順運動学と逆運動学

人類文明継続装置
輪廻 ヒロ

監修: 矢口 裕明
(博士(情報理工学))

注意事項

- 理系大学で学ぶ程度の数学知識を必要とします。
  - 線形代数は必須！
- この資料では右手座標、列ベクトルを使います。
- 同次座標変換の話はアーカイブも見てね！

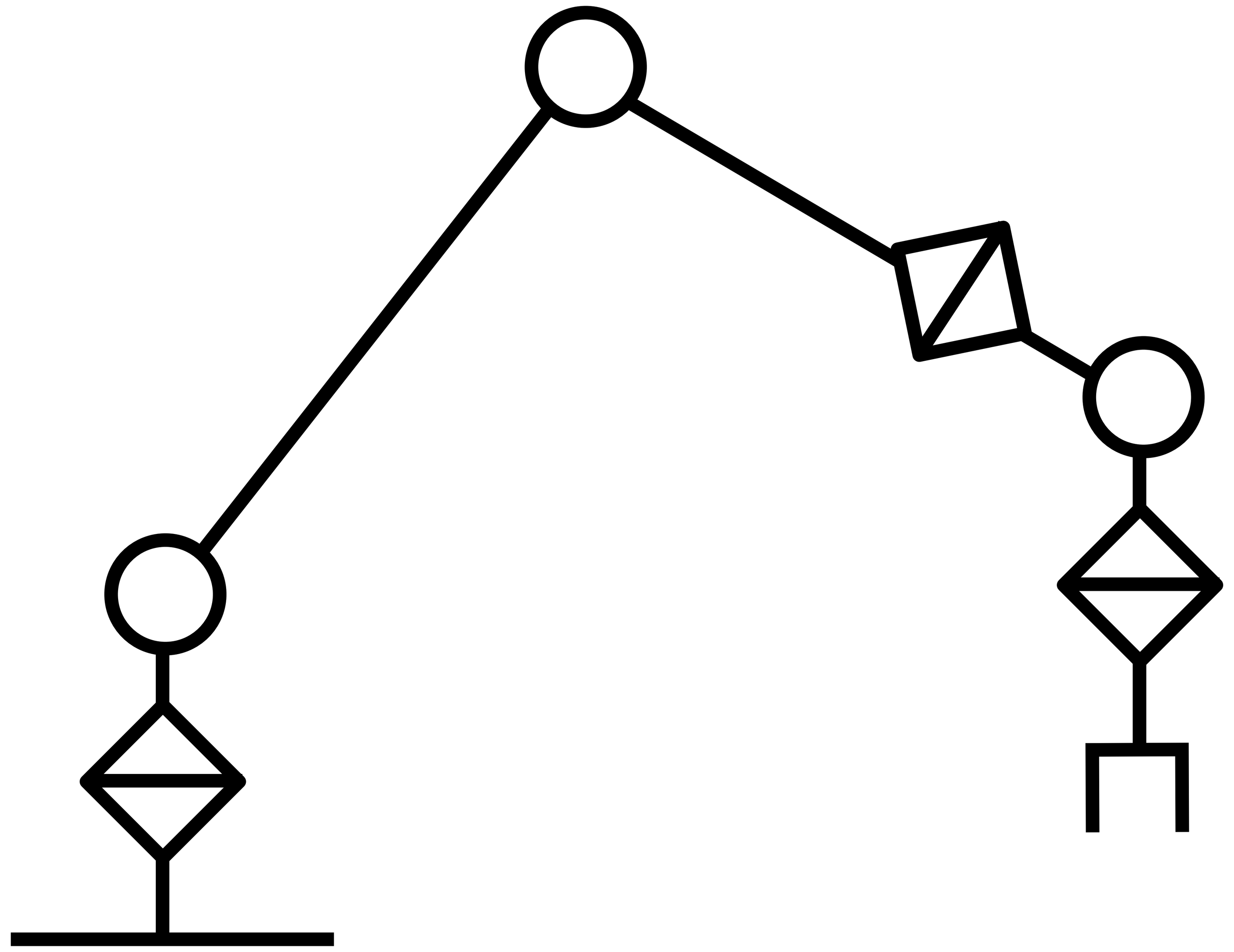
同次座標変換のおさらい

座標系の並進と回転を一つの行列で表現できる。
行列の掛け算を重ねることで座標をチェインできる。

$$ {}^{0}T_3 = {}^{0}T_1 \, {}^{1}T_2 \, {}^{2}T_3 $$

ロボットアームの表現

ロボットアームの各関節に座標を割り当てて、
同次座標変換で表現してみよう。



Denavit-Hartenberg(DH)記法

ロボットの関節配置を記述するためのルールのひとつ
- z軸が関節軸(回転の場合は回転軸、並進の場合は並進軸)
- x軸が次の関節軸との共通垂線

として関節座標系を以下のように配置。

並進関節の移動量

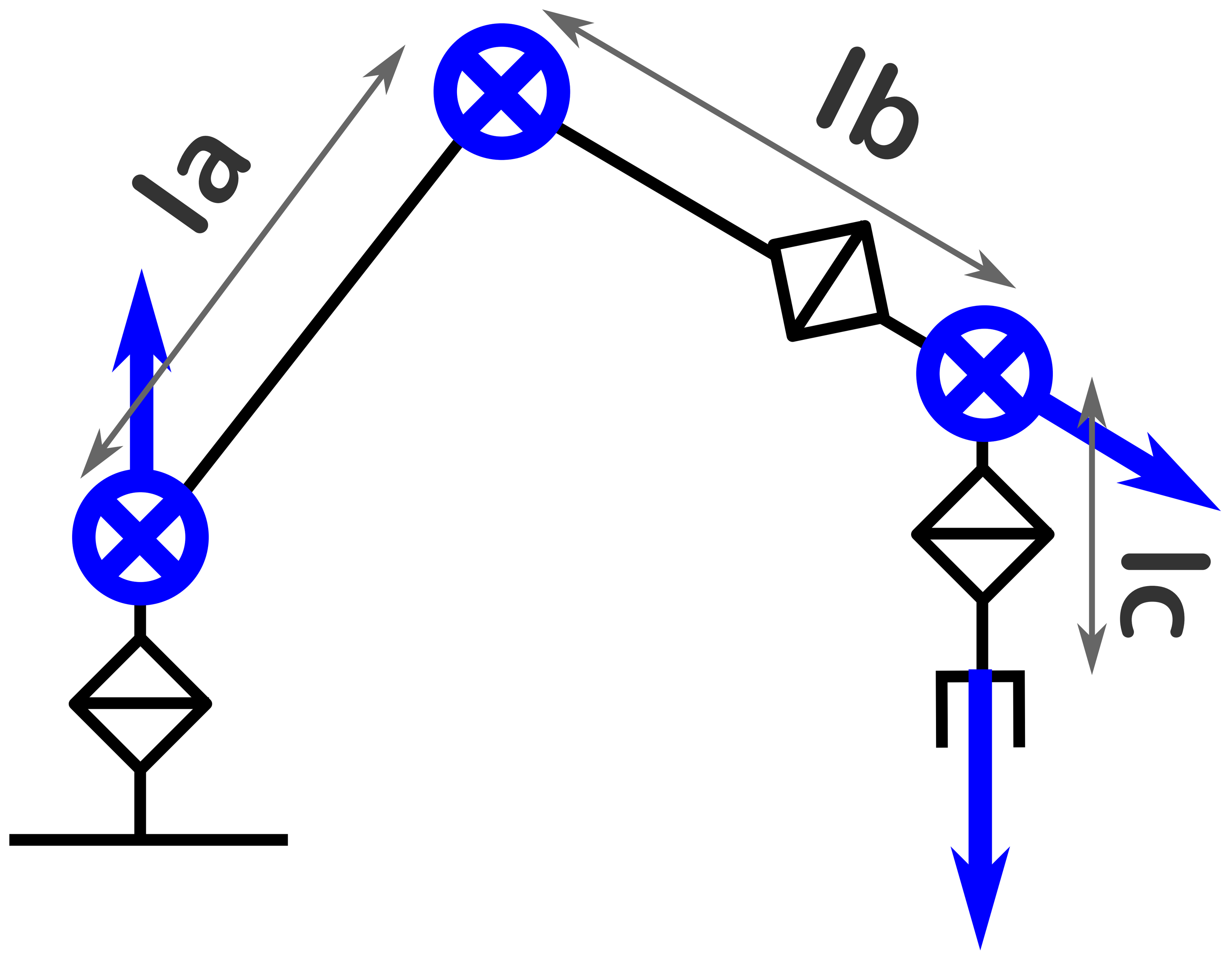
$$ {}^{i-1}T_i = TransX(a_i)RotX(\alpha_i)TransZ(d_i)RotZ(\theta_i) $$

回転関節の角度

※DH記法が必ず使われているわけではありません。
ただしz軸を駆動軸に持ってくるのは一般的です。

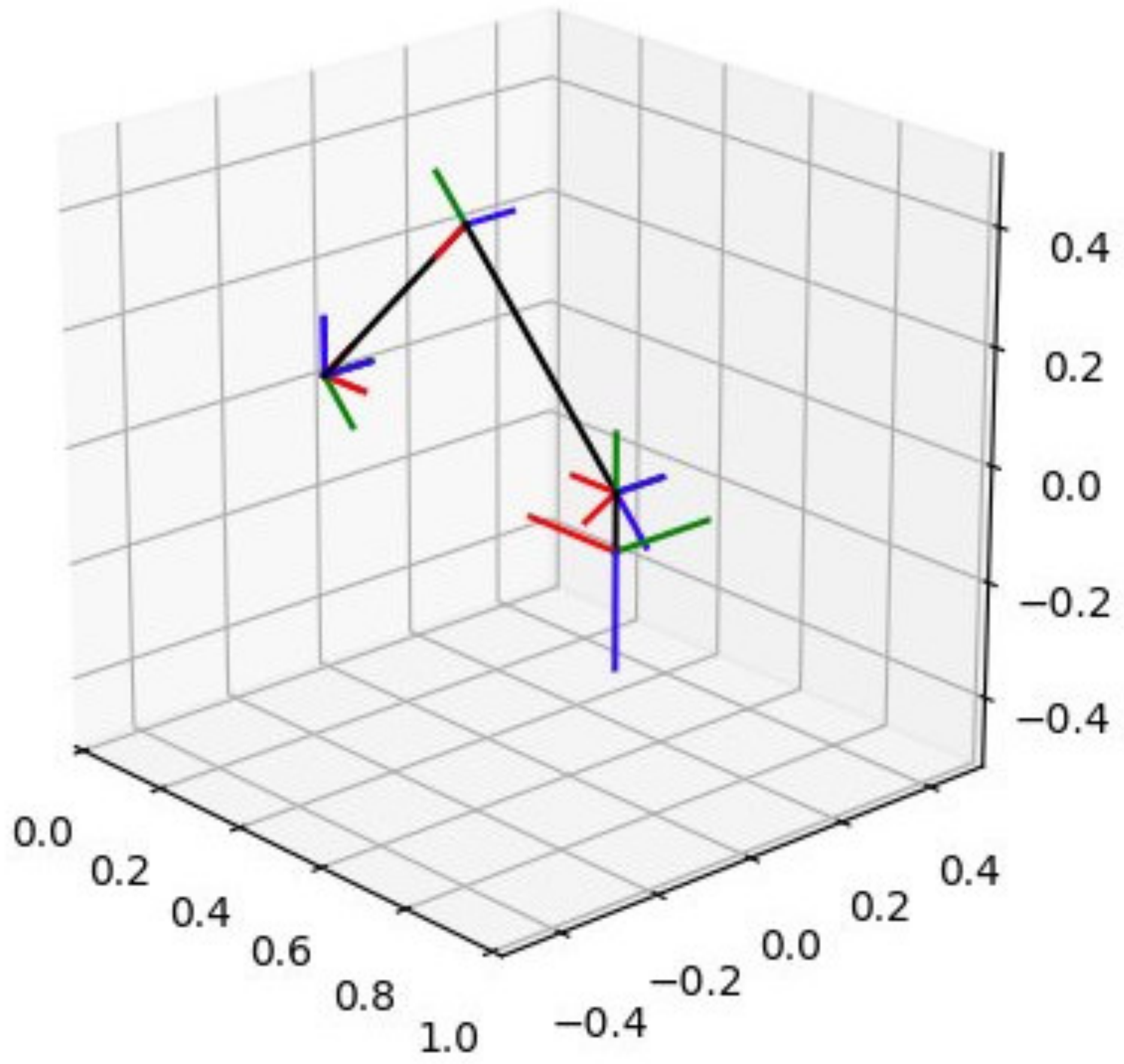
DH記法でロボットアーム

DH記法でさっきのロボットアームを表現してみよう。



	a	α	d	θ
1	0	0	0	q_1
2	0	-90	0	q_2
3	l_a	0	0	q_3
4	0	90	l_b	q_4
5	0	-90	0	q_5
6	0	90	l_c	q_6

DHパラメータ



q=(0,-45,-90,0,45,0)^T

※物理的な配置の中心が原点となるわけでは必ずしもない。
たとえば関節の軸は一致するがその中心が原点になるわけではない。

順運動学 (FK: Forward Kinematics)

関節変位列qを与えた時の手先姿勢(位置+回転)p

$$p = F(q)$$

これは同次座標変換で簡単に求めることができる。

逆運動学 (IK: Inverse Kinematics)

手先姿勢pを与えた時の関節変位列q

$$q = F^{-1}(p)$$

この問題は極めて難しい。

IKは極めて難しい

解析解の存在する条件が極めて限定的

自由度(駆動関節数)が6の場合、
解ける場合もあるが重解が複数ある。

自由度が5以下の場合、
空間の自由度を満たさないので
そもそもほぼ到達できない。

自由度が7以上の場合(冗長)、
空間の自由度に対し関節自由度が多い。
解は無数に存在する。

自由度に関わらず、
解の存在しうる範囲が狭い。
ロボットの関節配置とリンク長さ

なので、数値解を計算的に求めるのが常套手段。

逆運動学の式を微分すると

位置の微分=速度
手先速度pdotを与えた時の関節速度列qdot

$$\dot{p} = \frac{\partial}{\partial q} F(q) \dot{q}$$

ヤコビアン、
ヤコビ行列
(Jacobian)

$$= \boxed{J(q)} \dot{q}$$

$$\dot{q} = J^{-1}(q) \dot{p}$$

反復法で解く逆運動学

$$p_k \leftarrow F(q_k)$$

ヤコビアンの逆変換？

2つの姿勢の差分？

$$q_{k+1} \leftarrow q_k + \boxed{J^{-1}(q_k)}\boxed{(p_e - p_k)}$$

$$while \quad ||p_e - p_k|| > \zeta$$

つまり、手先を目標姿勢peに向かって引っ張った時の
各関節の速度を算出して足してあげる。

姿勢の差分とは？

$$diff(t_{dst}, t_{src}) = t_{dst} - t_{src}$$

$$diff(R_{dst}, R_{src}) = R_{dst} R_{src}^T ?$$

位置は2つのベクトルの差で表現できる。
回転はどのように差を取ればいい？
回転行列？オイラー角？クォータニオン？

ロドリゲスの公式(Axis Angle)

回転行列を R、回転角度を ω、回転軸を l とする。

$$R = \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$$

Rが非対角行列

$$r_{00} + r_{11} + r_{22} = 1 + 2\cos\omega$$

$$\begin{pmatrix} r_{12} - r_{21} \\ r_{20} - r_{02} \\ r_{01} - r_{10} \end{pmatrix} = -2\sin\omega l$$

Rが単位行列

$$\omega l = 0$$

Rが対角行列(not単位行列)

$$\omega = \pi$$

$$l = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + r_{00} \\ 1 + r_{11} \\ 1 + r_{22} \end{pmatrix}$$

角度の差分の表現は

$$diff(R_{dst}, R_{src}) = \omega l \ \ of \ \ (R_{dst} R_{src}^T)$$

つまり、2つの座標間の回転行列の、回転軸x角度を差分とする。

基礎ヤコビアン

[Khatib,1987]

$$J = [J_1 \quad J_2 \quad \cdots J_n]$$

$$J_i = (v_i^T \quad \omega_i^T)^T$$ 微分=速度角速度

$$v_i = \begin{cases} Rz_i \times (t_n - t_i) & (\text{回転関節}) \\ Rz_i & (\text{並進関節}) \end{cases}$$

$$\omega_i = \begin{cases} Rz_i & (\text{回転関節}) \\ 0 & (\text{並進関節}) \end{cases}$$

駆動軸

Rz_i : ${}^0T_i$の回転行列の z 軸

t_i : ${}^0T_i$の並進ベクトル

ヤコビアンを求める場合、
普通に偏微分でも求められるが
基礎ヤコビアンを使うと
現在姿勢付近の近似値が
FK一回解いただけで求められる。

ヤコビアンの逆変換とは

$$J^{-1}(q) \neq J(q)^{-1}$$

ヤコビアンの逆変換

ヤコビアンの逆行列？？？

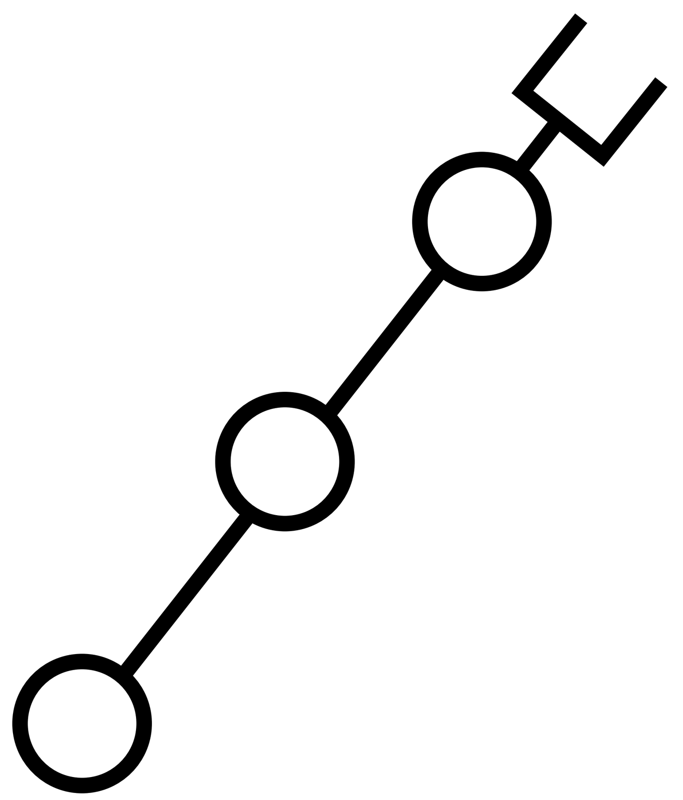
ヤコビアンのサイズは、
空間の自由度(3Dなら6)と
駆動関節の数(不定)。

逆行列の存在する条件は、
正方行列で行列式が零ではない。

特異姿勢と可操作度

正方行列ではない行列の逆行列に相当するもの->疑似逆行列
ただし、ランクがフルランクであることが条件。

ヤコビアンのランクが落ちるつまりdet(JJ^T)=0のとき、
手先を特定の方向に動かせない姿勢にある。
これを特異姿勢と呼ぶ。



特異姿勢の例

制御の観点からは、特異姿勢を避けたい。
特異点から遠い=det(JJ^T)の値が大きくなる。
この値の正の平方根を可操作度と呼ぶ。

特異点低感度逆行列(SR Inverse) [Nakamura,1986]

$$J^{\#} = \underbrace{\boxed{J^T (J J^T}}_{\text{疑似逆行列}} + \underbrace{\boxed{\epsilon I_6}}_{\text{微小バイアス}})^{-1}$$

特異姿勢=疑似逆行列の右側の逆行列が計算できない。
ならば、微小な対角行列を加えておけば逆行列を得られる。

逆運動学->二次計画問題

$$E_k = \frac{1}{2}(p_e - p_k)^T W_E (p_e - p_k)$$

$$W_E : \text{重み行列} \quad Diag(w_{tx}, w_{ty}, w_{tz}, w_{rx}, w_{ry}, w_{rz})$$

目標に対する自乗距離Ekを最小化する
二次計画問題として考える。

勾配法で解く逆運動学

$$q_{k+1} \leftarrow q_k + \delta_{qk}$$

ただし、以下を満たすこと。

ヘシアン $\boxed{\nabla^2 E_k}\delta_{qk} = \boxed{-\nabla E_k}$ グラディエント

$\nabla^2 E_k$を厳密に求めるのが大変なので近似する。

$$\boxed{H_k}\delta_{qk} = \boxed{g_k}$$

$$\delta_{qk} = H_k^{-1} g_k$$

ヘシアンとグラディエントの近似値をどう求めるか？

Levenberg-Marquardt法

[杉原,2011]

ヘシアンとグラディエントの近似値を以下のようにする。

$$H_k = J_k^T W_E J_k + W_N$$

微小バイアス

$$W_N : \text{減衰因子} \quad E_k I_n + Diag(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$$

$$g_k = J_k^T W_E (p_e - p_k)$$

SR Inverseとの違いとして
自乗距離が加算される。
これは目標値が近いと零に近づく。

ちなみに、SR Inverseを使った場合は
Gauss-Newton法に一致する。
こちらは大域的収束性が保証されていない。

おわりに：さらなる課題

質量、慣性、力->動力学

関節角度限界、自己干渉

モータ出力限界、制御

障害物回避

双腕協調

脚足歩行

参考文献

- 吉川、ロボット制御基礎論、コロナ社、1988
- 梶田、ヒューマノイドロボット(改訂第二版),オーム社,2020 (2.5章)
- 金谷、3次元回転、共立出版、2019 (3.4章)
- Khatib, A unified approach for motion and force control of robot manipulators: The operational space formulation, IEEE Journal on Robotics and Automation, vol. 3, no. 1, pp. 43-53, 1987
- Nakamura, Inverse Kinematic Solutions With Singularity Robustness for Robot Manipulator Control, Trans. of the ASME. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. 108, 163-171, 1986
- 田辺、非線型最小二乗法のアルゴリズム、応用統計学、Vol.9, No.3,pp.119-140.1981
- 杉原、Levenberg-Marquardt法による可解性を問わない逆運動学、日本ロボット学会誌、Vol.29,No.3,pp.269-277,2011
- 杉原、逆運動学の数値解法、日本ロボット学会誌、Vol.34,No.3,pp.167-173,2016
- 野沢、植田、岡田、EusLispリファレンスマニュアル,2020.7.3版 (18.2章)

ライセンスについて

フォントライセンス
- IPA Pゴシック、IPA P明朝: IPAフォントライセンスv1.0
- Rounded M+: M+ FONTS LICENSE
- Computer Modern: SIL Open Font License