ベクトル

・基本性質

① ベクトルの足し算　$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}$

② 始点変更　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

③ 内積　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$　(θは$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角)

$\vec{a}=(a_1,a_2)$ $\vec{b}=(b_1,b_2)$ $\rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}\,|^2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

④ 成分の大きさ　$\vec{a}=(a_1,a_2)\ \rightarrow\ |\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$

⑤ 成分計算　$\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2)$ $\overrightarrow{OB}=(b_1,b_2)$

$\rightarrow$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(b_1-a_1,b_2-a_2)$

⑥ 単位ベクトル　$\vec{a}\ \rightarrow\ \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$(大きさ 1 のベクトル)

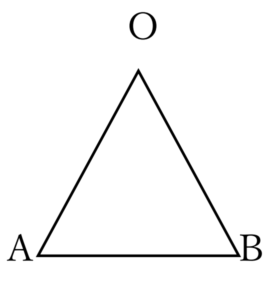
・平行と垂直

$\vec{a}$と$\vec{b}$が平行　→ $\boldsymbol{\vec{a}=k\vec{b}}$となる実数$k$が存在

$\vec{a}$と$\vec{b}$が垂直　→ $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=0}$

・三角形の面積

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}=(a_1,a_2)$ $\overrightarrow{OB}=\vec{b}=(b_1,b_2)$とすると



$\varDelta ABC$の面積Sは

$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|}$$

（証明）

内積の公式 $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ より

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

三角比の相互関係 $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$より

$$\sin\theta = \sqrt{1 - cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\overline{|\vec{a}||\vec{b}|}}\right)^2} = \sqrt{\frac{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}} = \frac{1}{|\vec{a}||\vec{b}|}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

三角比の面積公式 $S = \frac{1}{2}ab\sin\theta$より

$$S = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\frac{1}{|\vec{a}||\vec{b}|}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

$|\vec{a}|^2 = {a_1}^2 + {a_2}^2$ $|\vec{b}|^2 = {b_1}^2 + {b_2}^2$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$より

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{({a_1}^2 + {a_2}^2)({b_1}^2 + {b_2}^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left({a_1}^2{b_1}^2 + {a_1}^2{b_2}^2 + {a_2}^2{b_1}^2 + {a_2}^2{b_2}^2\right) - ({a_1}^2{b_1}^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + {a_2}^2{b_2}^2)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{{a_1}^2{b_2}^2 - 2a_1b_2a_2b_1 + {a_2}^2{b_1}^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$$

・内分と外分

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}\,,\overrightarrow{OB}=\vec{b}$として線分$AB$を$m:n$に内分する点を$P$とすると

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OP}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}}$$

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}\,,\overrightarrow{OB}=\vec{b}$として線分$AB$を$m:n$に外分する点を$Q$とすると$(m:-n$に内分すると$)$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OQ}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}}$$

・共線条件(A,B,C が一直線上)

① $\boldsymbol{\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}}$ **($\boldsymbol{k}$ は実数)**

② $\overrightarrow{OA}=\vec{a}\,,\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とすると

$$\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OC}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}}$$ **($\boldsymbol{t}$ は実数)**

(内分の公式 $m=t\,,n=1-t$とした)

(注)始点が直線上にあれば①、無ければ②を使う

・共面条件(A,B,C,D が同一平面上)

① $\boldsymbol{\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}}$ $\left(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}\text{は実数}\right)$　　→**平面上の点は二つのベクトルで表せる**

② $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とすると

$$\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = m\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) + n(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB} - m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OC} - n\overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OD} = (1 - m - n)\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OC}$$

$l = 1 - m - n$とおくと

$\boldsymbol{\overrightarrow{OD} = l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}}$　　$(\boldsymbol{l + m + n = 1})$

(注)始点が平面上にあれば①、無ければ②を使う

・ベクトル方程式(直線の媒介変数表示)

ある点 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$を通り、方向ベクトル $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ とする直線上の点

$\vec{p} = (x, y, z)$ は

$\boldsymbol{\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u}}$ ($\boldsymbol{t}$**は実数**)

成分で書くと

$$\vec{a} + t\vec{u} = \left(a_x, a_y, a_z\right) + t\left(u_x, u_y, u_z\right)$$

$$= (a_x + tu_x, a_y + tu_y, a_z + tu_z)$$ より

$\boldsymbol{x = a_x + tu_x, y = a_y + tu_y, z = a_z + tu_z}$