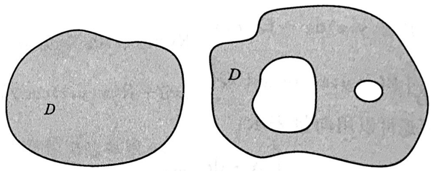
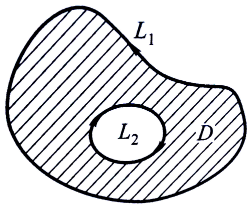


(a) 单连通区域　　(b) 复连通区域



10.3　格林公式

10.3.1　格林公式

若区域D中的任意一条封闭曲线的内部的所有的点都属于D, 则D是单连通区域, 否则是复连通区域.

边界曲线的正向

设平面有界闭区域D的边界曲线为L, 规定L正向如下: 当观察者沿L的正向行进时, D内在他近处的部分总在他的左边.

在上图中, D的正向边界L由L_1和L_2组成, 方向如图所示.

- 当区域D是单连通区域时, 其边界曲线的正方向是逆时针方向.
- 当区域D是复连通区域时, 其外边界曲线的正方向是逆时针方向, 内边界曲线的正方向是顺时针方向.

若以L记正向边界, 则用L^-表示反向(或称为负向)边界.

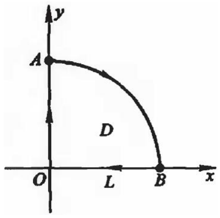
定理 3.1 (**格林公式**). *若平面上闭区域D的边界由逐段光滑的曲线L所组成, 函数$P(x,y)$, $Q(x,y)$在D上具有一阶连续偏导数, 则有*

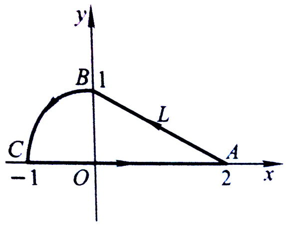
$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}\sigma = \oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y,$$

其中L是D取正向的边界曲线.

格林公式又可记为

$$\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \mathrm{d}\sigma = \oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y.$$





例 3.1. 计算曲线积分$\oint_L (x+y)\,\mathrm{d}x-(x-y)\,\mathrm{d}y$, 其中$L$为正向椭圆周$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

解: 令$P=x+y$, $Q=y-x$, 从而

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-1-1=-2.$$

设D为由L所围的椭圆形区域$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$, 则由格林公式得

$$\oint_L (x+y)\,\mathrm{d}x-(x-y)\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D -2\,\mathrm{d}\sigma=-2|D|=-2\pi ab.$$

例 3.2. 计算$\int_{AB} x\,\mathrm{d}y$, 其中曲线AB是半径为r的圆在第一象限部分.

解: 对区域D应用格林公式有

$$-\iint_D \mathrm{d}\sigma=\oint_{-L} x\,\mathrm{d}y=\int_{OA} x\,\mathrm{d}y+\int_{AB} x\,\mathrm{d}y+\int_{BO} x\,\mathrm{d}y=\int_{AB} x\,\mathrm{d}y.$$

于是

$$\int_{AB} x\,\mathrm{d}y=-\iint_D \mathrm{d}\sigma=-\frac{1}{4}\pi r^2.$$

例 3.3. 计算$\int_L (x^2-2y)\,\mathrm{d}x+(3x+ye^y)\,\mathrm{d}y$, 其中$L$是由直线$x+2y=2$上从$A(2,0)$到$B(0,1)$的一段及圆弧$x=-\sqrt{1-y^2}$上从$B(0,1)$ 到$C(-1,0)$ 的一段连接而成的有向曲线.

解: 利用格林公式计算. 为此添加有向线段$\overline{CA}$. 设由$L+\overline{CA}$所围成的闭区域为D, 则根据格林公式有

$$\begin{aligned}&\oint_{L+\overline{CA}} (x^2-2y)\,\mathrm{d}x+(3x+ye^y)\,\mathrm{d}y\\ =&\iint\limits_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(3x+ye^y)-\frac{\partial}{\partial y}(x^2-2y)\right]\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D 5\,\mathrm{d}\sigma=5\left(\frac{\pi}{4}+1\right).\end{aligned}$$

而由于$\overline{CA}$的方程是$y=0$(x从-1变到2), 故

$$\int_{\overline{CA}}(x^2-2y)\,\mathrm{d}x+(3x+ye^y)\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^{2}x^2\,\mathrm{d}x=3.$$

从而有

$$\int_L(x^2-2y)\,\mathrm{d}x+(3x+ye^y)\,\mathrm{d}y=5\left(\frac{\pi}{4}+1\right)-3=\frac{5\pi}{4}+2.$$

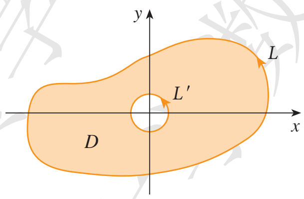
例 3.4. 计算$I=\oint_L\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中$L$是平面上一条不经过原点的光滑闭曲线, 方向为逆时针方向.

解: 令$P(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

设L所围的区域为D. 若$(0,0)\notin D$, 则

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=0.$$



若$(0,0)\in D$, 则$P(x,y),Q(x,y)$在点$(0,0)$处不可微, 所以不能直接用格林公式. 取点$(0,0)$的一个充分小的邻域D_ε(其边界为L'), 使得$D_\varepsilon\subset D$. 显然$P(x,y),Q(x,y)$在区域$D-D_\varepsilon$内是可微的, 所以

$$\oint_{L-L'}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\iint_{D-D_\varepsilon}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=0.$$

从而

$$I=\oint_{L'}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{r\cos t\,\mathrm{d}(r\sin t)-r\sin t\,\mathrm{d}(r\cos t)}{r^2}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=2\pi.$$

设$P(x,y)=-y,Q(x,y)=x$, 则由格林公式得

$$\oint_L x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=2\iint_D\mathrm{d}\sigma.$$

所以区域D的面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_L x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x,$$

其中L是区域D的边界曲线, 取正向.

例 3.5. 计算$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ $(a>0)$所围成的有界区域的面积.

解: 区域边界可写成$x = a\cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$. 于是所求的面积为

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\oint_L x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\cos^3 t\,\mathrm{d}(a\sin^3 t) - a\sin^3 t\,\mathrm{d}(a\cos^3 t) \\
&= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{3a^2}{8}\pi.
\end{aligned}
$$

10.3.2 平面上曲线积分与路径无关的条件

定义 3.1. *设D是一个开区域, 函数$P(x,y)$, $Q(x,y)$在区域D具有一阶连续偏导数. 如果对于D内任意指定的两点A、B, 以及D内从点A到点B的任意两条曲线L_1, L_2, 下列等式恒成立:*

$$\int_{L_1} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{L_2} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y,$$

则称曲线积分$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$在区域$D$内与路径无关, 否则称该曲线积分与路径有关.

定理 3.2. *设D是单连通区域. 若函数$P(x,y)$,$Q(x,y)$在D内有连续的偏导数, 则以下四个条件等价:*

(i) 在D内处处成立

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x};$$

(ii) 沿D内任一按段光滑封闭曲线L, 有

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0;$$

(iii) 对D中任一按段光滑曲线L, 曲线积分$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 与路径无关, 只与L的起点及终点有关;

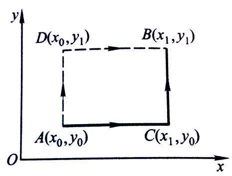
(iv) $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$是$D$内某一函数$u(x,y)$的全微分, 即在$D$内有

$$\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y.$$

当曲线积分$\int_{\widehat{AB}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$在区域$D$内与路径无关时, 由于曲线积分的值仅与积分弧段$\widehat{AB}$的起点$A(x_0, y_0)$和终点$B(x_1, y_1)$的位置有关, 因此可把此积分记作

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y.$$

实际计算时, 可取一条从A到B的便于计算的积分路径. 通常可取上图中的有向折线路径$\overline{AC} + \overline{CB}$, 则



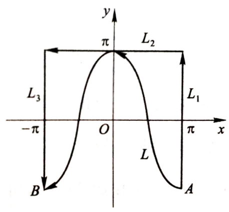
得

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_0)\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1, y)\,\mathrm{d}y.$$

类似地, 若取有向折线$\overline{AD}+\overline{DB}$, 则得

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{y_0}^{y_1} Q(x_0,y)\,\mathrm{d}y + \int_{x_0}^{x_1} P(x,y_1)\,\mathrm{d}x.$$

例 3.6. 计算$\int_L \frac{(x+y)\,\mathrm{d}x-(x-y)\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中曲线$L$是沿曲线$y=\pi\cos x$ 从$A(\pi,-\pi)$ 到$B(-\pi,-\pi)$ 的曲线弧.



解: 令$P=\frac{x+y}{x^2+y^2}$, $Q=-\frac{x-y}{x^2+y^2}$, 则$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$在除去原点的单连通区域内处处成立. 故

$$\begin{aligned}
&\int_L \frac{(x+y)\,\mathrm{d}x-(x-y)\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \left[\int_{L_1}+\int_{L_2}+\int_{L_3}\right]\frac{(x+y)\,\mathrm{d}x-(x-y)\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\\
=&\int_{L_1}\frac{-(x-y)\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+\int_{L_2}\frac{(x+y)\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+\int_{L_3}\frac{-(x-y)\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=-\frac{3}{2}\pi.
\end{aligned}$$

例 3.7. 设曲线积分$\int_L xy^2\,\mathrm{d}x+y\varphi(x)\,\mathrm{d}y$与路径无关, 其中函数$\varphi(x)$具有连续导数, 且$\varphi(0)=0$, 试计算$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\,\mathrm{d}x+y\varphi(x)\,\mathrm{d}y$.

解:

$$\begin{aligned}
I&=\int_{(0,0)}^{(0,1)} xy^2\,\mathrm{d}x+y\varphi(x)\,\mathrm{d}y+\int_{(0,1)}^{(1,1)} xy^2\,\mathrm{d}x+y\varphi(x)\,\mathrm{d}y\\
&=\int_{(0,0)}^{(0,1)} y\varphi(x)\,\mathrm{d}y+\int_{(0,1)}^{(1,1)} xy^2\,\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1 y\varphi(0)\,\mathrm{d}y+\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

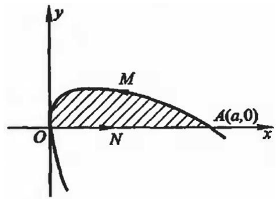
另一种方法为先求出$\varphi=x^2$.

10.3.3 思考与练习

练习 10.9. 计算$\int_L (x^2y-y)\,\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2-x\right)\mathrm{d}y$, 其中$L$为由$x=1$, $y=x$, $y=2x$所围区域的正向边界.

解: 由格林公式得

$$\begin{aligned}
&\int_L (x^2y-y)\,\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2-x\right)\mathrm{d}y=\iint_D (x^2-4x-1-x^2+1)\,\mathrm{d}\sigma\\
=&-\iint_D 4x\,\mathrm{d}\sigma=-\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{2x}4x\,\mathrm{d}y=-\int_0^1 4x^2\,\mathrm{d}x=-\frac{4}{3}.
\end{aligned}$$



练习 10.10. 计算$\int_L (2xy^3 - y^2\cos x)\,\mathrm{d}x + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)\,\mathrm{d}y$, 其中$L$为抛物线$2x = \pi y^2$上从点$(0,0)$到$\left(\frac{\pi}{2},1\right)$的弧段.

解: 因曲线是非封闭的, 故需添加辅助线. 令

$$L_1 : x = \frac{\pi}{2}, \quad y\text{从}1\text{到}0;$$

$$L_2 : y = 0, \quad x\text{从}\frac{\pi}{2}\text{到}0.$$

从而

$$\begin{aligned}
&\int_{L_1} (2xy^3 - y^2\cos x)\,\mathrm{d}x + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)\,\mathrm{d}y \\
=&\int_{L_1} (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)\,\mathrm{d}y = \int_1^0 \left(1 - 2y + \frac{3\pi^2}{4}y^2\right)\mathrm{d}y = -\frac{1}{4}\pi^2.
\end{aligned}$$

因L_2在x轴上, 故

$$\int_{L_2} (2xy^3 - y^2\cos x)\,\mathrm{d}x + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)\,\mathrm{d}y = 0.$$

又由格林公式得

$$\begin{aligned}
&\int_{L+L_1+L_2} (2xy^3 - y^2\cos x)dx + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)dy \\
=&-\iint\limits_D (6xy^2 - 2y\cos x - 6xy^2 + 2y\cos x)d\sigma = 0.
\end{aligned}$$

因此

$$\int_L (2xy^3 - y^2\cos x)dx + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)dy = 0 - \left(-\frac{1}{4}\pi^2\right) - 0 = \frac{1}{4}\pi^2.$$

练习 10.11. 计算抛物线$(x+y)^2 = ax\ (a > 0)$与x轴所围的面积.

解: 曲线$\widehat{AMO}$由函数$y = \sqrt{ax} - x, x \in [0,a]$表示, $\widehat{ONA}$为直线$y = 0$, 于是

$$\begin{aligned}
S_D =&\frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx = \frac{1}{2}\oint_{\widehat{ONA}} xdy - ydx + \frac{1}{2}\oint_{\widehat{AMO}} xdy - ydx \\
=&\frac{1}{2}\oint_{\widehat{AMO}} xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_a^0 \left[x\left(\frac{a}{2\sqrt{ax} - 1}\right) - (\sqrt{ax} - x)\right]dx \\
=&\frac{1}{2}\int_a^0 -\frac{1}{2}\sqrt{ax}dx = \frac{\sqrt{a}}{4}\int_0^a \sqrt{x}dx = \frac{1}{6}a^2.
\end{aligned}$$

练习 10.12. 证明：在整个xOy平面内，曲线积分

$$\int_L xy^2\,\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y$$

与路径无关，并计算曲线积分$\int_{(1,1)}^{(2,3)} xy^2\,\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y$.

解: 令$P = xy^2$，$Q = x^2y$，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2xy - 2xy = 0,$$

也即$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. 因此在整个$xOy$平面内，所给的曲线积分与路径无关. 并有

$$\int_{(1,1)}^{(2,3)} xy^2\,\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y = \int_1^2 x\,\mathrm{d}x + \int_1^3 4y\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2} + 16 = \frac{35}{2}.$$

练习 10.13. 计算曲线积分

$$\int_L (x^2 - y)\,\mathrm{d}x - (x + \sin^2 y)\,\mathrm{d}y,$$

其中L是圆周$y = \sqrt{2x - x^2}$自$O(0,0)$到$A(2,0)$的一段弧.

解: 令$P = x^2 - y$，$Q = -(x + \sin^2 y)$，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -1 - (-1) = 0,$$

因此所给的曲线积分与路径无关. 为方便计算，改取有向线段$\overline{OA}$为积分路径. 在$\overline{OA}$上，$y = 0$，x自0至2. 于是

$$\int_L (x^2 - y)\,\mathrm{d}x - (x + \sin^2 y)\,\mathrm{d}y = \int_{\overline{OA}} (x^2 - y)\,\mathrm{d}x - (x + \sin^2 y)\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^2 [(x^2 - 0) - (x + \sin^2 0)\cdot 0]\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}.$$

练习 10.14. 试用曲线积分求

$$(2x + \sin y)\,\mathrm{d}x + (x\cos y)\,\mathrm{d}y$$

的一个原函数.

解: 由于

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x + \sin y) = \frac{\partial}{\partial x}(x\cos y) = \cos y,$$

所以原函数存在. 取$(x_0, y_0) = (0,0)$时，有

$$u(x,y) = \int_0^x 2x\,\mathrm{d}x + \int_0^y x\cos y\,\mathrm{d}y = x^2 + x\sin y.$$