筑波大学

社会・国際学群（社会学類，国際総合学類），生命環境学群（生物学類，生物資源学類，地球学類），医学群（医学類、医療科学類），情報学群（情報科学類，情報メディア創成学類，知識情報・図書館学類），人間学群（心理学類、障害科学類，教育学類），理工学群（数学類、物理学類、化学類、応用理工学類、工学システム学類，社会工学類）

数学 - 解答

[1] 解答

(1) 加法定理

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

より，$\sin 2\theta=\sin(\theta+\theta)=2\sin\theta\cos\theta, \cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1$ である．よって

$$\begin{aligned}\cos 3\theta&=\cos(\theta+2\theta)\\&=\cos\theta\cos 2\theta-\sin\theta\sin 2\theta\\&=\cos\theta(2\cos^2\theta-1)-\sin\theta\cdot 2\sin\theta\cos\theta\\&=2\cos^3\theta-\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta\\&=4\cos^3\theta-3\cos\theta\end{aligned}$$

が成り立つ．（証明終）

(2) x^3-3x+1 に $x=2\cos 80^\circ$ を代入すると，

$$\begin{aligned}&(2\cos 80^\circ)^3-3(2\cos 80^\circ)+1\\=&2(4\cos^3 80^\circ-3\cos 80^\circ)+1\\=&2\cos 240^\circ+1\\=&2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1\\=&0\end{aligned}$$

となり，確かに解であることが示された．（証明終）

(3) まず，この方程式が重解をもたないことを示す．重解を持つとすれば，$f(x)=x^3-3x+1=$ とおいたとき，重解 $x=a$ に対し $f(a)=f'(a)=0$ が成り立つ．ところが，$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$ であるから，$f'(x)=0$ の解は $x=\pm 1$ であり，これは $f(x)=0$ を満たさない．よって重解は存在しない．したがって，

$$\alpha,\beta\text{はともに }80^\circ\text{とは異なり，また}\alpha\neq\beta.\quad\cdots(*)$$

(2) と同様に,x^3-3x+1 に $x=2\cos\alpha, 2cos\beta$ を代入して考えれば，

$$\cos 3\alpha=\cos 3\beta=-\frac{1}{2}$$

であればよく，したがって $3\alpha, 3\beta$ はある整数 k をもちいて，

$$120^\circ+360^\circ\times k, \text{または } 240^\circ+360^\circ\times k$$

の形に書ける．よって

$$\alpha,\beta=40^\circ+120^\circ\times k, \text{または } 80^\circ+120^\circ\times k$$

である．よって $(*)$ と $0^\circ<\alpha<\beta<180^\circ$ に注意すると，

$$\alpha=40^\circ, \beta=160^\circ\quad\cdots\text{答}$$

このウインドウを閉じる