[2]

$f(x)=x^3-kx^2+kx+1$

とおく。このとき、

$f'(x)=3x^2-2kx+k$

である。さて、$f(x)$が極値をもつとき、

$f'(x)=0$　…①

は異なる2つの実数解をもつから、①の判別式をDとして、

$D>0$

が必要。よって、

$\dfrac{D}{4}=(-k)^2-3k=k(k-3)$

より、$k(k-3)>0$を解いて、

$k<0$，$3<k$　…②

この条件のもとで①の解を$\alpha,\beta(\alpha<\beta)$とおくと、

$f(x)$の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって、条件から、

$f(\alpha)-f(\beta)=4|k|^3$　…③

が成立する。ここで、

$$\begin{aligned}f(\alpha)-f(\beta)&=\int_\beta^\alpha f'(x)dx\\&=3\int_\beta^\alpha(x-\alpha)(x-\beta)dx\\&=3\left(-\frac{1}{6}\right)(\alpha-\beta)^3\\&=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

であり、①より

$x=\dfrac{k\pm\sqrt{k^2-3k}}{3}$

よって、$\beta=\dfrac{k+\sqrt{k^2-3k}}{3}$，$\alpha=\dfrac{k-\sqrt{k^2-3k}}{3}$なので、

$\beta-\alpha=\dfrac{2\sqrt{k^2-3k}}{3}$

よって、③とで、

$4|k|^3=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\sqrt{k^2-3k}}{3}\right)^3$

$$27|k|^3 = \left(\sqrt{k^2 - 3k}\right)^3$$

$$3|k| = \sqrt{k^2 - 3k}$$

$$9k^2 = k^2 - 3k$$

$$k(8k+3) = 0$$

$$k = 0, -\frac{3}{8}$$

②より、

$$k = -\frac{3}{8} \quad \cdots答$$

このウインドウを閉じる