부울대수

02 불 대수

- 기본적인 불 대수식은 AND, OR, NOT을 이용하여 표현
- AND식은 곱셈의 형식으로 표현하고, OR 식은 덧셈의 형식으로 표현
- NOT식은 $\overline{A}$ 또는 A' 로 표현
- 완전한 논리식은 입력 항목들의 상태에 따른 출력을 결정하는 식

A=0 and B=1 일 때 출력을 1로 만들려는 경우 출력 논리식	$F = \overline{A}B$
A=0 or B=1 일 때 출력을 1로 만들려는 경우 출력 논리식	$F = \overline{A} + B$
(A=0 and B=1) or (A=1 and B=0) 일 때 출력을 1로 만들려는 경우 출력 논리식	$F = \overline{A}B + A\overline{B}$

02 불 대수

1 불 대수 법칙

- 불 대수의 모든 항은 0 또는 1을 갖는다.
- [표 3-1]은 증명 없이 사용하기로 한 AND와 OR의 불 대수 공리다.

표 3-1 불 대수 공리

P1	$A=0$ 또는 $A=1$
P2	$0 \cdot 0=0$
P3	$1 \cdot 1=1$
P4	$0+0=0$
P5	$1+1=1$
P6	$1 \cdot 0=0 \cdot 1=0$
P7	$1+0=0+1=1$

02 불 대수

표 3-2 불 대수의 기본 법칙

항등 · 누승 · 보간 · 이중 부정 법칙

❶ $A+0=0+A=A$	❷ $A \cdot 1=1 \cdot A=A$	
❸ $A+1=1+A=1$	❹ $A \cdot 0=0 \cdot A=0$	
❺ $A+A=A$	❻ $A \cdot A=A$	
❼ $A+\overline{A}=1$	❽ $A \cdot \overline{A}=0$	❾ $\overline{\overline{A}}=A$

쌍대성duality

불 대수 공리나 기본 법칙에서 좌우 한 쌍에서 0과 1을 서로 바꾸고 ·과 +도 서로 바꾸면 다른 한쪽이 얻어지는 성질이다. 한쪽을 다른 쪽의 쌍대dual라고 한다. 예를 들어 ❶과 ❷는 쌍대성이 성립하며 ❸과 ❹, ❺와 ❻, ❼과 ❽도 마찬가지다.

교환 법칙commutative law

⑩ $A+B=B+A$

⑪ $A \cdot B=B \cdot A$

결합 법칙associate law

⑫ $(A+B)+C=A+(B+C)$

⑬ $(A \cdot B) \cdot C=A \cdot (B \cdot C)$

분배 법칙distributive law

⑭ $A \cdot (B+C)=A \cdot B+A \cdot C$

⑮ $A+B \cdot C=(A+B) \cdot (A+C)$

02 불 대수

드모르간의 정리De Morgan's theorem

⑯ $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$

⑰ $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$

흡수 법칙absorptive law

⑱ $A+A\cdot B=A$

⑲ $A\cdot(A+B)=A$

합의合意의 정리consensus theorem

⑳ $AB+BC+\overline{A}C=AB+\overline{A}C$

㉑ $(A+B)(B+C)(\overline{A}+C)=(A+B)(\overline{A}+C)$

$AB+BC+\overline{A}C=AB+\overline{A}C$ 의 증명

좌변을 다시 작성하면

$$AB+BC+\overline{A}C=AB+\overline{A}C+(A+\overline{A})BC$$
$$=AB+\overline{A}C+ABC+\overline{A}BC$$
$$=AB(1+C)+\overline{A}C(1+B)$$
$$=AB+\overline{A}C$$

❖ 진리표를 이용한 분배법칙 $A+BC=(A+B)(A+C)$의 증명

표 3-3 진리표를 이용한 분배 법칙 $A+B\cdot C=(A+B)\cdot(A+C)$의 증명

A B C	좌변식		우변식		
	$B\cdot C$	$A+B\cdot C$	$A+B$	$A+C$	$(A+B)\cdot(A+C)$
0 0 0	0	0	0	0	0
0 0 1	0	0	0	1	0
0 1 0	0	0	1	0	0
0 1 1	1	1	1	1	1
1 0 0	0	1	1	1	1
1 0 1	0	1	1	1	1
1 1 0	0	1	1	1	1
1 1 1	1	1	1	1	1

동일한 결과

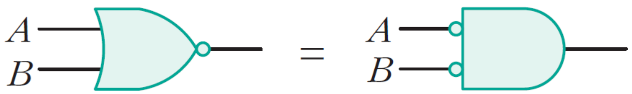
❖ 진리표를 이용한 드모르간의 정리 증명

표 3-4 진리표를 이용한 드모르간의 정리 $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$의 증명

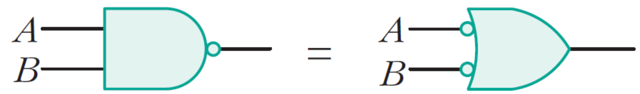
A	B	$A+B$	좌변식 $\overline{A+B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	우변식 $\overline{A}\cdot\overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

동일한 결과

- 드모르간의 정리는 논리 게이트로 표현할 수 있고 항이 많아도 동일하게 적용할 수 있다.



(a) 드모르간의 정리 ⑯ $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$



(b) 드모르간의 정리 ⑰ $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$

$$\overline{A+B+C}=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$$

$$\overline{A\cdot B\cdot C}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$$

(c) 3변수인 경우

$$\overline{A+B+C+D}=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$$

$$\overline{A\cdot B\cdot C\cdot D}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$$

(d) 4변수인 경우

그림 3-16 드모르간의 정리를 논리 게이트로 표현한 논리 기호와 일반식

2 불 대수식의 표현 형태

❑ 곱의 합과 최소항

- **곱의 합**(SOP, Sum Of Product)은 1단계인 입력이 AND항(곱의 항)으로 구성되고, 2단계인 출력이 OR항(합의 항)으로 만들어진 논리식이다.

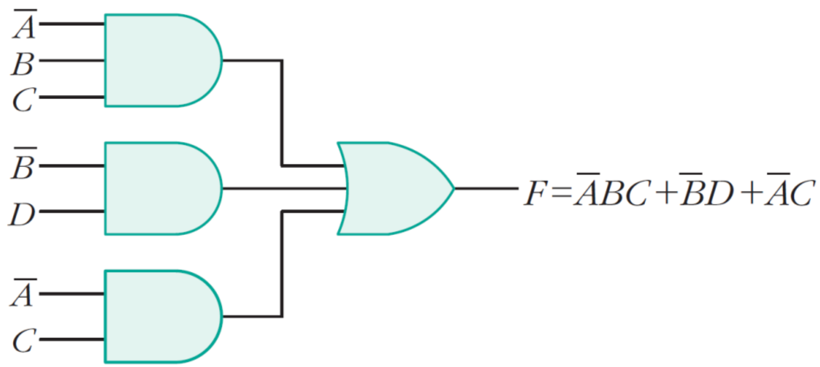


그림 3-17 $F=\overline{A}BC+\overline{B}D+\overline{A}C$의 회로도

❖ 최소항

- **최소항**(minterm)은 입력 변수를 모두 포함하는 AND항이다.
- 최소항은 입력이 0이면 입력 변수의 부정을 쓰고, 입력이 1이면 입력 변수를 그대로 쓴 후 AND로 결합한다.
- 예를 들어 입력 변수가 A, B일 때 만들 수 있는 최소항은 $\overline{A}\overline{B}$, $\overline{A}B$, $A\overline{B}$, AB 다.

표 3-5 최소항 표현 방법

(a) 2변수 최소항

A	B	최소항	기호
0	0	$\overline{A}\overline{B}$	m_0
0	1	$\overline{A}B$	m_1
1	0	$A\overline{B}$	m_2
1	1	AB	m_3

(b) 3변수 최소항

A	B	C	최소항	기호
0	0	0	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	m_0
0	0	1	$\overline{A}\overline{B}C$	m_1
0	1	0	$\overline{A}B\overline{C}$	m_2
0	1	1	$\overline{A}BC$	m_3
1	0	0	$A\overline{B}\overline{C}$	m_4
1	0	1	$A\overline{B}C$	m_5
1	1	0	$AB\overline{C}$	m_6
1	1	1	ABC	m_7

02 불 대수

❖ 최소항 식

- 최소항 식은 출력이 1이 되는 항의 입력 변수를 AND 연산하고, 각 항을 OR 연산하는 식이다.

A B C	F	최소항	기호
0 0 0	1	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	m_0
0 0 1	1	$\overline{A}\,\overline{B}C$	m_1
0 1 0	0	$\overline{A}B\overline{C}$	m_2
0 1 1	1	$\overline{A}BC$	m_3
1 0 0	0	$A\overline{B}\,\overline{C}$	m_4
1 0 1	1	$A\overline{B}C$	m_5
1 1 0	0	$AB\overline{C}$	m_6
1 1 1	1	ABC	m_7

(a) 진리표

$$
\begin{aligned}
F(A, B, C) &= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}C + ABC \\
&= m_0 + m_1 + m_3 + m_5 + m_7 \\
&= \sum m(0, 1, 3, 5, 7)
\end{aligned}
$$

(b) 최소항 식

그림 3-18 $F(A,B,C)=\Sigma\, m(0,1,3,5,7)$의 진리표와 최소항 식

❑ 합의 곱과 최대항

- **합의 곱**(POS, Product Of Sum)은 1단계인 입력이 OR항(합의 항)으로 구성되고, 2단계인 출력이 AND항(곱의 항)으로 만들어진 논리식이다.

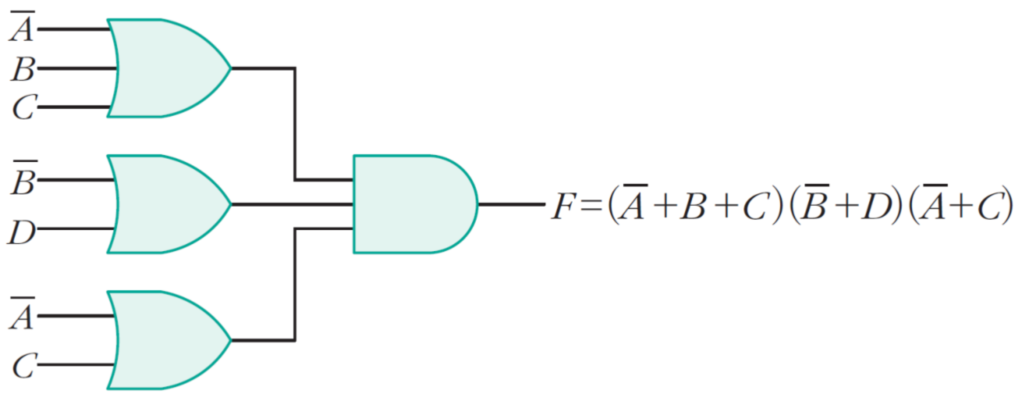


그림 3-19 $F=(\overline{A}+B+C)(\overline{B}+D)(\overline{A}+C)$의 회로도

02 불 대수

❖ 최대항

- 최대항(maxterm)은 입력 변수를 모두 포함하는 OR항이다.
- 최대항은 입력이 0이면 입력 변수를 그대로 쓰고, 입력이 1이면 입력 변수의 부정을 쓴 후 OR로 결합한다.
- 예를 들어 논리 변수가 A, B일 때 만들 수 있는 최대항은 $(A+B)$, $(A+\overline{B})$, $(\overline{A}+B)$, $(\overline{A}+\overline{B})$ 다.

표 3-6 최대항 표현 방법

(a) 2변수 최대항

A	B	최대항	기호
0	0	$A+B$	M_0
0	1	$A+\overline{B}$	M_1
1	0	$\overline{A}+B$	M_2
1	1	$\overline{A}+\overline{B}$	M_3

(b) 3변수 최대항

A	B	C	최대항	기호
0	0	0	$A+B+C$	M_0
0	0	1	$A+B+\overline{C}$	M_1
0	1	0	$A+\overline{B}+C$	M_2
0	1	1	$A+\overline{B}+\overline{C}$	M_3
1	0	0	$\overline{A}+B+C$	M_4
1	0	1	$\overline{A}+B+\overline{C}$	M_5
1	1	0	$\overline{A}+\overline{B}+C$	M_6
1	1	1	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	M_7

❖ 최대항 식

- 최대항 식은 출력이 0이 되는 항의 입력 변수를 OR 연산하고, 각 항을 AND 연산하는 식이다.

A B C	F	최대항	기호
0 0 0	0	$A+B+C$	M_0
0 0 1	0	$A+B+\overline{C}$	M_1
0 1 0	1	$A+\overline{B}+C$	M_2
0 1 1	0	$A+\overline{B}+\overline{C}$	M_3
1 0 0	1	$\overline{A}+B+C$	M_4
1 0 1	0	$\overline{A}+B+\overline{C}$	M_5
1 1 0	1	$\overline{A}+\overline{B}+C$	M_6
1 1 1	0	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	M_7

(a) 진리표

$$F(A, B, C) = (A+B+C)(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$
$$= M_0 \cdot M_1 \cdot M_3 \cdot M_5 \cdot M_7$$
$$= \prod M(0, 1, 3, 5, 7)$$

(b) 최대항 식

그림 3-20 $F(A, B, C) = \prod M(0, 1, 3, 5, 7)$의 진리표와 최대항 식

❑ 최소항과 최대항의 관계

- 최소항 식은 출력이 1인 항을 곱의 합(SOP)으로 나타낸 것이고, 최대항 식은 출력이 0인 항을 합의 곱(POS)으로 나타낸 것이다.
- 따라서 최소항과 최대항은 서로 보수의 성질을 띤다고 할 수 있다.

표 3-7 3변수 최소항과 최대항의 관계

A	B	C	F	최소항	기호	최대항	기호	관계
0	0	0	0	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	m_0	$A+B+C$	M_0	$M_0=\overline{m_0}$
0	0	1	1	$\overline{A}\overline{B}C$	m_1	$A+B+\overline{C}$	M_1	$M_1=\overline{m_1}$
0	1	0	1	$\overline{A}B\overline{C}$	m_2	$A+\overline{B}+C$	M_2	$M_2=\overline{m_2}$
0	1	1	1	$\overline{A}BC$	m_3	$A+\overline{B}+\overline{C}$	M_3	$M_3=\overline{m_3}$
1	0	0	1	$A\overline{B}\overline{C}$	m_4	$\overline{A}+B+C$	M_4	$M_4=\overline{m_4}$
1	0	1	1	$A\overline{B}C$	m_5	$\overline{A}+B+\overline{C}$	M_5	$M_5=\overline{m_5}$
1	1	0	0	$AB\overline{C}$	m_6	$\overline{A}+\overline{B}+C$	M_6	$M_6=\overline{m_6}$
1	1	1	0	ABC	m_7	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	M_7	$M_7=\overline{m_7}$

수고하셨습니다!