解得$t = -1$. 于是交点坐标$(1, 2, 2)$.

由已知条件知直线L的方向向量为$\boldsymbol{s} = (1, 1, 2)$, 平面$\Pi$的法向为$\boldsymbol{n} = (2, 1, 1)$. 于是

$$\sin\varphi = \frac{|1\times 2 + 1\times 1 + 2\times 1|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{5}{6}.$$

故夹角为$\varphi = \arcsin\frac{5}{6}$.

7.6 空间曲面及其方程

7.6.1 曲面方程的概念

引例

考察球心在点$M_0(x_0, y_0, z_0)$, 半径为R的球面方程.

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2.$$

球面上点的坐标都满足此方程, 而不在球面上的点的坐标都不满足此方程.

如果曲面S与三元方程$F(x, y, z) = 0$有如下关系:

1. 曲面S上点的坐标都满足方程$F(x, y, z) = 0$;

2. 不在曲面S上点的坐标都不满足方程$F(x, y, z) = 0$,

则方程$F(x, y, z) = 0$称为曲面S的(一般)方程, 曲面S称为方程$F(x, y, z) = 0$的图形.

例 6.1. *求通过点$A(1, 2, -4)$, $B(1, -3, 1)$, $C(2, 2, 3)$, 而球心位于xOy坐标面上的球面方程.*

解: 设球面方程为$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2 = R^2$. 由于点$A(1, 2, -4)$, $B(1, -3, 1)$, $C(2, 2, 3)$在球面上, 因此

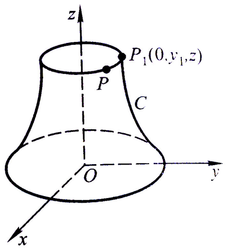
$$\begin{cases} (1-x_0)^2 + (2-y_0)^2 + (-4)^2 = R^2, \\ (1-x_0)^2 + (-3-y_0)^2 + 1^2 = R^2, \\ (2-x_0)^2 + (2-y_0)^2 + 3^2 = R^2. \end{cases}$$

解此方程组可得$x_0 = -2$, $y_0 = 1$, $R = \sqrt{26}$. 故所求的球面方程为

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 26.$$

空间曲面除了用三元方程$F(x, y, z) = 0$表示外, 还可以用如下的参数方程表示

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v). \end{cases}$$



球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的参数方程为

$$\begin{cases} x=R\sin\varphi\cos\theta, \\ y=R\sin\varphi\sin\theta, \\ z=R\cos\varphi. \end{cases}$$

7.6.2 旋转曲面

平面上的曲线C绕该平面上的一条定直线L旋转而形成的曲面叫作旋转曲面, 该平面曲线C叫作旋转曲面的母线, 定直线L叫作旋转曲面的轴.

旋转曲面的方程

设C为yOz上的已知曲线, 其方程为$F(y,z)=0$, C围绕z轴旋转一周得一旋转曲面. 推导该旋转曲面的方程.

设$P(x,y,z)$是旋转面上任意取定的一点, 则点P必然是曲线C上一点$P_1(0,y_1,z)$绕z轴旋转而得, 故点P与P_1到z轴的距离相等, 因此

$$\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|,\ \text{即}y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}.$$

又因点$P_1(0,y_1,z)$是C上的点, 满足$F(y_1,z)=0$, 因此得

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0,$$

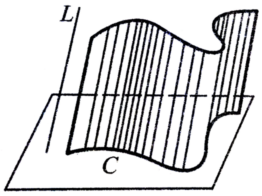
这就是所求旋转曲面的方程.

zOx平面上的曲线$F(x,z)=0$绕x轴旋转一周所得旋转曲面的方程为

$$F(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0.$$

xOy平面上的曲线$F(x,y)=0$绕y轴旋转一周所得旋转曲面的方程为

$$F(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0.$$



例 6.2. *试求下列坐标面上的曲线绕指定坐标轴旋转而成的旋转曲面方程:*

(1) yOz面上的抛物线$y^2 = 2pz$绕z轴旋转;

(2) yOz面上的椭圆$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$绕$y$轴旋转;

(3) zOx面上的双曲线$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$分别绕$z$轴和$x$轴旋转.

解:

(1) $x^2 + y^2 = 2pz$, 此曲面称为旋转抛物面.

(2) $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2+z^2}{b^2} = 1$, 此曲面称为旋转椭球面.

(3) $\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (单叶旋转双曲面), $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2+z^2}{c^2} = 1$ (双叶旋转双曲面).

例 6.3. *一直线L绕另一条与L相交的直线旋转一周所得的旋转曲面称为圆锥面. 两直线的交点称为圆锥面的顶点, 两直线的夹角$\alpha\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$叫做圆锥面的半顶角. 试建立顶点在坐标原点, 旋转轴为z轴, 半顶角为α的圆锥面方程.*

解: 在yOz坐标面上, 取直线L, L与z轴正向夹角为α, 过坐标原点, 则直线L的方程为$z = y\cot\alpha$. 由于以z轴为旋转轴, 故圆锥面方程为

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}\cot\alpha.$$

若令$a = \cot\alpha$, 则得圆锥面方程

$$z^2 = a^2(x^2 + y^2).$$

7.6.3 柱面

柱面

平行于定直线L并沿定曲线C移动的直线所形成的曲面叫柱面, 其中定曲线C叫作该柱面的准线, 动直线叫作该柱面的母线.

设柱面Σ的母线平行于z轴, 准线C是xOy的一条曲线, 其方程为$F(x, y) = 0$. 由于点$M(x, y, z)$位于柱面Σ上的充分必要条件是它在xOy面上的投影点$M_1(x, y, 0)$位于准线C 上, 即x, y满足方

程$F(x,y)=0$, 因此柱面Σ 的方程就是

$$F(x,y)=0.$$

在空间直角坐标系中, 方程$F(x,y)=0$表示母线平行于z轴的柱面, 柱面的准线为xOy面上的曲线$F(x,y)=0$.

一般地, 不完全三元方程(即x,y,z不同时出现的方程)在空间直角坐标系中都表示母线平行于坐标轴的柱面.

- 只含z,x而缺y的方程$F(z,x)=0$表示母线平行于y轴的柱面, 它的准线为zOx 面上的曲线$F(z,x)=0$.

- 只含y,z而缺x的方程$F(y,z)=0$表示母线平行于x轴的柱面, 它的准线为yOz 面上的曲线$F(y,z)=0$.

例 6.4. 指出下列方程在空间直角坐标系中表示什么几何图形:

(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

(2) $x^2=2pz$;

(3) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$;

(4) $x-z=0$.

解:

(1) 方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$在空间直角坐标系中表示母线平行于$z$轴, 准线为$xOy$面上的椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的柱面, 称为椭圆柱面.

(2) 方程$x^2=2pz$在空间直角坐标系中表示母线平行于y轴, 准线为zOx面上的抛物线$x^2=2pz$的柱面, 称为抛物柱面.

(3) 方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$在空间直角坐标系中表示母线平行于$y$轴, 准线为$zOx$面上的双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$的柱面, 称为双曲柱面.

(4) 过y轴的平面.