12.4 可降阶的微分方程

二阶及二阶以上的微分方程称为高阶微分方程. 对于某些高阶微分方程，可以通过适当的变量代换将它们化成较低阶的方程来求解, 这种类型的方程称为可降阶的微分方程, 相应的求解方法也称为降阶法.

本节讨论三种可降阶的高阶微分方程和相应的解法:

- $y^{(n)} = f(x)$型的微分方程
- $y'' = f(x, y')$型的微分方程
- $y'' = f(y, y')$型的微分方程

12.4.1 $y^{(n)} = f(x)$型的微分方程

$y^{(n)} = f(x)$型的微分方程

设微分方程$y^{(n)} = f(x)$, 两端积分得

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x = f_1(x) + C_1.$$

继续积分得

$$y^{(n-2)} = \int (f_1(x) + C_1)\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + C_1 x = f_2(x) + C_1 x + C_2.$$

连续n次积分, 即可得到原方程的通解.

例 4.1. *求解微分方程*

$$y''' = xe^x.$$

解:

$$y'' = \int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - e^x + C_1.$$

$$y' = \int [xe^x - e^x + C_1]\,\mathrm{d}x = xe^x - 2e^x + C_1 x + C_2.$$

$$y = \int (xe^x - 2e^x + C_1 x + C_2)\,\mathrm{d}x = xe^x - 3e^x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3.$$

12.4.2 $y'' = f(x, y')$型的微分方程

$y'' = f(x, y')$型的微分方程

这类方程的特点是方程的右端不显含未知函数y. 令$y' = p$, 则方程化为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = f(x, p).$$

这是一个关于变量x,p的一阶微分方程. 设其通解为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p = \varphi(x, C_1),$$

通过两端积分, 可得该方程的通解

$$y = \int \varphi(x, C_1)\,\mathrm{d}x + C_2.$$

例 4.2. *求微分方程$xy'' + y' = x^2$的通解.*

解: 设$p = y'$, 则$y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$. 代入方程得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{x}p = x.$$

这是关于p的一阶非齐次线性微分方程. 利用通解公式得

$$\begin{aligned} p =& e^{-\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\left(\int x e^{\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C_1\right) = \frac{1}{x}\left(\int x^2\,\mathrm{d}x + C_1\right) \\ =& \frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) = \frac{C_1}{x} + \frac{x^2}{3}. \end{aligned}$$

由此得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{C_1}{x} + \frac{x^2}{3},$$

再通过分部积分即得原方程的通解

$$y = C_1 \ln|x| + \frac{1}{9}x^3 + C_2.$$

例 4.3. *求微分方程$(1 + x^2)y'' = 2xy'$满足初值条件$y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 3$的特解.*

解: 设$p = y'$, 则原方程化为可分离变量方程

$$(1 + x^2)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 2xp \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{2x\,\mathrm{d}x}{1 + x^2} \quad (p \neq 0).$$

两边积分得

$$\ln|p| = \ln(1 + x^2) + C_0 \quad\Leftrightarrow\quad p = C_1(1 + x^2) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = C_1(1 + x^2).$$

由条件$y'|_{x=0} = 3$得$C_1 = 3$. 所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3(1 + x^2).$$

再用分离变量法解得

$$y = 3x + x^3 + C_2.$$

根据条件$y|_{x=0} = 1$得$C_2 = 1$. 于是所求特解为

$$y = 3x + x^3 + 1.$$

12.4.3 $y'' = f(y, y')$型的微分方程

$y'' = f(y, y')$型的微分方程

这类方程的特点是方程的右端不显含自变量x. 令$y' = p$, 并把y看作自变量, 利用复合函数的求导法则可把y''化成p关于y的导数, 即有

$$y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y},$$

则原方程变形为一个关于变量y和p的一阶微分方程

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p).$$

若能求出它的通解并能把解表示成

$$p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi(y, C_1),$$

则分离变量并积分, 就得到该方程的通解

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

例 4.4. *求微分方程$yy'' - (y')^2 + y' = 0$的通解(y不为常数).*

解: 设$p = y'$, 则$y'' = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$. 代入方程得

$$\frac{\mathrm{d}p}{p-1} = \frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

两端积分得

$$\ln|p-1| = \ln|y| + C,$$

即

$$p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = C_1 y + 1 \ (C_1 = \pm e^C).$$

对上式分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{C_1 y + 1} = \mathrm{d}x,$$

两端积分变得原方程的通解

$$\frac{1}{C_1}\ln|C_1 y + 1| = x + C_2 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 y + 1 = C_3 e^{C_1 x}.$$

例 4.5. *求解初值问题*

$$\begin{cases} yy'' = 2(y'^2 - y^2), \\ y|_{x=0} = 1, \ y'|_{x=0} = 2. \end{cases}$$

解: 设$p=y'$, 则$y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 原方程化为

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=2(p^2-y^2).$$

此方程为齐次方程, 再变形为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\frac{2(p^2-y^2)}{yp}=\frac{2\left(\frac{p^2}{y^2}-1\right)}{\frac{p}{y}}.$$

令$u=\frac{p}{y}$, 则有

$$u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{2(u^2-1)}{u},\ 即\ y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{u^2-2}{u}.$$

解得

$$u^2-2=\left(\frac{p}{y}\right)^2-2=Cy^2.$$

由条件得$C=2$. 从而

$$y'=y\sqrt{2(y^2+1)},$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{y^2+1}}=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x.$$

该方程的解为

$$\ln\left(\sqrt{y^2+1}-1\right)-\ln y=\sqrt{2}x+C.$$

再由条件得$C=\ln(\sqrt{2}-1)$. 因此原方程的解为

$$\ln\left(\sqrt{y^2+1}-1\right)-\ln y=\sqrt{2}x+\ln(\sqrt{2}-1).$$

12.4.4 思考与练习

练习 12.11. *求解微分方程*

$$y''=\frac{1}{1+x^2}.$$

解: 两端积分得

$$y'=\int\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\arctan x+C_1.$$

再积分得

$$\begin{aligned}y=&\int(\arctan x+C_1)\,\mathrm{d}x=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x+C_1x\\=&x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2.\end{aligned}$$

练习 12.12. 求解初值问题

$$\begin{cases} xy'' - y'\ln y' + y'\ln x = 0, \\ y|_{x=1} = 2,\ y'|_{x=1} = e^2. \end{cases}$$

解: 设$p = y'$，则原方程为齐次方程

$$p' - \frac{p}{x}\ln\frac{p}{x} = 0.$$

令$u = \frac{p}{x}$，则$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u\ln u$，即

$$\frac{1}{u(\ln u - 1)}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

两端积分得$\ln|\ln u - 1| = \ln x + C$，即

$$\ln u - 1 = C_1 x \quad (C_1 = \pm e^C).$$

由初始条件$y'|_{x=1} = e^2$ 得$C_1 = 1$. 代入原方程得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xe^{x+1}.$$

两端积分得

$$y = (x-1)e^{x+1} + C_2.$$

由初始条件$y|_{x=1} = 2$ 得$C_2 = 2$. 故原方程的特解为

$$y = (x-1)e^{x+1} + 2.$$