京都大学

法，教育（文系），文，総合人間（文系），経済（一般）

数学 - 解答

$\boxed{2}$

(1)　接線の接点を$\left(a, a^3-a\right)$とする．$y=x^3-x$において，$y'=3x^2-1$であるから，

接線の方程式は，

$$y-(a^3-a)=(3a^2-1)(x-a)$$

$$y=(3a^2-1)x-2a^3 \qquad \cdots\cdots ①$$

これが，点$\mathrm{P}\left(1, t\right)$を通ることから，

$$t=(3a^2-1)\cdot 1-2a^3$$

$$-2a^3+3a^2-1=t \qquad \cdots\cdots ②$$

したがって，接線が1本だけ引ける条件は

　aの方程式②の相異なる実数解がただ1つ

となる条件である．ここで，$f(a)=-2a^3+3a^2-1$とおくと，

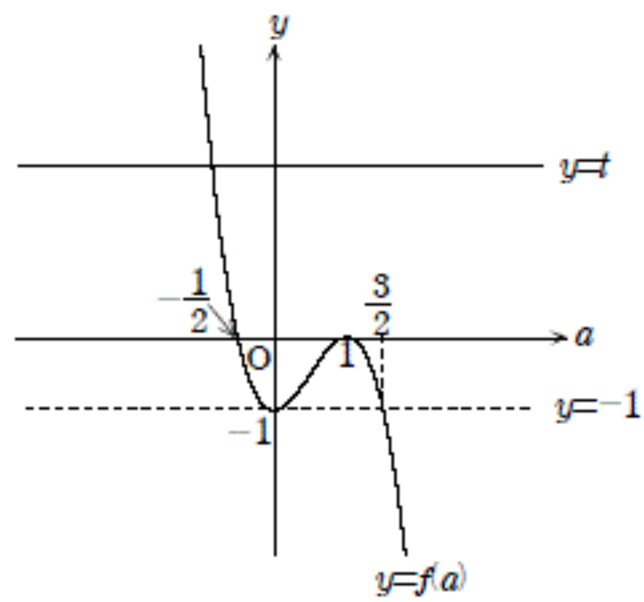
　ay平面上で，$y=f(a)$のグラフと直線$y=t$の

　共有点がただ1つ

となる条件を求めればよい．

$$\begin{cases} f'(a)=-6a^2+6a=-6a(a-1) \\ f(0)=-1 \\ f(1)=0 \end{cases}$$

より，$y=f(a)$のグラフは右の図のようになる．



したがって，求めるtの範囲は，

$\underline{\underline{t>0, t<-1}}$　…（答）

(2)　②において$t=0$とすると，

$$-2a^3+3a^2-1=0$$

$$(a-1)^2\left(a+\frac{1}{2}\right)=0$$

$$a=1, -\frac{1}{2}$$

②において$t=-1$とすると，

$$-2a^3+3a^2-1=-1$$

$$a^2\left(a-\frac{3}{2}\right)=0$$

$$a=0, \frac{3}{2}$$

これらと(1)の図より，接点のx座標aの取り得る値の範囲は，

$$a<-\frac{1}{2}, a>\frac{3}{2} \quad \cdots\cdots ③$$

次に，Cと接線①の共有点のx座標を求める．

$$x^3-x=(3a^2-1)x-2a^3$$

$$x^3-3a^2x+2a^3=0$$

$$(x-a)^2(x+2a)=0$$

$$x=a,\ -2a$$

よって,

$$S(t)=\left|\int_{-2a}^{a}\left[(x^3-x)-\{(3a^2-1)x-2a^3\}\right]dx\right|$$

$$=\left|\int_{-2a}^{a}(x^3-3a^2x+2a^3)dx\right|$$

$$=\left|\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}a^2x^2+2a^3x\right]_{-2a}^{a}\right|$$

$$=\frac{27}{4}a^4$$

③より, a^4 の取り得る値の範囲は　$a^4>\dfrac{1}{16}$

よって, $S(t)$ の取り得る値の範囲は

$$S(t)>\frac{27}{4}\cdot\frac{1}{16}$$

すなわち,

$$\underline{\underline{S(t)>\frac{27}{64}}}\qquad\cdots（答）$$

このウインドウを閉じる
