

クォータニオンを用いた 三次元回転(補足)

人類文明継続装置
輪廻 ヒロ

監修: 矢口 裕明
(博士(情報理工学))

諸注意

理系大学一年相当の線形代数の知識が必要です。
この講義では、右手座標系、列ベクトルを使います。
回転クォータニオンの基本説明はアーカイブを見てね！

参考文献:

- Fletcher Dunn, Ian Parberry, 松田晃一(訳)、
「実例で学ぶゲーム3D数学」、
オライリージャパン、2008。(9.4章)
- 金谷健一、3次元回転、共立出版、2019。
(3.5章)

クォータニオンのおさらい

$$q = (w \ v)$$

$$= (w \ x \ y \ z)$$

$$= w + xi + yj + zk$$

w: 実部

v = (x y z): 虚部

i,j,kは虚数

複素数としてのクォータニオン

3つの虚数の関係性は次の通り

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k, ji = -k$$

$$jk = i, kj = -i$$

$$ki = j, ik = -j$$

クォータニオンの乗算

$$p = (p_w \ p_v) = (p_w \ p_x \ p_y \ p_z)$$

$$= p_w + p_x i + p_y j + p_z k,$$

$$q = (q_w \ q_v) = (q_w \ q_x \ q_y \ q_z)$$

$$= q_w + q_x i + q_y j + q_z k,$$

$$pq = p_w q_w + p_w q_x i + p_w q_y j + p_w q_z k$$

$$+ p_x q_w i - p_x q_x + p_x q_y k - p_x q_z j$$

$$+ p_y q_w j - p_y q_x k - p_y q_y + p_y q_z i$$

$$+ p_z q_w k + p_z q_x j - p_z q_y i - p_z q_z$$

$$= p_w q_w - p_x q_x - p_y q_y - p_z q_z$$

$$+ (p_w q_x + p_x q_w + p_y q_z - p_z q_y) i$$

$$+ (p_w q_y - p_x q_z + p_y q_w + p_z q_x) j$$

$$+ (p_w q_z + p_x q_y - p_y q_x + p_z q_w) k$$

$$= ((p_w q_w - p_v \cdot q_v) \ (p_w q_v + q_w p_v + p_v \times q_v))$$

クォータニオンで回転のおさらい

$$\begin{aligned} q(n, \theta) &= (\cos \theta/2 \ (\sin \theta/2)n) \\ &= (\cos \theta/2 \ n_x \sin \theta/2 \ n_y \sin \theta/2 \ n_z \sin \theta/2) \end{aligned}$$

$$||q|| \equiv 1$$

正転 $-q = (-w \ -x \ -y \ -z)$

逆転 $q^* = (w \ -x \ -y \ -z)$

回転の合成・ベクトルの回転

回転の合成は回転行列と同様にできる

$${}^A R_C = {}^A R_B {}^B R_C \quad \begin{array}{l} \text{※列ベクトル系} \\ \text{行ベクトル系は前後が逆になる} \end{array}$$

$${}^A q_C = {}^A q_B {}^B q_C$$

回転させるときは前からq,後ろからq*で挟む

$${}^A p = {}^A R_B {}^B p$$

$$\underline{{}^A p} = {}^A q_B \underline{{}^B p} {}^A q_B^*$$

位置ベクトルのクォータニオン表現
実部0で虚部に元のベクトルを入れる

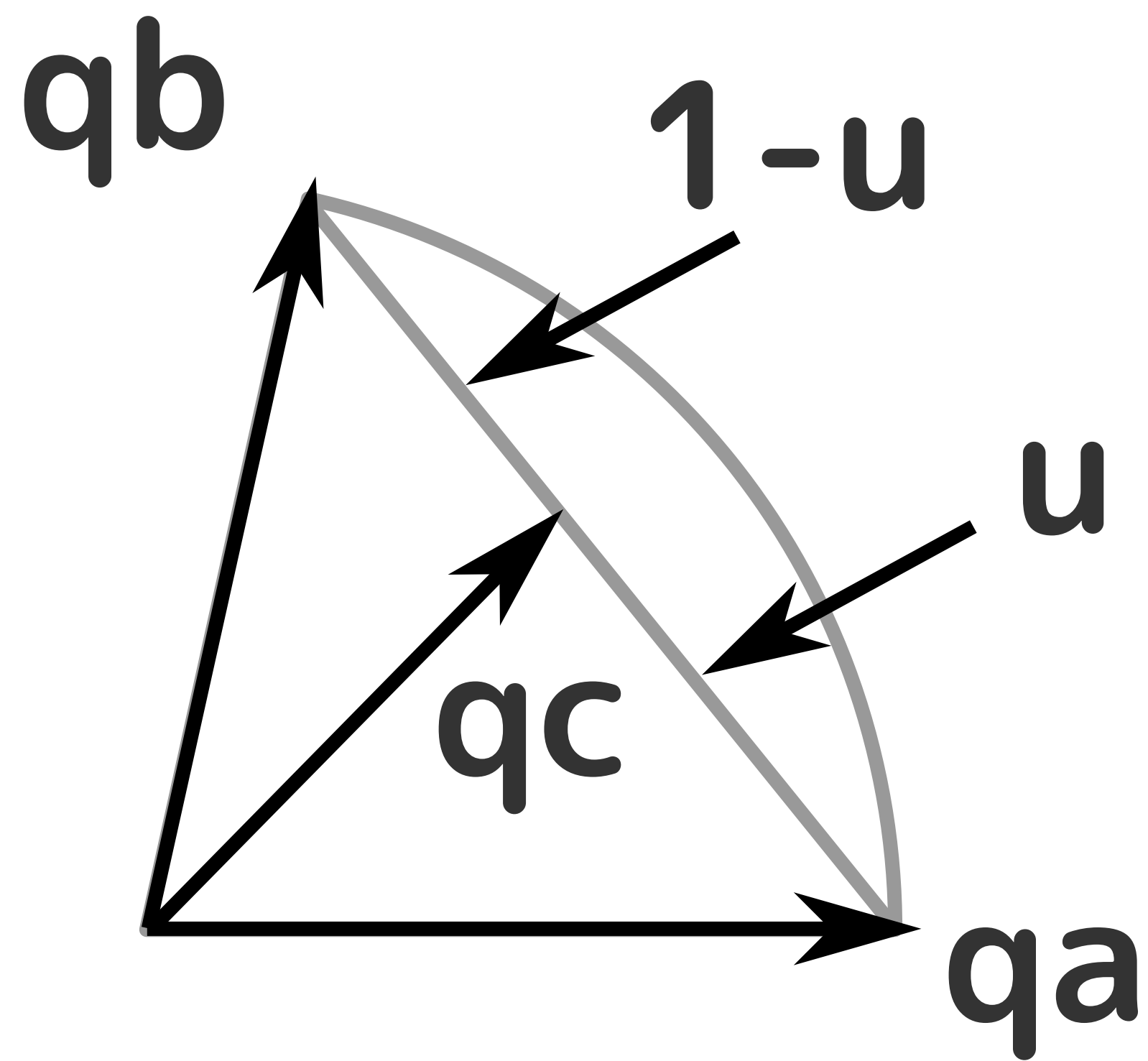
回転クォータニオンの補間(1)

通常の線形補間($u:1-u$)

LERP: Linear intERPolation

$$q_c = (1 - u)q_a + uq_b$$

これだけではうまくいかない！



回転クォータニオンは大きさが1
ということは単位3次元超球面の表面に
存在しないといけない。
線形補間だと大きさが1ではなくなる。
延長しても球面上の比率が正しくない。

回転クォータニオンの補間(2)

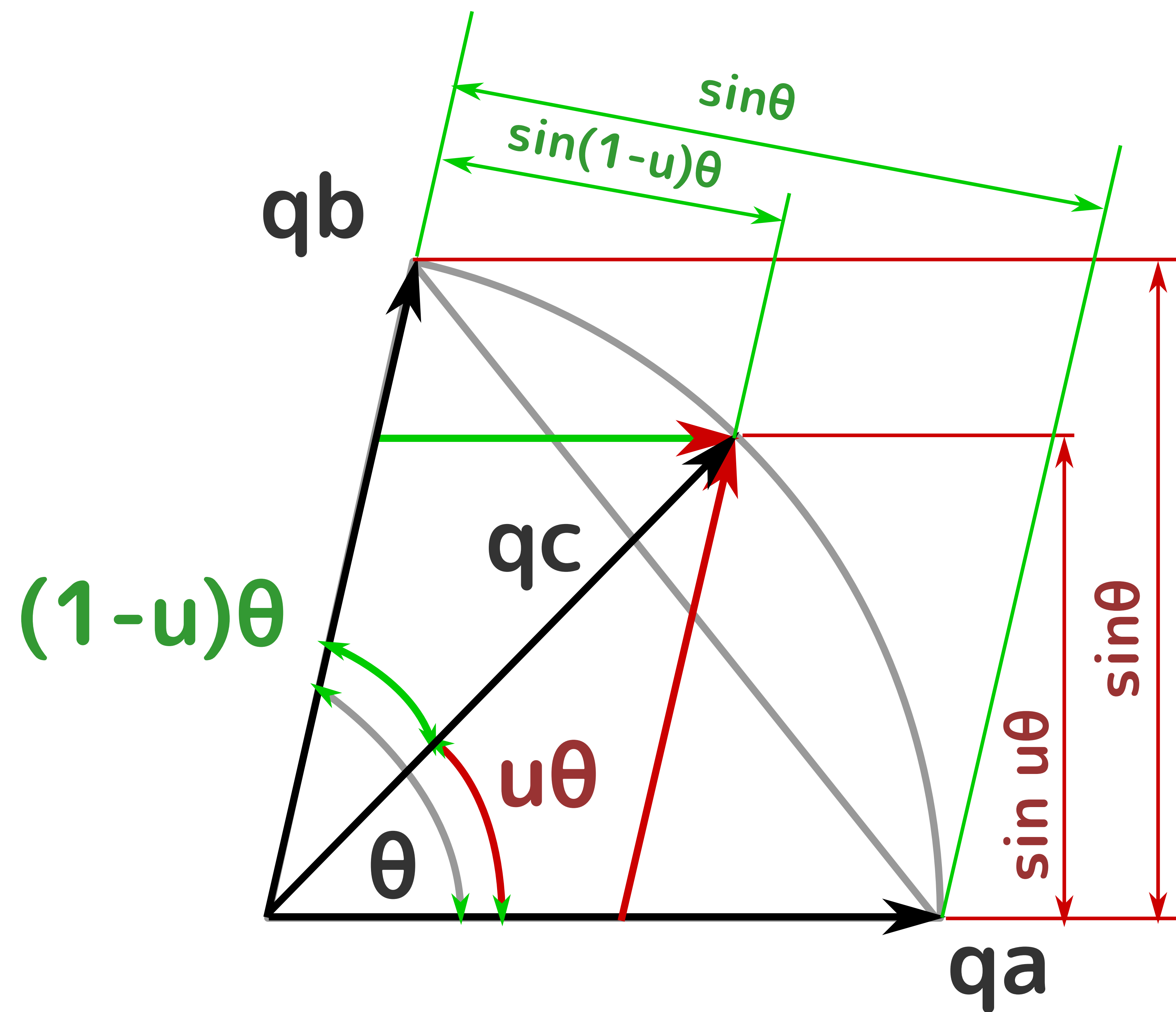
球面線形補間

SLERP: Spherical Linear intERPolation

$$\theta = \cos^{-1}(q_a \cdot q_b)$$

$$q_c = \frac{\sin(1-u)\theta}{\sin \theta} q_a + \frac{\sin u\theta}{\sin \theta} q_b$$

SLERPの模式図



回転クォータニオン補間(3)

SLERPではうまくいかないケース

- $\sin\theta$ が0の場合計算できない。
 - > θ が微小な場合LERPを使って延長しても大丈夫。
- クォータニオンの符号のとり方で異なる結果となる。
 - >内積が正となるような符号の組み合わせをとる。

三次元回転表現まとめ

回転行列

- 9変数。行列式が1。合成可能。
位置ベクトルと一緒に運用できる。

オイラー角

- 3変数。拘束条件なし。合成不可。
ジンバルロックが問題。

クォータニオン

- 4変数。大きさが1。合成可能。
補間を簡単に行うことができる。

AngleAxis

- 3変数。拘束条件なし。合成不可。
回転そのものを行うには別の表現を経由。

ライセンスについて

本文書のライセンスはクリエイティブ・コモンズ表示4.0 CC BY 4.0です。
© 2022 クシナダ機巧株式会社

フォントライセンス

- Rounded M+: M+ FONTS LICENSE
- Computer Modern: SIL Open Font License