10.7 高斯公式、通量与散度

10.7.1 高斯公式

引例

计算$\oiint\limits_{\Sigma} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是长方体$\Omega$的整个表面的外侧，$\Omega = \{(x,y,z)|0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le c\}$.

用此公式计算复杂曲面上的第二类曲面积分还是相当烦琐的.

高斯公式

定理 7.1. 设空间有界闭区域Ω是由分片光滑的闭曲面Σ所围成，函数$P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$在$\Omega$上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}V = \oiint\limits_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中Σ是Ω的整个边界曲面的外侧. 上式称为高斯(*Gauss*)公式.

根据两类曲面积分的联系，高斯公式也可写作

$$\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}V = \oiint\limits_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S,$$

其中$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$是$\Sigma$上点$(x,y,z)$处的指向外侧的法向量的方向余弦.

用第二类曲面积分计算空间区域的体积公式

若在高斯公式中取$P = x, Q = y, R = z$，则可以得到应用第二类曲面积分计算空间区域Ω的体积公式

$$V = \frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

例 7.1. 计算

$$I = \oiint_{\Sigma} (x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (y-z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (z+3x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中Σ为球面$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$的外侧.

解: 由高斯公式知，

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(x+y) + \frac{\partial}{\partial y}(y-z) + \frac{\partial}{\partial z}(z+3x)\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \iiint_V 3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 4\pi R^3. \end{aligned}$$

例 7.2. 计算

$$\oiint_{\Sigma} x(y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中Σ为柱面$x^2+y^2=1$及平面$z=0$, $z=3$所围成的空间闭区域Ω的整个边界曲面的外侧.

解: 由高斯公式知,

$$\begin{aligned}
\text{原式}=&\iiint_V\left[\frac{\partial}{\partial x}(x(y-z))+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
=&\iiint_V(y-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_0^3(r\sin\theta-z)\,\mathrm{d}z\\
=&-\frac{9\pi}{2}.
\end{aligned}$$

例 7.3. 计算

$$\oiint_{\Sigma} y(x-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(y^2+xz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中Σ是一顶点在坐标原点、侧面平行于坐标面且位于第一象限的边长为a的正立方体表面, 并取外侧.

解: 由高斯公式知,

$$\begin{aligned}
\text{原式}=&\iiint_V\left[\frac{\partial}{\partial x}(y(x-z))+\frac{\partial}{\partial y}(x^2)+\frac{\partial}{\partial z}(y^2+xz)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
=&\iiint_V(y+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^a\mathrm{d}z\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^a(y+x)\,\mathrm{d}x\\
=&a\int_0^a\left(ay+\frac{1}{2}a^2\right)\mathrm{d}y=a^4.
\end{aligned}$$

例 7.4. 计算$\oiint\limits_{\Sigma} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$\Sigma$是长方体$\Omega$的整个表面的外侧, $\Omega=\{(x,y,z)|0\le x\le a,0\le y\le b,0\le z\le c\}$.

解: 由高斯公式得

$$\begin{aligned}
\text{原式}=&\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial}{x}(x^2)+\frac{\partial}{y}(y^2)+\frac{\partial}{z}(z^2)\right]\mathrm{d}V\\
=&2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}V\\
=&2\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^b\mathrm{d}y\int_0^c(x+y+z)\,\mathrm{d}z=(a+b+c)abc.
\end{aligned}$$

例 7.5. 设函数$u(x,y,z)$和$v(x,y,z)$在闭区域Ω上具有一阶及二阶连续偏导数, 证明

$$\iiint\limits_{\Omega} u\Delta v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint\limits_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial n}\,\mathrm{d}S - \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中Σ是闭区域Ω的整个边界曲面, $\frac{\partial v}{\partial n}$为函数$v(x,y,z)$沿$\Sigma$的外法线方向的方向导数, 符号$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$称为*Laplace*算子. 这个公式叫做格林第一公式.

例 7.6. 设Ω是三维空间的区域, Ω内任何封闭曲面所围成的区域都属于Ω, 此时称Ω为空间二维单连通区域. 又设函数$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ 和$R(x,y,z)$ 在Ω上具有一阶连续的偏导数. Σ表示Ω内任一不自交的光滑封闭曲面, $\boldsymbol{n}$是Σ的外法线方向. 试证明: 对Ω内任意曲面Σ恒有

$$\oiint\limits_{\Sigma}[P\cos(\widehat{\boldsymbol{n},x})+Q\cos(\widehat{\boldsymbol{n},y})+R\cos(\widehat{\boldsymbol{n},z})]\,\mathrm{d}S=0$$

的充要条件是$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$在$\Omega$内处处成立.

10.7.2 通量与散度

高斯公式的物理意义

设稳定流动的不可压缩流体(假定密度为1)的速度场由

$$\boldsymbol{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

给出, 其中函数$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$和$R(x,y,z)$具有一阶连续的偏导数. 令Σ是速度场内一有向曲面, $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$是$\Sigma$上点$(x,y,z)$处的单位法向量, 则单位时间内流体经过$\Sigma$流向指定侧的流体总质量为

$$\begin{aligned}\Phi &= \oiint\limits_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oiint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S\\ &=\oiint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=\oiint\limits_{\Sigma}v_n\,\mathrm{d}S,\end{aligned}$$

其中$v_n=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma$表示流体的速度向量在有向曲面$\Sigma$的法向量上的投影.

若Σ是高斯公式中闭区域Ω的边界曲面的外侧, 则高斯公式的右端表示单位时间内流出闭区域Ω的流体的总质量.

由假设流体是不可压缩的, 且流动是稳定的, 因此在流体流出Ω的同时, Ω内部必须有产生流体的源头产生出同样多的流体来补充. 所以高斯公式的左端可解释为分布在Ω内的源头在单位时间内所产生的流体的总质量.

通量与散度

设向量场由

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

给出, 其中函数$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$和$R(x,y,z)$具有一阶连续的偏导数. 令$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$是一有向曲面$\Sigma$上点$(x,y,z)$处的单位法向量, 称$\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$为向量场$\boldsymbol{A}$通过曲面$\Sigma$向着指定侧的通量(或流量), 其中$A_n=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}$是向量$\boldsymbol{A}$在曲面$\Sigma$的外侧法向量上的投影. 称$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$为向量场$\boldsymbol{A}$的散度, 记作$\operatorname{div}\boldsymbol{A}$, 即

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

高斯公式

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\oiint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

可写成

$$\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V=\oiint\limits_{\Sigma}A_n\,\mathrm{d}S.$$

由积分中值定理可知, 存在一点$(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$, 使得

$$(\operatorname{div}\boldsymbol{A})|_{(\xi,\eta,\zeta)}=\frac{1}{V}\oiint\limits_{\Sigma}A_n\,\mathrm{d}S.$$

再令Ω缩到一点$M(x,y,z)$ (记$\Omega\to M$), 取上式的极限, 得

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\lim_{\Omega\to M}\frac{1}{V}\oiint\limits_{\Sigma}A_n\,\mathrm{d}S.$$

上式可作为散度的另一种定义形式.

$\operatorname{div}\boldsymbol{A}$可看作是稳定流动的不可压缩流体在点$M(x,y,z)$的源头强度, 即在单位时间体积内所产生的流体的质量.

- 若$\operatorname{div}\boldsymbol{A}>0$, 说明在每一单位时间内有一定数量的流体流出这一点, 则称这点为源;
- 若$\operatorname{div}\boldsymbol{A}<0$, 说明在每一单位时间内有一定数量的流体被这一点吸收, 则称这点为汇;
- 若$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0$, 则称$\boldsymbol{A}$为无源场;

例 7.7. 求向量场$\boldsymbol{A}(x,y,z)=(x^2+yz)\boldsymbol{i}+(y^2+xz)\boldsymbol{j}+(z^2+xy)\boldsymbol{k}$的散度.

解:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial(x^2+yz)}{\partial x}+\frac{\partial(y^2+xz)}{\partial y}+\frac{\partial(z^2+xy)}{\partial z}=2(x+y+z).$$

例 7.8. 设$u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$是两个定义在闭区域Ω上的具有二阶连续偏导数的函数, $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial v}{\partial n}$依次表示$u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$沿Σ的外法线方向的方向导数. 证明

$$\iiint\limits_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)\,\mathrm{d}V=\oiint\limits_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S,$$

其中Σ是空间闭区域Ω的整个边界曲面. 这个公式称为格林第二公式.

例 7.9. 利用高斯公式推证阿基米德原理: 浸没在液体中的物体所受液体的压力的合力(即浮力)的方向竖直向上, 其大小等于这物体所排开的液体的重力.

解: 建立空间直角坐标系, 取液面为xOy面, z轴竖直向下, 设液体的密度为ρ. 在物体表面Σ上取面积微元$\mathrm{d}S$, 并设Σ在此微元处的外法线方向为$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, 则$\mathrm{d}S$所受液体的压力在$x$轴、$y$轴、$z$轴上的分量分别为

$$-\rho gz\cos\alpha\,\mathrm{d}S,\quad -\rho gz\cos\beta\,\mathrm{d}S,\quad -\rho gz\cos\gamma\,\mathrm{d}S,$$

其中g为重力加速度. 利用高斯公式计算Σ说所受的压力, 可得

$$F_x = \oiint_{\Sigma} (-\rho g z \cos\alpha)\,\mathrm{d}S = \iiint_{\Omega} 0\,\mathrm{d}V = 0,$$

$$F_y = \oiint_{\Sigma} (-\rho g z \cos\beta)\,\mathrm{d}S = \iiint_{\Omega} 0\,\mathrm{d}V = 0,$$

$$F_z = \oiint_{\Sigma} (-\rho g z \cos\gamma)\,\mathrm{d}S = \iiint_{\Omega} (-\rho g)\,\mathrm{d}V = -\rho g|\Omega|,$$

其中$|\Omega|$为物体的体积. 得证.