

指数・対数関数

①指数関数

(1)指数・指数関数とは

例) $2^3, (-2)^4, \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$a^b \leftarrow a$ を底、 b を指数(指数部)とよぶ

指数関数とは **b (指数)**の部分が変化していく関数

(2)指数計算

<指数法則> $a \neq 0, b \neq 0, m, n$ は有理数

● $a^m a^n = a^{m+n}$ 例) $2 \cdot 4 = 2^1 \cdot 2^2 = 8 = 2^3 \quad \rightarrow \underline{1} + \underline{2} = \underline{3}$

● $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ 例) $\frac{8}{2} = \frac{2^3}{2^1} = 4 = 2^2 \quad \rightarrow \underline{3} - \underline{1} = \underline{2}$

● $(a^m)^n = a^{mn}$ 例) $(2^3)^2 = 8^2 = 64 = 2^6 \quad \rightarrow \underline{2} \times \underline{3} = \underline{6}$

● $(ab)^n = a^n b^n$ 例) $(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36 = 2^2 \cdot 3^2$

● $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$ 例) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = \frac{3^2}{2^2}$

以上が指数法則と呼ばれる計算だが、暗記する必要はなく、例のように具体例使って計算すればどうなっているかわかる

(キーワード)

掛け算は足し算

割り算は引き算

(ポイント)

1. 0 乗は 1 例) $2^0 = 1, (-3)^0 = 1$

2. - は 逆数 例) $2^{-2} = \frac{1}{2^2}, (-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3}$

例題)

$$(I) a^6 \times a^{-2}$$

$$= a^{6+(-2)}$$

$$= \mathbf{a^4}$$

$$(II) a^3 \div (a^3)^{-3}$$

$$= a^3 \div a^{3 \times (-3)}$$

$$= a^3 \div a^{-9}$$

$$= a^{3-(-9)}$$

$$= \mathbf{a^{12}}$$

$$(III) 2^7 \div 2^2 \times 2^{-3}$$

$$= 2^{7-2+(-3)}$$

$$= 2^2$$

$$= \mathbf{4}$$

(演習)

$$(i) a^4 \times a^{-3}$$

$$= a^{4+(-3)}$$

$$= a^1$$

$$= \mathbf{a}$$

$$(ii) a^2 \div a^{-5}$$

$$= a^{2-(-5)}$$

$$= \mathbf{a^7}$$

$$(iii) (a^3)^{-2}$$

$$= a^{3 \times (-2)}$$

$$= \mathbf{a^{-6} \left(= \frac{1}{a^6} \right)}$$

$$(iv) 2^3 \times 2^{-5} \div 2^2$$

$$= 2^{3+(-5)-2}$$

$$= 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

$$(v) (3^2)^{-3} \times 3^3 \div 3^{-4}$$

$$= 3^{2 \times (-3)} \times 3^3 \div 3^{-4}$$

$$= 3^{-6} \times 3^3 \div 3^{-4}$$

$$= 3^{-6+3-(-4)}$$

$$= 3^1 = \mathbf{3}$$

$$(vi) (2^{-3} \times 2^6)^3 \div 16$$

$$= (2^{-3+6})^3 \div 2^4$$

$$= (2^3)^3 \div 2^4$$

$$= 2^{3 \times 3} \div 2^4$$

$$= 2^9 \div 2^4$$

$$= 2^{9-4} = 2^5 = \mathbf{32}$$

(3)累乗根の計算

これから指数に有理数(分数)が含まれる計算を行っていく

$x^n = a$ の解を x の n 乗根と言い、その解を $x = \underline{\sqrt[n]{a}}$ とかく

$$\text{例題) } x^3 = a$$

$$x^5 = a^3$$

$$x^4 = 3$$

$$x = \sqrt[3]{a}$$

$$x = \sqrt[5]{a^3}$$

$$x = \sqrt[4]{3}$$

(注意) $\sqrt[2]{a}$ は \sqrt{a} のように2が省略される

次に上記の形を本来の指数の形に持っていきたい

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

よって、上記の答えはそれぞれ

$$\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}, \sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{3}{5}}, \sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}} \text{ と変形出来る}$$

本来の指数の形に持っていけば、指数法則を使って計算できる

<累乗根の法則>

- $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- $(\sqrt[n]{a})^m = (a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}} = \sqrt[np]{a^{mp}}$

例題)

$$(I) \sqrt[3]{4^3 \sqrt{16}}$$

$$= \sqrt[3]{4 \times 16}$$

$$= \sqrt[3]{64}$$

$$= \sqrt[3]{4^3}$$

$$= (4^3)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 4^1 = 4$$

$$(II) \frac{\sqrt[6]{27}}{\sqrt[6]{3}}$$

$$= \sqrt[6]{\frac{27}{3}}$$

$$= \sqrt[6]{9}$$

$$= \sqrt[6]{3^2}$$

$$= (3^2)^{\frac{1}{6}}$$

$$= 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$$

$$(III) \sqrt[3]{\sqrt{125}}$$

$$= \sqrt[3 \times 2]{125}$$

$$= \sqrt[6]{125}$$

$$= \sqrt[6]{5^3}$$

$$= (5^3)^{\frac{1}{6}}$$

$$= 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

(ポイント)

計算するとき、底は一番小さい整数に合わせると良い

(演習)

$$(i) 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{3}} \div 3^{\frac{1}{6}}$$

$$= 3^{\frac{1}{2} - (-\frac{1}{3}) - \frac{1}{6}}$$

$$= 3^0$$

$$= 1$$

$$(ii) \sqrt[4]{2^3} \times \sqrt{2}$$

$$= (2^3)^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}$$

$$= 2^{\frac{5}{4}} (= \sqrt[4]{2^5} = \sqrt[4]{32})$$

$$(iii) \sqrt{\sqrt[3]{36}}$$

$$= \sqrt[2 \times 3]{36}$$

$$= \sqrt[6]{6^2}$$

$$= (6^2)^{\frac{1}{6}}$$

$$= 6^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{6}$$

$$(\text{iv}) (\sqrt[6]{27})^2$$

$$= (\sqrt[6]{3^3})^2$$

$$= \left((3^3)^{\frac{1}{6}} \right)^2$$

$$= \left(3^{\frac{1}{2}} \right)^2$$

$$= 3^1 = \mathbf{3}$$

$$(\text{v}) \frac{\sqrt[5]{128}}{\sqrt[5]{4}}$$

$$= \sqrt[5]{\frac{128}{4}}$$

$$= \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5}$$

$$= (2^5)^{\frac{1}{5}}$$

$$= 2^1 = \mathbf{2}$$

[応用]

$$(\text{vi}) \sqrt{2} \sqrt[6]{200} \sqrt[3]{25}$$

$$= \sqrt{2} \times \sqrt[6]{2^3 \times 5^2} \times \sqrt[3]{5^2}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}} \times (2^3 \times 5^2)^{\frac{1}{6}} \times (5^2)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}} \times (2^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{3}}) \times 5^{\frac{2}{3}}$$

$$= 2^1 \times 5^1 = \mathbf{10}$$

$$(\text{vii}) \sqrt{\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}}$$

$$= \sqrt{\frac{a \times a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}}}$$

$$= \sqrt{a^{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}}$$

$$= \sqrt{a^{\frac{5}{4}}} = (a^{\frac{5}{4}})^{\frac{1}{2}} = \mathbf{a^{\frac{5}{8}}} (= \sqrt[8]{a^5})$$

$$(\text{viii}) (a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}})$$

$$= a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}}$$

$$= a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$$

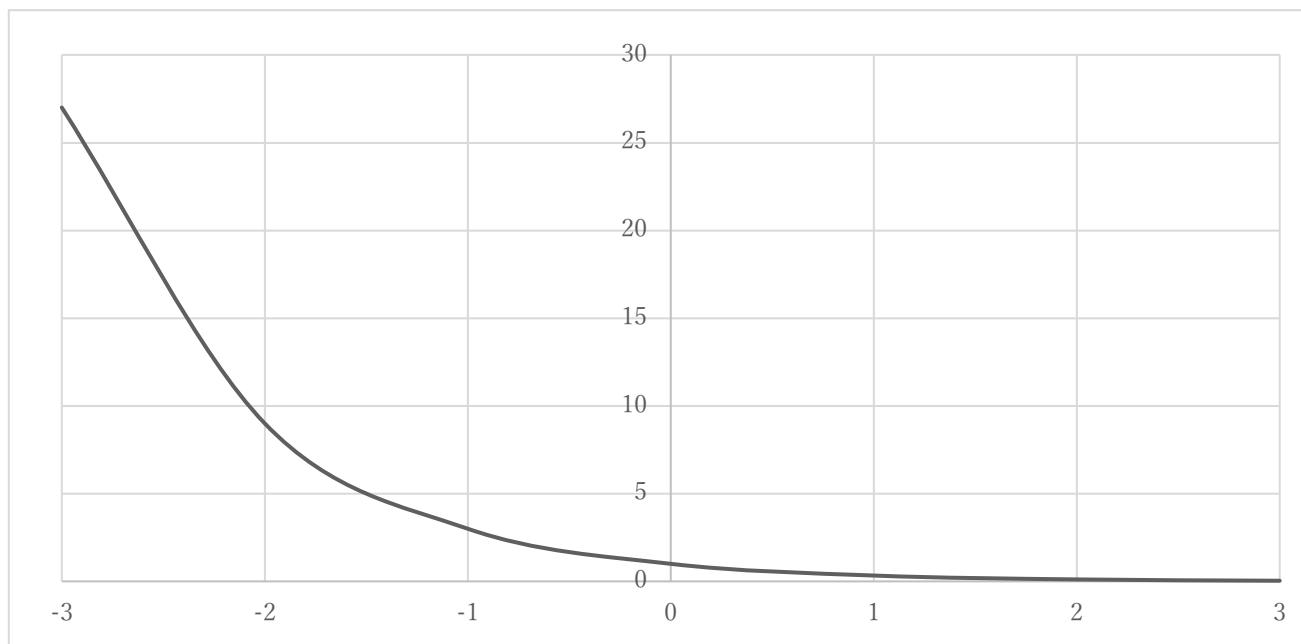
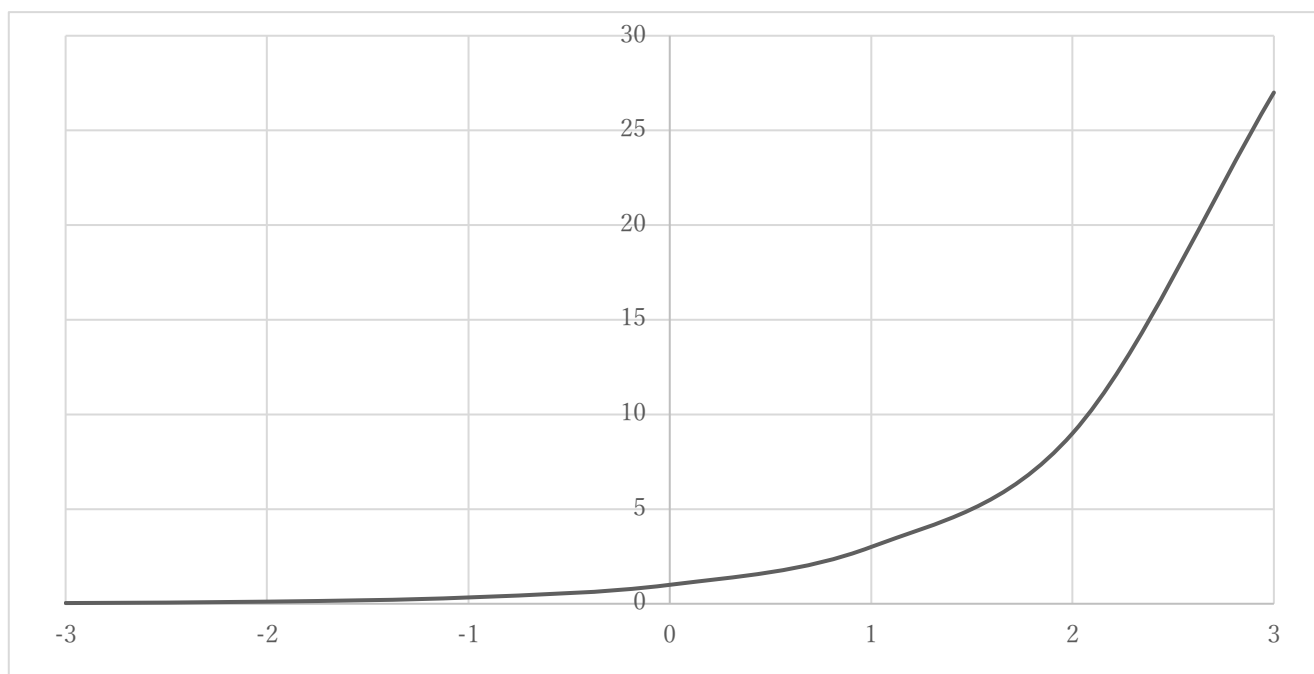
$$= a^1 - b^1 = a - b$$

← $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ を利用

(4)指数関数のグラフ

$$y = 3^x \text{ と } y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
3^x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$



(グラフの性質) $y = a^x$

1. 定義域(x の範囲)は実数全体で値域(y の範囲)は正の数全体

2. $a > 1$ のとき 単調増加(常に増加する)

$0 < a < 1$ のとき 単調減少(常に減少する)

→ y のある値に対して、それをみたす x が **1 つ** に定まる

3. $(0, 1)$ を通り、 x 軸に漸近する(y の値は 0 に近づくが 0 にはならない)

(注意)

$a \leq 0, a = 1$ のグラフは基本的に出でこない(出せない)

(理由)

$y = 0^x$ については 0^0 の値が定まらない

$y = 1^x$ についてはどんな x に対しても $y = 1$ となるので直線になるから

$a < 0$ のときの $y = a^x$ は $a^{\frac{3}{2}} = a^{1.5}$ などの指数部が整数以外の符号が定まらない

(まとめ)

底 a が $a > 1$ の時と $0 < a < 1$ でグラフが変わる(グラフは概形が分かれば良い)

→考える関数の底がどちらのグラフになるのか考えること

(5)指数の大小関係

例題)次の数の大小を比較せよ

$$(I) \sqrt[4]{5}, \sqrt[8]{15}$$

$$\sqrt[4]{5} > 0, \sqrt[8]{15} > 0 \text{ より}$$

$$(\sqrt[4]{5})^8 = 5^2 = 25$$

$$(\sqrt[8]{15})^8 = 15^1 = 15$$

よって

$$\sqrt[4]{5} > \sqrt[8]{15}$$

$$(II) \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{5}}, 2^{\frac{1}{3}}, 4^{\frac{1}{4}}$$

全て底 2 で揃えと

$$2^{\frac{1}{5}}, 2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{2}}$$

底 $2 > 1$ より単調増加なので

指数部の数の大小関係 $\left(\frac{1}{5} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}\right)$ と一致

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} < 2^{\frac{1}{3}} < 4^{\frac{1}{4}}$$

(不等式の性質)

$a > 0, b > 0, n$ は有理数

$$a > b \rightarrow a^n > b^n$$

指数関数は常に正の数になるので何乗しても良い

(演習)次の数の大小を比較せよ

$$(i) \sqrt[3]{4}, \sqrt[6]{14}$$

$$\sqrt[3]{4} > 0, \sqrt[6]{14} > 0 \text{ より}$$

$$(\sqrt[3]{4})^6 = 4^2 = 16$$

$$(\sqrt[6]{14})^6 = 14^1 = 14$$

よって

$$\sqrt[3]{4} > \sqrt[6]{14}$$

$$(ii) \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{3}}, 9^{\frac{1}{8}}$$

全て底 3 で揃えると

$$3^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{3}}, 3^{\frac{1}{4}}$$

底 $3 > 1$ より単調増加なので

指数部の数の大小関係 $\left(\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}\right)$ と一致

$$9^{\frac{1}{8}} < 3^{\frac{1}{3}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

(6)指数方程式

(解法)

1. 底(一番小さい整数)を揃えるように変形する

2. 指数部の等式を解く

例題 1)

$$(I) 3^{x+2} = 27$$

$$3^{x+2} = 3^3$$

$$x + 2 = 3$$

$$x = 1$$

$$(II) \left(\frac{1}{2}\right)^{x(x+3)} = 4$$

$$2^{-x(x+3)} = 2^2$$

$$-x(x+3) = 3$$

$$x^3 + 3x + 2 = 0$$

$$(x+2)(x+1) = 0$$

$$x = -1, -2$$

(演習)

$$(i) 4^{x-3} = 64$$

$$4^{x-3} = 4^3$$

$$x - 3 = 3$$

$$\mathbf{x = 6}$$

$$(ii) \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 27$$

$$3^{-2x} = 3^3$$

$$-2x = 3$$

$$\mathbf{x = -\frac{3}{2}}$$

[応用]

$$(iii) 3 \cdot 9^x = 1$$

$$3 \cdot 3^{2x} = 1$$

$$3^{2x+1} = 3^0$$

$$2x + 1 = 0$$

$$\mathbf{x = -\frac{1}{2}}$$

例題 2)置き換え

$$(I) 2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$$

$$t = 2^x \text{とおく} (t > 0)$$

$$\text{よって } t = 1, 2$$

$$(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$$

$$t = 1 \text{ より } 2^x = 1 \rightarrow x = 0$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t = 2 \text{ より } 2^x = 2 \rightarrow x = 1$$

$$(t - 2)(t - 1) = 0$$

$$\text{解は } \mathbf{x = 0, 1}$$

(演習)

$$(i) 3^{2x} + 8 \cdot 3^x - 9 = 0$$

$$(ii) 4^x - 5 \cdot 2^{x+2} + 64 = 0$$

$$t = 3^x \text{ とおく } (t > 0)$$

$$t = 2^x \text{ とおく } (t > 0)$$

$$(3^x)^2 + 8 \cdot 3^x - 9 = 0$$

$$(2^x)^2 - 20 \cdot 2^x + 64 = 0$$

$$t^2 + 8t - 9 = 0$$

$$t^2 - 20t + 64 = 0$$

$$(t + 9)(t - 1) = 0$$

$$(t - 4)(t - 16) = 0$$

$$t > 0 \text{ より } t = 1$$

$$t = 4 \text{ より } 2^x = 4 \rightarrow x = 2$$

$$t = 1 \text{ より } 3^x = 1 \rightarrow x = 0$$

$$t = 16 \text{ より } 2^x = 4 \rightarrow x = 4$$

[応用]

$y = 4^x - 2^{x+1}$ の最小値とそのときの x の値を求めよ (ヒント: $t = 2^x$ とおく)

$$t = 2^x \text{ とおく } (t > 0)$$

よって $t = 1$ で最小値 -1

$$y = (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x$$

$$t = 1 \text{ より } 2^x = 1 \rightarrow x = 0$$

$$= t^2 - 2t$$

したがって

$$= (t - 1)^2 - 1$$

最小値 $-1(x = 0 \text{ のとき})$

(7)指数不等式

(解法)

1. 底(一番小さい整数)を揃えるように変形する
2. 指数部の不等式を解く(底によって不等号の向きが変わる)

$$a > 1 \text{ のとき } a^x > a^y \rightarrow x > y \quad \leftarrow \text{単調増加}$$

$$0 < a < 1 \text{ のとき } a^x > a^y \rightarrow x < y \quad \leftarrow \text{単調減少}$$

例題 1)

$$(I) 2^x > 8$$

$$2^x > 2^3$$

底 $2 > 1$ より

$$\mathbf{x > 3}$$

$$(II) 3^{x-2} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$3^{x-2} \leq 3^{-3}$$

底 $3 > 1$ より

$$x - 2 \leq -3$$

$$\mathbf{x \leq -1}$$

(演習)

$$(i) 4^{x-1} < 64$$

$$4^{x-1} < 4^3$$

底 $4 > 1$ より

$$x - 1 < 3$$

$$\mathbf{x < 4}$$

$$(ii) \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} \geq 64$$

$$2^{-(x+3)} \geq 2^6$$

底 $2 > 1$ より

$$-(x + 3) \geq 6$$

$$\mathbf{x \leq -9}$$

例題 2)置き換え

$$(I) 3^{2x} + 3^x - 12 \geq 0$$

$$t = 3^x \text{とおく} (t > 0)$$

$$t > 0 \text{ より } (t + 4) > 0 \text{ なので}$$

$$(3^x)^2 + 3^x - 12 \geq 0$$

$$(t - 3) \geq 0 \text{ より } t \geq 3$$

$$t^2 + t - 12 \geq 0$$

$$3^x \geq 3 \rightarrow x \geq 1$$

$$(t + 4)(t - 3) \geq 0$$

(演習)

$$(i) 4^{2x} - 15 \cdot 4^x - 16 \geq 0$$

$$(ii) 4^x \leq 2(1 + 2^{x-1})$$

$$t = 4^x \text{とおく} (t > 0)$$

$$t = 2^x \text{とおく} (t > 0)$$

$$(4^x)^2 - 15 \cdot 4^x - 16 \geq 0$$

$$(2^x)^2 \leq 2^x + 2$$

$$t^2 - 15t - 16 \geq 0$$

$$t^2 - t - 2 \leq 0$$

$$(t + 1)(t - 16) \geq 0$$

$$(t + 1)(t - 2) \leq 0$$

$$t > 0 \text{ より } (t + 1) > 0 \text{ なので}$$

$$t > 0 \text{ より } (t + 1) > 0 \text{ なので}$$

$$(t - 16) \geq 0 \rightarrow x \geq 2$$

$$(t - 2) \leq 0 \rightarrow x \leq 1$$

$$(iii) \left(\frac{1}{9}\right)^x - \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} - 54 < 0$$

$$t = 3^{-x} \text{とおく} (t > 0)$$

$$\leftarrow t = \left(\frac{1}{3}\right)^x \text{としてもよい(不等号が反転する)}$$

$$(3^{-x})^2 - 3 \cdot 3^{-x} - 54 < 0$$

$$t^2 - 3t - 54 < 0$$

$$(t + 6)(t - 9) < 0$$

$$t > 0 \text{ より } (t + 6) > 0 \text{ なので}$$

$$(t - 9) < 0 \rightarrow x > -2$$

(8)[応用]式の値

(問題)関数 $y = 4^x + 4^{-x} - 4(2^x + 2^{-x}) + 7 \dots$ ① について最小値を求めよ

(step1) $t = 2^x + 2^{-x}$ とおく

$$t^2 = (2^x + 2^{-x})^2 = (2^x)^2 + 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} + (2^{-x})^2 = 4^x + 2 + 4^{-x}$$

①の式を t を使って表すと

$$y = (t^2 - 2) - 4t + 7 = t^2 - 4t + 5 = (t - 2)^2 + 1$$

t の定義域は相加・相乗平均の関係より

$$2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

よって最小値は $t = 2$ のとき $y = 1$

そのときの x は等号成立条件より

$$2^x = 2^{-x}$$

$$x = 0$$

よって最小値 **1** ($x = 0$ のとき)

②対数関数

(1)対数・対数関数とは

指数関数から派生してできた関数

例) $\log_2 6$, $2\log_5 4$

$$2^x = 4 \rightarrow x = 2$$

$$2^x = 3 \rightarrow x = ? \quad \leftarrow \log_2 3$$

よって $a > 0, a \neq 1, R > 0$

$$a^r = R \leftrightarrow r = \log_a R$$

$\log_a R$ において a の部分を底、 R の部分を真数という

対数関数とは R (真数) が変化していく関数

(2)対数計算

<対数の性質> $a > 0, a \neq 1, R > 0, S > 0, p$ は有理数

$$1. \log_a RS = \log_a R + \log_a S \quad \text{例) } \log_2 15 = \log_2 3 \cdot 5 = \log_2 3 + \log_2 5$$

$$2. \log_a \frac{R}{S} = \log_a R - \log_a S \quad \text{例) } \log_2 \frac{5}{3} = \log_2 5 - \log_2 3$$

$$3. \log_a R^p = p \log_a R \quad \text{例) } \log_2 5^3 = 3 \log_2 5$$

$$4. \log_a a = 1 \quad \text{例) } \log_2 2 = 1$$

$$5. \log_a 1 = 0 \quad \text{例) } \log_2 1 = 0$$

(証明)

1. $\log_a R = x, \log_a S = y$ として $\log_a RS = x + y$ を示す

$$\log_a R = x \text{ より } R = a^x, \log_a S = y \text{ より } S = a^y$$

$$RS = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\text{よって } x + y = \log_a RS$$

2. 1 と同様に $\log_a \frac{R}{S} = x - y$ を示す

$$\frac{R}{S} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\text{よって } x - y = \log_a \frac{R}{S}$$

3. $\log_a R = x$ として $\log_a R^p = px$ を示す

$$\log_a R = x \text{ より } R = a^x$$

$$\text{両辺 } p \text{ 乗すると } R^p = (a^x)^p = a^{px}$$

$$\text{よって } px = \log_a R^p$$

4. $a^1 = a$ より

$$1 = \log_a a$$

5. $a^0 = 1$ より

$$0 = \log_a 1$$

例題)

$$(I) \log_2 16$$

$$= \log_2 2^4$$

$$= 4 \log_2 2$$

$$= \mathbf{4}$$

$$(II) \log_3 \sqrt[3]{9}$$

$$= \log_3 3^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2}{3} \log_3 3$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$(III) \log_3 12 + \log_3 36 + \log_3 \frac{1}{16}$$

$$= \log_3 12 \cdot 36 \cdot \frac{1}{16}$$

$$= \log_3 27$$

$$= \log_3 3^3$$

$$= 3 \log_3 3$$

$$= \mathbf{3}$$

$$(IV) \log_{10} \sqrt{2} - \frac{1}{2} \log_{10} \frac{1}{3} - \frac{3}{2} \log_{10} \sqrt[3]{6}$$

$$= \log_{10} \sqrt{2} - \log_{10} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} - \log_{10} (\sqrt[3]{6})^{\frac{3}{2}}$$

$$= \log_{10} \frac{\sqrt{2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (\sqrt[3]{6})^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \log_{10} 1$$

$$= \mathbf{0}$$

(演習)

$$(i) \log_4 64$$

$$= \log_4 4^3$$

$$= 3 \log_4 4$$

$$= \mathbf{3}$$

$$(ii) \log_5 \frac{1}{\sqrt{125}}$$

$$= \log_5 5^{-\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{3}{2} \log_5 5$$

$$= -\frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}
(\text{iii}) \quad & \log_{10} 2 + \log_{10} \sqrt{15} - \frac{1}{2} \log_{10} \frac{3}{5} \\
&= \log_{10} 2 + \log_{10} \sqrt{15} - \log_{10} \left(\frac{3}{5} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \log_{10} \frac{2 \cdot \sqrt{15}}{\left(\frac{3}{5} \right)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \log_{10} 10 \\
&= \mathbf{1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{iv}) \quad & 3 \log_4 2 - \frac{1}{2} \log_4 7 + \log_4 \frac{\sqrt{7}}{2} \\
&= \log_4 2^3 - \log_4 7^{\frac{1}{2}} + \log_4 \frac{\sqrt{7}}{2} \\
&= \log_4 \frac{2^3 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2}}{7^{\frac{1}{2}}} \\
&= \log_4 4 \\
&= \mathbf{1}
\end{aligned}$$

<底の変換公式>

次に底が異なっていたらどのように計算するのか

→底を揃えると計算できる

→底を揃うように変形したい

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

(証明)

$$\log_a b = x \text{ とすると } b = a^x$$

両辺に c が底の対数を取ると

$$\log_c b = \log_c a^x = x \log_c a$$

$$x = \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

(ポイント)揃える底は一番小さい整数にすること

例題)以下の式を底の変換公式で変形せよ

$$(I) \log_{81} 3\sqrt{3}$$

底は 3 に揃える

$$= \frac{\log_3 3\sqrt{3}}{\log_3 81}$$

$$= \frac{\log_3 3^{\frac{3}{2}}}{\log_3 3^4}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}}{4} = \frac{3}{8}$$

$$(II) \log_{\frac{1}{25}} 5^4 \sqrt{5}$$

底は 5 に揃える

$$= \frac{\log_5 5^4 \sqrt{5}}{\log_5 \frac{1}{25}}$$

$$= \frac{\log_5 5^{\frac{5}{2}}}{\log_5 5^{-2}}$$

$$= \frac{\frac{5}{2}}{-2} = -\frac{5}{8}$$

$$(III) \log_2 5 \cdot \log_5 8$$

底は 2 に揃える

$$= \log_2 5 \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 5}$$

$$= \log_2 8$$

$$= \log_2 2^3$$

$$= 3$$

$$(IV) \log_2 3 \cdot \log_3 8 \cdot \log_4 8$$

底は 2 に揃える

$$= \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 4}$$

$$= \log_2 8 \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 4}$$

$$= \log_2 2^3 \cdot \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2}$$

$$= 3 \cdot \frac{3}{2}$$

$$= \frac{9}{2}$$

(演習)以下の式を底の変換公式で変形せよ

(i) $\log_{16} 1024$

(ii) $\log_{\frac{1}{8}} 128$

底は 2 に揃える

底は 2 に揃える

$$= \frac{\log_2 1024}{\log_2 16}$$

$$= \frac{\log_2 128}{\log_2 \frac{1}{8}}$$

$$= \frac{\log_2 2^{10}}{\log_2 2^4}$$

$$= \frac{\log_2 2^7}{\log_2 2^{-3}}$$

$$= \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$= \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}$$

(iii) $\log_3 6 \cdot \log_6 9$

(iv) $\log_4 3 \cdot \log_9 25 \cdot \log_5 2$

底は 3 に揃える

底は 2 に揃える

$$= \log_3 6 \cdot \frac{\log_3 9}{\log_3 6}$$

$$= \frac{\log_2 3}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 25}{\log_2 9} \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 5}$$

$$= \log_3 9$$

$$= \frac{\log_2 3}{\log_2 2^2} \cdot \frac{\log_2 5^2}{\log_2 3^2} \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 5}$$

$$= \log_3 3^2$$

$$= \frac{\log_2 3}{2} \cdot \frac{2 \log_2 5}{2 \log_2 3} \cdot \frac{1}{\log_2 5}$$

$$= 2$$

$$= \frac{1}{2}$$

[応用] (v) $3^{4 \log_3 2}$

$$= (3^{\log_3 2})^4$$

← [公式] $a^{\log_a x} = x$

$$= 2^4$$

(証明) $y = a^{\log_a x} \rightarrow \log_a x = \log_a y$

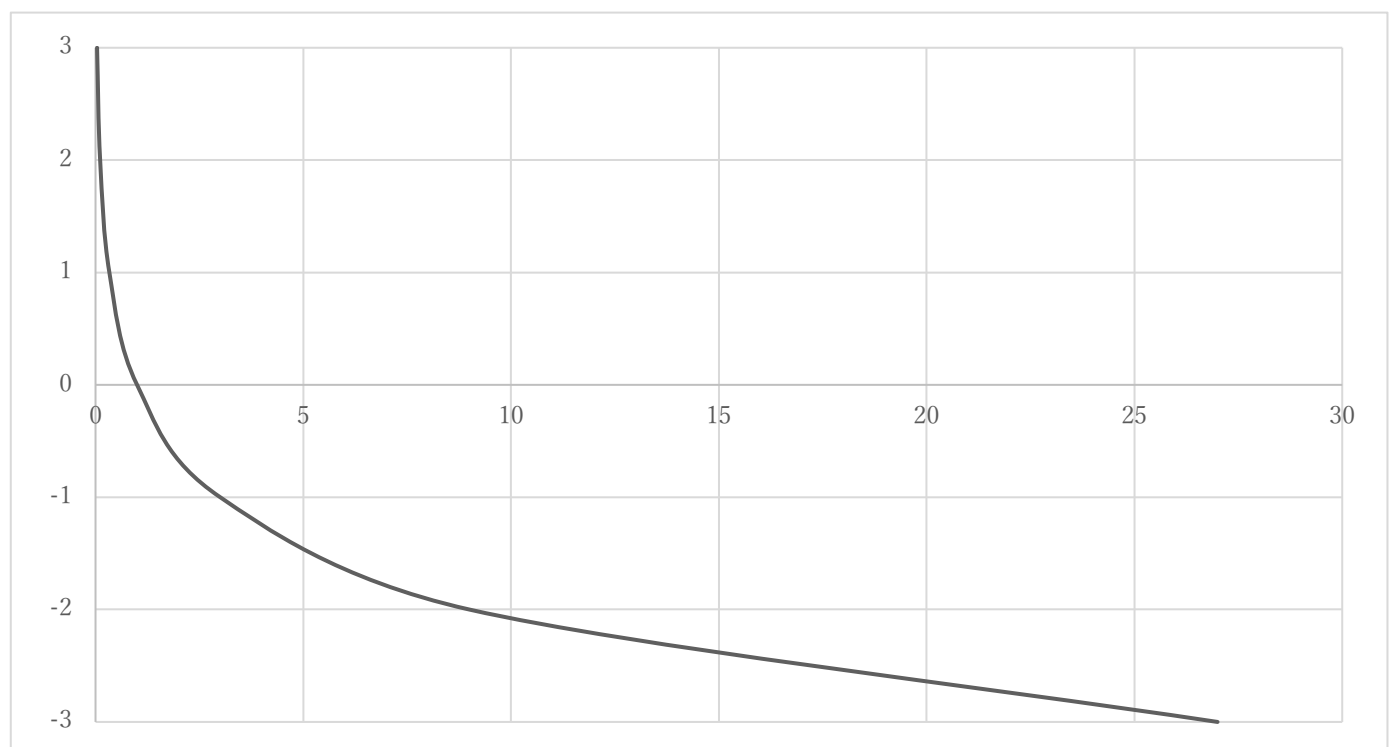
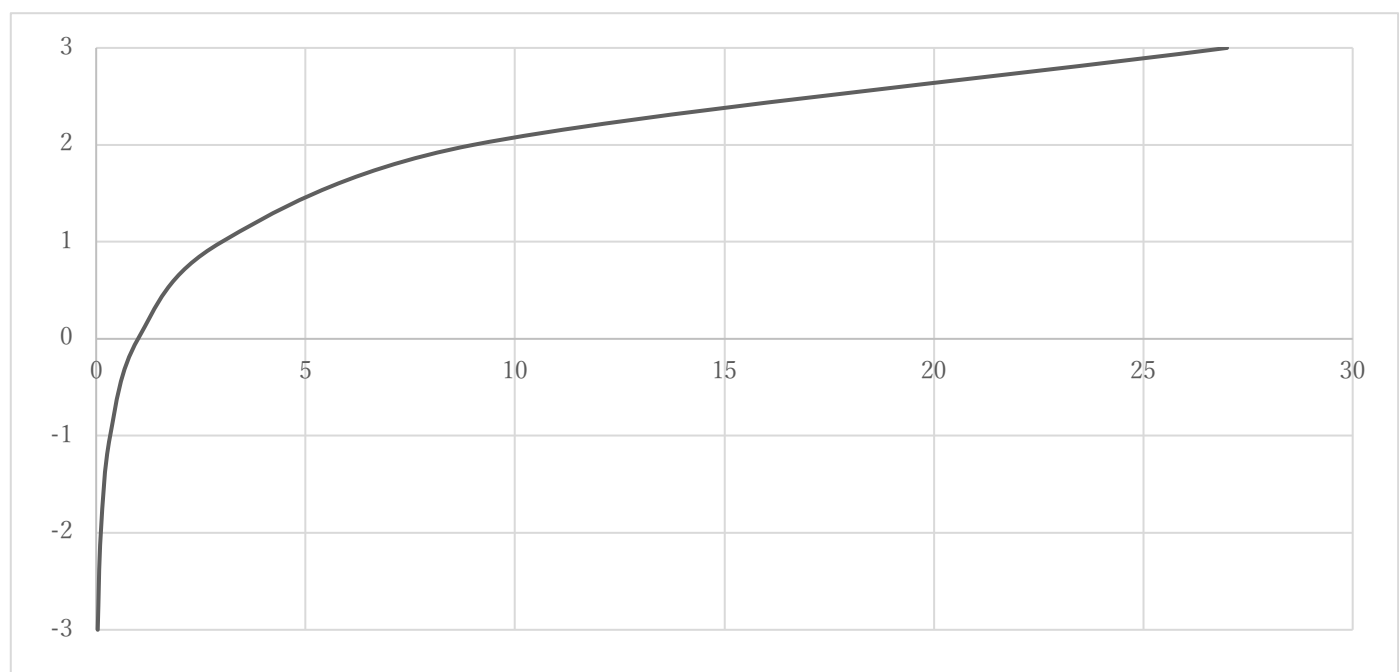
$$= 16$$

よって、 $x = y = a^{\log_a x}$

(3)対数関数のグラフ

$$y = \log_3 x \text{ と } \log_{\frac{1}{3}} x$$

x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
$\log_3 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\log_{\frac{1}{3}} x$	3	2	1	0	-1	-2	-3



(グラフの性質) $y = \log_a x$

1. 定義域(x の範囲)は正の数全体で値域(y の範囲)は実数全体

2. $a > 1$ のとき 単調増加(常に増加する)

$0 < a < 1$ のとき 単調減少(常に減少する)

→ y のある値に対して、それをみたす x が 1 つに定まる

3. $(1, 0)$ を通り、 y 軸に漸近する(x の値は 0 に近づくが 0 にはならない)

4. $y = a^x$ のグラフと $y = x$ に関して対称

[応用]逆関数(詳しくは数学Ⅲで)

x と y を入れ替えてできる関数を逆関数といい、 $y = x$ に関して対称となる

$$y = a^x \leftrightarrow x = \log_a y$$

右側の式の x と y を入れ替えると $y = \log_a x$

(他の例) $y = x^2$ と $y = \pm\sqrt{x}$, $y = \sin x$ と $y = \sin^{-1} x$

(4)対数の大小関係

例題)

$$(I) 2, \log_3 7$$

$$2 = 2 \log_3 3 = \log_3 9$$

底 $3 > 1$ より単調増加

$$2 > \log_3 7$$

$$(II) \log_2 3, \log_4 7, \log_8 28$$

全て底 2 に揃える

$$\log_4 7 = \frac{\log_2 7}{\log_2 4} = \frac{1}{2} \log_2 7 = \log_2 \sqrt{7}$$

$$\log_8 28 = \frac{\log_2 28}{\log_2 8} = \frac{1}{3} \log_2 28 = \log_2 \sqrt[3]{28}$$

底 $2 > 1$ より単調増加

$$\log_4 7 < \log_2 3 < \log_8 28$$

(演習)

$$(i) 3, \log_2 9$$

$$3 = 3 \log_2 2 = \log_2 8$$

底 $2 > 1$ より単調増加

$$3 < \log_2 9$$

$$(ii) \log_3 5, \log_9 20, \log_{27} 126$$

全て底 3 に揃える

底 $3 > 1$ より単調増加

$$\log_9 20 = \frac{\log_3 20}{\log_3 9} = \frac{1}{2} \log_3 20 = \log_3 \sqrt{20}$$

$$\log_9 20 < \log_3 5 < \log_{27} 126$$

$$\log_{27} 126 = \frac{\log_3 126}{\log_3 27} = \frac{1}{3} \log_3 126 = \log_3 \sqrt[3]{126}$$

(5)対数方程式

(解法)

1. 真数条件を確認する
2. 底を揃えて、左辺・右辺ともに同じ底の対数1つずつになるように変形する
3. 真数の等式を解く
4. 真数条件を満たしているか確認する

例題 1)

$$(I) \log_2 x + \log_2(x-2) = 3$$

真数条件より $x > 0, x-2 > 0$

よって、 $x > 2$

$$\log_2 x(x-2) = 3 \log_2 2$$

$$\log_2 x(x-2) = \log_2 8$$

$$x(x-2) = 8$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x-4)(x+2) = 0$$

$$x > 2 \text{ より } x = 4$$

$$(II) (\log_{10} x)^2 - 4 \log_{10} x + 3 = 0$$

真数条件より $x > 0$

$t = \log_{10} x$ とおく

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t-3)(t-1) = 0$$

$$t = 1, 3$$

$$t = 1 \text{ のとき } \log_{10} x = 1 \rightarrow x = 10$$

$$t = 3 \text{ のとき } \log_{10} x = 3 \rightarrow x = 1000$$

$$\text{よって } x = \mathbf{10, 1000}$$

$$[\text{応用}](\text{III}) \log_2 8x - 6 \log_x 2 = 4$$

$$\text{底の条件より } x > 0, x \neq 0$$

$$t = \log_2 x \text{ とおく}$$

$$\text{真数条件より } 8x > 0 \text{ より } x > 0$$

$$t - \frac{6}{t} - 1 = 0$$

$$\log_2 8 + \log_2 x - 6 \frac{\log_2 2}{\log_2 x} = 4$$

$$(t - 3)(t + 2) = 0 \text{ より } t = -2, 3$$

$$3 + \log_2 x - \frac{6}{\log_2 x} = 4$$

$$t = \log_2 x = -2, 3 \text{ より } x = 8, \frac{1}{4}$$

(演習)

$$(i) \log_{12} x + \log_{12}(x + 1) = 1$$

$$(ii) (\log_2 x)^2 - \log_2 x^3 + 2 = 0$$

$$\text{真数条件より } x > 0, x + 1 > 0$$

$$\text{真数条件より } x > 0, x^3 > 0 \text{ より } x > 0$$

$$\text{よって } x > 0$$

$$t = \log_2 x \text{ とおく}$$

$$\log_{12} x(x + 1) = \log_{12} 12$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$x(x + 1) = 12$$

$$(t - 1)(t - 2) = 0$$

$$(x + 4)(x - 3) = 0$$

$$t = 1, 2$$

$$x > -1 \text{ より } x = 3$$

$$t = \log_2 x = 1, 2 \text{ より } x = 2, 4$$

[応用](iii) $\log_3 x - \log_x 81 = 3$

底の条件より $x > 0, x \neq 1$

$t = \log_3 x$ とおく

真数条件より $x > 0$

$$t - \frac{4}{t} - 3 = 0$$

$$\log_3 x - \frac{\log_3 81}{\log_3 x} = 3$$

$$(t - 4)(t + 1) = 0 \text{ より } t = -1, 4$$

$$\log_3 x - \frac{4}{\log_3 x} = 3$$

$$t = \log_3 x = -1, 4 \text{ より } x = \frac{1}{3}, 81$$

[応用] x についての方程式 $\log_a(x - 2) - \log_a(x + 1) - \log_a(x - 1) = 1$ が解を持つように、定数 a の値の範囲を求めよ。

[解]底の条件より $a > 0, a \neq 1$

$$f(x) = ax^2 - x - a + 2 \text{ とおく}$$

真数条件より $x - 2 > 0, x + 1 > 0, x - 1 > 0$

$$= a \left(x - \frac{1}{2a} \right)^2 - \frac{1}{4a} - a + 2$$

よって $x > 2$

$$f(2) = 3a > 0 \text{ より 異符号解はない}$$

$$\log_a \frac{(x-2)}{(x+1)(x-1)} = \log_a a$$

(i) ①の判別式 D は

$$\frac{(x-2)}{(x+1)(x-1)} = a$$

$$D = 1 - 4a(-a + 2) = 4a^2 - 8a + 1$$

$$ax^2 - x - a + 2 = 0 \quad \dots \text{ ①}$$

$$D \geq 0 \text{ より } a \leq \frac{2-\sqrt{3}}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2} \leq a$$

上記の式が $x > 2$ において解を持てばよい

$$(ii) \text{ 軸 } \frac{1}{2a} > 2 \text{ より } a < \frac{1}{4}$$

→解の配置問題(①判別式 ②軸 ③切片)

$$\text{よってまとめると } 0 < a \leq \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

(6)対数不等式

(解法)

1. 真数条件を確認する
2. 底を揃えて、左辺・右辺ともに同じ底の対数1つずつになるように変形する
3. 真数の不等式を解く(底によって不等式の向きが変わる)

$$a > 1 \text{ のとき } \log_a x < \log_a y \quad \rightarrow x < y$$

$$0 < a < 1 \text{ のとき } \log_a x < \log_a y \rightarrow x > y$$

4. 真数条件と合わせる範囲を答える

例題)

$$(I) \log_3 x + \log_3(2x - 1) > 1$$

$$(II) (\log_2 x)^2 + \log_2 x^2 - 3 \leq 0$$

$$\text{真数条件より } x > 0, 2x - 1 > 0$$

$$\text{真数条件より } x > 0, x^2 > 0 \text{ より } x > 0 \dots \textcircled{1}$$

$$\text{よって } x > \frac{1}{2} \dots \textcircled{1}$$

$$t = \log_2 x \text{ とおく}$$

$$\log_3 x(2x - 1) > \log_3 3$$

$$t^2 + 2t - 3 \leq 0$$

$$\text{底 } 3 > 1 \text{ より}$$

$$(t + 3)(t - 1) \leq 0$$

$$x(2x - 1) > 3$$

$$-3 \leq t \leq 1$$

$$(2x - 3)(x + 1) > 0$$

$$\text{よって } -3 \leq \log_2 x \leq 1$$

$$x < -1, \frac{3}{2} < x$$

$$\frac{1}{8} \leq x \leq 2$$

①と合わせると

①と合わせると

$$\frac{3}{2} < x$$

$$\frac{1}{8} \leq x \leq 2$$

$$[\text{応用}](\text{III}) \log_2 x + 3 \log_x 4 - 7 < 0$$

$$\text{底の条件より } x > 0, x \neq 1 \dots \textcircled{1}$$

$$(\text{i}) t > 0 \text{ つまり } x > 1 \text{ のとき}$$

$$\text{真数条件より } x > 0 \dots \textcircled{2}$$

$$(t-6)(t-1) < 0 \text{ より } 1 < t < 6$$

$$\log_2 x + 3 \frac{\log_2 4}{\log_2 x} - 7 < 0$$

$$\text{よって } 2 < x < 64 \rightarrow \text{まとめると } 2 < x < 64$$

$$\log_2 x + \frac{6}{\log_2 x} - 7 < 0$$

$$(\text{ii}) t < 0 \text{ つまり } 0 < x < 1 \text{ のとき}$$

$$t = \log_2 x \text{ とおく}$$

$$(t-6)(t-1) > 0 \text{ より } t < 1, 6 < t$$

$$t + \frac{6}{t} - 7 < 0$$

$$\text{よって } x < 2, 32 < x \rightarrow \text{まとめると } 0 < x < 1$$

$$(\text{i})(\text{ii}) \text{ より } \quad \mathbf{0 < x < 1, 2 < x < 64}$$

(演習)

$$(\text{i}) 2 \log_2(x-1) < \log_2(3-x)$$

$$(\text{ii}) (\log_3 x)^2 - \log_3 x^2 - 8 \leq 0$$

$$\text{真数条件より } x-1 > 0, 3-x > 0$$

$$\text{真数条件より } x > 0, x^2 > 0 \text{ より } x > 0 \dots \textcircled{1}$$

$$\text{よって } 1 < x < 3 \dots \textcircled{1}$$

$$t = \log_3 x \text{ とおく}$$

$$\log_2(x-1)^2 < \log_2(3-x)$$

$$t^2 - 2t - 8 \leq 0$$

$$\text{底 } 2 > 1 \text{ より}$$

$$(t-4)(t+2) \leq 0$$

$$(x-1)^2 < 3-x$$

$$-2 \leq t \leq 4$$

$$(x+1)(x-2) < 0$$

$$\text{よって } -2 \leq \log_3 x \leq 4$$

$$-1 < x < 2$$

$$\frac{1}{9} \leq x \leq 81$$

$$\textcircled{1} \text{ と合わせると}$$

$$\textcircled{1} \text{ と合わせると}$$

$$\mathbf{1 < x < 2}$$

$$\frac{1}{9} \leq x \leq \mathbf{81}$$

$$[\text{応用}](\text{iii}) \log_{\frac{1}{3}} x - 2 \log_x \frac{1}{9} + 3 > 0$$

$$\text{底の条件より } x > 0, x \neq 1 \dots \textcircled{1} \quad \text{よって } x < 81, \frac{1}{3} < x \rightarrow \text{まとめると } 0 < x < \frac{1}{3}$$

$$\text{真数条件より } x > 0 \dots \textcircled{2} \quad (\text{ii}) t < 0 \text{ つまり } 1 < x \text{ のとき}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x - 2 \frac{\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{3}}{\log_{\frac{1}{3}} x} + 3 > 0 \quad (t+4)(t-1) < 0 \text{ より } -4 < t < 1$$

$$t = \log_{\frac{1}{3}} x \text{ とおく} \quad \text{よって } \frac{1}{3} < x < 81 \rightarrow \text{まとめると } 1 < x < 81$$

$$t - \frac{4}{t} + 3 > 0 \quad (\text{i})(\text{ii}) \text{ より}$$

$$(\text{i}) t > 0 \text{ つまり } 0 < x < 1 \text{ のとき} \quad \mathbf{0 < x < \frac{1}{3}, 1 < x < 81}$$

$$(t+4)(t-1) > 0 \text{ より } t < -4, 1 < t$$

[応用]関数 $y = -2(\log_2 x)^2 + 2 \log_2 x^2 - 3$ $\left(\frac{1}{4} \leq x \leq 8\right)$ の最大値・最小値とそのときの x の値を求めよ。[ヒント: $t = \log_2 x$ とおく]

$$[\text{解}] t = \log_2 x \text{ とおく} \quad \text{よって、}$$

$$\frac{1}{4} < x < 8 \text{ より } -2 < t < 3 \quad \text{最大値 } -1(t=1 \text{ つまり } x=2 \text{ のとき})$$

$$y = -2t^2 + 4t - 3 \quad \text{最小値 } -19(t=-2 \text{ つまり } x=\frac{1}{4} \text{ のとき})$$

$$= -2(t-1)^2 - 1$$

[応用] $\log_2 x + \log_2 y = 3$ のとき、 $4x + y$ の最小値を求めよ。

また、そのときの x, y の値を求めよ。

[解] 真数条件より $x > 0, y > 0$

$\log_2 x + \log_2 y = 3$ より

$$xy = 8$$

$$y = \frac{8}{x}$$

$$4x + y = 4x + \frac{8}{x} \geq 2\sqrt{4x \cdot \frac{8}{x}} = 8\sqrt{2} \quad (\text{相加・相乗平均の関係})$$

等号成立条件より

$$4x = \frac{8}{x}$$

$$x > 0 \text{ より } x = \sqrt{2}$$

$$y = \frac{8}{x} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

よって 最小値 $8\sqrt{2}$ ($x = \sqrt{2}, y = 4\sqrt{2}$ のとき)

(ポイント)条件式

1文字消去

(7)常用対数

常用対数とは … 底が 10 の対数のこと $\log_{10} x$

何のために → 桁数問題

数が大きい場合、常用対数をとって計算すると値を小さくできる

例)

$$1000 \rightarrow \log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3$$

$$10000 \rightarrow \log_{10} 10000 = \log_{10} 10^4 = 4 \quad [4 \text{ 桁の数字の値は } 3. \cdots \text{になる}]$$

以上より、計算した値によって、その数の桁数がわかる

→ 具体的に正確な値はわからないが、だいたいどのくらいか(桁数)はわかる

[補足]

$$a = \log_{10} 2 = 0.3010, b = \log_{10} 3 = 0.4771 \text{ とする}$$

$$\log_{10} 1 = 0$$

$$\log_{10} 2 = a = 0.3010$$

$$\log_{10} 3 = b = 0.4771$$

$$\log_{10} 4 = \log_{10} 2^2 = 2 \log_{10} 2 = 2a = 0.6020$$

$$\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - a = 0.6990$$

$$\log_{10} 6 = \log_{10} 2 \times 3 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = a + b = 0.7781$$

$$\log_{10} 7 = 0.8450$$

$$\log_{10} 8 = \log_{10} 2^3 = 3 \log_{10} 2 = 3a = 0.9030$$

$$\log_{10} 9 = \log_{10} 3^2 = 2 \log_{10} 3 = 2b = 0.9542$$

例題 1) 3^{20} の数の桁数と最高位の数字を求めよ

(但し、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする)

[解] $x = 3^{20}$ として、常用対数をとると 桁数は整数部が表す

$\log_{10} x = \log_{10} 3^{20} = 20 \log_{10} 3$ → 小数部が最高位の数字を定める

$\log_{10} 3 = 0.4771$ を代入して つまり 0.542

$20 \log_{10} 3 = 20 \times 0.4771 = 9.542$ $\log_{10} 3 < 0.542 < \log_{10} 4$

$9 < \log_{10} x < 10$ より $10^9 < x < 10^{10}$ $3 < 10^{0.542} < 4$

よって 10 桁 したがって

$x = 3^{20} = 10^{9.542} = 10^{0.542} \cdot 10^9$ 最高位の数字は 3

(例題 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ を小数で表すとき、はじめて 0 でない数字が現れるのは小数第何位か。また、その数字はいくつか。(但し、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする)

[解] $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ として、常用対数をとると

$\log_{10} x = \log_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = \log_{10} 2^{-20} = -20 \log_{10} 2$

$\log_{10} 2 = 0.3010$ を代入して

$-20 \log_{10} 2 = -20 \times 0.3010 = -6.020$ $\log_{10} 9 < 0.980 < \log_{10} 10 = 1$

$-7 < \log_{10} x < -6$ より $10^{-7} < x < 10^{-6}$ $9 < 10^{0.980} < 10$

よって、小数第 7 位 したがって

$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = 10^{-6.020} = 10^{0.980} \cdot 10^{-7}$ 数字は 9

(演習 1) 6^{20} の数の桁数と最高位の数字を求めよ。

(但し、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする)

[解] $x = 6^{20}$ として、常用対数をとると

$$\log_{10} x = \log_{10} 6^{20} = 20 \log_{10} 6 = 20(\log_{10} 2 + \log_{10} 3)$$

$$\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771 \text{ を代入して}$$

$$20(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) = 20(0.3010 + 0.4771) = 15.562$$

$$15 < \log_{10} x < 16 \text{ より } 10^{15} < x < 10^{16} \text{ より } 15 \text{ 桁}$$

$$x = 10^{15.562} = 10^{0.562} \cdot 10^{15}$$

$$\log_{10} 3 < 0.562 < \log_{10} 4 \text{ より 最高位の数字は } 3$$

(演習 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{15}$ を小数で表すとき、はじめて 0 でない数字が現れるのは小数第何位

か。また、その数字はいくつか。(但し、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする)

[解] $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{15}$ として、常用対数をとると

$$\log_{10} x = \log_{10} \left(\frac{1}{3}\right)^{15} = \log_{10} 3^{-15} = -15 \log_{10} 3$$

$$\log_{10} 3 = 0.4771 \text{ を代入して}$$

$$-15 \log_{10} 3 = -15 \times 0.4771 = -7.1565$$

$$-8 < \log_{10} x < -7 \text{ より } 10^{-8} < x < 10^{-7} \text{ より 小数第 } 8 \text{ 位}$$

$$x = 10^{-7.1565} = 10^{0.8435} \cdot 10^{-8}$$

$$\log_{10} 6 < 0.8435 < \log_{10} 7 \text{ より 数字は } 6$$