積分公式集

(1) $\frac{1}{6}$ 公式

$$\boldsymbol{\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

(証明)

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx &= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\alpha+\alpha-\beta)\,dx \\
&= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}\,dx \\
&= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\,dx \\
&= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2\,dx-(\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta (x-\alpha)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^\beta-(\beta-\alpha)\left[\frac{1}{2}(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta \\
&= \frac{1}{3}\{(\beta-\alpha)^3-(\alpha-\alpha)^3\}-\frac{\beta-\alpha}{2}\{(\beta-\alpha)^2-(\alpha-\alpha)^2\} \\
&= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3 \\
&= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3
\end{aligned}$$

[使用する場合]

<u>**共有点**が**積分範囲**の場合</u>

[注]・但し、直線と 2 次関数または 2 次関数同士の共有点に限る

・たまに 3 次関数同士の共有点で使える時もあるが、それは 3 次関数同士の共有点が 2 つ、つまり平行移動の関係にある場合のみなので使えることはほとんどなく、使わない方が良い

⑵ $\frac{1}{12}$ 公式

① $\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$

② $\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$

(証明)

① $\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}\,dx$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^3\,dx-(\beta-\alpha)\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}(x-\alpha)^4\right]_{\alpha}^{\beta}-(\beta-\alpha)\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^4-\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^4$$

$$=-\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

② $\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\beta)+(\beta-\alpha)\}(x-\beta)^2\,dx$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\beta)^3\,dx+(\beta-\alpha)\int_{\alpha}^{\beta}(x-\beta)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}(x-\beta)^4\right]_{\alpha}^{\beta}+(\beta-\alpha)\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=-\frac{1}{4}(\alpha-\beta)^4-\frac{\beta-\alpha}{3}(\alpha-\beta)^3$$

$$=\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^4+\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^4$$

$$=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

[使用する場合]

3 次関数と 3 次関数上の点における**接線**で**囲まれる領域**の面積を求める場合

(積分範囲が接点ともう一つの共有点からなる)