同次座標変換

人類文明継続装置
輪廻 ヒロ

監修: 矢口 裕明
(博士(情報理工学))

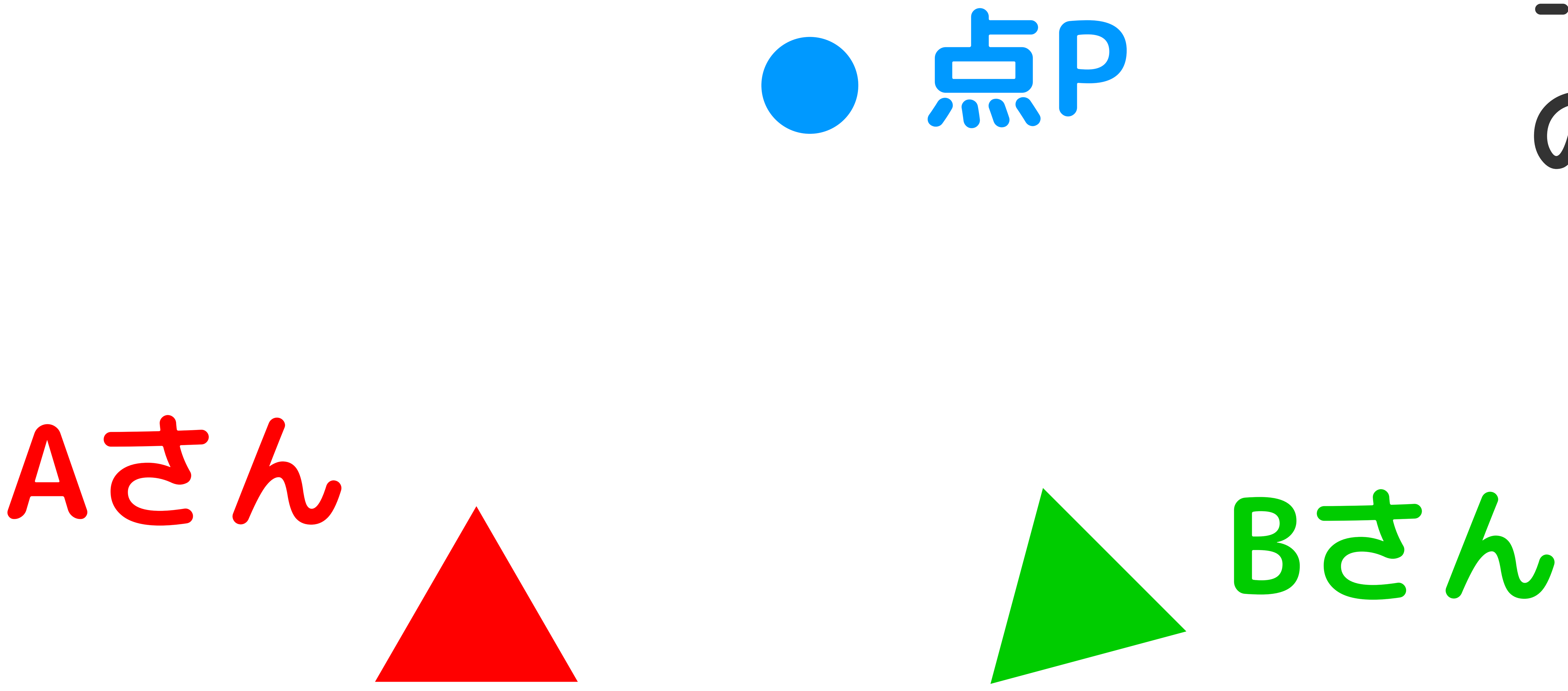
諸注意

理系大学一年相当の線形代数の知識が必要です。
この講義では、右手座標系、列ベクトルを使います。

参考文献(引用ではありません):

- 吉川恒夫、「ロボット制御基礎論」、コロナ社、1988。
- Fletcher Dunn, Ian Parberry, 松田晃一(訳)、「実例で学ぶゲーム3D数学」、オライリージャパン、2008。

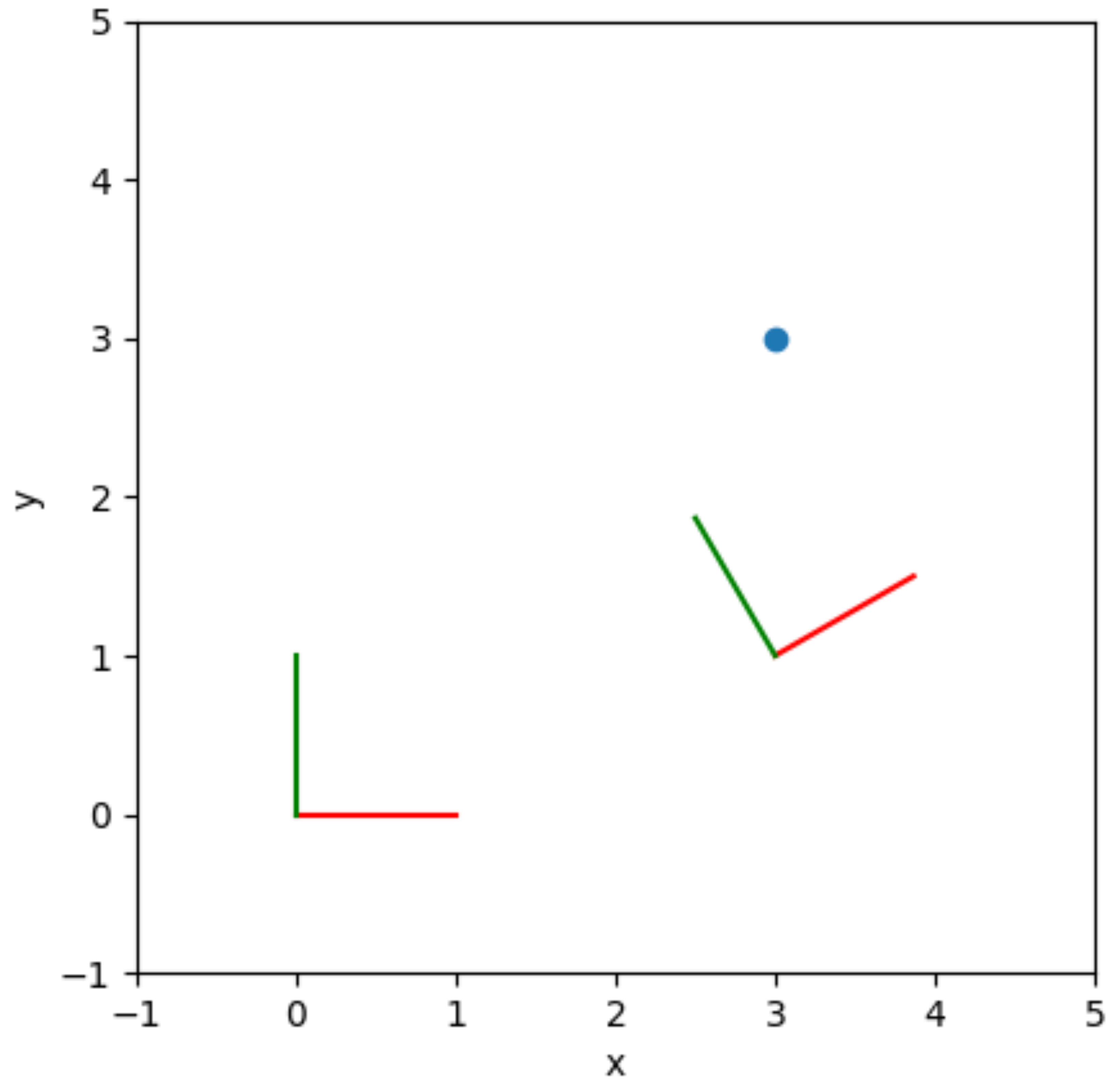
例題



- AさんとBさんの相対姿勢
- Aさんからみた点P
- Bさんからみた点P

の関係はどうなる？

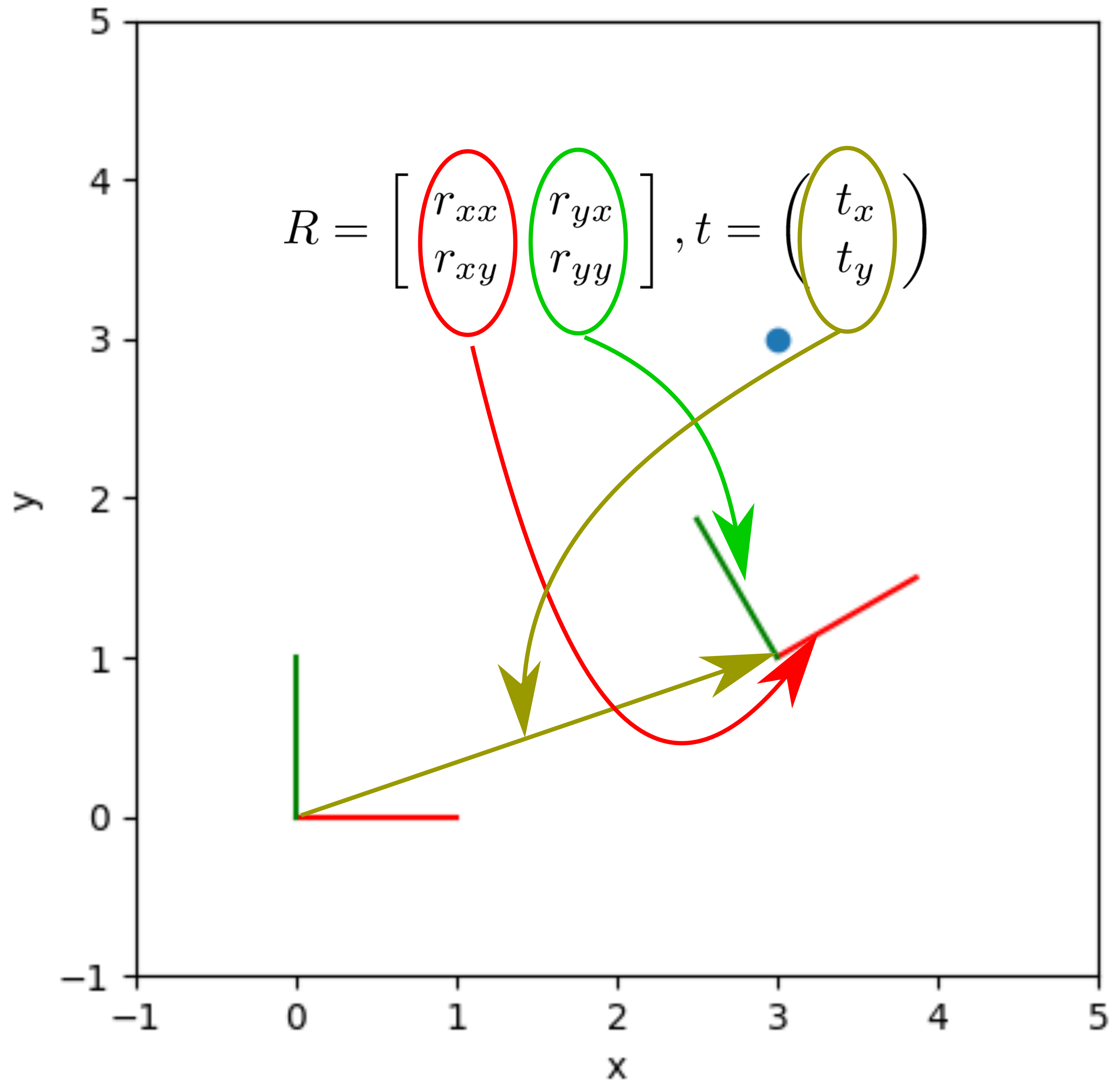
座標系(2D)



AさんとBさんは
それぞれ座標をもつ。
AさんとBさんの相対姿勢は、
- x,y軸方向への並進
- 回転θ
で表すことができる。
Aさん、Bさんからみた点Pは
それぞれの座標内の位置で表される。

回転行列と並進ベクトル

AさんとBさんの関係を以下のように表す。

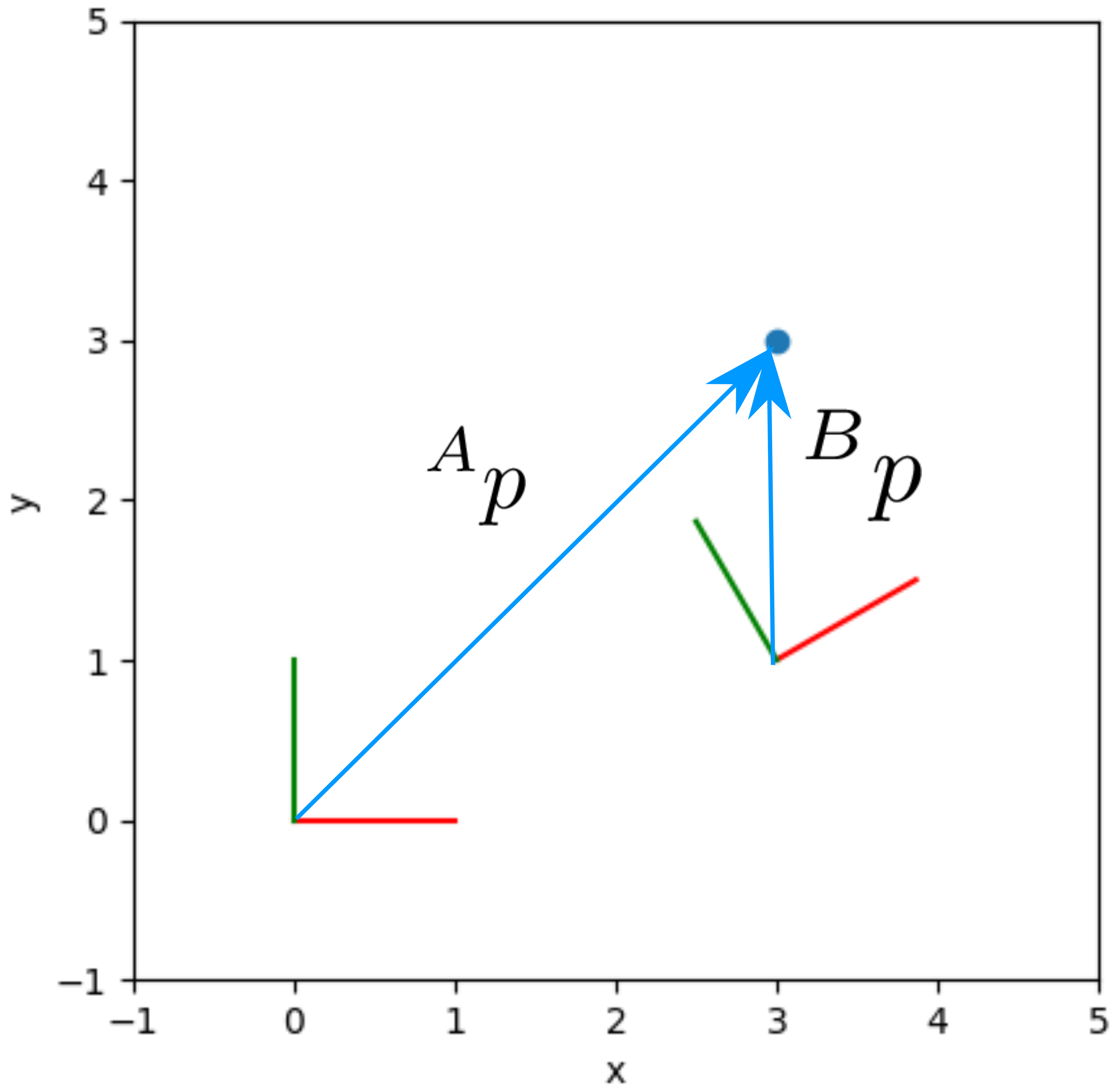


$$R = \begin{bmatrix} r_{xx} & r_{yx} \\ r_{xy} & r_{yy} \end{bmatrix}, t = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

回転行列　　並進ベクトル

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

相対位置と座標の関係



$$^{A}p = {}^{A}t_{B} + {}^{A}R_{B}{}^{B}p$$

「誰から見て」を左上に、
「誰を見て」を右下に書く。

同次表現

位置ベクトルの末尾に1を、
方向ベクトルの末尾に0を
付け加えてn+1次元ベクトルにする。

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

同次座標変換行列

$$T = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

これを使うとさっきの式は行列とベクトルの掛け算になる。

$${}^{A}p = {}^{A}T_{B}\,{}^{B}p$$

同次座標変換行列の性質

- 回転と並進を行列の掛け算で表現できる。
- 恒等変換(同じ姿勢)は、単位行列。
- 逆変換(見る側と見られる側を入れ替え)は、逆行列。
- 合成が掛け算で求められるのでチェインが作りやすい。
- 冗長表現(自由度に対して変数が多すぎる)

$$ {}^{B}T_{A} = \left({}^{A}T_{B}\right)^{-1} \qquad {}^{0}T_{3} = {}^{0}T_{1}\,{}^{1}T_{2}\,{}^{2}T_{3} $$

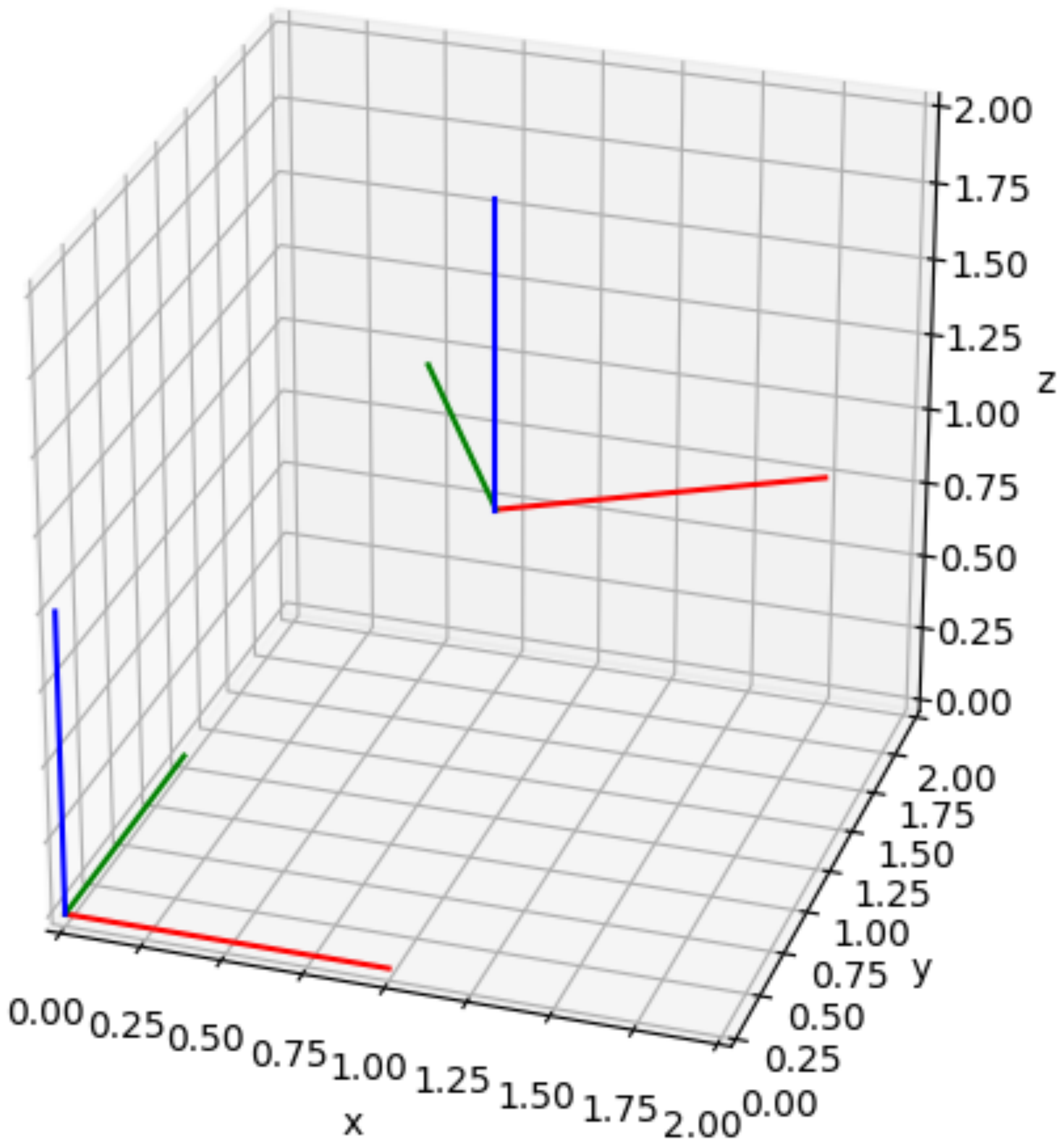
同次座標変換行列の逆変換

同次座標変換行列の逆変換=逆行列は以下のようになる。

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

※Rは正規直交基底で、逆行列=転置行列。
Rの行列式は1となる。

座標系(3D)



三次元空間内の相対姿勢は、
- x,y,z軸方向への並進
- x,y,z軸周りの回転θ,φ,ψ

で表すことができる。

回転行列と並進ベクトル(3D)

回転行列　　並進ベクトル

$$R = \begin{bmatrix} r_{xx} & r_{yx} & r_{zx} \\ r_{xy} & r_{yy} & r_{zy} \\ r_{xz} & r_{yz} & r_{zz} \end{bmatrix}, t = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix}$$

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_y(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三次元回転は厄介

軸回りに回転させる場合、
軸の順番が何通りか取れてしまう(Euler,RPYなど)。
順番に回転させる場合はジンバルロックといって、
回転軸が揃って自由度が落ちるときがある。
クォータニオン(四元数)という表現があるが、
今回は説明しません！

同次座標変換の使われ方

ロボットのモデル表現、剛体の運動表現、CG分野など。
オレ達VTuberの体もこれで動いている！

アフィン変換との関係

左上3x3の行列が正規直交基底の場合、回転行列。
この場合は剛体として扱うことになる。
ここに拡大縮小変形とせん断変形を加えたものがアフィン変換。
この場合、左上3x3の行列は正規直交基底とは限らない。

補足:オレの知ってる行列表現と違う?

同次座標変換行列: Homogeneous Transformation Matrix
この資料ではTを使ってますが、
文献によりH,Mを使っていることもあります。
(Hはハミルトニアンと混同しやすい、
Tは転置と見間違えやすい、
Mは自然数の意味でNの次によく使われる…と、
ぶっちゃけどれもイマイチな気がする。)

ライセンスについて

フォントライセンス
- Rounded M+: M+ FONTS LICENSE
- Computer Modern: SIL Open Font License