HL 数学　第 4 講

例題 1)四面体$O-ABC$について、OAの中点をP , PBの中点Q , QCの中点をRとし、

直線ORと平面ABCの交点をMとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とするとき、

$\overrightarrow{OM}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$で表せ。

[解]始点はOとする

PはOAの中点より

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\vec{a}$

QはPBの中点より

$\overrightarrow{OQ}=\frac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OB}}{2}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

RはQCの中点より

$\overrightarrow{OR}=\frac{\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OC}}{2}=\frac{1}{8}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

MはORと平面ABCの交点

(ⅰ)MはOR上の点

$\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OR}=\frac{1}{8}k\vec{a}+\frac{1}{4}k\vec{b}+\frac{1}{2}k\vec{c}$ …①

(ⅱ)Mは平面ABC上の点

$\overrightarrow{OM}=l\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$ …②

①，②より$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$は 1 次独立なので

$$\begin{cases} \frac{1}{8}k=l \\ \frac{1}{4}k=m \\ \frac{1}{2}k=n \\ l+m+n=1 \end{cases}$$

→ $k=\frac{8}{7}$, $l=\frac{1}{7}$, $m=\frac{2}{7}$, $n=\frac{4}{7}$

よって

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OM}=\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}+\frac{4}{7}\vec{c}}$$

演習)四面体$OABC$において、辺OAを$2:1$に内分する点Q，辺BCを$2:1$に内分する点R，線分QRの中点をMとして、直線OMと平面ABCの交点をPとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とするとき、$\overrightarrow{OP}$を$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$で表せ。

[解]始点をOとする

QはOAを$2:1$に内分する点より

$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\vec{a}$

RはBCを$2:1$に内分する点より

$\overrightarrow{OR}=\frac{\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}}{3}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

MはQRの中点より

$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}}{2}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

PはOMと平面ABCの交点

(ⅰ)PはOM上の点

$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}k\vec{a}+\frac{1}{6}k\vec{b}+\frac{1}{3}k\vec{c}$ …①

(ⅱ)Pは平面ABC上の点

$\overrightarrow{OP}=l\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$ …②

①，②より$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$は1次独立なので

$$\begin{cases} \frac{1}{3}k=l \\ \frac{1}{6}k=m \\ \frac{1}{3}k=n \\ l+m+n=1 \end{cases}$$

→ $k=\frac{6}{5},l=\frac{2}{5},m=\frac{1}{5},n=\frac{2}{5}$

よって

$\boldsymbol{\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}}$

類題 1)平行 6 面体$OABC-DEFG$ において、平面 ACD と直線 OF の交点をH とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$,$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$,$\overrightarrow{OD}=\vec{d}$ とするとき、$\overrightarrow{OH}$ を$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$ を使って表せ。

[解]始点 O とする

$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}$

H は OF と平面 ACD の交点

(ⅰ)H は OF 上の点

$\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OF}=k\vec{a}+k\vec{c}+k\vec{d}$ …①

(ⅱ)H は平面 ACD 上の点

$\overrightarrow{OH}=l\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OC}+n\overrightarrow{OC}=l\vec{a}+m\vec{c}+n\vec{d}$ …②

①，②より$\vec{a}$,$\vec{c}$,$\vec{d}$ は 1 次独立なので

$$\begin{cases} k=l \\ k=m \\ k=n \\ l+m+n=1 \end{cases}$$

$\rightarrow\ k=\frac{1}{3}$,$l=\frac{1}{3}$,$m=\frac{1}{3}$,$n=\frac{1}{3}$

よって

$\boldsymbol{\overrightarrow{OH}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}}$

類題 2) p49 **27**

解答はリード B 参照

(類題 3)四面体 $OABC$ において、$\triangle ABC$ の重心 G , 辺 OA を $2:1$ に内分する点Q , 直線 OG と平面 BCQ の交点 P , 直線 AP と平面 OBC の交点 R とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき、$\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。

[解]始点 O とする

G は $\triangle ABC$ の重心より

$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

Q は OA を $2:1$ に内分する点より

$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\vec{a}$

P はOG と平面 BCQ の交点

(ⅰ)P は OG 上の点

$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}+\frac{1}{3}k\vec{c}$ …①

(ⅱ)P は平面 BCQ 上の点

$\overrightarrow{OP}=l\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{OC}+n\overrightarrow{OQ}=l\vec{b}+m\vec{c}+\dfrac{2}{3}n\vec{a}=\dfrac{2}{3}n\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}$ …②

① , ②より$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は 1 次独立なので

$$\begin{cases}\frac{1}{3}k=\frac{2}{3}n\\ \frac{1}{3}k=l\\ \frac{1}{3}k=m\\ l+m+n=1\end{cases}$$

→ $k=\frac{6}{7}$, $l=\frac{2}{7}$, $m=\frac{2}{7}$, $n=\frac{3}{7}$

よって

$\boldsymbol{\overrightarrow{OP}=\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}+\frac{2}{7}\vec{c}}$

R はAP と平面 OBC の交点

(ⅰ)R は AP 上の点

$\overrightarrow{OR}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{a}+\frac{2}{7}t\vec{a}+\frac{2}{7}t\vec{b}+\frac{2}{7}t\vec{c}=\left(1-\frac{5}{7}t\right)\vec{a}+\frac{2}{7}t\vec{b}+\frac{2}{7}t\vec{c}$ …③（t は実数）

(ⅱ)R は平面 OBC 上の点

$\overrightarrow{OR}=p\overrightarrow{OB}+q\overrightarrow{OC}=p\vec{b}+q\vec{c}$ …④

③，④より$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は 1 次独立なので

$1-\frac{5}{7}t=0$

$\frac{2}{7}t=p$ → $t=\frac{7}{5}, p=\frac{2}{5}, q=\frac{2}{5}$

$\frac{2}{7}t=q$ よって $\boldsymbol{\overrightarrow{OR}=\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}}$