HL 数学　第 8 講

例題 1)次の点 A を通り、$\vec{d}$ が方向ベクトルである直線を媒介変数 t を用いて表せ。

$A(3,4,5)$, $\vec{d}=(1,2,-3)$

[解]

直線上の点 $P(x,y,z)$とする

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA}+t\vec{d} \\
&= (3,4,5)+t(1,2,-3) \\
&= (3,4,5)+(t,2t,-3t) \\
&= (t+3,2t+4,-3t+5)
\end{aligned}
$$

よって

$\boldsymbol{x=t+3,\ y=2t+4,\ z=-3t+5}$

(演習 1)次の点 A を通り、$\vec{d}$ が方向ベクトルである直線を媒介変数 tを用いて表せ。

⑴ $A(-3,1,2)$, $\vec{d}=(2,3,-2)$

$\boldsymbol{x=2t-3,\ y=3t+1,\ z=-2t+2}$

⑵ $A(2,-1,1)$, $\vec{d}=(1,0,-2)$

$\boldsymbol{x=t+2,\ y=-1,\ z=-2t+1}$

例題 2)次の 2 点を通る直線を媒介変数 t を用いて表せ。

$A(1,0,2)$, $B(2,2,-3)$

[解]

直線上の点 $P(x,y,z)$ とすると

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=(2,2,-3)-(1,0,2)$

$=(1,2,-5)$　　←方向ベクトル

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$

$=(1,0,2)+t(1,2,-5)$

$=(t+1,2t,-5t+2)$

よって

$\boldsymbol{x=t+1\,,y=2t\,,z=-5t+2}$

(演習 2) 次の 2 点を通る直線を媒介変数 t を用いて表せ。

⑴ $A(3,-1,2)$, $B(2,1,3)$

$\overrightarrow{AB}=(-1,2,1)$

$\boldsymbol{x=-t+3\,,y=2t-1\,,z=t+2}$

⑵ $A(2,1,3)$, $B(2,3,1)$

$\overrightarrow{AB}=(0,2,-2)$

$\boldsymbol{x=2\,,y=2t+1\,,z=-2t+3}$

例題 3)点 $A(2,-3,1)$ を通り、$\vec{u}=(-1,3,4)$ を方向ベクトルとする直線を l とする。 l とxz 平面との交点Pの座標を求めよ。

[解]

l 上の点 $L(x,y,z)$ とすると

$\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OA}+t\vec{u}$ $\left(t \text{ は実数}\right)$

$\quad =(2,-3,1)+t(-1,3,4)$

$\quad =(-t+2,3t-3,4t+1)$

$x=-t+2, y=3t-3, z=4t+1$

xz 平面との交点より $y=0$

$3t-3=0$ より$t=1$

よって　交点 $\boldsymbol{P(1,0,5)}$

（演習 3）点 $A(0,2,1)$ を通り、$\vec{u}=(2,1,-3)$ を方向ベクトルとする直線を l とする。 l とxy 平面との交点Pの座標を求めよ。

[解]

l 上の点 $L(x,y,z)$ とすると

$\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OA}+t\vec{u}$ $\left(t \text{ は実数}\right)$

$\quad =(2t,t+2,-3t+1)$

$x=2t, y=t+2, z=-3t+1$

xy 平面との交点より $z=0$

$-3t+1=0$ より $t=\frac{1}{3}$

よって　交点 $\boldsymbol{P\left(\frac{2}{3},\frac{7}{3},0\right)}$

例題 4）点 $A(1,0,-4)$ を通り、方向ベクトルが $\vec{d}=(1,-1,-1)$ の直線 l と、2 点 $B(1,2,-1), C(2,3,1)$ を通る直線 BC が交わることを示せ。また、その交点を求めよ。

[解]l 上の点 $P(x_1, y_1, z_1)$, BC上の点 $Q(x_2, y_2, z_2)$ とする

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{d}=(t+1,-t,-t-4)$ $\left(t \text{ は実数}\right)$より

$x_1=t+1, y_1=-t, z_1=-t-4$

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+s\overrightarrow{BC}=(s+1,s+2,2s-1)$ $\left(s \text{ は実数}\right)$ より

$x_2=s+1, y_2=s+2, z_2=2s-1$

$x_1=x_2, y_1=y_2, z_1=z_2$ より $t=-1, s=-1$

よって $\boldsymbol{l}$ **と** $\boldsymbol{BC}$ **は交わる**　また、交点は $(\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{-3})$

（演習 4）点 $A(0,-1,-2)$ を通り、方向ベクトルが $\vec{d}_1=(-2,3,5)$ の直線 l と、点 $B(-3,1,2)$ を通り、方向ベクトル $\vec{d}_2=(-1,4,6)$ の直線 m が交わることを示せ。また、その交点を求めよ。

[解]l 上の点 $P(x_1, y_1, z_1)$, m上の点 $Q(x_2, y_2, z_2)$ とする

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{d}_1=(-2t,3t-1,5t-2)$ $\left(t \text{ は実数}\right)$より

$x_1=-2t, y_1=3t-1, z_1=5t-2$

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+s\vec{d}_2=(-s-3,4s+1,6s+2)$ $\left(s \text{ は実数}\right)$ より

$x_2=-s-3, y_2=4s+1, z_2=6s+2$

$x_1=x_2, y_1=y_2, z_1=z_2$ より $t=2, s=1$

よって $\boldsymbol{l}$ **と** $\boldsymbol{BC}$ **は交わる**　また、交点は $(\mathbf{-4},\mathbf{5},\mathbf{8})$

例題 5）p55　1

[解]点 $P(1,1,2)$ として、Aから l に垂線を下ろしたときの交点 H とする

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OP}+t\vec{u}\ \left(t \text{ は実数}\right)$

$=(2t+1,-t+1,-t+2)$

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=(2t+1,-t+1,-t+2)-(3,2,4)$

$=(2t-2,-t-1,-t-2)$

$\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}$ より $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0$

$2(2t-2)-(-t-1)-(-t-2)=0$ より

$t=\frac{1}{6}$ より$\overrightarrow{AH}=\left(-\frac{5}{3},-\frac{7}{6},-\frac{13}{6}\right)$

$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AH}=\left(-\frac{10}{3},-\frac{7}{3},-\frac{13}{3}\right)$

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$　　　よって、$\boldsymbol{B\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)}$

例題 6）空間内に 3 点 $A(3,-1,4)$, $B(0,-2,-3)$, $C(8,4,7)$ がある。点 A から直線 BC に下ろした垂線を AH とするとき、点 H の座標を求めよ。

[解] H はBC 上の点より

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(8,6,10)$

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{BC}=(8t,6t-2,10t-3)$

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=(8t-3,6t-1,10t-7)$

$\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AH}$ より $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AH}=0$

$8(8t-3)+6(6t-1)+10(10t-7)=0$

$t=\dfrac{1}{2}$

よって　$\overrightarrow{OH}=(4,1,2)$

つまり　H の座標は$(\mathbf{4},\mathbf{1},\mathbf{2})$

［応用］４点 $A(2,-1,2),B(-3,5,0),C(1,1,0),D(-1,-2,0)$ を頂点とする四面体

$ABCD$ について、$z=t$ で切った断面積 $S(t)$ を求めよ。(ただし $0\leq t\leq 2$)

[解]

AB 上の点 P , AC 上の点 Q , AC 上の点 R とする

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+p\overrightarrow{AB}=(2,-1,2)+p(-5,6,-2)=(-5p+2,6p-1,-2p+2)$

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{AC}=(2,-1,2)+q(-1,2,-2)=(-q+2,2q-1,-2q+2)$

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA}+r\overrightarrow{AD}=(2,-1,2)+r(-3,-1,-2)=(-3r+2,-r-1,-2r-2)$

$z=t$ より

$-2p+2=t,-2q+2=t,-2r+2=t$ より

$p=q=r=\dfrac{2-t}{2}$

$z=t$ における P,Q,R の座標は

$P\left(\dfrac{5t-6}{2},-3t+5,t\right),Q\left(\dfrac{t+2}{2},-t+1,t\right),R\left(\dfrac{3t-2}{2},\dfrac{t-4}{2},t\right)$

始点を P として、ベクトルの面積公式を利用する $\Big(xy$ 平面上での計算$\Big)$

$\overrightarrow{PQ}=(-2t+4,2t-4)$

$\overrightarrow{PR}=\left(-t+2,\dfrac{7t-14}{2}\right)$

よって断面積 $S(t)$ は

$S(t)=\dfrac{1}{2}\left|(-2t+4)\times\dfrac{7t-14}{2}-(2t-4)\times(-t+2)\right|$

$\quad=\frac{1}{2}|-5t^2+20t+20|$

$0\leq t\leq 2$ において $-5t^2+20t+20\geq 0$ より

$\boldsymbol{S(t)=-\frac{5}{2}(t^2-4t-4)}$