一橋大学

商、経済、法、社会

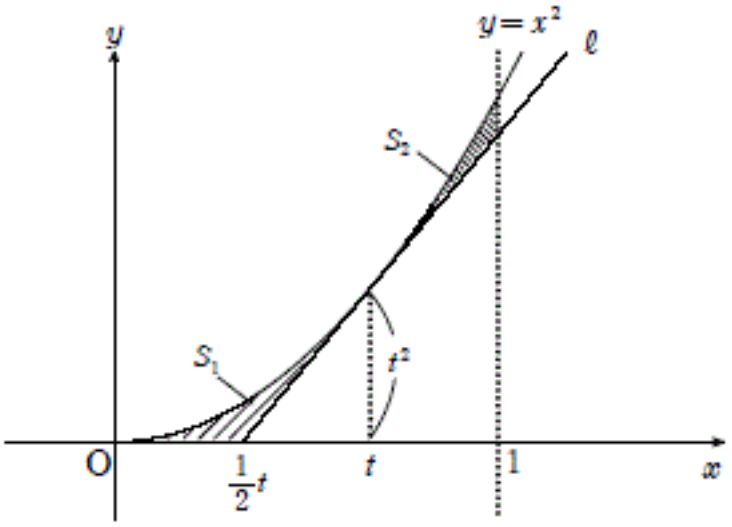
数学 - 解答

第 2 問

C 上の点(t, t^2)における接線 ℓ は

$$\ell : y = 2tx - t^2 \quad (0 < t < 1)$$

ℓ と x 軸との交点の x 座標は，$x = \frac{1}{2}t$



$$S_1 = \int_0^t x^2 dx - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t\right)\cdot t^2$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^t - \frac{1}{4}t^3 = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^3 = \frac{1}{12}t^3$$

$$S_2 = \int_t^1 \left\{x^2 - (2tx - t^2)\right\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - tx^2 + t^2 x\right]_t^1$$

$$= \frac{1}{3} - t + t^2 - \left(\frac{1}{3}t^3 - t^2 + t^2\right)$$

$$= -\frac{1}{3}t^3 + t^2 - t + \frac{1}{3}$$

$f(t) = S_1 + S_2 = -\frac{1}{4}t^3 + t^2 - t + \frac{1}{3}$ とおくと，

$$f'(t) = -\frac{3}{4}t^2 + 2t - 1 = -\frac{1}{4}(3t^2 - 8t + 4)$$

$$= -\frac{1}{4}(3t - 2)(t - 2)$$

$f'(t) = 0$ となる t は $0 < t < 1$ の範囲で，$t = \frac{2}{3}$

増減表をかくと

t	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘		↗	

以上より，$S_1 + S_2$ は $t = \frac{2}{3}$ で最小値

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \underline{\frac{1}{27}} \qquad \cdots(答)$$

をとる．

このウインドウを閉じる