7.5 空间直线及其方程

7.5.1 空间直线及其方程

空间直线的一般方程

空间直线L可以视为空间中两个不平行的平面的交线. 若两个相交平面Π_1和Π_2的方程分别为

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

则点$M(x, y, z)$位于直线L上的充要条件是它的坐标x, y, z同时满足Π_1与Π_2的方程. 因此下列方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

是直线L的方程, 称为空间直线的一般方程.

空间直线的点向式方程

平行于已知直线的非零向量$\boldsymbol{s}$称作该直线的方向向量. 由于过空间一点可以作且只能作一条直线与已知向量平行, 故当直线L上的一点$M_0(x_0, y_0, z_0)$ 及直线L的方向向量$\boldsymbol{s} = (m, n, p)$为已知时($m, n, p$称为直线$L$的一组方向数), 直线$L$的位置就完全确定.

空间一点$M(x, y, z)$在直线L的充要条件是向量$\overrightarrow{M_0M} \parallel \boldsymbol{s}$. 由于$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, 故条件$\overrightarrow{M_0M} \parallel \boldsymbol{s}$等价于

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{7.5.1}$$

方程组(7.5.1)就是直线L的方程, 称为直线的点向式方程或对称式方程.

设直线L过点$P_1(x_1, y_1, z_1)$和$P_2(x_2, y_2, z_2)$, 则直线L的方程为

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

称为空间直线的两点式方程.

直线的点向式方程和一般方程是可以相互转化的. 点向式方程(7.5.1)可表示为

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \\ \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \end{cases}$$

特殊情形的点向式方程

当m,n,p中有一个为零时, 如$m=0$, 则点向式方程(7.5.1)所表示的直线为

$$\begin{cases} x-x_0=0, \\ \frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \end{cases}$$

当m,n,p中有两个为零时, 如$m=0$, $n=0$, 则点向式方程(7.5.1)所表示的直线为

$$\begin{cases} x-x_0=0, \\ y-y_0=0. \end{cases}$$

空间直线的参数方程

由直线的点向式方程, 令相应的比值为t, 即有

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t.$$

由此得到

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt, \end{cases} \tag{7.5.2}$$

方程(7.5.2)称为直线的参数方程, t 称为参数. 其几何意义是: 当t取不同值, 对应的是直线上不同的点.

例 5.1. 用点向式方程和参数表示直线$\begin{cases} x+y+z+1=0, \\ 2x-y+3z+4=0. \end{cases}$

解: 方程组中两个方程所表示的平面的法向量分别是$\boldsymbol{n}_1=(1,1,1)$, $\boldsymbol{n}_2=(2,-1,3)$, 取

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}.$$

下面来取直线上的一点(x_0,y_0,z_0). 不妨取$x_0=1$, 代入方程组得

$$\begin{cases} y_0+z_0=-2, \\ y_0-3z_0=6. \end{cases}$$

解得$y_0=0$, $z_0=-2$. 于是直线的点向式方程为

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{-3}.$$

参数方程为

$$\begin{cases} x = 1 + 4t, \\ y = -t, \\ z = -2 - 3t. \end{cases}$$

例 5.2. 求通过两点$A(1,-1,2)$与$B(-1,0,2)$的直线方程，用点向式和参数方程表示.

解: 方向向量

$$\boldsymbol{s} = \overrightarrow{AB} = (-2,1,0).$$

取定点$A(1,-1,2)$, 则所求直线的点向式方程为

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{0}.$$

直线的参数方程为

$$\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = -1 + t, \\ z = 2. \end{cases}$$

例 5.3. 求与平面$x - 4z = 3$和$2x - y - 5z = 1$的交线平行，且过点$(-3,2,5)$的直线方程.

解: 方向向量

$$\boldsymbol{s} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -4\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}.$$

故所求直线的方程为

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{1}.$$

7.5.2 两直线的夹角

两直线的方向向量的夹角（$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$）称为两直线的夹角.

设直线L_1和直线L_2的方向向量分别为$\boldsymbol{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ 和$\boldsymbol{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$, 由于$L_1$和$L_2$的夹角$\varphi$是$\boldsymbol{s}_1$和$\boldsymbol{s}_2$的夹角且为锐角, 因此夹角$\varphi$可由以下公式确定

$$\cos\varphi = |\cos(\widehat{\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2})| = \frac{|\boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|} = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

从两向量垂直、平行的充要条件立即可推得

- 直线L_1和直线L_2互相垂直的充要条件是$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.
- 直线L_1和直线L_2互相平行或重合的充要条件是$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$.

例 5.4. 求直线$L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1}$和$L_2:\frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-1}$的夹角.

解: 直线L_1和直线L_2的方向向量分别为$\boldsymbol{s}_1=(1,-4,1)$ 和$\boldsymbol{s}_2=(2,-2,-1)$. 设直线$L_1$和直线$L_2$的夹角为$\varphi$, 则

$$\cos\varphi=\frac{|1\times 2+(-4)\times(-2)+1\times(-1)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

因此$\varphi=\frac{\pi}{4}$.

例 5.5. 求直线$L_1:\begin{cases}x+2y+z=1,\\x-2y+z=3\end{cases}$和$L_2:\begin{cases}x-y-z=1,\\x-y+2z=1\end{cases}$的夹角.

解: 由于

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&2&1\\1&-2&1\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{k},\quad\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-1&-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=-3\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j},$$

故可取$\boldsymbol{s}_1=(1,0,-1)$, $\boldsymbol{s}_2=(1,1,0)$. 从而

$$\cos\varphi=\frac{|1\times 1+0\times 1+(-1)\times 0|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\frac{1}{2}.$$

因此$\varphi=\frac{\pi}{3}$.

7.5.3 直线与平面的夹角

设直线L与平面Π的法线（平面的垂线）的夹角为$\varphi\left(0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right)$, 则$\varphi$的余角$\theta$叫作直线$L$与平面$\Pi$的夹角.

若直线L的方向向量为$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$, 平面Π的法向量为$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$, 则直线L与平面Π的法线的夹角φ满足

$$\cos\varphi=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{s}|}.$$

由于$\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$, 故直线$L$与平面$\Pi$的夹角$\theta$可由以下公式确定

$$\sin\theta=\cos\varphi=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{s}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

- 直线L和平面Π垂直的充要条件是$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$.
- 直线L和平面Π平行的充要条件是$Am+Bn+Cp=0$.

例 5.6. 求过点$P(1,-2,4)$且与平面$\Pi: 2x-3y+z-4=0$垂直的直线方程.

解: 因为所求直线垂直于已知平面Π, 所以可取平面的法向量$\boldsymbol{n}=(2,-3,1)$作为所求直线的方向向量. 由此得所求直线的方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{1}.$$

例 5.7. 判断直线$L: \frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{5}$与平面$\Pi: 4x+3y-z+3=0$的位置关系.

解: 直线L的方向向量为$\boldsymbol{s}=(2,-1,5)$, 平面Π的法向量为$\boldsymbol{n}=(4,3,-1)$. 计算得

$$(2,-1,5)\cdot(4,3,-1)=0,$$

所以直线L与平面Π平行.

取直线上一点$M(1,-3,-2)$, 易知

$$4\times1+3\times(-3)-(-2)+3=0,$$

即点M在平面Π上. 所以直线L在平面Π上.

例 5.8. 求过点$(2,1,3)$且与直线$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$垂直相交的直线方程.

解: 设两直线的交点为$(-1+3t,1+2t,-t)$, 则所求直线的方向向量为$(-3+3t,2t,-t-3)$. 由题意知

$$(-3+3t,2t,-t-3)\cdot(3,2,-1)=0.$$

解得$t=\frac{3}{7}$. 从而方向向量为

$$\left(-\frac{12}{7},\frac{6}{7},-\frac{24}{7}\right)=-\frac{6}{7}(2,-1,4).$$

因此所求直线方程为

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}.$$

过直线的平面束

设直线L为

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$$

其中系数A_1,B_1,C_1与A_2,B_2,C_2不成比例.

对任何常数λ, 考虑方程

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0. \tag{7.5.3}$$

显然向量$(A_1+\lambda A_2, B_1+\lambda B_2, C_1+\lambda C_2)$不为零, 从而方程(7.5.3)表示一个平面.

方程(7.5.3)表示通过直线L的平面, 随着λ的变化, 就得到过直线L的所有平面. 通过定直线的所有平面的全体称为平面束, 从而方程(7.5.3)称为通过直线L的平面束方程.

例 5.9. *求过直线*$\begin{cases} x+y-z+1=0, \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ *和点*$(0,0,2)$*的平面方程.*

解: 设过直线的平面方程为

$$x+y-z+1+\lambda(x-y+z+1)=0.$$

将点$(0,0,2)$代入得

$$0+0-2+1+\lambda(0-0+2+1)=0.$$

解得$\lambda=\frac{1}{3}$. 于是得到平面的方程为

$$x+y-z+1+\frac{1}{3}(x-y+z+1)=0, \qquad 即 2x+y-z+2=0.$$

例 5.10. *求直线*$\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ *在平面*$x+y+z=0$*上的投影直线方程.*

解: 设过直线$\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$的平面方程为

$$x+y-z-1+\lambda(x-y+z+1)=0.$$

方向向量为$(1+\lambda, 1-\lambda, -1+\lambda)$. 由于该平面与题中平面垂直，故

$$(1+\lambda, 1-\lambda, -1+\lambda)\cdot(1,1,1)=0.$$

解得$\lambda=-1$. 于是投影直线方程为

$$\begin{cases} y-z-1=0, \\ x+y+z=0. \end{cases}$$

7.5.4 思考与练习

练习 7.7. *求过点*$(1,3,-2)$*且与平面*$3x-2y+4z=2$*垂直的直线方程.*

解: 因直线与平面垂直, 故平面的法向即可视为直线的方向向量. 由此得到直线的点向式方程

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+2}{4}.$$

直线的参数方程为

$$\begin{cases} x=1+3t, \\ y=3-2t, \\ z=-2+4t. \end{cases}$$

练习 7.8. 求直线$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-2}{2}$与平面$x+y+z=3$的交点.

解: 将直线方程化为相应的参数方程, 有

$$\begin{cases} x=1+t, \\ y=-2-t, \\ z=2+2t. \end{cases}$$

代入平面方程, 得

$$1+t-2-t+2+2t=3 \Rightarrow t=1.$$

故交点为$(2,-3,4)$.

练习 7.9. 求点$(2,2,-1)$在平面$x+y+z=0$上的投影点.

解: 点P在平面上的投影点即为过点P且与平面垂直的直线的交点. 因平面的法向与平面垂直, 故可取平面的法向为直线的方向向量, 由此得直线的方程为

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{1}.$$

化为参数方程

$$\begin{cases} x=2+t, \\ y=2+t, \\ z=-1+t. \end{cases}$$

代入平面方程, 得

$$2+t+2+t-1+t=0 \Rightarrow t=-1.$$

故交点为$(1,1,-2)$, 该点即为所需的投影点.

练习 7.10. 求直线$L:\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$与$\Pi: 2x+y+z-6=0$的交点与夹角.

解: 将直线L的方程写成参数方程$x=2+t$, $y=3+t$, $z=4+2t$, 并代入平面方程得

$$2(2+t)+(3+t)+(4+2t)-6=0,$$

解得$t=-1$. 于是交点坐标$(1,2,2)$.

由已知条件知直线L的方向向量为$\boldsymbol{s}=(1,1,2)$, 平面Π的法向为$\boldsymbol{n}=(2,1,1)$. 于是

$$\sin\varphi=\frac{|1\times 2+1\times 1+2\times 1|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{5}{6}.$$

故夹角为$\varphi=\arcsin\frac{5}{6}$.

7.6 空间曲面及其方程

7.6.1 曲面方程的概念

引例

考察球心在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$, 半径为R的球面方程.

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

球面上点的坐标都满足此方程, 而不在球面上的点的坐标都不满足此方程.

如果曲面S与三元方程$F(x,y,z)=0$有如下关系:

1. 曲面S上点的坐标都满足方程$F(x,y,z)=0$;
2. 不在曲面S上点的坐标都不满足方程$F(x,y,z)=0$,

则方程$F(x,y,z)=0$称为曲面S的(一般)方程, 曲面S称为方程$F(x,y,z)=0$的图形.

例 6.1. *求通过点$A(1,2,-4)$, $B(1,-3,1)$, $C(2,2,3)$, 而球心位于xOy坐标面上的球面方程.*

解: 设球面方程为$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2=R^2$. 由于点$A(1,2,-4)$, $B(1,-3,1)$, $C(2,2,3)$在球面上, 因此

$$\begin{cases}(1-x_0)^2+(2-y_0)^2+(-4)^2=R^2,\\(1-x_0)^2+(-3-y_0)^2+1^2=R^2,\\(2-x_0)^2+(2-y_0)^2+3^2=R^2.\end{cases}$$

解此方程组可得$x_0=-2$, $y_0=1$, $R=\sqrt{26}$. 故所求的球面方程为

$$(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=26.$$

空间曲面除了用三元方程$F(x,y,z)=0$表示外, 还可以用如下的参数方程表示

$$\begin{cases}x=x(u,v),\\y=y(u,v),\\z=z(u,v).\end{cases}$$