# HL 数学　第 9 講

例題 1)四面体$O-ABC$ について、$OA$ の中点を$P$ , $PB$ の中点$Q$ , $QC$の中点を$R$とし、

直線 $OR$と平面 $ABC$ の交点を $M$ とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ , $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ , $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき、

$\overrightarrow{OM}$ を$\vec{a}$ , $\vec{b}$ , $\vec{c}$ で表せ。

[解]始点は $O$ とする

$P$ は $OA$ の中点より

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\vec{a}$

$Q$ は $PB$ の中点より

$\overrightarrow{OQ}=\frac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OB}}{2}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

$R$ は $QC$ の中点より

$\overrightarrow{OR}=\frac{\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OC}}{2}=\frac{1}{8}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

$M$ は $OR$と平面 $ABC$ の交点

(ⅰ)$M$ は$OR$上の点

$\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OR}=\frac{1}{8}k\vec{a}+\frac{1}{4}k\vec{b}+\frac{1}{2}k\vec{c}$ …①

(ⅱ)$M$ は平面 $ABC$上の点

$\overrightarrow{OM}=l\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$ …②

① , ②より$\vec{a}$ , $\vec{b}$ , $\vec{c}$ は 1 次独立なので

$$\begin{cases}\frac{1}{8}k=l\\ \frac{1}{4}k=m\\ \frac{1}{2}k=n\\ l+m+n=1\end{cases}$$

$\rightarrow\ k=\frac{8}{7}, l=\frac{1}{7}, m=\frac{2}{7}, n=\frac{4}{7}$

よって

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OM}=\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}+\frac{4}{7}\vec{c}}$$

演習)四面体$OABC$において、辺$OA$を$2:1$に内分する点$Q$，辺$BC$を$2:1$に内分する点$R$，線分$QR$の中点を$M$として、直線$OM$と平面$ABC$の交点を$P$とする。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OC}=\vec{c}$とするとき、$\overrightarrow{OP}$を$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$で表せ。

[解]始点を$O$とする

$Q$は$OA$を$2:1$に内分する点より

$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\vec{a}$

$R$は$BC$を$2:1$に内分する点より

$\overrightarrow{OR}=\frac{\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}}{3}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

$M$は$QR$の中点より

$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}}{2}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

$P$は$OM$と平面$ABC$の交点

(ⅰ)$P$は$OM$上の点

$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}k\vec{a}+\frac{1}{6}k\vec{b}+\frac{1}{3}k\vec{c}$ ⋯①

(ⅱ)$P$は平面$ABC$上の点

$\overrightarrow{OP}=l\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$ ⋯②

①，②より$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$は1次独立なので

$$\begin{cases} \frac{1}{3}k=l \\ \frac{1}{6}k=m \\ \frac{1}{3}k=n \\ l+m+n=1 \end{cases}$$

$\rightarrow\ k=\frac{6}{5}, l=\frac{2}{5}, m=\frac{1}{5}, n=\frac{2}{5}$

よって

$\boldsymbol{\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}}$

類題 1)平行 6 面体$OABC-DEFG$ において、平面 $ACD$ と直線 $OF$ の交点を$H$ とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$,$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$,$\overrightarrow{OD}=\vec{d}$ とするとき、$\overrightarrow{OH}$ を$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$ を使って表せ。

[解]始点 $O$ とする

$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}$

$H$ は $OF$ と平面 $ACD$ の交点

(ⅰ)$H$ は $OF$ 上の点

$\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OF}=k\vec{a}+k\vec{c}+k\vec{d}$ …①

(ⅱ)$H$ は平面 $ACD$ 上の点

$\overrightarrow{OH}=l\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OC}+n\overrightarrow{OC}=l\vec{a}+m\vec{c}+n\vec{d}$ …②

①，②より$\vec{a}$,$\vec{c}$,$\vec{d}$ は 1 次独立なので

$$\begin{cases} k=l \\ k=m \\ k=n \\ l+m+n=1 \end{cases}$$

$\rightarrow$ $k=\frac{1}{3}$ ,$l=\frac{1}{3}$ ,$m=\frac{1}{3}$ ,$n=\frac{1}{3}$

よって

$\boldsymbol{\overrightarrow{OH}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}}$

類題 2) p49 **27**

解答はリード B 参照

(類題 3)四面体 $OABC$ において、$\triangle ABC$ の重心 $G$ , 辺 $OA$ を $2:1$ に内分する点 $Q$ , 直線 $OG$ と平面 $BCQ$ の交点 $P$ , 直線 $AP$ と平面 $OBC$ の交点 $R$ とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ , $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ , $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき、$\overrightarrow{OP}$ , $\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$ , $\vec{b}$ , $\vec{c}$ で表せ。

[解]始点 $O$ とする

$G$ は $\triangle ABC$ の重心より

$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

$Q$ は $OA$ を $2:1$ に内分する点より

$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\vec{a}$

$P$ は $OG$ と平面 $BCQ$ の交点

(ⅰ) $P$ は $OG$ 上の点

$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}+\frac{1}{3}k\vec{c}$ …①

(ⅱ) $P$ は平面 $BCQ$ 上の点

$\overrightarrow{OP}=l\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{OC}+n\overrightarrow{OQ}=l\vec{b}+m\vec{c}+\dfrac{2}{3}n\vec{a}=\dfrac{2}{3}n\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}$ …②

① , ②より $\vec{a}$ , $\vec{b}$ , $\vec{c}$ は 1 次独立なので

$$\begin{cases} \frac{1}{3}k=\frac{2}{3}n \\ \frac{1}{3}k=l \\ \frac{1}{3}k=m \\ l+m+n=1 \end{cases}$$

$\rightarrow$ $k=\frac{6}{7}$ , $l=\frac{2}{7}$ , $m=\frac{2}{7}$ , $n=\frac{3}{7}$

よって

$\boldsymbol{\overrightarrow{OP}=\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}+\frac{2}{7}\vec{c}}$

$R$ は$AP$ と平面 $OBC$ の交点

（ⅰ）$R$ は $AP$ 上の点

$\overrightarrow{OR}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{a}+\frac{2}{7}t\vec{a}+\frac{2}{7}t\vec{b}+\frac{2}{7}t\vec{c}=\left(1-\frac{5}{7}t\right)\vec{a}+\frac{2}{7}t\vec{b}+\frac{2}{7}t\vec{c}$ …③（$t$ は実数）

（ⅱ）$R$ は平面 $OBC$ 上の点

$\overrightarrow{OR}=p\overrightarrow{OB}+q\overrightarrow{OC}=p\vec{b}+q\vec{c}$ …④

③，④より$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は 1 次独立なので

$1-\frac{5}{7}t=0$

$\frac{2}{7}t=p$ $\rightarrow$ $t=\frac{7}{5},p=\frac{2}{5},q=\frac{2}{5}$

$\frac{2}{7}t=q$ よって $\boldsymbol{\overrightarrow{OR}=\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}}$