9.2 二重积分的计算

9.2.1 利用直角坐标计算二重积分

设D是xOy平面上的一个有界闭区域, 若D可用不等式组

$$a \le x \le b, \quad g_1(x) \le y \le g_2(x)$$

来表示, 其中$g_1(x), g_2(x)$在$[a,b]$上连续, 则称D为x型区域.

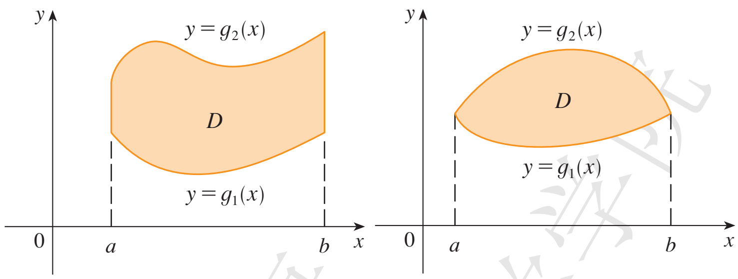


图 9.1: x型区域

若D可用不等式组

$$c \le y \le d, \quad h_1(y) \le x \le h_2(y)$$

来表示, 其中$h_1(y), h_2(y)$在$[c,d]$上连续, 则称D为y型区域.

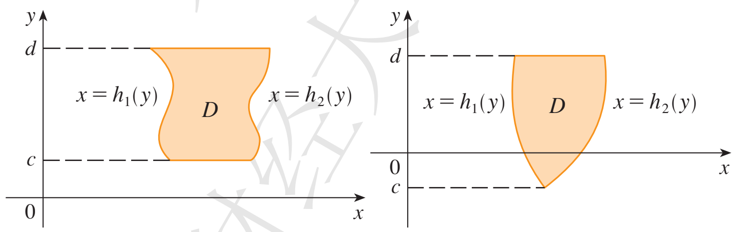


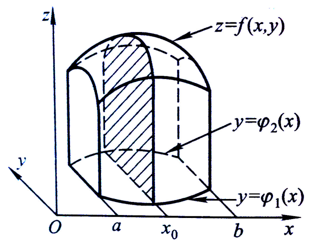
图 9.2: y型区域

从二重积分的几何意义来建立二重积分的计算公式

设D是x型区域, 根据二重积分的几何意义, 当$f(x,y) \ge 0$时, $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 等于以D为底、以曲面$z = f(x,y)$为顶的曲顶柱体的体积.

现按"平行截面面积为已知的立体体积"的计算方法求曲顶柱体的体积. 在区间$[a,b]$上任意取定一点x_0, 过点$(x_0,0,0)$作平行于yOz 面的平面. 此平面截曲顶柱体得一截面, 该截面是一个以区间$\varphi_1(x_0) \le y \le \varphi_2(x_0)$为底, $z = f(x_0,y)$为曲边的曲边梯形, 其面积为

$$A(x_0) = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0,y)\,\mathrm{d}y.$$



一般地, 对于$x \in [a,b]$, 有

$$A(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

从而曲顶柱体的体积V为

$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

故有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

上式右端的积分称为先对y后对x的二次积分(或累次积分), 此二次积分常记作

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

于是二重积分化为先对y后对x的二次积分的计算公式为

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y, \tag{9.2.1}$$

其中积分区域D用不等式组$a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$表示.

若积分区域是y型区域, 则二重积分化为先对x后对y的二次积分的计算公式为

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x, \tag{9.2.2}$$

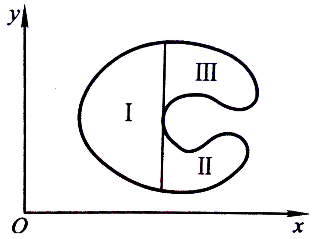
其中积分区域D用不等式组$c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$表示.

当被积函数$f(x,y)$在D上变号时, 由于

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(|f(x,y)| + f(x,y)) - \frac{1}{2}(|f(x,y)| - f(x,y)),$$

故

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_D \frac{1}{2}(|f(x,y)| + f(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\quad - \iint_D \frac{1}{2}(|f(x,y)| - f(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$



因此上面讨论的累次积分法仍然有效.

若积分区域既不是x型的, 又不是y型的, 这时通常可以把D分成几部分, 使每个部分是x型区域或y型区域, 从而在每个小区域上的二重积分都能利用(9.2.1)或(9.2.2)式计算, 再利用重积分的区域可加性, 将这些小区域上的二重积分的计算结果相加, 就可得到整个区域D上的二重积分.

例 2.1. 化下列积分为两个二次积分:

(1) $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$D=\{(x,y)|a\le x\le b, c\le y\le d\}$;

(2) $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$D=\{(x,y)|0\le y\le 1-x, 0\le x\le 1\}$;

(3) $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$D=\{(x,y)|0\le y\le x, 0\le x\le 1\}$.

解:

(1) $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

(2) $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{1-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

(3) $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1 dx\int_0^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

例 2.2. 交换下列积分次序:

(1) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

(2) $\int_{-6}^2 \mathrm{d}x\int_{\frac{1}{4}x^2-1}^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

解:

(1) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

(2) $\int_{-6}^2 \mathrm{d}x\int_{\frac{1}{4}x^2-1}^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^0 \mathrm{d}y\int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_0^8 \mathrm{d}y\int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

例 2.3. 计算$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$D$是由直线$y=1$, $x=2$及$y=x$所围成的闭区域.

解:

$$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \mathrm{d}x \int_1^x xy\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \frac{1}{2}(x^3 - x)\,\mathrm{d}x = \frac{9}{8},$$

或

$$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \mathrm{d}y \int_y^2 xy\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{2}(4y - y^3)\,\mathrm{d}y = \frac{9}{8}.$$

例 2.4. 计算$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$D$是由$x = 2$, $y = x$及$xy = 1$所围成的闭区域.

解:

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int_1^2 (x^3 - x)\,\mathrm{d}x = \frac{9}{4}.$$

例 2.5. 计算$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$D$是由直线$y = x - 1$和抛物线$y^2 = 2x + 6$所围成的闭区域.

解:

$$\begin{aligned}\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-3}^{-1} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xy\,\mathrm{d}y + \int_{-1}^{5} \mathrm{d}x \int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^{5} \left(-\frac{x^3}{2} + 2x^2 + \frac{5}{2}x\right)\mathrm{d}x = 36,\end{aligned}$$

或

$$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{4} \mathrm{d}y \int_{\frac{1}{2}(y^2-6)}^{y+1} xy\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{4} \left(-\frac{y^5}{8} + 2y^3 + y^2 - 4y\right)\mathrm{d}y = 36.$$

例 2.6. 计算$\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$D = \{(x,y) | \sqrt{x} \le y \le 1, 0 \le x \le 1\}$.

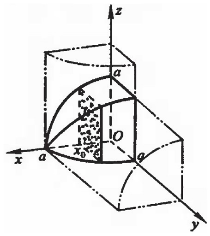
解: 由于函数$\frac{\sin y}{y}$关于y的原函数不是初等函数, 故应先对x进行积分，得

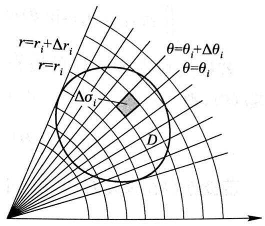
$$\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{y^2} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 y\sin y\,\mathrm{d}y = \sin 1 - \cos 1.$$

例 2.7. 计算$\iint\limits_D x^2 e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$D$是由直线$y = x$, $y = 1$, $x = 0$所围成的闭区域.

解: 由于函数e^{-y^2}关于y的原函数不是初等函数, 故应先对x进行积分，得

$$\iint\limits_D x^2 e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y x^2 e^{-y^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^1 y^3 e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{6} - \frac{1}{3e}.$$





例 2.8. 求两个底面半径都为a的直交圆柱所围立体的体积V.

解: 设两个圆柱方程为

$$x^2+y^2=a^2, x^2+z^2=a^2.$$

第一象限部分的立体是以$z=\sqrt{a^2-x^2}$为曲顶, 以四分之一圆域

$$D:\begin{cases} 0\le y\le \sqrt{a^2-x^2}, \\ 0\le x\le a \end{cases}$$

为底的曲顶柱体, 所以

$$\begin{aligned} V=&8\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=8\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}y \\ =&8\int_0^a (a^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{16}{3}a^3. \end{aligned}$$

9.2.2 利用极坐标计算二重积分

以原点为极点, x轴正半轴为极轴建立极坐标系. 假定从极点O出发的射线与区域D的边界至多交于两点, 我们用以极点为圆心, r为半径的一簇同心圆和从极点出发与极轴的夹角为θ的一簇射线$\theta=$常数, 将区域D分成n个小闭区域σ_i $(i=1,2,\cdots,n)$. 第i个小闭区域σ_i的面积

$$\Delta\sigma_i=\frac{1}{2}(r_i+\Delta r_i)^2\Delta\theta_i-\frac{1}{2}r_i^2\Delta\theta_i=\frac{r_i+(r_i+\Delta r_i)}{2}\Delta r_i\Delta\theta_i=\bar{r}_i\Delta r_i\Delta\theta_i,$$

其中$\bar{r}_i$表示小闭区域σ_i边界所在的两个相邻圆弧$r=r_i$ 和$r=r_i+\Delta r_i$ 的半径的平均值. 在小闭区域σ_i上取$r=\bar{r}_i$上的一点$(\bar{r}_i,\bar{\theta}_i)$. 从而有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i\cos\bar{\theta}_i,\bar{r}_i\sin\bar{\theta}_i)\bar{r}_i\Delta r_i\Delta\theta_i,$$

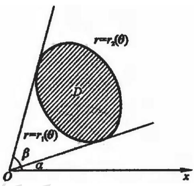
其中λ是所有小区域直径的最大值. 所以极坐标系下的二重积分的表达式为

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

从上面的推导可知极坐标下的面积微元为

$$\mathrm{d}\sigma = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

极坐标系中的二重积分化为二次积分来计算



设积分区域D可以用不等式组

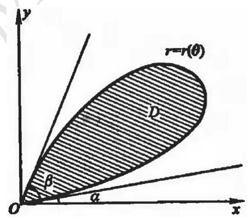
$$\alpha \le \theta \le \beta, \quad r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)$$

来表示, 其中$r_1(\theta)$, $r_2(\theta)$在区间$[\alpha,\beta]$上连续, $0 \le r_1(\theta) \le r_2(\theta)$, 且$0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$, 则极坐标系中的二重积分化为二次积分的公式

$$\iint\limits_{D} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{d}\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r.$$

进一步可得极坐标中区域D的面积计算公式

$$\sigma = \iint\limits_{D} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{d}\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r\,\mathrm{d}r.$$

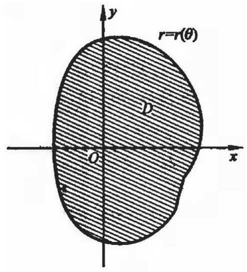


若极点O在积分区域D的边界上, 积分区域D是曲边扇形,即

$$\alpha \le \theta \le \beta, \quad 0 \le r \le r(\theta),$$

则

$$\iint\limits_{D} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r.$$



若极点O在积分区域D内, 即

$$0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le r \le r(\theta),$$

则

$$\iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r \,\mathrm{d}r.$$

例 2.9. 将下列积分化为极坐标下的积分

(1) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$;

(2) $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $D = \{(x,y)|x^2+y^2 \le 2x\}$;

(3) $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $D = \{(x,y)|x^2+y^2 \le 1, x+y \ge 1\}$.

解:

(1) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sec\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,\mathrm{d}\, r + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\csc\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,\mathrm{d}\, r.$

(2) $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,\mathrm{d}\, r.$

(3) $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,\mathrm{d}\, r.$

例 2.10. 计算$\iint\limits_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$D$是由$x^2+y^2=2x$, $y=0$所围成的第一象限部分.

解: 在极坐标下, D可表示为

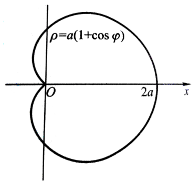
$$0 \le r \le 2\cos\theta, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},$$

被积函数

$$x^2+y^2 = r^2.$$

于是

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^3 d\, r = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta = \frac{3}{4}\pi.$$



例 2.11. 计算$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$D$是由$x^2+y^2=1$与$x^2+y^2=4$所围成的圆环形区域.

解: 在极坐标下, D可表示为

$$1 \le r \le 2, \quad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

被积函数

$$\sqrt{x^2+y^2}=r.$$

于是

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r^2\,\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\frac{7}{3}\,\mathrm{d}\theta=\frac{14}{3}\pi.$$

例 2.12. 求心形线$\rho=a(1+\cos\varphi)(a>0)$所围成区域的面积$\sigma$.

解: 利用图形关于x轴对称的性质有

$$\begin{aligned}\sigma=&\iint\limits_D \rho d\rho d\varphi=2\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{a(1+\cos\varphi)}\rho d\rho\\ =&a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi=a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi\\ =&a^2\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi=\frac{3}{2}\pi a^2.\end{aligned}$$

例 2.13. 计算$\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$D$为圆域$x^2+y^2\le a^2$.

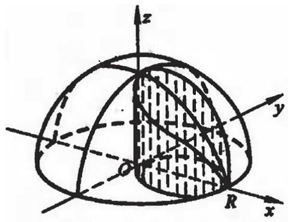
解: 在极坐标下, D可表示为

$$0 \le r \le a, \quad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

所以

$$\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a re^{-r^2}\,\mathrm{d}r=\pi(1-e^{-a^2}).$$

例 2.14. 求球体$x^2+y^2+z^2\le R^2$被圆柱面$x^2+y^2=Rx$所割下部分的体积(称为**维维安尼(*Viviani*)体**).



解: 由对称性，只要求出在第一象限内的部分体积后乘以4即得所求立体的体积. 在第一象限内的立体是一个曲顶柱体, 其底为xy平面内由$y \ge 0$和$x^2+y^2 \le Rx$所确定的区域, 曲顶的方程为

$$z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}.$$

所以

$$V = 4\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中$D=\{(x,y)|y\ge 0, x^2+y^2\le Rx\}$. 作极坐标变换得

$$\begin{aligned} V = & 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{R\cos\theta} \sqrt{R^2-r^2}\, r\,\mathrm{d}r = \frac{4}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ = & \frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

9.2.3 二重积分的换元法

定理 2.1. 设$f(x,y)$在xOy平面上的闭区域D上连续, 变换

$$T: x = x(u,v), \quad y = y(u,v)$$

将uOv 平面的闭区域D'一对一地映成xOy 平面上的闭区域D, 若函数$x(u,v)$, $y(u,v)$ 在D'上具有一阶连续偏导数, 且在D'上的雅可比行列式

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \ne 0,\ (u,v)\in D',$$

则

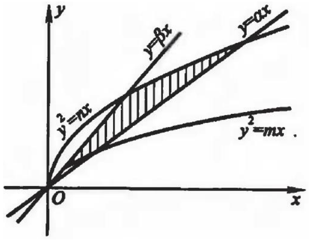
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

极坐标变换$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$的雅可比行列式

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r,$$

所以

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$



例 2.15. 求$\iint\limits_D \frac{y}{x+y}e^{(x+y)^2}\,\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$是由$x+y=1$, $x=0$和$y=0$所围成.

解: 令$u=x+y$, $v=y$.为此作变换$T: x=u-v$, $y=v$, 则

$$x+y=1\Rightarrow u=1,\quad x=0\Rightarrow u-v=0,\quad y=0\Rightarrow v=0.$$

雅可比行列式

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1.$$

于是

$$\iint_D \frac{y}{x+y}e^{(x+y)^2}\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^u\frac{v}{u}e^{u^2}\,\mathrm{d}v=\int_0^1\frac{u}{2}e^{u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{e-1}{4}.$$

例 2.16. 求$\iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$D$是由$x=0$, $y=0$, $x+y=1$所围区域.

解: 为了简化被积函数, 令$u=x-y$, $v=x+y$. 作变换$T: x=\frac{1}{2}(u+v)$, $y=\frac{1}{2}(v-u)$, 则

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}.$$

在变换T作用下, 区域D的原象记为D'. 于是

$$\begin{aligned}\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\frac{1}{2}\iint_{D'}e^{\frac{u}{v}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}v\int_{-v}^{v}e^{\frac{u}{v}}\,\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2}\int_0^1 v(e-e^{-1})\,\mathrm{d}v=\frac{e-e^{-1}}{4}.\end{aligned}$$

例 2.17. 求抛物线$y^2=mx, y^2=nx$和直线$y=\alpha x, y=\beta x$所围区域D的面积 $(0<m<n, 0<\alpha<\beta)$.

解: D的面积为$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. 为了简化积分区域, 作变换

$$x=\frac{u}{v^2},\quad y=\frac{u}{v}.$$

它把xOy平面上的区域D对应到uOv平面上的矩形区域$D' = [m,n]\times[\alpha,\beta]$. 由于

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{v^2} & -\frac{2u}{v^3} \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{v^4} > 0,\ (u,v)\in D',$$

于是

$$\begin{aligned}\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_{D'} \frac{u}{v^4}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_\alpha^\beta \frac{1}{v^4}\,\mathrm{d}v \int_m^n u\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{(n^2-m^2)(\beta^3-\alpha^3)}{6\alpha^3\beta^3}.\end{aligned}$$

例 2.18. 求椭球体

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$$

的体积.

解: 鉴于对称性，只考虑第一象限部分的立体，这一部分立体是以$z = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$为曲顶,

$$D = \{(x,y)|0\le y\le b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}, 0\le x\le a\}$$

为底的曲顶柱体, 所以

$$V = 8\iint_D c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

作变换$x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$, $0\le r\le 1$, $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, 则

$$V = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 c\sqrt{1-r^2}abr\,\mathrm{d}r = \frac{4\pi}{3}abc.$$

9.2.4 思考与练习

练习 9.4. 设$f(x,y)$连续且$f(x,y) = xy + \iint_D f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$, 其中$D$是由$y=0$, $y=x^2$, $x=1$所围成的区域, 求$f(x,y)$.

$f(x,y) = xy + \frac{1}{8}$

练习 9.5. 二重积分$\iint_D \frac{1}{x^2y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$的值为( ), 其中$D$是矩形区域$\{(x,y):|x|\le 1, 1\le y\le 2\}$.

(A) 0　　(B) 2

(C) -2　　(D) ∞

D

练习 9.6. 设$f(x)\in C[0,1]$, 且$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = A$, 求$I = \int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y$.

$I = \frac{1}{2}A^2$. 令$F(x) = \int_x^1 f(y)\,\mathrm{d}y$.

练习 9.7. 设$D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 4, x > 0, y > 0\}$, $f(x)$为D上的正值连续函数, 求$\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\,\mathrm{d}\sigma$.

利用对称性,

$$I = \iint_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D \frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}\sigma.$$

故

$$2I = \iint_D \frac{(a+b)(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)})}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\,\mathrm{d}\sigma = (a+b)\pi.$$

所以$I = \frac{a+b}{2}\pi$.

练习 9.8. 计算二重积分

$$I = \iint_D |y - x^2|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中$D = \{(x,y) : -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

$I = \frac{11}{15}$.

练习 9.9. 计算二重积分

$$I = \iint_D \max\{xy, 1\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\}$.

$I = \frac{19}{4} + \ln 2$.

练习 9.10. 将极坐标下的二次积分改写成直角坐标系下的二次积分:

(1) $\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r$

(2) $\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_{2\cos\theta}^2 f(r^2) r\,\mathrm{d}r$

(1) $\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

(2) $\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_{2\cos\theta}^2 f(r^2) r\,\mathrm{d}r = \int_0^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$

练习 9.11. 计算二重积分$\iint_D \left(\tan(x^2y^3) + \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$.

$\tan(x^2y^3)$关于y为奇函数, 积分区域D关于x轴对称, 所以$\iint_D \tan(x^2y^3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$.

$$原式 = \iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\, r\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\pi(\pi-2).$$

练习 9.12. 计算二重积分$\iint_D \left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right) \mathrm{d}\sigma$, 其中$D=\{(x,y): x^2+y^2 \le 4, (x+1)^2+y^2 \ge 1\}$.

利用对称性, $\iint_D y \,\mathrm{d}\sigma = 0$.

$$原式 = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_{-2\cos\theta}^{2} r^2\,\mathrm{d}r + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^2 r^2\,\mathrm{d}r = \frac{16}{9}(3\pi-2).$$

练习 9.13. 计算二重积分$\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$是由$x^2+y^2=2y$, $y=x$, y轴围成的.

$0 \le r \le 2\sin\theta$, $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

$$原式 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\sin\theta} r^2 \sin\theta\cos\theta \cdot r\,\mathrm{d}r = \frac{7}{12}.$$