東北大学

法（法），文（人文社会），教育（教育科），経済（経済、経営），医（保健(看護学専攻))

数学 - 解答

$\boxed{1}$

(1)　$3^x=t$ とおくと、

$$\begin{cases} x \geqq -1 \\ 2\cdot 3^x + a\cdot 3^{-x} \leqq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} t \geqq \dfrac{1}{3} & \cdots ① \\ 2t+\dfrac{a}{t} \leqq 1 & \cdots ② \end{cases}$$

①のとき、

② $\Leftrightarrow$ $2t^2-t+a \leqq 0$

であり、これが①を満たす実数解 t を持てばよいから、

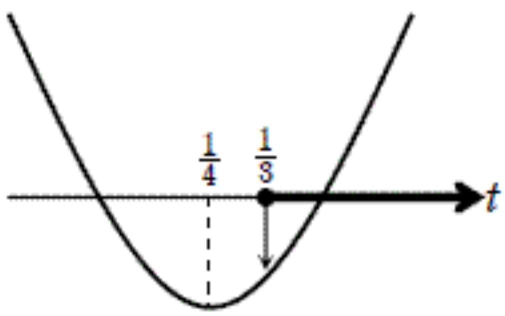
左辺を $f(t)$ とおいて、

$$f(t)=2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+a-\frac{1}{8}$$

から、

$$f\left(\frac{1}{3}\right) \leqq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a \leqq \frac{1}{9} \quad \cdots 答$$



(2)　(1)と同様に $3^x=t$ とおくと、

$$\begin{cases} x \geqq -1 \\ 3^x + a\cdot 3^{-x} \geqq a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} t \geqq \dfrac{1}{3} & \cdots ③ \\ t+\dfrac{a}{t} \geqq a & \cdots ④ \end{cases}$$

③のとき、

④ $\Leftrightarrow$ $t^2-at+a \geqq 0$

であり、これが③の範囲で常に成立すればよいから、

左辺を $g(t)$ とおいて、

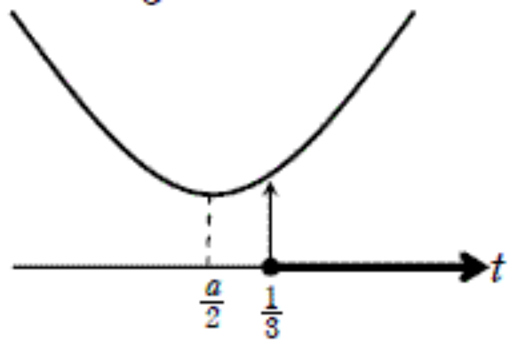
$$g(t)=\left(t-\frac{a}{2}\right)^2+a-\frac{a^2}{4}$$

から、

(ⅰ)　$\dfrac{a}{2}<\dfrac{1}{3}$　つまり　$a<\dfrac{2}{3}$ のとき、

$g\left(\dfrac{1}{3}\right)\geqq 0$

$\Leftrightarrow\quad a\geqq -\dfrac{1}{6}$

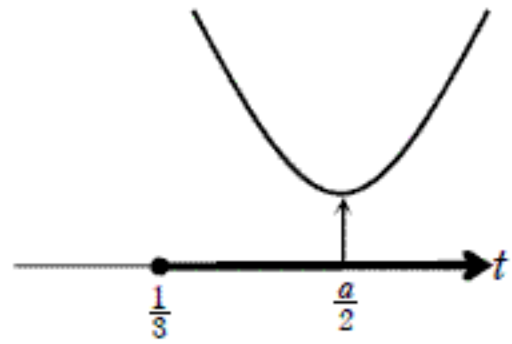


(ⅱ)　$\dfrac{1}{3}\leqq\dfrac{a}{2}$　つまり　$\dfrac{2}{3}\leqq a$ のとき、

$g\left(\dfrac{a}{2}\right)\geqq 0$

$\Leftrightarrow\quad a-\dfrac{a^2}{4}\geqq 0$

$\Leftrightarrow\quad 0\leqq a\leqq 4$



以上あわせて、

$-\dfrac{1}{6}\leqq a\leqq 4$　…答

このウインドウを閉じる