数学 - 解答

2

(1)

点Pは線分OBを2:1に内分する点であるから,

$$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}\vec{b}$$

である。また, 点Qについて, 線分CPを$t:1-t\ (0<t<1)$に内分する点であるので,

$$\overrightarrow{OQ}=t\overrightarrow{OP}+(1-t)\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}t\vec{b}+(1-t)\vec{c}$$

である。

(答) $\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\vec{b},\ \overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}t\vec{b}+(1-t)\vec{c}$

(2)

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$であり, また, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot1\cdot\cos60°=\frac{1}{2}$である。これらを用いると,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OQ}|^2&=\left|\frac{2}{3}t\vec{b}+(1-t)\vec{c}\right|^2\\&=\frac{4}{9}t^2|\vec{b}|^2+\frac{4}{3}t(1-t)\vec{b}\cdot\vec{c}+(1-t)^2|\vec{c}|^2\\&=\frac{7}{9}t^2-\frac{4}{3}t+1\end{aligned}$$

$$\therefore|\overrightarrow{OQ}|=\frac{1}{3}\sqrt{7t^2-12t+9}$$

となる。また,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}&=\vec{a}\cdot\left\{\frac{2}{3}t\vec{b}+(1-t)\vec{c}\right\}\\&=\frac{2}{3}t\vec{a}\cdot\vec{b}+(1-t)\vec{a}\cdot\vec{c}\\&=-\frac{1}{6}t+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。

(答) $|\overrightarrow{OQ}|=\frac{1}{3}\sqrt{7t^2-12t+9},\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}=-\frac{1}{6}t+\frac{1}{2}$

(3)

(2)の結果を用いると,

$$\begin{aligned}S(t)&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OQ}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{1\cdot\left(\frac{7}{9}t^2-\frac{4}{3}t+1\right)-\left(-\frac{1}{6}t+\frac{1}{2}\right)^2}\\&=\frac{1}{4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{9t^2-14t+9}\end{aligned}$$

となる。

(答) $S(t)=\frac{1}{4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{9t^2-14t+9}$

(4)

$9t^2-14t+9=9\left(t-\frac{7}{9}\right)^2+\frac{32}{9}$ であるから，$9t^2-14t+9$ は $0<t<1$ の範囲で $t=\frac{7}{9}$ のとき最小値

$\frac{32}{9}$ をとる。よって，$t_0=\frac{7}{9}$ であり，

$$S(t_0)=\frac{1}{4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\frac{32}{9}}=\frac{\sqrt{6}}{9}$$

である。

(答) $t_0=\frac{7}{9}$, $S(t_0)=\frac{\sqrt{6}}{9}$

このウインドウを閉じる