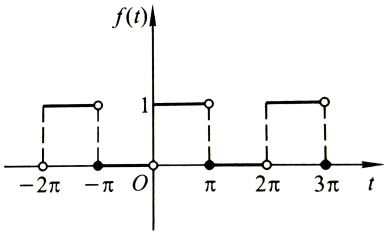


11.6 傅里叶级数

11.6.1 三角级数及三角函数系的正交性

周期运动是自然界中广泛存在的一种运动形态, 对周期运动可用周期函数来近似描述. 例如反映简谐震动的函数

$$y = A\sin(\omega t + \varphi)$$

是一个以$\frac{2\pi}{\omega}$为周期的正弦函数.

值得注意的是: 并非所有的周期过程都能用简单的正弦函数来表示.

例如电子技术中常用矩形波作为开关电路中电子流动的模型，矩形波就不是正弦波. 图中的矩形波可用下式来表示

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in [(2k-1)\pi, 2k\pi), \\ 1, & t \in [2k\pi, (2k+1)\pi), \end{cases} \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

可以看到, 函数$f(t)$是以2π为周期的、由无穷多段构成的分段函数, 它在很多点处不连续, 不可导.

为了深入研究这类周期函数，我们设法用一系列以2π为周期的正弦和余弦函数组成的级数去表示它. 具体而言, 对以2π为周期的周期函数$f(x)$, 研究是否可以把它展开成形如

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

的三角级数.

如同幂级数的讨论, 我们将讨论:

(1) 三角级数的具体形式, 即系数a_n和b_n怎么确定;

(2) 三角级数中的收敛问题, 即收敛域是什么, 在收敛域内其和函数是否为函数$f(x)$?

三角函数系与函数的傅里叶级数

所谓三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$$

在$[-\pi,\pi]$上正交，是指函数系中的任意两个不同的函数的乘积在区间$[-\pi,\pi]$上的积分为零，即

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x=0\quad n=1,2,3,\cdots,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x=0\quad k,n=1,2,3,\cdots,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x=0\quad k,n=1,2,3,\cdots,k\neq n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x=0\quad k,n=1,2,3,\cdots,k\neq n.$$

另外, 在三角函数系中, 两个相同函数的乘积在区间$[-\pi,\pi]$上的积分分别为

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\,\mathrm{d}x=2\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,\mathrm{d}x=\pi\quad n=1,2,3,\cdots.$$

11.6.2 函数的傅里叶级数

傅里叶系数的确定

设函数$f(x)$是周期为2π的周期函数, 且能展开成三角级数，即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\tag{11.6.1}$$

并进一步假设级数(11.6.1)可以逐项积分.

对(11.6.1)式作下面的积分, 并注意到函数系的正交性, 有

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\,\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,\mathrm{d}x\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\,\mathrm{d}x=a_0\pi.\end{aligned}$$

从而得

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

用$\cos nx$乘(11.6.1)式的两端, 再从$-\pi$到π逐项积分, 有

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\\=&\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\\&+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\,\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

再由三角函数系的正交性, 上式右端仅有一项不为零, 即

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,\mathrm{d}x = a_n\pi,$$

所以

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

类似地, 用$\sin nx$乘(11.6.1)式的两端, 再从$-\pi$到π逐项积分, 有

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

由于当$n = 0$时, a_n的表达式与a_0一致, 因此上面的结果可合并成

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad n = 1, 2, 3, \cdots. \end{aligned} \tag{11.6.2}$$

(11.6.2)式确定的系数$a_0, a_1, b_1, \cdots$称为函数$f(x)$的傅里叶(Fourier)系数，将这些系数代入(11.6.1)式右端，所得三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

称为函数$f(x)$的傅里叶级数.

如果函数$f(x)$的傅里叶级数$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$(系数由(11.6.2)式确定)收敛到$f(x)$, 则称函数$f(x)$能展成傅里叶级数.

定理 6.1 (Dirichlet**收敛定理**). *设$f(x)$是周期为2π的周期函数，如果它满足：*

(1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点;

(2) 在一个周期内至多只有有限个极值点,

则$f(x)$的傅里叶级数处处收敛, 并且

(1) 当x是$f(x)$的连续点时，级数收敛于$f(x)$;

(2) 当x是$f(x)$的间断点时，级数收敛于$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$.

函数展成傅里叶级数的条件比展成幂级数的条件低得多.

例 6.1. 设$f(x)$是周期为2π的周期函数，它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 1, & 0\le x<\pi,\end{cases}$$

把$f(x)$展开成傅里叶级数.

解: 所给函数满足收敛定理的条件，点$x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$是函数的第一类间断点，其余点均为连续点，因此函数$f(x)$的傅里叶级数在$x=k\pi$处收敛于

$$\frac{1}{2}[f(0+0)+f(0+0)]=\frac{1}{2}(1+0)=\frac{1}{2},$$

在其余点收敛到$f(x)$，其相应的傅里叶系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\,\mathrm{d}x=1,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x=0\quad n=1,2,3,\cdots,$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n\pi}[1+(-1)^{n-1}]=\begin{cases}\frac{2}{n\pi}, & n=1,3,5,\cdots,\\ 0, & n=2,4,6,\cdots.\end{cases}\end{aligned}$$

于是$f(x)$的傅里叶展开式为

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots\right)\quad(x\ne k\pi,k\in\mathbb{Z}).$$

例 6.2. 设$f(x)$是周期为2π的周期函数，它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ x, & 0\le x<\pi,\end{cases}$$

把$f(x)$展开成傅里叶级数.

解: 所给函数满足收敛定理的条件，点$x=(2k+1)\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$是函数的第一类间断点，其余点均为连续点，因此$f(x)$的傅里叶级数在$x=(2k+1)\pi$处收敛于

$$\frac{1}{2}[f(\pi-0)+f(\pi+0)]=\frac{1}{2}(\pi+0)=\frac{\pi}{2},$$

在其余点收敛到$f(x)$，其相应的傅里叶系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$

$$
\begin{aligned}
a_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x\\
=& \frac{1}{n^2\pi}[(-1)^n - 1] \quad n = 1, 2, 3, \cdots,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x\\
=& \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad n = 1, 2, 3, \cdots.
\end{aligned}
$$

于是$f(x)$的傅里叶级数为

$$
f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\cos nx + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx\right](x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}).
$$

在具体讨论函数的傅里叶级数展开式时, 常只给出函数f 在$(-\pi, \pi]$ (或$[-\pi, \pi)$)上的解析表达式, 但应理解为它是定义在整个数轴上以2π为周期的函数. 即在$(-\pi, \pi]$ 以外的部分按函数在$(-\pi, \pi]$上的对应关系作周期延拓.

如$f(x)$为$(-\pi, \pi]$的解析表达式, 那么周期延拓后的函数为

$$
F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-\pi, \pi],\\ f(x - 2k\pi), & x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi], k = \pm 1, \pm 2, \cdots. \end{cases}
$$

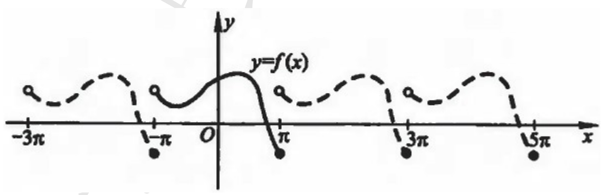
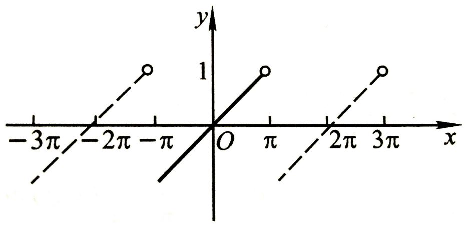


图 11.1: 实线与虚线的全体表示$y = F(x)$

例 6.3. 将函数$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \le x < 0,\\ x, & 0 \le x < \pi \end{cases}$ 展开成傅里叶级数, 并由此求正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的和.

解: 因所给函数$f(x)$仅定义在$[-\pi, \pi)$上, 它不是周期函数, 故首先将函数作周期延拓, 即在$[-\pi, \pi)$外补充$f(x)$的定义, 使其拓展成周期为2π的周期函数$F(x)$, 且当$x \in [-\pi, \pi)$时, $F(x) \equiv f(x)$.

$$
a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,\mathrm{d}x = 2\pi,
$$



$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1] \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0 \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

由于$F(x)$在$(-\infty, +\infty)$上连续, 所以

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x.$$

在区间$[-\pi, \pi)$上, $F(x) = f(x)$, 所以对于任意的$x \in [-\pi, \pi)$, 有

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x.$$

在上式中令$x = 0$, 则$f(0) = 0$. 于是

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

记$A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)$, 则有

$$A = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots\right),$$

即$A = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}A$. 解得$A = \frac{\pi^2}{24}$. 故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

例 6.4. 设函数$f(x) = x\ (-\pi \le x < \pi)$，将函数$f(x)$展开成傅里叶级数.

解: 因所给函数$f(x)$仅定义在$[-\pi, \pi)$上，它不是周期函数，故首先将函数作周期延拓，即在$[-\pi, \pi)$外补充$f(x)$的定义，使其拓展成周期为2π的周期函数$F(x)$，且当$x \in [-\pi, \pi)$时，$F(x) \equiv f(x)$.

由于$F(x)$是奇函数，故$F(x)\cos nx$是奇函数，因此

$$a_n = 0 \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$\begin{aligned} b_n =& \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \,\mathrm{d}x \\ =& \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

又函数$F(x)$满足收敛定理的条件, 并且函数仅在$x = (2k+1)\pi$处间断，由此得函数$F(x)$的傅里叶级数为

$$F(x) = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots\right) \quad x \neq (2k-1)\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

由于当$x \in (-\pi, \pi)$时，$F(x) \equiv f(x)$, 故得

$$f(x) = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots\right) \quad x \in (-\pi, \pi).$$

当$x = -\pi$时, $f(x)$的傅里叶级数收敛于0.

11.6.3 正弦级数和余弦级数

当函数$f(x)$为奇函数时, 它的傅里叶系数中, $a_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, 因而函数的傅里叶级数仅含有正弦函数的各项, 此时的傅里叶级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

称为正弦级数, 且因$f(x)\sin nx$是偶函数, 故正弦级数的系数

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx \,\mathrm{d}x \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

当$f(x)$为偶函数时, 它的傅里叶系数中, $b_n = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 因而函数的傅里叶级数仅含有常数项与余弦函数的各项, 此时的傅里叶级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

称为余弦级数, 且因$f(x)\cos nx$是偶函数, 故余弦级数的系数

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx \,\mathrm{d}x \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots.$$

函数$f(x)$在$[0, \pi)$上有定义, 如果$f(x)$在$[0, \pi)$上满足收敛定理的条件, 根据实际情况的需要, 在$[0, \pi)$外补充定义到$[-\pi, 0)$上, 使之在$[-\pi, \pi]$ 上成为偶函数或奇函数$F(x)$, 在$[0, \pi)$上$F(x) \equiv f(x)$, 这种方法称为偶延拓或奇延拓.

- 奇延拓

$$F(x)=\begin{cases}-f(-x), & -\pi\le x<0,\\ 0, & x=0,\\ f(x), & 0<x\le\pi.\end{cases}$$

- 偶延拓

$$F(x)=\begin{cases}f(-x), & -\pi\le x<0,\\ f(x), & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

例 6.5. 设函数$f(x)=\pi x-x^2, 0<x<\pi$, 又设$s(x)$是$f(x)$在$(0,\pi)$内以2π为周期的正弦级数展开式的和函数, 求当$x\in(\pi,2\pi)$时$s(x)$ 的表达式.

解: 由题设对函数作奇延拓

$$F(x)=\begin{cases}\pi x-x^2, & 0<x<\pi,\\ 0, & x=0,\\ \pi x+x^2, & -\pi<x<0.\end{cases}$$

在$(-\pi,\pi)$上, $s(x)=F(x)$. 在$(\pi,2\pi)$上由周期性知

$$s(x)=s(x-2\pi)=\pi(x-2\pi)+(x-2\pi)^2=x^2-3\pi x+2\pi^2.$$

例 6.6. 将函数$f(x)=x+1\ (0\le x\le\pi)$分别展开成正弦级数与余弦级数.

解: 正弦级数. 先对函数作奇延拓

$$F(x)=\begin{cases}x+1, & 0<x\le\pi,\\ 0, & x=0,\\ x-1, & -\pi<x<0,\end{cases}$$

再以2π为周期作周期延拓.

因延拓后的函数为奇函数, 所以$a_n=0\ (n=0,1,2,\cdots)$. 又

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{\cos nx}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{n\pi}(1-\pi\cos n\pi-\cos n\pi)\\&=\begin{cases}\frac{2(\pi+2)}{n\pi}, & n=1,3,5,\cdots,\\ -\frac{2}{n}, & n=2,4,6,\cdots.\end{cases}\end{aligned}$$

因延拓后的函数满足收敛定理, 且当$x\in(0,\pi)$时, $f(x)\equiv F(x)$. 故

$$x+1=\frac{2}{\pi}\left((\pi+2)\sin x-\frac{\pi}{2}\sin 2x+\frac{\pi+2}{3}\sin 3x-\frac{\pi}{4}\sin 4x+\cdots\right),\quad 0<x<\pi.$$

余弦级数. 先对函数作偶延拓

$$F(x)=\begin{cases}x+1, & 0\le x\le\pi,\\ -x+1, & -\pi<x<0,\end{cases}$$

再以2π为周期作周期延拓.

因延拓后的函数为偶函数, 所以$b_n=0$ $(n=1,2,\cdots)$. 又$a_0=\pi+2$,

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi (x+1)\cos nx\,\mathrm{d}x=\begin{cases}-\frac{4}{n^2\pi}, & n=1,3,5,\cdots,\\ 0, & n=2,4,6,\cdots.\end{cases}$$

偶延拓后$F(x)$处处连续, 则

$$x+1=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 2x}{3^2}+\frac{\cos 3x}{5^2}+\cdots\right),\quad 0\le x\le\pi.$$

例 6.7. 把定义在$[0,\pi]$上的函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<h,\\ \frac{1}{2}, & x=h,\\ 0, & n<x\le\pi\end{cases}$$

(其中$0<h<\pi$)展开成正弦级数.

解: 函数f是分段光滑的，因此可以展开成正弦级数.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^h\sin nx\,dx=\frac{2}{n\pi}(1-\cos nh).$$

所以

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos nh}{n}\sin nx,\ 0<x<h,\ h<x<\pi.$$

当$x=0,\pi$时，级数的和为0；当$x=h$时，有

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos nh}{n}\sin nh=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}.$$

11.6.4 一般周期函数的傅里叶级数

设$f(x)$是周期为$2l$的连续周期函数. 作变换$t=\frac{\pi}{l}x$, 则当x在区间$[-l,l]$上变化时, t就在区间$[-\pi,\pi]$上变化, $g(t)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$是以$2\pi$为周期的周期函数.

对于周期为$2l$的一般周期函数, 可以定义$f(x)$的傅立叶级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),\tag{11.6.3}$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad n = 0,1,2,3,\cdots,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad n = 1,2,3,\cdots.$$

定理 6.2. *设周期为$2l$的周期函数$f(x)$满足：*

(1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点;

(2) 在一个周期内至多只有有限个极值点,

则$f(x)$的傅里叶级数(11.6.3)处处收敛，并且

(1) 当x是$f(x)$的连续点时，级数收敛于$f(x)$;

(2) 当x是$f(x)$的间断点时，级数收敛于$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$.

当$f(x)$为奇函数时, 其傅里叶级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

其中

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad n = 1,2,3,\cdots.$$

当$f(x)$为偶函数时, 其傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l},$$

其中

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad n = 0,1,2,3,\cdots.$$

例 6.8. 设$f(x)$是周期为2的周期函数，它在$[-1,1)$上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \le x < 0, \\ x+1, & 0 \le x < 1, \end{cases}$$

把$f(x)$展开成相应的傅里叶级数.

解: 函数$f(x)$的周期为2, 即$l=1$. 从而

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}(x+1)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} 1\,\mathrm{d}x = 1,$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x\cos n\pi x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}(x+1)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{1}\cos n\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^1 = 0 \quad n = 1,2,3,\cdots,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x\sin n\pi x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}(x+1)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x \\
&=2\int_{0}^{1} x\sin n\pi x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}\sin n\pi x\,\mathrm{d}x \\
&= 2\left(\frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2} - \frac{x\cos n\pi x}{n\pi}\right)\Big|_0^1 - \frac{\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1 \\
&=\frac{1+3(-1)^{n+1}}{n\pi} \quad n = 1,2,3,\cdots,
\end{aligned}
$$

函数$f(x)$满足收敛定理的条件，并且除了$x = 0, \pm1, \pm2, \cdots$外处处连续，故有

$$
f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left(4\sin\pi x - \sin 2\pi x + \frac{4}{3}\sin 3\pi x - \frac{1}{2}\sin 4\pi x + \cdots\right),
$$

$x \neq 0, \pm1, \pm2, \cdots$.

例 6.9. 设$f(x)$是周期为2的周期函数，它在$[-1,1]$上的表达式为$f(x) = |x|$，求$f(x)$的傅里叶级数.

解: 函数$f(x)$的周期为2, 即$l = 1$. 由于$f(x)$是偶函数, $b_n = 0$ $(n = 1,2,3,\cdots)$,

$$
a_0 = 2\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = 1,
$$

$$
a_n = 2\int_0^1 x\cos n\pi x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n = 2,4,6,\cdots, \\ \frac{-4}{n^2\pi^2}, & n = 1,3,5,\cdots. \end{cases}
$$

由于$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续, 故有傅里叶展开式

$$
f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}.
$$

例 6.10. 将$f(x) = x$在$[-\pi,\pi)$和$[-3,3)$上展开为傅里叶级数.

解: $[-\pi,\pi)$. 对$f(x) = x$进行周期延拓($T = 2\pi$), 得到的函数为奇函数. 所以$a_n = 0$ $(n = 0,1,2,\cdots)$,

$$
b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x = (-1)^{n+1}\frac{2}{n} \quad (n = 1,2,3,\cdots).
$$

故$f(x)$在$[-\pi,\pi)$上展成的傅里叶级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx=\begin{cases}x, & -\pi<x<\pi,\\ 0, & x=-\pi.\end{cases}$$

$[-3,3)$. 对$f(x)=x$进行周期延拓($T=6$), 得到的函数为奇函数. 所以$a_n=0$ ($n=0,1,2,\cdots$),

$$b_n=\frac{2}{3}\int_0^3 x\sin\frac{n\pi x}{3}\,\mathrm{d}x=(-1)^{n+1}\frac{6}{n\pi}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

故$f(x)$在$[-3,3)$上展成的傅里叶级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{6}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}=\begin{cases}x, & -3<x<3,\\ 0, & x=-3.\end{cases}$$

11.6.5 思考与练习

练习 11.28. 写出函数$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0,\\ 1, & 0\le x\le\pi\end{cases}$在$[-\pi,\pi]$上傅里叶级数的和函数.

解:

$$s(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0,\\ 1, & 0<x<\pi,\\ 0, & x=0,\\ 0, & x=\pm\pi.\end{cases}$$

练习 11.29. 把下列函数开展成傅里叶级数:

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & 0<x<\pi,\\ 0, & x=\pi,\\ -x^2, & \pi<x\le 2\pi.\end{cases}$$

解: 对f进行周期延拓后得到的函数是按段光滑的，因此可以展开成傅里叶级数. 由于

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(-x^2)\,dx=-2\pi^2.$$

当$n\ge 1$时,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{4}{n^2}[(-1)^n-1],$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{n}+\left(\frac{\pi^2}{n}-\frac{2}{n^3}\right)(1-(-1)^n)\right].$$

所以当$x \in (0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$时，

$$f(x) = -\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{4}{n^2}[(-1)^n-1]\cos nx \right.$$
$$\left. +\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{n}+\left(\frac{\pi^2}{n}-\frac{2}{n^3}\right)(1-(-1)^n)\right]\sin nx\right\}.$$

当$x=\pi$时，由于

$$\frac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2} = 0,$$

所以

$$0 = -\pi^2 + 8\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right).$$

当$x=0$或$x=2\pi$时，由于

$$\frac{1}{2}(f(0-0)+f(0+0)) = \frac{1}{2}(-4\pi^2+0) = -2\pi^2,$$

因此

$$-2\pi^2 = -\pi^2 - 8\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right).$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots.$$

练习 11.30. 在电子技术中经常用到矩形波，用傅里叶级数展开后，就可以将矩形波看成一系列不同频率的简谐振动的叠加，在电工学中称为谐波分析. 设$f(x)$是周期为2π的矩形波函数，在$[-\pi,\pi)$上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{\pi}{4}, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

求该矩形波函数的傅里叶展开式.

解: 由于$f(x)$在$(-\pi,\pi)$上是奇函数，所以

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0,$$

当$n \ge 1$时,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin nx\,dx = \frac{1}{2n}[1-(-1)^n].$$

于是当$x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$时，

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots + \frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x + \cdots;$$

当$x = k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$时，级数收敛于0.

练习 11.31. 设函数$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1, \\ 1, & 1 \le x < \pi \end{cases}$的正弦级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, 则等式$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$成立的区间为____.

$f(0) = 0$, 故区间为$[0, \pi)$.

练习 11.32. 把$f(x) = x$在$(0, 2)$内展开成：

(i) 正弦级数；　*(ii)* 余弦级数.

解: (i) 对f作奇式周期延拓，

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = -\frac{4}{n\pi}\cos n\pi = \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

所以当$x \in (0, 2)$时，有

$$\begin{aligned} f(x) = x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi x}{2} \\ &= \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \cdots\right). \end{aligned}$$

但当$x = 0, 2$时，右边级数收敛于0.

(ii) 对f作偶式周期延拓，

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

$$a_0 = \int_0^2 x\,dx = 2,$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1],$$

$n = 1, 2, \cdots$. 所以当$x \in (0, 2)$时，有

$$\begin{aligned} f(x) = x &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8}{(2k-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2} \\ &= 1 - \frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2} + \cdots\right). \end{aligned}$$

但当$x = 0, 2$时，右边级数分别收敛于0和2.