11.5 函数展开成幂级数

11.5.1 泰勒级数

问题的提出

对给定的函数$f(x)$, 能否找到一个幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 使得它在某个区间$(-R,R)$内的和恰为给定的函数$f(x)$, 即有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (x\in(-R,R)).$$

泰勒公式

若函数$f(x)$在点x_0的某邻域$U(x_0,r)$内存在直至$n+1$阶的连续导数，则在该邻域内$f(x)$有泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x), \tag{11.5.1}$$

这里$R_n(x)$为拉格朗日型余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中ξ在x与x_0之间.

此时在该邻域内$f(x)$可以用n阶泰勒多项式

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

近似表示，并且误差$|f(x)-P_n(x)|$为

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|.$$

若函数$f(x)$在点x_0处存在任意阶导数, 则幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

称为函数$f(x)$的泰勒(Taylor)级数.

当$x_0=0$时, 泰勒级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$称为麦克劳林(Maclaurin)级数.

定理 5.1. 设级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$的收敛半径为$R>0$, $f(x)$是幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$在$(x_0-R,x_0+R)$内的和函数, 则

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n=0,1,2,\cdots,$$

即有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad x_0-R<x<x_0+R.$$

如果函数$f(x)$是$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$在$(x_0-R,x_0+R)$内的和函数, 则其幂级数是唯一的.

问题

设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上无穷光滑, 是否存在正常数R使得$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 在(x_0-R,x_0+R)上收敛于$f(x)$?

例 5.1. 考察函数

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在$x=0$处的泰勒级数.

由于f在$x=0$处的任何阶导数都等于0，即

$$f^{(n)}(0)=0,\quad n=1,2,\cdots,$$

因此f在$x=0$处的泰勒级数为

$$0+0\cdot x+\frac{0}{2!}x^2+\cdots+\frac{0}{n!}x^n+\cdots.$$

显然它在$(-\infty,+\infty)$上收敛，且其和函数$S(x)=0$. 由此可见，对一切$x\neq 0$都有$f(x)\neq S(x)$.

具有任意阶导数的函数，其泰勒级数并不都能收敛于该函数本身.

如果$f(x)$能在点x_0的某邻域上等于其泰勒级数的和函数，则称函数$f(x)$在点x_0的这一邻域上可以展开成泰勒级数, 并称等式

$$\begin{aligned} f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots\\ +\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots\end{aligned}$$

的右边为$f(x)$在x_0处的泰勒展开式，或称幂级数展开式.

定理 5.2. 设函数$f(x)$在点x_0的某个邻域$U(x_0)$内有各阶导数, 且对任意自然数n, 其泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中$R_n(x)$是余项. 那么$f(x)$在该邻域内能展开成泰勒级数的充分必要条件是对任意的$x\in U(x_0)$, 有$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

定理 5.3 (**充分条件**)**.** 设函数$f(x)$在点x_0的某个邻域$U(x_0)$内有各阶导数, 且导函数所成函数列$\{f^{(n)}(x)\}$一致有界, 则函数$f(x)$在该邻域内能展开成泰勒级数.

例 5.2. 将函数$f(x)=x^3-2x^2+x+3$展成x和$x+1$的幂级数.

解:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 3 + x - 2x^2 + x^3,$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3 \\ &= -1 + 8(x+1) - 5(x+1)^2 + (x+1)^3. \end{aligned}$$

11.5.2 初等函数的幂级数展开式

1. 直接展开法

将函数$f(x)$展开成$x-x_0$的幂级数, 可按照下列步骤进行:

(1) 求出$f(x)$在$x=x_0$处的各阶导数值$f^{(n)}(x_0)$;

(2) 写出幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, 并求出其收敛区间$U(x_0,R)$;

(3) 验证在区间$U(x_0,R)$内，极限

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0, \quad (\xi\text{介于}x_0\text{与}x\text{之间}).$$

若上式成立，则

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad x \in (x_0-R, x_0+R);$$

若上式不成立, 幂级数虽然收敛, 但和函数$s(x)$不等于函数$f(x)$.

(4) 考察泰勒级数在收敛区间$U(x_0,R)$端点$x = x_0 \pm R$处的敛散性. 若级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}R^n$ (或$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(-R)^n$)收敛, 且$f(x)$在$x_0+R$处左连续(或在$x_0-R$处右连续), 则

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

在x_0+R(或x_0-R)处也成立; 否则, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 只在$U(x_0,R)$内成立.

例 5.3. 将$f(x)=e^x$ 展开成x的幂级数.

解: 由于$f^{(n)}(x)=e^x$, 故$f^{(n)}(0)=1$ $(n=1,2,\cdots)$. 所以幂级数为

$$1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots.$$

收敛半径为$R=+\infty$, 收敛区间为$(-\infty,+\infty)$. 当$x\in(-\infty,+\infty)$时,

$$|R_n(x)|=\left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}\quad(|\xi|<|x|).$$

注意到x为有限值，故有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}=0.$$

因而$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$. 于是函数$f(x)=e^x$的麦克劳林级数为

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

例 5.4. 求函数$f(x)=\sin x$ 的麦克劳林级数展开式.

解: 由于

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\ n=1,2,\cdots.$$

考察其拉格朗日型余项

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\sin\left(\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to0(n\to\infty),$$

所以$f(x)=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上能展开为麦克劳林级数

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

2. 间接展开法

利用已有的展开式, 通过适当的变换

(1) 代数运算(加、减、乘);

(2) 分析运算(逐项求导、逐项积分);

(3) 其他变量代换等,

求出未知的展开式的方法, 即称为“间接展开法. 由泰勒级数的唯一性, 所得到的级数一定是所求函数的泰勒级数.

应用间接展开法, 需要熟记下面几个基本展开式:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\quad x\in(-1,1),$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

例 5.5. 求$\cos x$的麦克劳林级数.

解: 由于

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

利用逐项求导，可得$\cos x$的麦克劳林级数

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

例 5.6. 求函数$f(x) = \ln(1+x)$ 的麦克劳林级数.

解: 因为$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$, 而

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad x \in (-1, 1),$$

两边积分得

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

验证知展开式在点$x = 1$处收敛, 因此在区间$(-1, 1]$上展开式成立. 由此可得

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n+1} + \cdots.$$

例 5.7. 求函数$f(x) = \frac{x}{2+x-x^2}$的麦克劳林级数.

解: 由于

$$\begin{aligned} \frac{1}{2+x-x^2} &= \frac{1}{(1+x)(2-x)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x}\right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \quad (|x| < 1), \end{aligned}$$

因此当$|x| < 1$时,

$$f(x) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right] x^{n+1}.$$

例 5.8. *求函数$f(x) = \sin x \cos x$的麦克劳林级数.*

解: 由于

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

因此

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

例 5.9. *求函数$\arctan x$ 的麦克劳林级数.*

解: 因为$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, 而$\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, $x \in (-1, 1)$, 故

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad x \in (-1, 1).$$

两边积分得

$$\begin{aligned} \arctan x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} \, \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

当$x = \pm 1$时, 级数是收敛的. 所以

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

例 5.10. *将函数$f(x) = (1+x)^\alpha$ (α是常数) 展开成麦克劳林级数.*

解: 当α为正整数时，由二项式展开定理知

$$(1+x)^\alpha = C_\alpha^0 + C_\alpha^1 x + C_\alpha^2 x^2 + \cdots + C_\alpha^\alpha x^\alpha.$$

当α不为正整数时，

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \ n = 1, 2, \cdots,$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1), \ n = 1, 2, \cdots.$$

于是$f(x)$的麦克劳林级数是

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots. \tag{11.5.2}$$

由比值判别法可得收敛半径$R = 1$.

为避免研究余项, 设此级数的和函数为$F(x)$, 即

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

逐项微分得

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} x^n.$$

所以

$$(1+x)F'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} \right) x^n = \alpha F(x).$$

注意到$F(0) = 1$, 解得$F(x) = (1+x)^\alpha$. 故有展开式

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots, \quad x \in (-1,1).$$

此式称为牛顿(Newton)二项式展开.

- 当$\alpha \le -1$时, 收敛域为$(-1,1)$;
- 当$-1 < \alpha < 0$时, 收敛域为$(-1,1]$;
- 当$\alpha > 0$时, 收敛域为$[-1,1]$.

取$\alpha = -1$时,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \quad x \in (-1,1).$$

取$\alpha = \frac{1}{2}$时,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \cdots, \quad x \in [-1,1].$$

取$\alpha = -\frac{1}{2}$时,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots, \quad x \in (-1,1].$$

例 5.11. 求函数$\frac{1}{x^2+4x+3}$展开成$x-1$的幂级数.

解: 因为

$$\frac{1}{x^2+4x+3} = \frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{3+x} \right),$$

而

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2+(x-1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{2^{n+1}} \quad x \in (-1,3),$$

$$\frac{1}{3+x} = \frac{1}{4+(x-1)} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{4^{n+1}} \quad x \in (-3,5),$$

故

$$\frac{1}{x^2+4x+3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{4^{n+1}} \right) (x-1)^n \quad x \in (-1,3).$$

例 5.12. 求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$的和.

解: 作幂级数

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}x^{2n+1},$$

易知收敛区间为$[-1,1]$, 则原式为$s=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}=s(1)$. 由于

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n}\xlongequal{y=x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}y^{n}=s_1(y),$$

$$s_1'(y)=\sum_{n=1}^{\infty}y^{n-1}=\frac{1}{1-y},$$

从而

$$s_1(y)=-\ln(1-y),\quad s'(x)=-s_1(x^2)=-\ln(1-x^2).$$

所以

$$\begin{aligned}s(x)=&-\int_0^x\ln(1-t^2)\,\mathrm{d}t=-x\ln(1-x^2)-\int_0^x\frac{2t^2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t\\=&(1-x)\ln(1-x^2)+2x-2\ln(1+x).\end{aligned}$$

注意到

$$\lim_{x\to1^-}(1-x)\ln(1-x^2)=0,$$

所以原式为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}=s(1)=2(1-\ln2).$$