数列

①数列とは

数列 … ある規則で並んだ数字の列のことである

第 n 番目の項を＿＿＿＿＿＿といい、＿＿＿＿とかく

特に、第 1 番目の項(つまり＿＿＿)を＿＿＿＿＿、数列の最後の項を＿＿＿＿＿という

→ 様々な規則から一般項を求め、それを活用していくのが数列の分野

(数列の例)

$1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots$ → $a_n =$＿＿＿＿＿＿(＿＿＿＿＿＿)

$1, 2, 4, 8, 16, 32, \cdots$ → $a_n =$＿＿＿＿＿＿(＿＿＿＿＿＿)

$1, 2, 5, 10, 17, 26, \cdots$ → $a_n =$＿＿＿＿＿＿(＿＿＿＿＿＿)

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots$ → $a_n =$＿＿＿＿＿＿＿＿(＿＿＿＿＿＿＿＿)

②等差数列

⑴基本

等差数列 … 数列の項に一定の数(＿＿＿＿)を足したり、引いたりする規則で出来ている数列

<u>公式</u>

初項 a, 公差 d とすると

一般項 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(例題 1)

(ⅰ) $1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots$

初項______ , 公差______ より $a_n =$

(ⅱ) $19, 15, 11, 7, 3, \cdots$

初項______ , 公差______ より $a_n =$

(例題 2)

(ⅰ)初項 2 , 公差 3 の一般項と第 10 項を求めよ

(ⅱ)初項 2 , 第 5 項 26 である等差数列の一般項を求めよ

(ⅲ)第 4 項 2 , 第 15 項 24 である等差数列の一般項と 84 は第何項であるか求めよ

(演習)

(Ⅰ)初項 4，公差 -6 の一般項と第 20 項を求めよ

(Ⅱ)初項 3，第 8 項 38 である等差数列の一般項を求めよ

(Ⅲ)第 5 項 8，第 10 項 -7 である等差数列の一般項と -25 は第何項であるか求めよ

[補充](Ⅳ)初項 20，公差 -6，末項 -22 である等差数列の項数を求めよ

⑵等差中項

等差数列 a , b , cに関して

$\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}}{\mathbf{2}}$ とかける　このbを**等差中項**と呼ぶ

(例)

$a=2$, $b=4$, $c=6$ $\left(\text{公差 2 の等差数列}\right)$とすると

$\frac{a+c}{2}=\frac{2+6}{2}=4(=b)$

(演習)

(Ⅰ) x , $2x$, 9 がこの順番に等差数列をなすとき、x の値を求めよ

(Ⅱ) a^2 , 3 , a がこの順番に等差数列をなす時、a の値を求めよ

⑶等差数列の和

<u>公式</u>

初項から第 n 項までの和を S_n ，初項 a_1 ，第 n 項(末項) a_n ，公差 d とすると

$$\boldsymbol{S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n) = \frac{1}{2}n\{2a_1 + (n-1)d\}}$$

(大部分は左を使うが、稀に右も使うこともある)

(ポイント)

等差数列の和の公式は(________) , (________) , (________)が分かれば良い

(証明)

一般項　$a_n = a_1 + (n-1)d$ とする

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + \ \cdots\ + \{a_1 + (n-2)d\} + \{a_1 + (n-1)d\}$$

$$\underline{+)\,S_n = \{a_1 + (n-1)d\} + \{a_1 + (n-2)d\} + \ \cdots + (a_1 + d) + a_1} \qquad \textbf{←逆順}$$

$$2S_n = \{2a_1 + (n-1)d\} + \{2a_1 + (n-1)d\} + \cdots + \{2a_1 + (n-1)d\} + \{2a_1 + (n-d)\}$$

$$2S_n = n \times \{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2a_1 + (n-1)d\} = \frac{1}{2}n[a_1 + \{a_1 + (n-1)d\}] = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$$

(例題)

(ⅰ)初項 2，末項 47，項数 16 の等差数列の和 S_{16}を求めよ

(ⅱ)初項 3，公差 -7 の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ

(ⅲ)初項から第 5 項までの和が 35、初項から第 10 項までの和が 145 である等差数列の第 7 項と初項から第 n 項までの和を求めよ

(演習)

(Ⅰ)初項 6，末項 124，項数 12 の等差数列の和 S_{12} を求めよ

(Ⅱ)初項 4，公差 5 の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ

(Ⅲ)初項から第 5 項までの和が 40、初項から第 15 項までの和が 270 である等差数列の第 6 項と初項から第 n 項までの和を求めよ

[応用](Ⅳ) 1 から 100 までの自然数のうち次の値を求めよ

⑴3 で割ると 2 余る数の和

⑵5 で割り切れない数の和

[応用](Ⅴ)初項 -200、公差 6 の等差数列の和 S_n の最小値とそのときの n を求めよ

③等比数列

⑴基本

等比数列 … 数列の項が一定の数(_______)でかけたり、割ったりする規則で出来て

いる数列

<u>公式</u>

初項 a，公比 r とすると

一般項　____________

(例題 1)

(ⅰ)$1, 2, 4, 8, 16, 32, \cdots$

初項______，公比______ より　$a_n =$

(ⅱ)$162, -51, 17, -\frac{17}{3}, \cdots$

初項______，公比______ 　より　$a_n =$

(例題 2)

(ⅰ)初項 4，公比 2 の一般項と第 10 項を求めよ

(ⅱ)初項 2，第 4 項-54である等比数列の一般項を求めよ

(ⅲ)第 3 項$\frac{3}{8}$，第 6 項$\frac{3}{64}$である等比数列の一般項と$\frac{3}{1024}$は第何項であるか求めよ

(演習)

(Ⅰ)初項 5，公比 3 の一般項と第 8 項を求めよ

(Ⅱ)初項 3，第 5 項 768 である等比数列の一般項を求めよ

(Ⅲ)第 4 項 4 ，第 7 項 $\frac{1}{2}$ である等比数列の一般項と $\frac{1}{256}$ は第何項であるか求めよ

⑵等比中項

等比数列 a , b , cに関して

$b^2 = ac$ とかける　この b を等比中項と呼ぶ

（例）

$a = 2$, $b = 4$, $c = 8$ $\left(\text{公比 2 の等比数列}\right)$とすると

$ac = 2 \cdot 8 = 16 = 4^2 (= b^2)$

（演習）

(Ⅰ)3 つの数 a , 8 , a^2 がこの順に等比数列をなすとき、 a の値を求めよ

(Ⅱ)3 つの数 a , b , 4 がこの順に等比数列をなし、3 つの数の和が 19 であるとき、

a , b の値を求めよ

⑶等比数列の和

公式

初項から第 n 項までの和を S_n ，初項 a ，公比 r とすると

$$\boldsymbol{S_n = na} \ \ (\boldsymbol{r = 1}\text{のとき})$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}} \ \left(\boldsymbol{r \neq 1}\text{のとき}\right)$$

（$r < 1$ のときは左、$r > 1$ のときは右を基本的には使う）

（証明）

一般項　$a_n = ar^{n-1}$ とする

(ⅰ)$r = 1$ のとき

$a_n = a$より$S_n = a + a + a + \ \cdots \ + a + a = na$

(ⅱ)$r \neq 1$ のとき

$$\begin{array}{rl} S_n = & a + ar + ar^2 + \ \cdots \ + ar^{n-2} + ar^{n-1} \\ \underline{-)\ rS_n =} & \underline{\qquad ar + ar^2 + ar^3 + \ \cdots \ + ar^{n-1} + ar^n} \end{array}$$

$(1-r)S_n = a - ar^n$

$(1-r)S_n = a(1-r^n)$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \times \frac{(-1)}{(-1)} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

(例題)

(ⅰ)初項 3，公比-2 の等比数列の初項から第 10 項までの和を求めよ

(ⅱ)初項 1，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列の初項から第 n 項までの和を求めよ

(ⅲ)初項から第 5 項までの和が 1，初項から第 10 項までの和が 33 である等比数列の初項から第 n 項までの和を求めよ

(演習)

(Ⅰ)初項 2 ,公比 4 の等比数列の初項から第 6 項までの和を求めよ

(Ⅱ)初項 3 , 公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列の初項から第 n 項までの和を求めよ

(Ⅲ)初項から第 3 項までの和が 28 , 初項から第 6 項までの和が -728 である等比数列の初項から第 n 項までの和を求めよ

[応用](IV)初項3，公比2の等比数列をa_nとするとき、以下の和を求めよ

⑴ $a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + \cdots + a_n{}^2$

⑵ $a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + a_3 \cdot a_4 + \cdots + a_{n-1} \cdot a_n + a_n \cdot a_{n+1}$

(等差・等比数列まとめ)

初項、公差、公比を求めること常に考える

→ 和の公式に代入 問題文からわかる情報を整理する

④$\sum$計算と様々な数列

⑴$\sum$計算

$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$

（Σは数列の和を表す記号、添字は和の範囲を示す）

公式

①$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{c} = c + c + c + \cdots + c + c =$______ ［$c$ は k に依存しない数(定数)］

②$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{k} = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n =$______________

③$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{k^2} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 =$______________

④$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{k^3} = 1^3 + 2^3 + 3^2 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 =$______________$=$____________

⑤$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r^{k-1}} = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1} =$____________$(r \neq 1)$

性質

⑴$\sum_{k=1}^{n} a_k + b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

⑵$\sum_{k=1}^{n} pa_k = p\sum_{k=1}^{n} a_k$ ［pはkに依存しない数(定数)］

(証明)

①についてはそのまま(自明)

②については等差数列の和の公式に初項 $a = 1$，公差 $d = 1$を代入

⑤については等比数列の和の公式に初項 $a = 1$を代入

③の証明

恒等式$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$を利用

$k=1$のと　　$2^3-1^3=3\cdot 1^2+3\cdot 1+1$

$k=2$のとき　　$3^3-2^3=3\cdot 2^2+3\cdot 2+1$

$k=3$のとき　　$4^3-3^3=3\cdot 3^2+3\cdot 3+1$

$\vdots$　　　　$\vdots$

$k=n$のとき　$\underline{+)\,(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1}$

$$(n+1)^3-1^3=3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+3(1+2+3+\cdots+n)+n$$

$$(n+1)^3-1=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+n$$

$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$を代入

$$(n+1)^3-1=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2=(n+1)^3-1-\frac{3}{2}n(n+1)-n$$

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{2}(n+1)\{2(n+1)^2-3n-2\}$$

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{2}(n+1)(2n^2+n)$$

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

④の証明

恒等式$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$を利用

$k = 1$ のとき　　$2^4 - 1^4 = 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1$

$k = 2$ のとき　　$3^4 - 2^4 = 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1$

$k = 3$ のとき　　$4^4 - 3^4 = 4 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 1$

$k = n$のとき　$\underline{+)(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1}$

$$(n+1)^4 - 1^4 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

$$+4(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n$$

$$(n+1)^4 - 1 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n$$

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$を代入

$$(n+1)^4 - 1 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 4 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + n$$

$$(n+1)^4 - 1 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n$$

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = (n+1)^4 - 1 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n$$

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = (n+1)\{(n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1\}$$

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = (n+1)(n^3 + n^2)$$

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^2(n+1)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

(例題)

(ⅰ) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$

(ⅱ) $5+9+13+\cdots+(4n+1)$

(ⅲ) $\sum_{k=1}^{n} 3^{k+1}$

(演習)

(Ⅰ) $\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)$

(Ⅱ) $2+5+8+11+\cdots+(3n-1)$

[応用]以下の和を求めよ(Ⅲは一般項も考えて和を求めよ)

(Ⅲ)$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5\ \cdots$

(Ⅳ)$\sum_{k=1}^{l}\left\{\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{j}i\right)\right\}$

⑵階差数列

階差数列 … 前後の項の差をとった数字の列が数列になっている数列

<u>公式</u>

項間の数列(階差数列)をb_n, 初項 aとすると一般項 a_nは

$\boldsymbol{a_n =}$ ______________$\boldsymbol{(n \geq 2)}$　←範囲が $k=1$ から$n-1$ までであることに注意(計算時)

(最後に $n=1$ でも成り立つこと確認すること)

(例題)以下の数列の一般項を求めよ

(ⅰ) $2, 6, 12, 20, 30, \cdots$

(ⅱ) $3, 4, 6, 10, 18, \cdots$

(演習)以下の数列の一般項を求めよ

(Ⅰ) $2, 7, 16, 29, 46, \cdots$

(Ⅱ) $1, 2, 5, 14, 41, \cdots$

[応用]以下の一般項を求めよ

(Ⅲ)3 , 5 , 8 , 14 , 25 , 43 , …

(数列まとめ)

最初に項間にどんな関係があるのか探す　→何の数列か見分けて公式に代入

⑶和から一般項

<u>公式</u>

$n \geq 2$ のとき a_n を一般項 , S_nを初項から第 n 項までの和とすると

$\boldsymbol{S_n - S_{n-1}} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) = \boldsymbol{a_n}$
$\boldsymbol{S_1 = a_1}$

($n = 1$ でも成立することを確認すること、一致しないケースが少なくない)

(例題)

(ⅰ)初項から第 n 項までの和 $S_n = n^2 - n + 1$ とするとき、一般項 a_nを求めよ

(演習)

(Ⅰ)初項から第 n 項までの和 $S_n = n^2 + n$ とするとき、一般項 a_nを求めよ

[補充](Ⅱ)初項から第 n 項までの和 $S_n = 2^{n+1} - 2$ とするとき、一般項 a_nを求めよ

[補充](Ⅲ)初項から第 n 項までの和 $S_n=\frac{1}{n}$ とするとき、一般項 a_n を求めよ

⑷部分分数分解と有理化

<u>ポイント</u>[(________)−(_________)を作る]

⑴分数積は部分分数分解すること

⑵$\sqrt{\ }$については有理化すること

<u>公式</u>　部分分数分解(分数積を分解すること)

$$\frac{1}{ax+b}-\frac{1}{ax+c}=\frac{(ax+c)-(ax+b)}{(ax+b)(ax+c)}=\frac{c-b}{(ax+b)(ax+c)}\quad\to\quad\boldsymbol{\frac{1}{(ax+b)(ax+c)}=\frac{1}{c-b}\left\{\frac{1}{ax+b}-\frac{1}{ax+c}\right\}}$$

(注意)

⑴ x の前の係数が一致していることを確認すること

→部分分数分解したときに分子に文字(今回は x)が残ってしまう

⑵部分分数分解が不安のときは通分して確かめればいい

(例題)

(ⅰ) $\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 15}+\cdots+\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$

(ⅱ) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}}$

(演習)

(Ⅰ) $\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{4\cdot 10}+\frac{1}{7\cdot 13}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+4)}$

(Ⅱ) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

[応用](Ⅲ) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

(まとめ)

⑴(文字式) − (文字式)にもっていくことで同じ数が符号違いで出てきて消せるようになる

⑵前と後ろで残る項の数は一致するので、前で何項残るかわかれば後ろで残る項はわかる

⑸等差×等比

(解法)

一般項 $a_n \times r^{n-1}$(rは公比)、その第 n 項までの和 S_n に対して____________を考える

[等比数列の和の公式の証明で使った解法]

(例題)

(ｉ)$1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-2}+n\cdot 2^{n-1}$を求めよ

(演習)

(Ⅰ)$1\cdot 1+4\cdot 2+7\cdot 2^2+\cdots+(3n-5)\cdot 2^{n-2}+(3n-2)\cdot 2^{n-1}$を求めよ

[補充]（Ⅱ）$1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\cdots+\frac{n-1}{3^{n-2}}+\frac{n}{3^n}$ を求めよ

（まとめ）

⑴一般項がどうなっているかまず考えること

⑵S_n-rS_nした後の計算でどこの部分までΣでまとめられるか考えること

[今回は最初の項からまとめられたかがまとめられない場合もあるので注意]

⑹群数列

群数列 … 数列に対して規則性をもって仕切りを入れてグループ分けしてできる数列

できた各グループを**群**という

(解法)

　解法は大きく分けて 2 つ。⑴基本的(典型的)な解法 ，⑵階差数列を用いた解法

⑵は使えない時があるので⑴のやり方をしっかりわかるようにすること

(例題)

(ⅰ)奇数列$1\,|\,3,5\,|\,7,9,11\,|\,13,15,17,19\,|\,21,\cdots$ のように第 n 群の個数が n 個の数を含むように分けるとき、以下の問題に答えよ

⑴第 n 群の最初の数を求めよ　　⑵第 n 群の最後の数を求めよ

⑶第 n 群に含まれる数の和を求めよ　　⑷301 は第何群の第何項目の数か求めよ

(演習)

(Ⅰ)$3 \mid 6, 9 \mid 12, 15, 18 \mid 21, 24, 27, 30 \mid 33, \cdots$ のように第 n 群の個数が n 個の数を含むように分けるとき、以下の問題に答えよ

(1)第 n 群に含まれる数の和を求めよ　　　(2)300 は第何群の第何項目の数か求めよ

[補充](Ⅱ)分数列 $\frac{1}{1}\left|\frac{2}{2},\frac{1}{2}\right|\frac{3}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\left|\frac{4}{4},\frac{3}{4},\frac{2}{4},\frac{1}{4}\right|\frac{5}{5}\cdots$ のように第 n 群に n 個の数を含むように分けるとき、以下の問題に答えよ

⑴第 n 群に含まれる数の和を求めよ

⑵初めから数えて、第 100 項目にある分数を求めよ

⑤漸化式

⑴基本

漸化式 … 各項間の関係性を数式化したもの

簡単に言うと a_{n+1} と a_n との関係から一般項も求める

公式

①$a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$ (d は定数)　（等差数列型）→ $\boldsymbol{a_n} =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿

②$a_1 = a$, $a_{n+1} = ra_n$ (r は定数)　（等比数列型）→ $\boldsymbol{a_n} =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿

③$a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + b_n$ (b_n は n の式)（階差数列型）→ $\boldsymbol{a_n} =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿

（$n = 1$ でも成立することを確認すること）

(例題)

(ⅰ) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 3$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$)

(ⅱ) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$)

（ⅲ）$a_1 = 5\,, a_{n+1} = a_n + 6n^2 \ (n = 1\,, 2\,, 3\,, \cdots)$

(演習)

（Ⅰ）$a_1 = 4\,, a_{n+1} = a_n - 3 \ (n = 1\,, 2\,, 3\,, \cdots)$

（Ⅱ）$a_1 = 4\,, a_{n+1} = 3a_n \ (n = 1\,, 2\,, 3\,, \cdots)$

（Ⅲ）$a_1 = 1\,, a_{n+1} = a_n + 3n \ (n = 1\,, 2\,, 3\,, \cdots)$

(様々な漸化式)

　これから少し応用的な漸化式に入っていくが、

漸化式を解く公式は上記の 3 つなのでその **3 つのいずれか形に持っていく**

　ある程度パターンとして決まっているので解法が暗記する方が良い

　置き換えが多くなるがいずれ置き換えを使わず計算できるとより良い

[置き換えたときに初項の値もしっかり出しておくこと]

⑵特性方程式型

　漸化式$a_{n+1} = pa_n + q$に対して

$x = px + q$(特性方程式)の解をαとすると上記の漸化式は

____________________と変形できる

(証明)

特性方程式の解をαとすると

$\alpha = p\alpha + q$ …⑴

$a_{n+1} = pa_n + q$ …⑵

⑴－⑵より

$$a_{n+1} - \alpha = pa_n + q - (p\alpha + q)$$
$$= p(a_n - \alpha)$$

(例題)

（ｉ）$a_1 = 3\,, a_{n+1} = 2a_n - 2$

(演習)

（Ⅰ）$a_1 = 5\,, a_{n+1} = 3a_n - 6$

（Ⅱ）$a_1 = 1\,, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 3$

⑶指数型

漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q^n$ の対して

両辺を q^{n+1} で割った $\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{a_n}{q^n} + \frac{1}{q}$ を考えて、$b_n = \frac{a_n}{q^n}$ とおく

(例題)

(ⅰ) $a_1 = 1\,, a_{n+1} = 2a_n + 3^n$

(演習)

(Ⅰ) $a_1 = 1\,, a_{n+1} = 3a_n + 2^n$

（Ⅱ）$a_1 = 3$, $a_{n+1} = 6a_n + 3^{n+1}$

⑷逆数型

漸化式 $a_{n+1} = \frac{ra_n}{pa_n+q}$ に対して

両辺の逆数をとった $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{q}{r} \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{p}{r}$ を考えて、$b_n = \frac{1}{a_n}$ とおく

(例題)

（ⅰ）$a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n+1}$

(演習)

（Ⅰ）$a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n+3}$

（Ⅱ）$a_1 = 2\,, a_{n+1} = \frac{2a_n}{3a_n+1}$

⑸和から漸化式

初項から第 n 項までの和 S_n に対して

$\boldsymbol{S_{n+1} - S_n} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \boldsymbol{a_{n+1}}$
$\boldsymbol{a_1 = S_1}$

(例題)

（ⅰ）$S_n = 2a_n + 3$に対して一般項を求めよ

(演習)

（Ⅰ）$S_n = 3 - 2a_n$に対して一般項を求めよ

[応用](Ⅱ) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2{a_n}^2$ $\left[\text{ヒント：両辺に} \log_2 \quad \text{の対数をとる}\right]$

[応用](Ⅲ) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + n$ $\left[\text{ヒント:} a_{n+2} - a_{n+1} \text{ を考える}\right]$

[応用](Ⅳ) $a_1 = 4$, $a_{n+1} = \frac{3a_n+2}{a_n+4}$ の一般項 a_n を求めよ $\left[\text{ヒント:} b_n = \frac{a_n+2}{a_n-1} \text{ とおく}\right]$

⑹隣接 3 項間漸化式

漸化式 $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$ に対して

特性方程式 $px^2+qx+r=0$ の 2 解を α, β とすると上記の漸化式は

$\boldsymbol{a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)}$

$\boldsymbol{a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)}$と変形できる

(証明)

$pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$

$a_{n+2}-(-\frac{q}{p}a_{n+1})+\frac{r}{p}a_n=0$ …(1) ($p\neq 0$ より)

特性方程式$px^2+qx+r=0$ の 2 解をα ,βより解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-\frac{q}{p}$,$\alpha\beta=\frac{r}{p}$ を(1)に代入すると

$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$
$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}-\beta a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$
$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta a_{n+1}-\alpha\beta a_n$
$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$

これのαとβを入れ替えると

$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$

(例題)

（ｉ）$a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$

（演習）

（Ⅰ）$a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 0$

（Ⅱ）$a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$

[応用]（Ⅲ）$a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

⑺連立漸化式[応用]

2 つの漸化式a_n , b_nを 2 つの式から求めるが、解法は 2 つあるので紹介する

1 つは思いつくと楽に解ける解法で、もう 1 つは計算が面倒だが全ての連立漸化式

を解ける解法

(例題)

(i) $a_1 = 1$, $b_1 = -1$, $a_{n+1} = 5a_n - 2b_n$ …① $b_{n+1} = a_n + 2b_n$ …②

(演習)

(Ⅰ)$a_1 = 1\,, b_1 = -2\,, a_{n+1} = -2a_n + 6b_n$ ⋯① $b_{n+1} = a_n - b_n$ ⋯②

[漸化式まとめ]

　様々なパターンを扱ってきたが、問題をみて、最初にすることが何かわかるところまでしっかり演習してほしい。特に後半ほど計算が複雑になってくるのでミスしないで解ける計算力も必要になってくる。

⑻確率漸化式[発展]

　ある試行が前後の試行の結果によって左右される(つまり独立でない)確率の問題に対して漸化式を応用して解いていく

(例題)

(ｉ)表が出る確率が $\frac{1}{3}$ である硬貨を投げて、表が出たら点数を 1 点増やし、裏が出たら点数はそのままとするゲームを行う。0 点の持ち点で始めて、硬貨を n 回投げたあと、点数が偶数である確率を p_n とするとき、p_{n+1} と p_n の漸化式をつくり、p_n を求めよ。

(演習)確率漸化式の問題は(3)から[2019年センター試験数ＩA]

数学Ｉ・数学A **第3問〜第5問は，いずれか2問を選択し，解答しなさい。**

第3問 (選択問題) (配点 20)

赤い袋には赤球2個と白球1個が入っており，白い袋には赤球1個と白球1個が入っている。

最初に，さいころ1個を投げて，3の倍数の目が出たら白い袋を選び，それ以外の目が出たら赤い袋を選び，選んだ袋から球を1個取り出して，球の色を確認してその袋に戻す。ここまでの操作を1回目の操作とする。2回目と3回目の操作では，直前に取り出した球の色と同じ色の袋から球を1個取り出して，球の色を確認してその袋に戻す。

(1) 1回目の操作で，赤い袋が選ばれ赤球が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり，白い袋が選ばれ赤球が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(2) 2回目の操作が白い袋で行われる確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

(数学Ｉ・数学A第3問は次ページに続く。)

(3)　1回目の操作で白球を取り出す確率をpで表すと，2回目の操作で白球が取り出される確率は$\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}p+\dfrac{1}{3}$と表される。

よって，2回目の操作で白球が取り出される確率は$\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シスセ}}}$である。

同様に考えると，3回目の操作で白球が取り出される確率は$\dfrac{\boxed{\text{ソタチ}}}{\boxed{\text{ツテト}}}$である。

(4)　2回目の操作で取り出した球が白球であったとき，その球を取り出した袋の色が白である条件付き確率は$\dfrac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$である。

また，3回目の操作で取り出した球が白球であったとき，はじめて白球が取り出されたのが3回目の操作である条件付き確率は$\dfrac{\boxed{\text{ノハ}}}{\boxed{\text{ヒフヘ}}}$である。

⑥数学的帰納法

⑴基本

数学的帰納法… 数式を帰納的な考え方を使って証明する方法

帰納… 様々な計算結果からある結論を推測して論理的に証明する方法

↔(演繹)… 一般論やルールから必然的な結論を導く方法

(解法)ある命題に対して以下のことを示す

(ⅰ) $n=1$ で成立すること

(ⅱ) $n=k$ が成り立つと仮定して $n=k+1$ でも成立すること

(ⅰ)で最初の数でも成り立つことを示し、(ⅱ)より $n=1$ で成り立てば $n=2$ でも成立して、$n=2$ でも成り立てば $n=3$ でも成立と繰り返すことで n の全ての値で成立することがわかる

(例題 1)等式の証明

(ⅰ)全ての自然数 n に対して $1^2+2^2+3^2+\ \cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ であることを示せ

(演習)

(ⅰ)全ての自然数 n に対して $1+3+5+\ \cdots+(2n-1)=n^2$ であることを示せ

(例題 2)不等式の証明

(ｉ) $n \geq 2$ の全ての自然数 n に対して $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1}$ $(n \geq 2)$を示せ

(演習)

(Ⅰ)全ての自然数 n に対して $3^n > n^2+n$ を示せ

(例題 3)命題の証明

(ｉ) $n \geq 2$ の自然数 n に対して、$4^n - 3n - 1$ が 9 の倍数であることを証明せよ

(演習)

(ｉ)全ての自然数 n に対して、$2^{2n-1} + 1$ が 3 の倍数であることを証明せよ

(例題 4)一般項推測型

(ｉ) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n - 4}{a_n - 3}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ

(演習)

(Ｉ) $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_{n+1} = \frac{2 - a_n}{3 - 2a_n}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ

（Ⅱ）$a_1 = 7\,, a_{n+1} = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ[東工大 2015]

[応用](Ⅲ)正の項からなる数列 $\{a_n\}$ が全ての自然数に対して以下の等式を満たす一般項 a_n を求めよ。

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)^2 = {a_1}^3 + {a_2}^3 + {a_3}^3 + \cdots + {a_n}^3$$

[数学的帰納法まとめ]

基本的なパターンは上記のものである。数学の証明問題の大半は数学的帰納法を使うので証明問題ではすぐに数学的帰納法を使うと出てきてほしい

　少し応用問題になると

(ⅰ) $n=1, n=2$ で成立すること

(ⅱ) $n=k, n=k+1$ が成り立つ仮定して$n=k+2$ でも成立すること

を示す問題もあるので問題に応じて仮定する数を変えること(基本的には1つ)

(具体例)$x+y\,,xy$ が整数のとき、x^n+y^n も整数になることを示せ

[解]数学的帰納法で証明する

(ⅰ) $n=1$のとき

$x^1+y^1=x+y$ より成立

　　$n=2$ のとき

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ より成立

(ⅱ) $n=k\,,k+1$ のとき、$x^n+y^n\,,x^{n+1}+y^{n+1}$ が整数であると仮定して $n=k+2$ で成立することを示す

$x^{k+2}+y^{k+2}=(x+y)(x^{k+1}+y^{k+1})-xy(x^k+y^k)$より$n=k+2$ でも成立

(ⅰ)(ⅱ)より　**$x+y\,,xy$ が整数のとき、x^n+y^nも整数になる**

(類題) $x=t+\frac{1}{t}\,,P_n=t^n+\frac{1}{t^n}\ (n=1\,,2\,,3\,,\cdots)$ とおくとき、P_n は x の n 次式になることを示せ