横浜国立大学

経済（経済）

数学 - 解答

1

(1)

$$a_n = 0, 1, 2$$
$$b_1 = 1, 3b_{n+1} = 5a_n + b_n \quad \cdots\cdots ①$$

①で $n=1$ を代入

$$\begin{aligned} 3b_2 &= 5a_1 + 1 \\ &= 6 \\ \therefore b_2 &= 2 \end{aligned} \qquad a_1 = 1$$

①で $n=2$ を代入

$$\begin{aligned} 3b_3 &= 5a_2 + 2 \\ &= 12 \\ \therefore b_3 &= 4 \end{aligned} \qquad a_2 = 2$$

①で $n=3$ を代入

$$\begin{aligned} 3b_4 &= 5a_3 + 4 \\ &= 9 \\ \therefore b_4 &= 3 \end{aligned} \qquad a_3 = 1$$

①で $n=4$ を代入

$$\begin{aligned} 3b_5 &= 5a_4 + 3 \\ &= 3 \\ \therefore b_5 &= 1 \end{aligned} \qquad a_4 = 0$$

以上より，$\underline{\underline{(b_2, b_3, b_4, b_5) = (2, 4, 3, 1)}}$（答）

(2) a_n は周期的巡回群により，

$$\begin{cases} a_{4k-3} = 1 \\ a_{4k-2} = 2 \\ a_{4k-1} = 1 \\ a_{4k} = 0 \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

(i) $n = 4m-3$ $(m \geqq 1)$ のとき

$$\begin{aligned} S_n = S_{4m-3} = \sum_{k=1}^{4m-3} a_k &= \sum_{k=1}^{m-1} (\underbrace{a_{4k-3} + a_{4k-2} + a_{4k-1} + a_{4k}}_{=4}) + a_{4m-3} \\ &= 4(m-1) + 1 \\ &= 4m - 3 \ (m \geqq 2,\ m=1 \text{もみたす}) \\ &= n \end{aligned}$$

(ii) $n = 4m-2$ $(m \geqq 1)$ のとき

$$S_n = S_{4m-2} = \sum_{k=1}^{4m-2} a_k = \sum_{k=1}^{m-1} (a_{4k-3} + a_{4k-2} + a_{4k-1} + a_{4k}) + a_{4m-3} + a_{4m-2}$$

$S_n = S_{4m-2} = \sum_{k=1} a_k = \sum_{k=1} (\underbrace{a_{4k-3} + a_{4k-2} + a_{4k-1} + a_{4k}}_{4}) + a_{4m-3} + a_{4m-2}$

$= 4(m-1)+1+2$

$= 4m-1$ （$m \geqq 2$, $m=1$もみたす）

$= n+1$

(iii) $n=4m-1$ （$m \geqq 1$）のとき

$$S_n = S_{4m-1} = \sum_{k=1}^{4m-1} a_k = \sum_{k=1}^{m-1} (\underbrace{a_{4k-3} + a_{4k-2} + a_{4k-1} + a_{4k}}_{4}) + a_{4m-3} + a_{4m-2} + a_{4m-1}$$

$= 4(m-1)+1+2+1$

$= 4m$ （$m \geqq 2$, $m=1$もみたす）

$= n+1$

(iv) $n=4m$ （$m \geqq 1$）のとき

$$S_n = S_{4m} = \sum_{k=1}^{4m} a_k = \sum_{k=1}^{m} (\underbrace{a_{4k-3} + a_{4k-2} + a_{4k-1} + a_{4k}}_{4})$$

$= 4m$

$= n$

以上まとめて,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \begin{cases} n & (n\text{ が }4\text{ の倍数 または }4\text{の倍数余り}1\text{ のとき}) \\ n+1 & (n\text{ が }4\text{ の倍数余り}2\text{ または余り}3\text{ のとき}) \end{cases}$$ （答）

このウインドウを閉じる