岡山大学

教育（学校教育教員養成課程-小学校教育コース、障害児教育コース、幼児教育コース，学校教育教員養成課程-中学校教育コース（理系））， 経済（経済(昼間コース))

数学 - 解答

[1]

(1)　$a_1=1>0$

あるkについて、$a_k>0$と仮定すると、与漸化式より、

$$a_{k+1}-a_k=a_k(5-a_{k+1})$$
$$(a_k+1)a_{k+1}=6a_k$$

$a_k+1\neq 0$より、$a_{k+1}=\dfrac{6a_k}{a_k+1}$　$\therefore a_{k+1}>0$

よって、数学的帰納法により、すべてのnについて$a_n>0$である。　(証明終)

(2)　((1)より$a_n\neq 0$なので、$\dfrac{1}{a_n}$が定義できて、$b_n=\dfrac{1}{a_n}$とおく)

(1)の経過より、$a_{n+1}=\dfrac{6a_n}{a_n+1}$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+1}{6a_n}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{a_n}$$

$$\therefore b_{n+1}=\underline{\frac{1}{6}b_n+\frac{1}{6}}\quad\cdots\cdots①$$　(答)

(3)　①を変形して、$b_{n+1}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{6}\left(b_n-\dfrac{1}{5}\right)$

よって、$\left\{b_n-\dfrac{1}{5}\right\}$は公比$\dfrac{1}{6}$の等比数列で、初項は$b_1-\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$なので、

$$b_n-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

$$\therefore b_n=\frac{1}{5}\left\{1+4\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}=\frac{1}{5}\cdot\frac{6^{n-1}+4}{6^{n-1}}$$

$$\therefore a_n=\frac{1}{b_n}=\underline{\frac{5\cdot 6^{n-1}}{6^{n-1}+4}}$$　(答)

このウインドウを閉じる