4

以下では，複合同順とする。

(1)

n を自然数とするとき，ある自然数 a と b を用いて，

$$\left(2\pm\sqrt{3}\right)^n=a\pm b\sqrt{3} \qquad \cdots(*)$$

とかけることを数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき，

明らかに(*)が成り立つ。

[2] $n=k$ のとき，(*)が成り立つと仮定する。

すなわち，自然数 a_k, b_k を用いて，

$$\left(2\pm\sqrt{3}\right)^k=a_k\pm b_k\sqrt{3}$$

が成り立つと仮定する。このとき，

$$\begin{aligned}\left(2\pm\sqrt{3}\right)^{k+1}&=\left(2\pm\sqrt{3}\right)^k\left(2\pm\sqrt{3}\right)\\&=\left(a_k\pm b_k\sqrt{3}\right)\left(2\pm\sqrt{3}\right)\\&=\left(2a_k+3b_k\right)\pm\left(a_k+2b_k\right)\sqrt{3}\end{aligned}$$

となるが，$2a_k+3b_k$, a_k+2b_k はそれぞれ自然数であり，これらを

$a_{k+1}=2a_k+3b_k$, $b_{k+1}=a_k+2b_k$

とおくと，

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{k+1}=a_{k+1}+b_{k+1}\sqrt{3}$$

となり，$n=k+1$ のときも，(*)が成り立つ。

以上[1], [2]より，すべての自然数 n について，(*)が成り立つ。

(証明終)

(2)

(1)より，

$$\begin{aligned}a^2-3b^2&=\left(a+b\sqrt{3}\right)\left(a-b\sqrt{3}\right)\\&=\left(2+\sqrt{3}\right)^n\left(2-\sqrt{3}\right)^n\\&=1\end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)

(2)より，

$$3b^2 = a^2 - 1$$

である。よって，

$$\begin{aligned}\left(2 \pm \sqrt{3}\right)^n &= a \pm b\sqrt{3} \\ &= \sqrt{a^2} \pm \sqrt{3b^2} \\ &= \sqrt{a^2} \pm \sqrt{a^2 - 1}\end{aligned}$$

となるので，$a^2 = m$（自然数）とおけば，

$$\left(2 \pm \sqrt{3}\right)^n = \sqrt{m} \pm \sqrt{m-1}$$

とかけることが示された。

(証明終)

このウインドウを閉じる