相補フィルタで 6軸IMUの姿勢推定

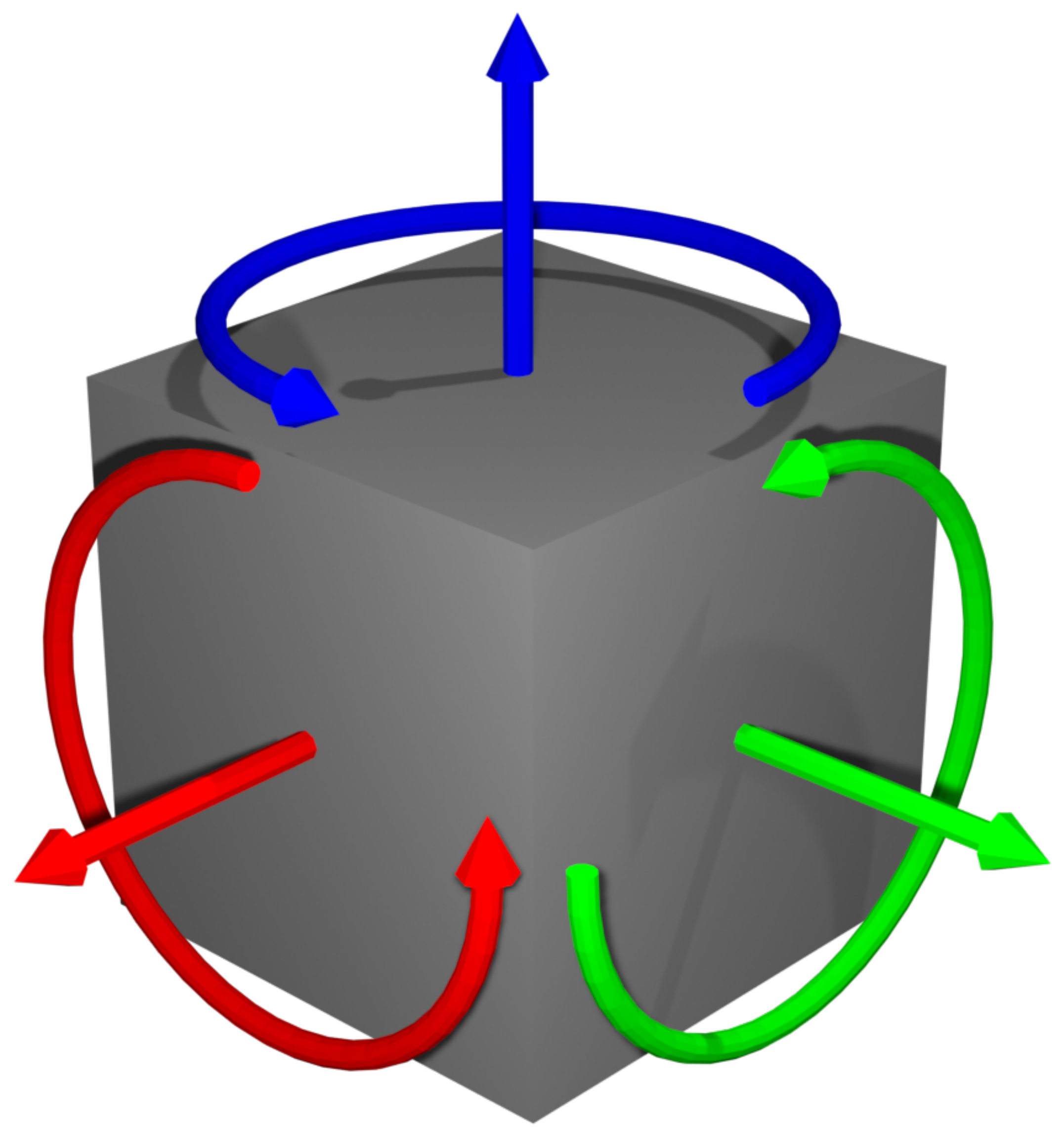
人類文明継続装置
輪廻 ヒロ

監修: 矢口 裕明
(博士(情報理工学))

注意事項

- 理系大学で学ぶ程度の数学知識を必要とします。
  - 線形代数は必須！
- これまでの講義で使ってきたものを一通り使います。
  - 同次座標変換
  - クォータニオン
  - AngleAxis
  - ラプラス変換、Z変換

6軸IMUとは？



IMU: Inertial Measurement Unit
自分の運動を計測できる装置
6軸の場合、
- 3軸ジャイロ=角速度計
- 3軸加速度計
  - 静止状態では鉛直上向きに1Gがかかる

9軸の場合、
+ 3軸地磁気計

姿勢推定問題

Q: 6軸IMUの現在の姿勢(回転角度)を求めよ。

->角速度を積分すれば
できるのでは？

->加速度から
重力方向を推定すれば
できるのでは？

計測結果には必ず誤差が乗る。

計測結果から真値を求めることは原理的に不可能。
ただし、誤差の分布や傾向に基づいて最小化はできる。

単純計算だと…

角速度積分では、
誤差ごと積分するため
低周波ノイズが乗る。

加速度からの推定では、
静止状態が前提となり
高周波ノイズが乗る。

相補フィルタ (Complementary Filter)

詳細は[1]

２つの異なる手段で同じ量を推定。
それぞれに伝達関数の和が1となるような
フィルタをかけて足し合わせる。
(周波数空間内の話であることに注意)

$$X_c(s) = G(s)X_a(s) + (1 - G(s))X_b(s)$$

例えばIMUの場合、
角速度積分から推定した姿勢にHPF,
加速度から推定した姿勢にLPFを適用。
同じカットオフ周波数のLPFとHPFは
相補の関係にある(伝達関数の和が1)。

6軸IMUの相補フィルタ

導出過程は[2]がより詳しい。

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= G(s)X_a(s) + (1 - G(s))X_g(s) \\
&= \frac{1}{\tau s + 1}X_a(s) + \frac{\tau s}{\tau s + 1}X_g(s) \\
&= \frac{1}{\tau s + 1}(X_a(s) + \tau\Omega(s)) \\
(\tau s + 1)Y(s) &= X_a(s) - \tau\Omega(s) \\
s &= \frac{1 - z^{-1}}{\Delta t} \\
\tau s + 1 &= \tau\frac{1 - z^{-1}}{\Delta t} + 1 \\
&= \frac{\tau + \Delta t}{\Delta t} - \frac{\tau}{\Delta t}z^{-1} \\
\frac{\tau + \Delta t}{\Delta t}Y &= X_a + \tau\Omega + \frac{\tau}{\Delta t}z^{-1}Y \\
y[k] &= \frac{\Delta t}{\tau + \Delta t}(x_a + \tau\omega + \frac{\tau}{\Delta t}y[k-1]) \\
&= \frac{\Delta t}{\tau + \Delta t}x_a + \frac{\tau}{\tau + \Delta t}(y[k-1] + \omega\Delta t) \\
&= K_a x_a + K_g(y[k-1] + \omega\Delta t)
\end{aligned}
$$

<-sは微分
Xgの微分はΩ

<-前進差分

<-Ka+Kg=1

(補足)カットオフ周波数

カットオフ周波数 $$f_c = \frac{1}{2\pi\tau}$$

時定数 $$\tau = \frac{1}{2\pi f_c}$$

Δt:サンプリング時間

加速度側の係数 $$K_a = \Delta t/(\tau + \Delta t)$$

$$(\tau + \Delta t)K_a = \Delta t$$

$$\tau = \frac{(1 - K_a)\Delta t}{K_a}$$

係数のみが書かれたソースもある。
例)[3] このときのfcを求めてみよう。

係数->カットオフ周波数 $$f_c = \frac{K_a}{2\pi\Delta t(1 - K_a)}$$

IMUの相補フィルタ

$$R_y(\theta_y)R_x(\theta_x) = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_y & \sin\theta_x\sin\theta_y & \cos\theta_x\sin\theta_y \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ -\sin\theta_y & \sin\theta_x\cos\theta_y & \cos\theta_x\cos\theta_y \end{bmatrix}$$

$$a_x = \cos\theta_x \sin\theta_y$$
$$a_y = -\sin\theta_x$$
$$a_z = \cos\theta_x \cos\theta_y$$

$$\boxed{\begin{aligned} \theta_x &= -\sin^{-1} a_y \\ \theta_y &= \tan^{-1} \frac{a_x}{a_z} \end{aligned}}$$

加速度から求めた姿勢(加速度の値は正規化する)

$$\dot{\theta} = \omega$$

ジャイロから求めた姿勢

$$\theta[k] = K_a \begin{pmatrix} -\sin^{-1} a_y \\ \tan^{-1} \frac{a_x}{a_z} \\ 0 \end{pmatrix} + K_g(\theta[k-1] + \omega\Delta t)$$

これがあまりよくない理由

ジンバルロック！！！！

オイラー角で計算する以上、
ジンバルロックを避けることができない。

クォータニオンにしたい！

クォータニオンにするには？

$$y[k] = K_a x_a \underline{+} K_g(y[k-1] + \underline{\omega \Delta t})$$

和ではなく補間

クォータニオンの微分

6軸IMUの相補フィルタ・更新版

[4]の手法を別の観点から導出
[5]の実装も参考にしている。

$$y[k] = K_a x_a + K_g(y[k-1] + \underline{\omega \Delta t})$$

↓回転行列表記、微分に戻す

G:グローバル座標
L:センサローカル座標

$${}^G R_L[k] = K_a {}^G x_{aL} \oplus K_g({}^G R_L[k-1] + \int_t^{t+\Delta t} {}^G \dot{x}_{gL} dt)$$

↓逆回転させると

補間を記号で表現

$${}^L R_G[k] = K_a {}^L x_{aG} \oplus K_g({}^G R_L[k-1] + \int_t^{t+\Delta t} {}^G \dot{x}_{gL} dt)^{-1}$$

$$= K_a {}^L x_{aG} \oplus K_g {}^G R_{gL}[k]^{-1}$$

↓さらに変形

$${}^G R_{gL}[k] {}^L R_G[k] = K_a {}^G R_{gL}[k] {}^L x_{aG} \oplus K_g I$$

$${}^L R_G[k] = {}^L R_{gG}[k](K_a {}^G R_{gL}[k] {}^L x_{aG} \oplus K_g I)$$

この結果を逆回転させればIMUの姿勢が得られる。

3軸ジャイロをクォータニオンにすると

$$\omega_v = (\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z)$$

<-ジャイロはx,y,z軸周りの角速度
= AngleAxis表現となっている。

$$= \omega n$$

$$\omega = ||\omega_v||, n = \omega_v / \omega$$

$$\omega_q = (\sin \omega/2 \quad n \cos \omega/2)$$

回転クォータニオンの微分

導出過程は[6]がより詳しい。

$$\dot{q}_t = \lim_{\Delta t \to 0} (q_{t+\Delta t} - q_t)/\Delta t$$

$$q_{t+\Delta t} - q_t = q_t \omega(\Delta t)_q - q_t$$

$$= q_t(\omega(\Delta t)_q - I_q)$$ <-Iq=(1 0 0 0)

$$\omega(\Delta t)_q - I_q = (\cos \omega \Delta t/2 - 1 \quad n \sin \omega \Delta t/2)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \omega(\Delta t)_q - I_q = (1 - 1 \quad \omega n \Delta t/2)$$

$$= \Delta t/2(0 \quad \omega_v)$$

$$\dot{q}_t = \frac{1}{2} q_t (0 \quad \omega_v)$$

<-AngleAxisのままで
計算できる。

ジャイロからの姿勢推定(クォータニオン)

$$\dot{q_g}[k] = \frac{1}{2}q[k-1](0 \quad \omega_v)$$
$$q_g[k] = q[k-1] + \dot{q_g}[k]\Delta t$$

↓逆回転させると

$${}^L q_{gG}[k] = {}^L q_G[k-1] + {}^L \dot{q}_{gG}[k]\Delta t$$
$${}^L \dot{q}_{gG}[k] = (\frac{1}{2}{}^G q_L[k-1](0 \quad \omega_v))^{-1}$$
$$= -\frac{1}{2}(0 \quad \omega_v){}^L q_G[k-1]$$

(定義上積分は加算、実用上は長さを1に調整)

加速度からの姿勢推定(クォータニオン)(1)

$$^{L}x_{aG}{}^{G}g = {}^{L}a$$

Gg=(0 0 1)^T

$$\underline{{}^{G}R_{gL}[k]{}^{L}x_{aG}}{}^{G}g = \underline{{}^{G}R_{gL}[k]{}^{L}a}$$

求めたいのはここだけ

$$R_{a}{}^{G}g = {}^{G}g_{a}$$

つまり、ジャイロで求めた姿勢で推定した重力ベクトルのずれを計算している。

$$R(q) = \begin{bmatrix} 1-2y^2-2z^2 & 2xy-2wz & 2xz+2wy \\ 2xy+2wz & 1-2x^2-2z^2 & 2yz-2wx \\ 2xz-2wy & 2yz+2wx & 1-2x^2-2y^2 \end{bmatrix}$$

$$g_{ax} = 2xz+2wy$$

$$g_{ay} = 2yz-2wx$$

$$g_{az} = 1-2x^2-2y^2$$

加速度からの姿勢推定(クォータニオン)(2)

$$
\begin{aligned}
z &\leftarrow 0, \text{(z軸周りは推定できない)} \\
g_{a_x} &= 2wy \\
g_{a_y} &= -2wx \\
g_{a_z} &= 1 - 2x^2 - 2y^2 \\
&= 1 - 2(1 - w^2) \\
&= 2w^2 - 1 \\
w &= \sqrt{(1 + g_{a_z})/2} \\
x &= -g_{a_y}/(2w) \\
&= -g_{a_y}/\sqrt{2(1 + g_{a_z})} \\
y &= g_{a_x}/(2w) \\
&= g_{a_x}/\sqrt{2(1 + g_{a_z})}
\end{aligned}
$$

$$
\Delta q_a = (\sqrt{\frac{(1 + g_{a_z})}{2}} \quad \frac{-g_{a_y}}{\sqrt{2(1 + g_{a_z})}} \quad \frac{g_{a_x}}{\sqrt{2(1 + g_{a_z})}} \quad 0)
$$

gazは1付近の値になることが期待される。

IMUの相補フィルタ(クォータニオン)

$$ {}^{L}q_G[k] = {}^{L}q_{gG}[k](K_a \Delta q_a \oplus K_g I) $$

この結果を逆回転させればIMUの姿勢が得られる。

おわりに

6軸IMUで相補フィルタを使った姿勢推定ができる。
- 線形補間の形に落とせるので実装がシンプルになる。
  - カットオフ周波数から係数を決める。
- クォータニオンでも設計できる。

今回紹介した手法の問題点
- 加速度が0=自由落下時に補正が効かない。
- 加速度だけでは重力方向周りの回転はわからない。
  -> 9軸なら磁気を使うとある程度改善する。
- 位置がわからない。
  - 加速度の二重積分で位置が出るのでは？
    -> 誤差が蓄積しまくってとても使えない。

参考文献

(Webサイトの閲覧日はすべて2022/3/7)
相補フィルタについて
- [1] 足立修一 , 丸田一郎."カルマンフィルタの基礎", 東京電機大学出版局, 2012. 8.1章

IMUの相補フィルタの導出
- [2] めかのとろ. "相補フィルタのしくみを解明してみる【加速度・ジャイロセンサ】"
  - https://depfields.com/complementary-filter/

係数だけが紹介されている例
- [3] Pieter-Jan Van de Maele.
  "Reading a IMU Without Kalman: The Complementary Filter"
  - https://www.pieter-jan.com/node/11

クォータニオンを用いたIMU相補フィルタ
- [4] Valenti, R.G.; Dryanovski, I.; Xiao, J. "Keeping a Good Attitude:
  A Quaternion-Based Orientation Filter for IMUs and MARGs".
  Sensors 2015, 15, 19302-19330.
  - https://www.mdpi.com/1424-8220/15/8/19302

実装例
- [5] https://github.com/ccny-ros-pkg/imu_tools

クォータニオンの微分の導出
- [6] GANTZ. "クォータニオンの時間微分と角速度の関係の証明"
  - https://qiita.com/GANTZ/items/dcd1236402b0c5f88790

ライセンスについて

フォントライセンス
- Rounded M+: M+ FONTS LICENSE
- Computer Modern: SIL Open Font License