第九章　重积分

9.1　二重积分的概念与性质

9.1.1　二重积分的定义

1. 曲顶柱体的体积

设有一立体, 它的底是xOy面上的闭区域D, 侧面是以D的边界曲线为准线而母线平行于z轴的柱面的一部分, 顶是曲面$z=f(x,y)$ $((x,y)\in D)$, 这里$f(x,y)\geq 0$且在D上连续. 这种立体称为曲顶柱体.

如何计算曲顶柱体的体积V?

第一步: 划分 用一组曲线网把D分成n个小闭区域

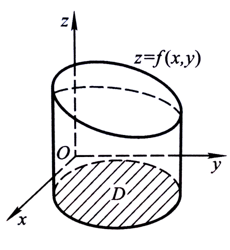
$$\Delta D_1, \Delta D_2, \cdots, \Delta D_n,$$

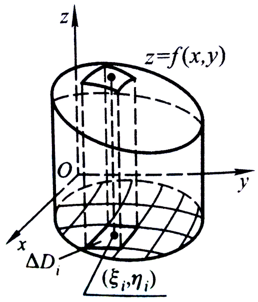
分别以这些小闭区域的边界曲线为准线, 作母线平行于z轴的柱面, 这些柱面把原来的曲顶柱体分为n个细曲顶柱体, 设这些细曲顶柱体的体积为$\Delta V_i (i=1,2,\cdots,n)$, 则

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i.$$

第二步: 近似 当小区域$\Delta D_i (i=1,2,\cdots,n)$的直径很小时, 由于$f(x,y)$连续, 在同一个小闭区域上, $f(x,y)$变化很小, 这时细曲顶柱体可近似看作平顶柱体. 在ΔD_i(此小闭区域的面积记作$\Delta\sigma_i$) 中任取一点(ξ_i,η_i), 以$f(\xi_i,\eta_i)$为高而底为ΔD_i的平顶柱体的体积为$f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$, 于是

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$





第三步: 求和 将这n个细平顶柱体体积相加, 即得曲顶柱体体积的近似值

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

第四步: 逼近 令n个小闭区域的直径中的最大值(记作λ)趋于零, 取上述和的极限, 便得所求的曲顶柱体的体积V, 即

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

2. 平面薄片的质量

设有一平面薄片占有xOy面上的闭区域D, 它在点(x,y)处的面密度为$\mu(x,y)$, 这里$\mu(x,y)>0$且在D 上连续. 现计算该薄片的质量M.

第一步: 划分 用一组曲线网把D分成n个小闭区域ΔD_i, 其面积记为$\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$.

第二步: 近似 当小区域$\Delta D_i(i=1,2,\cdots,n)$的直径很小时, 这些小块可以近似地看作均匀薄片. 在ΔD_i上任取一点(ξ_i,η_i), 于是每个小块的质量ΔM_i可近似为$\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

第三步: 求和 求和即得平面薄片的质量M的近似值

$$M=\sum_{i=1}^{n}\Delta M_i\approx\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

第四步: 逼近 通过取极限可得到所求的平面薄片的质量

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

二重积分的定义

设$f(x,y)$是平面有界闭区域D上的有界函数. 将闭区域D任意划分成n个可求面积的小闭区域$\Delta D_1,\Delta D_2,\cdots,\Delta D_n$, 并用$\Delta\sigma_i$表示第$i$个小闭区域$\Delta D_i$的面积. 在每个$\Delta D_i$上任取一点$(\xi_i,\eta_i)$, 作乘积$f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$, 并作和$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$(称为积分和). 如果当各小

闭区域的直径中的最大值λ趋于零时, 这和的极限存在, 则称函数$f(x,y)$在D 上可积, 此极限称为函数$f(x,y)$在闭区域D上的二重积分, 记作$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$, 即

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i,$$

其中$f(x,y)$称为被积函数, $f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$称为被积表达式, $\mathrm{d}\sigma$称为面积微元, x与y 称为积分变量, D称为积分区域.

曲顶柱体的体积可表示为$V = \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$, 平面薄片的质量可表示为$M = \iint\limits_D \mu(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$.

当被积函数为常数1时, $\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = \sigma$ (区域D的面积).

在直角坐标系中, 可用平行于坐标轴的直线网来划分D, 则$\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. 因此二重积分可写作

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$叫作直角坐标系中的面积微元.

有界闭区域上的连续函数一定可积.

9.1.2 二重积分的性质

性质 1.1. *设$f(x,y)$是定义在闭区域D上的可积函数, k是常数, 则$kf(x,y)$在D上可积, 且有*

$$\iint\limits_D kf(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = k\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

性质 1.2 (**二重积分对于被积函数的可加性**)**.** *设$f(x,y)$和$g(x,y)$都是定义在闭区域D上的可积函数, 则$f(x,y)\pm g(x,y)$在D上可积, 且有*

$$\iint\limits_D [f(x,y)\pm g(x,y)]\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \pm \iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

性质 1.3 (**二重积分对于积分区域的可加性**)**.** *若区域D由两个闭区域D_1与D_2合并而成($D = D_1\cup D_2$, D_1, D_2无公共内点), $f(x,y)$是定义在闭区域D上的可积函数, 则$f(x,y)$在D_1与D_2上均可积, 且*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

性质 1.4. *设$f(x,y)$是定义在闭区域D上的可积函数, 且在D上有$f(x,y)\ge 0$, 则*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \ge 0.$$

推论 1.5. 设$f(x,y)$和$g(x,y)$都是定义在闭区域D上的可积函数, 且在D上$f(x,y) \le g(x,y)$, 则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le \iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

推论 1.6. 设$f(x,y)$是定义在闭区域D上的可积函数, 则

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}\sigma.$$

推论 1.7. 设$f(x,y)$是定义在闭区域D上的可积函数, 且$m \le f(x,y) \le M$, 则

$$m\sigma \le \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le M\sigma.$$

性质 1.8 (二重积分的中值定理). 设$f(x,y)$是有界闭区域D上的连续函数, 则至少存在一点$(\xi,\eta) \in D$, 使得

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\sigma,$$

其中σ为D的面积.

积分中值定理的几何意义

任意曲顶柱体的体积必等于某同底、高为$f(\xi,\eta)$的平顶柱体的体积. 值$f(\xi,\eta) = \frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$也称为函数$f(x,y)$在$D$上的平均值.

例 1.1. 试利用重积分的性质比较下面两个重积分的大小

$$\iint\limits_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma \text{ 与 } \iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}\sigma,$$

其中D是由直线$x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$所围成的闭区域.

解: 由于在D上有$0 \le x + y \le 1$, 所以

$$(x+y)^2 \le x+y,$$

故有

$$\iint\limits_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma \le \iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

例 1.2. 试利用重积分的性质比较下面两个重积分的大小

$$\iint\limits_D (x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma \text{ 与 } \iint\limits_D \sqrt{x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma,$$

其中D是以$(0,0)$, $(1,-1)$, $(1,1)$为顶点的三角形闭区域.

解: 由于在D上有$0 \le x^2 - y^2 \le 1$, 所以

$$0 \le x^2 - y^2 \le \sqrt{x^2 - y^2},$$

故有

$$\iint\limits_D (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}\sigma \le \iint\limits_D \sqrt{x^2 - y^2}\,\mathrm{d}\sigma.$$

例 1.3. 试利用重积分的性质估计二重积分$\iint\limits_D e^{\sin x \cos y}\,\mathrm{d}\sigma$的值, 其中$D$为圆形区域$x^2 + y^2 \le 4$.

解: 对任意的$(x, y) \in D$, 由于$-1 \le \sin x \cos y \le 1$, 所以

$$\frac{1}{e} \le e^{\sin x \cos y} \le e,$$

又区域D的面积$\sigma = 4\pi$, 故有

$$\frac{4\pi}{e} \le \iint\limits_D e^{\sin x \cos y}\,\mathrm{d}\sigma \le 4\pi e.$$

例 1.4. 求$f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$在区域$D: x^2 + y^2 \le R^2$上的平均值.

解: 由二重积分的几何意义知, $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}\sigma$是半个球体的体积, 其值为$\frac{2}{3}\pi R^3$. 又$D$面积为$\pi R^2$, 故$f(xy)$在区域$D$上的平均值为

$$\frac{1}{\pi R^2} \cdot \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}R.$$

9.1.3 思考与练习

练习 9.1. 已知积分区域$D: (x-1)^2 + (y+1)^2 \le 2\pi$, 则$\iint_D \mathrm{d}\sigma =$ ____.

$2\pi^2$

练习 9.2. 比较下列积分值的大小关系:

$$I_1 = \iint_{x^2+y^2\le 1} |xy|\,\mathrm{d}\sigma,\ I_2 = \iint_{|x|+|y|\le 1} |xy|\,\mathrm{d}\sigma,\ I_3 = \iint_{-1\le x,y\le 1} |xy|\,\mathrm{d}\sigma.$$

$I_2 < I_1 < I_3$

练习 9.3. 设D是第二象限的一个有界闭域, 且D在y轴上的投影包含于闭区间$[0, 1]$, 则

$$I_1 = \iint_D yx^3\,\mathrm{d}\sigma,\ I_2 = \iint_D y^2x^3\,\mathrm{d}\sigma,\ I_3 = \iint_D y^{1/2}x^3\,\mathrm{d}\sigma$$

的大小顺序为(　　)

(A) $I_1 \le I_2 \le I_3$　　(B) $I_2 \le I_1 \le I_3$

(C) $I_3 \le I_2 \le I_1$　　(D) $I_3 \le I_1 \le I_2$

D. 因为$0 \le y \le 1$, 故$y^2 \le y \le y^{1/2}$. 又$x^3 < 0$.