10.6 两类曲面积分之间的联系

两类曲面积分的联系

设Σ是有向光滑曲面, 其上任一点(x,y,z)处的单位法向量为$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, 则

$$\iint\limits_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S.$$

其向量形式为

$$\iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

其中$\boldsymbol{v} = (P,Q,R)$, $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = (\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\, \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x,\, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$称为有向曲面微元.

例 6.1. 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} z^2\cos\gamma\,\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma : z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, γ是其外法线与z轴正向夹成的锐角.

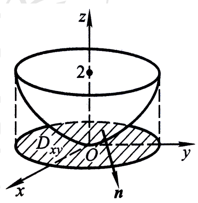
解:

$$\iint\limits_{\Sigma} z^2\cos\gamma\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{xy}} (1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 (1-r^2)r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}.$$

例 6.2. 计算曲面积分

$$\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中Σ是旋转抛物面$z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$介于$z=0$及$z=2$之间的部分的下侧.



解: 由于Σ取下侧, 故$\cos\gamma < 0$, 从而

$$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}(z_x', z_y', -1) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}(x,y,-1).$$

于是由两类曲面间的联系, 有

$$\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma} \frac{zx - x^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,\mathrm{d}S.$$

由于曲面Σ在xOy面上的投影区域$D_{xy} = \{(x,y) | x^2+y^2 \le 4\}$, 且

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

故

$$\iint\limits_{\Sigma} \frac{zx - x^2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \,\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{xy}} \left[\frac{x}{2}(x^2 + y^2) - x^2\right] \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

注意到上式右端中$\frac{x}{2}(x^2 + y^2)$在D_{xy}上的二重积分等于零, 于是得

$$\iint\limits_{\Sigma} z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + x^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = -\iint\limits_{D_{xy}} x^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = -\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \,\mathrm{d}\theta \int_0^2 r^3 \,\mathrm{d}r = -4\pi.$$