

数学 - 解答

1

P は l 上, Q は m 上, R は n 上にあるので, 実数 p, q, r を用いて, 次のように書ける.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{u} = (2p+1, p, -p-2) \quad \dots\dots ①$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + q\overrightarrow{v} = (q+1, -q+2, q-3)$$

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OC} + r\overrightarrow{w} = (r+1, 2r-1, r)$$

よって,

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (-2p+q, -p-q+2, p+q-1) \\ \overrightarrow{PR} &= \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = (-2p+r, -p+2r-1, p+r+2) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots ②$$

$PQ \perp m$ より,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{v} &= 0 \\ (-2p+q) \cdot 1 + (-p-q+2) \cdot (-1) + (p+q-1) \cdot 1 &= 0 \\ q &= 1 \end{aligned} \quad \dots\dots ③$$

$PR \perp n$ より,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{w} &= 0 \\ (-2p+r) \cdot 1 + (-p+2r-1) \cdot 2 + (p+r+2) \cdot 1 &= 0 \\ r &= \frac{1}{2}p \end{aligned} \quad \dots\dots ④$$

②に③, ④を代入して,

$$\overrightarrow{PQ} = (-2p+1, -p+1, p), \quad \overrightarrow{PR} = \left(-\frac{3}{2}p, -1, \frac{3}{2}p+2\right)$$

よって,

$$\begin{aligned} PQ^2 + PR^2 &= \{(-2p+1)^2 + (-p+1)^2 + p^2\} + \left\{\left(-\frac{3}{2}p\right)^2 + (-1)^2 + \left(\frac{3}{2}p+2\right)^2\right\} \\ &= \frac{21}{2}p^2 + 7 \end{aligned} \quad \dots\dots ⑤$$

①, ⑤より,

$PQ^2 + PR^2$ を最小にする P は $P(1, 0, -2)$ であり, そのときの $PQ^2 + PR^2$ は 7 である. … (答)