クォータニオンを用いた三次元回転

人類文明継続装置
輪廻 ヒロ

監修: 矢口 裕明
(博士(情報理工学))

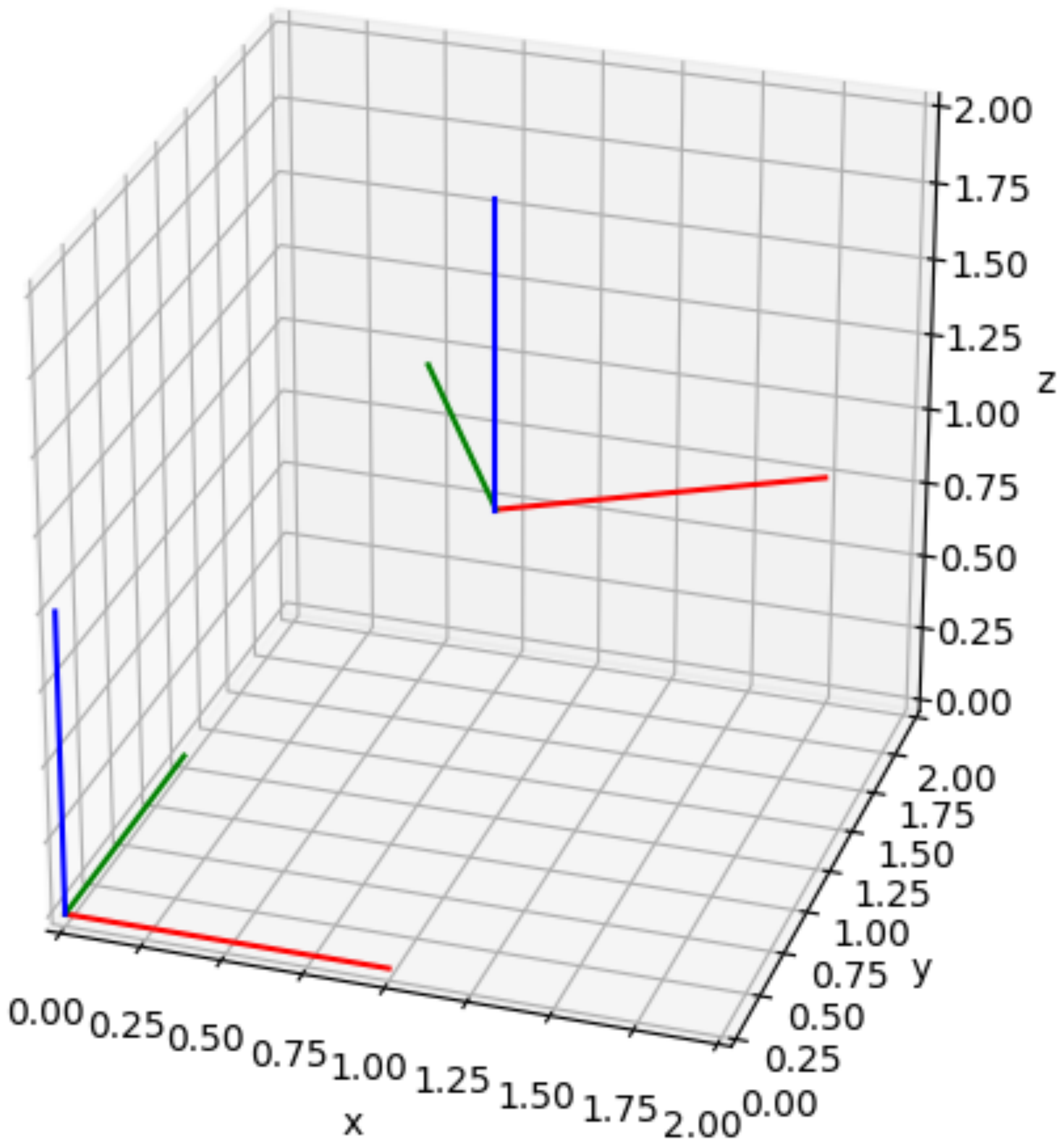
諸注意

理系大学一年相当の線形代数の知識が必要です。
この講義では、右手座標系、列ベクトルを使います。

参考文献(引用ではありません):

- Fletcher Dunn, Ian Parberry, 松田晃一(訳)、「実例で学ぶゲーム3D数学」、オライリージャパン、2008。
- OpenCV: Camera Calibration and 3D Reconstruction, 2021.2.19閲覧。
- Guillermo Gallego, Anthony Yezzi. "A compact formula for the derivative of a 3-D rotation in exponential coordinates". https://arxiv.org/abs/1312.0788
- Eigenの実装 https://gitlab.com/libeigen/eigen Geometry/Quaternion.h

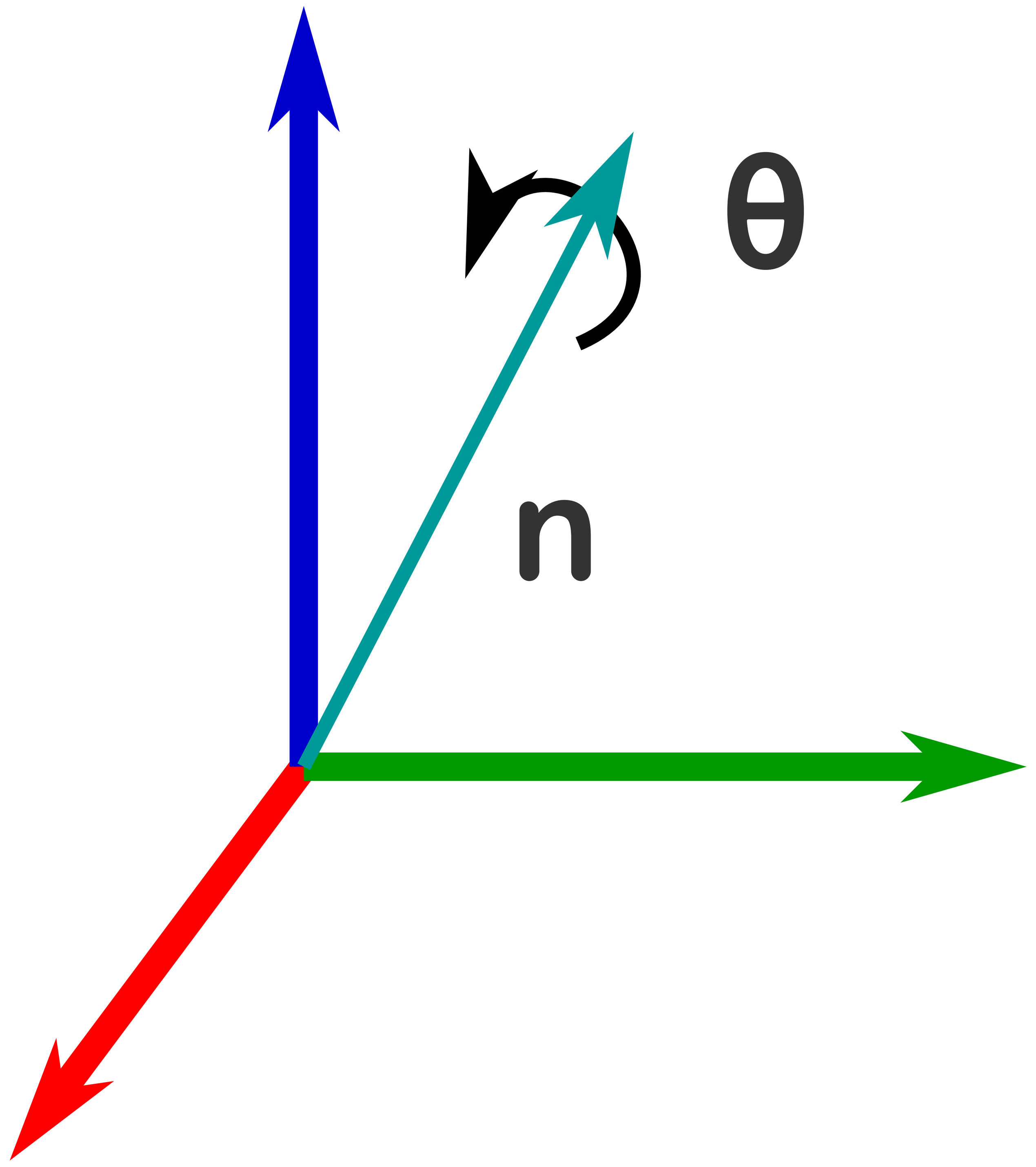
前回のあらすじ



三次元空間内の相対姿勢は、
- x,y,z軸方向への並進
- x,y,z軸周りの回転θ,φ,ψ

で表すことができる。
軸回りに順番に回転させる場合、ジンバルロックという問題が起きる可能性がある！

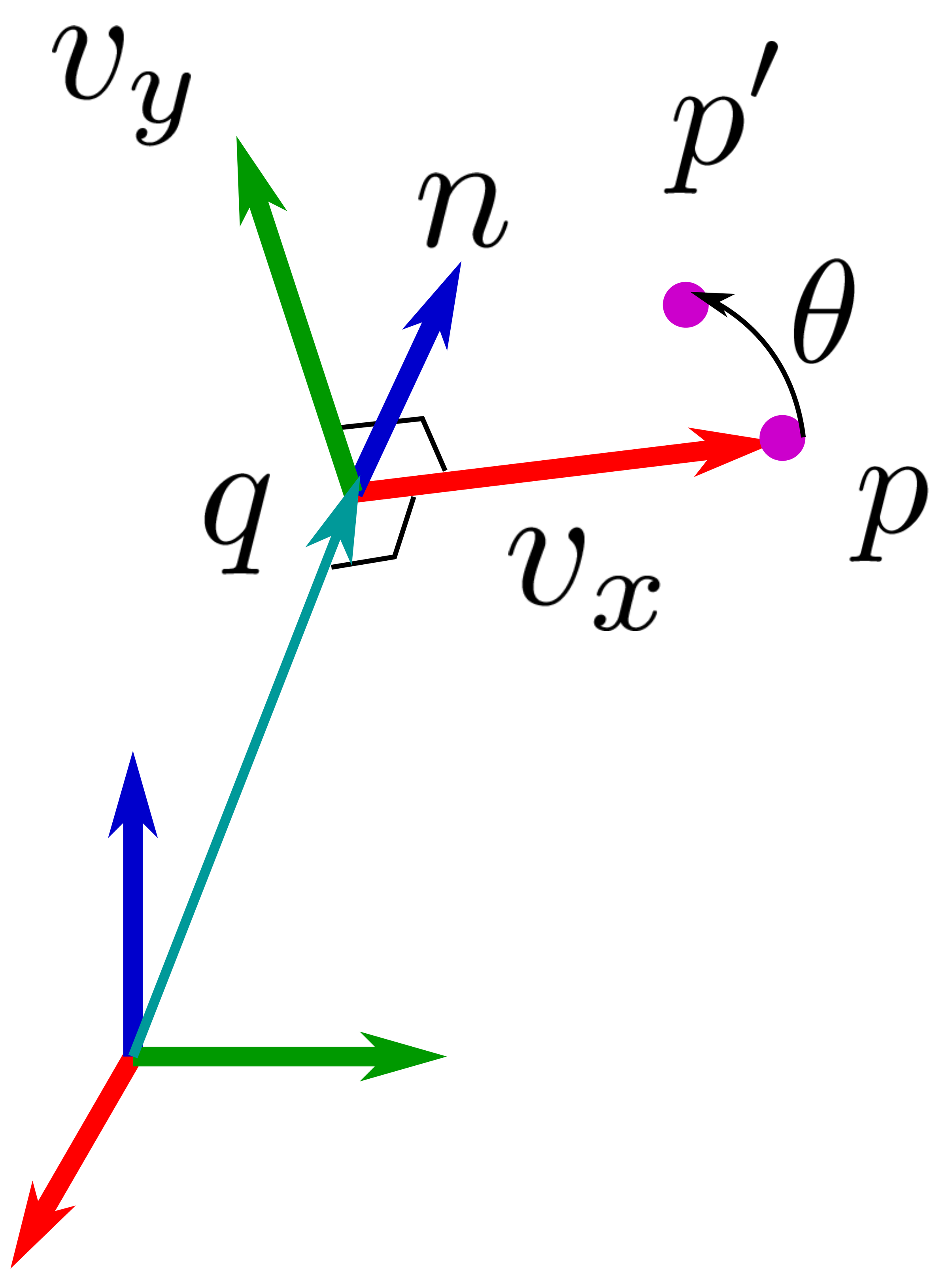
ロドリゲスの回転公式



三次元回転を
- 任意の軸n周りの回転θ

で一般化する。

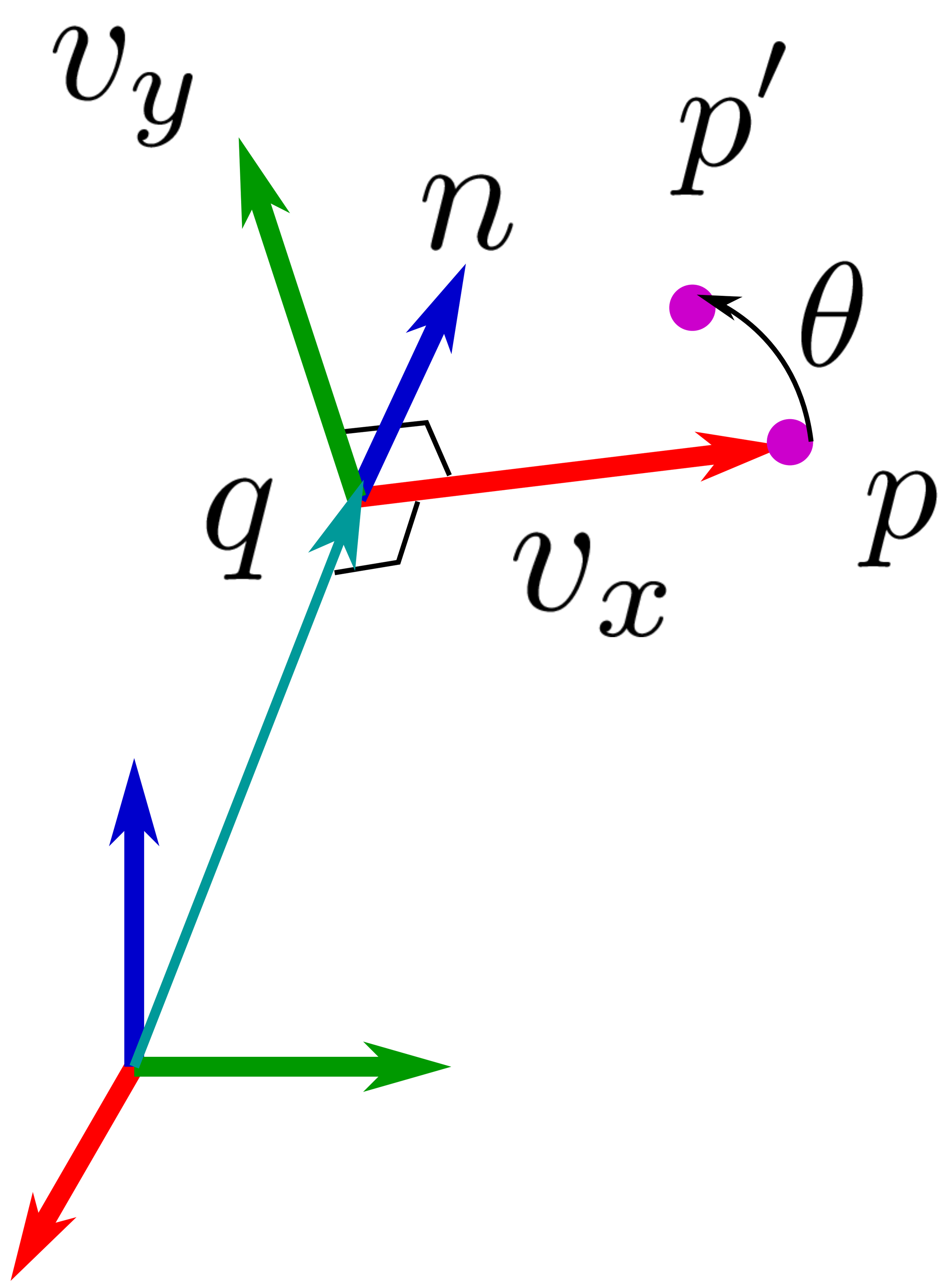
回転公式の導出(1)



任意の点Pをn周りにθだけ回転させる。
nと直交しPを通る平面上で考える。

$$
\begin{aligned}
q &= (p \cdot n)n \\
v_x &= p - q \\
&= p - (p \cdot n)n \\
v_y &= n \times v_x \\
&= n \times p - (p \cdot n)n \times n \\
&= n \times p
\end{aligned}
$$

回転公式の導出(2)



$$
\begin{aligned}
p' &= q + (\cos\theta)v_x + (\sin\theta)v_y \\
&= (p\cdot n)n \\
&\quad +(\cos\theta)(p-(p\cdot n)n) \\
&\quad +(\sin\theta)(n\times p) \\
&= (\cos\theta)p + (1-\cos\theta)(p\cdot n)n + (\sin\theta)(n\times p)
\end{aligned}
$$

回転公式の導出(3)

$$
\begin{aligned}
p' &= R(n,\theta)p \\
&= \left[(\cos\theta)I_3 + (1-\cos\theta)nn^T + (\sin\theta)\lambda(n)\right]p \\
&= \begin{bmatrix}
\cos\theta + n_x^2(1-\cos\theta) & n_xn_y(1-\cos\theta) - n_z\sin\theta & n_xn_z(1-\cos\theta) + n_y\sin\theta \\
n_xn_y(1-\cos\theta) + n_z\sin\theta & \cos\theta + n_y^2(1-\cos\theta) & n_yn_z(1-\cos\theta) - n_x\sin\theta \\
n_xn_z(1-\cos\theta) - n_y\sin\theta & n_yn_z(1-\cos\theta) + n_x\sin\theta & \cos\theta + n_z^2(1-\cos\theta)
\end{bmatrix} p
\end{aligned}
$$

回転公式の導出(4)

$$
\begin{aligned}
(p \cdot n)n &= (p_x n_x + p_y n_y + p_z n_z)\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p_x n_x^2 + p_y n_x n_y + p_z n_x n_z \\ p_x n_x n_y + p_y n_y^2 + p_z n_y n_z \\ p_x n_x n_z + p_y n_y n_z + p_z n_z^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} n_x^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_x n_y & n_y^2 & n_y n_z \\ n_x n_z & n_y n_z & n_z^2 \end{pmatrix} p \\
&= n n^T p
\end{aligned}
$$

回転公式の導出(5)

$$
\begin{aligned}
n \times p &= \begin{pmatrix} n_y p_z - n_z p_y \\ n_z p_x - n_x p_z \\ n_x p_y - n_y p_x \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{bmatrix} p \\
&= \lambda(n)p
\end{aligned}
$$

クォータニオン

$$
\begin{aligned}
q &= (w \ v) \\
&= (w \ x \ y \ z) \\
&= w + xi + yj + zk
\end{aligned}
$$

w: 実部
v = (x y z): 虚部
i,j,kは虚数

クォータニオンによる回転

$$\begin{aligned} q(n, \theta) &= (\cos\theta/2 \ \ (\sin\theta/2)n) \\ &= (\cos\theta/2 \quad n_x \sin\theta/2 \quad n_y \sin\theta/2 \quad n_z \sin\theta/2) \end{aligned}$$

クォータニオン回転の性質

※回転を表現するときだけです！

$$||q|| \equiv 1$$

正転 $$-q = (-w \quad -x \quad -y \quad -z)$$

逆転 $$q^* = (w \quad -x \quad -y \quad -z)$$

クォータニオン回転の特徴

ジンバルロックがおこらない。
補間がきれいにできる。
冗長表現(4変数>3自由度)
変数の間に拘束がある
(大きさが1でないといけない)。
直感的でない。

倍角の公式

$$
\begin{aligned}
\sin\theta &= 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) \\
\cos\theta &= \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) \\
&= 2\cos^2(\theta/2) - 1 \\
&= 1 - 2\sin^2(\theta/2)
\end{aligned}
$$

クォータニオン->回転行列(1)

$$
\begin{aligned}
r_{11} &= \cos\theta + n_x^2(1-\cos\theta) \\
&= (2\cos^2(\theta/2) - 1) + 2n_x^2\sin^2(\theta/2) \\
&= -1 + 2w^2 + 2x^2 \\
&= w^2 + x^2 - y^2 - z^2 \\
&= 1 - 2y^2 - 2z^2 \\
r_{12} &= n_x n_y(1-\cos\theta) - n_z\sin\theta \\
&= 2n_x n_y\sin^2(\theta/2) - 2n_z\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) \\
&= 2xy - 2wz
\end{aligned}
$$

$$
R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}
$$

クォータニオン->回転行列(2)

$$R(q) = \begin{bmatrix} 1-2y^2-2z^2 & 2xy-2wz & 2xz+2wy \\ 2xy+2wz & 1-2x^2-2z^2 & 2yz-2wx \\ 2xz-2wy & 2yz+2wx & 1-2x^2-2y^2 \end{bmatrix}$$

回転行列->クォータニオン(1)

$$
\begin{aligned}
trace(R) &= r_{11} + r_{22} + r_{33} \\
&= (w^2 + x^2 - y^2 - z^2) + \\
&\quad (w^2 - x^2 + y^2 - z^2) + \\
&\quad (w^2 - x^2 - y^2 + z^2) \\
&= 3w^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \\
&= 4w^2 - 1, \\
w^2 &= (r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1)/4 \\
x^2 &= (r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1)/4 \\
y^2 &= (-r_{11} + r_{22} - r_{33} + 1)/4 \\
z^2 &= (-r_{11} - r_{22} + r_{33} + 1)/4
\end{aligned}
$$

安易にルートをとれない。
(それぞれの符号がわからないから)

回転行列->クォータニオン(2)

零でないものを一つ基準として計算した上で、
以下の中から選んで残りを計算する。

$$r_{12} + r_{21} = 4xy$$

$$r_{21} - r_{12} = 4wz$$

$$r_{13} + r_{31} = 4xz$$

$$r_{31} - r_{13} = 4wy$$

$$r_{23} + r_{32} = 4yz$$

$$r_{23} - r_{32} = 4wx$$

今回のまとめ

三次元回転を「任意の軸周りの回転」として一般化。
こうするとジンバルロックが起こらない。
軸と角度をクォータニオンで表現できる。
クォータニオンと回転行列は相互変換できる。
ただし、わかりやすい表現ではない。

ライセンスについて

フォントライセンス
- Rounded M+: M+ FONTS LICENSE
- Computer Modern: SIL Open Font License