8.9 偏导数在经济学中的应用

8.9.1 偏导数的经济意义

边际成本函数

设某企业生产A, B两种产品, A产品的生产数量为x单位, B产品的生产数量为y单位, 称总成本函数$C = f(x, y)$为联合成本函数 ,

- 称$\frac{\partial C}{\partial x}$为关于$A$产品的边际成本函数, 表示当$B$产品的产量固定在$y$单位, A产品的产量在x单位的基础上再产生一个单位产品时成本大约增加$\frac{\partial C}{\partial x}$.
- 称$\frac{\partial C}{\partial y}$为关于$B$产品的边际成本函数, 表示当$A$产品的产量固定在$x$单位, B产品的产量在y单位的基础上再产生一个单位产品时成本大约增加$\frac{\partial C}{\partial y}$.

边际收益函数、边际利润函数类似可得.

例 9.1. 假设生产两种产品A, B的生产数量为x单位和y单位，联合成本函数$C = x\ln(5+y)$，求产品A和B的边际成本.

解: 关于产品A的边际成本为
$$\frac{\partial C}{\partial x} = \ln(5+y).$$
关于产品B的边际成本为
$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{x}{5+y}.$$

例 9.2. 某公司每日由生产x台电脑与y台键盘所得的利润为
$$P(x,y) = 6x^{\frac{3}{2}} + 4y^{\frac{3}{2}} + xy,$$
求其边际利润函数，计算$P'_y(225, 400)$并解释其意义.

解:
$$P'_x(x,y) = 9x^{\frac{1}{2}} + y, \quad P'_y(x,y) = 6y^{\frac{1}{2}} + x.$$
$$P'_y(225, 400) = 6 \times 400^{\frac{1}{2}} + 225 = 345.$$
当产量为225台电脑与400台键盘时，保持电脑产量不变，键盘的产量由400增为401时，利润约增加345元.

边际需求函数

设A, B是两种相关商品，其价格分别为p_A和p_B，消费者的收入为y，A, B的需求函数分别为$Q_A = f(p_A, p_B, y)$，$Q_B = g(p_B, p_A, y)$，则其偏导数分别为
$$\frac{\partial Q_A}{\partial p_A}, \frac{\partial Q_A}{\partial p_B}, \frac{\partial Q_A}{\partial y}; \quad \frac{\partial Q_B}{\partial p_B}, \frac{\partial Q_B}{\partial p_A}, \frac{\partial Q_B}{\partial y},$$
其中

- $\frac{\partial Q_A}{\partial p_A}$称为商品$A$的需求函数关于$p_A$的边际需求，它表示当商品$B$的价格$p_B$及消费者的收入$y$固定时，商品$A$的价格变化一个单位时，商品$A$的需求量的近似改变量;
- $\frac{\partial Q_A}{\partial p_B}$称为商品$A$的需求函数关于$p_B$的边际需求，它表示当商品$A$的价格$p_A$及消费者的收入$y$固定时，商品$A$的价格变化一个单位时，商品$A$的需求量的近似改变量;
- $\frac{\partial Q_A}{\partial y}$称为商品$A$的需求函数关于$y$的边际需求，它表示当商品$A$的价格$p_A$及商品$A$的价格$p_B$固定时，消费者的收入$y$变化一个单位时，商品$A$的需求量的近似改变量.

- 当p_B，y固定，而p_A上升时，商品A的需求量Q_A将减少，于是有$\frac{\partial Q_A}{\partial p_A} < 0$，类似地$\frac{\partial Q_B}{\partial p_B} < 0$;
- 当p_B，p_A固定，而y增加时，商品A的需求量Q_A将增大，于是有$\frac{\partial Q_A}{\partial y} > 0$，类似地$\frac{\partial Q_B}{\partial y} > 0$;
- $\frac{\partial Q_A}{\partial p_B}$和$\frac{\partial Q_B}{\partial p_A}$可正可负.

若$\frac{\partial Q_A}{\partial p_B} > 0$且$\frac{\partial Q_B}{\partial p_A} > 0$, 则称$A$和$B$是相互竞争(或替代)的商品. 例如夏天的西瓜与冷饮. 当西瓜价格p_A及消费者的收入y固定时, 冷饮价格p_B的增加将引起西瓜需求量Q_A增加, 所以$\frac{\partial Q_A}{\partial p_B} > 0$. 同理, $\frac{\partial Q_B}{\partial p_A} > 0$.

若$\frac{\partial Q_A}{\partial p_B} < 0$且$\frac{\partial Q_B}{\partial p_A} < 0$, 则称$A$和$B$是相互补充的商品. 例如汽车与汽油. 当汽车价格$p_A$ 及消费者的收入y固定时, 汽油价格p_B的增加将使开车的费用随之增加, 因而汽车的需求量Q_A将会减少, 所以$\frac{\partial Q_A}{\partial p_B} < 0$. 同理, $\frac{\partial Q_B}{\partial p_A} < 0$.

例 9.3. 两种商品A与B, 当其价格分别为x与y时的需求函数为

$$f(x,y) = 300 - 6x^2 + 10y^2 \ (A\text{的需求函数}),$$

$$g(x,y) = 600 + 6x - 2y^2 \ (B\text{的需求函数}).$$

试问这两种商品为竞争型还是互补型?

解:

$$f'_y(x,y) = 20y > 0, \quad g'_x(x,y) = 6 > 0.$$

由此两种商品为竞争型.

偏弹性

设商品A的需求函数为$Q_A = f(p_A, p_B, y)$, 当p_B和y保持不变而p_A发生变化时, 需求量Q_A的相对改变量与自变量p_A的相对改变量比的极限, 称为需求的自身(直接)价格弹性, 记为E_{AA}, 即

$$E_{AA} = \lim_{\Delta p_A \to 0} \frac{\Delta Q_A / Q_A}{\Delta p_A / p_A} = \frac{p_A}{Q_A} \cdot \frac{\partial Q_A}{\partial p_A}.$$

一般情况下, 由于$\frac{\partial Q_A}{\partial p_A} < 0$, 所以$E_{AA} < 0$.

设商品A的需求函数为$Q_A = f(p_A, p_B, y)$, 当p_A和y保持不变而p_B发生变化时, 需求量Q_A的相对改变量与自变量p_B的相对改变量比的极限, 称为需求的交叉价格弹性, 记为E_{AB}, 即

$$E_{AB} = \lim_{\Delta p_B \to 0} \frac{\Delta Q_A / Q_A}{\Delta p_B / p_B} = \frac{p_B}{Q_A} \cdot \frac{\partial Q_A}{\partial p_B}.$$

- 当A和B是相互竞争(和替代)的商品时, 由于$\frac{\partial Q_A}{\partial p_B} > 0$, 所以$E_{AB} > 0$;
- 当A和B是相互补充的商品时, 由于$\frac{\partial Q_A}{\partial p_B} < 0$, 所以$E_{AB} < 0$.

设商品A的需求函数为$Q_A = f(p_A, p_B, y)$, 当p_A和p_B保持不变而y发生变化时, 需求量Q_A的相对改变量与自变量y的相对改变量比的极限, 称为需求的收入弹性, 记为E_{Ay}, 即

$$E_{Ay} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta Q_A / Q_A}{\Delta y / y} = \frac{y}{Q_A} \cdot \frac{\partial Q_A}{\partial y}.$$

一般情况下, 由于$\frac{\partial Q_A}{\partial y} > 0$, 所以$E_{Ay} < 0$.

例 9.4. 设需求函数为$Q_A = f(p_A, p_B, y) = 14 - 2p_A + 5p_B + \frac{1}{10}y$，求当$p_A = 4$，$p_B = 2$，$y = 200$时$E_{AA}$，$E_{AB}$，$E_{Ay}$的值.

解:

$$E_{AA} = \frac{p_A}{Q_A} \cdot \frac{\partial Q_A}{\partial p_A} = -2\frac{p_A}{Q_A}, \quad E_{AB} = \frac{p_B}{Q_A} \cdot \frac{\partial Q_A}{\partial p_B} = 5\frac{p_B}{Q_A},$$

$$E_{Ay} = \frac{y}{Q_A} \cdot \frac{\partial Q_A}{\partial y} = \frac{1}{10} \cdot \frac{p_A}{Q_A}.$$

所以

$$E_{AA}(4,2,200) = -\frac{2}{9}, \quad E_{AB}(4,2,200) = \frac{5}{18}, \quad E_{Ay}(4,2,200) = \frac{5}{9}.$$

由于$E_{AB}(4,2,200) > 0$, 说明商品A和B是相互竞争(和替代)的商品.

8.9.2 经济应用举例

例 9.5. 假设某企业在两个相互分割的市场上出售同一种产品，两个市场的需求函数分别是

$$p_1 = 18 - 2Q_1, \quad p_2 = 12 - Q_2,$$

其中p_1和p_2为售价, Q_1和Q_2为销售量. 总成本函数为

$$C = 2(Q_1 + Q_2) + 5.$$

(1) 如果该企业实行价格差别策略, 试确定两个市场上该产品的销售量和价格, 使该企业获得最大利润;

(2) 如果该企业实行价格无差别策略, 试确定两市场上该产品的销售量和统一价格, 使该企业总利润最大化, 并比较两种策略下的总利润大小.

解:

(1) 总利润函数

$$L = R - C = p_1Q_1 + p_2Q_2 - [2(Q_1 + Q_2) + 5] = -2Q_1^2 - Q_2^2 + 16Q_1 + 10Q_2 - 5.$$

由

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial Q_1} = -4Q_1 + 16 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial Q_2} = -2Q_2 + 10 = 0, \end{cases}$$

解得唯一驻点$Q_1 = 4$, $Q_2 = 5$. 这时$p_1 = 10$, $p_2 = 7$. 该实际问题一定存在最大值, 因此当$p_1 = 10$, $p_2 = 7$时, 取得最大利润

$$L_{\max} = (-2Q_1^2 - Q_2^2 + 16Q_1 + 10Q_2 - 5)\big|_{\substack{Q_1=4 \\ Q_2=5}} = 52.$$

(2) 若实行价格无差别策略, 则$p_1 = p_2$, 即约束条件$2Q_1 - Q_2 = 6$. 将$Q_2 = 2Q_1 - 6$代入原总利润函数得新的总利润函数

$$L_{new} = -2Q_1^2 - (2Q_1 - 6)^2 + 16Q_1 + 10(2Q_1 - 6) - 5 = -6Q_1^2 + 60Q_1 - 101.$$

易得当$Q_1 = 5$, $Q_2 = 4$时新的总利润函数取得最大值49. 因此, 企业实行价格差别策略所得利润要大于实行价格无差别策略的利润.

例 9.6. *假设某企业通过电视和报纸做广告, 已知销售收入为*

$$R(x, y) = 15 + 14x + 32y - 8xy - 2x^2 - 10y^2,$$

其中x(万元)和y(万元)为电视广告费和报纸广告费.

(1) 在广告费用不限的情况下, 求最佳广告策略;

(2) 如果广告费用限制为1.5万元, 求最佳广告策略.

解:

(1) 利润函数

$$L = R - (x + y) = 15 + 13x + 31y - 8xy - 2x^2 - 10y^2.$$

由

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 13 - 8y - 4x = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 31 - 8x - 20y = 0, \end{cases}$$

解得唯一驻点$x = 0.75$, $y = 1.25$. 这时最大利润为$L(0.75, 1.25) = 39.25$(万元).

(2) 构造拉格朗日函数

$$F(x, y, \lambda) = 15 + 13x + 31y - 8xy - 2x^2 - 10y^2 + \lambda(x + y - 1.5).$$

由

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 13 - 8y - 4x + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 31 - 8x - 20y + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y - 1.5 = 0, \end{cases}$$

解得唯一驻点$x = 0$, $y = 1.5$. 这时最大利润为$L(0, 1.5) = 39$(万元).

例 9.7. *已知某企业某产品的生产函数是$f(x, y) = 100x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$, 每个劳动力及每个单位资本的成本分别是150元和250元, 该企业的总投资预算是50000元. 问如何分配这笔资金用于安排劳动力与单位资本投入, 使生产量最高? 并求最高生产量.*

解: 问题为求条件$150x + 250y = 50000$下函数$f(x, y) = 100x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$的最大值. 构造拉格朗日函数

$$F(x, y, \lambda) = 100x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} + \lambda(150x + 250y - 50000).$$

解

$$\begin{cases} F'_x = 75x^{\frac{-1}{4}}y^{\frac{1}{4}} + 150\lambda = 0, \\ F'_y = 25x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{-3}{4}} + 250\lambda = 0, \\ F'_\lambda = 150x + 250y - 50000 = 0, \end{cases}$$

得$x = 250$, $y = 50$. 由问题的实际意义知, $(250, 50)$为最大值点, 故企业应安排250个劳动力, 而把其余的资金作为资本投入方可获得最高生产量, 最高生产量为$f(250, 50) = 16719$.