# 連続空間内の状態方程式の離散化

人類文明継続装置
輪廻 ヒロ

監修: 矢口 裕明
(博士(情報理工学))

# 注意事項

- 理系大学で学ぶ程度の数学知識を必要とします。
  - 線形代数は必須！
- 現代制御のある程度の知識も必要とします。

# 状態方程式のおさらい（線形の場合）

$$\frac{d}{dt}x(t) = A_c x(t) + B_c u(t)$$

例)速度を持った物体に
加速度を入力として
与えることができる場合

$$\dot{p} = v$$

$$\dot{v} = a$$

$$x = \begin{pmatrix} p \\ v \end{pmatrix}$$

$$u = a$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \end{aligned}$$

# 離散化とは

連続空間内で組み立てた状態方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = A_c x(t) + B_c u(t)$$

これを離散空間内の状態方程式に組み立て直す。

$$x[k+1] = A_d x[k] + B_d u[k]$$

$$k = n\Delta t, k+1 = (n+1)\Delta t, \Delta t = const.$$

これができないと計算機で取り扱うことができない。

# これどうやって解くの？

微分を差分に変換するにはどうしたらいい？
近似が必要になる。->どうやって？
状態xだけでなく入力uも時間の関数。
未来の値にアクセスすることはできない。

# 零次ホールド

u[k]が時間の関数であることが問題をややこしくする。
なので、u[k]が時間刻みΔtの範囲内で零次関数と仮定。
つまり、u[k+1]=u[k]とする。
したがってdu/dt=0でもある。
未来の値にアクセスしなくても良くなる。

# ラプラス変換で解く方法

連続空間における
ラプラス変換/逆ラプラス変換

周波数空間内で
sとzの相互変換ができれば！

離散空間における
Z変換/逆Z変換

※ラプラス変換を使うと微積を乗除で表せる

# Tustin変換(双一次変換)

## 積分を台形法で近似したものをz空間で表す。

$$\boxed{y[k+1]-y[k]} \simeq \boxed{\frac{\Delta t}{2}(x[k+1]+x[k])}$$

k->k+1の定積分　　赤い四角形の面積

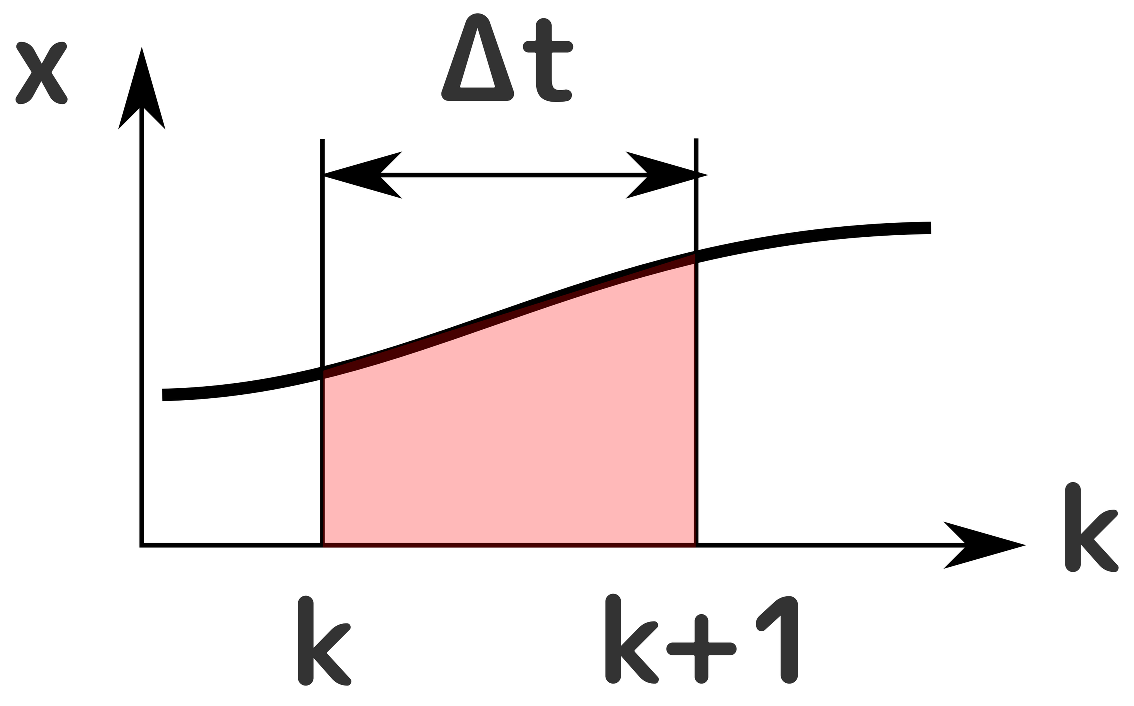
$$\mathcal{Z}(y[k+1]-y[k]) \simeq \mathcal{Z}(\frac{\Delta t}{2}(x[k+1]+x[k]))$$

z=1ステップ先　$(z-1)Y \simeq \frac{\Delta t}{2}(z+1)X$

$$Y \simeq \frac{\Delta t}{2}\frac{z+1}{z-1}X$$

s空間において積分は1/s　$\frac{1}{s} \simeq \frac{\Delta t}{2}\frac{z+1}{z-1}$

微分はsなので、　$s \simeq \frac{2}{\Delta t}\frac{z-1}{z+1}$



# ラプラス変換->Tustin変換->逆z変換

## 状態方程式のラプラス変換

$$sX = A_c X + B_c U$$

## sにTustin変換で求めた微分オペレータを代入

$$\frac{2}{\Delta t}\frac{z-1}{z+1}X = A_c X + B_c U$$

$$(z-1)X = \frac{\Delta t}{2}(z+1)(A_c X + B_c U)$$

$$(x[k+1] - x[k]) = \frac{\Delta t}{2}A_c(x[k+1] + x[k]) + \frac{\Delta t}{2}B_c(\overline{u[k+1] + u[k]})$$

零次ホールド

$$(I - \frac{\Delta t}{2}A_c)x[k+1] = (I + \frac{\Delta t}{2}A_c)x[k] + \Delta t B_c u[k]$$

$$x[k+1] = (I - \frac{\Delta t}{2}A_c)^{-1}(I + \frac{\Delta t}{2}A_c)x[k] + \Delta t(I - \frac{\Delta t}{2}A_c)^{-1}B_c u[k]$$

# 離散化した結果(L->Tustin->逆Z)

$$A_d = (I - \frac{\Delta t}{2} A_c)^{-1} (I + \frac{\Delta t}{2} A_c)$$

$$B_d = \Delta t (I - \frac{\Delta t}{2} A_c)^{-1} B_c$$

# 常微分方程式の解を使った方法

$$x[k+1] = e^{\Delta t A_c} x[k] + \int_0^{\Delta t} e^{(\Delta t - \tau) A_c} B_c u[k] d\tau$$

これどうやって解くの？

# マクローリン展開

$$e^{\Delta t A_c} = I + \frac{\Delta t A_c}{1!} + \frac{(\Delta t A_c)^2}{2!} + \cdots$$

$$\int_0^{\Delta t} e^{(\Delta t - \tau)A_c} d\tau = \int_0^{\Delta t} (I + \frac{(\Delta t - \tau)A_c}{1!} + \frac{((\Delta t - \tau)A_c)^2}{2!} + \cdots) d\tau$$

$$= \Delta t I + \frac{\Delta t^2 A_c}{2!} + \frac{\Delta t^3 A_c^2}{3!} + \cdots$$

$$(\int_0^{\Delta t} \frac{(\Delta t - \tau)^n A_c^n}{n!} d\tau = \left[ -\frac{(\Delta t - \tau)^{n+1} A_c^n}{(n+1)!} \right]_0^{\Delta t}$$

$$= \frac{\Delta t^{n+1} A_c^n}{(n+1)!})$$

無限まで展開すれば等式が成り立つが、有限で近似する。

# マクローリン展開を使った場合の結果

$$A_d = I + \frac{\Delta t A_c}{1!} + \frac{(\Delta t A_c)^2}{2!} + \cdots$$

$$B_d = (\Delta t I + \frac{\Delta t^2 A_c}{2!} + \frac{\Delta t^3 A_c^2}{3!} + \cdots)B_c$$

# パデ近似

$$\boxed{e^{\Delta t A_c} \simeq (I + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i (\Delta t A_c)^i)^{-1} (I + \sum_{j=1}^{M} \beta_j (\Delta t A_c)^j)}$$

$$= g$$

パデ近似

$$\boxed{e^{\Delta t A_c} \simeq (I + \sum_{k=1}^{N+M} \gamma_k (\Delta t A_c)^k)}$$

$$= f$$

マクローリン展開

$$(\gamma_k = \frac{1}{k!})$$

以下の関係を満たすように係数を決める

$$\sum_{h=0}^{l} \gamma_h \alpha_{l-h} - \beta_l = 0 \quad (l = 0, \cdots, N + M)$$

# パデ近似の係数の求め方

(M,N) = (1,1)次の場合

$$\alpha_0 = 1$$
$$\beta_0 = 1$$
$$\alpha_2 = 0$$
$$\beta_2 = 0$$
$$(\alpha_0 - \beta_0 = 0)$$
$$\alpha_1 + \alpha_0 - \beta_1 = 0$$
$$\alpha_2 + \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_0 - \beta_2 = 0$$
$$\alpha_1 = -\frac{1}{2}$$
$$\beta_1 = \frac{1}{2}$$

# パデ近似を使った場合の結果(1,1)

$$A_d = (I - \frac{\Delta t}{2}A_c)^{-1}(I + \frac{\Delta t}{2}A_c)$$

$$B_d = \int_0^{\Delta t}(I - \frac{\Delta t - \tau}{2}A_c)^{-1}(I + \frac{\Delta t - \tau}{2}A_c)d\tau B_c$$

この定積分は解析的に解くのは困難では？

# おわりに

状態方程式の離散化は他にも方法がたくさんあるらしい。

Cleve Moler, Charles Van Loan,
“Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix,
Twenty-Five Years Later”,
Society for Industrial and Applied Mathematics,
Vol. 45, No. 1, pp. 3-49, 2003.

https://cpb-us-e1.wpmucdn.com/blogs.cornell.edu/dist/c/9924/files/2021/10/19ways.pdf

# 参考文献


(Webサイトの閲覧日はすべて2022/2/6)
全般的な離散制御の話
- 青木立,西堀俊幸."ディジタル制御",コロナ社,2005.
S -> Tustin -> 逆Zで求めているパターン
- Yasunari SHIDAMA, Tustinの方法
  - http://ysserve.wakasato.jp/Lecture/ControlMecha7/node5.html
- 双一次変換とは
  - http://arduinopid.web.fc2.com/K19.html
exp(At)をPade近似で求めているパターン
- 北本卓也,"行列指数関数の Pade 近似について". 数理解析研究所講究録 第 1843 巻 2013 年 1-7
  - https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1843-01.pdf
- Discretize離散化関数 連続系状態方程式の離散化
  - http://www.sidewarehouse.net/discretize/index.html
Pade近似の係数の求め方
- 山下達也, "物理数学ゼミ 近似について", 2008
  - http://www.ep.sci.hokudai.ac.jp/~yamasita/phys-math-approx.pdf
- 三宅宏季, 甲斐博, "安定化理論による Pade近似計算について". 数理解析研究所講究録 第2054巻 2017年 25-30
  - https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2054-03.pdf
- Pade 近似の係数を求めるプログラムを C で書いてみた
  - https://pota.hatenablog.jp/entry/2014/09/08/125857

# ライセンスについて