由$|MA|=|MB|$得

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2.$$

化简得到点A, B等距离的点的轨迹为

$$x-3y+2z=4.$$

该动点的轨迹为一平面.

7.2 空间向量及其应用

7.2.1 向量的概念

- 既有大小又有方向的量叫做向量 (或矢量). 因此, 从原点到点(x,y,z)所确定的有向线段是一个向量, 我们也把形如(x,y,z)的有序数组称为$\mathbb{R}^3$的向量.
- 为了与点的坐标相区别, 我们常把向量记为$\{x,y,z\}$, 称为向量的坐标表示, x, y, z叫做向量的三个分量.
- 同时，把空间$\mathbb{R}^3$ 中某向量平移后所得到的有向线段认为是同一个向量, 我们称这种向量为自由向量, 简称向量.

- 空间中起点$A(x_1,y_1,z_1)$到终点$B(x_2,y_2,z_2)$的有向线段, 当然也可以看成是一个向量.
- 此向量经过平移后将点A置于原点, 易得此向量可表示为$\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$, 通常记为
$$\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}.$$
- 特别地, 当A为原点$O(0,0,0)$时, 即$\overrightarrow{OB}=\{x_2,y_2,z_2\}$, 这个向量叫做点$B$对于点$O$的向径, 常用$\boldsymbol{r}$表示.

- 一般用黑体字母表示向量, 如$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\cdots$.
- 向量的大小叫做向量的模. 向量$\overrightarrow{AB}$、$\boldsymbol{a}$的模记为$|\overrightarrow{AB}|$、$|\boldsymbol{a}|$.
- 模等于1的向量叫做单位向量(或幺矢).
- 模等于零的向量叫做零向量, 记为$\mathbf{0}$, 零向量的起点和终点重合, 它的方向可以看作是任意的.

若两个非零向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的方向相同或相反, 则称这两个向量平行, 记为$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$. 显然, 零向量平行于任何向量.

分别以$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 表示与x轴、y轴、z轴正向同方向的单位向量, 并称它们为$Oxyz$坐标系的基本单位向量. 于是, 向量$\overrightarrow{AB}$也可以表示为

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.$$

上式称为向量$\overrightarrow{AB}$按基本单位向量的分解式, $(x_2-x_1)\boldsymbol{i}$, $(y_2-y_1)\boldsymbol{j}$, $(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$分别称为向量$\overrightarrow{AB}$在x,y,z轴上的分向量.

- 假设点$A(x_1,y_1,z_1)$对应向量$\overrightarrow{OA}$, $B(x_2,y_2,z_2)$对应向量$\overrightarrow{OB}$, 那么向量$\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$由$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$所决定, 即向量$\overrightarrow{AB}$是向量$\overrightarrow{OB}$与向量$\overrightarrow{OA}$的差向量.
- 对于两个向量的差$\mathbf{0}-\overrightarrow{OB}=\{-x_2,-y_2,-z_2\}$, 记为$-\overrightarrow{OB}$, 称为向量$\overrightarrow{OB}$的负向量.

7.2.2 向量的运算

设向量$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, 即

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}.$$

由向量及其坐标的相互唯一确定可知, 两个向量相等的充要条件是它们的坐标对应相等, 即

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_x=b_x,a_y=b_y,a_z=b_z.$$

由向量的加法与数乘的运算法则有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k},$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}.$$

从而有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\},$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z\},$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}.$$

当向量$\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$时, 向量$\boldsymbol{b}$平行于$\boldsymbol{a}$等价于$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$($\lambda$为某一常数), 也即等价于

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}.$$

如果$\overrightarrow{OA}$垂直于$\overrightarrow{OB}$, 记为$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$.

定理 2.1. 设向量$\overrightarrow{OA} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\overrightarrow{OB} = \{x_2, y_2, z_2\}$, 则$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$的充分必要条件是$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

例 2.1. 设$\boldsymbol{a} = \{3, -5, 8\}$, $\boldsymbol{b} = \{-1, 1, z\}$, 且$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$, 求$z$.

解: 因为

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \{2, -4, 8 + z\}, \quad \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \{4, -6, 8 - z\},$$

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 = 4 + 16 + (8 + z)^2 = 20 + (8 + z)^2,$$

$$|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2 = 16 + 36 + (8 - z)^2 = 52 + (8 - z)^2,$$

所以

$$20 + (8 + z)^2 = 52 + (8 - z)^2,$$

解得$z = 1$.

例 2.2. 已知以向量$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$为邻边的平行四边形$ABCD$的两条对角线向量为$\overrightarrow{AC} = \{3, 4, 5\}$, $\overrightarrow{DB} = \{1, 2, 3\}$, 试求向量$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$.

解: 由题意知

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}.$$

两式相加减得

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}),$$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB}).$$

代入点的坐标得

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}[\{3, 4, 5\} + \{1, 2, 3\}] = \{2, 3, 4\},$$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}[\{3, 4, 5\} - \{1, 2, 3\}] = \{1, 1, 1\}.$$

例 2.3. 已知两点$A(x_1, y_1, z_1)$和$B(x_2, y_2, z_2)$以及实数$\lambda \neq -1$, 在直线AB上求点M, 使

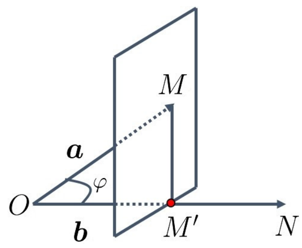
$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}.$$

解: 记A, B, M的向径分别为$\boldsymbol{r}_A$, $\boldsymbol{r}_B$, $\boldsymbol{r}_M$, 则

$$\overrightarrow{AM} = \boldsymbol{r}_M - \boldsymbol{r}_A, \quad \overrightarrow{MB} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_M.$$

因此$\boldsymbol{r}_M - \boldsymbol{r}_A = \lambda(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_M)$, 从而

$$\boldsymbol{r}_M = \frac{1}{1 + \lambda}(\boldsymbol{r}_A + \lambda \boldsymbol{r}_B).$$



代入向径$\boldsymbol{r}_A$, $\boldsymbol{r}_B$的坐标得

$$\boldsymbol{r}_M = \frac{1}{1+\lambda}[\{x_1, y_1, z_1\} + \lambda\{x_2, y_2, z_2\}] = \left\{\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right\}.$$

上式右端即为点M的坐标. 这样的点叫作有向线段$\overrightarrow{AB}$的λ分点.

例 2.4. 已知两点$A(4,0,5)$和$B(7,1,3)$, 求与$\overrightarrow{AB}$平行的单位向量.

解: 易知

$$\overrightarrow{AB} = \{3, 1, -2\},$$

故$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{14}$. 因此所求的单位向量为

$$\boldsymbol{e} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \pm\frac{1}{\sqrt{14}}\{3, 1, -2\} = \left\{\pm\frac{3}{\sqrt{14}}, \pm\frac{1}{\sqrt{14}}, \mp\frac{2}{\sqrt{14}}\right\}.$$

7.2.3 方向角、方向余弦以及向量在轴上的投影

设有两个非零向量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, 作$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, 规定$\angle AOB$ $(0 \le \angle AOB \le \pi)$为向量$\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{b}$的夹角, 记作$(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$或$(\widehat{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}})$. 如果向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$中有一个零向量, 规定它们的夹角可以在0与$\pi$之间任意取值.

指定了方向的直线称为轴. 如果轴u_1与轴u_2不在同一平面内, 则可在空间任取一点O, 过点O分别作与轴u_1, u_2平行且指向分别相同的轴u_1'与轴u_2', 将轴u_1'与轴u_2'的夹角规定为轴u_1与轴u_2的夹角.

向量$\boldsymbol{a}$与轴u的夹角: 作一轴u'与向量$\boldsymbol{a}$同向, 轴u'与轴u的夹角称为向量$\boldsymbol{a}$与轴u的夹角.

设有一轴u, $\overrightarrow{AB}$是轴u上的有向线段. 如果数λ满足$|\lambda| = |\overrightarrow{AB}|$, 且当$\overrightarrow{AB}$与$u$轴同向时$\lambda$是正的, 当$\overrightarrow{AB}$与$u$轴反向时$\lambda$是负的, 则称数$\lambda$为轴$u$上有向线段$\overrightarrow{AB}$的值, 记作$AB$, 即$\lambda = AB$.

投影

设空间一点M和一轴u, 过M作与轴u垂直的平面Π, Π与轴u的交点M'称为点M在轴u上的投影.

- 设向量$\overrightarrow{AB}$的起点A和终点B在轴u上的投影分别为A'和B', 在轴u上的有向线段$\overrightarrow{A'B'}$的值$A'B'$称为向量$\overrightarrow{AB}$在轴u上的投影, 记作$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}$, 即$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB} = A'B'$, 其中轴$u$称为投影轴.
- 向量$\boldsymbol{a}$在轴u上的投影记作$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$或$a_u$.
- 向量在轴上的投影是数而不是向量.
- 向量在轴上投影的坐标表示式: 如果轴u是数轴, 点A'的坐标是u_1, 点B'的坐标是u_2, 则$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB} = u_2 - u_1$.

投影定理

定理 2.2. 向量$\overrightarrow{AB}$在轴u上的投影等于向量的模乘轴与向量的夹角θ的余弦, 即$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta$.

推论 2.3. 两个相等的向量在同一轴上的投影相等.

定理 2.4. 有限个向量的和在轴上的投影等于它们分别在该轴上的投影之和, 即

$$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n) = \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1 + \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_n.$$

数与向量的乘积在轴上的投影满足

$$\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}.$$

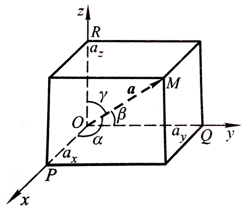
设轴u与向量$\boldsymbol{b}$同向, 则定义向量$\boldsymbol{a}$在轴u上的投影为向量$\boldsymbol{a}$在向量$\boldsymbol{b}$上的投影, 记作$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$. 同样, 向量$\boldsymbol{b}$在向量$\boldsymbol{a}$上的投影为$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$, 则

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}), \quad \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).$$

例 2.5. 设$|\boldsymbol{a}| = 4$, $\boldsymbol{a}$与轴u的夹角为$\frac{2}{3}\pi$, 求向量$\boldsymbol{a}$在轴u上的投影.

解:

$$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos(\boldsymbol{a}, u) = 4\cos\frac{2}{3}\pi = -2.$$



方向角与方向余弦

非零向量$\boldsymbol{a}$与x轴、y轴、z轴的正向所成的夹角α, β, γ 称为向量$\boldsymbol{a}$ 的方向角$(0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi)$, 方向角的余弦$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$称为向量$\boldsymbol{a}$的方向余弦. 方向角完全确定了向量$\boldsymbol{a}$的方向.

设向量$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OM} = \{a_x, a_y, a_z\}$, 则由投影定理得

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|},$$

其中

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

由此可得与向量$\boldsymbol{a}$同方向的单位向量

$$\boldsymbol{a}^0 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\{a_x, a_y, a_z\} = \left\{\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}, \frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}, \frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}\right\} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\},$$

故有关系式

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

例 2.6. 已知点$M(2, 2, \sqrt{2})$和$N(1, 3, 0)$, 计算向量$\overrightarrow{MN}$的模, 方向余弦与方向角.

解: $\overrightarrow{MN} = \{-1, 1, -\sqrt{2}\}$.

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2,$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \cos\beta = \frac{1}{2}, \quad \cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}, \quad \beta = \frac{\pi}{3}, \quad \gamma = \frac{3\pi}{4}.$$

例 2.7. 设有两点$M_1(5, 0, 4)$与$M_2(1, 3, 7)$, 求向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的方向余弦及方向和$\overrightarrow{M_1M_2}$一致的单位向量.

解: $\overrightarrow{M_1M_2} = \{-4, 3, 3\}$.

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{34}.$$

于是向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的方向余弦为

$$\cos\alpha = -\frac{4}{\sqrt{34}}, \quad \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{34}}, \quad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{34}},$$

方向和$\overrightarrow{M_1M_2}$一致的单位向量为

$$(\overrightarrow{M_1M_2})^0 = \{-\frac{4}{\sqrt{34}}, \frac{3}{\sqrt{34}}, \frac{3}{\sqrt{34}}\}.$$

例 2.8. 若点M的向径与x轴成$\dfrac{\pi}{4}$角，与y轴成$\dfrac{\pi}{3}$角，模为6，在z 轴上的投影是负值，求点M的坐标.

解：已知$\alpha = \frac{\pi}{4}$，$\beta = \frac{\pi}{3}$，由关系式$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$得

$$\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\frac{\pi}{4} - \cos^2\frac{\pi}{3} = \frac{1}{4}.$$

由于在z轴上的投影是负值，故$\cos\gamma = -\frac{1}{2}$. 因此

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} =& |\overrightarrow{OM}|(\overrightarrow{OM})^0 = |\overrightarrow{OM}|\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}\\ =&6\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\} = \{3\sqrt{2}, 3, -3\}.\end{aligned}$$

所以点M的坐标为$(3\sqrt{2}, 3, -3)$.

7.3 数量积、向量积、混合积

7.3.1 向量的数量积

设向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，称数$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 为向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的数量积，记作$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).$$

设一物体在常力$\boldsymbol{F}$的作用下沿直线从点M_0移动到点M，若用$\boldsymbol{s}$表示位移$\overrightarrow{M_0M}$，则力$\boldsymbol{F}$所做的功为

$$W = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta,$$

其中θ为$\boldsymbol{F}$与$\boldsymbol{s}$的夹角. 用数量积表示即为

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}.$$

数量积的基本性质

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a} = 0$.

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$.

(3) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$的充要条件为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$.