応用問題[積分]

(例題 1)

放物線$y=x^2-2x-1$と原点を通る直線で囲まれた面積 S の最小値と

そのときの直線の方程式を求めよ。

[解]

y軸に平行な直線$x=0$だとすると、囲まれる部分ができないので不適

よって直線の傾きをmをすると、原点を通る直線は$y=mx$とかける

交点を求めると

$x^2-2x-1=mx$
$x^2-(m+2)x-1=0$

上記の方程式の解を$\alpha,\beta(\alpha<\beta)$とすると

解と係数の関係より

$\alpha+\beta=m+2,\alpha\beta=-1$より

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(m+2)^2+4$

求める面積 S は

$S=\int_\alpha^\beta(mx)-(x^2-2x-1)\,dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\{(m+2)^2+4\}^{\frac{3}{2}}$

したがって、S の最小値は$m=-2$のとき、$\frac{4}{3}$をとる

まとめると

最小値$\frac{4}{3}$ 直線の方程式は$y=-2x$

（演習 1）p159 **6**

[解]

y 軸に平行な直線 $x = 1$ だとすると、囲まれる部分ができないので不適

よって直線の傾きを m をすると、$(1, 2)$ を通る直線は $y = m(x-1)+2$ とかける

交点を求めると

$x^2 = m(x-1)+2$
$x^2 - mx + m - 2 = 0$

上記の方程式の解を $\alpha, \beta(\alpha < \beta)$ とすると

解と係数の関係より

$\alpha + \beta = m, \alpha\beta = m - 2$ より

$(\beta-\alpha)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = m^2 - 4(m-2) = (m-2)^2 + 4$

求める面積 S は

$S = \int_\alpha^\beta \{m(x-1)+2\} - x^2\,dx = -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

$\quad = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{6}\{(m-2)^2+4\}^{\frac{3}{2}}$

したがって、S の最小値は $m = 2$ のとき、$\frac{4}{3}$ をとる

まとめると

最小値 $\frac{4}{3}$　直線の方程式は $y = 2x$

(補充 1)

放物線 $y = x^2 - 6$ と $(1\,, -1)$ を通る直線で囲まれた面積 S の最小値とそのときの直線の方程式を求めよ。

[解]

y 軸に平行な直線 $x = 1$ だとすると、囲まれる部分ができないので不適

よって直線の傾きを m をすると、$(1\,, -1)$ を通る直線は $y = m(x-1) - 1$ とかける

交点を求めると

$$x^2 - 6 = m(x-1) - 1$$
$$x^2 - mx + m - 5 = 0$$

上記の方程式の解を $\alpha\,, \beta(\alpha < \beta)$ とすると

解と係数の関係より

$\alpha + \beta = m\,, \alpha\beta = m - 4$ より

$$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = m^2 - 4(m-5) = (m-2)^2 + 16$$

求める面積 S は

$$S = \int_\alpha^\beta \{m(x-1) - 1\} - (x^2 - 6)\,dx = -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6}\{(m-2)^2 + 16\}^{\frac{3}{2}}$$

したがって、S の最小値は $m = 2$ のとき、$\frac{32}{3}$ をとる

まとめると

最小値 $\boldsymbol{\frac{32}{3}}$　直線の方程式は $\boldsymbol{y = 2x - 3}$

(例題 2)

放物線 $y = x^2 + x - 2$ と x 軸で囲まれた部分の面積を、$(1\,,0)$ を通る直線で 2 等分する。このとき直線の方程式を求めよ。

[解]

y 軸に平行な直線 $x = 1$ だとすると、領域を 2 つに分割できないので不適

よって直線の傾きを m とすると、$(1\,,0)$ を通る直線は $y = m(x-1)$ とかける

$y = x^2 + x - 2$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S_1 は

$S_1 = \int_{-2}^{1} -(x^2 + x - 2)\,dx = \frac{1}{6}\{1-(-2)\}^3 = \frac{9}{2}$

直線と放物線で囲まれる面積 S_2 とすると

2 つの交点は $x = 1\,, m-2$ より

$S_2 = \int_{m-2}^{1} \{m(x-2)\} - (x^2 + x - 2)\,dx = \frac{1}{6}\{1-(m-2)\}^3 = \frac{1}{6}(3-m)^3$

$S_1 = 2S_2$ より

$\frac{9}{2} = 2 \cdot \frac{1}{6}(3-m)^3$

$(3-m)^3 = \frac{27}{2}$

$3 - m = \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$

$m = 3 - \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$

したがって、求める直線の方程式は

$\boldsymbol{y = \left(3 - \frac{3}{\sqrt[3]{2}}\right)(x-1)}$

(演習 2)

放物線 $y = x^2 - x$ と x 軸で囲まれた部分の面積を、原点を通る直線で 2 等分する。このとき直線の方程式を求めよ。

[解]

y 軸に平行な直線 $x = 0$ だとすると、領域を 2 つに分割できないので不適

よって直線の傾きを m とすると、原点を通る直線は $y = mx$ とかける

$y = x^2 - x$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S_1 は

$S_1 = \int_0^1 -(x^2 - x)\,dx = \frac{1}{6}(1-0)^3 = \frac{1}{6}$

直線と放物線で囲まれる面積 S_2 とすると

2 つの交点は $x = 0\,, m+1$ より

$S_2 = \int_0^{m+1} mx - (x^2 - x)\,dx = \frac{1}{6}\{(m+1)-0\}^3 = \frac{1}{6}(m+1)^3$

$S_1 = 2S_2$ より

$\frac{1}{6} = 2 \cdot \frac{1}{6}(m+1)^3$
$(m+1)^3 = 2$
$m + 1 = \sqrt[3]{2}$
$m = \sqrt[3]{2} - 1$

したがって、求める直線の方程式は

$\boldsymbol{y = (\sqrt[3]{2} - 1)x}$

（補充 2）

放物線 $y = x(5-x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積が、放物線 $y = ax^2$ によって 2 等分されるとき、定数 a の値を求めよ。

[解]

$y = x(5-x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S_1 は

$S_1 = \int_0^5 x(5-x)\,dx = \frac{1}{6}(5-0)^3 = \frac{125}{6}$

2 つの放物線で囲まれる面積 S_2 とすると

2 つの交点は $x = 0\,, \frac{5}{a+1}$ より

$S_2 = \int_0^{\frac{5}{a+1}} \{x(5-x)\} - ax^2\,dx = \frac{a+1}{6}\left(\frac{5}{a+1} - 0\right)^3 = \frac{125}{6(a+1)^2}$

$S_1 = 2S_2$ より

$\frac{125}{6} = 2 \cdot \frac{1}{6}\frac{125}{(a+1)^2}$

$(a+1)^2 = 2$

$a + 1 = \pm\sqrt{2}$

$a = \pm\sqrt{2} - 1$

ここで

$0 < \frac{5}{a+1} < 5$ より $0 < a$

この範囲を考慮すると

求める答えは

$\boldsymbol{a = \sqrt{2} - 1}$