名古屋大学

情報文化（自然情報），農（生物環境科、資源生物科、応用生命科），理，医（医，保健(看護学専攻、放射線技術科学専攻、検査技術科学専攻、理学療法学専攻、作業療法学専攻)），工（化学・生物工、物理工、電気電子・情報工、機械・航空工、社会環境工）

数学 - 解答

$\boxed{2}$

まずは，直線PQ の通過領域を D を求める．直線PQ の方程式は

$$y=\frac{(t+1)^2-t^2}{(t+1)-t}(x-t)+t^2=(2t+1)(x-t)+t^2=(2t+1)x-t^2-t$$

直線PQ と直線 $x=a$ の交点の y 座標を $f(t)$ とおくと，

$$\begin{aligned} f(t)&=(2t+1)a-t^2-t \\ &=-t^2+(2a-1)t+a \\ &=-\left(t-\frac{2a-1}{2}\right)^2+a^2+\frac{1}{4} \end{aligned}$$

ここで，t が $-1\leqq t\leqq 0$ を動くときの $f(t)$ の最大値と最小値をそれぞれ $M(t)$，$m(t)$ とおくと，

D と $x=a$ の交わりは

(＊)　　$x=a$ のうち $m(a)\leqq y\leqq M(a)$ の部分

である．ここで，$m(a)$，$M(a)$ は

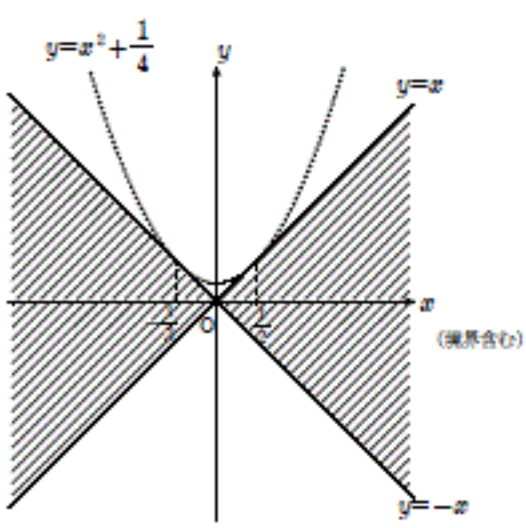
（i） $\dfrac{2a-1}{2}\leqq -1$ $\left(a\leqq -\dfrac{1}{2}\right)$ のとき $\begin{cases} M(a)=f(-1)=-a \\ m(a)=f(0)=a \end{cases}$

（ii） $-1\leqq \dfrac{2a-1}{2}\leqq -\dfrac{1}{2}$ $\left(-\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 0\right)$ のとき $\begin{cases} M(a)=a^2+\dfrac{1}{4} \\ m(a)=f(0)=a \end{cases}$

（iii） $-\dfrac{1}{2}\leqq \dfrac{2a-1}{2}\leqq 0$ $\left(0\leqq a\leqq \dfrac{1}{2}\right)$ のとき $\begin{cases} M(a)=a^2+\dfrac{1}{4} \\ m(a)=f(-1)=-a \end{cases}$

（iv） $\dfrac{2a-1}{2}\geqq 0$ $\left(a\geqq \dfrac{1}{2}\right)$ のとき $\begin{cases} M(a)=f(0)=a \\ m(a)=f(-1)=-a \end{cases}$

これより，(＊)に注意すると，D は次のようになる．



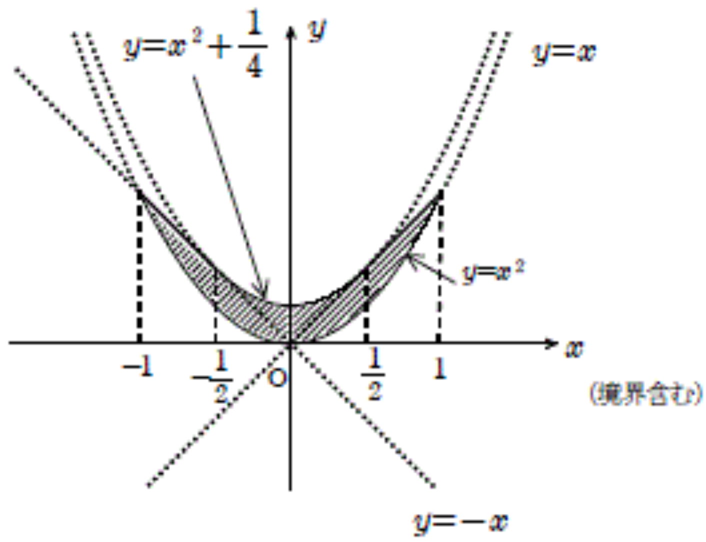
ここで，点 P の軌跡は

$$y=x^2\ \ (-1\leqq x\leqq 0)$$

点 Q の軌跡は

$$y=x^2\ \ (0\leqq x\leqq 1)$$

であるから，領域 $y \geqq x^2$ が凸領域であることに注意すると，線分 PQ の通過領域は次のようになる．



また，y 軸対称性に注意すると，面積は

$$2\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)-x^2\right\}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(x-x^2)\,dx\right]$$

$$=2\left\{\left[\frac{1}{4}x\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1}\right\}$$

$$=\frac{5}{12}$$

このウインドウを閉じる