を考える。辺 OA の中点を P、辺 OB を 2:1 に内分する点を Q、辺 OC を 1:3 に内分する点を R とする。以下の問いに答えよ。

⑴ 線分 PQ の長さと線分 PR の長さを求めよ。

⑵ $\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PR}$ の内積 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}$ を求めよ。

⑶ 三角形 PQR の面積を求めよ。

[2015 九州大]

[4] 一辺の長さが 1 の正四面体 OABC において、$\overrightarrow{OA}=\vec{a}\,,\overrightarrow{OB}=\vec{b}\,,\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく。辺 OB を 2:1 に内分する点を P とし、線分 CP を $t\!:1-t$ に内分する点を Q とする $(0<t<1)$。次の問いに答えよ。

⑴ $\overrightarrow{OQ}$ を $t\,,\vec{b}\,,\vec{c}$ を用いて表せ。

⑵ ベクトルの大きさ $\left|\overrightarrow{OQ}\right|$ と内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}$ を t を用いて表せ。

⑶ 三角形 OAQ の面積 $S(t)$ とする。$S(t)$ を求めよ。

⑷ 面積 $S(t)$ を最小にする t の値 t_0 と、最小の面積 $S(t_0)$ を求めよ。

[2019 埼玉大]

[5] 四面体 OABC において、$OA=OB=OC=BC=1\,,AB=AC=x$ とする。頂点 O から平面 ABC に垂線を下ろし、平面 ABC との交点を H とする。頂点 A から平面 OBC に垂線を下ろし、平面 OBC との交点を H'とする。

⑴ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}\,,\overrightarrow{OB}=\vec{b}\,,\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ として、$\overrightarrow{OH}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}\,,\overrightarrow{OH'}=s\vec{b}+t\vec{c}$ と表す。このとき、$p\,,q\,,r$ および $s\,,t$ を x の式で表せ。

⑵ 四面体 OABC の体積 V を x の式で表せ。また、x が変化するときの V の最大値を求めよ。

[2015 東工大]

[6] 四面体 OABC があり、$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。三角形 ABC の重心を G とする。点 D , E , P を $\overrightarrow{OD}=2\vec{b}$, $\overrightarrow{OE}=3\vec{c}$, $\overrightarrow{OP}=6\overrightarrow{OG}$ をみたす点として、平面 ADE と直線 OP の交点を Q とする。次の問いに答えよ。

⑴ $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

⑵ 三角形 ADE の面積を S_1 、三角形 QDE の面積を S_2 とするとき、$\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

⑶ 四面体 OADE の体積を V_1 、四面体 PQDE の体積を V_2 とするとき、$\frac{V_2}{V_1}$ を求めよ。

[2016 横浜国立大]

<数列>

[1]$a_n=\frac{1}{n(n+1)}$を第n項とする数列を次のように奇数個ずつの群に分ける。

$$\underbrace{\{a_1\}}_{\text{第}1\text{群}},\underbrace{\{a_2,a_3,a_4\}}_{\text{第}2\text{群}},\underbrace{\{a_5,a_6,a_7,a_8,a_9\}}_{\text{第}3\text{群}},\cdots$$

kを自然数として、次の問いに答えよ。

(1) 第k群の最初の項を求めよ。

(2) 第k群に含まれる全ての項の和S_kを求めよ。

(3) $(k^2+1)S_k\leq\frac{1}{100}$を満たす最小の自然数$k$を求めよ。

[2010 北海道大]

[2] 数列$\{a_n\}$を

$$a_1=\frac{1}{3},\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1\ \ (n=1,2,3,\cdots)$$

で定め、数列$\{b_n\}$を

$$b_1=a_1a_2,b_{n+1}-b_n=a_{n+1}a_{n+2}\ \ (n=1,2,3,\cdots)$$

で定める。

(1) 一般項a_nをnを用いて表せ。

(2) 一般項b_nをnを用いて表せ。 [2005 大阪大]

[3] 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は以下の条件をみたす。

(ⅰ) a_n $(n=1,2,3,\cdots)$ は 0 , 1 , 2 のいずれかである。

(ⅱ) b_n は

$b_1=1$, $3b_{n+1}=5a_n+b_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ をみたす整数である。

次の問いに答えよ

⑴ b_2 , b_3 , b_4 , b_5 を求めよ。

⑵ $\sum_{k=1}^{n} a_k$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を求めよ。

[2018 横浜国立大]

[4] 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1=5\,,\,{a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2=\frac{2}{3}a_na_{n+1}\ (n=1,2,3,\cdots)$$

をみたすとする。次の問いに答えよ。

⑴ a_2 , a_3 を求めよ。

⑵ a_{n+2} を a_n , a_{n+1} を用いて表せ。

⑶ 一般項 a_n を求めよ。

[2016 横浜国立大]

[5] 自然数 k に対して、分母が $2k+1$、分子が k 以下の自然数の平方からなる分数を考える。このような分数を、分母の小さい順に、分母が同じ場合には分子の大きい順に並べてできる数列を作り、下のように群を分ける。

$$\frac{1}{3}\,\Big|\,\frac{4}{5},\frac{1}{5}\,\Big|\,\frac{9}{7},\frac{4}{7},\frac{1}{7}\,\Big|\,\frac{16}{9},\frac{9}{9},\frac{4}{9},\frac{1}{9}\,\Big|\,\frac{25}{11},\frac{16}{11},\frac{9}{11},\frac{4}{11},\frac{1}{11}\,\Big|\,\frac{36}{13},\frac{25}{13},\cdots\Big|$$

第 1 群　第 2 群　第 3 群　　第 4 群　　　　第 5 群

このとき、次の問いに答えよ。

(1) 第 n 群の最初の項を n を用いて表せ。

(2) $\frac{36}{23}$ が第何項になるかを求めよ。

(3) 第 n 群の項の総和を S_n とする。このとき、$\sum_{k=1}^{n} S_n$ の値 S を n を用いて表せ。

[2018 静岡大]

[6] $\{a_n\}$ を数列とし、$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおく。C を定数とする。数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{S_n\}$ が関係式

$$a_1 = 2,\ a_n = n^2 - 2S_n + C\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たしているとする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) C の値を求めよ。

(2) a_{n+1} を a_n と n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = a_n - n + 1\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める。このとき、数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) 数列 $\{S_n\}$ の一般項を求めよ。

[2017 静岡大]

[7] 次の問いに答えよ。

⑴ n を自然数とするとき、ある自然数 a と b を用いて、

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n = a+b\sqrt{3}\,,\left(2-\sqrt{3}\right)^n = a-b\sqrt{3}$$

とかけることを、数学的帰納法を使って示せ。

⑵ ⑴の a と b について、$a^2-3b^2=1$ が成り立つことを示せ。

⑶ n を自然数とするとき、ある自然数 m を用いて、

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n = \sqrt{m}+\sqrt{m-1}\,,\left(2-\sqrt{3}\right)^n = \sqrt{m}-\sqrt{m-1}$$

とかけることを示せ。

[2013 静岡大]

[8] 数列 $\{a_n\}$ が

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1}-a_n = a_n(5-a_{n+1})\ (n=1\,,2\,,3\,,\cdots) \end{cases}$$

を満たしているとき、以下の問いに答えよ。

⑴ n に関する数学的帰納法で、$a_n>0$ であることを証明せよ。

⑵ $b_n=\frac{1}{a_n}$ とおくとき、b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

⑶ a_n を求めよ。

[2014 岡山大]

<微分・積分>

[1] $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2$ とおく。ただし $a>0$ とする。

⑴ $f(-1)\leq f(3)$ となる a の範囲を求めよ。

⑵ $f(x)$ の極小値が $f(-1)$ 以下となる a の範囲を求めよ。

⑶ $-1\leq x\leq 3$ における $f(x)$ の最小値を a を用いて表せ。

[2010 筑波大]

[2] 次の問いに答えよ

⑴ 2 次関数 $f(x)$ が

$$f(x)=6x^2-\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)^2$$

をみたすとき、$f(x)$ を求めよ。

⑵ 2 次関数 $g(x)$ が

$$g(x)=4x^2-\left(\int_0^1 |g(t)|\,dt\right)^2$$

をみたすとき、$g(x)$ を求めよ。

[2015 横浜国立大]

[3] t を実数とする。$y = x^3 - x$ のグラフ C へ点 P$(1\,,t)$ から接線を引く。

⑴ 接線がちょうど 1 本だけ引けるような t の範囲を求めよ。

⑵ t が⑴で求めた範囲を動くとき、P$(1\,,t)$ から C へ引いた接線と C で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。$S(t)$ の取りうる値の範囲を求めよ。

[2014 京都大]

[4] 2 つの放物線 $C\colon y = \frac{1}{2}x^2\,, D\colon y = -(x-a)^2$ を考える。

a は正の実数である。

⑴ C 上の点 $P\left(t\,,\frac{1}{2}t^2\right)$ における C の接線 l を求めよ。

⑵ l がさらに D とも接するとき、l を C と D の共通接線という。

2 本(C と D の)の共通接線 $l_1\,, l_2$ を求めよ。

⑶ 共通接線 $l_1\,, l_2$ と C で囲まれた図形の面積を求めよ。

[2007 名古屋大]

[5] 以下の問いに答えよ。

⑴ t を実数の定数とする。実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を

$$f(x) = -2x^2 + 8tx - 12x + t^3 - 17t^2 + 39t - 18$$

と定める。このとき、関数 $f(x)$ の最大値を t を用いて表せ。

⑵ ⑴の「関数 $f(x)$ の最大値」を $g(t)$ とする。

t が $t \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲を動くとき、$g(t)$ の最小値を求めよ。

[2014 東京大]

[6] k を実数とする。3 次関数 $y = x^3 - kx^2 + kx + 1$ が極大値と極小値をもち、極大値から極小値を引いた値が $4|k|^3$ になるとする。

このとき、k の値を求めよ。

[2019 九州大]

[7] $0 < t < 1$ として、放物線 C : $y = x^2$ 上の点 $(t\,, t^2)$ における接線を l とする。C と l と x 軸で囲まれる部分の面積を S_1 とし、C と l と直線 $x = 1$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする。$S_1 + S_2$ の最小値を求めよ。

[2014 一橋大]

[8] t を正の実数とする。$f(x) = x^3 + 3x^2 - 3(t^2 - 1)x + 2t^3 - 3t^2 + 1$

とおく。以下の問いに答えよ。

⑴ $2t^3 - 3t^2 + 1$ を因数分解せよ。

⑵ $f(x)$ が極小値 0 をもつことを示せ。

⑶ $-1 \leq x \leq 2$ における $f(x)$ の最小値 m と最大値 M を t の式で表せ。

[2017 神戸大]