12.6　二阶常系数线性微分方程

12.6.1　二阶常系数齐次线性微分方程

考虑二阶常系数齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{12.6.1}$$

其中p, q是常数. 只需找到该方程的两个线性无关的解$y = y_1(x)$ 及$y = y_2(x)$, 就可以得到方程(12.6.1)的通解$y = C_1y_1 + C_2y_2$.

当r为常数时, 指数函数$y = e^{rx}$及其各阶导数都只相差一个常数. 由此我们考虑方程(12.6.1) 是否具有这种形式的解.

将函数$y = e^{rx}$代入(12.6.1)得

$$(e^{rx})'' + p(e^{rx})' + qe^{rx} = (r^2 + pr + q)e^{rx} = 0.$$

由于$e^{rx} \neq 0$, 因此

$$r^2 + pr + q = 0. \tag{12.6.2}$$

由此说明只要r是(12.6.2)的根, 则函数$y = e^{rx}$就是微分微分方程(12.6.1)的解. 因此我们称代数方程(12.6.2)是微分方程(12.6.1)的特征方程, 它的根就称为方程(12.6.1)的特征根. 由一元二次方程的求根公式, 它的两个根为

$$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

由$p^2 - 4q$不同取值, 可得到方程(12.6.1)的三种不同形式的通解. 现依次讨论如下:

(1) 当$p^2 - 4q > 0$时, r_1, r_2为两个不相等的实根:

$$r_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad r_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

因而方程(12.6.1)有两个特解$y_1 = e^{r_1x}$, $y_2 = e^{r_2x}$, 且$\frac{y_2}{y_1} = e^{(r_2 - r_1)x}$不是常数, 故方程(12.6.1)的通解为

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}.$$

(2) 当$p^2 - 4q = 0$时, r_1, r_2为两个相等的实根: $r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$. 此时只能得到方程(12.6.1)的一个特解$y_1 = e^{r_1x}$. 为了得到方程(12.6.1)的通解, 还需求得另一个特解y_2, 且使得$\frac{y_2}{y_1}$不是常数.

为此令$y_2 = u(x)e^{r_1x}$, 对y_2求导得

$$y_2' = e^{r_1x}(u' + r_1u), \ y_2'' = e^{r_1x}(u'' + 2r_1u' + r_1^2u).$$

代入方程(12.6.1)得

$$e^{r_1x}[(u'' + 2r_1u' + r_1^2u) + p(u' + r_1u) + qu] = 0.$$

从而

$$u'' + (2r_1 + p)u' + (r_1^2 + pr_1 + q)u = 0.$$

因r_1是特征方程(12.6.2)的重根, 故

$$r_1^2 + pr_1 + q = 0, 2r_1 + p = 0.$$

于是有$u'' = 0$. 故取$u = x$, 即得方程(12.6.1)的另一特解

$$y_2 = xe^{r_1x}.$$

从而得到方程(12.6.1)的通解为

$$y = (C_1 + C_2x)e^{r_1x}.$$

(3) 当$p^2 - 4q < 0$时, r_1, r_2为一对共轭复根:

$$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta,\ \text{其中}\ \alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}.$$

此时方程(12.6.1)有两个复数形式的解$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}$, $y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$.

该解为复数形式. 为求实数形式的解, 利用欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, 有

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x),$$

$$y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

取

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \bar{y}_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

显然$\bar{y}_1$和$\bar{y}_2$也是方程(12.6.1)的解，且$\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \tan\beta x$不是常数, 故方程(12.6.1)的通解为

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

综上所述, 求二阶常系数齐次线性微分方程(12.6.1)

$$y'' + py' + qy = 0$$

的通解的步骤如下：

(1) 写出微分方程(12.6.1)的特征方程$r^2 + pr + q = 0$.

(2) 求出特征方程的两个根r_1, r_2.

(3) 根据特征方程的两个根的不同形式, 按照下列规则写出微分方程(12.6.1)的通解:

- 若特征方程有两个不同的实根r_1, r_2, 则通解为

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x};$$

- 若特征方程有两个相同的实根$r_1 = r_2$, 则通解为

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x};$$

- 若特征方程有一对共轭复根$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, 则通解为

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

例 6.1. *求解微分方程*$y'' + y' - 6y = 0$.

解: 特征方程为

$$r^2 + r - 6 = 0.$$

方程的两个解为$r_1 = -3$, $r_2 = 2$. 因而方程的通解为

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}.$$

例 6.2. *求解微分方程*$y'' + 4y' + 4y = 0$*满足初值条件*$y(0) = 3$, $y'(0) = -1$*的特解.*

解: 特征方程为

$$r^2 + 4r + 4 = 0.$$

方程有重根$r_1 = r_2 = -2$. 故方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}.$$

将条件$y(0) = 3$代入得$C_1 = 3$, 故$y = (3 + C_2 x)e^{-2x}$. 求导得$y = (C_2 - 6 - 2C_2 x)e^{-2x}$. 将条件$y'(0) = -1$代入得$C_2 = 5$. 因此所求特解为

$$y = (3 + 5x)e^{-2x}.$$

例 6.3. *求解微分方程*$y'' + y' + y = 0$.

解: 特征方程为

$$r^2 + r + 1 = 0.$$

方程的解为一对共轭复根

$$r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

于是方程的通解为

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x).$$

考虑n阶常系数齐次线性微分方程

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0, \tag{12.6.3}$$

其中$p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}, p_n$都是常数.

类似地, 令$y = e^{rx}$, 代入(12.6.3)得

$$e^{rx}(r^n + p_1 r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + \cdots + +p_{n-1} r + p_n) = 0.$$

n次代数方程

$$r^n + p_1 r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + \cdots + +p_{n-1} r + p_n = 0 \tag{12.6.4}$$

称为方程(12.6.3)的特征方程. 如果选取r为特征方程(12.6.4)的根, 则函数$y = e^{rx}$就是方程(12.6.3)的一个解.

根据特征方程的根, 可以写出其对应的微分方程的解如下表所示.

特征方程的根	**微分方程通解中的对应项**
单实根r	给出一项: Ce^{rx}
一对单复根$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	给出两项: $e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$
k重实根r	给出k项: $e^{rx}(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1})$
一对k重复根$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	给出$2k$项: $e^{\alpha x}[(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x$ $+(D_1 + D_2 x + \cdots + D_k x^{k-1}) \sin \beta x]$

例 6.4. 求解微分方程$y^{(4)} - 2y''' + 5y'' = 0$.

解: 特征方程为

$$r^4 - 2r^3 + 5r^2 = 0.$$

解得$r_1 = r_2 = 0$, $r_{3,4} = 1 \pm 2i$. 于是原方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 x + e^x (C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x).$$

例 6.5. 求解微分方程$y^{(4)} + \beta^4 y = 0$.

解: 特征方程为$r^4 + \beta^4 = 0$. 由于

$$r^4 + \beta^4 = (r^2 + \beta^2)^2 - 2r^2\beta^2 = (r^2 - \sqrt{2}r\beta + \beta^2)(r^2 + \sqrt{2}r\beta + \beta^2),$$

所以特征方程可写为

$$(r^2 - \sqrt{2}r\beta + \beta^2)(r^2 + \sqrt{2}r\beta + \beta^2) = 0.$$

解得$r_{1,2} = \frac{\beta}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$, $r_{3,4} = -\frac{\beta}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$. 于是原方程的通解为

$$y = e^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}x}\left(C_1 \cos\frac{\beta}{\sqrt{2}}x + C_2 \sin\frac{\beta}{\sqrt{2}}x\right) + e^{-\frac{\beta}{\sqrt{2}}x}\left(C_3 \cos\frac{\beta}{\sqrt{2}}x + C_4 \sin\frac{\beta}{\sqrt{2}}x\right).$$

12.6.2 二阶常系数非齐次线性微分方程

考虑二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{12.6.5}$$

的解, 其中p, q是常数.

根据解的结构定理, 其通解为

$$y = Y + y^*,$$

其中Y为齐次方程通解, y^*为非齐次方程特解.

求特解的方法: 常数变易法, 待定系数法.

常数变易法

引理 6.1. 设$y'' + py' + qy = 0$的通解为$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, 其中$y_1(x)$, $y_2(x)$是两个线性无关的特解, C_1, C_2为任意常数. 如果函数$C_1(x), C_2(x)$满足下列函数方程组

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x), \end{cases} \tag{12.6.6}$$

则$y^* = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$就是非齐次方程(12.6.5)的特解.

由于$y_1(x)$, $y_2(x)$线性无关, 函数方程组(12.6.6)有唯一解. 解出$C_1'(x)$和$C_2'(x)$, 再积分就可确定$C_1(x)$和$C_2(x)$, 于是得到方程(12.6.5)的特解y^*.

例 6.6. 求微分方程$y'' + y = \tan x$ $(0 < x < \frac{\pi}{2})$的通解.

解: 先求对应齐次方程的通解. 对应齐次方程的特征方程是$r^2+1=0$, 两个根为$r_{1,2}=\pm i$, 齐次方程的两个线性无关的解为$y_1(x)=\cos x$, $y_2(x)=\sin x$. 所以对应齐次方程的通解为$Y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

再求非齐次方程的特解. 设非齐次方程的特解为$y^*=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$, 其中$C_1(x),C_2(x)$满足函数方程组

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0, \\ C_1'(x)(-\sin x)+C_2'(x)\cos x=\tan x. \end{cases}$$

解方程组得

$$\begin{cases} C_1'(x)=-\tan x\sin x=\cos x-\sec x, \\ C_2'(x)=\sin x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x)=\sin x-\ln(\sec x+\tan x), \\ C_2(x)=-\cos x. \end{cases}$$

于是原方程得通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\cos x\ln(\sec x+\tan x),$$

其中C_1,C_2为任意常数.

待定系数法

待定系数法就是先确定方程(12.6.5)

$$y''+py'+qy=f(x)$$

的特解的形式, 再把形式解代入方程以确定解中包含的待定系数的值.

在这里我们只介绍当(12.6.5)中的$f(x)$取以下两种常见的函数形式时, 特解y^*的求法.

(1) $f(x)=P_n(x)e^{\lambda x}$型, 其中$P_n(x)$为n次多项式, λ是常数.

(2) $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+H_m(x)\sin\omega x]$型, 其中$P_l(x)$, $H_m(x)$分别为l 次多项式及m 次多项式(其中一个可为零), λ,ω 是常数.

$f(x)=P_n(x)e^{\lambda x}$型

因为多项式与指数函数乘积的导数仍然是多项式与指数函数的乘积, 所以我们推测$y^*=Q(x)e^{\lambda x}$ (其中$Q(x)$是某个多项式)可能是方程(12.6.5)的特解. 为此将

$$y^*=Q(x)e^{\lambda x},\quad y^{*\prime}=e^{\lambda x}[\lambda Q(x)+Q'(x)],$$

$$y^{*\prime\prime}=e^{\lambda x}[\lambda^2Q(x)+2\lambda Q'(x)+Q''(x)]$$

代入方程(12.6.5)并消去$e^{\lambda x}$, 得到

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_n(x). \tag{12.6.7}$$

比较等式的两端, 得到

(1) 若λ不是对应的特征方程的根, 即$\lambda^2+p\lambda+q\neq 0$, 则由式(12.6.7)知$Q(x)$是一个$n$次的多项式, 即令

$$Q(x)=Q_n(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n, \tag{12.6.8}$$

其中$b_0,b_1,\cdots,b_n$为待定系数. 将(12.6.8)代入(12.6.7) 式并比较等式两端的系数, 即可确定$b_0,b_1,\cdots,b_n$的值, 从而确定所求的特解

$$y^*=Q(x)e^{\lambda x}.$$

(2) 若λ是特征方程所对应的单根, 即$\lambda^2+p\lambda+q=0$, 但$2\lambda+p\neq 0$, 则由式(12.6.7)知$Q'(x)$是一个n次的多项式, 即令

$$Q(x)=xQ_n(x)=x(b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n).$$

用同样的方法可确定$Q_n(x)$中的待定系数$b_0,b_1,\cdots,b_n$的值.

(3) 若λ是特征方程所对应的重根, 即$\lambda^2+p\lambda+q=0$, 且$2\lambda+p=0$, 则由式(12.6.7)知$Q''(x)$是一个n次的多项式, 即令

$$Q(x)=x^2Q_n(x)=x^2(b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n).$$

用同样的方法可确定$Q_n(x)$中的待定系数$b_0,b_1,\cdots,b_n$的值.

综上所述, 我们有如下结论:

方程$y''+py'+qy=e^{\lambda x}P_n(x)$具有形如

$$y^*=x^kQ_n(x)e^{\lambda x} \tag{12.6.9}$$

的特解, 其中$Q_n(x)$为一个与$P_n(x)$同次的多项式, 而

$$k=\begin{cases}0, & \text{若}\lambda\text{不是特征方程的根,}\\ 1, & \text{若}\lambda\text{是特征方程的单根,}\\ 2, & \text{若}\lambda\text{是特征方程的重根.}\end{cases}$$

令$Q(x)=x^kQ_n(x)$, 将Q'', Q'代入(12.6.7), 即

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_n(x).$$

确定Q中的$n+1$个系数, 从而确定方程的一个特解.

上述结论可推广到n阶常系数非齐次线性微分方程, 式(12.6.9)中的k是特征方程含根λ的重数.

例 6.7. *求方程$y''+3y'+2y=(x+2)e^{-x}$的一个特解.*

解: 微分方程对应的特征方程为$r^2+3r+2=0$. 而此时$\lambda=-1$是特征方程的单根, 故可设

$$y^*=xQ_1(x)e^{-x}=x(ax+b)e^{-x}, Q(x)=ax^2+bx.$$

从而

$$Q'(x)=2ax+b, Q''(x)=2a.$$

代入(12.6.7)得

$$2a+(3-2)(2ax+b)=x+2.$$

比较系数得$a=\frac{1}{2}$, $b=1$. 于是原方程的一个特解为

$$y^*=\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)e^{-x}.$$

例 6.8. *求方程$y''+4y'+4y=(2x+3)e^{-2x}$满足初值条件$y(0)=0$, $y'(0)=1$的特解.*

解: 特征方程为$r^2+4r+4=0$. 故$r=-2$为二重根, 因而原方程对应的齐次方程

$$y''+4y'+4y=0$$

的通解为

$$Y=(C_1+C_2x)e^{-2x}.$$

又$\lambda=-2$为特征方程的重根, 故令

$$y^*=x^2Q_1(x)e^{-2x}=x^2(ax+b)e^{-2x}, Q(x)=ax^3+bx^2.$$

从而

$$Q'(x)=3ax^2+2bx, Q''(x)=6ax+2b.$$

代入(12.6.7)得

$$6ax+2b=2x+3.$$

比较系数得$a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{3}{2}$. 于是原方程的一个特解为

$$y^*=x^2\left(\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}\right)e^{-x}.$$

故方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+x^2\left(\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}\right)e^{-x}.$$

根据初值条件$y(0)=0$, $y'(0)=1$得$C_1=0$, $C_2=1$. 因此所求的特解为

$$y=xe^{-2x}+x^2\left(\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}\right)e^{-x}.$$

例 6.9. *写出方程$y'' - y' - 2y = (x^2+1)e^{2x} + xe^{3x} + 3$的特解形式.*

解: 特征方程为$r^2 - r - 2 = 0$, 特征根为$r_1 = 2$, $r_2 = -1$. 右端项$f(x)$分成三项: $(x^2+1)e^{2x}$, xe^{3x}, 3.

这里第一项$P_n(x) = x^2 + 1$, $\lambda = 2$为特征单根; 第二项$P_n(x) = x$, $\lambda = 3$不是特征根; 第三项$P_n(x) = 1$, $\lambda = 0$不是特征根. 故原方程的特解形式为

$$y^* = y_1^* + y_2^* + y_3^* = x(Ax^2 + Bx + C)e^{2x} + (Dx + E)e^{3x} + F,$$

其中A, B, C, D, E, F为待定系数.

例 6.10. *求解方程$y'' - 6y' + 8y = x^2 + x - 1 + xe^{2x}$.*

解: 特征方程为$r^2 - 6r + 8 = 0$, 特征根为$r_1 = 2$, $r_2 = 4$. 因而原方程对应的齐次方程

$$y'' - 6y' + 8y = 0$$

的通解为

$$Y = C_1e^{2x} + C_2e^{4x}.$$

再求$y'' - 6y' + 8y = x^2 + x - 1$的特解$y_1^*$. 因$\lambda = 0$为不是特征根, 故可设$y_1^* = ax^2 + bx + c$, 求导得

$$y_1^{*\prime} = 2ax + b, y_1^{*\prime\prime} = 2a.$$

代入(12.6.7)得

$$2a - 6(6ax + b) + 8(ax^2 + bx + c) = x^2 + x - 1.$$

比较系数得$a = \frac{1}{8}$, $b = \frac{5}{16}$, $c = \frac{5}{64}$. 于是

$$y_1^* = \frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{16}x + \frac{5}{64}.$$

最后求$y'' - 6y' + 8y = xe^{2x}$的特解y_2^*. 因$\lambda = 2$为特征方程的单根, 故可设

$$y_2^* = x(ax + b)e^{2x}, Q(x) = ax^2 + bx.$$

从而

$$Q'(x) = 2ax + b, Q''(x) = 2a.$$

代入(12.6.7)得

$$2a - 2(2ax + b) = x.$$

比较系数得$a = b = -\frac{1}{4}$. 于是

$$y_2^* = -\frac{1}{4}x(x+1)e^{2x}.$$

由此得到原方程的通解为

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{4x} - \frac{1}{4}x(x+1)e^{2x} + \frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{16}x + \frac{5}{64}.$$

$f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + H_m(x)\sin\omega x]$型

考察方程

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + H_m(x)\sin\omega x] \tag{12.6.10}$$

应用欧拉公式, 把三角函数表示为复变指数函数的形式, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\lambda x}\left(P_l\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2} + H_m\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i}\right) \\ &= \left(\frac{P_l}{2}+\frac{H_m}{2i}\right)e^{(\lambda+i\omega)x} + \left(\frac{P_l}{2}-\frac{H_m}{2i}\right)e^{(\lambda-i\omega)x} \\ &= P(x)e^{(\lambda+i\omega)x} + \overline{P}(x)e^{(\lambda-i\omega)x}, \end{aligned}$$

其中$P(x) = \frac{P_l}{2} + \frac{H_m}{2i} = \frac{P_l}{2} - \frac{H_m}{2}i$, $\overline{P}(x) = \frac{P_l}{2} - \frac{H_m}{2i} = \frac{P_l}{2} + \frac{H_m}{2}i$. $P(x)$, $\overline{P}(x)$是相互共轭的n次多项式, 其中$n = \max\{l, m\}$.

将前面的结果应用于右端项$f(x)$中的第一项$P(x)e^{(\lambda+i\omega)x}$, 则存在一个$n$次多项式$Q_n(x)$, 使得$y_1^* = x^kQ_n(x)e^{(\lambda+i\omega)x}$为方程

$$y'' + py' + qy = P(x)e^{(\lambda+i\omega)x}$$

的特解, 其中k为是特征根$\lambda + i\omega$的重数(取0或1).

根据右端项$f(x)$中两项的共轭性, 原方程(12.6.10)具有形如

$$y^* = x^ke^{\lambda x}[Q_n(x)e^{i\omega x} + \overline{Q}_n(x)e^{-i\omega x}]$$

的特解. 上式可写为

$$\begin{aligned} y^* &= x^ke^{\lambda x}[Q_n(x)(\cos\omega x + i\sin\omega x) + \overline{Q}_n(x)(\cos\omega x - i\sin\omega x)] \\ &= x^ke^{\lambda x}[R_n^{(1)}(x)\cos\omega x + R_n^{(2)}(x)\sin\omega x]. \end{aligned}$$

综上所述, 方程$y'' + py' + qy = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + H_m(x)\sin\omega x]$具有形如

$$y^* = x^ke^{\lambda x}[R_n^{(1)}(x)\cos\omega x + R_n^{(2)}(x)\sin\omega x]$$

的特解, 其中$R_n^{(1)}(x)$, $R_n^{(2)}(x)$是n次多项式, $n = \max\{l, m\}$, 而k按$\lambda \pm i\omega$ 不是特征方程的根, 或是特征方程的根依次取0或1.

例 6.11. *求微分方程$y'' + y = x\cos 2x$的一个特解.*

解: 微分方程对应的特征方程为$r^2 + 1 = 0$, 特征根为$r = \pm i$. 而此时$\lambda + \omega i = 2i$不是特征方程的根, 故可设

$$y^* = (ax + b)\cos 2x + (cx + d)\sin 2x.$$

从而

$$y^{*\prime} = (2cx + 2d + a)\cos 2x + (c - 2ax - 2b)\sin 2x,$$

$$y^{*\prime\prime} = (-4ax - 4b + 4c)\cos 2x - (4cx - 4d - 4a)\sin 2x.$$

代入原方程得

$$(-3ax - 3b + 4c)\cos 2x - (3cx + 3d + 4a)\sin 2x = x\cos 2x.$$

比较系数得$a = -\frac{1}{3}$, $b = c = 0$, $d = \frac{4}{9}$. 于是原方程的一个特解为

$$y^* = -\frac{1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x.$$

例 6.12. *求微分方程*$y'' + 3y' + 2y = xe^{-x} + \cos^2 x$*的通解.*

解: (1) 齐次方程$y'' + 3y' + 2y = 0$的通解为

$$Y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$

(2) 求$y'' + 3y' + 2y = xe^{-x}$的特解y_1^*. 令

$$y_1^* = x(ax + b)e^{-x},$$

再记$Q(x) = x(ax + b)$, 则$Q'(x) = 2ax + b$, $Q''(x) = 2a$, 代入(12.6.7)得

$$2a + 2ax + b = x.$$

比较系数得$a = \frac{1}{2}$, $b = -1$. 于是

$$y_1^* = x\left(\frac{1}{2}x - 1\right)e^{-x}.$$

(3) 求$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{2}$的特解$y_2^*$. 容易得到$y_2^* = \frac{1}{4}$.

(4) 最后求$y'' + 3y' + 2y = \frac{\cos 2x}{2}$的特解$y_3^*$. 令

$$y_3^* = a\cos 2x + b\sin 2x,$$

代入方程得

$$(6b - 2a)\cos 2x + (-6a - 2b)\sin 2x = \frac{1}{2}\cos 2x.$$

比较系数得$a = -\frac{1}{40}$, $b = \frac{3}{40}$. 于是

$$y_3^* = -\frac{1}{40}\cos 2x + \frac{3}{40}\sin 2x.$$

所以原方程的通解为

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + x\left(\frac{1}{2}x - 1\right)e^{-x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{40}\cos 2x + \frac{3}{40}\sin 2x.$$