9.3 三重积分及其计算

9.3.1 三重积分的定义

定义 3.1. 设$f(x,y,z)$是空间有界闭区域Ω上的有界函数. 将Ω任意分成n个可求体积的小闭区域V_i $(i=1,2,\cdots,n)$, 其体积记作ΔV_i, 直径为d_i. 设$\lambda=\max\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$. 在每个$V_i$ 上任取一点(ξ_i,η_i,ζ_i), 作乘积$f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i(i=1,2,\cdots,n)$, 并作和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i.$$

若当各小闭区域直径中的最大值λ趋于零时, 上述和的极限存在, 则称此极限为函数$f(x,y,z)$在闭区域Ω上的三重积分, 记作$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$, 即

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i,$$

其中$\mathrm{d}V$称为体积微元, $f(x,y,z)$称为被积函数, x,y,z称为积分变量, Ω称为积分区域. 并称函数$f(x,y,z)$在区域Ω上可积.

在直角坐标系中, $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 从而三重积分可写成

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$称为直角坐标系中的体积微元.

当$f(x,y,z)\equiv 1$时, $\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$表示$\Omega$的体积.

若$f(x,y,z)$是有界闭区域上的连续函数, 则$f(x,y,z)$可积.

若连续函数$f(x,y,z)$表示某物体在点(x,y,z)处的体密度, Ω是该物体所占有的空间闭区域, 则其质量为$M=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$.

9.3.2 三重积分的计算

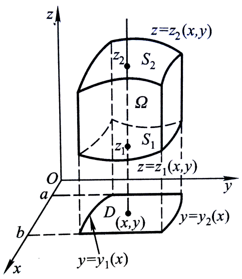
利用直角坐标计算三重积分(投影法——先一后二)

设平行于z轴且穿过Ω内部的直线与Ω的边界曲面S相交不多于两点. 把区域Ω投影到xOy面上, 投影区域记作D. 此时Ω的边界曲面S可分割为三部分: 下曲面S_1、上曲面S_2以及侧面, 设S_1和S_2 的方程分别为

$$S_1: z=z_1(x,y),\quad S_2: z=z_2(x,y),$$

其中$z_1(x,y)$和$z_2(x,y)$都是D上的连续函数, 且$z_1(x,y)\le z_2(x,y)$. 区域Ω可表示为

$$z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),\quad (x,y)\in D.$$



先把x, y看作定值, 把$f(x, y, z)$只看作z的函数, 在区间$[z_1(x, y), z_2(x, y)]$ 上对z 作定积分, 积分结果记作$F(x, y)$, 即

$$F(x,y) = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

然后计算$F(x, y)$在D上的二重积分, 便得所求的三重积分, 即有

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iint_D F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_D \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

上式也可写成

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z. \tag{9.3.1}$$

若投影区域D可表示为

$$y_1(x) \le y \le y_2(x), \quad a \le x \le b,$$

则(9.3.1)式可进一步写成

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

这样三重积分就化成了先对z, 再对y, 最后对x的三次积分.

如果平行于x轴或y轴且穿过Ω内部的直线与Ω的边界曲面S相交不多于两点, 则可把区域Ω投影到yOz面或zOx面上, 类似地得到其他顺序的三次积分.

例 3.1. 化三重积分$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$为三次积分,其中$\Omega$是由$x=0,\ y=0,\ z=0$及$6x+2y+3z=6$ 所围成的闭区域.

解:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{3-3x} \mathrm{d}y\int_0^{2-2x-\frac{2}{3}y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

例 3.2. 化三重积分$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$为三次积分,其中$\Omega$是由$z=xy,\ x+y=1$及$z=0$ 所围成在第一卦限的部分.

解:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{xy} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

例 3.3. 化三重积分$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$为三次积分,其中$\Omega$是由$z=3x^2+y^2$ 和$z=1-x^2$所围成的闭区域.

解: $z=3x^2+y^2$为抛物面, $z=1-x^2$母线平行于y的抛物柱面, 其交线在xOy面上的投影为

$$\begin{cases} 4x^2+y^2=1, \\ z=0. \end{cases}$$

所以相应的三次积分为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-4x^2}}^{\sqrt{1-4x^2}} \mathrm{d}y \int_{3x^2+y^2}^{1-x^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

例 3.4. 计算$\iiint\limits_{\Omega} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$,其中$\Omega$是由$x=0,\ y=0,\ z=0$及$x+2y+z=1$ 所围成的闭区域.

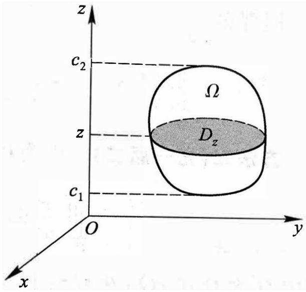
解:

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{1-x}{2}} \mathrm{d}y \int_0^{1-x-2y} xy\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{1-x}{2}} xy(1-x-2y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{24}\int_0^1 x(1-x)^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{480}.\end{aligned}$$

例 3.5. 计算$\iiint\limits_{\Omega} e^{x+y+z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$,其中$\Omega$是由$x=1,\ y=0,\ y=x,\ z=x$及$z=0$ 所围成的闭区域.

解:

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} e^{x+y+z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x} \mathrm{d}y \int_0^{x} e^{x+y+z}\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x} \left(e^{2x+y}-e^{x+y}\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 (e^{3x}-2e^{2x}+e^{x})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}e^3-e^2+e-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$



截面法——先二后一

设有界闭区域

$$\Omega=\{(x,y,z):(x,y)\in D_z, c_1\le z\le c_2\},$$

其中D_z是竖坐标为z的平面截闭区域Ω所得的一个平面闭区域, 则有

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\int_{c_1}^{c_2}\mathrm{d}z\iint_{D_z}f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

例 3.6. 计算$\iiint\limits_\Omega e^{|z|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$,其中$\Omega=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\le 1\}$.

解: 被积函数仅为z的函数, 考虑用截面法. 截面$D_z: x^2+y^2\le 1-z^2$.

$$\iiint\limits_\Omega e^{|z|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_{-1}^{1}e^{|z|}\,\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi\int_{-1}^{1}(1-z^2)e^{|z|}\,\mathrm{d}z$$
$$=2\pi\int_0^1(1-z^2)e^z\,\mathrm{d}z=2\pi.$$

例 3.7. 计算$\iiint\limits_\Omega\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$,其中$\Omega:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$.

解: $\iiint\limits_\Omega\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}V=\iiint\limits_\Omega\frac{x^2}{a^2}\,\mathrm{d}V+\iiint\limits_\Omega\frac{y^2}{b^2}\,\mathrm{d}V+\iiint\limits_\Omega\frac{z^2}{c^2}\,\mathrm{d}V$.

截面法. 令D_x为椭圆域$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1-\frac{x^2}{a^2}$.

$$\iiint\limits_\Omega\frac{x^2}{a^2}\,\mathrm{d}V=\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{a^2}\,\mathrm{d}x\iint_{D_x}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{a^2}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{15}\pi abc.$$

同理可得

$$\iiint\limits_\Omega\frac{y^2}{b^2}\,\mathrm{d}V=\iiint\limits_\Omega\frac{z^2}{c^2}\,\mathrm{d}V=\frac{4}{15}\pi abc.$$

故$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{4}{5}\pi abc.$

投影法.

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{x^2}{a^2}\,\mathrm{d}V=2\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}\frac{x^2}{a^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}z$$
$$=2c\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}\frac{x^2}{a^2}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

令$x=ar\cos\theta,\ y=br\sin\theta$, 则

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{x^2}{a^2}\,\mathrm{d}V=2abc\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r=\frac{4}{15}\pi abc.$$

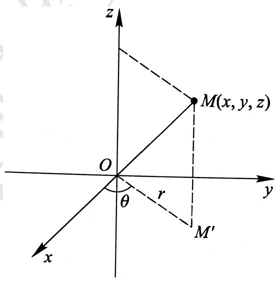
由对称性知$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{4}{5}\pi abc.$

利用柱面坐标计算三重积分

柱面坐标

设$M(x,y,z)$为空间任一点, 若点M在xOy平面上的投影(x,y)的极坐标为(r,θ) , 则称(r,θ,z)为点M的柱面坐标. 直角坐标与柱面坐标的关系为

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \\ z=z \end{cases}\qquad (0\le r<+\infty,0\le\theta<2\pi,-\infty<z<+\infty).$$

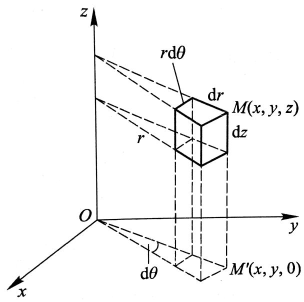


柱面坐标系中的体积微元为

$$\mathrm{d}V=r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z.$$

由此得到三重积分的柱面坐标形式

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z.$$



化三重积分为柱面坐标的三次积分公式

如果区域Ω的上、下边界曲面的柱面坐标的方程分别为

$$z = z_2(r,\theta), \quad z = z_1(r,\theta),$$

而Ω在xOy面上的投影区域可表示为

$$r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta), \quad \alpha \le \theta \le \beta,$$

则区域Ω在柱面坐标系中可表示为

$$z_1(r,\theta) \le z \le z_2(r,\theta), \quad r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta), \quad \alpha \le \theta \le \beta.$$

于是

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{d}\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \mathrm{d}r \int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\,\mathrm{d}z.$$

例 3.8. 计算$\iiint\limits_{\Omega} y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$,其中$\Omega$是由旋转抛物面$z = x^2 + y^2$及平面$z = 4$所围成的闭区域.

解: 易知Ω在xOy面上的投影区域D为xOy面上的圆形闭区域$x^2 + y^2 \le 4$, 因此Ω可表示为

$$x^2 + y^2 \le z \le 4, \quad (x,y) \in D.$$

在柱面坐标系下$\Omega = \{(r,\theta,z) : 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le 2, r^2 \le z \le 4\}$. 于是

$$\iiint\limits_{\Omega} y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^2 \mathrm{d}r \int_{r^2}^4 r^3 \sin^2\theta\,\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^2 r^3(4 - r^2)\sin^2\theta\,\mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} \frac{16}{3}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{16}{3}\pi.$$

例 3.9. 利用柱面坐标计算$\iiint\limits_{\Omega} (|x| + |y|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$,其中$\Omega$是由$z = x^2 + y^2$ 及$z = 1$ 所围成的闭区域.

解: 设Ω在第一卦限部分的区域为Ω_1, 由对称性得

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega}(|x|+|y|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =&4\iiint_{\Omega_1}(|x|+|y|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 8\iiint_{\Omega_1}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ =&8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_{r^2}^1 r^2\cos\theta\,\mathrm{d}z\\ =&8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2(1-r^2)\cos\theta\,\mathrm{d}r = \frac{16}{15}.\end{aligned}$$

例 3.10. 利用柱面坐标计算$\iiint_{\Omega}\sin z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$,其中$\Omega$是由$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及$z=\pi$ 所围成的闭区域.

解:

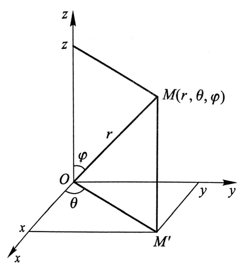
$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega}\sin z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =&\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}r\int_r^{\pi}r\sin z\,\mathrm{d}z\\ =&\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}r(1+\cos r)\,\mathrm{d}r\\ =&2\pi\int_0^{\pi}r(1+\cos r)\,\mathrm{d}r = \pi^3-4\pi.\end{aligned}$$

利用球面坐标计算三重积分

球面坐标

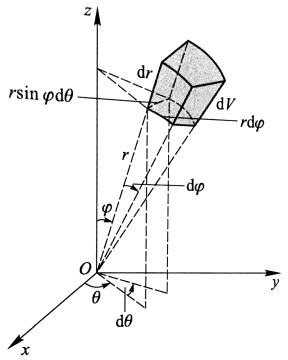
设$M(x,y,z)$为空间任一点, 点M在xOy平面上的投影为M'. 现用向量(r,θ,φ)来表示这个点, 其中$r=|OM|$, θ为x轴的正半轴到射线OM'的转角, φ 为向量$\overrightarrow{OM}$与z轴的正半轴的夹角. 称(r,θ,φ) 为空间点M 的球面坐标. 直角坐标与球面坐标的关系为

$$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,\\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=r\cos\varphi,\end{cases}\quad(0\le r<+\infty,0\le\theta\le2\pi,0\le\varphi\le\pi).$$



球面坐标系中的体积微元为

$$\mathrm{d}V=r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$



由此得到三重积分的球面坐标形式

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

例 3.11. 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$由右半球面$x^2+y^2+z^2\le a^2$, $y\ge 0$所围.

解: 在球面坐标下, 积分区域Ω可表示为

$$\Omega = \{(r,\theta,\varphi): 0\le r\le a, 0\le\theta\le\pi, 0\le\varphi\le\pi\}.$$

所以

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V &= \iiint\limits_{\Omega} r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\\ &= \int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\,\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\sin^3\varphi\,\mathrm{d}r = \frac{4}{15}\pi a^5.\end{aligned}$$

例 3.12. 求$\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$由$x^2+y^2+z^2\le 1$ 和$z\ge\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成.

解: 在球面坐标下, 积分区域Ω可表示为

$$\Omega = \{(r,\theta,\varphi): 0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\pi/6\}.$$

所以

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V &= \iiint\limits_{\Omega} r\cos\varphi\cdot r\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\\ &= \int_0^{2\pi}\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{20}.\end{aligned}$$

9.3.3 三重积分的积分变换

定理 3.1. 设Ω是$O-uvw$空间$\mathbb{R}^3$中的有界可求体积的闭区域，$T: x = x(u,v,w)$，$y = y(u,v,w)$，$y = y(u,v,w)$是Ω到$O-xyz$空间$\mathbb{R}^3$中的一一映射，它们有一阶连续偏导数，并且雅可比行列式

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (u,v,w) \in \Omega.$$

如果$f(x,y,z)$是$T(\Omega)$上的可积函数，那么

$$\iiint\limits_{T(\Omega)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w.$$

柱面坐标变换

$$T: \begin{cases} x = r\cos\theta, & 0 \le r < +\infty, \\ y = r\sin\theta, & 0 \le \theta \le 2\pi, \\ z = z, & -\infty < z < +\infty. \end{cases}$$

变换T的函数行列式为

$$J(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

三重积分的柱面坐标换元公式为

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z,$$

这里Ω'为Ω在柱面坐标变换下的原象.

球坐标变换

$$T: \begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, & 0 \le r < +\infty, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, & 0 \le \varphi \le \pi, \\ z = r\cos\varphi, & 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

变换T的函数行列式为

$$J(r,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\varphi.$$

三重积分的球坐标换元公式为

$$\begin{aligned} &\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ =& \iiint_{\Omega'} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta, \end{aligned}$$

这里Ω'为Ω在球坐标变换下的原象.

例 3.13. 设Ω为由$x^2+y^2+z^2 \le R^2$ 和$z \ge 0$所围成的空间区域，在Ω中分布有某种物质，其密度与该处到球心的距离$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$成正比，比例系数为$k$，求该物体的总质量.

解: 总质量

$$m = \iiint\limits_{\Omega} k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V.$$

利用球坐标变换可得

$$m = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^R kr\cdot r^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}r = \frac{k\pi}{2}R^4.$$

例 3.14. 求$I = \iiint\limits_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中$V$为由$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1$与$z \ge 0$所围区域.

解: 作广义球坐标变换

$$T: \begin{cases} x = ar\sin\varphi\cos\theta, \\ y = br\sin\varphi\sin\theta, \\ z = cr\cos\varphi, \end{cases}$$

于是$J = abcr^2\sin\theta$. V在广义球坐标变换下的原象为

$$V' = \{(r,\varphi,\theta) | 0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

于是

$$\begin{aligned}\iiint_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iiint_{V'} abc^2r^3\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 abc^2r^3\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi abc^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi abc^2}{4}.\end{aligned}$$