11.4 幂级数

11.4.1 函数项级数的概念

函数项级数

如果$u_n(x)(n=1,2,\cdots)$均为定义在区间I上的函数, 表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

称为区间I上的函数项级数. 称

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$$

为函数项级数的部分和.

例如

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2n} = \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + \cdots + \frac{\cos nx}{2n} + \cdots$$

均为区间$(-\infty,+\infty)$上的函数项级数.

设点$x_0 \in I$, 若数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$收敛, 则称点$x_0$是函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的收敛点, 否则称$x_0$是函数项级数的发散点. 由收敛点全体构成的集合称为函数项级数的收敛域.

例如函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

的收敛域为$(-1,1)$.

若函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的收敛域为集合$D$, 则对$D$中的每一点$x$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 为收敛的常数项级数, 因而有确定的和s. 如此在收敛域D上, 级数的和是定义在收敛域D上的函数$s(x)$, 称其为函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的和函数, 并且它的定义域就是级数的收敛域$D$, 即有

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (x \in D).$$

而

$$r_n(x) = s(x) - s_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots$$

为函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的余项. 于是

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0 \quad \forall\, x \in D.$$

例如函数项级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$ 的收敛域为$(-1,1)$, 和函数是$\frac{1}{1-x}$, 即

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

11.4.2 幂级数及其收敛性

幂级数

设$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$为一常数列, $x_0 \in I$, 称函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

为$x-x_0$的幂级数, 其中$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$称为幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的系数. 当$x_0 = 0$ 时, 相应的幂级数变为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots. \tag{11.4.1}$$

对于幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, 通过变换$t = x - x_0$, 即可将它化为幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

定理 4.1 (**阿贝尔**(Abel)**定理**). *若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0 \neq 0$处收敛, 则对满足不等式$|x| < |x_0|$的任何$x$, 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛; 若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0$处发散, 则对满足不等式$|x| > |x_0|$的任何$x$, 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$发散.*

推论 4.2. *幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛域是以原点为中心的区间, 其收敛性必为下列三种情形之一:*

(1) 仅在$x = 0$处收敛;

(2) 在$(-\infty, +\infty)$内处处绝对收敛;

(3) 存在确定的正数R, 当$|x| < R$时绝对收敛, 当$|x| > R$时发散.

定理所列情形(3)中的正数R称为幂级数(11.4.1)的收敛半径, $(-R, R)$称为收敛区间. 在情形(1), 规定收敛半径$R = 0$, 这时幂级数没有收敛区间, 收敛域为一个点$x = 0$. 在情形(2), 规定收敛半径为$+\infty$, 收敛区间是整个实数轴$(-\infty, +\infty)$.

如果求得幂级数的收敛半径$0 < R < +\infty$, 即得收敛区间$(-R, R)$. 进一步只需讨论它在$x = -R$和$x = R$ 两点处的收敛性. 判定了这两点处的收敛性, 即可知幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域必为下列四种区间之一: $(-R, R)$, $[-R, R)$, $(-R, R]$或$[-R, R]$.

收敛半径的求法

定理 4.3. *设有幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, 其收敛半径为$R$, 如果极限$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$ (ρ为常数或$+\infty$), 则*

$$R = \begin{cases} 1/\rho, & 0 < \rho < +\infty, \\ +\infty, & \rho = 0, \\ 0, & \rho = +\infty. \end{cases}$$

定理 4.4. 设有幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, 其收敛半径为$R$, 如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ (ρ为常数或$+\infty$), 则

$$R = \begin{cases} 1/\rho, & 0 < \rho < +\infty, \\ +\infty, & \rho = 0, \\ 0, & \rho = +\infty. \end{cases}$$

例 4.1. 求下列幂级数的收敛区间:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n 2^{n-1}}$;

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$.

解:

(1) 由于

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

所以收敛半径$R = \frac{1}{\rho} = 1$, 因此收敛区间是$(-1, 1)$.

(2) 由于

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)2^n}}{\frac{1}{n 2^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2},$$

所以收敛半径$R = \frac{1}{\rho} = 2$, 因此收敛区间是$(-2, 2)$.

(3) 由于

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} n!}{2^n (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0,$$

所以收敛半径$R = +\infty$, 因此收敛区间是$(-\infty, +\infty)$.

例 4.2. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$的收敛域.

解: 因

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)}{1/n} = 1,$$

所以收敛半径$R = 1$, 收敛区间为$(-1, 1)$. 又$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散, 故原幂级数的收敛域为$[-1, 1)$.

例 4.3. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\sqrt{n}}$的收敛域.

解: 令$t = x-1$, 则原级数变为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}t^n$. 因

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+1}} = 1,$$

所以收敛半径$R = 1$, 故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}t^n$的收敛区间为$(-1,1)$. 易知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ 和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$均收敛, 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}t^n$的收敛域为$[-1,1]$. 再由$t = x-1$推得原级数的收敛域为$[0,2]$.

例 4.4. 求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n2^n}x^{2n}$的收敛域.

解: 该级数缺少奇数次幂的项, 即$a_{2m-1} = 0$. 因此$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$当$n = 2m-1$时没有意义.

作变量代换$y = x^2$, 则原级数变为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n2^n}y^n$, 容易求得其收敛半径为$R_1 = 2$. 于是原级数的收敛半径为$R = \sqrt{2}$. 因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n2^n}(\pm\sqrt{2})^{2n}$均收敛, 从而得原级数的收敛域为$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

例 4.5. 求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8^n n}(x-1)^{3n+1}$的收敛域.

解: 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{|x-1|^{3(n+1)+1}}{8^{n+1}(n+1)}}{\frac{|x-1|^{3n+1}}{8^n n}} = \frac{|x-1|^3}{8},$$

当$|x-1| < 2$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8^n n}(x-1)^{3n+1}$收敛. 当$x-1 = 2$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2\frac{(-1)^n}{n}$收敛; 当$x-1 = -2$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{n}$发散. 故原幂级数的收敛域为$(-1,3]$.

11.4.3 幂级数的运算

定理 4.5. 若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$与$\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$的收敛半径分别为$R_a$和$R_b$, 则有

$$\lambda\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda a_nx^n,\ |x| < R_a,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \pm \sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n,\ |x| < R,$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,\ |x| < R,$$

式中λ为常数，$R = \min\{R_a,R_b\}$，$c_n = \sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$.

例 4.6. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+3^n}{n^2}x^n$的收敛区间.

解: 因幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2}x^n$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}x^n$的收敛区间分别为$\left(-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$, $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, 故原级数的收敛区间为$\left(-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$.

幂级数和函数的性质

性质 4.6 (**连续性**). 幂级数的和函数$s(x)$在其收敛域上连续.

性质 4.7 (**逐项可积性**). 设a, b是幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛域上的任意两点, 则

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n \,\mathrm{d}x.$$

特别地, 对任意收敛域中的x, $\int_0^x \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n \,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$, 且右边的收敛半径等于$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径(*积分后, 收敛域有可能扩大*).

性质 4.8 (**逐项可导性**). 设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R(R > 0)$, 则其和函数$s(x)$在收敛区间$(-R, R)$内可导, 并且有逐项求导公式:

$$s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

且收敛半径不变(*求导后, 收敛域有可能缩小*).

幂级数的和函数在其收敛区间内有任意阶导数.

例 4.7. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$在其收敛区间内的和函数.

解: 由于收敛半径

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

所以幂级数的收敛区间为$(-1, 1)$.

设和函数为$s(x)$, 利用函数的可导性和逐项求导公式

$$s' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (x \in (-1, 1)).$$

因为当$-1 < x < 1$时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, 故有

$$s'(x) = \frac{1}{1-x}.$$

注意到$s(0) = 0$, 于是

$$s(x) = s(0) + \int_0^s s'(t) \,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1-t} \,\mathrm{d}t = -\ln(1-x) \quad (x \in (-1, 1)).$$

例 4.8. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$在其收敛区间内的和函数.

解: 计算可得收敛区间为$(-1,1)$. 设和函数为$s(x)$, 利用上题结果, 当$x\neq 0$时,

$$\begin{aligned}s(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)x^n=\frac{x}{1-x}-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}\\&=\frac{x}{1-x}-\frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n-x\right)=\frac{x}{1-x}+\frac{1}{x}\ln(1-x)+1\\&=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}\ln(1-x).\end{aligned}$$

当$x=0$时, $s(0)=0$. 从而

$$s(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}\ln(1-x), & 0<|x|<1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

例 4.9. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$的收敛域及和函数, 并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$的和.

解: 收敛半径

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

当$x=\pm1$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(-1)^{n-1}$均发散. 所以原幂级数的收敛域为$(-1,1)$.

设和函数为$s(x)$, 利用逐项求积公式

$$\int_0^x s(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}.$$

所以

$$s(x)=\left(\int_0^x s(t)\,\mathrm{d}t\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}\quad(-1<x<1).$$

取$x=\frac{1}{2}$, 代入上式有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}=\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=2.$$

11.4.4 思考与练习

练习 11.19. 已知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=x_0$处条件收敛, 求该级数收敛半径.

$R=|x_0|$

练习 11.20. 若幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-3)^n$在$x=-2$处收敛, 则此级数在$x=6$处(　　)

(A) 一定发散　　(B) 一定条件收敛

(C) 一定绝对收敛　　(D) 敛散性不能确定

C

练习 11.21. 若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n$在$x=0$处收敛，在$x=2b$处发散，则幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为____，收敛区间为____. $(b>0)$

$R=b$, $[-b,b)$

练习 11.22. 设数列$\{a_n\}$单调递减，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ $(n=1,2,\cdots)$无界，则幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$的收敛域为____.

$[0,2)$

练习 11.23. 求$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n-3^{2n}}$的收敛域.

解: 由于

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x^{2n}}{|n-3^{2n}|}} = \frac{1}{9}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x^{2n}}{1-\frac{n}{3^{2n}}}} = \frac{x^2}{9},$$

则当$|x|<3$时级数收敛，所以原级数的收敛半径为$R=3$. 又当$x=\pm 3$时，相应的级数都是$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{n-3^{2n}}$，而$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{2n}}{n-3^{2n}} = -1 \neq 0$，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{n-3^{2n}}$发散. 因此原级数的收敛域为$(-3,3)$.

练习 11.24. 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n}$在其收敛区间内的和函数.

解:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n} = \frac{1}{(1-x^2)^2} \quad (x\in(-1,1)).$$

练习 11.25. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = $____.

解: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, 故$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e-1$.

练习 11.26. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}\right)$，其中$a>1$.

解: $s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$, 故$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}\right) = \frac{a}{(1-a)^2}$.

练习 11.27. 求级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)2^n}$的和.

解: $s(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2-1} = \frac{1-x^2}{2x}\ln(1-x) + \frac{2+x}{4} (x\neq 0)$, 故$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)2^n} = s\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8} - \frac{3}{4}\ln 2$.