クォータニオンを用いた三次元回転(補足)

人類文明継続装置
輪廻 ヒロ

監修: 矢口 裕明
(博士(情報理工学))

諸注意

理系大学一年相当の線形代数の知識が必要です。
この講義では、右手座標系、列ベクトルを使います。
回転クォータニオンの基本説明はアーカイブを見てね！

参考文献:

- Fletcher Dunn, Ian Parberry, 松田晃一(訳)、「実例で学ぶゲーム3D数学」、オライリージャパン、2008。(9.4章)
- 金谷健一、3次元回転、共立出版、2019。(3.5章)

クォータニオンのおさらい

$$
\begin{aligned}
q &= (w \ \ v) \\
&= (w \ \ x \ \ y \ \ z) \\
&= w + xi + yj + zk
\end{aligned}
$$

w: 実部
v = (x y z): 虚部
i,j,kは虚数

複素数としてのクォータニオン

3つの虚数の関係性は次の通り

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k, ji = -k$$

$$jk = i, kj = -i$$

$$ki = j, ik = -j$$

クォータニオンの乗算

$$
\begin{aligned}
p &= (p_w \quad p_v) = (p_w \quad p_x \quad p_y \quad p_z) \\
&= p_w + p_x i + p_y j + p_z k, \\
q &= (q_w \quad q_v) = (q_w \quad q_x \quad q_y \quad q_z) \\
&= q_w + q_x i + q_y j + q_z k, \\
pq &= p_w q_w + p_w q_x i + p_w q_y j + p_w q_z k \\
&\quad + p_x q_w i - p_x q_x + p_x q_y k - p_x q_z j \\
&\quad + p_y q_w j - p_y q_x k - p_y q_y + p_y q_z i \\
&\quad + p_z q_w k + p_z q_x j - p_z q_y i - p_z q_z \\
&= p_w q_w - p_x q_x - p_y q_y - p_z q_z \\
&\quad + (p_w q_x + p_x q_w + p_y q_z - p_z q_y) i \\
&\quad + (p_w q_y - p_x q_z + p_y q_w + p_z q_x) j \\
&\quad + (p_w q_z + p_x q_y - p_y q_x + p_z q_w) k \\
&= ((p_w q_w - p_v \cdot q_v) \quad (p_w q_v + q_w p_v + p_v \times q_v))
\end{aligned}
$$

クォータニオンで回転のおさらい

$$q(n,\theta) = (\cos\theta/2 \ (\sin\theta/2)n)$$
$$= (\cos\theta/2 \quad n_x\sin\theta/2 \quad n_y\sin\theta/2 \quad n_z\sin\theta/2)$$

$$||q|| \equiv 1$$

正転 $-q = (-w \quad -x \quad -y \quad -z)$

逆転 $q^* = (w \quad -x \quad -y \quad -z)$

回転の合成・ベクトルの回転

回転の合成は回転行列と同様にできる

$$ {}^{A}R_{C} = {}^{A}R_{B}\,{}^{B}R_{C} $$

※列ベクトル系
行ベクトル系は前後が逆になる

$$ {}^{A}q_{C} = {}^{A}q_{B}\,{}^{B}q_{C} $$

回転させるときは前からq,後ろからq*で挟む

$$ {}^{A}p = {}^{A}R_{B}\,{}^{B}p $$

$$ {}^{A}p = {}^{A}q_{B}\,{}^{B}p\,{}^{A}q_{B}^{*} $$

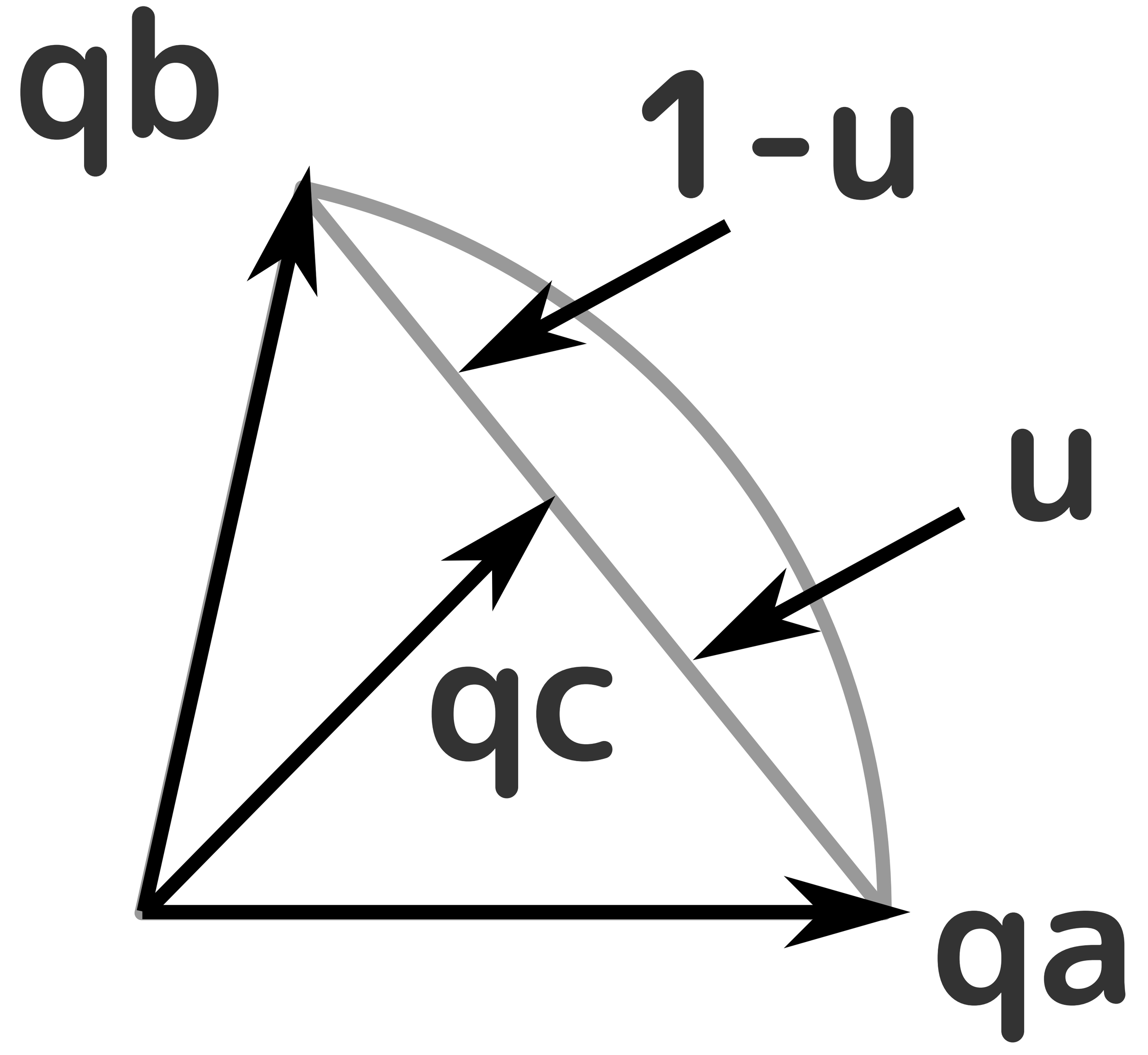
位置ベクトルのクォータニオン表現
実部0で虚部に元のベクトルを入れる

回転クォータニオンの補間(1)

通常の線形補間(u:1-u)
LERP: Linear intERPolation

$$q_c = (1-u)q_a + uq_b$$

これだけではうまくいかない！



回転クォータニオンは大きさが1
ということは単位3次元超球面の表面に
存在しないといけない。
線形補間だと大きさが1ではなくなる。
延長しても球面上の比率が正しくない。

回転クォータニオンの補間(2)

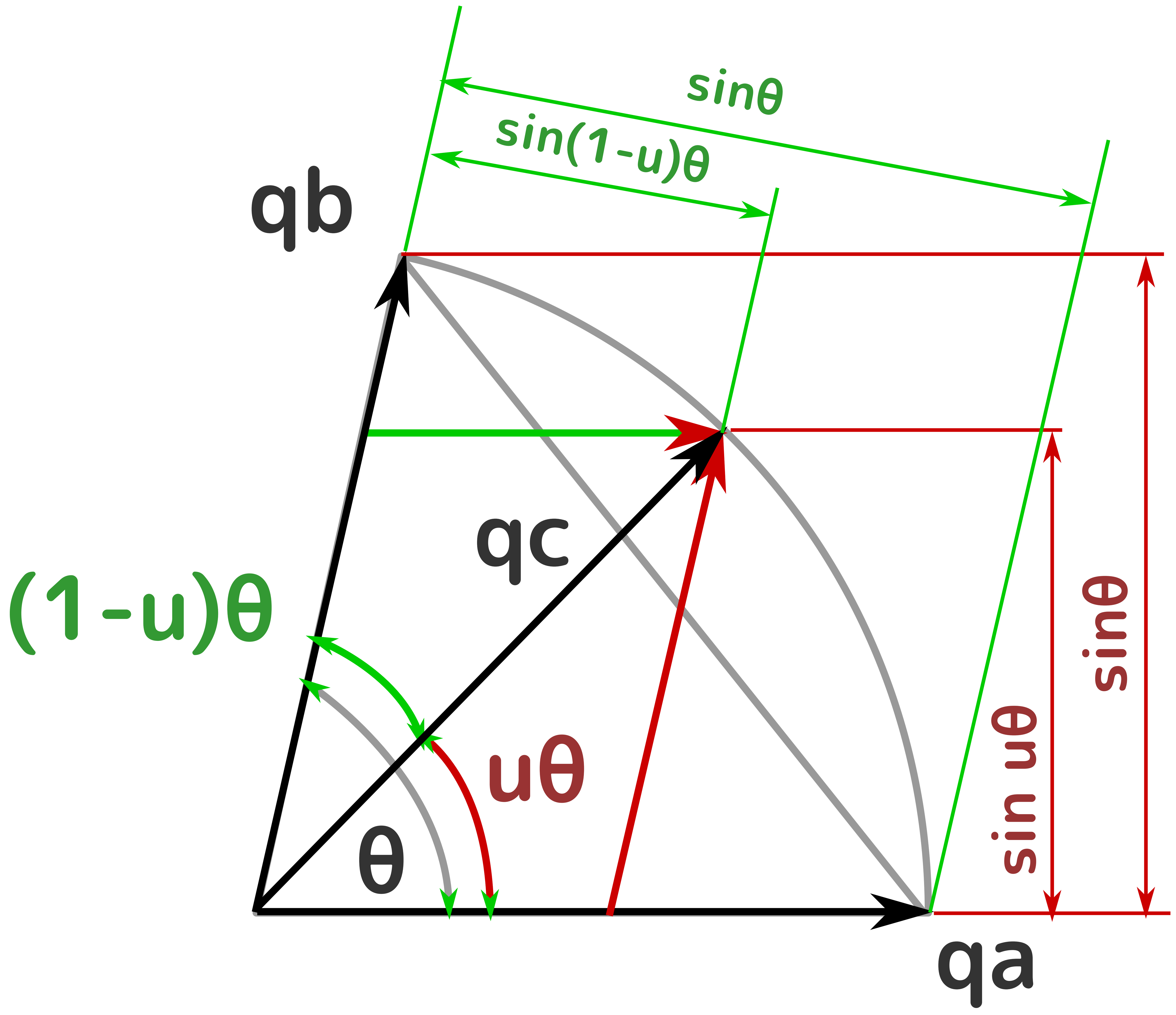
球面線形補間

SLERP: Spherical Linear intERPolation

$$\theta = \cos^{-1}(q_a \cdot q_b)$$

$$q_c = \frac{\sin(1-u)\theta}{\sin\theta} q_a + \frac{\sin u\theta}{\sin\theta} q_b$$

SLERPの模式図



回転クォータニオン補間(3)

SLERPではうまくいかないケース
- sinθが0の場合計算できない。
  ->θが微小な場合LERPを使って延長しても大丈夫。
- クォータニオンの符号のとり方で異なる結果となる。
  ->内積が正となるような符号の組み合わせをとる。

三次元回転表現まとめ

回転行列
- 9変数。行列式が1。合成可能。
  位置ベクトルと一緒に運用できる。

オイラー角
- 3変数。拘束条件なし。合成不可。
  ジンバルロックが問題。

クォータニオン
- 4変数。大きさが1。合成可能。
  補間を簡単に行うことができる。

AngleAxis
- 3変数。拘束条件なし。合成不可。
  回転そのものを行うには別の表現を経由。

ライセンスについて

フォントライセンス
- Rounded M+: M+ FONTS LICENSE
- Computer Modern: SIL Open Font License