3

(1)

i を自然数とすると，第 i 群に含まれる項の個数は

$$2i-1$$

である。したがって $k \geqq 2$ のとき，第 k 群の最初の項の番号は

$$\sum_{i=1}^{k-1}(2i-1)+1 = 2\times\frac{1}{2}\times(k-1)\times k-(k-1)+1 = k^2-2k+2$$

である。これは $k=1$ のときも成り立つ。よって第 k 群の最初の項は

$$a_{k^2-2k+2} = \frac{1}{(k^2-2k+2)(k^2-2k+3)}$$

となる。

(答) $\dfrac{1}{(k^2-2k+2)(k^2-2k+3)}$

(2)

第 k 群に含まれる項の個数は $2k-1$ であるので，第 k 群の最後の項の番号は

$$(k^2-2k+2)+(2k-1)-1 = k^2$$

である。したがって第 k 群に含まれるすべての項の和は

$$\begin{aligned}
S_k &= \sum_{n=k^2-2k+2}^{k^2}\frac{1}{n(n+1)}\\
&= \sum_{n=k^2-2k+2}^{k^2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&= \left(\frac{1}{k^2-2k+2}-\frac{1}{k^2-2k+3}\right)+\left(\frac{1}{k^2-2k+3}-\frac{1}{k^2-2k+4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2+1}\right)\\
&= \frac{1}{k^2-2k+2}-\frac{1}{k^2+1}\\
&= \frac{2k-1}{(k^2-2k+2)(k^2+1)}
\end{aligned}$$

となる。

(答) $S_k = \dfrac{2k-1}{(k^2-2k+2)(k^2+1)}$

(3)

与不等式に(2)の結果を代入すると，

$$(k^2+1)\cdot\frac{2k-1}{(k^2-2k+2)(k^2+1)} \leqq \frac{1}{100}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2k-1}{k^2-2k+2} \leqq \frac{1}{100}$$

$$\Leftrightarrow 100(2k-1) \leqq k^2-2k+2 \quad \left(\because k^2-2k+2=(k-1)^2+1>0\right)$$

$$\Leftrightarrow k^2-202k+102 \geqq 0$$

となる。ここで

$$f(k)=k^2-202k+102$$

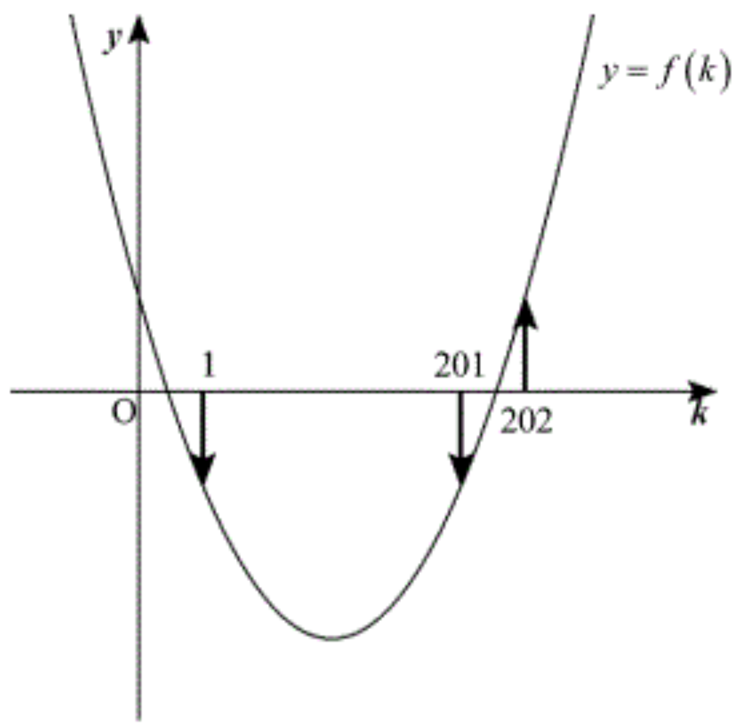
とおき，$f(k) \geqq 0$ を満たす最小の自然数 k を求める。

$$f(1)=1^2-202\cdot 1+102=-99<0 \qquad \cdots ①$$

$$f(201)=201^2-202\cdot 201+102=-99<0 \qquad \cdots ②$$

$$f(202)=202^2-202\cdot 202+102=102>0 \qquad \cdots ③$$

ここで $y=f(k)$ のグラフは下に凸であるから，①～③と合わせて，グラフの概形は次図のようになる。



前図より，$f(k) \geqq 0$ を満たす最小の自然数 k の値は 202 である。

(答)　$k=202$

このウインドウを閉じる