数列

①数列とは

数列 … ある規則で並んだ数字の列のことである

第 n 番目の項を<u>一般項</u>といい、$\underline{a_n}$とかく

特に、第 1 番目の項(つまり$\underline{a_1}$)を<u>初項</u>、数列の最後の項を<u>末項</u>という

→ 様々な規則から一般項を求め、それを活用していくのが数列の分野

(数列の例)

1 , 3 , 5 , 7 , 9 , 11 , ⋯ → $a_n = \underline{2n-1}$ <u>（等差数列）</u>

1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , ⋯ → $a_n = \underline{2^{n-1}}$ <u>（等比数列）</u>

1 , 2 , 5 , 10 , 17 , 26 , ⋯ → $a_n = \underline{n^2-2n+2}$ <u>（階差数列）</u>

1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , ⋯ → $a_n = \underline{\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}}$<u>(フィボナッチ数列)</u>

②等差数列

(1)基本

等差数列 … 数列の項に一定の数(<u>公差</u>)を足したり、引いたりする規則で出来ている数列

<u>公式</u>

初項 a , 公差 d とすると

一般項 $\underline{\boldsymbol{a_n = a + (n-1)d}}$

(例題 1)

(ⅰ) $1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots$

初項 $\underline{1}$，公差 $\underline{2}$ より $a_n = 1 + (n-1)2 = \boldsymbol{2n-1}$

(ⅱ) $19, 15, 11, 7, 3, \cdots$

初項 $\underline{19}$，公差 $\underline{-4}$ より $a_n = 19 + (n-1)(-4) = \boldsymbol{-4n+23}$

(例題 2)

(ⅰ)初項 2，公差 3 の一般項と第 10 項を求めよ

[解]一般項　$a_n = 2 + (n-1)3 = \boldsymbol{3n-1}$

第 10 項($n = 10$ を代入) $a_{10} = 3 \times 10 - 1 = \boldsymbol{29}$

(ⅱ)初項 2，第 5 項 26 である等差数列の一般項を求めよ

[解]初項 2，公差 d とすると第 5 項 26 より

$a_5 = 2 + (5-1)d = 26$

$4d = 24$

$d = 6$

よって

$a_n = 2 + (n-1)6 = \boldsymbol{6n-4}$

(ⅲ)第 4 項 2，第 15 項 24 である等差数列の一般項と 84 は第何項であるか求めよ

[解]初項 a ，公差 dとすると

$a_4 = a + 3d = 2$　$\cdots$ ⑴

$a_{15} = a + 14d = 24$　$\cdots$ ⑵

⑴⑵より $a = -4, d = 2$

一般項　$a_n = -4 + (n-1)2 = \boldsymbol{2n-6}$

$2n - 6 = 84$より

$n = 45$

よって

84 は**第 45 項**

(演習)

(Ⅰ)初項 4，公差 -6 の一般項と第 20 項を求めよ

[解]一般項　$a_n = 4 + (n-1)(-6) = \boldsymbol{-6n+10}$

第 20 項($n = 20$ を代入) $a_{20} = -6 \times 20 + 10 = \boldsymbol{-110}$

(Ⅱ)初項 3，第 8 項 38 である等差数列の一般項を求めよ

[解]初項 3，公差 d とすると第 8 項 38 より

$a_8 = 3 + (8-1)d = 38$

$7d = 35$

$d = 5$

よって

$a_n = 3 + (n-1)5 = \boldsymbol{5n-2}$

(Ⅲ)第 5 項 8，第 10 項 -7 である等差数列の一般項と -25 は第何項であるか求めよ

[解]初項 a，公差 d とすると

$a_5 = a + 4d = 8$　… ⑴

$a_{10} = a + 9d = -7$　… ⑵

⑴⑵より $a = 20, d = -3$

一般項　$a_n = 20 + (n-1)(-3) = \boldsymbol{-3n+23}$

$-3n + 23 = -25$ より

$n = 16$

よって

-25 は**第 16 項**

[補充](Ⅳ)初項 20，公差 -6，末項 -22 である等差数列の項数を求めよ

[解]初項 20，公差 -6 より

一般項 $a_n = 20 + (n-1)(-6) = -6n + 26$

$-6n + 26 = -22$ より

$6n = 48$

$n = 8$

よって

項数 **8**

⑵等差中項

等差数列 $a\,,b\,,c$に関して

$\boldsymbol{b=\frac{a+c}{2}}$ とかける　このbを**等差中項**と呼ぶ

(例)

$a=2\,,b=4\,,c=6\,\left(\text{公差 2 の等差数列}\right)$とすると

$\frac{a+c}{2}=\frac{2+6}{2}=4(=b)$

(演習)

(Ⅰ) $x\,,2x\,,9$ がこの順番に等差数列をなすとき、x の値を求めよ

[解]等差中項より

$2x=\frac{x+9}{2}$

$3x=9$

$\boldsymbol{x=3}$

(Ⅱ) $a^2\,,3\,,a$ がこの順番に等差数列をなす時、a の値を求めよ

[解]等差中項より

$3=\dfrac{a^2+a}{2}$

$a^2+a-6=0$

$(a+3)(a-2)=0$

よって

$\boldsymbol{a=-3\,,2}$

⑶等差数列の和

公式

初項から第 n 項までの和を S_n ，初項 a_1 ，第 n 項(末項) a_n ，公差 d とすると

$$\boldsymbol{S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n) = \frac{1}{2}n\{2a_1 + (n-1)d\}}$$

(大部分は左を使うが、稀に右も使うこともある)

(ポイント)

等差数列の和の公式は(項数) , (初項) , (末項)が分かれば良い

(証明)

一般項　$a_n = a_1 + (n-1)d$ とする

$$\begin{array}{l} S_n = a_1 + (a_1 + d) + \ \cdots \ + \{a_1 + (n-2)d\} + \{a_1 + (n-1)d\} \\ \underline{+) S_n = \{a_1 + (n-1)d\} + \{a_1 + (n-2)d\} + \ \cdots + (a_1 + d) + a_1} \quad \textbf{←逆順} \end{array}$$

$$2S_n = \{2a_1 + (n-1)d\} + \{2a_1 + (n-1)d\} + \cdots + \{2a_1 + (n-1)d\} + \{2a_1 + (n-d)\}$$

$$2S_n = n \times \{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2a_1 + (n-1)d\} = \frac{1}{2}n[a_1 + \{a_1 + (n-1)d\}] = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$$

(例題)

(ⅰ)初項 2，末項 47，項数 16 の等差数列の和 S_{16} を求めよ

[解]等差数列の和の公式(左)に $a_1 = 2$, $a_{16} = 47$, $n = 16$ を代入

$$S_{16} = \frac{1}{2} \cdot 16(2 + 47) = 8 \cdot 49 = \mathbf{392}$$

(ⅱ)初項 3，公差 -7 の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ

[解]等差数列の和の公式(右)に $a_1 = 3$, $d = -7$ を代入

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2 \cdot 3 + (n-1)(-7)\} = \frac{1}{2}n(6 - 7n + 7) = \boldsymbol{\frac{1}{2}n(13 - 7n)}$$

(ⅲ)初項から第 5 項までの和が 35、初項から第 10 項までの和が 145 である等差数列の第 7 項と初項から第 n 項までの和を求めよ

[解]初項 a, 公差 d とすると初項から第 5 項までの和が 35 より($n = 5$ も代入)

$\frac{1}{2} \cdot 5\{2a + (5-1)d\} = 35$ …(1)

同様に初項から第 10 項までの和が 145 より($n = 10$ も代入)

$\frac{1}{2} \cdot 10\{2a + (10-1)d\} = 145$ …(2)

(1)，(2)より $a = 1$, $d = 3$　よって一般項は　$a_n = 1 + (n-1)3 = 3n - 2$

第 7 項 $a_7 = 3 \cdot 7 - 2 = \mathbf{19}$

$a_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1$

初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{1}{2}n(1 + 3n - 2) = \boldsymbol{\frac{1}{2}n(3n - 1)}$$

(演習)

(Ⅰ)初項 6，末項 124，項数 12 の等差数列の和 S_{12} を求めよ

[解]等差数列の和の公式(左)に $a_1 = 6, a_{12} = 124, n = 12$ を代入

$$S_{12} = \frac{1}{2} \cdot 12(6 + 124) = 6 \cdot 130 = \mathbf{780}$$

(Ⅱ)初項 4，公差 5 の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ

[解]等差数列の和の公式(右)に $a_1 = 4, d = 5$ を代入

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2 \cdot 4 + (n-1)5\} = \frac{1}{2}n(8 + 5n - 5) = \boldsymbol{\frac{1}{2}n(5n+3)}$$

(Ⅲ)初項から第 5 項までの和が 40、初項から第 15 項までの和が 270 である等差数列の第 6 項と初項から第 n 項までの和を求めよ

[解]初項 a，公差 d とすると初項から第 5 項までの和が 40 より($n = 5$ も代入)

$\frac{1}{2} \cdot 5\{2a + (5-1)d\} = 40$ …⑴

同様に初項から第 15 項までの和が 270 より($n = 15$ も代入)

$\frac{1}{2} \cdot 15\{2a + (15-1)d\} = 270$ …⑵

⑴，⑵より $a = 4, d = 2$　よって一般項は　$a_n = 4 + (n-1)2 = 2n + 2$

第 6 項 $a_6 = 2 \cdot 6 + 2 = \mathbf{14}$

$a_1 = 2 \cdot 1 + 2 = 4$

初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{1}{2}n(4 + 2n + 2) = \boldsymbol{n(n+3)}$$

[応用](IV) 1 から 100 までの自然数のうち次の値を求めよ

⑴3 で割ると 2 余る数の和　　　　　⑵5 で割り切れない数の和

[解]⑴3 で割ると 2 余る数の一般項は

$a_n = 3n + 2\ (n = 0, 1, 2, 3 \cdots)$　$n = 32$ のとき、$a_{32} = 3 \cdot 32 + 2 = 98$ より求める和は

a_n の $n = 0$ から $n = 32$ までの和つまり初項 $a_0 = 2$,末項 $a_{32} = 98$,項数 33 の等差数列の和より

$\frac{1}{2} \cdot 33(2 + 98) = \frac{1}{2} \cdot 33 \cdot 100 = \mathbf{1650}$

⑵(1 から 100 までの自然数の和) − (5 で割り切れる数の和)を計算して求める

[一般的に~でない数は、計算が大変なので全体から~である数を引く計算する]

まず 1 から 100 までの和は、初項 1，末項 100，項数 100 の等差数列の和より

$\frac{1}{2} \cdot 100(1 + 100) = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 101 = 5050$

5 で割り切れる数の一般項は

$a_n = 5n\ (n = 1, 2, 3, 4 \cdots)$　　$n = 20$ のとき、$a_{20} = 5 \cdot 20 = 100$ より求める和は

a_n の $n = 1$ から $n = 20$ までの和つまり初項 $a_1 = 5$,末項 $a_{20} = 100$,項数 20 の等差数列の和より

$\frac{1}{2} \cdot 20(5 + 100) = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 105 = 1050$

よって求める数は $5050 - 1050 = \mathbf{4000}$

[応用](Ⅴ)初項 -200、公差 6 の等差数列の和 S_n の最小値とそのときの n を求めよ

[解]等差数列の一般項は

$a_n = -200 + (n - 1)6 = 6n - 206$

$a_n < 0$ より $6n - 206 < 0$

$n < \frac{206}{6} = 34.3333$

最小の S_n は $\boldsymbol{n = 34}$ のとき

$S_{34} = \frac{1}{2} \cdot 34(-200 + 6 \cdot 34 - 206)$

$= \mathbf{-3434}$

[別解]

$S_n = \frac{1}{2} n(-200 + 6n - 206) = 3n^2 - 203n$

$= 3\left(n - \frac{203}{6}\right)^2 - \frac{41209}{12}$

よって $n = 34$ としてもよい

③等比数列

⑴基本

等比数列 … 数列の項が一定の数(公比)でかけたり、割ったりする規則で出来ている

数列

公式

初項 a，公比 r とすると

一般項　$\boldsymbol{a_n = ar^{n-1}}$

(例題 1)

(i)$1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , \cdots$

初項 1，公比 2 より　$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = \boldsymbol{2^{n-1}}$

(ii)$162 , -54 , 18 , -6 , \cdots$

初項 162，公比$-\frac{1}{3}$　より　$a_n = 162 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \boldsymbol{2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-5}}$

(例題 2)

(ⅰ)初項 4，公比 2 の一般項と第 10 項を求めよ

[解]一般項　$a_n = \mathbf{4 \cdot 2^{n-1}}$　　第 10 項($n = 10$ を代入)　$a_{10} = 4 \cdot 2^{10-1} = 4 \cdot 2^9 = 4 \cdot 512 = \mathbf{2048}$

(ⅱ)初項 2，第 4 項-54である等比数列の一般項を求めよ

[解]

初項 2，公比 r とすると第 4 項-54より

$a_4 = 2 \cdot r^{4-1} = -54$

$r^3 = -27$

$r = -3$

よって

一般項　$a_n = \mathbf{2 \cdot (-3)^{n-1}}$

(ⅲ)第 3 項 $\frac{3}{8}$，第 6 項 $\frac{3}{64}$ である等差数列の一般項と $\frac{3}{1024}$ は第何項であるか求めよ

[解]

初項 a，公比 r とすると

$a_3 = ar^2 = \frac{3}{8}$　…(1)

$a_6 = ar^5 = \frac{3}{64}$　…(2)

$\frac{(2)}{(1)} = \frac{ar^5}{ar^2} = \frac{\frac{3}{64}}{\frac{3}{8}}$

$r^3 = \frac{1}{8}$　$r = \frac{1}{2}$　$a = \frac{3}{8} \div \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$ ((1)に代入)

$a = \frac{3}{2}$, $r = \frac{1}{2}$ より一般項　$\boldsymbol{a_n = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

$\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{3}{1024}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^9$

$n - 1 = 9$ ，$n = 10$

よって　$\frac{3}{1024}$は**第 10 項**

(演習)

(Ⅰ)初項5，公比3の一般項と第8項を求めよ

[解]一般項　$a_n = \mathbf{5 \cdot 3^{n-1}}$　　第8項($n = 8$ を代入)　$a_8 = 5 \cdot 3^{8-1} = 5 \cdot 3^7 = 5 \cdot 2187 = \mathbf{10935}$

(Ⅱ)初項3，第5項768である等比数列の一般項を求めよ

[解]

初項3，公比rとすると第5項768より

$a_5 = 3 \cdot r^{5-1} = 768$

$r^4 = 256$

$r = \pm 4$

よって

一般項　$\boldsymbol{a_n = 3 \cdot 4^{n-1}}, \boldsymbol{a_n = 3 \cdot (-4)^{n-1}}$

(Ⅲ)第4項4，第7項$\frac{1}{2}$である等差数列の一般項と$\frac{1}{256}$は第何項であるか求めよ

[解]

初項a，公比rとすると

$a_4 = ar^3 = 4$　…(1)

$a_7 = ar^6 = \frac{1}{2}$　…(2)

$\frac{(2)}{(1)} = \frac{ar^6}{ar^3} = \frac{\frac{1}{2}}{4}$

$r^3 = \frac{1}{8}$　$r = \frac{1}{2}, a = 4 \div \frac{1}{8} = 32$ ((1)に代入)

$a = 32, r = \frac{1}{2}$より一般項　$a_n = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-6} = \frac{1}{256}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-6} = \left(\frac{1}{2}\right)^8$

$n - 6 = 8$，$n = 14$

よって　$\frac{1}{256}$は**第14項**

⑵等比中項

等比数列 a , b , cに関して

$b^2 = ac$ とかける　この b を等比中項と呼ぶ

（例）

$a = 2$, $b = 4$, $c = 8$ $\left(\text{公比 2 の等比数列}\right)$とすると

$ac = 2 \cdot 8 = 16 = 4^2 (= b^2)$

（演習）

(Ⅰ)3 つの数 a , 8 , a^2 がこの順に等比数列をなすとき、 a の値を求めよ

[解]

等比中項より

$a \cdot a^2 = 8^2$

$a^3 = 64$

よって

$\boldsymbol{a = 4}$

(Ⅱ)3 つの数 a , b , 4 がこの順に等比数列をなし、3 つの数の和が 19 であるとき、

a , b の値を求めよ

[解]

等比中項より

$4a = b^2$

3 つの和が 19 より

$a + b + 4 = 19$

$a + b = 15$

2 式より

$\boldsymbol{a = 25}$, $\boldsymbol{b = -10}$

$\boldsymbol{a = 9}$, $\boldsymbol{b = 6}$

⑶等比数列の和

<u>公式</u>

初項から第 n 項までの和を S_n ，初項 a ，公比 r とすると

$\boldsymbol{S_n = na\ (r = 1}$**のとき）**

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}\ \left(r \neq 1\text{のとき}\right)}$$

($r < 1$ のときは左、$r > 1$ のときは右を基本的には使う)

(証明)

一般項　$a_n = ar^{n-1}$ とする

(ⅰ)$r = 1$ のとき

$a_n = a$より$S_n = a + a + a + \cdots + a + a = na$

(ⅱ)$r \neq 1$ のとき

$$\begin{array}{rl} S_n = & a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \\ \underline{-)\ rS_n =} & \underline{\quad ar + ar^2 + ar^3 + \cdots \quad + ar^{n-1} + ar^n} \end{array}$$

$(1-r)S_n = a - ar^n$

$(1-r)S_n = a(1-r^n)$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \times \frac{(-1)}{(-1)} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

(例題)

(ⅰ)初項 3，公比-2 の等比数列の初項から第 10 項までの和を求めよ

[解]等比数列の和の公式(左)に $a=3$,$r=-2$,$n=10$ を代入

$$S_{10}=\frac{3\{1-(-2)^{10}\}}{1-(-2)}=\frac{3(1-1024)}{3}=\boldsymbol{-1023}$$

(ⅱ)初項 1，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列の初項から第 n 項までの和を求めよ

[解]等比数列の和の公式(左)に $a=1$,$r=\frac{1}{2}$ を代入

$$S_n=\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}$$

(ⅲ)初項から第 5 項までの和が 1，初項から第 10 項までの和が 33 である等比数列

の初項から第 n 項までの和を求めよ

[解]等比数列の和の公式は公比の値よって 2 つあるので場合分けする

(ⅰ)$r=1$ のとき

初項から第 5 項までの和が 1，初項から第 10 項までの和が 33 より初項 a とすると

$5a=1(n=5$ を代入) ,$10a=33(n=10$ を代入)となるが 2 つを満たす a は存在しない

つまり$r=1$ は不適

(ⅱ)$r\neq1$ のとき

初項 a , 公比r とすると初項から第 5 項までの和が 1 より($n=5$ も代入)

$\frac{a(r^5-1)}{r-1}=1$ …(1)

初項から第 10 項までの和が 33 より（$n=10$ を代入）

$\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=33$ …(2)

$\frac{(2)}{(1)}$より　　$\frac{(r^5+1)(r^5-1)}{(r^5-1)}=33$　　$r^5=32$　　よって

$\frac{\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}}{\frac{a(r^5-1)}{r-1}}=\frac{33}{1}$　　$r^5+1=33$　　$r^5=2^5$　　$r=2$

$r=2$ を(1)に代入して

$\frac{a(2^5-1)}{2-1}=1$

$a=\frac{1}{31}$ よって、$S_n=\frac{\frac{1}{31}(2^n-1)}{2-1}=\mathbf{\frac{1}{31}(2^n-1)}$

(演習)

(Ⅰ)初項 2 ,公比 4 の等比数列の初項から第 6 項までの和を求めよ

[解]等比数列の和の公式(右)に$a=2$,$r=4$,$n=6$ を代入

$S_6=\frac{2\{4^6-1\}}{4-1}=\frac{2(4096-1)}{3}=\mathbf{2730}$

(Ⅱ)初項 3 , 公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列の初項から第 n 項までの和を求めよ

[解]等比数列の和の公式(左)に$a=3$,$r=\frac{1}{3}$ を代入

$S_n=\frac{3\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{\frac{2}{3}}=\mathbf{\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}$

(Ⅲ)初項から第 3 項までの和が 28 , 初項から第 6 項までの和が -728 である等比数列の初項から第 n 項までの和を求めよ

[解]等比数列の和の公式は公比の値よって 2 つあるので場合分けする

(ⅰ)$r=1$ のとき

初項から第 3 項までの和が 28 , 初項から第 6 項までの和が-728より初項 a とすると

$3a=28\left(n=3 \text{ を代入}\right)$,$6a=-728(n=6 \text{ を代入})$となるが 2 つを満たす a は存在しない

つまり$r=1$ は不適

(ⅱ)$r\neq 1$ のとき

初項 a , 公比r とすると初項から第 3 項までの和が 1 より($n=3$ も代入)

$\frac{a(r^3-1)}{r-1}=28$ ⋯(1)

初項から第6項までの和が-728より($n=6$を代入)

$\frac{a(r^6-1)}{r-1}=-728$ …(2)

$\frac{(2)}{(1)}$より

$\frac{\frac{a(r^6-1)}{r-1}}{\frac{a(r^3-1)}{r-1}}=\frac{-728}{28}$

$\frac{(r^3+1)(r^3-1)}{(r^3-1)}=-26$

$r^3+1=-26$

$r^3=-27$

$r^3=(-3)^3$

よって

$r=-3$

$r=-3$を(1)に代入して

$\frac{a\{(-3)^3-1\}}{-3-1}=28$

$a=4$

よって、$S_n=\frac{4\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)}=\mathbf{1-(-3)^n}$

[応用](IV)初項3, 公比2の等比数列をa_nとするとき、以下の和を求めよ

(1) ${a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+\cdots+{a_n}^2$

(2) $a_1\cdot a_2+a_2\cdot a_3+a_3\cdot a_4+\cdots+a_{n-1}\cdot a_n+a_n\cdot a_{n+1}$

[解](1)

$a_n=3\cdot 2^{n-1}$

$b_n={a_n}^2$とおくと

$b_n=(3\cdot 2^{n-1})^2=9\cdot 4^{n-1}$

よって求める和はb_nの第n項までの和なので

$\mathbf{\frac{9(4^n-1)}{4-1}=3(4^n-1)}$

(2)同様に

$c_n=a_n\cdot a_{n+1}$とおくと

$c_n=(3\cdot 2^{n-1})\cdot(3\cdot 2^n)=9\cdot 2^{2(n-1)+1}=18\cdot 4^{n-1}$

よって求める和はc_nの第n項までの和なので

$\mathbf{\frac{18(4^n-1)}{4-1}=6(4^n-1)}$

④$\sum$計算と様々な数列

⑴$\sum$計算

$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$

（Σは数列の和を表す記号、添字は和の範囲を示す）

<u>公式</u>

①$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{c} = c + c + c + \cdots + c + c = \underline{\boldsymbol{cn}}$ ［cはkに依存しない数(定数)］

②$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{k} = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+1)}}$

③$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{k^2} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}}$

④$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{k^3} = 1^3 + 2^3 + 3^2 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = \underline{\boldsymbol{\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}}$

⑤$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r^{k-1}} = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1} = \boldsymbol{\frac{r^n-1}{r-1}}$ $(r \neq 1)$

<u>性質</u>

⑴$\sum_{k=1}^{n} a_k + b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

⑵$\sum_{k=1}^{n} pa_k = p\sum_{k=1}^{n} a_k$　［pはkに依存しない数(定数)］

（証明）

①についてはそのまま(自明)

②については等差数列の和の公式に初項$a = 1$，公差$d = 1$を代入

⑤については等比数列の和の公式に初項$a = 1$を代入

③の証明

恒等式$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$を利用

$k=1$のと　　$2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1$

$k=2$のとき　　$3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1$

$k=3$のとき　　$4^3-3^3=3\cdot3^2+3\cdot3+1$

$\vdots$　　　　　$\vdots$

$k=n$のとき　$\underline{+)(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1}$

$$(n+1)^3-1^3=3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+3(1+2+3+\cdots+n)+n$$

$$(n+1)^3-1=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+n$$

$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$を代入

$$(n+1)^3-1=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2=(n+1)^3-1-\frac{3}{2}n(n+1)-n$$

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{2}(n+1)\{2(n+1)^2-3n-2\}$$

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{2}(n+1)(2n^2+n)$$

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

④の証明

恒等式$(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$を利用

$k=1$ のとき　　$2^4-1^4=4\cdot1^3+6\cdot1^2+4\cdot1+1$

$k=2$ のとき　　$3^4-2^4=4\cdot2^3+6\cdot2^2+4\cdot2+1$

$k=3$ のとき　　$4^4-3^4=4\cdot3^3+6\cdot3^2+4\cdot3+1$

$k=n$のとき　$\underline{+)(n+1)^4-n^4=4n^3+6n^2+4n+1}$

$$(n+1)^4-1^4=4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)+6(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$$

$$+4(1+2+3+\cdots+n)+n$$

$$(n+1)^4-1=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+n$$

$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$を代入

$$(n+1)^4-1=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$(n+1)^4-1=4\sum_{k=1}^{n}k^3+n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)+n$$

$$4\sum_{k=1}^{n}k^3=(n+1)^4-1-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-n$$

$$4\sum_{k=1}^{n}k^3=(n+1)\{(n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\}$$

$$4\sum_{k=1}^{n}k^3=(n+1)(n^3+n^2)$$

$$4\sum_{k=1}^{n}k^3=n^2(n+1)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

(例題)

（ⅰ）$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$

[解] $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + k$

$= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$

$= \frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+4) = \boldsymbol{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}$

（ⅱ）$5 + 9 + 13 + \cdots + (4n+1)$

[解] $5 + 9 + 13 + \cdots + (4n+1) = \sum_{k=1}^{n} 4k + 1$

$= 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$

$= 4 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + n$

$= 2n(n+1) + n = \boldsymbol{2n^2 + 3n}$

（ⅲ）$\sum_{k=1}^{n} 3^{k+1}$

[解] $\sum_{k=1}^{n} 3^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} 3^2 \cdot 3^{k-1} = 9\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} = 9\frac{3^n-1}{3-1} = \boldsymbol{\frac{9}{2}(3^n - 1)}$

(演習)

（Ⅰ）$\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)$

[解] $\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3k + 2$

$= \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + 2\sum_{k=1}^{n} 1$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 3 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + 2n$

$= \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1) + 9(n+1) + 12\}$

$= \frac{1}{6}n(2n^2 + 12n + 22)$

$= \boldsymbol{\frac{1}{3}n(n^2 + 6n + 11)}$

（Ⅱ）$2 + 5 + 8 + 11 + \cdots + (3n-1)$

[解] $2 + 5 + 8 + \cdots + (3n-1) = \sum_{k=1}^{n} 3k - 1$

$= 3\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1$

$= 3 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - n$

$= \frac{3}{2}n(n+1) - n = \boldsymbol{\frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n}$

[応用]以下の和を求めよ(Ⅲは一般項も考えて和を求めよ)

(Ⅲ)$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5\ \cdots$

[解]一般項 a_n は

$a_n=n(n+1)(n+2)$

よって求める和は

$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$

$=\sum_{k=1}^{n}k^3+3k^2+2k$

$=\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k$

$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2+\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)+n(n+1)$

$=\frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1)+2(2n+1)+4\}$

$=\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+5n+6)$

$=\boldsymbol{\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)}$

(Ⅳ)$\sum_{k=1}^{l}\left\{\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{j}i\right)\right\}$

[解]$=\sum_{k=1}^{l}\left\{\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2}j(j+1)\right\}$

$=\sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2}j^2+\frac{1}{2}j\right)$

$=\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{12}k(k+1)(2k+1)+\frac{1}{4}k(k+1)$

$=\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{12}k(k+1)(2k+1+3)$

$=\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)$

$=\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{6}k^3+\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{3}k$

$=\frac{1}{24}l^2(l+1)^2+\frac{1}{12}l(l+1)(2l+1)+\frac{1}{6}l(l+1)$

$=\frac{1}{24}l(l+1)\{l(l+1)+2(2l+1)+4\}$

$=\frac{1}{24}l(l+1)(l^2+5l+6)$

$=\boldsymbol{\frac{1}{24}l(l+1)(l+2)(l+3)}$

⑵階差数列

階差数列 … 前後の項の差をとった数字の列が数列になっている数列

<u>公式</u>

項間の数列(階差数列)をb_n,初項 aとすると一般項 a_nは

$\boldsymbol{a_n=\underline{a+\sum_{k=1}^{n-1}b_k\ (n\geq 2)}}$ ←範囲が $k=1$ から$n-1$ までであることに注意(計算時)

(最後に $n=1$ でも成り立つこと確認すること)

(例題)以下の数列の一般項を求めよ

（ｉ）2 , 6 , 12 , 20 , 30 , ⋯

[解] 2 , 6 , 12 , 20 , 30

4　6　8　10　←$b_n = 2n + 2$

よって一般項は

$n \geq 2$ のとき

$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k + 2$

$= 2 + 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\} + 2(n-1)$

$= 2 + n^2 - n + 2n - 2 = n^2 + n$

$n = 1$ のとき$a_1 = 1^2 + 1 = 2$ で成立

したがって　一般項　$a_n = \boldsymbol{n^2 + n}$

（ⅱ）3 , 4 , 6 , 10 , 18 , ⋯

[解]3 , 4 , 6 , 10 , 18

1　2　4　8　←$b_n = 2^{n-1}$

よって一般項は

$n \geq 2$ のとき

$a_n = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = 3 + \frac{2^{n-1}-1}{2-1} = 2^{n-1} + 2$

$n = 1$ のとき$a_1 = 2^{1-1} + 2 = 1 + 2 = 3$ で成立

したがって　一般項　$a_n = \boldsymbol{2^{n-1} + 2}$

(演習)以下の数列の一般項を求めよ

（Ⅰ)2 , 7 , 16 , 29 , 46 , ⋯

[解] 2 , 7 , 16 , 29 , 46

5　9　13　17　←$b_n = 4n + 1$

よって一般項は

$n \geq 2$ のとき

$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 4k + 1$

$= 2 + 4 \cdot \frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\} + (n-1)$

$= 2 + 2n^2 - 2n + n - 1 = 2n^2 - n + 1$

$n = 1$ のとき$a_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 + 1 = 2$ で成立

したがって　一般項　$a_n = \boldsymbol{2n^2 - n + 1}$

（Ⅱ)1 , 2 , 5 , 14 , 41 , ⋯

[解]1 , 2 , 5 , 14 , 41

1　3　9　27　←$b_n = 3^{n-1}$

よって一般項は

$n \geq 2$ のとき

$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1} = 1 + \frac{3^{n-1}-1}{3-1} = \frac{1}{2}(3^{n-1} + 1)$

$n = 1$ のとき$a_1 = \frac{1}{2}(3^{1-1} + 1) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 2$ で成立

したがって　一般項　$a_n = \boldsymbol{\frac{1}{2}(3^{n-1} + 1)}$

[応用]以下の一般項を求めよ

(Ⅲ)3 , 5 , 8 , 14 , 25 , 43 , ⋯

[解]3 , 5 , 8 , 14 , 25 , 43

2　3　6　11　18　←b_n

1　3　5　7　←$c_n = 2n - 1$

よって

$n \geq 2$ のとき

$b_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k - 1$

$= 2 + 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\} - (n-1)$

$= 2 + n^2 - n - n + 1 = n^2 - 2n + 3$

$n = 1$ のとき$b_1 = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 2$ で成立

次に一般項 a_n を求める

$n \geq 2$ のとき

$a_n = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - 2k + 3$

$= 3 + \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) - 2 \cdot \frac{1}{2}n(n-1) + 3(n-1)$

$= \frac{1}{6}n\{(n-1)(2n-1) - 6(n-1) + 18)$

$= \frac{1}{6}n(2n^2 - 9n + 25)$

$n = 1$ のとき$a_1 = \frac{1}{6} \cdot 1(2 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 25) = 3$ で成立

したがって

一般項　$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{6}n(2n^2 - 9n + 25)}$

(数列まとめ)

最初に項間にどんな関係があるのか探す　→何の数列か見分けて公式に代入

⑶和から一般項

<u>公式</u>

$n \geq 2$ のとき a_n を一般項 ,S_nを初項から第 n 項までの和とすると

$\boldsymbol{S_n - S_{n-1}} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) = \boldsymbol{a_n}$

$\boldsymbol{S_1 = a_1}$

($n = 1$ でも成立することを確認すること、一致しないケースが少なくない)

(例題)

(ⅰ)初項から第 n 項までの和 $S_n = n^2 - n + 1$ とするとき、一般項 a_nを求めよ

[解] $n \geq 2$ のとき

$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 - n + 1) - \{(n-1)^2 - (n-1) + 1\}$

$= (n^2 - n + 1) - (n^2 - 2n + 1 - n + 1 + 1)$

$= n^2 - n + 1 - n^2 + 2n - 1 + n - 1 - 1 = 2n - 2$

$n = 1$ のとき$S_1 = 1^2 - 1 + 1 = 1 \neq a_1 = 2 \cdot 1 - 2 = 0$

よって

$$\boldsymbol{a_n} = \begin{cases} \boldsymbol{2n-2} & (\boldsymbol{n \geq 2}\text{のとき}) \\ \boldsymbol{1} & (\boldsymbol{n = 1}\text{のとき}) \end{cases}$$

(演習)

(Ⅰ)初項から第 n 項までの和 $S_n = n^2 + n$ とするとき、一般項 a_nを求めよ

[解] $n \geq 2$ のとき

$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 + n) - \{(n-1)^2 + (n-1)\}$

$= (n^2 + n) - (n^2 - 2n + 1 + n - 1)$

$= n^2 + n - n^2 + 2n - 1 - n + 1 = 2n$

$n = 1$ のとき$S_1 = 1^2 + 1 = 2 = a_1 = 2 \cdot 1 = 2$

よって　$\boldsymbol{a_n = 2n}$

[補充](Ⅱ)初項から第 n 項までの和 $S_n = 2^{n+1} - 2$ とするとき、一般項 a_nを求めよ

[解] $n \geq 2$ のとき

$a_n = S_n - S_{n-1} = (2^{n+1} - 2) - (2^n - 2)$

$= 2^{n+1} - 2^n = 2^n(2 - 1) = 2^n$

$n = 1$ のとき$S_1 = 2^{1+1} - 2 = 2 = a_1 = 2^1 = 2$

よって　$\boldsymbol{a_n = 2^n}$

[補充](Ⅲ)初項から第 n 項までの和 $S_n = \frac{1}{n}$ とするとき、一般項 a_nを求めよ

[解] $n \geq 2$ のとき

$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$

$= -\frac{1}{n(n-1)}$

$n = 1$ のとき$S_1 = \frac{1}{1} = 1$ だが a_1 は $n = 1$ では定義できない

よって

$$\boldsymbol{a_n = \begin{cases} -\frac{1}{n(n-1)} & (n \geq 2\text{のとき}) \\ 1 & (n = 1\text{のとき}) \end{cases}}$$

⑷部分分数分解と有理化

ポイント[(文字式)−(文字式)を作る]

⑴分数積は部分分数分解すること

⑵$\sqrt{\ }$については有理化すること

公式　部分分数分解(分数積を分解すること)

$$\frac{1}{ax+b} - \frac{1}{ax+c} = \frac{(ax+c)-(ax+b)}{(ax+b)(ax+c)} = \frac{c-b}{(ax+b)(ax+c)} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{1}{(ax+b)(ax+c)} = \frac{1}{c-b}\left\{\frac{1}{ax+b} - \frac{1}{ax+c}\right\}}$$

(注意)

⑴ x の前の係数が一致していることを確認すること

→部分分数分解したときに分子に文字(今回は x)が残ってしまう

⑵部分分数分解が不安のときは通分して確かめればいい

(例題)

(ⅰ) $\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 15}+\cdots+\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$

[解]一般項が分数積なので部分分数分解する　　←n の前の係数が 4 で揃っていることを確認

$$\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}=\frac{1}{3-(-1)}\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+3}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+3}\right)$$

求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k-1)(4k+3)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k+3}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k+3}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\underbrace{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)}_{k=1}+\underbrace{\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)}_{k=2}+\underbrace{\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{15}\right)}_{k=3}+\cdots\underbrace{\left(\frac{1}{4n-5}-\frac{1}{4n-1}\right)}_{k=n-1}+\underbrace{\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+3}\right)}_{k=n}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4n+3}\right)=\frac{1}{4}\left\{\frac{(4n+3)-3}{3(4n+3)}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{4n}{3(4n+3)}\right\}=\boldsymbol{\frac{n}{3(4n+3)}}$$

(ⅱ) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}}$

[解]一般項が$\sqrt{\ }$なので有理化する

$$\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}}\times\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+2}-\sqrt{k}}=\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+2})^2-(\sqrt{k})^2}=\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k}}{(k+2)-k}=\frac{1}{2}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$$

求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\sqrt{k+2}-\sqrt{k}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\underbrace{(\sqrt{3}-\sqrt{1})}_{k=1}+\underbrace{(\sqrt{4}-\sqrt{2})}_{k=2}+\underbrace{(\sqrt{5}-\sqrt{3})}_{k=3}+\cdots+\underbrace{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})}_{k=n-1}+\underbrace{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})}_{k=n}\right\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}-\sqrt{2}-1)}$$

（演習）

（Ⅰ）$\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{4\cdot 10}+\frac{1}{7\cdot 13}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+4)}$

[解]一般項が分数積なので部分分数分解する　　　←n の前の係数が 3 で揃っていることを確認

$\frac{1}{(3n-2)(3n+4)}=\frac{1}{4-(-2)}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+4}\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+4}\right)$

求める和は

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+4)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+4}\right)$

$=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+4})$

$=\frac{1}{6}\left\{\underbrace{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{7}\right)}_{k=1}+\underbrace{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{10}\right)}_{k=2}+\underbrace{\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{13}\right)}_{k=3}+\cdots\underbrace{\left(\frac{1}{3n-5}-\frac{1}{3n+1}\right)}_{k=n-1}+\underbrace{\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+4}\right)}_{k=n}\right\}$

$=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{4}-\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}\right)=\frac{1}{6}\left\{\frac{5(3n+1)(3n+4)-4(3n+4)-4(3n+1)}{4(3n+1)(3n+4)}\right\}$

$=\frac{1}{6}\left\{\frac{3n(15n+17)}{4(3n+1)(3n+4)}\right\}=\boldsymbol{\frac{n(15n+17)}{8(3n+1)(3n+4)}}$

（Ⅱ）$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

[解]一般項が$\sqrt{\ }$なので有理化する

$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}\times\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k})^2-(\sqrt{k+1})^2}=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{k-(k+1)}=(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

求める和は

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$

$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=\{\underbrace{(\sqrt{2}-\sqrt{1})}_{k=1}+\underbrace{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}_{k=2}+\underbrace{(\sqrt{4}-\sqrt{3})}_{k=3}+\cdots+\underbrace{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})}_{k=n-1}+\underbrace{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}_{k=n}\}$

$=\boldsymbol{(\sqrt{n+1}-1)}$

[応用]（Ⅲ）$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

[解]一般項が分数積なので部分分数分解する

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{20}\right)+\cdots\left(\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right)+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right\}$$

$k=1$　　$k=2$　　$k=3$　　$k=n-1$　　$k=n$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{(n+1)(n+2)-2}{2(n+1)(n+2)}\right\}=\boldsymbol{\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}}$$

（まとめ）

⑴(文字式) − (文字式)にもっていくことで同じ数が符号違いで出てきて消せるようになる

⑵前と後ろで残る項の数は一致するので、前で何項残るかわかれば後ろで残る項はわかる

⑸等差 × 等比

（解法）

一般項 $a_n\times r^{n-1}$(rは公比)、その第 n 項までの和 S_n に対して $\underline{S_n-rS_n}$ を考える

[等比数列の和の公式の証明で使った解法]

(例題)

(ｉ)$1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-2}+n\cdot 2^{n-1}$を求めよ

[解]求める和をS_nとすると

$$
\begin{aligned}
S_n &= 1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots(n-2)\cdot 2^{n-2}+n\cdot 2^{n-1}\\
-)\,2S_n &= \qquad\quad 1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots \qquad +(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n\\
\hline
-S_n &= 1\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 2^2+1\cdot 2^3+\cdots \qquad +1\cdot 2^{n-1}-n\cdot 2^n\\
-S_n &= (1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1})-n\cdot 2^n\\
-S_n &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}-n\cdot 2^n\\
-S_n &= \tfrac{2^n-1}{2-1}-n\cdot 2^n\\
-S_n &= 2^n-1-n\cdot 2^n\\
S_n &= -2^n+n\cdot 2^n+1=\boldsymbol{(n-1)\cdot 2^n+1}
\end{aligned}
$$

(演習)

(Ⅰ)$1\cdot 1+4\cdot 2+7\cdot 2^2+\cdots+(3n-5)\cdot 2^{n-2}+(3n-2)\cdot 2^{n-1}$を求めよ

[解]求める和をS_nとすると

$$
\begin{aligned}
S_n &= 1\cdot 1+4\cdot 2+7\cdot 2^2+\cdots(3n-5)\cdot 2^{n-2}+(3n-2)\cdot 2^{n-1}\\
-)\,2S_n &= \qquad\quad 1\cdot 2+4\cdot 2^2+7\cdot 2^3+\cdots \qquad +(3n-5)\cdot 2^{n-1}+(3n-2)\cdot 2^n\\
\hline
-S_n &= 1\cdot 1+3\cdot 2+3\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots \qquad +3\cdot 2^{n-1}-(3n-2)\cdot 2^n\\
-S_n &= 1+3(2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1})-(3n-2)\cdot 2^n\\
-S_n &= 1+3\textstyle\sum_{k=1}^{n-1} 2^k-(3n-2)\cdot 2^n\\
-S_n &= 1+\tfrac{6(2^{n-1}-1)}{2-1}-(3n-2)\cdot 2^n\\
-S_n &= 1+3\cdot 2^n-6-(3n-2)\cdot 2^n\\
S_n &= \boldsymbol{(3n-5)\cdot 2^n+5}
\end{aligned}
$$

[補充]（Ⅱ）$1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\cdots+\frac{n-1}{3^{n-2}}+\frac{n}{3^{n-1}}$ を求めよ

[解]求める和をS_nとすると

$$S_n=1\cdot1+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{3^2}+4\cdot\frac{1}{3^3}+\cdots(n-1)\cdot\frac{1}{3^{n-2}}+n\cdot\frac{1}{3^{n-1}}$$

$$\underline{-)\ \frac{1}{3}S_n=\qquad 1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3^2}+3\cdot\frac{1}{3^3}+\cdots\qquad+(n-1)\cdot\frac{1}{3^{n-1}}+n\cdot\frac{1}{3^n}}$$

$$\frac{2}{3}S_n=1\cdot1+1\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3^2}+1\cdot\frac{1}{3^3}+\cdots\qquad+1\cdot\frac{1}{3^{n-1}}-n\cdot\frac{1}{3^n}$$

$$\frac{2}{3}S_n=(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}})-n\cdot\frac{1}{3^n}$$

$$\frac{2}{3}S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}-n\cdot\frac{1}{3^n}$$

$$\frac{2}{3}S_n=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}-n\cdot\frac{1}{3^n}$$

$$\frac{2}{3}S_n=\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}-n\cdot\frac{1}{3^n}$$

$$\boldsymbol{S_n=\frac{9}{4}-\frac{1}{3^n}\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}n\right)}$$

（まとめ）

⑴一般項がどうなっているかまず考えること

⑵ S_n-rS_n した後の計算でどこの部分までΣでまとめられるか考えること

[今回は最初の項からまとめられたかがまとめられない場合もあるので注意]

⑹群数列

群数列…数列に対して規則性をもって仕切りを入れてグループ分けしてできる数列

　　　　できた各グループを**群**という

(解法)

解法は大きく分けて2つ。(1)基本的(典型的)な解法 ，(2)階差数列を用いた解法

(2)は使えない時があるので(1)のやり方をしっかりわかるようにすること

(例題)

(ⅰ)奇数列$1 \mid 3 , 5 \mid 7 , 9 , 11 \mid 13 , 15 , 17 , 19 \mid 21 , \cdots$ のように第 n 群の個数が n 個の

数を含むように分けるとき、以下の問題に答えよ

(1)第 n 群の最初の数を求めよ　　　　　(2)第 n 群の最後の数を求めよ

(3)第 n 群に含まれる数の和を求めよ　　(4)301 は第何群の第何項目の数か求めよ

[解](1)2 つの解法を示す

(ⅰ)基本的(典型的)な解法

これらの数列は$a_n = 2n-1$ に倣って構成されている、つまり第 n 群の最初の数が何番目かわかれば求められる

各群の個数は n 個ずつなので$(n-1)$群までに

$1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$個存在するので第$n$ 群の最初の数は$\frac{1}{2}n(n-1)+1$番目なので

求める数は

$2\cdot\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}-1=n(n-1)+2-1=\boldsymbol{n^2-n+1}$

(ⅱ)階差数列を用いた解法

各群の最初の数を並べた数列をa_n とすると

$a_n = 1 , 3 , 7 , 13 \ \cdots$

$\quad 2 \quad 4 \quad 6 \ \leftarrow \ b_n = 2n$

よって$n \geq 2$ のとき

$a_n = 1+\sum_{k=1}^{n-1} 2n = 1+2\cdot\frac{1}{2}n(n-1)=1+n(n-1)=n^2-n+1$

$n=1$ のとき

$a_1 = 1^2-1+1=1$ より成立　したがって求める数は　$\boldsymbol{n^2-n+1}$

(2)2 つの解法を示す

(ⅰ)基本的(典型的)な解法(2 パターン)

＜Ⅰ＞第$(n+1)$群の最初の数から 1 つ数列を戻したものつまり 2 引いたものが第 n 群の最後の数になるので

求める数は(1)より

$(n+1)^2-(n+1)+1-2=n^2+2n+1-n-1+1-2=\boldsymbol{n^2+n-1}$

＜Ⅱ＞第 n 群の最後の数は

$1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\frac{1}{2}n(n+1)$番目になるので

求める数は

$2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-1=n(n+1)-1=\boldsymbol{n^2+n-1}$

(ⅱ)階差数列を用いた解法

各群の最後の数を並べた数列 a_n とすると

$a_n=1\,,5\,,11\,,19\,,\cdots$

4　6　8　←$b_n=2n+2$

よって$n\geq 2$ のとき

$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}2n+2=1+2\cdot\frac{1}{2}n(n-1)+2(n-1)$

$=1+n(n-1)+2(n-1)=1+n^2-n+2n-2=n^2+n-1$

$n=1$ のとき

$a_1=1^2+1-1=1$ より成立　したがって求める数は　$\boldsymbol{n^2+n-1}$

(3)第 n 群に含まれる数の和は等差数列の和の公式を使うと

初項 n^2-n+1 ,末項 n^2+n-1 ,項数 n より

$\frac{1}{2}n\{(n^2-n+1)+(n^2+n-1)\}=\frac{1}{2}n\cdot 2n^2=\boldsymbol{n^3}$

(4)まず 301 が第n 群に属しているかを考える

つまり

$n^2-n+1<301<(n+1)^2-(n+1)+1\cdots$①を満たす$n$ を求める

[第n 群の最初の項] [第$(n+1)$群の最初の項]

$n=17$ のとき　$17^2-17+1=273$

$(1+17)^2-(1+17)+1=307$より①を満たすので 301 は第 17 群にある

[$n=17$ をどのように見つけるかだが最終的には頑張って計算して出すが、計算において結果に大きく影響するのは最高次数の項である。つまり今回は n^2 となる

　$n=15$ のとき $15^2=225$, $n=20$ のとき $20^2=400$ より求めるnは $15<n<20$ の間にあることが検討つくのであとはその範囲で実際に計算して出す]

次に第何項目にあるか求めるが求める値を第 k 項目であるとすると

第 n 群に含まれる数は初項 273 , 公差 2 より第 k 項目は

$273+(k-1)2$ と書けて、求めるのは 301 なので

$273+(k-1)2=301$とすると$k=15$より

301 は　**第 17 群の第 15 項目**

(演習)

(Ⅰ) $3 \mid 6, 9 \mid 12, 15, 18 \mid 21, 24, 27, 30 \mid 33, \cdots$ のように第 n 群の個数が n 個の数を含むように分けるとき、以下の問題に答えよ

⑴第 n 群に含まれる数の和を求めよ　⑵300 は第何群の第何項目の数か求めよ

[解]

⑴今回の数列は $a_n=3n$ で構成されている

第 n 群の最初の数は $\frac{1}{2}n(n-1)+1$ 番目より

第 n 群の最初の数は$3\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}$

第 n 群の最後の数は $\frac{1}{2}n(n+1)$ 番目より

第 n 群の最後の数は$3\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$

よって 第 n 群に含まれる和は

$\frac{1}{2}n\left[3\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}+3\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}\right]$

$=\boldsymbol{\frac{3}{2}n(n^2+1)}$

⑵例題と同様に行うと

$n=14$ のとき $3\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot 14\cdot(14-1)+1\right\}=276$

$n=15$ のとき $3\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot 15\cdot(15-1)+1\right\}=318$

よって 300 は第 14 群である

$276+3(k-1)=300$ より

$k=9$

したがって

300 は**第14群の第9項**

[補充]（Ⅱ）分数列 $\frac{1}{1}\left|\frac{2}{2},\frac{1}{2}\right|\frac{3}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\left|\frac{4}{4},\frac{3}{4},\frac{2}{4},\frac{1}{4}\right|\frac{5}{5}\cdots$ のように第 n 群に n 個の数を含むように分けるとき、以下の問題に答えよ

⑴第 n 群に含まれる数の和を求めよ

⑵初めから数えて、第 100 項目にある分数を求めよ

[解]⑴今回は階差数列を用いた解法は使えない(階差数列にならないから)
よって基本的(典型的)な解法を使って解く
第 n 群に属する分数の分母は n なので和をとると分子は第 n 群に含まれる分数の分子の和となる
分子にある数は n から 1 までなので
　求める和は

$$\frac{n+(n-1)+\cdots+2+1}{n}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n}=\boldsymbol{\frac{1}{2}(n+1)}$$

⑵まずは第 100 項目が第何群に属するかを考える
各群に属する分数の数は n より第 n 群の末項までに

$1+2+\cdots+(n-1)+n=\frac{1}{2}n(n+1)$個存在する

よって　$\underbrace{\frac{1}{2}n(n+1)}_{\text{第 } n \text{ 群までの項}}<100<\underbrace{\frac{1}{2}(n+1)\{(n+1)+1\}}_{\text{第}(n+1)\text{群までの項}}\cdots$①を満たす n を見つける

$n=13$ のとき $\frac{1}{2}\cdot 13\cdot(13+1)=91$

$\frac{1}{2}\cdot(13+1)\{(13+1)+1\}=105$より①を満たすので第 100 項目は第 14 群にある
　つまり求める数の分母は 14 になるので次に分子の数を定めにいく
分子は群の最初の数から 1 つずつひいたものなので群の最初から何番目かわかれば求められる

　求める番目を k 番目とすると上記の結果より第 14 群の最初の数は第 92 項目になるので
第 100 項目まで$100-92+1=9$より最初の数から 9 番目にあることがわかるので
　求める値は　$\frac{14-(9-1)}{14}=\boldsymbol{\frac{6}{14}}$（最初の数を入れないと 8 番目になるので 8 でひく）

⑤漸化式

⑴基本

漸化式 … 各項間の関係性を数式化したもの

簡単に言うと a_{n+1}と a_n との関係から一般項も求める

<u>公式</u>

①$a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$ (dは定数)　（等差数列型）→ $\boldsymbol{a_n} =$ $\underline{\boldsymbol{a + (n-1)d}}$

②$a_1 = a$, $a_{n+1} = ra_n$ (rは定数)　（等比数列型）→ $\boldsymbol{a_n} =$ $\underline{\boldsymbol{ar^{n-1}}}$

③$a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + b_n$ (b_nは n の式)（階差数列型）→ $\boldsymbol{a_n} =$ $\underline{\boldsymbol{a + \sum_{k=1}^{n-1} b_k\ (n \geq 2)}}$

（$n = 1$ でも成立することを確認すること）

(例題)

(ⅰ) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 3$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$)

[解]等差数列型なので

一般項　$\boldsymbol{a_n} = 2 + (n-1)3 = 2 + 3n - 3 = \boldsymbol{3n - 1}$

(ⅱ) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$)

[解]等比数列型なので

一般項　$\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{3 \cdot 2^{n-1}}$

（iii）$a_1 = 5\,, a_{n+1} = a_n + 6n^2\ (n = 1\,,2\,,3\,,\cdots)$

[解]階差数列型なので

$n \geq 2$ のとき

一般項　$a_n = 5 + \sum_{k=1}^{n-1} 6n^2 = 5 + 6 \cdot \frac{1}{6}(n-1)\{(n-1)+1\}\{2(n-1)+1\} = 2n^3 - 3n^2 + n + 5$

$n = 1$ のとき $a_1 = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1 + 5 = 2 - 3 + 1 + 5 = 5$ より成立

よって　一般項は　$\boldsymbol{a_n = 2n^3 - 3n^2 + n + 5}$

（演習）

（Ⅰ）$a_1 = 4\,, a_{n+1} = a_n - 3\ (n = 1\,,2\,,3\,,\cdots)$

[解]等差数列型なので

一般項　$\boldsymbol{a_n} = 4 + (n-1)(-3) = 4 - 3n + 3 = \boldsymbol{-3n + 7}$

（Ⅱ）$a_1 = 4\,, a_{n+1} = 3a_n\ (n = 1\,,2\,,3\,,\cdots)$

[解]等比数列型なので

一般項　$\boldsymbol{a_n = 4 \cdot 3^{n-1}}$

（Ⅲ）$a_1 = 1\,, a_{n+1} = a_n + 3n\ (n = 1\,,2\,,3\,,\cdots)$

[解]階差数列型なので

$n \geq 2$ のとき

一般項　$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3n = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\} = \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 1$

$n = 1$ のとき $a_1 = \dfrac{3}{2} \cdot 1^2 - \dfrac{3}{2} \cdot 1 + 1 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2} + 1 = 1$ より成立

よって　一般項は　$\boldsymbol{a_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 1}$

(様々な漸化式)

　これから少し応用的な漸化式に入っていくが、

漸化式を解く公式は上記の 3 つなのでその **3 つのいずれか形に持っていく**

　ある程度パターンとして決まっているので解法が暗記する方が良い

　置き換えが多くなるがいずれ置き換えを使わず計算できるとより良い

[置き換えたときに初項の値もしっかり出しておくこと]

(2)特性方程式型

　漸化式$a_{n+1} = pa_n + q$に対して

$x = px + q$ (特性方程式) の解をα とすると上記の漸化式は

$\underline{a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)}$と変形できる

(証明)

特性方程式の解をα とすると

$\alpha = p\alpha + q$ …(1)

$a_{n+1} = pa_n + q$ …(2)

(1) − (2)より

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} - \alpha &= pa_n + q - (p\alpha + q) \\
&= p(a_n - \alpha)
\end{aligned}
$$

(例題)

（ｉ）$a_1 = 3\,, a_{n+1} = 2a_n - 2$

[解]特性方程式 $x = 2x - 2$ より $x = 2$

よって　$a_{n+1} - 2 = 2(a_n - 2)$ ⋯（ｉ）と変形できる

ここで $b_n = a_n - 2$ とすると、$b_{n+1} = a_{n+1} - 2$ より

（ｉ）は $b_1 = a_1 - 2 = 3 - 2 = 1\,, b_{n+1} = 2b_n$

等比数列型なので

$b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

したがって $a_n - 2 = b_n$ より

$\boldsymbol{a_n} = b_n + 2 = \mathbf{2^{n-1} + 2}$

(演習)

（Ⅰ）$a_1 = 5\,, a_{n+1} = 3a_n - 6$

[解]特性方程式 $x = 3x - 6$ より $x = 3$

よって　$a_{n+1} - 3 = 3(a_n - 3)$ ⋯（ｉ）と変形できる

ここで $b_n = a_n - 3$ とすると、$b_{n+1} = a_{n+1} - 3$ より

（ｉ）は $b_1 = a_1 - 3 = 5 - 3 = 2\,, b_{n+1} = 3b_n$

等比数列型なので

$b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

したがって $a_n - 3 = b_n$ より

$\boldsymbol{a_n} = b_n + 3 = \mathbf{2 \cdot 3^{n-1} + 3}$

（Ⅱ）$a_1 = 1\,, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 3$

[解]特性方程式 $x = \frac{1}{2}x + 3$ より $x = 6$

よって　$a_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}(a_n - 6)$ ⋯（ｉ）と変形できる

ここで $b_n = a_n - 6$ とすると、$b_{n+1} = a_{n+1} - 6$ より

（ｉ）は $b_1 = a_1 - 6 = 1 - 6 = -5\,, b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$

等比数列型なので

$b_n = -5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

したがって $a_n - 6 = b_n$ より

$\boldsymbol{a_n} = b_n + 6 = \boldsymbol{-5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 6}$

⑶指数型

漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q^n$ の対して

両辺を q^{n+1} で割った $\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{a_n}{q^n} + \frac{1}{q}$ を考えて、$b_n = \frac{a_n}{q^n}$ とおく

(例題)

(ⅰ) $a_1 = 1\,, a_{n+1} = 2a_n + 3^n$

[解]両辺を3^{n+1}で割ると

$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3}$

ここで$b_n = \frac{a_n}{3^n}$ とすると、$b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}$より

$b_1 = \frac{a_1}{3^1} = \frac{1}{3}\,, b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3}$

次に特性方程式$x = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ より$x = 1$

よって　$b_{n+1} - 1 = \frac{2}{3}(b_n - 1)$ ⋯⑴と変形できる

さらに$c_n = b_n - 1$ とすると⑴は

$c_1 = b_1 - 1 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}\,, c_{n+1} = \frac{2}{3}c_n$

等比数列型なので

$c_n = -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$b_n - 1 = c_n$ より

$b_n = c_n + 1 = -\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1$

$\frac{a_n}{3^n} = b_n$ より

$\boldsymbol{a_n} = 3^n \cdot b_n = 3^n\left\{-\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right\} = \boldsymbol{-2^n + 3^n}$

(演習)

(Ⅰ) $a_1 = 1\,, a_{n+1} = 3a_n + 2^n$

[解]両辺を2^{n+1}で割ると

$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2}$

ここで$b_n = \frac{a_n}{2^n}$ とすると、$b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}$より

$b_1 = \frac{a_1}{2^1} = \frac{1}{2}\,, b_{n+1} = \frac{3}{2}b_n + \frac{1}{2}$

特性方程式で b_n を解くと

$b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1$

$\frac{a_n}{2^n} = b_n$ より

$\boldsymbol{a_n} = 2^n \cdot b_n = 2^n\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right\} = \boldsymbol{3^n - 2^n}$

（Ⅱ）$a_1 = 3\,, a_{n+1} = 6a_n + 3^{n+1}$

[解]両辺を3^{n+1}で割ると

$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{6}{3} \cdot \frac{a_n}{3^n} + 1$

ここで$b_n = \frac{a_n}{3^n}$とすると、$b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}$より

$b_1 = \frac{a_1}{3^1} = 1\,, b_{n+1} = 2b_n + 1$

特性方程式で b_n を解くと

$b_n = 2^n - 1$

$\frac{a_n}{3^n} = b_n$より

$\boldsymbol{a_n} = 3^n \cdot b_n = 3^n(2^n - 1) = \boldsymbol{6^n - 3^n}$

⑷逆数型

漸化式 $a_{n+1} = \frac{ra_n}{pa_n + q}$ に対して

両辺の逆数をとった $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{q}{r} \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{p}{r}$ を考えて、$b_n = \frac{1}{a_n}$ とおく

(例題)

（ⅰ）$a_1 = 1\,, a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$

[解]両辺の逆数をとる

$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 2$

$b_n = \frac{1}{a_n}$ とすると、$b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}}$ より

$b_1 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{1} = 1\,, b_{n+1} = b_n + 2$

等差数列型なので

$b_n = 1 + (n-1)2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$

$\frac{1}{a_n} = b_n$より

$\boldsymbol{a_n} = \frac{1}{b_n} = \boldsymbol{\frac{1}{2n-1}}$

(演習)

（Ⅰ）$a_1 = 1\,, a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 3}$

[解]両辺の逆数をとる

$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3}{a_n} + 1$

$b_n = \frac{1}{a_n}$ とすると、$b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}}$ より

$b_1 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{1} = 1\,, b_{n+1} = 3b_n + 1$

$b_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$

$\frac{1}{a_n} = b_n$より $\boldsymbol{a_n} = \frac{1}{b_n} = \boldsymbol{\frac{2}{3^n - 1}}$

（Ⅱ）$a_1 = 2\,, a_{n+1} = \frac{2a_n}{3a_n+1}$

[解]両辺の逆数をとる

$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{2a_n} + \frac{3}{2}$

$b_n = \frac{1}{a_n}$とすると、$b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}}$より

$b_1 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,, b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{3}{2}$

$b_n = \frac{3\cdot 2^n - 5}{2^n}$

$\frac{1}{a_n} = b_n$より　$\boldsymbol{a_n} = \frac{1}{b_n} = \boldsymbol{\frac{2^n}{3\cdot 2^n - 5}}$

⑸和から漸化式

初項から第n項までの和S_nに対して

$\boldsymbol{S_{n+1} - S_n} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \boldsymbol{a_{n+1}}$
$\boldsymbol{a_1 = S_1}$

(例題)

（ⅰ）$S_n = 2a_n + 3$に対して一般項を求めよ

[解]上記通り計算すると

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = (2a_{n+1} + 3) - (2a_n + 3) = 2a_{n+1} - 2a_n$より

$a_{n+1} = 2a_n$

$a_1 = S_1 = 2a_1 + 3$より　$a_1 = -3$

$\boldsymbol{a_n = (-3)\cdot 2^{n-1}}$

(演習)

（Ⅰ）$S_n = 3 - 2a_n$に対して一般項を求めよ

[解]上記通り計算すると

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = (3 - 2a_{n+1}) - (3 - 2a_n) = -2a_{n+1} + 2a_n$より

$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$　　$a_1 = S_1 = 3 - 2a_1$ より　$a_1 = 1$

$\boldsymbol{a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$

[応用]（Ⅱ） $a_1=1\,,a_{n+1}=2{a_n}^2$ $\left[\text{ヒント：両辺に}\log_2\ \ \text{の対数をとる}\right]$

[解]両辺に $\log_2$ の対数をとると

$\log_2 a_{n+1}=\log_2 2{a_n}^2$

$\log_2 a_{n+1}=2\log_2 a_n+1$

$b_n=\log_2 a_n$ とおくと $b_{n+1}=\log_2 a_{n+1}$

$b_{n+1}=2b_n+1$ $\ b_1=\log_2 a_1=\log_2 1=0$

$b_n=2^{n-1}-1$

$\log_2 a_n=b_n$ より $a_n=2^{b_n}$

$\boldsymbol{a_n=2^{2^{n-1}-1}}$

[応用]（Ⅲ） $a_1=1\,,a_{n+1}=2a_n+n$ $\left[\text{ヒント}:a_{n+2}-a_{n+1}\text{を考える}\right]$

[解] $a_{n+2}-a_{n+1}$ をすると

$a_{n+2}-a_{n+1}=\{2a_{n+1}+(n+1)\}-(2a_n+n)$

$\qquad\qquad=2(a_{n+1}-a_n)+1$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと $b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}$

$b_{n+1}=2b_n+1$

$b_1=a_2-a_1=(2a_1+1)-a_1=(2+1)-1=2$

$b_n=3\cdot 2^{n-1}-1$

$a_{n+1}=a_n+b_n$ より

$a_{n+1}=a_n+3\cdot 2^{n-1}-1$

$n\geq 2$ のとき

$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}3\cdot 2^{n-1}-1$

$a_n=3\cdot 2^{n-1}-n-1$

$a_1=3\cdot 2^{1-1}-1-1=1$ より成立

したがって $\boldsymbol{a_n=3\cdot 2^{n-1}-n-1}$

[応用]（Ⅳ） $a_1=4\,,a_{n+1}=\frac{3a_n+2}{a_n+4}$ の一般項 a_n を求めよ $\left[\text{ヒント}:b_n=\frac{a_n+2}{a_n-1}\text{ とおく}\right]$

[解] $b_n=\frac{a_n+2}{a_n-1}$ とおくと

$b_{n+1}=\frac{3a_{n+1}+2}{a_{n+1}-1}=\frac{\frac{3a_n+2}{a_n+4}+2}{\frac{3a_n+2}{a_n+4}-1}=\frac{5a_n+10}{2a_n-2}$

$\qquad=\frac{5}{2}\cdot\frac{a_n+2}{a_n-1}$

$\qquad=\frac{5}{2}b_n$

$b_1=\frac{a_1+2}{a_1-1}=\frac{4+2}{4-1}=2$

$b_n=2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$

$b_n=\frac{a_n+2}{a_n-1}$ より

$b_n(a_n-1)=a_n+2$

$a_n(b_n-1)=b_n+2$

$a_n=\frac{b_n+2}{b_n-1}$

$\quad=\frac{2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}+2}{2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}-1}$

$\quad=\boldsymbol{\frac{5^{n-1}+2^{n-1}}{5^{n-1}-2^{n-2}}}$

⑹隣接3項間漸化式

漸化式 $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$ に対して

特性方程式 $px^2+qx+r=0$ の2解を α, β とすると上記の漸化式は

$\boldsymbol{a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)}$

$\boldsymbol{a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)}$と変形できる

(証明)

$pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$

$a_{n+2}-(-\frac{q}{p}a_{n+1})+\frac{r}{p}a_n=0$ …(1) ($p\neq 0$ より)

特性方程式$px^2+qx+r=0$ の2解をα ,βより解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-\frac{q}{p}$,$\alpha\beta=\frac{r}{p}$ を(1)に代入すると

$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}-\beta a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta a_{n+1}-\alpha\beta a_n$

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$

これのαとβを入れ替えると

$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$

(例題)

(ⅰ) $a_1=-1, a_2=1, a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$

[解]特性方程式 $x^2-5x+6=0$ より $(x-2)(x-3)=0$ なので $x=2, 3$

よって上記の式は

$a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$ …⑴

$a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)$ …⑵

⑴より

$a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$

$b_n=a_{n+1}-2a_n$ とすると $b_{n+1}=a_{n+2}-2a_{n+1}$ より

$b_1=a_2-2a_1=1-2\cdot(-1)=1+2=3, b_{n+1}=3b_n$

等比数列型なので

$b_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$

$a_{n+1}-2a_n=b_n$ より

$a_{n+1}-2a_n=3^n$ …⑶

⑵より

$a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)$

$c_n=a_{n+1}-3a_n$ とすると $c_{n+1}=a_{n+2}-3a_{n+1}$ より

$c_1=a_2-3a_1=1-3\cdot(-1)=1+3=4, c_{n+1}=2c_n$

等比数列型なので

$c_n=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$

$a_{n+1}-3a_n=c_n$ より

$a_{n+1}-3a_n=2^{n+1}$ …⑷

⑶ − ⑷より

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1}-2a_n=3^n \\ -) & \underline{a_{n+1}-3a_n=2^{n+1}} \\ & \boldsymbol{a_n=3^n-2^{n+1}} \end{array}$$

(演習)

(Ⅰ) $a_1 = 0\,, a_2 = 1\,, a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 0$

[解]特性方程式$x^2 - x - 6 = 0$より$(x+2)(x-3) = 0$なので$x = -2\,, 3$

よって上記の式は

$a_{n+2} + 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} + 2a_n)$ …(1)

$a_{n+2} - 3a_{n+1} = -2(a_{n+1} - 3a_n)$ …(2)

(1)より

$a_{n+1} + 2a_n = 3^{n-1}$ …(3)

(2)より

$a_{n+1} - 3a_n = (-2)^{n-1}$ …(4)

(3) − (4)より

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1} + 2a_n = 3^{n-1} \\ -) & a_{n+1} - 3a_n = (-2)^{n-1} \\ \hline \end{array}$$

$$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{5}\{3^{n-1} - (-2)^{n-1}\}}$$

(Ⅱ) $a_1 = 2\,, a_2 = 1\,, a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$

[解]特性方程式$x^2 - 4x + 4 = 0$より$(x-2)^2 = 0$なので$x = 2$(重解)

よって上記の式は

$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n)$

この式を変形すると

$a_{n+1} - 2a_n = -3 \cdot 2^{n-1}$

$a_{n+1} = 2a_n - 3 \cdot 2^{n-1}$

ここから両辺を2^{n+1}で割ると

$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} - \frac{3}{4}$

$b_n = \frac{a_n}{2^n}$とおくと$b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}$より

$b_1 = \frac{2}{2^1} = \frac{2}{2} = 1\,, b_{n+1} = b_n - \frac{3}{4}$

$b_n = 1 + (n-1)\left(-\frac{3}{4}\right) = 1 - \frac{3}{4}n + \frac{3}{4} = -\frac{3}{4}n + \frac{7}{4}$

$\frac{a_n}{2^n} = b_n$より

$a_n = 2^n \cdot b_n = 2^n \cdot \left(-\frac{3}{4}n + \frac{7}{4}\right) = \boldsymbol{-2^{n-2}(3n-7)}$

[応用](Ⅲ) $a_1 = 1\,, a_2 = 1\,,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

[解]特性方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ より $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,, \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ とすると解と係数の関係より $\alpha + \beta = 1\,, \alpha\beta = -1$

よって上記の式は

$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ …(1)

$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$ …(2)

(1)より

$a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^{n-1}(a_2 - \alpha a_1) = \beta^{n-1}(1-\alpha) = \beta^{n-1}\cdot\beta = \beta^n$ …(3)

(2)より

$a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^{n-1}(a_2 - \beta a_1) = \alpha^{n-1}(1-\beta) = \alpha^{n-1}\cdot\alpha = \alpha^n$ …(4)

(3) − (4) より

$$\begin{array}{r} a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^n \\ \underline{-)\,a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^n} \\ (\beta - \alpha)a_n = \beta^n - \alpha^n \end{array}$$

$$a_n = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha}$$

$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1^2 - 4\cdot(-1) = 5$

よって $\beta - \alpha = \sqrt{5}$

したがって

$$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}}$$

⑺連立漸化式[応用]

　2つの漸化式a_n ,b_nを2つの式から求めるが、解法は2つあるので紹介する

1つは思いつくと楽に解ける解法で、もう1つは計算が面倒だが全ての連立漸化式を解ける解法

(例題)

(ⅰ) $a_1 = 1\,, b_1 = -1\,, a_{n+1} = 5a_n - 2b_n$ ⋯⑴　$b_{n+1} = a_n + 2b_n$ ⋯⑵

[解法1]思いつくと楽な解法

⑴−⑵より

$$a_{n+1} - b_{n+1} = (5a_n - 2b_n) - (a_n + 2b_n)$$
$$= 4(a_n - b_n)$$

$\{a_n - b_n\}$と1つ塊とみると等比数列型なので

$a_n - b_n = (a_1 - b_1)\cdot 4^{n-1} = \{1-(-1)\}\cdot 4^{n-1} = 2\cdot 4^{n-1}$ ⋯⑶

⑴−2×⑵より

$$a_{n+1} - 2b_{n+1} = (5a_n - 2b_n) - 2(a_n + 2b_n)$$
$$= 3(a_n - 2b_n)$$

$\{a_n - 2b_n\}$と1つの塊とみると等比数列型なので

$a_n - 2b_n = (a_1 - 2b_1)\cdot 3^{n-1} = \{1 - 2\cdot(-1)\}\cdot 3^{n-1} = 3\cdot 3^{n-1} = 3^n$ ⋯⑷

⑶−⑷より

$$(a_n - b_n) - (a_n - 2b_n) = 2\cdot 4^{n-1} - 3^n$$
$$b_n = 2\cdot 4^{n-1} - 3^n$$

2×⑶−⑷より

$$2(a_n - b_n) - (a_n - 2b_n) = 2\cdot 2\cdot 4^{n-1} - 3^n$$
$$a_n = 4^n - 3^n$$

よって

$\boldsymbol{a_n = 4^n - 3^n\,, b_n = 2\cdot 4^{n-1} - 3^n}$

[豆知識]

変形する形を

$a_{n+1}+kb_{n+1}=r(a_n+kb_n)$とおいて　$a_{n+1}=5a_n-2b_n\,,b_{n+1}=a_n+2b_n$を代入

$(5a_n-2b_n)+k(a_n+2b_n)=r(a_n+kb_n)$

$(5+k)a_n+(-2+k)b_n=ra_n+rkb_n$

$\{a_n\},\{b_n\}$の恒等式とみると

$5+k=r\,,-2+k=rk$ $\Longrightarrow$ $(k\,,r)=(-1\,,4),(-2\,,3)$

[解法 2]基本的な解法(隣接 3 項間に帰着)

⑴より $a_{n+1}=5a_n-2b_n$

$b_n=-\frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{5}{2}a_n$

$b_{n+1}=-\frac{1}{2}a_{n+2}+\frac{5}{2}a_{n+1}$を⑵に代入

$-\frac{1}{2}a_{n+2}+\frac{5}{2}a_{n+1}=a_n+2\left(-\frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{5}{2}a_n\right)$

$a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=0$

ここで特性方程式$x^2-7x+12=0$ より$(x-3)(x-4)=0$ なので$x=3\,,4$

よって、上記の式は

$a_{n+2}-3a_{n+1}=4(a_{n+1}-3a_n)$ ⋯⑶

$a_{n+2}-4a_{n+1}=3(a_{n+1}-4a_n)$ ⋯⑷

$a_2=5a_1-2b_1=5\cdot1-2\cdot(-1)=5+2=7$

⑶より

$a_{n+1}-3a_n=4^n$ ⋯⑸

⑷より

$a_{n+1}-4a_n=3^n$ ⋯⑹

⑸ − ⑹より

$a_n=4^n-3^n$

また、 $b_n=-\frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{5}{2}a_n=-\frac{1}{2}(4^{n+1}-3^{n+1})+\frac{5}{2}(4^n-3^n)$

$=2\cdot4^{n-1}-3^n$

よって　$\boldsymbol{a_n=4^n-3^n\,,b_n=2\cdot4^{n-1}-3^n}$

(演習)

(Ⅰ) $a_1=1\,,b_1=-2\,,a_{n+1}=-2a_n+6b_n\ \cdots(1)\quad b_{n+1}=a_n-b_n\ \cdots(2)$

[解]まず解法 1 で行うと

(1) $-2\times$ (2)より

$a_{n+1}-2b_{n+1}=(-2a_n+6b_n)-2(a_n-b_n)$

$=-4(a_n-2b_n)$

$a_n-2b_n=(a_1-2b_1)\cdot(-4)^{n-1}=\{1-2\cdot(-2)\}\cdot(-4)^{n-1}=5\cdot(-4)^{n-1}\ \cdots(3)$

(1) $+3\times$ (2)より

$a_{n+1}+3b_{n+1}=(-2a_n+6a_n)+3(a_n-b_n)$

$=(a_n+3b_n)$

$a_n+3b_n=(a_1+3b_1)\cdot1^{n-1}=\{1+3\cdot(-2)\}\cdot1=-5\ \cdots(4)$

(3) $-$ (4)より

$(a_n-2b_n)-(a_n+3b_n)=5\cdot(-4)^{n-1}+5$

$b_n=-(-4)^{n-1}-1$

$3\times$ (3) $+2\times$ (4)より

$3(a_n-2b_n)+2(a_n+3b_n)=3\cdot5\cdot(-4)^{n-1}+2\cdot(-5)$　　よって

$a_n=3\cdot(-4)^n-2$　　　　$\boldsymbol{a_n=3\cdot(-4)^n-2\,,b_n=-(-4)^{n-1}-1}$

解法 2 の場合は

$a_{n+2}+3a_{n+1}-4a_n=0$ から求める

[漸化式まとめ]

　様々なパターンを扱ってきたが、問題をみて、最初にすることが何かわかるところまでしっかり演習してほしい。特に後半ほど計算が複雑になってくるのでミスしないで解ける計算力も必要になってくる。

⑻確率漸化式[発展]

ある試行が前後の試行の結果によって左右される(つまり独立でない)確率の問題に対して漸化式を応用して解いていく

(例題)

(ⅰ)表が出る確率が $\frac{1}{3}$ である硬貨を投げて、表が出たら点数を 1 点増やし、裏が出たら点数はそのままとするゲームを行う。0 点の持ち点で始めて、硬貨を n 回投げたあと、点数が偶数である確率をp_n とするとき、p_{n+1}と p_n の漸化式をつくり、p_n を求めよ。

[解]

$(n+1)$回投げたあとに点数が偶数になるのは

(ⅰ) n 回投げたあとの点数が偶数で、$(n+1)$回目に裏が出る

(ⅱ) n 回投げたあとの点数が奇数で、$(n+1)$回目に表が出る

$$\begin{tikzcd} p_n \arrow[r, "\frac{2}{3}"] & p_{n+1} \\ 1-p_n \arrow[ur, "\frac{1}{3}"'] & \end{tikzcd}$$

(ⅰ)の場合

n 回投げたあとに点数が偶数なので確率はp_n で、$(n+1)$回目に裏つまり$\frac{2}{3}$ が出れば良いので

$p_n \times \frac{2}{3} \cdots$⑴

(ⅱ)の場合

n 回投げたあとに点数が奇数なので確率は$(1-p_n)$で、$(n+1)$回目に表つまり$\frac{1}{3}$ が出れば良いので

$(1-p_n) \times \frac{1}{3} \cdots$⑵

⑴,⑵より

$p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}(1-p_n)$

$\quad = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}$

$p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$

$p_n - \frac{1}{2} = \left(p_1 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$

$\boldsymbol{p_n = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right\}}$

(演習)確率漸化式の問題は(3)から[2019年センター試験数ⅠA]

数学Ⅰ・数学A **第3問～第5問は，いずれか2問を選択**し，解答しなさい。

第3問 (選択問題) (配点 20)

赤い袋には赤球2個と白球1個が入っており，白い袋には赤球1個と白球1個が入っている。

最初に，さいころ1個を投げて，3の倍数の目が出たら白い袋を選び，それ以外の目が出たら赤い袋を選び，選んだ袋から球を1個取り出して，球の色を確認してその袋に戻す。ここまでの操作を1回目の操作とする。2回目と3回目の操作では，直前に取り出した球の色と同じ色の袋から球を1個取り出して，球の色を確認してその袋に戻す。

(1) 1回目の操作で，赤い袋が選ばれ赤球が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり，白い袋が選ばれ赤球が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(2) 2回目の操作が白い袋で行われる確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

(数学Ⅰ・数学A第3問は次ページに続く。)

(3)　1回目の操作で白球を取り出す確率を p で表すと，2回目の操作で白球が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}p+\dfrac{1}{3}$ と表される。

よって，2回目の操作で白球が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{コサ}}{\boxed{シスセ}}$ である。

同様に考えると，3回目の操作で白球が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{ソタチ}}{\boxed{ツテト}}$ である。

(4)　2回目の操作で取り出した球が白球であったとき，その球を取り出した袋の色が白である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{ナニ}}{\boxed{ヌネ}}$ である。

また，3回目の操作で取り出した球が白球であったとき，はじめて白球が取り出されたのが3回目の操作である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{ノハ}}{\boxed{ヒフヘ}}$ である。

(解)ア.4，イ.9，ウ.1，エ.6，オ.7，カキ.18，ク.1，ケ.6，コサ.43，シスセ.108，ソタチ.259
ツテト.648，ナニ.21，ヌネ.43，ノハ.88，ヒフヘ.259

⑥数学的帰納法

⑴基本

数学的帰納法… 数式を帰納的な考え方を使って証明する方法

帰納… 様々な計算結果からある結論を推測して論理的に証明する方法

↔(演繹)… 一般論やルールから必然的な結論を導く方法

(解法)ある命題に対して以下のことを示す

(ⅰ) $n=1$ で成立すること

(ⅱ) $n=k$ が成り立つと仮定して $n=k+1$ でも成立すること

(ⅰ)で最初の数でも成り立つことを示し、(ⅱ)より $n=1$ で成り立てば $n=2$ でも成立して、$n=2$ でも成り立てば $n=3$ でも成立と繰り返すことで n の全ての値で成立することがわかる

(例題 1)等式の証明

(ⅰ)全ての自然数 n に対して $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ であること

とを示せ

[解]数学的帰納法で証明する

(ⅰ) $n=1$のとき

(左辺) $=1$, (右辺) $=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)=1$ より成立

(ⅱ) $n=k$ のとき、$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$が成り立つと仮定して

$n=k+1$ で成立することを示す

$$
\begin{aligned}
1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2&=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2\\
&=\frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1)+(k+1)\}\\
&=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)=\frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}
\end{aligned}
$$

よって $n=k+1$ でも成立

(ⅰ),(ⅱ)より　**全ての自然数 $\boldsymbol{n}$ に対して $\boldsymbol{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$**

(演習)

(ⅰ)全ての自然数 n に対して$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ であることを示せ

[解]数学的帰納法で証明する

(ⅰ) $n=1$のとき

(左辺) $=1$, (右辺) $=1^2=1$ より成立

(ⅱ) $n=k$ のとき、$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$が成り立つと仮定して

$n=k+1$ で成立することを示す

$$
\begin{aligned}
1+3+5+\cdots+(2k-1)+\{2(k+1)-1\}&=k^2+(2k+2-1)\\
&=k^2+2k+1=(k+1)^2
\end{aligned}
$$

よって $n=k+1$ でも成立

(ⅰ),(ⅱ)より　**全ての自然数で$\boldsymbol{1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2}$ である**

(例題 2)不等式の証明

(ⅰ) $n \geq 2$ の全ての自然数 n に対して $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \frac{2n}{n+1}$ $(n \geq 2)$を示せ

[解]数学的帰納法で証明する

(ⅰ) $n = 2$ のとき

(左辺)$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$,(右辺)$= \frac{2\cdot 2}{2+1} = \frac{4}{3}$ より成立

(ⅱ) $n = k$ のとき、$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} > \frac{2k}{k+1}$ であると仮定して $n = k + 1$ で成立することを示す

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right) - \frac{2(k+1)}{\{(k+1)+1\}} > \frac{2k}{k+1} + \frac{1}{k+1} - \frac{2k+2}{k+2}$$

$$= \frac{2k+1}{k+1} - \frac{2k+2}{k+2}$$

$$= \frac{(2k+1)(k+2) - (2k+2)(k+1)}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{1}{(k+1)(k+2)} > 0 \ (k \geq 2 \text{ より})$$

よって $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} > \frac{2(k+1)}{\{(k+1)+1\}}$ より $n = k + 1$ でも成立

(ⅰ)(ⅱ)より **$n \geq 2$の全ての自然数で $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \frac{2n}{n+1}$**

(演習)

(Ⅰ)全ての自然数 n に対して $3^n > n^2 + n$ を示せ

[解]数学的帰納法で証明する

(ⅰ) $n = 1$ のとき

(左辺)$= 3^1 = 3$,(右辺)$= 1^2 + 1 = 2$ より成立

(ⅱ) $n = k$ のとき、$3^k > k^2 + k$ であると仮定して $n = k + 1$ で成立することを示す

$$3^{k+1} - \{(k+1)^2 + (k+1)\} = 3 \cdot 3^k - \{(k+1)^2 + (k+1)\} > 3(k^2 + k) - (k^2 + 3k + 2)$$

$$= 2k^2 - 2 = 2(k+1)(k-1) \geq 0$$

よって $n = k + 1$ でも成立

(ⅰ)(ⅱ)より**全ての自然数 n に対して $3^n > n^2 + n$**

(例題 3)命題の証明

(ⅰ) $n \geq 2$ の自然数 n に対して、$4^n - 3n - 1$ が 9 の倍数であることを証明せよ

[解]数学的帰納法で証明する

(ⅰ) $n = 2$ のとき

$4^2 - 3 \cdot 2 - 1 = 16 - 6 - 1 = 9$ より成立

(ⅱ) $n = k$のとき、$4^k - 3k - 1$ が 9 の倍数つまり$4^k - 3k - 1 = 9m$ (m は整数)であると仮定して

$n = k + 1$ で成立することを示す

$4^k - 3k - 1 = 9m$ より$4^k = 9m + 3k + 1$

$$
\begin{aligned}
4^{k+1} - 3(k+1) - 1 &= 4 \cdot 4^k - 3(k+1) - 1 \\
&= 4(9m + 3k + 1) - 3(k+1) - 1 \\
&= 36m + 9k = 9(4m + k)
\end{aligned}
$$

$(4m + k)$は整数なので $9(4m + k)$は 9 の倍数となる

よって $n = k + 1$ でも成立

(ⅰ)(ⅱ)より　**$n \geq 2$の自然数 n に対して $4^n - 3n - 1$は9の倍数である**

(演習)

(ⅰ)全ての自然数 n に対して、$2^{2n-1} + 1$ が 3 の倍数であることを証明せよ

[解]数学的帰納法で証明する

(ⅰ) $n = 1$ のとき

$2^{2 \cdot 1 - 1} + 1 = 2 + 1 = 3$ より成立

(ⅱ) $n = k$のとき、$2^{2k-1} + 1$ が 3 の倍数つまり$2^{2k-1} + 1 = 3m$ (m は整数)であると仮定して

$n = k + 1$ で成立することを示す

$2^{2k-1} + 1 = 3m$ より$2^{2k-1} = 3m - 1$

$2^{2(k+1)-1} + 1 = 2^2 \cdot 2^{2k-1} + 1 = 4(3m - 1) + 1 = 3(4m - 1)$

$(4m - 1)$は整数なので $3(4m - 1)$は 3 の倍数となる

よって $n = k + 1$ でも成立

(ⅰ)(ⅱ)より　**全ての自然数 n に対して $2^{2n-1} + 1$は3の倍数である**

(例題 4)一般項推測型

(i) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n-4}{a_n-3}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ

[解]今回の漸化式は計算では解けないので実際に値を出して、そこから一般項を推測する

$a_1 = 1$, $a_2 = \frac{a_1-4}{a_1-3} = \frac{1-4}{1-3} = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{a_2-4}{a_2-3} = \frac{\frac{3}{2}-4}{\frac{3}{2}-3} = \frac{5}{3}$, $a_4 = \frac{a_3-4}{a_3-3} = \frac{\frac{5}{3}-4}{\frac{5}{3}-3} = \frac{7}{4}$ より

一般項 $a_n = \frac{2n-1}{n}$ と推測できるのでこれを数学的帰納法で証明する

(i) $n = 1$ のとき

$a_1 = \frac{2\cdot1-1}{1} = \frac{1}{1} = 1$ より成立

(ii) $n = k$ のとき、$a_k = \frac{2k-1}{k}$ であると仮定して $n = k+1$ で成立することを示す

$a_{k+1} = \frac{a_k-4}{a_k-3} = \frac{\frac{2k-1}{k}-4}{\frac{2k-1}{k}-3} = \frac{2k+1}{k+1} = \frac{2(k+1)-1}{(k+1)}$ より $n = k+1$ でも成立

(i)(ii)より　一般項 $\boldsymbol{a_n = \frac{2n-1}{n}}$

(演習)

(I) $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_{n+1} = \frac{2-a_n}{3-2a_n}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ

[解]

$a_1 = \frac{2}{3}$, $a_2 = \frac{2-a_1}{3-2a_1} = \frac{2-\frac{2}{3}}{3-2\cdot\frac{2}{3}} = \frac{4}{5}$, $a_3 = \frac{2-a_2}{3-2a_2} = \frac{2-\frac{4}{5}}{3-2\cdot\frac{4}{5}} = \frac{6}{7}$, $a_4 = \frac{2-a_3}{3-2a_3} = \frac{2-\frac{6}{7}}{3-2\cdot\frac{6}{7}} = \frac{8}{9}$ より

一般項 $a_n = \frac{2n}{2n+1}$ と推測できるのでこれを数学的帰納法で証明する

(i) $n = 1$ のとき

$a_1 = \frac{2\cdot1}{2\cdot1+1} = \frac{2}{3}$ より成立

(ii) $n = k$ のとき、$a_k = \frac{2k}{2k+1}$ であると仮定して $n = k+1$ で成立することを示す

$a_{k+1} = \frac{2-a_k}{3-2a_k} = \frac{2-\frac{2k}{2k+1}}{3-2\cdot\frac{2k}{2k+1}} = \frac{2k+2}{2k+3} = \frac{2(k+1)}{2(k+1)+1}$ より $n = k+1$ でも成立

(i)(ii)より　一般項 $\boldsymbol{a_n = \frac{2n}{2n+1}}$

(Ⅱ) $a_1 = 7, a_{n+1} = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ[東工大 2015]

[解] $a_1 = 7, a_2 = \frac{4a_1 - 9}{a_1 - 2} = \frac{4\cdot 7 - 9}{7 - 2} = \frac{19}{5}, a_3 = \frac{4a_2 - 9}{a_2 - 2} = \frac{4\cdot\frac{19}{5} - 9}{\frac{19}{5} - 2} = \frac{31}{9}, a_4 = \frac{4a_3 - 9}{a_3 - 2} = \frac{4\cdot\frac{31}{9} - 9}{\frac{31}{9} - 2} = \frac{43}{13}$ より

一般項 $a_n = \frac{12n - 5}{4n - 3}$ と推測できるのでこれを数学的帰納法で証明する

(ⅰ) $n = 1$ のとき

$a_1 = \frac{12\cdot 1 - 5}{4\cdot 1 - 3} = \frac{7}{1} = 7$ より成立

(ⅱ) $n = k$ のとき、$a_k = \frac{12k - 5}{4k - 3}$ であると仮定して $n = k + 1$ で成立することを示す

$a_{k+1} = \frac{4a_k - 9}{a_k - 2} = \frac{4\cdot\frac{12k - 5}{4k - 3} - 9}{\frac{12k - 5}{4k - 3} - 2} = \frac{12k + 7}{4k + 1} = \frac{12(k+1) - 5}{4(k+1) - 3}$ より

$n = k + 1$ でも成立

(ⅰ)(ⅱ)より 一般項 $\boldsymbol{a_n = \frac{12n - 5}{4n - 3}}$

[応用](Ⅲ)正の項からなる数列 $\{a_n\}$ が全ての自然数に対して以下の等式を満たす一般項 a_n を求めよ。

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)^2 = {a_1}^3 + {a_2}^3 + {a_3}^3 + \cdots + {a_n}^3$$

[解]

$n = 1$ のとき

${a_1}^2 = {a_1}^3$ より

${a_1}^2(a_1 - 1) = 0$ $a_1 > 0$ より $a_1 = 1$

$n = 2$ のとき

$(a_1 + a_2)^2 = {a_1}^3 + {a_2}^3$ より

$a_2(a_2 + 1)(a_2 - 2) = 0$ $a_n > 0$ より $a_2 = 2$

$n = 3$ のとき

$(a_1 + a_2 + a_3)^2 = {a_1}^3 + {a_2}^3 + {a_3}^2$ より

$a_3(a_3 + 2)(a_3 - 3) = 0$ $a_n > 0$ より $a_3 = 3$

よって $a_n = n$ と推測できるのでこれを数学的機能法で示しにいく

(ⅰ) $n = 1$ のとき

上記より $a_1 = 1$ より成立

(ⅱ) $n \leq k$ のとき $a_n = n$ であると仮定して $n = k+1$ のとき $a_{k+1} = k+1$ であることを示す

$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + a_{k+1})^2 = {a_1}^3 + {a_2}^3 + {a_3}^3 + \cdots + {a_k}^3 + {a_{k+1}}^3$

$(1 + 2 + 3 + \cdots + k + a_{k+1})^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + {a_{k+1}}^3$

$\left\{\frac{1}{2}k(k+1) + a_{k+1}\right\}^2 = \left\{\frac{1}{2}k(k+1)\right\}^2 + {a_{k+1}}^3$

$\left\{\frac{1}{2}k(k+1)\right\}^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}k(k+1)a_{k+1} + {a_{k+1}}^2 = \left\{\frac{1}{2}k(k+1)\right\}^2 + {a_{k+1}}^3$

${a_{k+1}}^3 - {a_{k+1}}^2 - k(k+1)a_{k+1} = 0$

$a_{k+1}(a_{k+1} + k)\{a_{k+1} - (k+1)\} = 0$

$a_{k+1} > 0$ より $a_{k+1} = k+1$

よって $n = k+1$ で成立

したがって $\boldsymbol{a_n = n}$

[数学的帰納法まとめ]

基本的なパターンは上記のものである。数学の証明問題の大半は数学的帰納法を使うので証明問題ではすぐに数学的帰納法を使うと出てきてほしい

少し応用問題になると

(ⅰ) $n = 1, n = 2$ で成立すること

(ⅱ) $n = k, n = k+1$ が成り立つ仮定して $n = k+2$ でも成立すること

を示す問題もあるので問題に応じて仮定する数を変えること(基本的には1つ)

(具体例)$x+y\,,xy$ が整数のとき、x^n+y^n も整数になることを示せ

[解]数学的帰納法で証明する

(ⅰ)$n=1$のとき

$x^1+y^1=x+y$ より成立

　　$n=2$ のとき

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ より成立

(ⅱ)$n=k\,,k+1$ のとき、$x^n+y^n\,,x^{n+1}+y^{n+1}$ が整数であると仮定して $n=k+2$ で成立することを示す

$x^{k+2}+y^{k+2}=(x+y)(x^{k+1}+y^{k+1})-xy(x^k+y^k)$より$n=k+2$ でも成立

(ⅰ)(ⅱ)より　**$x+y\,,xy$ が整数のとき、x^n+y^nも整数になる**

(類題) $x=t+\frac{1}{t}\,,P_n=t^n+\frac{1}{t^n}\ (n=1\,,2\,,3\,,\cdots)$ とおくとき、P_n は x の n 次式になることを示せ

[解]数学的帰納法で証明する

(ⅰ)$n=1$のとき

$P_1=t+\frac{1}{t}=x$ より成立

　　$n=2$ のとき

$P_2=t^2+\frac{1}{t^2}=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2=x^2-2$ より成立

(ⅱ)$n=k\,,k+1$ のとき、$P_k\,,P_{k+1}$ が それぞれ x の $k\,,k+1$ 次式であると仮定して

$n=k+2$ で成立することを示す

$P_{k+2}=t^{k+2}+\frac{1}{t^{k+2}}=\left(t+\frac{1}{t}\right)\left(t^{k+1}+\frac{1}{t^{k+1}}\right)-\left(t^k+\frac{1}{t^k}\right)=xP_{k+1}-P_k$ より成立

よって

$x=t+\frac{1}{t}\,,P_n=t^n+\frac{1}{t^n}\ (n=1\,,2\,,3\,,\cdots)$ とおくとき、P_n は x の n 次式になる