7.7 空间曲线及其方程

7.7.1 空间曲线的一般方程

空间曲线的方程

空间曲线C可视为两个相交曲面Σ_1和Σ_2的交线.

设Σ_1和Σ_2的方程分别是$F(x,y,z)=0$和$G(x,y,z)=0$, 则它们的交线C可用方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{7.7.1}$$

表示. 方程组(7.7.1)称为空间曲线C的一般方程.

例 7.1. 下列方程组分别表示怎样的曲线:

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ 2x+3y+4z=1; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \\ \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2. \end{cases}$

解:

(1) $x^2+y^2=1$表示母线平行于z轴, 准线为xOy上以原点为圆心的单位圆的柱面, $2x+3y+4z=1$表示平面, 该方程组表示它们的交线, 它为空间一椭圆.

(2) $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$表示球心在原点, 半径等于a的上半球面, $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$ 表示母线平行于z轴, 准线为xOy上以点$\left(\frac{a}{2},0\right)$为圆心, 半径等于$\frac{a}{2}$的圆的柱面, 该方程组表示它们的交线.

7.7.2 空间曲线的参数方程

如果将空间曲线C上的动点的坐标x,y,z分别表示成参数t的函数

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t), \end{cases} \tag{7.7.2}$$

则所得的方程组(7.7.2)称为曲线C的参数方程.

例 7.2. 求球面$x^2+y^2+z^2=R^2$与平面$z=h$交线的参数方程.

解: 令$x = \sqrt{R^2 - h^2}\cos t$, 则$y = \sqrt{R^2 - h^2}\sin t$, 故交线的参数方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{R^2 - h^2}\cos t, \\ y = \sqrt{R^2 - h^2}\sin t, \qquad t \in [0, 2\pi]. \\ z = h, \end{cases}$$

例 7.3. 如果空间一点M在圆柱面$x^2 + y^2 = a^2 (a > 0)$上以角速率ω绕z轴旋转, 同时又以线速度v沿平行于z轴的正向上升, 点M的轨迹曲线叫做螺旋线, 其参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t, \\ y = a\sin\omega t, \\ z = vt. \end{cases}$$

若令参数$\theta = \omega t$, $b = \frac{v}{\omega}$, 则螺旋线的参数方程可写作

$$\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta, \\ z = b\theta. \end{cases}$$

注意到螺距为$2\pi b$.

7.7.3 空间曲线在坐标面上的投影

以空间曲线C为准线, 母线垂直于xOy面的柱面称为曲线C关于xOy面的投影柱面. 投影柱面与xOy面的交线称为曲线C在xOy面上的投影曲线.

投影曲线方程的建立

设曲线C的一般方程为

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

求曲线在xOy面上的投影.

在方程组中消去变量z, 得方程

$$H(x, y) = 0.$$

注意到该方程所表示的曲面为过C且垂直于xOy的柱面, 由此得投影曲线为

$$\begin{cases} H(x, y) = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

类似地, 通过消去变量x或y可得曲线C在yOz面或zOx面上的投影曲线的曲线方程

$$\begin{cases} R(y, z) = 0, \\ x = 0 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} T(x, z) = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

例 7.4. 求旋转抛物面$z = x^2 + y^2$与平面$y + z = 1$的交线在xOy面上的投影.

解: 将方程$z = 1 - y$代入曲面方程有

$$x^2 + y^2 + y = 1.$$

配方后得

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

所以投影曲线为

$$\begin{cases} x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}, \\ z = 0. \end{cases}$$

它表示xOy平面上的圆.

例 7.5. 求曲线$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases}$ 在xOy和yOz面上的投影曲线的方程.

解: 先求在xOy面上的投影. 为此将两方程相减, 得

$$z = 1 - y.$$

将上式代入第一个方程中得

$$x^2 + 2y^2 - 2y = 0.$$

因而曲线在xOy面上的投影曲线的方程为

$$\begin{cases} x^2 + 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}, \\ z = 0. \end{cases}$$

曲线在yOz面上的投影曲线的方程为

$$\begin{cases} y + z - 1 = 0 (0 \le y \le 1), \\ x = 0. \end{cases}$$

空间立体(或空间曲面)在坐标面上的投影

例 7.6. 求上半球面$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$和上半锥面$z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$所围成的空间立体Ω在xOy面上的投影区域D_{xOy}.

解: 上半球面$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$和上半锥面$z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$的交线为

$$\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \\ z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}. \end{cases}$$

消去z得$x^2 + y^2 = 1$, 这是一个母线平行于z轴的投影柱面. 投影柱面与xOy面的交线为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

所以投影区域D_{xOy}为$x^2 + y^2 \le 1$.

7.7.4 思考与练习

练习 7.11. 求曲线$\begin{cases} z = x^2, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$在各坐标面上的投影曲线的方程.

解: 曲面$z = x^2$为平行于y的抛物柱面, 曲面向无限延伸, 而曲面$x^2 + y^2 = 1$为半径等于1的圆柱面, 因而在$z = 0$上的投影曲线为圆, 即投影曲线方程:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

在xOz面上, 投影曲线为

$$\begin{cases} z = x^2(-1 \le x \le 1), \\ y = 0. \end{cases}$$

同理可得曲线在yOz面上的投影曲线为

$$\begin{cases} z + y^2 = 1(-1 \le y \le 1), \\ x = 0. \end{cases}$$

7.8 二次曲面

- 三元二次方程$F(x, y, z) = 0$所表示的曲面称为二次曲面.
- 三元一次方程$F(x, y, z) = 0$所表示的曲面称为一次曲面, 即平面.

对曲面$F(x, y, z) = 0$的形状的探讨, 可以采用截痕法——即根据所给曲面的方程, 用坐标面和特殊的平面与曲面相截, 考察其截痕的形状, 然后对所得截痕加以综合, 从而得到曲面的全貌.

7.8.1 柱面

椭圆柱面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

所表示的曲面称为椭圆柱面.

用平行于坐标面xOy的平面$z = z_0$截此椭圆柱面所得截痕为中心在z轴上的椭圆

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = z_0. \end{cases}$$