微分　応用問題集

(例題 1)関数 $f(x) = 2x^3 - 3kx^2 + k^2x$ の極大値と極小値との差が 1 となるような

定数 k を求めよ

[解] $f'(x) = 6x^2 - 6kx + k^2$

極値を持つ $\leftrightarrow$ $f'(x)$ の判別式 $D > 0$

$\dfrac{D}{4} = (-3k)^2 - 6 \cdot k^2 = 3k^2 > 0$ より $k \neq 0$

$f'(x) = 0$ の解 $\alpha, \beta\ (\alpha < \beta)$ とすると

解と係数の関係から

$\alpha + \beta = k\ , \alpha\beta = \frac{k^2}{6}$

3 次関数の x^3 の係数が正より

$f(\alpha)$ が極大値、$f(\beta)$ が極小値となるので

$$
\begin{aligned}
f(\alpha) - f(\beta) &= (2\alpha^3 - 3k\alpha^2 + k^2\alpha) - (2\beta^3 - 3k\beta^2 + k^2\beta) \\
&= 2(\alpha^3 - \beta^3) - 3k(\alpha^2 - \beta^2) + k^2(\alpha - \beta) \\
&= (\alpha - \beta)\{2(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) - 3k(\alpha + \beta) + k^2\} \\
&= (\alpha - \beta)\{2(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - 3k(\alpha + \beta) + k^2\}
\end{aligned}
$$

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = k^2 - \frac{2}{3}k^2 = \frac{1}{3}k^2$ より

$\alpha - \beta = -\frac{|k|}{\sqrt{3}}\ \left(\alpha < \beta より\right)$

よって

$$
\begin{aligned}
f(\alpha) - f(\beta) &= -\frac{|k|}{\sqrt{3}}\left(2k^2 - 2 \cdot \frac{k^2}{6} - 3k \cdot k + k^2\right) \\
&= \left|\frac{k}{\sqrt{3}}\right|^3 = 1
\end{aligned}
$$

より $\boldsymbol{k = \pm\sqrt{3}}$ $\left(k \neq 0 を満たす\right)$

(演習)関数 $f(x)=x^3+x^2+kx-1$ の極大値と極小値との差が 4 となるような定数 k を求めよ

[解]

$f'(x)=3x^2+2x+k$

$\frac{D}{4}=1-3k>0$ より $k<\frac{1}{3}$

$f'(x)=0$ の解 $\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$ とすると

解と係数の関係から

$\alpha+\beta=-\dfrac{2}{3},\alpha\beta=\dfrac{k}{3}$

3 次関数の x^3 の係数が正より

$f(\alpha)$ が極大値、$f(\beta)$ が極小値となるので

$$\begin{aligned} f(\alpha)-f(\beta)&=(\alpha^3+\alpha^2+k\alpha-1)-(\beta^3+\beta^2+k\beta-1)\\ &=(\alpha^3-\beta^3)+(\alpha^2-\beta^2)+k(\alpha-\beta)\\ &=(\alpha-\beta)\{(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha+\beta)+k\}\\ &=(\alpha-\beta)\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta+(\alpha+\beta)+k\} \end{aligned}$$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\left(-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{3}k=\frac{4-12k}{9}$ より

$\alpha-\beta=-\frac{2\sqrt{1-3k}}{3}\left(\alpha<\beta\text{より}\right)$

よって

$f(\alpha)-f(\beta)=-\frac{2\sqrt{1-3k}}{3}\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{3}k-\frac{2}{3}+k\right)=-\frac{2\sqrt{1-3k}}{3}\cdot\left\{-\frac{2(1-3k)}{9}\right\}=\frac{4}{27}(1-3k)^{\frac{3}{2}}=4$ より

$(1-3k)^{\frac{3}{2}}=27$

$(1-3k)^{\frac{3}{2}}=9^{\frac{3}{2}}$

$1-3k=9$

$\boldsymbol{k=-\frac{8}{3}}\ \left(k<\frac{1}{3}\text{ を満たす}\right)$

(例題 2) 関数 $f(x)=x^3-6ax^2$ の $0 \leq x \leq 2$ の最大値・最小値を求めよ

[解] $f'(x)=3x^2-12ax=3x(x-4a)$　極値の候補は $x=0\,,4a$ となる

最大値・最小値を求めるのに候補となるのは極値と端点である

つまり、極値が区間 $0 \leq x \leq 2$ によって場合分けする

(ⅰ) $4a<0$ つまり $a<0$ のとき

増減表は　　よって **最大値 $8-24a\ (x=2)$ 最小値 $0\ (x=0)$**

x	0	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$8-24a$

(ⅱ) $0 \leq 4a \leq 2$ つまり $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ のとき

増減表は

x	0	$\cdots$	$4a$	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-32a^3$	$\nearrow$	$8-24a$

最大値の候補は $0\,,8-24a$ よりそこでも場合分けすると

$0 \leq a < \frac{1}{3}$ のとき 最大値 $8-24a\ (x=2)$ 最小値 $-32a^3\ (x=a)$

$a=\frac{1}{3}$ のとき　最大値 $0\ (x=0\,,2)$ 最小値 $-\frac{32}{27}\ \left(x=\frac{1}{3}\right)$

$\frac{1}{3}<a \leq \frac{1}{2}$ のとき 最大値 $0\ (x=0)$ 最小値 $-32a^3\ (x=a)$

(ⅲ) $2<4a$ つまり $\frac{1}{2}<a$ のとき

増減表は　　よって **最大値 $0\ (x=0)$ 最小値 $8-24a\ (x=2)$**

x	0	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$8-24a$

(類題 1)p137 **4**

[解]$f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x-a)(x+a)$ 極値候補は $x = \pm a$

$0 < a < 2$ より最大値・最小値の候補となるのは $x = a$

増減表は

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-2a^3$	↗	$-6a^2+8$

最大値の候補は 0 , $-6a^2+8$ よりそこで場合分けする

$0 < a < \frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき 最大値 $-6a^2+8$ $(x=2)$ 最小値 $-2a^3$ $(x=a)$

$a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき　最大値 0 $(x = 0\,,2)$ 最小値 $-2a^3$ $(x=a)$

$\frac{2\sqrt{3}}{3} < a$ のとき　最大値 0 $(x=0)$ 最小値 $-2a^3$ $(x=a)$

(類題 2) $a<0$ とする。関数 $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$ の$-2\leq x\leq 2$ における

最大値・最小値を求めよ

[解] $f'(x)=6x^2-6(a+1)x+6a=6(x-1)(x-a)$ 極値候補は $x=1\,,a$

$a<0$ であることを考え、$x=a$ が区間 $-2\leq x\leq 2$ に含まれるかで場合分けする

(i) $a<-2$ のとき

増減表は

x	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-24a-28$	$\searrow$	$3a-1$	$\nearrow$	4

最大値の候補は $x=-2\,,2$　 $a<-2$ より $f(-2)>f(2)$

よって　**最大値 $-24a-28\ (x=-2)$ 最小値 $3a-1\ (x=1)$**

(ii) $-2\leq a<0$ のとき

増減表は

x	-2	$\cdots$	a	$\cdots$	1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-24a-28$	$\nearrow$	$-a^3+3a^2$	$\searrow$	$3a-1$	$\nearrow$	4

最大値の候補は $x=a\,,2$ 最小値の候補は $x=-2\,,1$

$-2\leq a<-1$ のとき $f(a)>f(2)\,,f(-2)>f(1)$

$a=-1$ のとき $f(a)=f(2)\,,f(-2)=f(1)$

$-1<a<0$ のとき $f(a)<f(2)\,,f(-2)<f(1)$

したがって

$-2<a<-1$ のとき 最大値 $-a^3+3a^2\ (x=a)$ 最小値 $3a-1\ (x=1)$

$a=-1$ のとき 最大値 $4\ (x=a\,,2)$ 最小値 $-4\ (x=-2\,,1)$

$-1<a<0$ のとき 最大値 $4\ (x=2)$ 最小値 $-24a-28\ (x=-2)$

(類題 3)p143 **7**

[解] $f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$ 極値候補は $x=0\,,a$

$a>0$ であることを考え、$x=a$ が区間$-1\leq x\leq 4$ に含まれるかで場合分けする

(ⅰ)$0<a\leq 4$ のとき

増減表は

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	a		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-3a-2$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-a^3$	$\nearrow$	$-48a+128$

最大値の候補は $x=0\,,4$　最小値の候補は $x=-1\,,a$

$0<a<2$ のとき $f(0)<f(4)\,,f(-1)<f(a)$

$a=2$ のとき $f(0)<f(4)\,,f(-1)=f(a)$

$2<a<\frac{8}{3}$ のとき $f(0)<f(4)\,,f(-1)>f(a)$

$a=\frac{8}{3}$ のとき $f(0)=f(4)\,,f(-1)>f(a)$

$\frac{8}{3}<a\leq 4$ のとき $f(0)>f(4)\,,f(-1)>f(a)$

よって

$\boldsymbol{0<a<2}$ **のとき 最大値** $\boldsymbol{-48a+128\ (x=4)}$ **最小値** $\boldsymbol{-3a-2\ (x=-1)}$

$\boldsymbol{a=2}$ **のとき 最大値** $\boldsymbol{32\ (x=4)}$ **最小値** $\boldsymbol{-8\ (x=-1\,,2)}$

$\boldsymbol{2<a<\frac{8}{3}}$ **のとき 最大値** $\boldsymbol{-48a+128(x=4)}$ **最小値** $\boldsymbol{-a^3\ (x=a)}$

$\boldsymbol{a=\frac{8}{3}}$ **のとき 最大値** $\boldsymbol{0\ (x=0\,,4)}$ **最小値** $\boldsymbol{-\frac{512}{27}\left(x=\frac{8}{3}\right)}$

$\boldsymbol{\frac{8}{3}<a\leq 4}$ **のとき 最大値** $\boldsymbol{0\ (x=0)}$ **最小値** $\boldsymbol{-a^3\ (x=a)}$

(ⅱ) $4 \leq a$ のとき

増減表は

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-3a-2$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-48a+128$

最小値の候補は $x=-1, 4$

$4 \leq a$ のとき $f(-1) > f(4)$

よって

最大値 $\mathbf{0}$ $(\boldsymbol{x}=\mathbf{0})$ 最小値 $\boldsymbol{-48a+128}$ $(\boldsymbol{x}=\mathbf{4})$