11.2 正项级数的敛散性判别法

11.2.1 正项级数

设有级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

若级数中的每一项$u_n \geq 0(n = 1, 2, \cdots)$，则称该级数为正项级数.

定理 2.1. 正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的充要条件是它的部分和数列$\{s_n\}$有界.

例 2.1. 试证

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} = 0,$$

其中$a_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

证明: 由

$$\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} = \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})} - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

可得

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} = 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} < 1.$$

所以正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$收敛，故由收敛级数的必要条件知结论成立.

例 2.2. 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$ 收敛.

证明: 由

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

可得

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \leq 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

即部分和数列$\{s_n\}$有界. 故正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$收敛.

11.2.2 正项级数敛散性判别法

定理 2.2 (比较判别法). 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$是两个正项级数，且存在正整数$N$，当$n > N$时有$u_n \leq v_n$，则

(1) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛;

(2) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

若将此定理中的条件$u_n \le v_n (n = 1, 2, \cdots)$改为存在常数$k > 0$和正整数$N$, 当$n > N$时有$u_n \le k v_n$, 则结论同样成立.

例 2.3. 判定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$的收敛性.

解: 因$\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$, 又级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$发散, 故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$发散.

例 2.4. 证明p级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

收敛的充要条件为$p > 1$.

解: 先设$p > 1$. 当$n - 1 \le x \le n$时, 因$\frac{1}{n^p} \le \frac{1}{x^p}$, 故

$$\frac{1}{n^p} = \int_{n-1}^{n} \frac{1}{n^p} \,\mathrm{d}x \le \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^p} \,\mathrm{d}x.$$

因此

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^p} \le \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^p} \,\mathrm{d}x = \int_{1}^{n} \frac{1}{x^p} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{n^{p-1}}\right) \le \frac{1}{p-1},$$

即部分和数列有界, 因而级数收敛.

当$p \le 1$时, 则有$\frac{1}{n^p} \ge \frac{1}{n}$, 由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散, 故由比较判别法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$发散.

在用比较判别法判别一个正项级数是否收敛时, 需要与另一个已知的收敛或发散的正项级数进行比较, 常用于比较的级数有等比级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$与$p$级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$等.

例 2.5. 判定级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$的收敛性.

解: 由于当$n > 2$时, $\frac{1}{n^2-n} < \frac{2}{n^2}$, 而级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2}$是收敛的, 根据比较审敛法知级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$收敛.

例 2.6. 判定下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$; *(2)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$; *(3)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$.

$\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} \,\mathrm{d}x \le \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{x} \,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} \frac{1}{n^{3/2}}$.

定理 2.3 (**比较判别法的极限形式**). 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$是两个正项级数, 且

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = l,$$

则

(1) 当$0 < l < +\infty$时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$同时收敛或同时发散;

(2) 当$l=0$时，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛；

(3) 当$l=+\infty$时，由$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$发散可推出$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$也发散.

例 2.7. 判定级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n-\ln n}$的收敛性.

解: 由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2-n-\ln n} \Big/ \frac{1}{n^2} = 1,$$

又$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛，故级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n-\ln n}$收敛.

例 2.8. 判定下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n-2^n}$.

解:

(1) 由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2},$$

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$收敛.

(2) 因

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3^n-2^n}}{\frac{1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n} = 1,$$

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$收敛，故原级数收敛.

推论 2.4 (比较判别法极限形式的特殊情形). 若$\lim\limits_{n\to\infty} n^p u_n = l$，则

(1) 当$p>1$，且l为一有限数时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；

(2) 当$p\le 1$，且$l\ne 0$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

例 2.9. 判定下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{4n^3-2}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{(n+1)^{1/2}}$.

解:

(1) 收敛. (2) 发散.

定理 2.5 (**比值判别法或达朗贝尔判别法**). 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数, 如果极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho,$$

则当$\rho < 1$时级数收敛; 当$1 < \rho \le +\infty$时级数发散.

值得注意的是, 当$\rho = 1$时, 比值判别法法失效, 级数是否收敛需要进一步审定.

以p级数为例, 不论p是何值都有

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{(n+1)^p} = 1,$$

而当$p > 1$时, p级数收敛; 当$p \le 1$时, p级数发散.

例 2.10. 判定下列正项级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n^2}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$.

解:

(1) $\rho < 1$, 收敛;

(2) $\rho > 1$, 发散;

(3) $\rho = 1$, 改用比较判别法, 发散.

例 2.11. 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{2}{1} + \frac{2\cdot 5}{1\cdot 5} + \frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9} + \cdots + \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots[2+3(n-1)]}{1\cdot 5\cdot 9\cdots[1+4(n-1)]} + \cdots$$

的敛散性.

解: 由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+3n}{1+4n} = \frac{3}{4} < 1,$$

故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.

定理 2.6 (**根值判别法或柯西判别法**). 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数, 如果极限

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho,$$

则当$\rho < 1$时级数收敛; 当$1 < \rho \le +\infty$时级数发散.

值得注意的是, 当$\rho = 1$时, 根值判别法失效, 级数是否收敛需要进一步审定.

以p级数为例, 不论p是何值都有

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p} = 1.$$

例 2.12. 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 的敛散性.

解: 由于

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2} = \frac{1}{2},$$

所以级数是收敛的.

例 2.13. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$ 的收敛性.

解: 根据根值判别法, 由于

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1,$$

故级数收敛.

例 2.14. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{an}$ (其中a为常数)的敛散性.

解: 由于

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^a = \left(\frac{1}{2}\right)^a,$$

所以当$a > 0$时, 级数收敛; 当$a < 0$时, 级数发散; 当$a = 0$时级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$, 故发散.

定理 2.7 (**积分判别法**)**.** 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$为正项级数, 函数$f(x)$在区间$[1, +\infty)$上非负、连续、单调下降, 且存在正整数$N$, 当$n \geq N$时有

$$f(n) = u_n,$$

则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$与广义积分$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$的敛散性相同.

例 2.15. 讨论下列级数

$$(i)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}; \quad (ii)\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)^p}$$

的敛散性.

解: (i) 研究反常积分$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$, 由于

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p} = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}(\ln x)}{(\ln x)^p} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{u^p}$$

当$p > 1$时收敛, $p \leq 1$时发散. 故有积分判别法知级数(i)在$p > 1$时收敛, $p \leq 1$时发散.

(ii) 研究反常积分$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)(\ln\ln x)^p}$, 同理可知级数(ii)在$p > 1$时收敛, $p \leq 1$时发散.

11.2.3 思考与练习

练习 11.7. 设$a_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$, $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 则数列$\{s_n\}$有界是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛的(
)

(A) 充分必要条件　　(B) 充分不必要条件

(C) 必要不充分条件　　(D) 既不充分又不必要条件

A

练习 11.8. 判定下列级数的收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

解:

(1) 因$\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \frac{1}{n^{3/2}}$，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$收敛, 故原级数收敛.

(2) 因$\frac{1}{n2^n} \le \frac{1}{2^n}$，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$收敛, 故原级数收敛.

练习 11.9. 判定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{3^n}$的收敛性.

解: 设$u_n = \frac{n2^n}{3^n}$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)2^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{n2^n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{3n} = \frac{2}{3} < 1,$$

故由比值判别法知级数收敛.

练习 11.10. 判定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$的收敛性.

解: 设$u_n = \frac{n!}{n^n}$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1,$$

故由比值判别法知级数收敛.

练习 11.11. 判定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{5^n}$的收敛性.

解: 根据根值判别法, 由于

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n3^n}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{5}\sqrt[n]{n} = \frac{3}{5} < 1,$$

故级数收敛.

练习 11.12. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^p}$ 的收敛性，其中 a, p 为常数，且 $a > 0$.

解: 根据根值判别法, 由于

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n^p}} = a,$$

所以当 $a < 1$ 时, 级数收敛; 当 $a > 1$ 时, 级数发散; 当 $a = 1$ 时, 该级数是 p 级数, 故仅当 $p > 1$ 时级数收敛.

练习 11.13. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}$ 的收敛性.

解: $0 \le \frac{n\cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n} \le \frac{n}{2^n}$, 收敛.