第八章　多元函数的微分法及其应用

8.1　多元函数的基本概念

8.1.1　点集和区域

点集

平面上所有点的集合记为$\mathbb{R}^2$, 即

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

- 在平面上, 集合$\{(x,y) : a < x < b, c < y < d\}$是一开长方形, 也记为$(a,b) \times (c,d)$.
- 集合$\{(x,y) : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < a^2\}$是以$(x_0,y_0)$为圆心, a为半径的开圆盘.

三维空间中所有点的集合记为$\mathbb{R}^3$, 即

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}.$$

n维欧式空间

n元有序数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的全体所构成的集合记作$\mathbb{R}^n$, 即

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathbb{R}^n$中的每一个元素用单个粗体字母$\boldsymbol{x}$表示, 即$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

n维空间

设$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$为$\mathbb{R}^n$中任意两个元素, $\lambda \in \mathbb{R}$, 如下定义$\mathbb{R}^n$中的线性运算:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n),$$

$$\lambda \boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n),$$

这样定义了线性运算的集合$\mathbb{R}^n$称为n维空间.

欧式空间中的距离

$\mathbb{R}^n$中点$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与点$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$之间的距离记作$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, 定义为

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

$\mathbb{R}^n$中点$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与零元$\mathbf{0}$之间的距离$\rho(\boldsymbol{x},\mathbf{0})$记作$\|\boldsymbol{x}\|$(通常也记为$|\boldsymbol{x}|$), 即

$$\|\boldsymbol{x}\|=|\boldsymbol{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}.$$

因此$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$.

$\mathbb{R}^n$中距离的性质

(1) $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\geq 0$;

(2) $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=0\Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$;

(3) $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|$;

(4) $\mathbb{R}^n$中任意三点P_1,P_2,P_3, 有三角不等式

$$|P_1P_2|\leq|P_1P_3|+|P_3P_2|.$$

邻域

定义 1.1 (邻域). 设点$P_0\in\mathbb{R}^n$, 实数$\delta>0$, 则$U(P_0,\delta)=\{P\in\mathbb{R}^n:|PP_0|<\delta\}$称为点$P_0$的$\delta$邻域.

- 在平面上, $U(P_0,\delta)$就是平面上以点$P_0(x_0,y_0)$为中心, 以δ为半径的圆盘(不包括圆周).
- 在三维空间中, $U(P_0,\delta)$就是以点$P_0(x_0,y_0)$为中心, 以δ为半径的球(不包括圆周).

去心邻域

点P_0的去心δ邻域$\{P\in\mathbb{R}^n:0<|PP_0|<\delta\}$ 记为$\mathring{U}(P_0,\delta)$.

如果不需要强调邻域的半径, 通常就用$U(P_0)$或$\mathring{U}(P_0)$分别表示点P_0的某个邻域或某个去心邻域.

方邻域

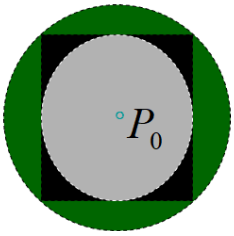
在讨论实际问题中也常使用方邻域, 因为方邻域与圆邻域可以互相包含.

平面上的方邻域为

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y):|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta\}.$$

内点、外点及边界点

设有非空点集E及一点P,



- 若存在点P的某邻域$U(P) \subset E$, 则称P是E的内点;
- 若存在点P的某邻域$U(P) \cap E = \varnothing$, 则称$P$是$E$的外点;
- 若在点P的任一邻域内, 都既有集合E中的点, 又有E的补集中的点, 则称P是E的边界点. E的边界点的全体称为E的边界, 记作∂E.

显然, E的内点必属于E, E的外点必不属于E, E的边界点可以属于E也可以不属于E.

例 1.1. 集合$E = \{(x,y)|0 \le x < 1, 0 \le y < 1\}$, 则内点的集合为$E_1 = \{(x,y)|0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, 相应的边界为

$$\begin{aligned}\partial E =& \{(0,y)|0 \le y \le 1\} \cup \{(1,y)|0 \le y \le 1\} \\ & \cup \{(x,0)|0 \le x \le 1\} \cup \{(x,1)|0 \le x \le 1\}.\end{aligned}$$

设有非空点集E及一点P, 若P的任一邻域内都含有无穷多个属于E的点, 则称P为E的聚点. 聚点可以属于E, 也可以不属于E(因为聚点可以为E 的边界点). 所有聚点所成的点集称为E的导集.

E的内点必为E的聚点, 但E的聚点不一定是E的内点.

例 1.2. 考察点集$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$的聚点.

0.

开集和闭集

若E中每一点都是E的内点, 则称E是开集; 若E 的每一个聚点都属于E, 则称E是闭集. 约定空集$\varnothing$ 既是开集又是闭集.

在实数轴上, 开区间(a,b)是$\mathbb{R}$上的开集, 闭区间$[a,b]$是$\mathbb{R}$上的闭集.

例 1.3. 集合$\{(x,y)|1 < x^2+y^2 < 2\}$是开集, $\{(x,y)|1 \le x^2+y^2 \le 2\}$是闭集, $\{(x,y)|1 \le x^2+y^2 < 2\}$既不是开集, 也不是闭集.

注 1.1. 在所有n维点集中, 只有$\mathbb{R}^n$与$\varnothing$是既开又闭的点集.

连通集

如果对于E中任意两点P_1与P_2, 总存在E中的折线把P_1与P_2联结起来, 则称E是连通的.

区域

连通的非空开集称为区域(或开区域), 区域连同其边界一起称为闭区域.

若平面区域E中的任意闭曲线所围成的有界区域均为E的子集, 则称E为单连通区域, 否则称为多连通区域.

例 1.4. *(1)* 在空间中, 集合$\{(x,y,z): x^2+y^2<z<4-x^2-y^2\}$是$\mathbb{R}^3$中的区域.

(2) 在平面上, 点集$\{(x,y): |x|>1\}$是开集, 但非区域.

(3) 在平面上, 集合$\{(x,y): x^2+y^2<1\}$是单连通区域, 集合$\{(x,y): 0<x^2+y^2<1\}$是多连通区域.

有界集

如果存在常数$k>0$, 使得对所有的点$P\in E$(其中O为原点), 都有$|OP|<k$, 则称E为有界集. 一个集合若不是有界集, 就称其为无界集.

例 1.5. 集合$\{(x,y)|1<x^2+y^2<2\}$是有界区域, $\{(x,y)|x+y>0\}$是无界区域, $\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 2\}$是有界闭区域, $\{(x,y)|x+y\ge 0\}$ 是无界闭区域.

定义 1.2. 设E是有界区域, 正数

$$d(E)=\sup\{|P_1-P_2|: P_1,P_2\in E\}$$

称为区域的直径.

8.1.2 多元函数的概念

多元函数

定义 1.3. 设D为$\mathbb{R}^n$中的非空子集, 如果对于D中的任意一点$P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 按照某种规则f, 变量z都有确定的实数值与它对应, 则称z为变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$的n元函数, 记为

$$z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \quad \text{或} \quad z=f(P).$$

集合D称为映射f的定义域, 记为$D_f=D$. $\{f(P)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n): P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D\}$ 称为函数的值域, 记为R_f或$f(D)$.

当$n=1$时, 称f为一元函数; $n\ge 2$时, 称f为多元函数.

与一元函数相仿, 当我们用某个算式表达多元函数时, 凡是使算式有意义的自变量所组成的点集称为该多元函数的自然定义域.

函数$z = \ln(x+y)$的定义域为$D = \{(x,y)|x+y>0\}$.

函数$z = \arcsin(x^2+y^2)$的定义域为$D = \{(x,y)|x^2+y^2 \le 1\}$.

一个二元函数$z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$的图形是$Oxyz$空间中的集合

$$G = \{(x,y,z)|z = f(x,y),(x,y) \in D\},$$

在几何上二元函数的图形是$Oxyz$空间的一张曲面.

在直角坐标下, 这张曲面在xOy坐标平面上的投影就是函数$f(x,y)$的定义域D.

函数$z = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$的定义域是xOy平面上的单位圆域$\{(x,y)|x^2+y^2 \le 1\}$，值域为区间$[0,1]$，它的图形是以原点为中心的单位球面的上半部分, 在xOy面上的投影区域是$\{(x,y)|x^2+y^2 \le 1\}$.

8.1.3 多元函数的极限

定义 1.4. *设函数$f(P)$在区域D有定义, P_0是D的聚点, 若存在常数A, 对任意$\varepsilon > 0$, 总存在$\delta > 0$ 使得当$0 < |P - P_0| < \delta$(或$P \in \mathring{U}(P_0,\delta)$)时就有*

$$|f(P) - A| < \varepsilon,$$

则称A为函数$f(P)$当P趋于P_0时的极限, 记作

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A$$

或者

$$f(P) \to A \quad (P \to P_0).$$

为区别于一元函数的极限, 我们把n元函数的极限称为n重极限.

二元函数的极限可写作:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} f(x,y) = A,$$

其中$\rho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

n重极限的性质

性质 1.2 (唯一性). *若$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$存在, 则$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$唯一.*

性质 1.3 (局部有界性). *若$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$存在, 则存在$\delta > 0$, 使得$f(P)$在$\mathring{U}(P_0,\delta)$内有界.*

性质 1.4 (保号性). *若$\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = A > 0$, 则存在$\delta > 0$, 使得在$\mathring{U}(P_0,\delta)$内$f(P) > 0$.*

性质 1.5 (**比较性**). 若 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$, $\lim\limits_{P\to P_0} g(P)=B$, 并且当$P\in \mathring{U}(P_0,\delta)$时有$f(P)\geq g(P)$, 则$A\geq B$.

性质 1.6 (**四则运算**). 若 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$, $\lim\limits_{P\to P_0} g(P)=B$, 则$f\pm g$, fg, f/g(若$B\neq 0$), 当$P\to P_0$时极限都存在, 并且

$$\lim_{P\to P_0}(f(P)\pm g(P))=A\pm B,\quad \lim_{P\to P_0} f(P)g(P)=AB,$$

$$\lim_{P\to P_0}\frac{f(P)}{g(P)}=\frac{A}{B}\quad (B\neq 0).$$

例 1.6. 设$f(x,y)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0.\end{cases}$ 求证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

证明: 当$x^2+y^2\neq 0$时, 有

$$|f(x,y)-0|=\left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right|\leq |x|+|y|\leq 2\sqrt{x^2+y^2}.$$

对任意的$\varepsilon>0$, 要使$|f(x,y)-0|<\varepsilon$, 只要$2\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$. 因此取$\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, 则当$0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$时, 总有

$$|f(x,y)-0|\leq 2\sqrt{x^2+y^2}<2\delta=\varepsilon.$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

例 1.7. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\frac{xy+1}{x^2+y}$.

解: 由极限的运算法则得

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{xy+1}{x^2+y}=\frac{3}{3}=1.$$

例 1.8. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{y}\sin(xy)$.

解:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{y}\sin(xy)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\cdot\frac{\sin(xy)}{xy}=0.$$

例 1.9. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(1+xy)}{y}$.

解: 由极限的运算法则得

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(1+xy)}{y}&=\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(1+xy)}{xy}x\\&=\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(1+xy)}{xy}\lim_{x\to1}x=1.\end{aligned}$$

例 1.10. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x+y)^2}{\sqrt[3]{1+\sin^2(x+y)}-1}$.

解:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x+y)^2}{\sqrt[3]{1+\sin^2(x+y)}-1}=\lim_{t\to0}\frac{t^2}{\sqrt[3]{1+\sin^2 t}-1}=\lim_{t\to0}\frac{t^2}{\frac{1}{3}\sin^2 t}=3.$$

例 1.11. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

解: 易知

$$|x^2y^2\ln(x^2+y^2)|\le\frac{1}{2}[x^2+y^2]^2\ln(x^2+y^2).$$

由于

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{2}[x^2+y^2]^2\ln(x^2+y^2)=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{2}t^2\ln t=0,$$

则根据夹逼定理知

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}x^2y^2\ln(x^2+y^2)=0.$$

故

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}e^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)}=e^0=1.$$

例 1.12. 求 $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{(xy+yz)^2}{x^2+y^2+z^2}$.

解: 由

$$(xy+yz)^2=y^2(x+z)^2\le2y^2(x^2+z^2)$$

知当$(x,y,z)\ne(0,0,0)$时,

$$0\le\frac{(xy+yz)^2}{x^2+y^2+z^2}\le2y^2.$$

又 $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}2y^2=0$, 由夹逼定理可得

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{(xy+yz)^2}{x^2+y^2+z^2}=0.$$

例 1.13. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

解: 因为$x^2y^2 \le \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2$, 故

$$\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2} \ge \frac{4(1-\cos r^2)}{r^6},$$

其中$r^2 = x^2+y^2$. 又

$$\lim_{r\to 0}\frac{4(1-\cos r^2)}{r^6} = \lim_{r\to 0}\frac{2r^4}{r^6} = +\infty,$$

故

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2} = +\infty.$$

注: 定义中$P\to P_0$的方式是任意的.

- 若点P以某种特殊的方式, 如沿一条定直线或曲线趋近于点P_0时, 即使$f(P)$无限接近于某个常数A, 我们也不能断定函数的极限存在.

- 反之, 如果点P以不同方式趋近于点P_0时, $f(P)$ 趋于不同的值, 那么就可以断定这个函数的极限不存在.

例 1.14. 讨论$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$当$(x,y)\to(0,0)$时是否存在极限.

解: 当动点(x,y)沿着直线$y = mx$而趋于定点$(0,0)$时，由于此时$f(x,y) = f(x,mx) = \frac{m}{1+m^2}$，因而有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \frac{m}{1+m^2}.$$

此式说明动点沿不同斜率m的直线趋于原点时，对应的极限值也不同，因此所讨论的极限不存在.

例 1.15. 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y}{2x^6+3y^2}$极限不存在.

解: 取$y = kx^3$, 则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{2x^6+3y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{kx^6}{2x^6+3k^2x^6} = \frac{k}{2+3k^2}.$$

上式随着k的不同而变化，因此原极限不存在.

8.1.4 累次极限

定义 1.5 (**二元函数的累次极限**). 设$E_x, E_y \subset \mathbb{R}$, x_0是E_x的聚点, y_0是E_y的聚点, 二元函数$f(P)$在集合$D = E_x \times E_y$上有定义, 若对每一个$y \in E_y$, $y \neq y_0$, 极限$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in E_x}} f(x,y)$存在, 此极限记作$\varphi(y) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in E_x}} f(x,y)$, 而且进一步极限$\lim\limits_{\substack{y\to y_0\\ y\in E_y}} \varphi(y)$存在, 则称此极限为二元函数$f(P)$先对$x$后对$y$的累次极限, 并记为$A = \lim\limits_{\substack{y\to y_0\\ y\in E_y}} \left[\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in E_x}} f(x,y)\right]$, 或简记为$A = \lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$.

类似可定义先对y后对x的累次极限$\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$.

例 1.16. 设$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0, \end{cases}$ 求函数$f(x,y)$在点$(0,0)$处的两个累次极限.

解:

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0,$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

两个累次极限存在(甚至相等)并不能得到二重极限存在.

例 1.17. 设$f(x,y) = x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}$, 求函数$f(x,y)$在点$(0,0)$处的两个累次极限.

解: 由于$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{y\to 0}\sin\frac{1}{y}$不存在, 所以$f(x,y)$在点$(0,0)$处的两个累次极限均不存在.

即使函数的二重极限存在, 两个累次极限也可能不存在.

重极限与累次极限之间的联系

定理 1.7. 若二重极限$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$和累次极限$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ (或另一次序)都存在, 则必相等.

推论 1.8. 若累次极限$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 和二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$都存在, 则三者相等.

推论 1.9. 若累次极限$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$与$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$存在但不相等, 则二重极限$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$必不存在.

8.1.5 多元连续函数及其性质

定义 1.6. 设n元函数$f(P)$的定义域为D, 聚点$P_0 \in D$, 若

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0),$$

则称n元函数$f(P)$在点P_0处连续. 如果函数$f(P)$在D的每一点处都连续, 则称函数$f(P)$在D上连续, 或称$f(P)$是D上的连续函数, 记为$f(P) \in C(D)$.

设n元函数$f(P)$的定义域为D, 聚点$P_0 \in D$, 若$f(P)$在点P_0处不连续, 则称P_0为间断点.

函数$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ 在点$(0,0)$处极限不存在, 故$(0,0)$为其间断点.

函数$f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2-1}$ 在圆周$x^2+y^2=1$上间断.

区域D上的多元连续函数的和、差、积、商（在分母不为零处）仍是D上的连续函数; 多元连续函数的复合函数也是连续函数.

多元初等函数

一个多元初等函数是指能用一个算式表示的多元函数, 这个算式由常量及其不同自变量的一元基本初等函数经有限次的四则运算和复合运算而得到的.

多元初等函数在其定义域内的任一区域或闭区域上是连续的.

例 1.18. 求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解:

$$原式 = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(\sqrt{xy+1})^2-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{\sqrt{xy+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

例 1.19. 证明$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 在全平面连续.

证明: 在$(x,y) \neq (0,0)$处, $f(x,y)$为初等函数, 故连续. 又

$$0 \le \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2},$$

由夹逼准则得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = f(0,0).$$

故函数在全平面连续.

有界闭区域上多元连续函数的性质

性质 1.10 (**最值定理**). 如果多元函数$f(P)$在有界闭区域D上连续，那么在D上至少存在一个P_1、至少存在一个P_2，使得$f(P_1)=\max\limits_{P\in D}\{f(P)\}$，$f(P_2)=\min\limits_{P\in D}\{f(P)\}$.

推论 1.11. 有界闭区域D上的多元连续函数是D上的有界函数，即存在常数M，使得对一切$P\in D$，有$|f(P)|\leq M$.

性质 1.12 (**介值定理**). 设多元函数$f(P)$在有界闭区域D上连续，$P_1,P_2\in D$ 且$f(P_1)<f(P_2)$，如果数值μ 满足$f(P_1)<\mu<f(P_2)$，那么在D 上至少存在一个P_0，使得$f(P_0)=\mu$.

推论 1.13. 有界闭区域D上的多元连续函数可以取到介于最大值和最小值之间的一切值.

8.1.6 思考与练习

练习 8.1. 求$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\sqrt{1+xy}}{xy}$.

解: 由于

$$\frac{1-\sqrt{1+xy}}{xy}=\frac{(1-\sqrt{1+xy})(1+\sqrt{1+xy})}{xy(1+\sqrt{1+xy})}=\frac{-1}{1+\sqrt{1+xy}},$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\sqrt{1+xy}}{xy}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-1}{1+\sqrt{1+xy}}=-\frac{1}{2}.$$

练习 8.2. 设$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}$，证明$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

证明: 此时$(x_0,y_0)=(0,0)$，$A=0$. 由于

$$0\leq|f(x,y)-0|=\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|=\frac{x^2|y|}{x^2+y^2}\leq|y|,$$

又$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|y|=0$，故由夹逼准则得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}|f(x,y)-0|=0.$$

所以$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

练习 8.3. 极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x\dfrac{\ln(1+xy)}{x+y}=0$是否存在？

解: 取$y=x^\alpha-x\,(\alpha>0)$，则

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^\alpha-x}}x\frac{\ln(1+xy)}{x+y}=\lim_{x\to0}x\frac{\ln(1+x(x^\alpha-x))}{x^\alpha}=\lim_{x\to0}(x^2-x^{3-\alpha})$$

$$=\begin{cases}-1, & \alpha=3,\\ 0, & 0<\alpha<3,\\ \infty, & \alpha>3.\end{cases}$$

所以不存在.