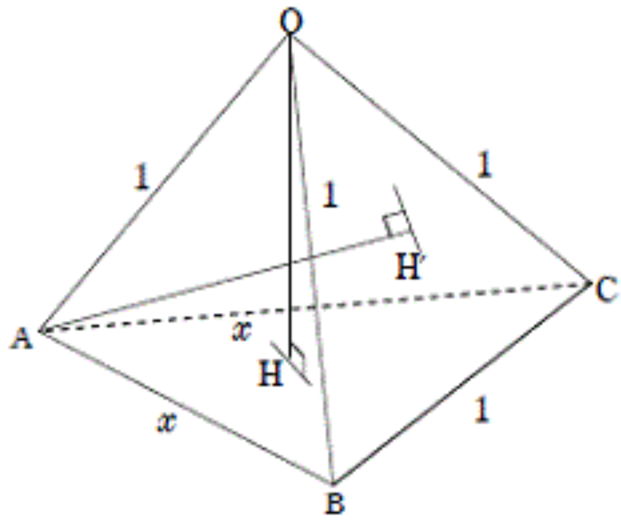
2

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=p\vec{a}+g\vec{b}+r\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OH'}}=s\vec{b}+t\vec{c}$$



(1) $x^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=\left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2=2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1-\dfrac{1}{2}x^2$

同様に，$\vec{c}\cdot\vec{a}=1-\dfrac{1}{2}x^2$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{2}$

- $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ より，

$$\left(p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$$
$$=p\left(\vec{a}\cdot\vec{b}-|a|^2\right)+q\left(|b|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}\right)+r\left(\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a}\right)=0$$
$$\Longleftrightarrow\left(-\frac{1}{2}x^2\right)p+\left(\frac{1}{2}x^2\right)q+\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)r=0$$
$$\therefore\ -x^2p+x^2q+(x^2-1)r=0\ \cdots\cdots①$$

- $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ より，

$$-x^2p+(x^2-1)q+x^2r=0\ \cdots\cdots②$$

①−②より，$r=q$

①より，$-x^2p+(2x^2-1)q=0$，$p=\dfrac{2x^2-1}{x^2}q$

$p+q+r=1$ に代入して，$q=\dfrac{x^2}{4a^2-1}$

$$\therefore\ (p,q,r)=\left(\frac{2x^2-1}{4x^2-1},\frac{x^2}{4x^2-1},\frac{x^2}{4x^2-1}\right)\quad\cdots\cdots(答)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH'}}=s\vec{b}+t\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AH'}}=\overrightarrow{\mathrm{OH'}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$$

- $\overrightarrow{\mathrm{AH'}}\cdot\vec{b}=0\Longleftrightarrow\left(-\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=0$

$$\Longleftrightarrow\ -\vec{a}\cdot\vec{b}+s\left|\vec{b}\right|^2+t\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

$$s+\frac{1}{2}t=1-\frac{1}{2}x^2,\quad 2s+t=2-x^2\ \cdots\cdots③$$

- $\overrightarrow{\mathrm{AH'}}\cdot\vec{c}=0\Longleftrightarrow\left(-\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\right)\cdot\vec{c}=0$

から，$\dfrac{1}{2}s+t=1-\dfrac{1}{2}x^2\ \cdots\cdots④$

③，④より，　　$s=t=\dfrac{1}{3}(2-x^2)$　……(答)

(2) 正三角形 OBC の面積$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AH'}}\right|^2=\left|-\vec{a}+t\vec{b}+t\vec{c}\right|^2$$

$$=\underset{(1)}{\left|\vec{a}\right|^2}+t^2\underset{(1)}{\left|\vec{b}\right|^2}+t^2\underset{(1)}{\left|\vec{c}\right|^2}-2t\underline{\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}}}+2t^2\underset{\left(\frac{1}{2}\right)}{\vec{b}\cdot\vec{c}}-2t\underline{\underline{\vec{c}\cdot\vec{a}}}$$

$$=1+3t^2-4t\left(1-\frac{1}{2}a^2\right)=1+3t^2-4t+2tx^2$$

$t=\dfrac{1}{3}(2-x^2)$ より，$x^2=2-3t$ より，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AH'}}\right|^2=1+3t^2-4t+2t(2-3t)$$

$$=-3t^2+1=-\frac{1}{3}(2-x^2)^2+1$$

$$=1-\frac{1}{3}(x^2-2)^2$$

から，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AH'}}\right|=\sqrt{1-\dfrac{1}{3}(x^2-2)^2}$

よって，$V=\dfrac{\sqrt{3}}{12}\sqrt{1-\dfrac{1}{3}(x^2-2)^2}$　……(答)

V が最大になるのは $x^2=2$，$x=\sqrt{2}$ のときで，このとき四面体 OABC は確かに存在する。
したがって,求める最大値は

$$V=\frac{\sqrt{3}}{12}\quad\cdots\cdots(答)$$

このウインドウを閉じる