第十章　曲线积分与曲面积分

10.1　对弧长的曲线积分

10.1.1　对弧长的曲线积分定义

曲线形构件的质量

设某曲线形构件所占的位置为xOy面上的一段曲线弧L, 它的两个端点是A, B, 并设构件的线密度为$\rho(x,y)$ ($(x,y)\in L$), 求此构件的质量.

该构件的质量为

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i.$$

定义 1.1 (**对弧长的曲线积分的定义**). *设L是xOy面上以A,B为端点的光滑(或逐段光滑)曲线, 函数$f(x,y)$在L上有界. 在L上任意插入一个点列$A=M_0,M_1,M_2,\cdots,M_n=B$, 把$L$分成$n$个小弧段. 设第$i$个小弧段$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$的长度为$\Delta s_i$, (ξ_i,η_i)为在$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$上任意取定的一点$(i=1,2,\cdots,n)$, 作和*

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i,$$

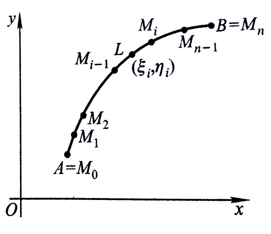
记$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta s_i\}$, 若当$\lambda\to 0$时, 这和的极限存在, 则称此极限为函数$f(x,y)$在曲线$L$上对弧长的曲线积分, 记作$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$, 即

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i,$$

其中$f(x,y)$称为被积函数, $f(x,y)\,\mathrm{d}s$称为被积表达式, L 称为积分弧, $\mathrm{d}s$称为弧长微元. 当L是光滑(或逐段光滑)封闭曲线时, 记为$\oint_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$. 对弧长的曲线积分也常称为第一类曲线积分.

曲线形构件的质量可表示为

$$M=\int_L\rho(x,y)\,\mathrm{d}s.$$



当被积函数为常数1时, $\int_L \mathrm{d}s$等于L的长度.

若函数$f(x,y)$在曲线L上连续, 则对弧长的曲线积分$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$存在. 以后我们总是假设$f(x,y)$在$L$上连续.

若三元函数$f(x,y,z)$在空间曲线L上光滑(或逐段光滑), 也可类似定义$f(x,y,z)$在曲线L上对弧长的曲线积分$\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$.

10.1.2 对弧长曲线积分的性质

以二元函数为例给出对弧长曲线积分的性质.

性质 1.1 (**线性性**). 对任意的常数α,β, 有

$$\int_L [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\,\mathrm{d}s = \alpha\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s + \beta\int_L g(x,y)\,\mathrm{d}s.$$

性质 1.2 (**可加性**). 若L_1和L_2是两段相连接的光滑曲线, 则

$$\int_{L_1+L_2} f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_{L_1} f(x,y)\,\mathrm{d}s + \int_{L_2} f(x,y)\,\mathrm{d}s.$$

性质 1.3. 设在L上$f(x,y)\le g(x,y)$, 则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s \le \int_L g(x,y)\,\mathrm{d}s.$$

特别地, 有

$$\left|\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s\right| \le \int_L |f(x,y)|\,\mathrm{d}s.$$

10.1.3 对弧长曲线积分的计算

定理 1.4. 设有光滑曲线

$$L:\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \qquad t\in[\alpha,\beta],$$

函数$f(x,y)$为定义在L上的连续函数, 则

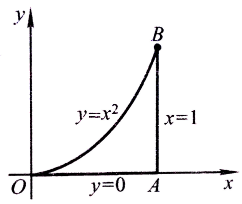
$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

当曲线L由方程

$$y=\psi(x),\quad x\in[a,b]$$

表示, 且$\psi(x)$在$[a,b]$上有连续的导函数时,

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x,\psi(x))\sqrt{1+\psi'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$



当曲线L由方程

$$x = \varphi(y), \quad y \in [c, d]$$

表示, 且$\varphi(y)$在$[c,d]$上有连续的导函数时，

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_c^d f(\varphi(y), y)\sqrt{1+\varphi'^2(y)}\,\mathrm{d}y.$$

例 1.1. 设L是半圆周

$$L: \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi,$$

试计算曲线积分$\int_L (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s$.

解:

$$\int_L (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s = \int_0^\pi a^2\sqrt{a^2(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,\mathrm{d}t = a^3\pi.$$

例 1.2. 计算$\oint_L (x^2+y^2)^n\,\mathrm{d}s$, 其中$L$为圆周: $x = a\sin t$, $y = a\cos t$, $0 \le t \le 2\pi$.

解:

$$\oint_L (x^2+y^2)^n\,\mathrm{d}s = a\int_0^{2\pi} [(a\sin t)^2+(a\cos t)^2]^n\,\mathrm{d}t = a\int_0^{2\pi} a^{2n}\,\mathrm{d}t = 2\pi a^{2n+1}.$$

例 1.3. 计算$\oint_L \sqrt{y}\,\mathrm{d}s$, 其中$L$为抛物线$y = x^2$, 直线$x = 1$及$x$轴所围成的曲边三角形的整个边界.

解: L由线段$\overline{OA}$, $\overline{AB}$和抛物线弧段$\overset{\frown}{OB}$组成, 记作$L = \overline{OA}+\overline{AB}+\overset{\frown}{OB}$, 方程分别为

$$\overline{OA}: y = 0, \quad 0 \le x \le 1,$$

$$\overline{AB}: x = 1, \quad 0 \le y \le 1,$$

$$\overset{\frown}{OB}: y = x^2, \quad 0 \le x \le 1.$$

$$\int_{\overline{OA}} \sqrt{y}\,\mathrm{d}s = \int_{\overline{OA}} 0\,\mathrm{d}s = 0,$$

$$\int_{\overline{AB}} \sqrt{y}\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \sqrt{y}\sqrt{1+0}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3},$$

$$\int_{\widehat{OB}} \sqrt{y}\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \sqrt{x^2}\sqrt{1+(2x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1).$$

因此

$$\oint_L \sqrt{y}\,\mathrm{d}s = 0 + \frac{2}{3} + \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1) = \frac{1}{12}(5\sqrt{5}+7).$$

对弧长的空间曲线积分的计算法

设空间光滑曲线L由参数方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \omega(t) \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

给出, 且$f(x,y,z)$在L上连续, 则

$$\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

例 1.4. *计算$\int_L (x+2y+3z)\,\mathrm{d}s$, 其中$L$为连接$A(1,1,0)$与$B(3,3,4)$的线段.*

解: 直线段的方向向量为$(2,2,4)$, 故该线段的参数方程为

$$x = 1+2t, \quad y = 1+2t, \quad z = 4t, \quad 0 \le t \le 1.$$

由此得到曲线积分为

$$\int_L (x+2y+3z)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 (3+18t)\sqrt{24}\,\mathrm{d}t = 24\sqrt{6}.$$

例 1.5. *计算$\int_L \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}s$, 其中$L$为曲线$x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$,$z = e^t$上相应于$0 \le t \le 2$的一段弧.*

解:

$$\begin{aligned}\int_L \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}s &= \int_0^2 \frac{1}{e^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t + 1)}\sqrt{3e^{2t}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^2 \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2}).\end{aligned}$$

利用对称性简化对弧长曲线积分的计算

设平面曲线L关于x轴对称, 且位于上半平面的部分曲线为L_0,

(1) 若被积函数$f(x,y)$关于y是奇函数, 则$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = 0$;

(2) 若被积函数$f(x,y)$关于y是偶函数, 则$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = 2\int_{L_0} f(x,y)\,\mathrm{d}s$.

设空间曲线L关于xOy平面对称, 且位于xOy面上半部分曲线为L_0,

(1) 若被积函数$f(x,y,z)$关于z是奇函数, 则$\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = 0$;

(2) 若被积函数$f(x,y,z)$关于z是偶函数, 则$\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = 2\int_{L_0} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$.

例 1.6. *计算曲线积分*$\int_L (x^3+y^2)\,\mathrm{d}s$, *其中*$L: x^2+y^2=R^2$.

解: 因为L关于y轴对称, 而x^3是x的奇函数, 故

$$\int_L (x^3+y^2)\,\mathrm{d}s = \int_L y^2\,\mathrm{d}s.$$

因为L关于变量x和y具有轮换对称性, 则有$\int_L y^2\,\mathrm{d}s = \int_L x^2\,\mathrm{d}s$. 从而

$$\int_L (x^3+y^2)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_L (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_L R^2\,\mathrm{d}s = \pi R^3.$$

例 1.7. *计算*$\int_L x^2\,\mathrm{d}s$, *其中*L*为球面*$x^2+y^2+z^2=a^2$*被平面*$x+y+z=0$*所截得的圆周.*

解: 由对称性知,

$$\int_L x^2\,\mathrm{d}s = \int_L y^2\,\mathrm{d}s = \int_L z^2\,\mathrm{d}s,$$

所以

$$\int_L x^2\,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\int_L (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s = \frac{a^2}{3}\int_L \mathrm{d}s = \frac{2}{3}\pi a^3.$$

10.1.4 思考与练习

练习 10.1. 计算$\int_L \left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)\mathrm{d}s$, 其中

$$L: \begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

解:

$$x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t, \quad y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t,$$
$$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = 3a\sin t\cos t.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_L \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}\right) \mathrm{d}s =& 3a^{\frac{7}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t + \sin^4 t)\sin t\cos t\,\mathrm{d}t \\ =& 6a^{\frac{7}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t\cos t\,\mathrm{d}t = a^{\frac{7}{3}}.\end{aligned}$$

练习 10.2. 计算$\int_L \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}ds$, 其中$L$为上半圆弧$x^2 + y^2 = ax$, $y \geq 0$.

解: L的极坐标方程为$\rho = a\cos\varphi\left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$，从而以$\varphi$为参数可得$L$的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos^2\varphi, \\ y = a\cos\varphi\sin\varphi \end{cases} \qquad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}).$$

于是

$$\begin{aligned}\int_L \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}ds =& \int_0^{\frac{\pi}{2}} |a\sin\varphi|\sqrt{(-a\sin 2\varphi)^2 + (a\cos 2\varphi)^2}d\varphi \\ =& a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi = a^2.\end{aligned}$$

练习 10.3. 设L是$y^2 = 4x$从$O(0,0)$到$A(1,2)$的一段, 试计算第一型曲线积分$\int_L y\,\mathrm{d}s$.

解:

$$\int_L y\,\mathrm{d}s = \int_0^2 y\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}}\,\mathrm{d}y = \frac{4}{3}(2\sqrt{2} - 1).$$