## 静岡大学

教育(学校教育教員養成課程(発達教育学専攻(教育実践学専修、教育心理学専修、幼児教育専修)、特別支援教育専攻、教科教育学専攻(国語教育専修、社会科教育専修、数学教育専修、理科教育専修、技術教育育専修、家庭科教育専修、英語科教育専修),生涯教育課程(国際理解教育専攻),総合科学教育課程(総合科学専攻、消費生活科学専攻)),農(共生バイオサイエンス、応用生物化、環境森林科),理(生物科,地球科)

## 数学 - 解答

4

以下では、複合同順とする。

(1)

nを自然数とするとき,ある自然数aとbを用いて,

$$\left(2\pm\sqrt{3}\right)^n = a\pm b\sqrt{3}$$

とかけることを数学的帰納法を用いて示す。

- [1] n=1のとき、 明らかに(\*)が成り立つ。
- [2] n=kのとき、(\*)が成り立つと仮定する。 すなわち、自然数a, b, を用いて、

$$(2\pm\sqrt{3})^k = a_k \pm b_k \sqrt{3}$$

が成り立つと仮定する。このとき,

$$(2\pm\sqrt{3})^{k+1} = (2\pm\sqrt{3})^k (2\pm\sqrt{3})$$
  
=  $(a_k \pm b_k \sqrt{3})(2\pm\sqrt{3})$   
=  $(2a_k + 3b_k)\pm(a_k + 2b_k)\sqrt{3}$ 

となるが、 $2a_k + 3b_k$ 、 $a_k + 2b_k$  はそれぞれ自然数であり、これらを

$$a_{k+1} = 2a_k + 3b_k,\, b_{k+1} = a_k + 2b_k$$

とおくと.

$$(2+\sqrt{3})^{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1}\sqrt{3}$$

となり、n=k+1のときも、(\*)が成り立つ。

以上[1], [2]より、すべての自然数nについて、(\*)が成り立つ。

(証明終)

(2)

(1)より、

$$a^{2}-3b^{2} = \left(a+b\sqrt{3}\right)\left(a-b\sqrt{3}\right)$$
$$= \left(2+\sqrt{3}\right)^{n}\left(2-\sqrt{3}\right)^{n}$$
$$= 1$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)

(2)より,

$$3b^2 = a^2 - 1$$

である。よって,

$$(2\pm\sqrt{3})^n = a\pm b\sqrt{3}$$
$$= \sqrt{a^2} \pm \sqrt{3b^2}$$
$$= \sqrt{a^2} \pm \sqrt{a^2-1}$$

となるので、 $a^2=m$  (自然数) とおけば、

$$\left(2\pm\sqrt{3}\,\right)^n=\sqrt{m}\,\pm\sqrt{m\!-\!1}$$

とかけることが示された。

(証明終)

このウインドウを閉じる

Copyright (c) 1999-2014 Nagase Brothers Inc.