三角関数補足問題

①以下の関数の最大値・最小値を求めよ

⑴ $y=\sin x+2\cos x\ \ (0\leq x\leq \pi)$

⑵ $y=\sin x\cos x-\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+3\ \ (0\leq x<2\pi)$

⑶ $y=3\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x\ \ \left(0\leq x\leq \frac{\pi}{2}\right)$

[解]

⑴三角関数の合成を用いる

$y=\sin x+2\cos x=\sqrt{5}\sin(x+\alpha)$
$\left(\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}\,,\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$\sin\alpha>0\,,\cos\alpha>0$ より $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ (第 1 象限)となる

よって、定義域は $\alpha\leq x+\alpha\leq \pi+\alpha$

$\pi<\pi+\alpha<\frac{3}{2}\pi$ (第 3 象限)となる

したがって

最大値は $\sin(x+\alpha)=1$ のとき

最小値は $\sin(x+\alpha)=\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$ のとき

まとめると

最大値 $\boldsymbol{\sqrt{5}}$ $\left(\boldsymbol{x+\alpha=\frac{\pi}{2}}\text{ **つまり** }\boldsymbol{\sin x=\frac{1}{\sqrt{5}}\,,\cos x=\frac{2}{\sqrt{5}}}\text{ **となる** }\boldsymbol{x}\text{ **のとき**}\right)$

最小値 $\boldsymbol{-2}$ $\left(\boldsymbol{x+\alpha=\pi+\alpha}\text{ **つまり** }\boldsymbol{x=\pi}\text{ **のとき**}\right)$

⑵ $t=\sin x+\cos x$ とおく

$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ より

$-\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}$ …①

$t^2=(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=1+2\sin x\cos x$

よって

$\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}$

$y=\sin x\cos x-\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+3=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}-\sqrt{2}t+3=\frac{1}{2}t^2-\sqrt{2}t+\frac{5}{2}$

$=\frac{1}{2}(t-\sqrt{2})^2+\frac{3}{2}$

①より

最大値 $\frac{11}{2}$ $\left(t=-\sqrt{2}\right.$ つまり $\left.x=\frac{5}{4}\pi\right.$ のとき$)$

最小値 $\frac{3}{2}$ $\left(t=\sqrt{2}\right.$ つまり $\left.x=\frac{\pi}{4}\right.$ のとき$)$

⑶ $y=3\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x$

$=3\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+\sin 2x+\frac{1+\cos 2x}{2}=\sin 2x-\cos 2x+2=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+2$

$0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ より $-\frac{\pi}{4}\leq 2x-\frac{\pi}{4}\leq\frac{3}{4}\pi$

よって

最大値 $2+\sqrt{2}$ $\left(2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\right.$ つまり $\left.x=\frac{3}{8}\pi\right.$ のとき$)$

最小値 1 $\left(2x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}\right.$ つまり $x=0$ のとき$)$