第七章　空间解析几何

7.1　空间直角坐标系

空间直角坐标系

空间直角坐标系的建立

在空间取一个定点O, 作三条以O点为原点的相互垂直的数轴, 依次叫作x轴（横轴）, y轴（纵轴）和z 轴（竖轴）. 这三条数轴具有相同的长度单位, 它们的正方向符合右手法则. 由此建立了空间直角坐标系. 点O叫做空间直角坐标系的原点.

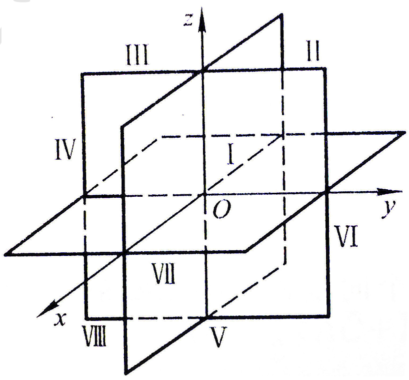
卦限

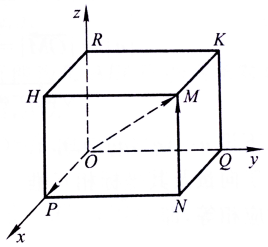
过两两垂直的坐标轴, 可以得到三个互相垂直的平面(坐标面), 分别称为xOy面、yOz面和zOx平面, 这三个平面把整个空间分成八个部分, 每一部分叫作一个卦限.

点的坐标

设M是空间的一点, 过M作三个平面分别垂直于x轴、y轴和z轴并交x轴、y轴和z轴于P, Q, R三点. 点P, Q, R分别称为点M在x 轴、y轴和z轴上的投影. 设这三个投影在x轴、y轴和z轴上的坐标依次为x, y和z, 则空间一点M就唯一地确定了一个有序数组(x, y, z).

反之, 对给定的有序数组(x, y, z), 在空间也得到一个点与之对应. 这样建立了空间的点与有序数组(x, y, z)之间的一一对应关系. 称(x, y, z)为点M的坐标, 记作$M(x, y, z)$, 其中x, y, z分别称为点M的横坐标、纵坐标、竖坐标.





推论 1.1. 过点$M(x,y,z)$分别垂直于x,y,z轴的平面与三个坐标轴的交点坐标分别是$(x,0,0)$，$(0,y,0)$，$(0,0,z)$.

推论 1.2. xOy面上点的坐标为$(x,y,0)$，xOz面上点的坐标为$(x,0,z)$，yOz面上点的坐标为$(0,y,z)$.

推论 1.3. x轴上点的坐标是$(x,0,0)$，y轴上点的坐标是$(0,y,0)$，z轴上点的坐标是$(0,0,z)$.

空间中两点的距离公式

设$M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间两点，则M_1,M_2两点的距离为

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

这就是空间中两点的距离公式.

一般地，n元有序数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$表示n维空间的点，并用$\mathbb{R}^n$表示n维空间. 特别地，$\mathbb{R}=\mathbb{R}^1$为实数轴，$\mathbb{R}^2$表示平面.

例 1.1. 求证以$M_1(4,3,1)$、$M_2(7,1,2)$、$M_3(5,2,3)$三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

解: 因为

$$|M_1M_2|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14,$$

$$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$$

$$|M_3M_1|^2=(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2=6,$$

所以$|M_2M_3|=|M_3M_1|$，即$\Delta M_1M_2M_3$为等腰三角形.

例 1.2. 求到点$A(1,2,1)$，$B(2,-1,3)$等距离的点的轨迹.

解: 设动点坐标为$M(x,y,z)$，则由条件得

$$|MA|^2=(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2,$$

$$|MB|^2=(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2,$$

由$|MA| = |MB|$得
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2.$$
化简得到点A, B等距离的点的轨迹为
$$x - 3y + 2z = 4.$$
该动点的轨迹为一平面.

7.2 空间向量及其应用

7.2.1 向量的概念

- 既有大小又有方向的量叫做向量 (或矢量). 因此, 从原点到点(x, y, z)所确定的有向线段是一个向量, 我们也把形如(x, y, z)的有序数组称为$\mathbb{R}^3$的向量.
- 为了与点的坐标相区别, 我们常把向量记为$\{x, y, z\}$, 称为向量的坐标表示, x, y, z叫做向量的三个分量.
- 同时，把空间$\mathbb{R}^3$ 中某向量平移后所得到的有向线段认为是同一个向量, 我们称这种向量为自由向量, 简称向量.

- 空间中起点$A(x_1, y_1, z_1)$到终点$B(x_2, y_2, z_2)$的有向线段, 当然也可以看成是一个向量.
- 此向量经过平移后将点A置于原点, 易得此向量可表示为$\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, 通常记为
$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$
- 特别地, 当A为原点$O(0, 0, 0)$时, 即$\overrightarrow{OB} = \{x_2, y_2, z_2\}$, 这个向量叫做点$B$对于点$O$的向径, 常用$\boldsymbol{r}$表示.

- 一般用黑体字母表示向量, 如$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \cdots$.
- 向量的大小叫做向量的模. 向量$\overrightarrow{AB}$、$\boldsymbol{a}$的模记为$|\overrightarrow{AB}|$、$|\boldsymbol{a}|$.
- 模等于1的向量叫做单位向量(或幺矢).
- 模等于零的向量叫做零向量, 记为$\mathbf{0}$, 零向量的起点和终点重合, 它的方向可以看作是任意的.