指数・対数関数

①指数関数

⑴指数・指数関数とは

例）2^3 , $(-2)^4$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

a^b ← a を底、b を指数(指数部)とよぶ

指数関数とはb (指数)の部分が変化していく関数

⑵指数計算

<指数法則> $a \neq 0\,, b \neq 0\,, m, n$ は有理数

- $a^m a^n = a^{m+n}$　　例）$2 \cdot 4 = 2^1 \cdot 2^2 = 8 = 2^3$　→ $\underline{1} + \underline{2} = \underline{3}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$　　例）$\frac{8}{2} = \frac{2^3}{2^1} = 4 = 2^2$　→ $\underline{3} - \underline{1} = \underline{2}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$　　例）$(2^3)^2 = 8^2 = 64 = 2^6$　→ $\underline{2} \times \underline{3} = \underline{6}$
- $(ab)^n = a^n b^n$　　例）$(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36 = 2^2 \cdot 3^2$
- $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$　　例）$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = \frac{3^2}{2^2}$

以上が指数法則と呼ばれる計算だが、暗記する必要はなく、例のように具体例使って計算すればどうなっているかわかる

（キーワード）

掛け算は足し算

割り算は引き算

（ポイント）

1．0 乗は 1　　例）$2^0=1$, $(-3)^0=1$

2．$-$は逆数　　例）$2^{-2}=\frac{1}{2^2}$, $(-3)^{-3}=\frac{1}{(-3)^3}$

例題）

（Ⅰ）$a^6\times a^{-2}$

$=a^{6+(-2)}$

$=\boldsymbol{a^4}$

（Ⅱ）$a^3\div(a^3)^{-3}$

$=a^3\div a^{3\times(-3)}$

$=a^3\div a^{-9}$

$=a^{3-(-9)}$

$=\boldsymbol{a^{12}}$

（Ⅲ）$2^7\div 2^2\times 2^{-3}$

$=2^{7-2+(-3)}$

$=2^2$

$=\boldsymbol{4}$

（演習）

（ⅰ）$a^4\times a^{-3}$

$=a^{4+(-3)}$

$=a^1$

$=\boldsymbol{a}$

（ⅱ）$a^2\div a^{-5}$

$=a^{2-(-5)}$

$=\boldsymbol{a^7}$

（ⅲ）$(a^3)^{-2}$

$=a^{3\times(-2)}$

$=\boldsymbol{a^{-6}}\left(=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a^6}}\right)$

（iv）$2^3 \times 2^{-5} \div 2^2$

$= 2^3 \times 2^{-5} \div 2^2$

$= 2^3 \times 2^{-5} \div 2^2$

$= 2^{3+(-5)-2}$

$= 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \mathbf{\frac{1}{16}}$

（v）$(3^2)^{-3} \times 3^3 \div 3^{-4}$

$= 3^{2\times(-3)} \times 3^3 \div 3^{-4}$

$= 3^{-6} \times 3^3 \div 3^{-4}$

$= 3^{-6+3-(-4)}$

$= 3^1 = \mathbf{3}$

（vi）$(2^{-3} \times 2^6)^3 \div 16$

$= (2^{-3+6})^3 \div 2^4$

$= (2^3)^3 \div 2^4$

$= 2^{3\times3} \div 2^4$

$= 2^9 \div 2^4$

$= 2^{9-4} = 2^5 = \mathbf{32}$

⑶累乗根の計算

これから指数に有理数(分数)が含まれる計算を行っていく

$x^n = a$ の解をx のn 乗根と言い、その解を $x = \underline{\sqrt[n]{a}}$ とかく

例題) $x^3 = a$　　$x^5 = a^3$　　$x^4 = 3$

$x = \sqrt[3]{a}$　　$x = \sqrt[5]{a^3}$　　$x = \sqrt[4]{3}$

(注意)$\sqrt[2]{a}$ **は**$\sqrt{a}$ **のように2が省略される**

次に上記の形を本来の指数の形に持っていきたい

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$$

よって、上記の答えはそれぞれ

$\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ ，$\sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{3}{5}}$ ，$\sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}}$ と変形出来る

本来の指数の形に持っていけば、指数法則を使って計算できる

<累乗根の法則>

- $\boldsymbol{\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}} = a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \boldsymbol{\sqrt[n]{ab}}$
- $\boldsymbol{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \boldsymbol{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}}$
- $\boldsymbol{(\sqrt[n]{a})^m} = (a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}} = \boldsymbol{\sqrt[n]{a^m}}$
- $\boldsymbol{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}} = \boldsymbol{\sqrt[mn]{a}}$
- $\boldsymbol{\sqrt[n]{a^m}} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}} = \boldsymbol{\sqrt[np]{a^{mp}}}$

例題）

（Ⅰ）$\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{16}$

$= \sqrt[3]{4 \times 16}$

$= \sqrt[3]{64}$

$= \sqrt[3]{4^3}$

$= (4^3)^{\frac{1}{3}}$

$= 4^1 = \mathbf{4}$

（Ⅱ）$\frac{\sqrt[6]{27}}{\sqrt[6]{3}}$

$= \sqrt[6]{\frac{27}{3}}$

$= \sqrt[6]{9}$

$= \sqrt[6]{3^2}$

$= (3^2)^{\frac{1}{6}}$

$= 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\mathbf{3}}$

（Ⅲ）$\sqrt[3]{\sqrt{125}}$

$= \sqrt[3\times 2]{125}$

$= \sqrt[6]{125}$

$= \sqrt[6]{5^3}$

$= (5^3)^{\frac{1}{6}}$

$= 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathbf{5}}$

（ポイント）

計算するとき、底は一番<u>小さい整数</u>に合わせると良い

（演習）

（ⅰ）$3^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{3}} \div 3^{\frac{1}{6}}$

$= 3^{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{6}}$

$= 3^0$

$= \mathbf{1}$

（ⅱ）$\sqrt[4]{2^3} \times \sqrt{2}$

$= (2^3)^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}}$

$= 2^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}}$

$= 2^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}$

$= \mathbf{2^{\frac{5}{4}}}\left(= \sqrt[4]{\mathbf{2^5}} = \sqrt[4]{\mathbf{32}}\right)$

（ⅲ）$\sqrt{\sqrt[3]{36}}$

$= \sqrt[2\times 3]{36}$

$= \sqrt[6]{6^2}$

$= (6^2)^{\frac{1}{6}}$

$= 6^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\mathbf{6}}$

（iv）$(\sqrt[6]{27})^2$

$= \left(\sqrt[6]{3^3}\right)^2$

$= \left((3^3)^{\frac{1}{6}}\right)^2$

$= \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2$

$= 3^1 = \mathbf{3}$

（ v ）$\dfrac{\sqrt[5]{128}}{\sqrt[5]{4}}$

$= \sqrt[5]{\dfrac{128}{4}}$

$= \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5}$

$= (2^5)^{\frac{1}{5}}$

$= 2^1 = \mathbf{2}$

［応用］

（vi）$\sqrt{2}\sqrt[6]{200}\sqrt[3]{25}$

$= \sqrt{2} \times \sqrt[6]{2^3 \times 5^2} \times \sqrt[3]{5^2}$

$= 2^{\frac{1}{2}} \times (2^3 \times 5^2)^{\frac{1}{6}} \times (5^2)^{\frac{1}{3}}$

$= 2^{\frac{1}{2}} \times (2^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{3}}) \times 5^{\frac{2}{3}}$

$= 2^1 \times 5^1 = \mathbf{10}$

（vii）$\sqrt{\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}}$

$= \sqrt{\dfrac{a \times a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}}}$

$= \sqrt{a^{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}}$

$= \sqrt{a^{\frac{5}{4}}} = (a^{\frac{5}{4}})^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{a^{\frac{5}{8}}}(= \sqrt[\mathbf{8}]{\boldsymbol{a^5}})$

（viii）$(a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}})$

$= a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}}$　　←$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ を利用

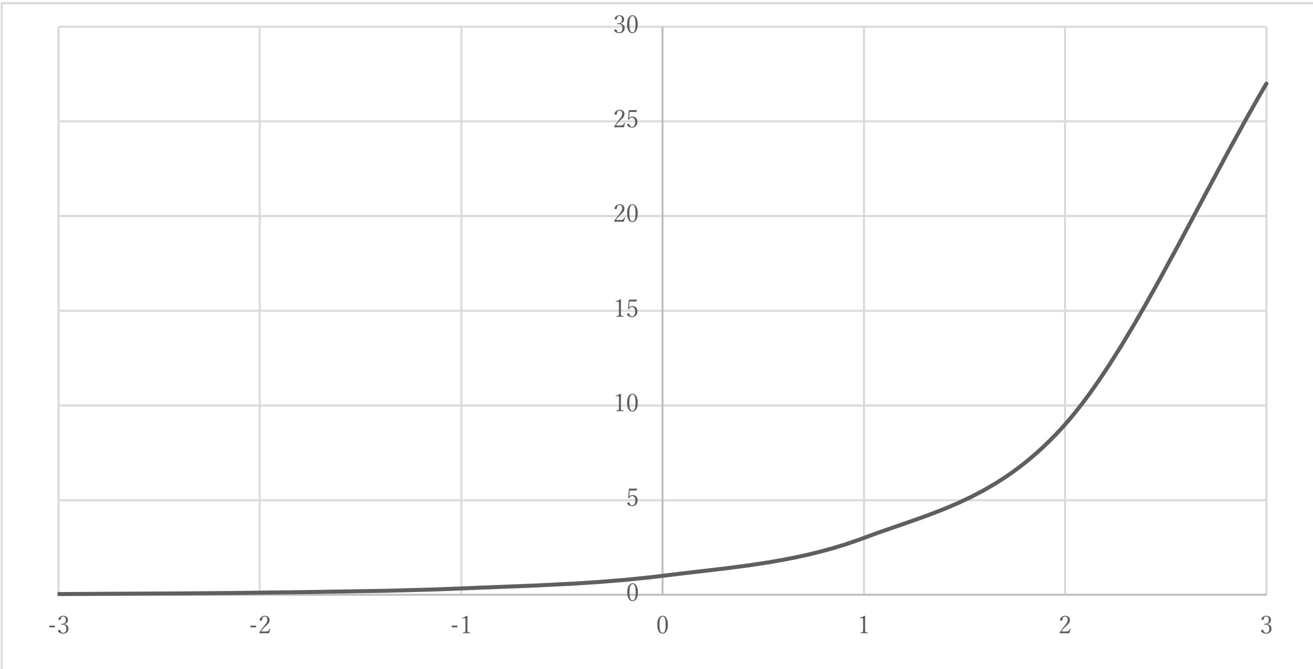
$= a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$

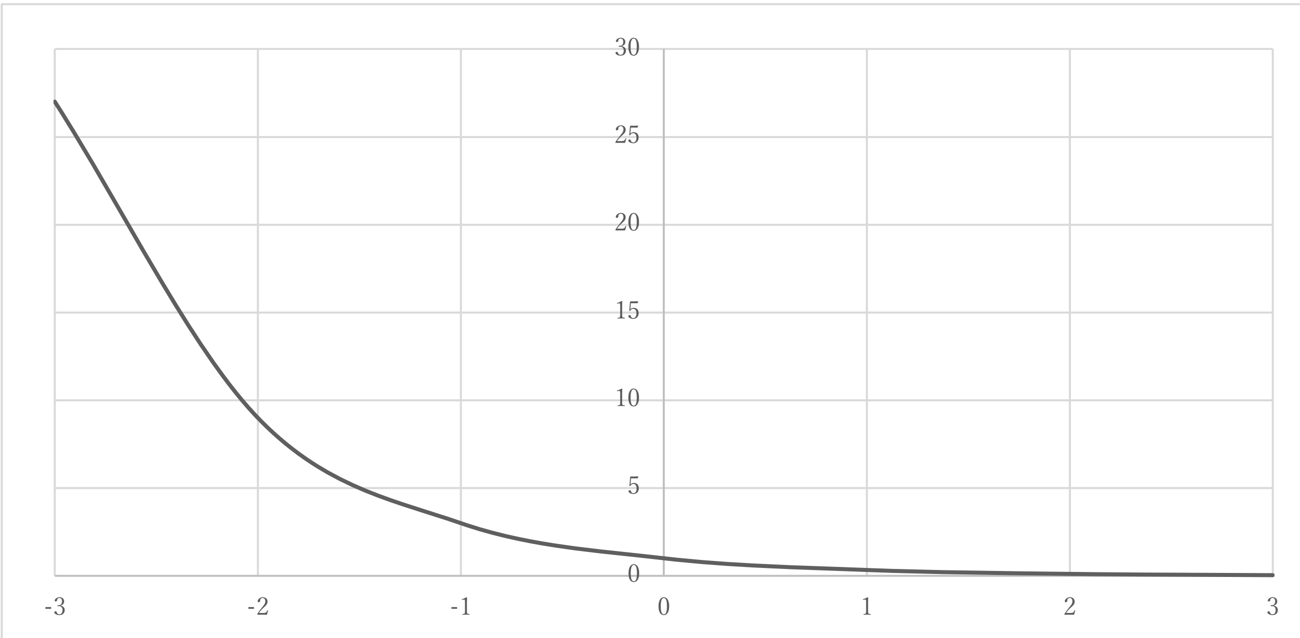
$= a^1 - b^1 = a - b$

⑷指数関数のグラフ

$y = 3^x$ と $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
3^x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$





（グラフの性質）$y = a^x$

1. 定義域(x の範囲)は実数全体で値域(y の範囲)は正の数全体

2. $a > 1$ のとき単調増加(常に増加する）

   $0 < a < 1$のとき単調減少(常に減少する）

   → yのある値に対して、それをみたすxが **1 つ**に定まる

3. $(0\,,1)$ を通り、x 軸に漸近する(y の値は 0 に近づくが 0 にはならない)

（注意）

$a \leq 0\,, a = 1$ のグラフは基本的に出てこない(出せない)

（理由）

$y = 0^x$については0^0の値が定まらない

$y = 1^x$についてはどんなxに対しても$y = 1$ となるので直線になるから

$a < 0$ のときの$y = a^x$ は $a^{\frac{3}{2}} = a^{1.5}$などの指数部が整数以外の符号が定まらない

（まとめ）

底a が $a > 1$ の時と $0 < a < 1$ でグラフが変わる(グラフは概形が分かれば良い)

→考える関数の底がどっちのグラフになるのか考えること

⑸指数の大小関係

例題)次の数の大小を比較せよ

(Ⅰ)$\sqrt[4]{5}\,,\sqrt[8]{15}$

$\sqrt[4]{5} > 0\,,\sqrt[8]{15} > 0$ より

$(\sqrt[4]{5})^8 = 5^2 = 25$

$(\sqrt[8]{15})^8 = 15^1 = 15$

よって

$\boldsymbol{\sqrt[4]{5} > \sqrt[8]{15}}$

(Ⅱ)$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{5}}, 2^{\frac{1}{3}}, 4^{\frac{1}{4}}$

全て底 2 で揃えると

$2^{\frac{1}{5}}, 2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{2}}$

底 2 > 1 より単調増加なので

指数部の数の大小関係$\left(\frac{1}{5} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}\right)$と一致

$\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} < 2^{\frac{1}{3}} < 4^{\frac{1}{4}}}$

(不等式の性質)

$a > 0\,, b > 0\,, n$は有理数

$a > b \rightarrow a^n > b^n$

指数関数は常に正の数になるので何乗しても良い

(演習)次の数の大小を比較せよ

(ｉ)$\sqrt[3]{4}\,,\sqrt[6]{14}$

$\sqrt[3]{4} > 0\,,\sqrt[6]{14} > 0$ より

$(\sqrt[3]{4})^6 = 4^2 = 16$

$(\sqrt[6]{14})^6 = 14^1 = 14$

よって

$\boldsymbol{\sqrt[3]{4} > \sqrt[6]{14}}$

(ⅱ)$\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\,,3^{\frac{1}{3}}\,,9^{\frac{1}{8}}$

全て底 3 で揃えると

$3^{\frac{1}{2}}\,,3^{\frac{1}{3}}\,,3^{\frac{1}{4}}$

底 3 > 1 より単調増加なので

指数部の数の大小関係$\left(\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}\right)$と一致

$\boldsymbol{9^{\frac{1}{8}} < 3^{\frac{1}{3}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}}$

⑹指数方程式

(解法)

1. 底(一番小さい整数)を揃えるように変形する
2. 指数部の等式を解く
3.

例題 1)

(Ⅰ) $3^{x+2} = 27$

$3^{x+2} = 3^3$

$x + 2 = 3$

$\boldsymbol{x = 1}$

(Ⅱ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x(x+3)} = 4$

$2^{-x(x+3)} = 2^2$

$-x(x+3) = 3$

$x^3 + 3x + 2 = 0$

$(x+2)(x+1) = 0$

$\boldsymbol{x = -1, -2}$

(演習)

(ⅰ) $4^{x-3} = 64$

$4^{x-3} = 4^3$

$x - 3 = 3$

$\boldsymbol{x = 6}$

(ⅱ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 27$

$3^{-2x} = 3^3$

$-2x = 3$

$\boldsymbol{x = -\frac{3}{2}}$

[応用]

(ⅲ) $3 \cdot 9^x = 1$

$3 \cdot 3^{2x} = 1$

$3^{2x+1} = 3^0$

$2x + 1 = 0$

$\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}}$

例題 2)置き換え

(Ⅰ) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$

$t = 2^x$とおく$(t > 0)$

$(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$

$t^2 - 3t + 2 = 0$

$(t-2)(t-1) = 0$

よって　$t = 1\,,2$

$t = 1$ より $2^x = 1$　$\rightarrow$ $x = 0$

$t = 2$ より $2^x = 2$　$\rightarrow$ $x = 1$

解は　$\boldsymbol{x = 0\,,1}$

(演習)

(ⅰ) $3^{2x}+8\cdot 3^{x}-9=0$

$t=3^{x}$とおく$(t>0)$

$$(3^{x})^{2}+8\cdot 3^{x}-9=0$$

$$t^{2}+8t-9=0$$

$$(t+9)(t-1)=0$$

$t>0$ より$t=1$

$t=1$ より$3^{x}=1$ $\rightarrow \boldsymbol{x=0}$

(ⅱ) $4^{x}-5\cdot 2^{x+2}+64=0$

$t=2^{x}$とおく$(t>0)$

$$(2^{x})^{2}-20\cdot 2^{x}+64=0$$

$$t^{2}-20t+64=0$$

$$(t-4)(t-16)=0$$

$t=4$ より$2^{x}=4$ $\rightarrow \boldsymbol{x=2}$

$t=16$ より$2^{x}=4$ $\rightarrow \boldsymbol{x=4}$

[応用]

$y=4^{x}-2^{x+1}$ の最小値とそのときの x の値を求めよ(ヒント: $t=2^{x}$とおく)

$t=2^{x}$とおく$(t>0)$

$y=(2^{x})^{2}-2\cdot 2^{x}$

$=t^{2}-2t$

$=(t-1)^{2}-1$

よって　$t=1$ で最小値 -1

$t=1$ より$2^{x}=1$ $\rightarrow x=0$

したがって

最小値　$\boldsymbol{-1(x=0}$**のとき**$)$

⑺指数不等式

(解法)

1. 底(一番小さい整数)を揃えるように変形する

2. 指数部の不等式を解く(底によって不等号の向きが変わる)

$a > 1$ のとき $a^x > a^y \ \rightarrow \ x > y$ ←単調増加

$0 < a < 1$ のとき $a^x > a^y \ \rightarrow \ x < y$ ←単調減少

例題 1)

(Ⅰ) $2^x > 8$

$2^x > 2^3$

底 2 > 1 より

$\boldsymbol{x > 3}$

(Ⅱ) $3^{x-2} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3$

$3^{x-2} \leq 3^{-3}$

底 3 > 1 より

$x - 2 \leq -3$

$\boldsymbol{x \leq -1}$

(演習)

(ⅰ) $4^{x-1} < 64$

$4^{x-1} < 4^3$

底 4 > 1 より

$x - 1 < 3$

$\boldsymbol{x < 4}$

(ⅱ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} \geq 64$

$2^{-(x+3)} \geq 2^6$

底 2 > 1 より

$-(x+3) \geq 6$

$\boldsymbol{x \leq -9}$

例題 2)置き換え

（Ⅰ）$3^{2x}+3^{x}-12\geq 0$

$t=3^{x}$とおく$(t>0)$

$(3^{x})^{2}+3^{x}-12\geq 0$

$t^{2}+t-12\geq 0$

$(t+4)(t-3)\geq 0$

$t>0$ より$(t+4)>0$ なので

$(t-3)\geq 0$ より $t\geq 3$

$3^{x}\geq 3\ \rightarrow \boldsymbol{x\geq 1}$

(演習)

（ⅰ）$4^{2x}-15\cdot 4^{x}-16\geq 0$

$t=4^{x}$とおく$(t>0)$

$(4^{x})^{2}-15\cdot 4^{x}-16\geq 0$

$t^{2}-15t-16\geq 0$

$(t+1)(t-16)\geq 0$

$t>0$ より$(t+1)>0$ なので

$(t-16)\geq 0\ \rightarrow\ \boldsymbol{x\geq 2}$

（ⅱ）$4^{x}\leq 2(1+2^{x-1})$

$t=2^{x}$とおく$(t>0)$

$(2^{x})^{2}\leq 2^{x}+2$

$t^{2}-t-2\leq 0$

$(t+1)(t-2)\leq 0$

$t>0$ より$(t+1)>0$ なので

$(t-2)\leq 0\ \rightarrow\ \boldsymbol{x\leq 1}$

（ⅲ）$\left(\frac{1}{9}\right)^{x}-\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}-54<0$

$t=3^{-x}$とおく$(t>0)$ $\leftarrow\ t=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ としてもよい(不等号が反転する)

$(3^{-x})^{2}-3\cdot 3^{-x}-54<0$

$t^{2}-3t-54<0$

$(t+6)(t-9)<0$

$t>0$ より$(t+6)>0$ なので

$(t-9)<0\ \rightarrow\ \boldsymbol{x>-2}$

⑻[応用]式の値

(問題)関数 $y=4^x+4^{-x}-4(2^x+2^{-x})+7\cdots$① について最小値を求めよ

(step1) $t=2^x+2^{-x}$ とおく

$t^2=(2^x+2^{-x})=(2^x)^2+2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}+(2^{-x})^2=4^x+2+4^{-x}$

①の式を t を使って表すと

$y=(t^2-2)-4t+7=t^2-4t+5=(t-2)^2+1$

t の定義域は相加・相乗平均の関係より

$2^x+2^{-x}\geq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$

よって最小値は$t=2$ のとき $y=1$

そのときの x は等号成立条件より

$2^x=2^{-x}$

$x=0$

よって**最小値　1 ($\boldsymbol{x=0}$のとき)**

②対数関数

⑴対数・対数関数とは

指数関数から派生してできた関数

例) $\log_2 6$, $2\log_5 4$

$2^x = 4 \ \rightarrow \ x = 2$

$2^x = 3 \ \rightarrow \ x = ?$ 　 $\leftarrow \ \underline{\log_2 3}$

よって $a > 0$, $a \neq 1$, $R > 0$

$\boldsymbol{a^r = R \ \leftrightarrow \ r = \log_a R}$

$\log_a R$ において a の部分を<u>底</u>、R の部分を<u>真数</u>という

対数関数とはR (<u>真数</u>)が変化していく関数

⑵対数計算

<対数の性質> $a > 0$, $a \neq 1$, $R > 0$, $S > 0$, pは有理数

1. $\log_a RS = \log_a R + \log_a S$ 　例) $\log_2 15 = \log_2 3 \cdot 5 = \log_2 3 + \log_2 5$
2. $\log_a \frac{R}{S} = \log_a R - \log_a S$ 　例) $\log_2 \frac{5}{3} = \log_2 5 - \log_2 3$
3. $\log_a R^p = p\log_a R$ 　例) $\log_2 5^3 = 3\log_2 5$
4. $\log_a a = 1$ 　例) $\log_2 2 = 1$
5. $\log_a 1 = 0$ 　例) $\log_2 1 = 0$

（証明）

1.　$\log_a R = x$, $\log_a S = y$ として $\log_a RS = x + y$ を示す

$\log_a R = x$ より $R = a^x$, $\log_a S = y$ より $S = a^y$

$RS = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

よって　$x + y = \log_a RS$

2.　1 と同様に $\log_a \frac{R}{S} = x - y$ を示す

$\frac{R}{S} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

よって　$x - y = \log_a \frac{R}{S}$

3.　$\log_a R = x$ として $\log_a R^p = px$ を示す

$\log_a R = x$ より $R = a^x$

両辺 p 乗すると $R^p = (a^x)^p = a^{px}$

よって　$px = \log_a R^p$

4.　$a^1 = a$ より

$1 = \log_a a$

5.　$a^0 = 1$ より

$0 = \log_a 1$

例題)

(Ⅰ) $\log_2 16$

$= \log_2 2^4$

$= 4\log_2 2$

$= \mathbf{4}$

(Ⅱ) $\log_3 \sqrt[3]{9}$

$= \log_3 3^{\frac{2}{3}}$

$= \frac{2}{3}\log_3 3$

$= \mathbf{\frac{2}{3}}$

(Ⅲ) $\log_3 12 + \log_3 36 + \log_3 \frac{1}{16}$

$= \log_3 12 \cdot 36 \cdot \frac{1}{16}$

$= \log_3 27$

$= \log_3 3^3$

$= 3\log_3 3$

$= \mathbf{3}$

(Ⅳ) $\log_{10}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\log_{10}\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\log_{10}\sqrt[3]{6}$

$= \log_{10}\sqrt{2} - \log_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} - \log_{10}(\sqrt[3]{6})^{\frac{3}{2}}$

$= \log_{10}\frac{\sqrt{2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot(\sqrt[3]{6})^{\frac{3}{2}}}$

$= \log_{10} 1$

$= \mathbf{0}$

(演習)

(ⅰ) $\log_4 64$

$= \log_4 4^3$

$= 3\log_4 4$

$= \mathbf{3}$

(ⅱ) $\log_5 \frac{1}{\sqrt{125}}$

$= \log_5 5^{-\frac{3}{2}}$

$= -\frac{3}{2}\log_5 5$

$= -\mathbf{\frac{3}{2}}$

（iii）$\log_{10} 2 + \log_{10} \sqrt{15} - \frac{1}{2}\log_{10} \frac{3}{5}$

$= \log_{10} 2 + \log_{10} \sqrt{15} - \log_{10} \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \log_{10} \frac{2 \cdot \sqrt{15}}{\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}}}$

$= \log_{10} 10$

$= \mathbf{1}$

（iv）$3\log_4 2 - \frac{1}{2}\log_4 7 + \log_4 \frac{\sqrt{7}}{2}$

$= \log_4 2^3 - \log_4 7^{\frac{1}{2}} + \log_4 \frac{\sqrt{7}}{2}$

$= \log_4 \frac{2^3 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2}}{7^{\frac{1}{2}}}$

$= \log_4 4$

$= \mathbf{1}$

<底の変換公式>

次に底が異なっていたらどのように計算するのか

→底を揃えると計算できる

→底を揃うように変形したい

$$\boldsymbol{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

(証明)

$\log_a b = x$ とすると $b = a^x$

両辺に c が底の対数を取ると

$\log_c b = \log_c a^x = x \log_c a$

$$x = \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

(ポイント)揃える底は<u>一番小さい整数</u>にすること

例題)以下の式を底の変換公式で変形せよ

(Ⅰ) $\log_{81} 3\sqrt{3}$

底は 3 に揃える

$$=\frac{\log_3 3\sqrt{3}}{\log_3 81}$$

$$=\frac{\log_3 3^{\frac{3}{2}}}{\log_3 3^4}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}}{4}=\boldsymbol{\frac{3}{8}}$$

(Ⅱ) $\log_{\frac{1}{25}} 5\sqrt[4]{5}$

底は 5 に揃える

$$=\frac{\log_5 5\sqrt[4]{5}}{\log_5 \frac{1}{25}}$$

$$=\frac{\log_5 5^{\frac{5}{4}}}{\log_5 5^{-2}}$$

$$=\frac{\frac{5}{4}}{-2}=\boldsymbol{-\frac{5}{8}}$$

(Ⅲ) $\log_2 5\cdot\log_5 8$

底は 2 に揃える

$$=\log_2 5\cdot\frac{\log_2 8}{\log_2 5}$$

$$=\log_2 8$$

$$=\log_2 2^3$$

$$=\boldsymbol{3}$$

(Ⅳ) $\log_2 3\cdot\log_3 8\cdot\log_4 8$

底は 2 に揃える

$$=\log_2 3\cdot\frac{\log_2 8}{\log_2 3}\cdot\frac{\log_2 8}{\log_2 4}$$

$$=\log_2 8\cdot\frac{\log_2 8}{\log_2 4}$$

$$=\log_2 2^3\cdot\frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2}$$

$$=3\cdot\frac{3}{2}$$

$$=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$$

(演習)以下の式を底の変換公式で変形せよ

(ⅰ) $\log_{16} 1024$

底は 2 に揃える

$= \frac{\log_2 1024}{\log_2 16}$

$= \frac{\log_2 2^{10}}{\log_2 2^4}$

$= \frac{10}{4} = \mathbf{\frac{5}{2}}$

(ⅱ) $\log_{\frac{1}{8}} 128$

底は 2 に揃える

$= \frac{\log_2 128}{\log_2 \frac{1}{8}}$

$= \frac{\log_2 2^7}{\log_2 2^{-3}}$

$= \frac{7}{-3} = -\mathbf{\frac{7}{3}}$

(ⅲ) $\log_3 6 \cdot \log_6 9$

底は 3 に揃える

$= \log_3 6 \cdot \frac{\log_3 9}{\log_3 6}$

$= \log_3 9$

$= \log_3 3^2$

$= \mathbf{2}$

(ⅳ) $\log_4 3 \cdot \log_9 25 \cdot \log_5 2$

底は 2 に揃える

$= \frac{\log_2 3}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 25}{\log_2 9} \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 5}$

$= \frac{\log_2 3}{\log_2 2^2} \cdot \frac{\log_2 5^2}{\log_2 3^2} \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 5}$

$= \frac{\log_2 3}{2} \cdot \frac{2\log_2 5}{2\log_2 3} \cdot \frac{1}{\log_2 5}$

$= \mathbf{\frac{1}{2}}$

[応用](ⅴ) $3^{4\log_3 2}$

$= \left(3^{\log_3 2}\right)^4$　　← [公式] $a^{\log_a x} = x$

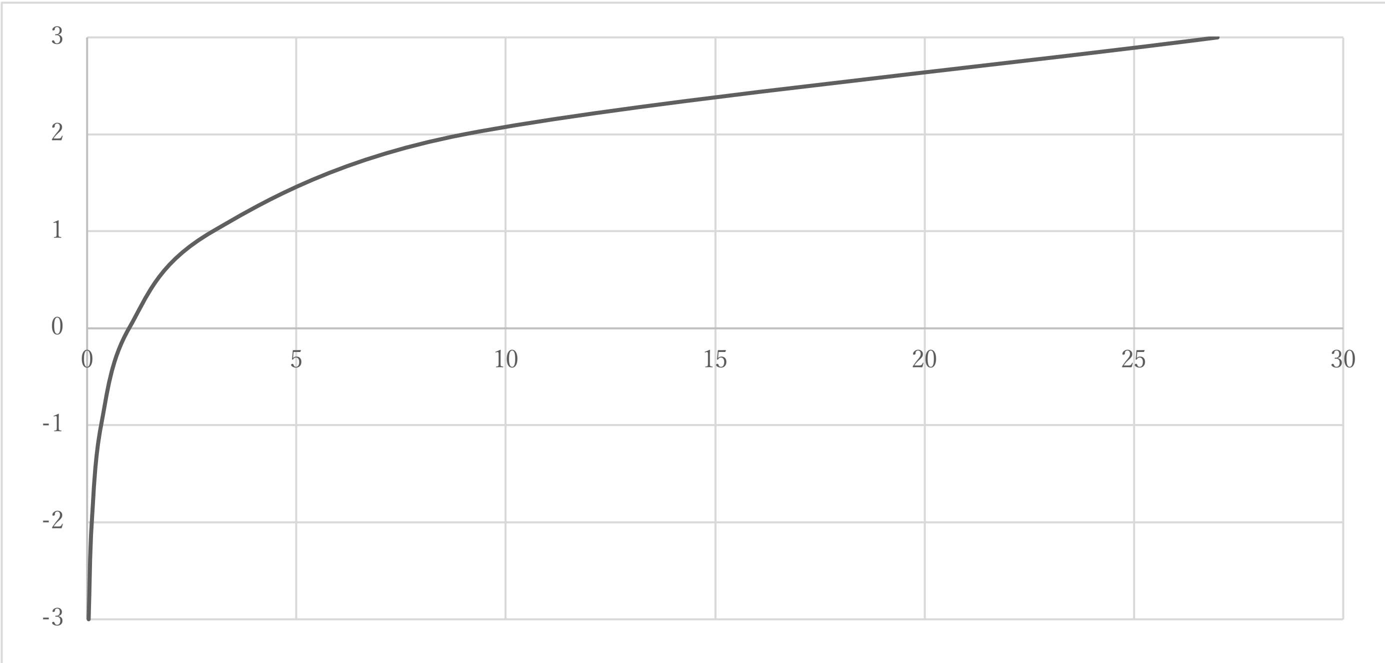
$= 2^4$　　(証明) $y = a^{\log_a x} \rightarrow \log_a x = \log_a y$

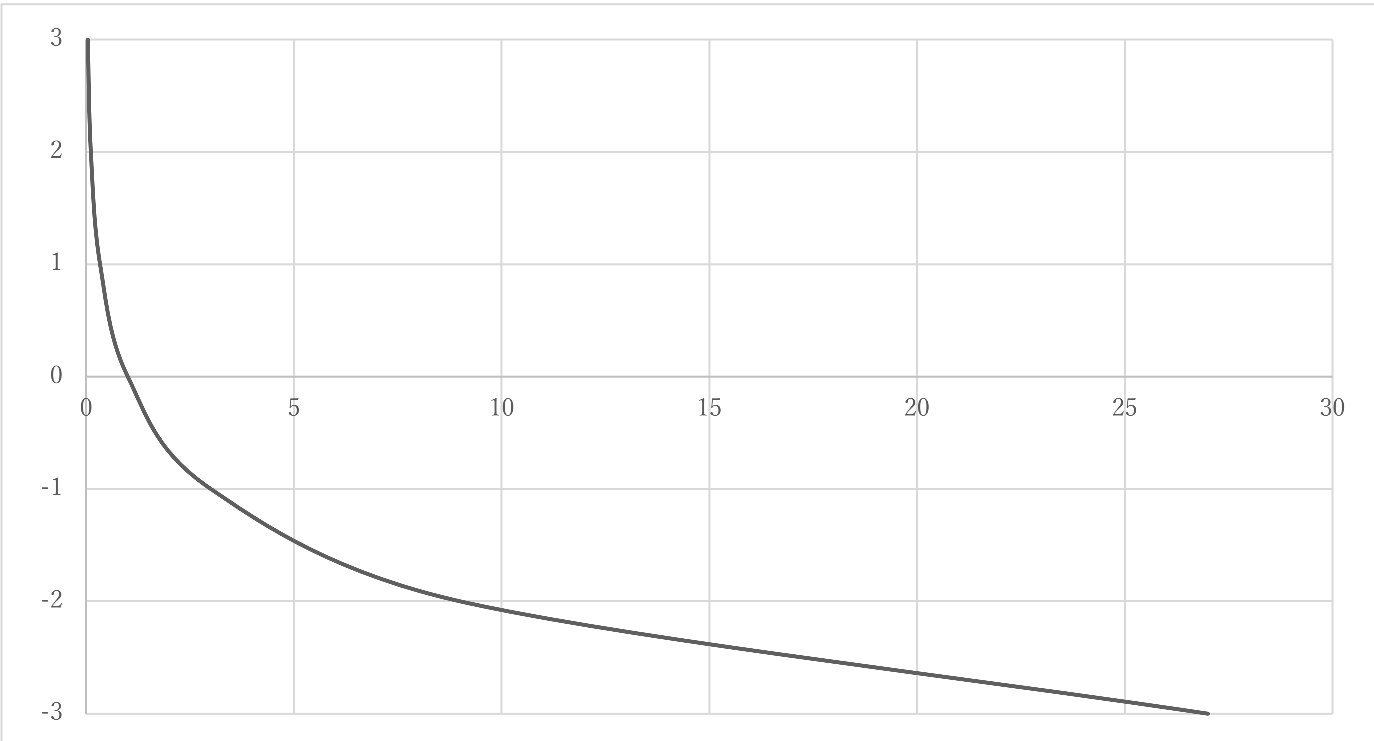
$= \mathbf{16}$　　よって、$x = y = a^{\log_a x}$

⑶対数関数のグラフ

$y = \log_3 x$ と $\log_{\frac{1}{3}} x$

x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
$\log_3 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\log_{\frac{1}{3}} x$	3	2	1	0	-1	-2	-3





（グラフの性質）$y = \log_a x$

1. 定義域(x の範囲)は<u>正の数</u>全体で値域(y の範囲)は<u>実数</u>全体

2. $a > 1$ のとき<u>単調増加</u>(常に増加する)

   $0 < a < 1$ のとき<u>単調減少</u>(常に減少する)

   →y のある値に対して、それをみたすx が **1 つ**に定まる

3. $(1\,,0)$ を通り、y 軸に<u>漸近</u>する(x の値は 0 に近づくが 0 にはならない)

4. $y = a^x$ のグラフと $\underline{y = x}$ に関して**対称**

[応用]逆関数(詳しくは数学Ⅲで)

x と y を入れ替えてできる関数を逆関数といい、$y = x$ に関して対称となる

$y = a^x \;\; \leftrightarrow \;\; x = \log_a y$

右側の式の x と y を入れ替えると $y = \log_a x$

(他の例)　$y = x^2$と $y = \pm\sqrt{x}$ ，$y = \sin x$ と $y = \sin^{-1} x$

⑷対数の大小関係

例題）

（Ⅰ）$2, \log_3 7$

$2 = 2\log_3 3 = \log_3 9$

底 $3 > 1$ より単調増加

$\mathbf{2 > \log_3 7}$

（Ⅱ）$\log_2 3\ , \log_4 7\ , \log_8 28$

全て底 2 に揃える

$\log_4 7 = \frac{\log_2 7}{\log_2 4} = \frac{1}{2}\log_2 7 = \log_2 \sqrt{7}$

$\log_8 28 = \frac{\log_2 28}{\log_2 8} = \frac{1}{3}\log_2 28 = \log_2 \sqrt[3]{28}$

底 $2 > 1$ より単調増加

$\mathbf{\log_4 7 < \log_2 3 < \log_8 28}$

（演習）

（ⅰ）$3,\ \log_2 9$

$3 = 3\log_2 2 = \log_2 8$

底 $2 > 1$ より単調増加

$\mathbf{3 < \log_2 9}$

（ⅱ）$\log_3 5\ , \log_9 20\ , \log_{27} 126$

全て底 3 に揃える

$\log_9 20 = \frac{\log_3 20}{\log_3 9} = \frac{1}{2}\log_3 20 = \log_3 \sqrt{20}$

$\log_{27} 126 = \frac{\log_3 126}{\log_3 27} = \frac{1}{3}\log_3 126 = \log_3 \sqrt[3]{126}$

底 $3 > 1$ より単調増加

$\mathbf{\log_9 20 < \log_3 5 < \log_{27} 126}$

⑸対数方程式

(解法)

1. 真数条件を確認する

2. 底を揃えて、左辺・右辺ともに同じ底の対数1つずつになるように変形する

3. 真数の等式を解く

4. 真数条件を満たしているか確認する

例題1)

(Ⅰ) $\log_2 x + \log_2(x-2) = 3$

真数条件より $x > 0, x-2 > 0$

よって、$x > 2$

$\log_2 x(x-2) = 3\log_2 2$

$\log_2 x(x-2) = \log_2 8$

$x(x-2) = 8$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$(x-4)(x+2) = 0$

$x > 2$ より $\boldsymbol{x = 4}$

(Ⅱ) $(\log_{10} x)^2 - 4\log_{10} x + 3 = 0$

真数条件より $x > 0$

$t = \log_{10} x$ とおく

$t^2 - 4t + 3 = 0$

$(t-3)(t-1) = 0$

$t = 1, 3$

$t = 1$ のとき $\log_{10} x = 1 \rightarrow\ x = 10$

$t = 3$ のとき $\log_{10} x = 3 \rightarrow\ x = 1000$

よって　$x = \mathbf{10, 1000}$

[応用](Ⅲ) $\log_2 8x - 6\log_x 2 = 4$

底の条件より $x > 0, x \neq 0$

真数条件より $8x > 0$ より $x > 0$

$\log_2 8 + \log_2 x - 6\frac{\log_2 2}{\log_2 x} = 4$

$3 + \log_2 x - \frac{6}{\log_2 x} = 4$

$t = \log_2 x$ とおく

$t - \frac{6}{t} - 1 = 0$

$(t-3)(t+2) = 0$ より $t = -2, 3$

$t = \log_2 x = -2, 3$ より $\boldsymbol{x = 8, \frac{1}{4}}$

(演習)

(i) $\log_{12} x + \log_{12}(x+1) = 1$

真数条件より $x > 0, x + 1 > 0$

よって $x > 0$

$\log_{12} x(x+1) = \log_{12} 12$

$x(x+1) = 12$

$(x+4)(x-3) = 0$

$x > -1$ より $\boldsymbol{x = 3}$

(ii) $(\log_2 x)^2 - \log_2 x^3 + 2 = 0$

真数条件より $x > 0, x^3 > 0$ より $x > 0$

$t = \log_2 x$ とおく

$t^2 - 3\mathrm{t} + 2 = 0$

$(t-1)(t-2) = 0$

$t = 1, 2$

$t = \log_2 x = 1, 2$ より $x = \mathbf{2, 4}$

[応用]（ⅲ）$\log_3 x - \log_x 81 = 3$

底の条件より$x > 0, x \neq 1$

真数条件より$x > 0$

$\log_3 x - \frac{\log_3 81}{\log_3 x} = 3$

$\log_3 x - \frac{4}{\log_3 x} = 3$

$t = \log_3 x$とおく

$t - \frac{4}{t} - 3 = 0$

$(t-4)(t+1) = 0$より$t = -1, 4$

$t = \log_3 x = -1, 4$ より$\boldsymbol{x = \frac{1}{3}, 81}$

[応用] x についての方程式$\log_a(x-2) - \log_a(x+1) - \log_a(x-1) = 1$が解を持つように、定数 a の値の範囲を求めよ。

[解]底の条件より$a > 0, a \neq 1$

真数条件より$x - 2 > 0, x + 1 > 0, x - 1 > 0$

よって　$x > 2$

$\log_a \frac{(x-2)}{(x+1)(x-1)} = \log_a a$

$\frac{(x-2)}{(x+1)(x-1)} = a$

$ax^2 - x - a + 2 = 0 \ \cdots$ ①

上記の式が$x > 2$において解を持てばよい

→解の配置問題(①判別式 ②軸 ③切片)

$f(x) = ax^2 - x - a + 2$とおく

$= a\left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 - \frac{1}{4a} - a + 2$

$f(2) = 3a > 0$ より異符号解はない

（ⅰ)①の判別式Dは

$D = 1 - 4a(-a+2) = 4a^2 - 8a + 1$

$D \geq 0$より$a \leq \frac{2-\sqrt{3}}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2} \leq a$

（ⅱ)軸$\frac{1}{2a} > 2$ より$a < \frac{1}{4}$

よってまとめると　$\boldsymbol{0 < a \leq \frac{2-\sqrt{3}}{2}}$

⑹対数不等式

（解法）

1. 真数条件を確認する

2. 底を揃えて、左辺・右辺ともに同じ底の対数 1 つずつになるように変形する

3. 真数の不等式を解く（底によって不等式の向きが変わる）

   $a > 1$ のとき $\log_a x < \log_a y \quad \rightarrow x < y$

   $0 < a < 1$ のとき $\log_a x < \log_a y \rightarrow x > y$

4. 真数条件と合わせる範囲を答える

例題）

（Ⅰ）$\log_3 x + \log_3(2x-1) > 1$

真数条件より $x > 0\,, 2x-1 > 0$

よって $x > \frac{1}{2}$ …①

$\log_3 x(2x-1) > \log_3 3$

底 $3 > 1$ より

$x(2x-1) > 3$

$(2x-3)(x+1) > 0$

$x < -1\,, \frac{3}{2} < x$

①と合わせると

$\boldsymbol{\frac{3}{2} < x}$

（Ⅱ）$(\log_2 x)^2 + \log_2 x^2 - 3 \leq 0$

真数条件より $x > 0\,, x^2 > 0$ より $x > 0$ …①

$t = \log_2 x$ とおく

$t^2 + 2t - 3 \leq 0$

$(t+3)(t-1) \leq 0$

$-3 \leq t \leq 1$

よって　$-3 \leq \log_2 x \leq 1$

$\frac{1}{8} \leq x \leq 2$

①と合わせると

$\boldsymbol{\frac{1}{8} \leq x \leq 2}$

[応用](Ⅲ) $\log_2 x + 3\log_x 4 - 7 < 0$

底の条件より$x > 0\,, x \neq 1$ …①

真数条件より$x > 0$ …②

$\log_2 x + 3\frac{\log_2 4}{\log_2 x} - 7 < 0$

$\log_2 x + \frac{6}{\log_2 x} - 7 < 0$

$t = \log_2 x$ とおく

$t + \frac{6}{t} - 7 < 0$

(ⅰ)$t > 0$ つまり$x > 1$ のとき

$(t-6)(t-1) < 0$ より $1 < t < 6$

よって $2 < x < 64$ → まとめると $2 < x < 64$

(ⅱ)$t < 0$ つまり $0 < x < 1$ のとき

$(t-6)(t-1) > 0$ より$t < 1\,, 6 < t$

よって $x < 2\,, 32 < x$ → まとめると $0 < x < 1$

(ⅰ)(ⅱ)より　$\boldsymbol{0 < x < 1\,, 2 < x < 64}$

(演習)

(ⅰ) $2\log_2(x-1) < \log_2(3-x)$

真数条件より$x - 1 > 0\,, 3 - x > 0$

よって$1 < x < 3$ … ①

$\log_2(x-1)^2 < \log_2(3-x)$

底 $2 > 1$ より

$(x-1)^2 < 3 - x$

$(x+1)(x-2) < 0$

$-1 < x < 2$

①と合わせると

$\boldsymbol{1 < x < 2}$

(ⅱ) $(\log_3 x)^2 - \log_3 x^2 - 8 \leq 0$

真数条件より$x > 0\,, x^2 > 0$ より$x > 0$ …①

$t = \log_3 x$ とおく

$t^2 - 2t - 8 \leq 0$

$(t-4)(t+2) \leq 0$

$-2 \leq t \leq 4$

よって　$-2 \leq \log_3 x \leq 4$

$\frac{1}{9} \leq x \leq 81$

①と合わせると

$\boldsymbol{\frac{1}{9} \leq x \leq 81}$

[応用]（ⅲ）$\log_{\frac{1}{3}} x - 2\log_x \frac{1}{9} + 3 > 0$

底の条件より$x > 0, x \neq 1$ …①

真数条件より$x > 0$ …②

$\log_{\frac{1}{3}} x - 2\frac{\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}}{\log_{\frac{1}{3}} x} + 3 > 0$

$t = \log_{\frac{1}{3}} x$ とおく

$t - \frac{4}{t} + 3 > 0$

（ⅰ）$t > 0$ つまり $0 < x < 1$ のとき

$(t+4)(t-1) > 0$ より$t < -4, 1 < t$

よって $x < 81, \frac{1}{3} < x$ → まとめると $0 < x < \frac{1}{3}$

（ⅱ）$t < 0$ つまり $1 < x$ のとき

$(t+4)(t-1) < 0$ より $-4 < t < 1$

よって$\frac{1}{3} < x < 81$ → まとめると $1 < x < 81$

（ⅰ）（ⅱ）より

$\boldsymbol{0 < x < \frac{1}{3}, 1 < x < 81}$

[応用]関数$y = -2(\log_2 x)^2 + 2\log_2 x^2 - 3\ \left(\frac{1}{4} \leq x \leq 8\right)$ の最大値・最小値とそのときの x の値を求めよ。[ヒント: $t = \log_2 x$ とおく]

[解] $t = \log_2 x$ とおく

$\frac{1}{4} < x < 8$ より $-2 < t < 3$

$y = -2t^2 + 4t - 3$

$\quad = -2(t-1)^2 - 1$

よって、

最大値 **-1($t = 1$つまり$x = 2$のとき)**

最小値 **-19($t = -2$つまり$x = \frac{1}{4}$のとき)**

[応用]$\log_2 x + \log_2 y = 3$ のとき、$4x + y$の最小値を求めよ。

また、そのときの$x\,,y$ の値を求めよ。

[解]真数条件より$x > 0\,, y > 0$

(ポイント)条件式

1 文字消去

$\log_2 x + \log_2 y = 3$ より

$xy = 8$

$y = \frac{8}{x}$

$4x + y = 4x + \frac{8}{x} \geq 2\sqrt{4x \cdot \frac{8}{x}} = 8\sqrt{2}$（相加・相乗平均の関係）

等号成立条件より

$4x = \frac{8}{x}$

$x > 0$ より $x = \sqrt{2}$

$y = \frac{8}{x} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$

よって 最小値 $\boldsymbol{8\sqrt{2}}$ **(**$\boldsymbol{x = \sqrt{2}\,, y = 4\sqrt{2}}$ **のとき)**

⑺常用対数

常用対数とは　… 底が 10 の対数のこと　$\log_{10} x$

何のために　→ 桁数問題

数が大きい場合、常用対数をとって計算すると値を小さくできる

例）

$1000 \rightarrow \log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3$

$10000 \rightarrow \log_{10} 10000 = \log_{10} 10^4 = 4$　　　［4 桁の数字の値は 3.…になる］

以上より、計算した値によって、その数の桁数がわかる

→ 具体的に正確な値はわからないが、だいたいどのくらいか(桁数)はわかる

[補足]

$a = \log_{10} 2 = 0.3010$, $b = \log_{10} 3 = 0.4771$ とする

$\log_{10} 1 = 0$

$\log_{10} 2 = a = 0.3010$

$\log_{10} 3 = b = 0.4771$

$\log_{10} 4 = \log_{10} 2^2 = 2\log_{10} 2 = 2a = 0.6020$

$\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - a = 0.6990$

$\log_{10} 6 = \log_{10} 2 \times 3 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = a + b = 0.7781$

$\log_{10} 7 = 0.8450$

$\log_{10} 8 = \log_{10} 2^3 = 3\log_{10} 2 = 3a = 0.9030$

$\log_{10} 9 = \log_{10} 3^2 = 2\log_{10} 3 = 2b = 0.9542$

例題 1)3^{20}の数の桁数と最高位の数字を求めよ

(但し、$\log_{10} 2 = 0.3010$,$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする)

[解]$x = 3^{20}$として、常用対数をとると

$\log_{10} x = \log_{10} 3^{20} = 20 \log_{10} 3$

$\log_{10} 3 = 0.4771$ を代入して

$20 \log_{10} 3 = 20 \times 0.4771 = 9.542$

$9 < \log_{10} x < 10$ より$10^9 < x < 10^{10}$

よって　**10 桁**

$x = 3^{20} = 10^{9.542} = 10^{0.542} \cdot 10^9$

桁数は整数部が表す

→小数部が最高位の数字を定める

つまり 0.542

$\log_{10} 3 < 0.542 < \log_{10} 4$

$3 < 10^{0.542} < 4$

したがって

最高位の数字は　**3**

(例題 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ を小数で表すとき、はじめて 0 でない数字が現れるのは小数第何位か。また、その数字はいくつか。(但し、$\log_{10} 2 = 0.3010$,$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする)

[解]$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ として、常用対数をとると

$\log_{10} x = \log_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = \log_{10} 2^{-20} = -20 \log_{10} 2$

$\log_{10} 2 = 0.3010$ を代入して

$-20 \log_{10} 2 = -20 \times 0.3010 = -6.020$

$-7 < \log_{10} x < -6$ より$10^{-7} < x < 10^{-6}$

よって、**小数第 7 位**

$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = 10^{-6020} = 10^{0.980} \cdot 10^{-7}$

$\log_{10} 9 < 0.980 < \log_{10} 10 = 1$

$9 < 10^{0.980} < 10$

したがって

数字は　**9**

(演習 1) 6^{20} の数の桁数と最高位の数字を求めよ。

(但し、$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする)

[解] $x = 6^{20}$ として、常用対数をとると

$\log_{10} x = \log_{10} 6^{20} = 20 \log_{10} 6 = 20(\log_{10} 2 + \log_{10} 3)$

$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ を代入して

$20(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) = 20(0.3010 + 0.4771) = 15.562$

$15 < \log_{10} x < 16$ より $10^{15} < x < 10^{16}$ より **15 桁**

$x = 10^{15.562} = 10^{0.562} \cdot 10^{15}$

$\log_{10} 3 < 0.562 < \log_{10} 4$ より最高位の数字は **3**

(演習 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{15}$ を小数で表すとき、はじめて 0 でない数字が現れるのは小数第何位か。また、その数字はいくつか。(但し、$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする)

[解] $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{15}$ として、常用対数とると

$\log_{10} x = \log_{10} \left(\frac{1}{3}\right)^{15} = \log_{10} 3^{-15} = -15 \log_{10} 3$

$\log_{10} 3 = 0.4771$ を代入して

$-15 \log_{10} 3 = -15 \times 0.4771 = -7.1565$

$-8 < \log_{10} x < -7$ より $10^{-8} < x < 10^{-7}$ より**小数第 8 位**

$x = 10^{-7.1565} = 10^{0.8435} \cdot 10^{-8}$

$\log_{10} 6 < 0.8435 < \log_{10} 7$ より数字は **6**