指数・対数関数

①指数関数

⑴指数・指数関数とは

例）2^3 , $(-2)^4$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

a^b ← a を____、b を______(_____)とよぶ

指数関数とはb (_____)の部分が変化していく関数

⑵指数計算

<指数法則> $a \neq 0$, $b \neq 0$, m, n は有理数

- $a^m a^n = a^{m+n}$　　例）$2 \cdot 4 = 2^{\ } \cdot 2^{\ } = 8 = 2^{\ }$　→ ___ + ___ = ___
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$　　例）$\frac{8}{2} = \frac{2^{\ }}{2^{\ }} = 4 = 2^{\ }$　→ ___ − ___ = ___
- $(a^m)^n = a^{mn}$　　例）$(2^3)^2 = 8^2 = 64 = 2^{\ }$　→ ___ × ___ = ___
- $(ab)^n = a^n b^n$　　例）$(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36 = 2^{\ } \cdot 3^{\ }$
- $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$　　例）$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = \frac{3^{\ }}{2^{\ }}$

以上が指数法則と呼ばれる計算だが、暗記する必要はなく、例のように具体例使って計算すればどうなっているかわかる

（キーワード）

掛け算は＿＿＿＿＿

割り算は＿＿＿＿＿

（ポイント）

1．0乗は＿＿　　　例）$2^0 = 1, (-3)^0 = 1$

2．$-$は＿＿＿　　　例）$2^{-2} = \frac{1}{2^2}, (-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3}$

例題）

（Ⅰ）$a^6 \times a^{-2}$　　（Ⅱ）$a^3 \div (a^3)^{-3}$　　（Ⅲ）$2^7 \div 2^2 \times 2^{-3}$

（演習）

（ⅰ）$a^4 \times a^{-3}$　　（ⅱ）$a^2 \div a^{-5}$　　（ⅲ）$(a^3)^{-2}$

（iv）$2^3 \times 2^{-5} \div 2^2$

（ｖ）$(3^2)^{-3} \times 3^3 \div 3^{-4}$

（vi）$(2^{-3} \times 2^6)^3 \div 16$

⑶累乗根の計算

これから指数に有理数(分数)が含まれる計算を行っていく

$x^n = a$ の解をx のn 乗根と言い、その解を $x =$ ＿＿＿ とかく

例題) $x^3 = a$　　$x^5 = a^3$　　$x^4 = 3$

$x =$　　$x =$　　$x =$

(注意)$\sqrt[2]{a}$ **は**$\sqrt{a}$ **のように2が省略される**

次に上記の形を本来の指数の形に持っていきたい

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$$

よって、上記の答えはそれぞれ

$\sqrt[3]{a} = a^{-}$, $\sqrt[5]{a^3} = a^{-}$, $\sqrt[4]{3} = 3^{-}$ と変形出来る

本来の指数の形に持っていけば、指数法則を使って計算できる

<累乗根の法則>

- $\boldsymbol{\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}} = a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \boldsymbol{\sqrt[n]{ab}}$
- $\dfrac{\boldsymbol{\sqrt[n]{a}}}{\boldsymbol{\sqrt[n]{b}}} = \dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \boldsymbol{\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}}$
- $(\boldsymbol{\sqrt[n]{a}})^{\boldsymbol{m}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}} = \boldsymbol{\sqrt[n]{a^m}}$
- $\boldsymbol{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}} = \boldsymbol{\sqrt[mn]{a}}$
- $\boldsymbol{\sqrt[n]{a^m}} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}} = \boldsymbol{\sqrt[np]{a^{mp}}}$

例題）

（Ⅰ）$\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{16}$　　　（Ⅱ）$\dfrac{\sqrt[6]{27}}{\sqrt[6]{3}}$　　　（Ⅲ）$\sqrt[3]{\sqrt{125}}$

（ポイント）

計算するとき、底は一番＿＿＿＿＿＿に合わせると良い

（演習）

（ⅰ）$3^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{3}} \div 3^{\frac{1}{6}}$　　　（ⅱ）$\sqrt[4]{2^3} \times \sqrt{2}$　　　（ⅲ）$\sqrt{\sqrt[3]{36}}$

（iv）$(\sqrt[6]{27})^2$

（v）$\dfrac{\sqrt[5]{128}}{\sqrt[5]{4}}$

[応用]

（vi）$\sqrt{2}\sqrt[6]{200}\sqrt[3]{25}$

（vii）$\sqrt{\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}}$

（viii）$(a^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}})$

⑷指数関数のグラフ

$y = 3^x$ と $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
3^x							
$\left(\frac{1}{3}\right)^x$							

（グラフの性質）$y = a^x$

1. 定義域(x の範囲）は________全体で値域(y の範囲）は__________全体

2. $a > 1$ のとき____________（常に増加する）

   $0 < a < 1$のとき____________（常に減少する）

   → y のある値に対して、それをみたす x が **1 つ**に定まる

3. $(0\,,1)$ を通り、x 軸に_________する(y の値は 0 に近づくが 0 にはならない）

（注意）

$a \leq 0\,, a = 1$ のグラフは基本的に出でこない(出せない）

（理由）

$y = 0^x$については0^0の値が定まらない

$y = 1^x$についてはどんなxに対しても$y = 1$ となるので直線になるから

$a < 0$ のときの$y = a^x$ は $a^{\frac{3}{2}} = a^{1.5}$などの指数部が整数以外の符号が定まらない

（まとめ）

底a が $a > 1$ の時と $0 < a < 1$ でグラフが変わる（グラフは概形が分かれば良い）

→考える関数の底がどっちのグラフになるのか考えること

⑸指数の大小関係

例題)次の数の大小を比較せよ

（Ｉ）$\sqrt[4]{5}\,,\sqrt[8]{15}$ （Ⅱ）$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{5}}\,,2^{\frac{1}{3}}\,,4^{\frac{1}{4}}$

(不等式の性質)

$a>0\,,b>0\,,n$は有理数

$a>b\rightarrow a^n>b^n$

指数関数は常に正の数になるので何乗しても良い

(演習)次の数の大小を比較せよ

(ｉ) $\sqrt[3]{4}, \sqrt[6]{14}$　　(ⅱ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{3}}, 9^{\frac{1}{8}}$

⑹指数方程式

(解法)

1. ＿＿(＿＿＿＿＿)を揃えるように変形する
2. 指数部の等式を解く

例題 1)

(Ⅰ) $3^{x+2} = 27$　　(Ⅱ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x(x+3)} = 4$

(演習)

（ i ）$4^{x-3} = 64$

（ ii ）$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 27$

[応用]

（iii）$3 \cdot 9^{x} = 1$

例題 2)置き換え

（ I ）$2^{2x} - 3 \cdot 2^{x} + 2 = 0$

(演習)

(i) $3^{2x} + 8 \cdot 3^x - 9 = 0$

(ii) $4^x - 5 \cdot 2^{x+2} + 64 = 0$

[応用]

$y = 4^x - 2^{x+1}$ の最小値とそのときの x の値を求めよ(ヒント: $t = 2^x$とおく)

⑺指数不等式

（解法）

1. ＿＿＿(＿＿＿＿＿＿＿)を揃えるように変形する

2. 指数部の不等式を解く（底によって不等号の向きが変わる）

$a > 1$ のとき $a^x > a^y$ $\rightarrow$

$0 < a < 1$ のとき $a^x > a^y$ $\rightarrow$

例題 1）

（Ⅰ）$2^x > 8$

（Ⅱ）$3^{x-2} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3$

（演習）

（ⅰ）$4^{x-1} < 64$

（ⅱ）$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} \geq 64$

例題 2)置き換え

（Ⅰ）$3^{2x}+3^{x}-12 \geq 0$

(演習)

（ⅰ）$4^{2x}-15\cdot 4^{x}-16 \geq 0$

（ⅱ）$4^{x} \leq 2(1+2^{x-1})$

（ⅲ）$\left(\frac{1}{9}\right)^{x}-\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}-54<0$

⑻[応用]式の値

(問題)関数 $y = 4^x + 4^{-x} - 4(2^x + 2^{-x}) + 7 \cdots$ ① について最小値を求めよ

(step1) $t = 2^x + 2^{-x}$ とおく

$t^2 =$

①の式を t を使って表すと

t の定義域は________________________より

$2^x + 2^{-x}$

よって最小値は$t =$ 　　のとき

そのときの x は____________________より

②対数関数

⑴対数・対数関数とは

指数関数から派生してできた関数

例）$\log_2 6$, $2\log_5 4$

$2^x = 4 \ \ \rightarrow \ x = 2$

$2^x = 3 \ \ \rightarrow \ x = ? \qquad \leftarrow$ ________

よって $a > 0\,, a \neq 1\,, R > 0$

$\boldsymbol{a^r = R \ \ \leftrightarrow \ r = \log_a R}$

$\log_a R$ において a の部分を_____、R の部分を________という

対数関数とはR (_______)が変化していく関数

⑵対数計算

<対数の性質> $a > 0\,, a \neq 1\,, R > 0\,, S > 0\,, p$は有理数

1. $\log_a RS = \log_a R + \log_a S$　　例）$\log_2 15 = \log_2 3 \cdot 5 = \log_2 3 + \log_2 5$
2. $\log_a \frac{R}{S} = \log_a R - \log_a S$　　例）$\log_2 \frac{5}{3} = \log_2 5 - \log_2 3$
3. $\log_a R^p = p\log_a R$　　例）$\log_2 5^3 = 3\log_2 5$
4. $\log_a a = 1$　　例）$\log_2 2 = 1$
5. $\log_a 1 = 0$　　例）$\log_2 1 = 0$

（証明）

1． $\log_a R = x$, $\log_a S = y$ として $\log_a RS = x + y$ を示す

$\log_a R = x$ より $R = a^x$, $\log_a S = y$ より $S = a^y$

$RS = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

よって　$x + y = \log_a RS$

2． 1と同様に $\log_a \frac{R}{S} = x - y$ を示す

$\frac{R}{S} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

よって　$x - y = \log_a \frac{R}{S}$

3． $\log_a R = x$ として $\log_a R^p = px$ を示す

$\log_a R = x$ より $R = a^x$

両辺 p 乗すると $R^p = (a^x)^p = a^{px}$

よって　$px = \log_a R^p$

4． $a^1 = a$ より

$1 = \log_a a$

5． $a^0 = 1$ より

$0 = \log_a 1$

例題)

(Ⅰ) $\log_2 16$

(Ⅱ) $\log_3 \sqrt[3]{9}$

(Ⅲ) $\log_3 12 + \log_3 36 + \log_3 \frac{1}{16}$

(Ⅳ) $\log_{10} \sqrt{2} - \frac{1}{2}\log_{10} \frac{1}{3} - \frac{3}{2}\log_{10} \sqrt[3]{6}$

(演習)

(ⅰ) $\log_4 64$

(ⅱ) $\log_5 \frac{1}{\sqrt{125}}$

（iii）$\log_{10} 2 + \log_{10} \sqrt{15} - \frac{1}{2} \log_{10} \frac{3}{5}$　　　（iv）$3 \log_4 2 - \frac{1}{2} \log_4 7 + \log_4 \frac{\sqrt{7}}{2}$

<底の変換公式>

次に底が異なっていたらどのように計算するのか

→底を揃えると計算できる

→底を揃うように変形したい

$$\boldsymbol{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

(証明)

$\log_a b = x$ とすると$b = a^x$

両辺にc が底の対数を取ると

$\log_c b = \log_c a^x = x \log_c a$

$$x = \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

(ポイント)揃える底は＿＿＿＿＿＿＿＿にすること

例題)以下の式を底の変換公式で変形せよ

(Ⅰ) $\log_{81} 3\sqrt{3}$

(Ⅱ) $\log_{\frac{1}{25}} 5\sqrt[4]{5}$

(Ⅲ) $\log_2 5 \cdot \log_5 8$

(Ⅳ) $\log_2 3 \cdot \log_3 8 \cdot \log_4 8$

(演習)以下の式を底の変換公式で変形せよ

（ｉ）$\log_{16} 1024$

（ⅱ）$\log_{\frac{1}{8}} 128$

（ⅲ）$\log_3 6 \cdot \log_6 9$

（ⅳ）$\log_4 3 \cdot \log_9 25 \cdot \log_5 2$

[応用]（ｖ）$3^{4\log_3 2}$

⑶対数関数のグラフ

$y = \log_3 x$ と $\log_{\frac{1}{3}} x$

x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
$\log_3 x$							
$\log_{\frac{1}{3}} x$							

（グラフの性質）$y=\log_a x$

1. 定義域(xの範囲)は__________全体で値域(yの範囲)は________全体

2. $a>1$のとき____________（常に増加する）

   $0<a<1$のとき____________（常に減少する）

   →yのある値に対して、それをみたすxが**1つ**に定まる

3. $(1, 0)$を通り、y軸に________する(xの値は0に近づくが0にはならない)

4. $y=a^x$のグラフと ___________に関して**対称**

[応用]逆関数(詳しくは数学Ⅲで)

xとyを入れ替えてできる関数を逆関数といい、$y=x$に関して対称となる

$y=a^x \ \leftrightarrow \ x=\log_a y$

右側の式のxとyを入れ替えると$y=\log_a x$

(他の例)

$y=x^2$と$y=\pm\sqrt{x}$　$y=\sin x$ と $y=\sin^{-1} x$

⑷対数の大小関係

例題)

(Ⅰ) 2 , $\log_3 7$

(Ⅱ) $\log_2 3$, $\log_4 7$, $\log_8 28$

(演習)

(ⅰ)3, $\log_2 9$

(ⅱ) $\log_3 5$, $\log_9 20$, $\log_{27} 126$

⑸対数方程式

（解法）

1. ＿＿＿＿＿＿＿を確認する

2. ＿＿を揃えて、左辺・右辺ともに同じ底の対数 1 つずつになるように変形する

3. 真数の等式を解く

4. 真数条件を満たしているか確認する

例題 1）

（Ⅰ）$\log_2 x + \log_2(x-2) = 3$　　（Ⅱ）$(\log_{10} x)^2 - 4\log_{10} x + 3 = 0$

[応用]（Ⅲ）$\log_2 8x - 6\log_x 2 = 4$

（演習）

（ⅰ）$\log_{12} x + \log_{12}(x+1) = 1$

（ⅱ）$(\log_2 x)^2 - \log_2 x^3 + 2 = 0$

[応用]（ⅲ）$\log_3 x - \log_x 81 = 3$

[応用] x についての方程式 $\log_a(x-2) - \log_a(x+1) - \log_a(x-1) = 1$ が解を持つように、定数 a の値の範囲を求めよ。

⑹対数不等式

(解法)

1. ＿＿＿＿＿＿を確認する

2. ＿＿を揃えて、左辺・右辺ともに同じ底の対数1つずつになるように変形する

3. 真数の不等式を解く(底によって不等式の向きが変わる)

   $a>1$ のとき $\log_a x<\log_a y$ →

   $0<a<1$ のとき $\log_a x<\log_a y$ →

4. 真数条件と合わせる範囲を答える

例題)

(Ⅰ) $\log_3 x+\log_3(2x-1)>1$　　(Ⅱ) $(\log_2 x)^2+\log_2 x^2-3\leq 0$

[応用]（Ⅲ）$\log_2 x + 3\log_x 4 - 7 < 0$

(演習)

（ｉ）$2\log_2(x-1) < \log_2(3-x)$

（ⅱ）$(\log_3 x)^2 - \log_3 x^2 - 8 \leq 0$

[応用]（ⅲ）$\log_{\frac{1}{3}} x - 2\log_x \frac{1}{9} + 3 > 0$

[応用]関数$y = -2(\log_2 x)^2 + 2\log_2 x^2 - 3\ \left(\frac{1}{4} \leq x \leq 8\right)$ の最大値・最小値とその時の x の値を求めよ。［ヒント: $t = \log_2 x$ とおく］

[応用] $\log_2 x + \log_2 y = 3$ のとき、$4x + y$の最小値を求めよ。

また、そのときのx, y の値を求めよ。

⑺常用対数

常用対数とは　… 底が 10 の対数のこと　$\log_{10} x$

何のために　→ 桁数問題

数が大きい場合、常用対数をとって計算すると値を小さくできる

例）

$1000 \to \log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3$

$10000 \to \log_{10} 10000 = \log_{10} 10^4 = 4$　　　　[4 桁の数字の値は 3.…になる]

以上より、計算した値によって、その数の桁数がわかる

→ 具体的に正確な値はわからないが、だいたいどのくらいか(桁数)はわかる

[補足]

$a = \log_{10} 2 = 0.3010\ , b = \log_{10} 3 = 0.4771$ とする

$\log_{10} 1 =$

$\log_{10} 2 =$

$\log_{10} 3 =$

$\log_{10} 4 =$

$\log_{10} 5 =$

$\log_{10} 6 =$

$\log_{10} 7 =$

$\log_{10} 8 =$

$\log_{10} 9 =$

例題 1)3^{20}の数の桁数と最高位の数字を求めよ

（但し、$\log_{10} 2 = 0.3010$,$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする）

(例題 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ を小数で表すとき、はじめて 0 でない数字が現れるのは小数第何位か。また、その数字はいくつか。（但し、$\log_{10} 2 = 0.3010$,$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする）

(演習 1) 6^{20} の数の桁数と最高位の数字を求めよ。

(但し、$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする)

(演習 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{15}$ を小数で表すとき、はじめて 0 でない数字が現れるのは小数第何位か。また、その数字はいくつか。(但し、$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする)