相補フィルタで
6軸IMUの姿勢推定

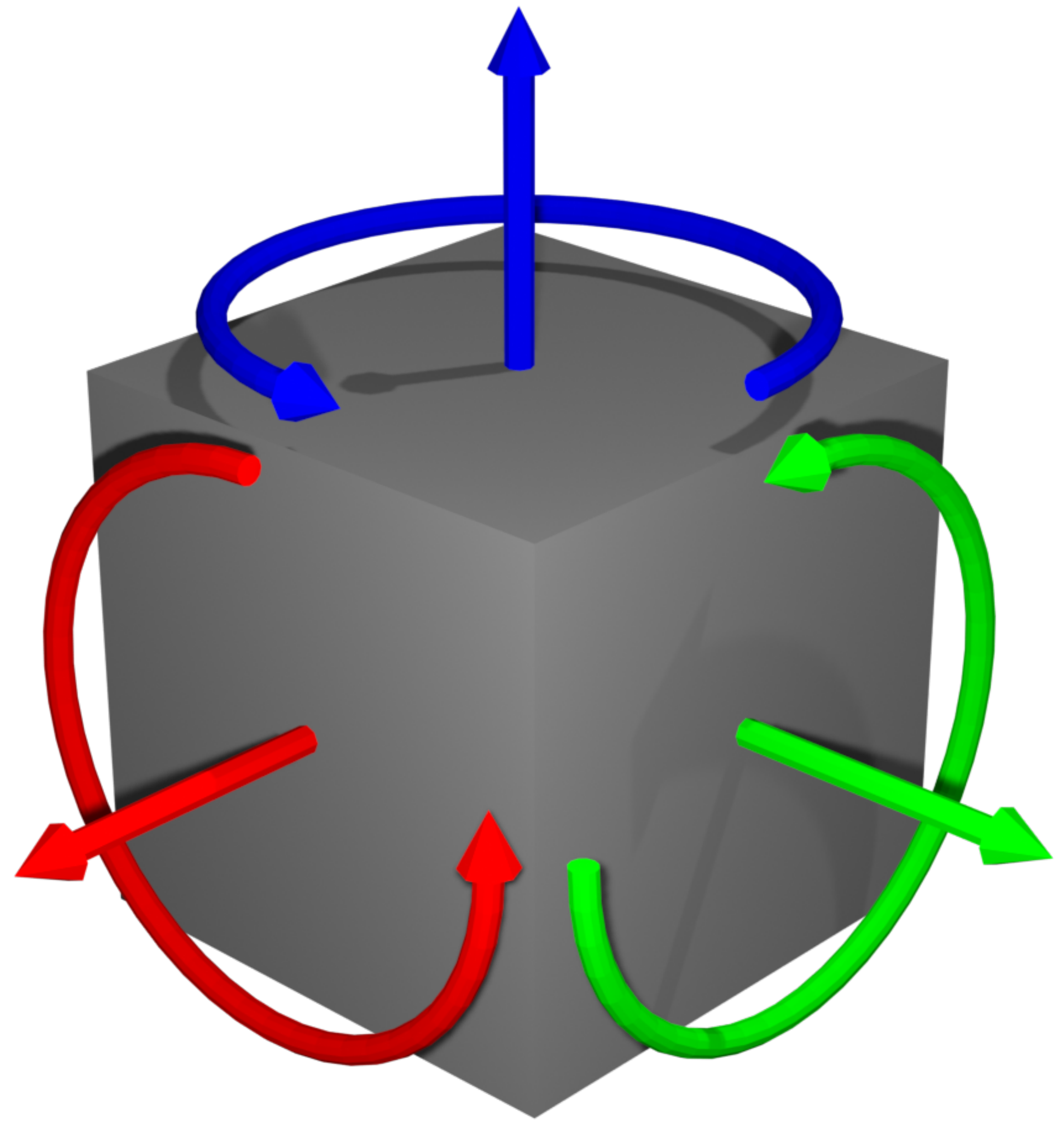
人類文明継続装置
輪廻 ヒロ

監修: 矢口 裕明
(博士(情報理工学))

注意事項

- 理系大学で学ぶ程度の数学知識を必要とします。
  - 線形代数は必須！
- これまでの講義で使ってきたものを一通り使います。
  - 同次座標変換
  - クォータニオン
  - AngleAxis
  - ラプラス変換、Z変換

6軸IMUとは？



IMU: Inertial Measurement Unit
自分の運動を計測できる装置
6軸の場合、
- 3軸ジャイロ=角速度計
- 3軸加速度計
  - 静止状態では鉛直上向きに1Gがかかる

9軸の場合、
+ 3軸地磁気計

姿勢推定問題

Q: 6軸IMUの現在の姿勢(回転角度)を求めよ。

->角速度を積分すれば
できるのでは？

->加速度から
重力方向を推定すれば
できるのでは？

計測結果には必ず誤差が乗る。

計測結果から真値を求めることは原理的に不可能。
ただし、誤差の分布や傾向に基づいて最小化はできる。

単純計算だと…

角速度積分では、
誤差ごと積分するため
低周波ノイズが乗る。

加速度からの推定では、
静止状態が前提となり
高周波ノイズが乗る。

相補フィルタ (Complementary Filter)

詳細は[1]

２つの異なる手段で同じ量を推定。
それぞれに伝達関数の和が1となるような
フィルタをかけて足し合わせる。
(周波数空間内の話であることに注意)

$$X_c(s) = G(s)X_a(s) + (1 - G(s))X_b(s)$$

例えばIMUの場合、
角速度積分から推定した姿勢にHPF,
加速度から推定した姿勢にLPFを適用。
同じカットオフ周波数のLPFとHPFは
相補の関係にある(伝達関数の和が1)。

6軸IMUの相補フィルタ

導出過程は[2]がより詳しい。

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= G(s)X_a(s) + (1 - G(s))X_g(s) \\
&= \frac{1}{\tau s + 1} X_a(s) + \frac{\tau s}{\tau s + 1} X_g(s) \\
&= \frac{1}{\tau s + 1} (X_a(s) + \tau \Omega(s)) \\
(\tau s + 1) Y(s) &= X_a(s) - \tau \Omega(s) \\
s &= \frac{1 - z^{-1}}{\Delta t} \\
\tau s + 1 &= \tau \frac{1 - z^{-1}}{\Delta t} + 1 \\
&= \frac{\tau + \Delta t}{\Delta t} - \frac{\tau}{\Delta t} z^{-1} \\
\frac{\tau + \Delta t}{\Delta t} Y &= X_a + \tau \Omega + \frac{\tau}{\Delta t} z^{-1} Y \\
y[k] &= \frac{\Delta t}{\tau + \Delta t} \left(x_a + \tau \omega + \frac{\tau}{\Delta t} y[k-1]\right) \\
&= \frac{\Delta t}{\tau + \Delta t} x_a + \frac{\tau}{\tau + \Delta t} (y[k-1] + \omega \Delta t) \\
&= K_a x_a + K_g (y[k-1] + \omega \Delta t)
\end{aligned}
$$

<-sは微分
Xgの微分はΩ

<-前進差分

<-Ka+Kg=1

(補足)カットオフ周波数

カットオフ周波数 $$f_c = \frac{1}{2\pi\tau}$$

時定数 $$\tau = \frac{1}{2\pi f_c}$$

Δt:サンプリング時間

加速度側の係数 $$K_a = \Delta t/(\tau + \Delta t)$$

$$(\tau + \Delta t)K_a = \Delta t$$

$$\tau = \frac{(1 - K_a)\Delta t}{K_a}$$

係数のみが書かれたソースもある。
例)[3] このときのfcを求めてみよう。

係数->カットオフ周波数 $$f_c = \frac{K_a}{2\pi\Delta t(1 - K_a)}$$

IMUの相補フィルタ

$$R_y(\theta_y)R_x(\theta_x) = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_y & \sin\theta_x\sin\theta_y & \cos\theta_x\sin\theta_y \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ -\sin\theta_y & \sin\theta_x\cos\theta_y & \cos\theta_x\cos\theta_y \end{bmatrix}$$

$$a_x = \cos\theta_x \sin\theta_y$$
$$a_y = -\sin\theta_x$$
$$a_z = \cos\theta_x \cos\theta_y$$

$$\theta_x = -\sin^{-1} a_y$$
$$\theta_y = \tan^{-1}\frac{a_x}{a_z}$$

加速度から求めた姿勢(加速度の値は正規化する)

$$\dot{\theta} = \omega$$

ジャイロから求めた姿勢

$$\theta[k] = K_a \begin{pmatrix} -\sin^{-1} a_y \\ \tan^{-1}\frac{a_x}{a_z} \\ 0 \end{pmatrix} + K_g(\theta[k-1] + \omega\Delta t)$$

これがあまりよくない理由

ジンバルロック！！！！

オイラー角で計算する以上、
ジンバルロックを避けることができない。

クォータニオンにしたい！

クォータニオンにするには？

$$y[k] = K_a x_a \underline{+} K_g(y[k-1] + \underline{\omega \Delta t})$$

和ではなく補間

クォータニオンの微分

6軸IMUの相補フィルタ・更新版

[4]の手法を別の観点から導出
[5]の実装も参考にしている。

$$y[k] = K_a x_a + K_g(y[k-1] + \underline{\omega \Delta t})$$

↓回転行列表記、微分に戻す

G:グローバル座標
L:センサローカル座標

$${}^G R_L[k] = K_a {}^G x_{aL} \oplus K_g({}^G R_L[k-1] + \int_t^{t+\Delta t} {}^G \dot{x}_{gL} dt)$$

↓逆回転させると

補間を記号で表現

$${}^L R_G[k] = K_a {}^L x_{aG} \oplus K_g({}^G R_L[k-1] + \int_t^{t+\Delta t} {}^G \dot{x}_{gL} dt)^{-1}$$

$$= K_a {}^L x_{aG} \oplus K_g {}^G R_{gL}[k]^{-1}$$

↓さらに変形

$${}^G R_{gL}[k] {}^L R_G[k] = K_a {}^G R_{gL}[k] {}^L x_{aG} \oplus K_g I$$

$${}^L R_G[k] = {}^L R_{gG}[k](K_a {}^G R_{gL}[k] {}^L x_{aG} \oplus K_g I)$$

この結果を逆回転させればIMUの姿勢が得られる。

3軸ジャイロをクォータニオンにすると

$$
\begin{aligned}
\omega_v &= (\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z) \\
&= \omega n
\end{aligned}
$$

<-ジャイロはx,y,z軸周りの角速度
= AngleAxis表現となっている。

$$\omega = ||\omega_v||, n = \omega_v / \omega$$

$$\omega_q = (\cos\omega/2 \quad n\sin\omega/2)$$

回転クォータニオンの微分

導出過程は[6]がより詳しい。

$$\dot{q}_t = \lim_{\Delta t \to 0} (q_{t+\Delta t} - q_t)/\Delta t$$

$$q_{t+\Delta t} - q_t = q_t \omega(\Delta t)_q - q_t$$

$$= q_t(\omega(\Delta t)_q - I_q)$$ <-Iq=(1 0 0 0)

$$\omega(\Delta t)_q - I_q = (\cos\omega\Delta t/2 - 1 \quad n\sin\omega\Delta t/2)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \omega(\Delta t)_q - I_q = (1 - 1 \quad \omega n \Delta t/2)$$

$$= \Delta t/2(0 \quad \omega_v)$$

$$\dot{q}_t = \frac{1}{2} q_t (0 \quad \omega_v)$$

<-AngleAxisのままで
計算できる。

ジャイロからの姿勢推定(クォータニオン)

$$\dot{q_g}[k] = \frac{1}{2}q[k-1](0 \ \ \omega_v)$$
$$q_g[k] = q[k-1] + \dot{q_g}[k]\Delta t$$

↓逆回転させると

$${}^L q_{gG}[k] = {}^L q_G[k-1] + {}^L \dot{q}_{gG}[k]\Delta t$$
$${}^L \dot{q}_{gG}[k] = (\frac{1}{2}{}^G q_L[k-1](0 \ \ \omega_v))^{-1}$$
$$= -\frac{1}{2}(0 \ \ \omega_v)^L q_G[k-1]$$

(定義上積分は加算、実用上は長さを1に調整)

加速度からの姿勢推定(クォータニオン)(1)

$$ {}^{L}x_{aG}{}^{G}g = {}^{L}a $$

Gg=(0 0 1)^T

$$ \underbrace{{}^{G}R_{gL}[k]{}^{L}x_{aG}}{}^{G}g = \underbrace{{}^{G}R_{gL}[k]{}^{L}a} $$

求めたいのはここだけ

$$ R_{a}{}^{G}g = {}^{G}g_{a} $$

つまり、ジャイロで求めた姿勢で推定した
重力ベクトルのずれを計算している。

$$ R(q) = \begin{bmatrix} 1-2y^2-2z^2 & 2xy-2wz & 2xz+2wy \\ 2xy+2wz & 1-2x^2-2z^2 & 2yz-2wx \\ 2xz-2wy & 2yz+2wx & 1-2x^2-2y^2 \end{bmatrix} $$

$$ g_{a_x} = 2xz+2wy $$

$$ g_{a_y} = 2yz-2wx $$

$$ g_{a_z} = 1-2x^2-2y^2 $$

加速度からの姿勢推定(クォータニオン)(2)

$$
\begin{aligned}
z &\leftarrow 0, \text{(z軸周りは推定できない)} \\
g_{a_x} &= 2wy \\
g_{a_y} &= -2wx \\
g_{a_z} &= 1 - 2x^2 - 2y^2 \\
&= 1 - 2(1 - w^2) \\
&= 2w^2 - 1 \\
w &= \sqrt{(1 + g_{a_z})/2} \\
x &= -g_{a_y}/(2w) \\
&= -g_{a_y}/\sqrt{2(1 + g_{a_z})} \\
y &= g_{a_x}/(2w) \\
&= g_{a_x}/\sqrt{2(1 + g_{a_z})}
\end{aligned}
$$

$$
\Delta q_a = (\sqrt{\frac{(1 + g_{a_z})}{2}} \quad \frac{-g_{a_y}}{\sqrt{2(1 + g_{a_z})}} \quad \frac{g_{a_x}}{\sqrt{2(1 + g_{a_z})}} \quad 0)
$$

gazは1付近の値になることが期待される。

IMUの相補フィルタ(クォータニオン)

$$ {}^{L}q_G[k] = {}^{L}q_{gG}[k](K_a \Delta q_a \oplus K_g I) $$

この結果を逆回転させればIMUの姿勢が得られる。

おわりに

6軸IMUで相補フィルタを使った姿勢推定ができる。
- 線形補間の形に落とせるので実装がシンプルになる。
  - カットオフ周波数から係数を決める。
- クォータニオンでも設計できる。

今回紹介した手法の問題点
- 加速度が0=自由落下時に補正が効かない。
- 加速度だけでは重力方向周りの回転はわからない。
  -> 9軸なら磁気を使うとある程度改善する。
- 位置がわからない。
  - 加速度の二重積分で位置が出るのでは？
    -> 誤差が蓄積しまくってとても使えない。

参考文献

(Webサイトの閲覧日はすべて2022/3/7)
相補フィルタについて
- [1] 足立修一 , 丸田一郎."カルマンフィルタの基礎", 東京電機大学出版局, 2012. 8.1章
IMUの相補フィルタの導出
- [2] めかのとろ. "相補フィルタのしくみを解明してみる【加速度・ジャイロセンサ】"
  - https://depfields.com/complementary-filter/
係数だけが紹介されている例
- [3] Pieter-Jan Van de Maele.
  "Reading a IMU Without Kalman: The Complementary Filter"
  - https://www.pieter-jan.com/node/11
クォータニオンを用いたIMU相補フィルタ
- [4] Valenti, R.G.; Dryanovski, I.; Xiao, J. "Keeping a Good Attitude:
  A Quaternion-Based Orientation Filter for IMUs and MARGs".
  Sensors 2015, 15, 19302-19330.
  - https://www.mdpi.com/1424-8220/15/8/19302
実装例
- [5] https://github.com/ccny-ros-pkg/imu_tools
クォータニオンの微分の導出
- [6] GANTZ. "クォータニオンの時間微分と角速度の関係の証明"
  - https://qiita.com/GANTZ/items/dcd1236402b0c5f88790

ライセンスについて

フォントライセンス
- Rounded M+: M+ FONTS LICENSE
- Computer Modern: SIL Open Font License