指数・対数関数

①指数関数

⑴指数・指数関数とは

例）2^3 , $(-2)^4$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

a^b ← a を_____、b を________（______）とよぶ

指数関数とはb（______）の部分が変化していく関数

⑵指数計算

<指数法則> $a \neq 0$, $b \neq 0$, m, n は有理数

- $a^m a^n = a^{m+n}$　　例）$2 \cdot 4 = 2 \quad \cdot 2 \quad = 8 = 2$　→ ___ ＋ ___ ＝ ___
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$　　例）$\frac{8}{2} = \frac{2}{2} = 4 = 2$　→ ___ − ___ ＝ ___
- $(a^m)^n = a^{mn}$　　例）$(2^3)^2 = 8^2 = 64 = 2$　→ ___ × ___ ＝ ___
- $(ab)^n = a^n b^n$　　例）$(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36 = 2 \quad \cdot 3$
- $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$　　例）$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = \frac{3}{2}$

以上が指数法則と呼ばれる計算だが、暗記する必要はなく、例のように具体例使って計算すればどうなっているかわかる

（キーワード）

掛け算は__________

割り算は__________

（ポイント）

1．0 乗は＿＿＿＿　　　　　例）$2^0 = 1$, $(-3)^0 = 1$

2．$-$は＿＿＿＿＿＿　　　例）$2^{-2} = \frac{1}{2^2}$, $(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3}$

例題）

（Ⅰ）$a^6 \times a^{-2}$　　　（Ⅱ）$a^3 \div (a^3)^{-3}$　　　（Ⅲ）$2^7 \div 2^2 \times 2^{-3}$

（演習）

（ⅰ）$a^4 \times a^{-3}$　　　（ⅱ）$a^2 \div a^{-5}$　　　（ⅲ）$(a^3)^{-2}$

（iv）$2^3 \times 2^{-5} \div 2^2$　　　　（ｖ）$(3^2)^{-3} \times 3^3 \div 3^{-4}$

（vi）$(2^{-3} \times 2^6)^3 \div 16$

⑶累乗根の計算

これから指数に有理数(分数)が含まれる計算を行っていく

$x^n = a$ の解をx のn 乗根と言い、その解を $x =$ ＿＿＿ とかく

例題) $x^3 = a$　　　　$x^5 = a^3$　　　　$x^4 = 3$

$x =$　　　　$x =$　　　　$x =$

(注意)**$\sqrt[2]{a}$ は$\sqrt{a}$ のように2が省略される**

次に上記の形を本来の指数の形に持っていきたい

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$$

よって、上記の答えはそれぞれ

$\sqrt[3]{a}=a^{-}$ ，$\sqrt[5]{a^3}=a^{-}$ ，$\sqrt[4]{3}=3^{-}$ と変形出来る

本来の指数の形に持っていけば、指数法則を使って計算できる

<累乗根の法則>

- $\sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{a}}\sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{b}}=a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}=(ab)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{ab}}$
- $\dfrac{\sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{a}}}{\sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{b}}}=\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[\boldsymbol{n}]{\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}}$
- $(\sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{a}})^{\boldsymbol{m}}=(a^{\frac{1}{n}})^{m}=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{a^m}}$
- $\sqrt[\boldsymbol{m}]{\sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{a}}}=\sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}}=(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{mn}}=\sqrt[\boldsymbol{mn}]{\boldsymbol{a}}$
- $\sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{a^m}}=a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mp}{np}}=\sqrt[\boldsymbol{np}]{\boldsymbol{a^{mp}}}$

例題)

(Ⅰ) $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{16}$ (Ⅱ) $\dfrac{\sqrt[6]{27}}{\sqrt[6]{3}}$ (Ⅲ) $\sqrt[3]{\sqrt{125}}$

(ポイント)

計算するとき、底は一番__________に合わせると良い

(演習)

(i) $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{3}} \div 3^{\frac{1}{6}}$　(ii) $\sqrt[4]{2^3} \times \sqrt{2}$　(iii) $\sqrt{\sqrt[3]{36}}$

(iv) $(\sqrt[6]{27})^2$　(v) $\frac{\sqrt[5]{128}}{\sqrt[5]{4}}$

[応用]

(vi) $\sqrt{2}\sqrt[6]{200}\sqrt[3]{25}$　(vii) $\sqrt{\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}}$

(ⅷ) $(a^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}})$

⑷指数関数のグラフ

$y=3^x$ と $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
3^x							
$\left(\frac{1}{3}\right)^x$							

（グラフの性質）$y = a^x$

1. 定義域(x の範囲)は________全体で値域(y の範囲)は__________全体

2. $a > 1$ のとき____________（常に増加する）

   $0 < a < 1$のとき____________（常に減少する）

   → y のある値に対して、それをみたす x が **1 つ**に定まる

3. $(0\,,1)$ を通り、x 軸に_________する(y の値は 0 に近づくが 0 にはならない)

(注意)

$a \leq 0\,, a = 1$ のグラフは基本的に出でこない(出せない)

(理由)

$y = 0^x$については0^0の値が定まらない

$y = 1^x$についてはどんなxに対しても$y = 1$ となるので直線になるから

$a < 0$ のときの$y = a^x$ は $a^{\frac{3}{2}} = a^{1.5}$などの指数部が整数以外の符号が定まらない

(まとめ)

底a が $a > 1$ の時と $0 < a < 1$ でグラフが変わる(グラフは概形が分かれば良い)

→考える関数の底がどっちのグラフになるのか考えること

⑸指数の大小関係

例題)次の数の大小を比較せよ

(Ⅰ)$\sqrt[4]{5}\,,\sqrt[8]{15}$　　　　(Ⅱ)$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{5}},2^{\frac{1}{3}},4^{\frac{1}{4}}$

(不等式の性質)

$a>0\,,b>0\,,n$は有理数

$a>b\rightarrow a^n>b^n$

指数関数は常に正の数になるので何乗しても良い

(演習)次の数の大小を比較せよ

(ⅰ)$\sqrt[3]{4}\,,\sqrt[6]{14}$　　　　(ⅱ)$\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}},3^{\frac{1}{3}},9^{\frac{1}{8}}$

⑹指数方程式

（解法）

1. ＿＿（＿＿＿＿＿）を揃えるように変形する

2. 指数部の等式を解く

例題 1）

（Ⅰ）$3^{x+2} = 27$　　（Ⅱ）$\left(\frac{1}{2}\right)^{x(x+3)} = 4$

（演習）

（ⅰ）$4^{x-3} = 64$　　（ⅱ）$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 27$

[応用]

（ⅲ）$3 \cdot 9^{x} = 1$

例題 2)置き換え

（Ⅰ）$2^{2x} - 3 \cdot 2^{x} + 2 = 0$

(演習)

（ⅰ）$3^{2x} + 8 \cdot 3^{x} - 9 = 0$

（ⅱ）$4^{x} - 5 \cdot 2^{x+2} + 64 = 0$

[応用]

$y = 4^x - 2^{x+1}$ の最小値とそのときの x の値を求めよ(ヒント: $t = 2^x$ とおく)

⑺指数不等式

(解法)

1. ______(____________)を揃えるように変形する

2. 指数部の不等式を解く(底によって不等号の向きが変わる)

$a > 1$ のとき $a^x > a^y \rightarrow$

$0 < a < 1$ のとき $a^x > a^y \rightarrow$

例題 1)

(Ⅰ) $2^x > 8$

(Ⅱ) $3^{x-2} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3$

(演習)

（ｉ）$4^{x-1} < 64$

（ⅱ）$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} \geq 64$

例題 2)置き換え

（Ⅰ）$3^{2x} + 3^{x} - 12 \geq 0$

(演習)

（ｉ）$4^{2x} - 15 \cdot 4^{x} - 16 \geq 0$

（ⅱ）$4^{x} \leq 2(1 + 2^{x-1})$

（iii）$\left(\frac{1}{9}\right)^x - \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} - 54 < 0$

⑻[応用]式の値

(問題)関数 $y = 4^x + 4^{-x} - 4(2^x + 2^{-x}) + 7 \cdots$① について最小値を求めよ

(step1) $t = 2^x + 2^{-x}$ とおく

$t^2 =$

①の式を t を使って表すと

t の定義域は＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿より

$2^x + 2^{-x}$

よって最小値は$t =$　　のとき

そのときの x は＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿より

②対数関数

⑴対数・対数関数とは

指数関数から派生してできた関数

例）$\log_2 6$ ，$2\log_5 4$

$2^x = 4 \ \rightarrow \ x = 2$

$2^x = 3 \ \rightarrow \ x = ? \qquad \leftarrow$ ________

よって $a > 0, a \neq 1, R > 0$

$\boldsymbol{a^r = R \ \leftrightarrow \ r = \log_a R}$

$\log_a R$ において a の部分を______、R の部分を________という

対数関数とはR（_______）が変化していく関数

⑵対数計算

<対数の性質> $a > 0, a \neq 1, R > 0, S > 0, p$は有理数

1. $\log_a RS = \log_a R + \log_a S$ 　　例）$\log_2 15 = \log_2 3 \cdot 5 = \log_2 3 + \log_2 5$

2. $\log_a \frac{R}{S} = \log_a R - \log_a S$ 　　例）$\log_2 \frac{5}{3} = \log_2 5 - \log_2 3$

3. $\log_a R^p = p\log_a R$ 　　例）$\log_2 5^3 = 3\log_2 5$

4. $\log_a a = 1$ 　　例）$\log_2 2 = 1$

5. $\log_a 1 = 0$ 　　例）$\log_2 1 = 0$

(証明)

1. $\log_a R = x$, $\log_a S = y$ として $\log_a RS = x + y$ を示す

$\log_a R = x$ より $R = a^x$, $\log_a S = y$ より $S = a^y$

$RS = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

よって　$x + y = \log_a RS$

2. 1と同様に $\log_a \frac{R}{S} = x - y$ を示す

$\frac{R}{S} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

よって　$x - y = \log_a \frac{R}{S}$

3. $\log_a R = x$ として $\log_a R^p = px$ を示す

$\log_a R = x$ より $R = a^x$

両辺 p 乗すると $R^p = (a^x)^p = a^{px}$

よって　$px = \log_a R^p$

4. $a^1 = a$ より

$1 = \log_a a$

5. $a^0 = 1$ より

$0 = \log_a 1$

例題）

（Ⅰ）$\log_2 16$

（Ⅱ）$\log_3 \sqrt[3]{9}$

（Ⅲ）$\log_3 12 + \log_3 36 + \log_3 \frac{1}{16}$

（Ⅳ）$\log_{10} \sqrt{2} - \frac{1}{2}\log_{10} \frac{1}{3} - \frac{3}{2}\log_{10} \sqrt[3]{6}$

（演習）

（ⅰ）$\log_4 64$

（ⅱ）$\log_5 \frac{1}{\sqrt{125}}$

（iii）$\log_{10} 2 + \log_{10} \sqrt{15} - \frac{1}{2} \log_{10} \frac{3}{5}$　　　（iv）$3 \log_4 2 - \frac{1}{2} \log_4 7 + \log_4 \frac{\sqrt{7}}{2}$

<底の変換公式>

次に底が異なっていたらどのように計算するのか

→底を揃えると計算できる

→底を揃うように変形したい

$$\boldsymbol{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

(証明)

$\log_a b = x$ とすると$b = a^x$

両辺にc が底の対数を取ると

$\log_c b = \log_c a^x = x \log_c a$

$$x = \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

(ポイント)揃える底は＿＿＿＿＿＿＿＿＿にすること

例題)以下の式を底の変換公式で変形せよ

（Ⅰ）$\log_{81} 3\sqrt{3}$

（Ⅱ）$\log_{\frac{1}{25}} 5\sqrt[4]{5}$

（Ⅲ）$\log_2 5 \cdot \log_5 8$

（Ⅳ）$\log_2 3 \cdot \log_3 8 \cdot \log_4 8$

(演習)以下の式を底の変換公式で変形せよ

(ⅰ) $\log_{16} 1024$

(ⅱ) $\log_{\frac{1}{8}} 128$

(ⅲ) $\log_3 6 \cdot \log_6 9$

(ⅳ) $\log_4 3 \cdot \log_9 25 \cdot \log_5 2$

[応用](ⅴ) $3^{4\log_3 2}$

⑶対数関数のグラフ

$y=\log_3 x$ と $\log_{\frac{1}{3}} x$

x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
$\log_3 x$							
$\log_{\frac{1}{3}} x$							

（グラフの性質）$y=\log_a x$

1. 定義域(x の範囲)は__________全体で値域(y の範囲)は________全体

2. $a>1$ のとき____________(常に増加する)

   $0<a<1$ のとき____________(常に減少する)

   →y のある値に対して、それをみたすx が **1 つ**に定まる

3. $(1,0)$ を通り、y 軸に________する(x の値は 0 に近づくが 0 にはならない)

4. $y=a^x$ のグラフと ___________に関して**対称**

[応用]逆関数(詳しくは数学Ⅲで)

x と y を入れ替えてできる関数を逆関数といい、$y=x$ に関して対称となる

$y=a^x \ \leftrightarrow \ x=\log_a y$

右側の式の x と y を入れ替えると $y=\log_a x$

(他の例)

$y=x^2$ と $y=\pm\sqrt{x}$ 　$y=\sin x$ と $y=\sin^{-1} x$

⑷対数の大小関係

例題)

(Ⅰ) $2, \log_3 7$ 　　　　(Ⅱ) $\log_2 3, \log_4 7, \log_8 28$

(演習)

(ⅰ) $3, \log_2 9$

（ⅱ）$\log_3 5$ ，$\log_9 20$ ，$\log_{27} 126$

⑸対数方程式

(解法)

1. ＿＿＿＿＿＿を確認する

2. ＿＿を揃えて、左辺・右辺ともに同じ底の対数 1 つずつになるように変形する

3. 真数の等式を解く

4. 真数条件を満たしているか確認する

例題 1)

（Ⅰ）$\log_2 x + \log_2(x-2) = 3$

（Ⅱ）$(\log_{10} x)^2 - 4\log_{10} x + 3 = 0$

[応用]（Ⅲ）$\log_2 8x - 6\log_x 2 = 4$

（演習）

（ⅰ）$\log_{12} x + \log_{12}(x+1) = 1$

（ⅱ）$(\log_2 x)^2 - \log_2 x^3 + 2 = 0$

[応用]（ⅲ）$\log_3 x - \log_x 81 = 3$

[応用] x についての方程式 $\log_a(x-2)-\log_a(x+1)-\log_a(x-1)=1$ が解を持つように、定数 a の値の範囲を求めよ。

⑹対数不等式

(解法)

1. ____________を確認する
2. ____を揃えて、左辺・右辺ともに同じ底の対数 1 つずつになるように変形する
3. 真数の不等式を解く(底によって不等式の向きが変わる)

   $a>1$ のとき $\log_a x<\log_a y$ $\quad\rightarrow$

   $0<a<1$ のとき $\log_a x<\log_a y$ $\rightarrow$

4. 真数条件と合わせる範囲を答える

例題）

（Ⅰ）$\log_3 x + \log_3(2x-1) > 1$　　（Ⅱ）$(\log_2 x)^2 + \log_2 x^2 - 3 \leq 0$

[応用]（Ⅲ）$\log_2 x + 3\log_x 4 - 7 < 0$

(演習)

(ｉ) $2\log_2(x-1) < \log_2(3-x)$

(ii) $(\log_3 x)^2 - \log_3 x^2 - 8 \leq 0$

[応用](iii) $\log_{\frac{1}{3}} x - 2\log_x \frac{1}{9} + 3 > 0$

[応用]関数$y = -2(\log_2 x)^2 + 2\log_2 x^2 - 3\ \left(\frac{1}{4} \leq x \leq 8\right)$ の最大値・最小値とその時の x の値を求めよ。[ヒント: $t = \log_2 x$ とおく]

[応用] $\log_2 x + \log_2 y = 3$ のとき、$4x + y$の最小値を求めよ。

また、そのときのx, y の値を求めよ。

⑺常用対数

常用対数とは　… 底が 10 の対数のこと　$\log_{10} x$

何のために　→ 桁数問題

数が大きい場合、常用対数をとって計算すると値を小さくできる

例）

$1000 \to \log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3$

$10000 \to \log_{10} 10000 = \log_{10} 10^4 = 4$　　　　　[4 桁の数字の値は 3.…になる]

以上より、計算した値によって、その数の桁数がわかる

→ 具体的に正確な値はわからないが、だいたいどのくらいか(桁数)はわかる

[補足]

$a = \log_{10} 2 = 0.3010$, $b = \log_{10} 3 = 0.4771$ とする

$\log_{10} 1 =$

$\log_{10} 2 =$

$\log_{10} 3 =$

$\log_{10} 4 =$

$\log_{10} 5 =$

$\log_{10} 6 =$

$\log_{10} 7 =$

$\log_{10} 8 =$

$\log_{10} 9 =$

例題 1)3^{20}の数の桁数と最高位の数字を求めよ

(但し、$\log_{10} 2 = 0.3010$,$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする)

(例題 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ を小数で表すとき、はじめて 0 でない数字が現れるのは小数第何位か。また、その数字はいくつか。(但し、$\log_{10} 2 = 0.3010$,$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする)

(演習 1) 6^{20} の数の桁数と最高位の数字を求めよ。

（但し、$\log_{10} 2 = 0.3010$,$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする）

(演習 2)$\left(\frac{1}{3}\right)^{15}$ を小数で表すとき、はじめて 0 でない数字が現れるのは小数第何位か。また、その数字はいくつか。（但し、$\log_{10} 2 = 0.3010$,$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする）