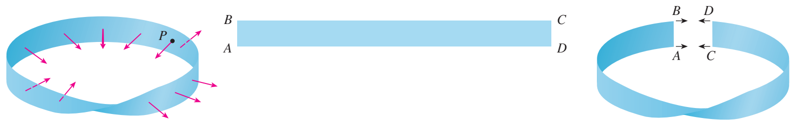


10.5　对坐标的曲面积分

10.5.1　对坐标的曲面积分的概念和性质

曲面的侧

设连通曲面Σ上到处都有连续变动的切平面(或法线), M为曲面Σ上的一点, 曲面在M处的法线有两个方向: 当取定其中一个指向为正方向时, 则另一个指向就是负方向.

设M_0为Σ上任一点, L为Σ上任一经过点M_0, 且不超出Σ边界的闭曲线. 又设M为动点, 它在M_0处与M_0有相同的法线方向, 且有如下特性: 当M从M_0出发沿L 连续移动, 这时作为曲面上的点M, 它的法线方向也连续地变动. 最后当M沿L回到M_0时,

- 若这时M的法线方向仍与M_0的法线方向相一致, 则说曲面Σ是双侧曲面;
- 若与M_0的法线方向相反, 则说曲面Σ是单侧曲面.

单侧曲面的例子: 莫比乌斯(Möbius)带

通常我们遇到的曲面都有两个侧. 对封闭曲面而言, 有外侧和内侧 ; 又如旋转抛物面$z = x^2 + y^2$或者用$z = f(x,y)$表示的曲面, 有上侧和下侧.

所谓取定曲面的侧, 就是指定曲面上各点处的法向量的指向. 比如

- 对于曲面$z = f(x,y)$, 如果取定的法向量是朝上的, 则就取定曲面的上侧;
- 对于封闭曲面, 如果取定的法向量是由内指向外的, 则就取定曲面的外侧.

这种指定了法向量指向的曲面就称为有向曲面.

流体流向曲面一侧的流量

设Σ是一有向曲面, 某不可压缩的流体(假设密度为1)以流速

$$\boldsymbol{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

通过Σ, 求在单位时间内流过Σ指定侧的流体质量, 即流量Φ.

由于流体流经Σ上各点处的速度是不同的, 且Σ为一曲面, 因此采用定积分的思想方法来解决该问题.

$$\begin{aligned}\Phi &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{v}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\boldsymbol{n}\Delta S_i\\ &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}],\end{aligned}$$

其中$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta S_i$, 曲面在该点处的单位法向量

$$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha_i)\boldsymbol{i}+(\cos\beta_i)\boldsymbol{j}+(\cos\gamma_i)\boldsymbol{k},$$

$(\Delta S_i)_{yz}=(\cos\alpha_i)\Delta S_i,(\Delta S_i)_{zx}=(\cos\beta_i)\Delta S_i,(\Delta S_i)_{xy}=(\cos\gamma_i)\Delta S_i$ 分别称为有向小曲面ΔS_i在yOz面, zOx面和xOy面上的投影.

定义 5.1 (对坐标的曲面积分的定义). *设Σ为光滑(或逐片光滑)的有向曲面, 函数$R(x,y,z)$在Σ上有界. 把Σ任意分成n块小曲面ΔS_i(ΔS_i同时又表示第i块小曲面的面积), ΔS_i 在xOy 面上的投影为$(\Delta S_i)_{xy}$, (ξ_i,η_i,ζ_i)是ΔS_i上任意取定的一点. 如果当各小块曲面的直径的最大值$\lambda\to 0$时, 极限*

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

存在, 则称此极限为函数$R(x,y,z)$在有向曲面Σ上对坐标x,y的曲面积分, 并记作$\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 即

$$\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy},$$

其中$R(x,y,z)$称为被积函数, Σ称为(有向) 积分曲面, $R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$称为被积表达式, $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$称为有向曲面Σ 在xOy面上的投影微元.

类似地可以定义函数$P(x,y,z)$在有向曲面Σ上对坐标y,z 的曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$及函数$Q(x,y,z)$在有向曲面$\Sigma$上对坐标$z,x$ 的曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$, 分别为

$$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz},$$

$$\iint\limits_{\Sigma}Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}.$$

以上三个曲面积分也称为第二类曲面积分.

当$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$在有向光滑曲面Σ上连续时, 对坐标的曲面积分是存在的.

在应用上出现较多的是以上三种积分合并起来的形式

$$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma}Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

为简便起见上式又写成

$$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

如果Σ是封闭曲面, 通常记为

$$\oiint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

上述流向Σ指定侧的流量Φ可表示为

$$\Phi=\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

对坐标的曲面积分的性质

(1) 如果把Σ分成Σ_1和Σ_2, 则

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ =&\iint_{\Sigma_1} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_2} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

(2) 设Σ是有向曲面, $-\Sigma$表示与Σ取相反侧的有向曲面, 则

$$\begin{aligned}&\iint_{-\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ =&-\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

关于对坐标的曲面积分, 必须要注意积分曲面所取的侧.

10.5.2 对坐标的曲面积分的计算

设有向光滑曲面Σ是由方程$z = z(x,y)$给出的曲面的上侧, Σ在xOy面上的投影区域为D_{xy}, 函数$R(x,y,z)$在Σ上连续, 则有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;$$

若Σ是由方程$z = z(x,y)$给出的曲面的下侧, 则有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

类似地, 若Σ由方程$x = x(y,z)$给出, 则有

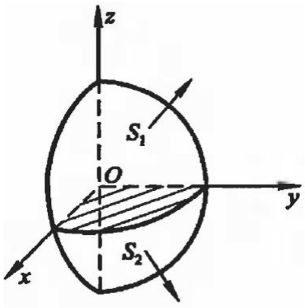
$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \pm\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

等式右端的符号这样确定: 若积分曲面Σ是由方程$x = x(y,z)$所给出的曲面的前侧, 则符号取正; 反之, 若Σ取后侧, 则符号取负.

若Σ由方程$y = y(z,x)$给出, 则有

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \pm\iint_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x,$$

等式右端的符号这样确定: 若积分曲面Σ是由方程$y = y(z,x)$所给出的曲面的右侧, 则符号取正; 反之, 若Σ取左侧, 则符号取负.



例 5.1. 计算$\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$\Sigma$为半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧.

解: 曲面Σ在xOy面上的投影为

$$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\le a^2\}.$$

因此

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=&\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\,\mathrm{d}r\\=&2\pi\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\,\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\pi a^3.\end{aligned}$$

例 5.2. 计算

$$\iint\limits_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中Σ是球面$x^2+y^2+z^2=1$在$x\ge0, y\ge0$部分并取球面外侧.

解: 将曲面Σ分为上侧$\Sigma_1: z_1=\sqrt{1-x^2-y^2}$和下侧$\Sigma_2: z_2=-\sqrt{1-x^2-y^2}$. 它们在$xOy$面上的投影区域都是单位圆在第一象限部分. 于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=&\iint\limits_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_2} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\=&\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_{xy}}-xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\=&2\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\=&2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\cos\theta\sin\theta\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r=\frac{2}{15}.\end{aligned}$$

例 5.3. 计算$\iint\limits_{\Sigma} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=1$在第一象限部分, 取上侧.

解: 由对称性得

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3\iint\limits_{\Sigma} z^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

由于曲面Σ在xOy面上的投影为

$$D_{xy} = \{(x,y)|x^2+y^2 \le 1\},$$

因此

$$\begin{aligned}3\iint\limits_{\Sigma} z^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =& 3\iint\limits_{D_{xy}} (1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r(1-r^2)\,\mathrm{d}r \\ =& \frac{3}{2}\pi \int_0^1 r(1-r^2)\,\mathrm{d}r = \frac{3}{8}\pi.\end{aligned}$$

例 5.4. 计算$\oiint\limits_{\Sigma} (x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (y-z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (z+3x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的外侧.

解:

$$\begin{aligned}\oiint\limits_{\Sigma} (x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iint\limits_{\Sigma_{前}} (x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \oiint\limits_{\Sigma_{后}} (x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \iint\limits_{D_{yz}} (\sqrt{R^2-y^2-z^2}+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \iint\limits_{D_{yz}} (-\sqrt{R^2-y^2-z^2}+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= 2\iint\limits_{y^2+z^2\le R^2} \sqrt{R^2-y^2-z^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{4}{3}\pi R^3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\oiint\limits_{\Sigma} (y-z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x &= \iint\limits_{\Sigma_{右}} (y-z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \oiint\limits_{\Sigma_{左}} (y-z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \\ &= \iint\limits_{D_{zx}} (\sqrt{R^2-z^2-x^2}-z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - \iint\limits_{D_{zx}} (-\sqrt{R^2-z^2-x^2}-z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \\ &= 2\iint\limits_{z^2+x^2\le R^2} \sqrt{R^2-z^2-x^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{4}{3}\pi R^3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\oiint\limits_{\Sigma} (z+3x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint\limits_{\Sigma_{上}} (z+3x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \oiint\limits_{\Sigma_{下}} (z+3x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= 2\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} \sqrt{R^2-z^2-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{4}{3}\pi R^3.\end{aligned}$$

综上可得

$$\oiint\limits_{\Sigma} (x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (y-z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (z+3x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\pi R^3.$$

10.5.3 思考与练习

练习 10.17. 计算$\oiint\limits_{\Sigma} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$\Sigma$是长方体$\Omega$的整个表面的外侧, $\Omega=\{(x,y,z)|0\le x\le a,0\le y\le b,0\le z\le c\}$.

解: 把有向曲面Σ分成以下六部分:

$$\Sigma_1: z=c(0\le x\le a,0\le y\le b)\text{的上侧};$$

$$\Sigma_2: z=0(0\le x\le a,0\le y\le b)\text{的下侧};$$

$$\Sigma_3: x=a(0\le y\le b,0\le z\le c)\text{的前侧};$$

$$\Sigma_4: x=0(0\le y\le b,0\le z\le c)\text{的后侧};$$

$$\Sigma_5: y=b(0\le x\le a,0\le z\le c)\text{的右侧};$$

$$\Sigma_6: y=0(0\le x\le a,0\le z\le c)\text{的左侧}.$$

除Σ_3,Σ_4外, 其余四片曲面在yOz面上的投影为零, 因此

$$\oiint\limits_{\Sigma} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma_3} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma_4} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{xy}} a^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\iint\limits_{D_{xy}} 0^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=a^2bc.$$

类似地可得

$$\oiint\limits_{\Sigma} y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=b^2ac,\quad \oiint\limits_{\Sigma} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=c^2ab.$$

于是所求曲面积分为$(a+b+c)abc$.