12.3 全微分方程

对于一阶微分方程$y' = f(x,y)$, 当$f(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x.y)}$时, 方程变形为

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0. \tag{12.3.1}$$

如果方程(12.3.1)的左端恰好是某个函数$u = u(x,y)$的全微分, 即

$$\mathrm{d}u(x,y) = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

则称方程(12.3.1)为全微分方程 (或恰当方程).

此时方程(12.3.1)可写成

$$\mathrm{d}u(x,y) = 0.$$

故方程(12.3.1)的通解为方程

$$u(x,y) = C$$

所确定的隐函数, 其中C是任意常数.

定理 3.1. *设方程$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$中的函数$P(x,y)$和$Q(x,y)$在单连通区域$D$内有一阶连续的偏导数, 则此方程为全微分方程的充分必要条件是*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (x,y) \in D.$$

根据曲线积分与路径的无关性, 全微分方程$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$的通解为

$$\int_{x_0}^{x} P(t,y)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,v)\,\mathrm{d}v = C \tag{12.3.2}$$

或

$$\int_{x_0}^{x} P(t,y_0)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x,v)\,\mathrm{d}v = C. \tag{12.3.3}$$

全微分方程的另一种解法

显然有$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$和$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$. 先将$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$对$x$积分得

$$u(x,y) = \int P(x,y)\,\mathrm{d}x + \varphi(y).$$

然后两边对y求偏导, 有

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,\mathrm{d}x + \varphi'(y) = Q(x,y),$$

即

$$\varphi'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

对y积分得

$$\varphi(y) = \int Q(x,y)\,\mathrm{d}y - \int\left(\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

代入$u(x,y)$得

$$u(x,y)=\int P(x,y)\,\mathrm{d}x+\int Q(x,y)\,\mathrm{d}y-\int\left(\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

所以

$$\int P(x,y)\,\mathrm{d}x+\int Q(x,y)\,\mathrm{d}y-\int\left(\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=C$$

是全微分方程(12.3.1)的通解.

类似可得

$$\int Q(x,y)\,\mathrm{d}y+\int P(x,y)\,\mathrm{d}x-\int\left(\frac{\partial}{\partial x}\int Q(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=C$$

是全微分方程(12.3.1)的通解.

例 3.1. 求$(x+y+1)\,\mathrm{d}x+(x-y^2+3)\,\mathrm{d}y=0$的通解.

解: $P(x,y)=x+y+1$, $Q(x,y)=x-y^2+3$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=1,$$

所以这是全微分方程. 取$x_0=y_0=0$, 由公式(12.3.3)得

$$u(x,y)=\int_0^x(t+1)\,\mathrm{d}t+\int_0^y(x-v^2+3)\,\mathrm{d}v=\frac{1}{2}x^2+x+xy-\frac{1}{3}y^3+3y.$$

故原方程的通解为

$$\frac{1}{2}x^2+x+xy-\frac{1}{3}y^3+3y=C.$$

例 3.2. 求$(5x^4+3xy^2-y^3)\,\mathrm{d}x+(3x^2y-3xy^2+y^2)\,\mathrm{d}y=0$的通解.

解: $P(x,y)=5x^4+3xy^2-y^3$, $Q(x,y)=3x^2y-3xy^2+y^2$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=6xy-3y^2,$$

所以这是全微分方程. 取$x_0=y_0=0$, 由公式(12.3.2)得

$$u(x,y)=\int_0^x(5t^4+3ty^2-y^3)\,\mathrm{d}t+\int_0^y v^2\,\mathrm{d}v=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^2+\frac{1}{3}y^3.$$

故原方程的通解为

$$x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^2+\frac{1}{3}y^3=C.$$

例 3.3. 求$2ye^{2x}\,\mathrm{d}x+(1+e^{2x})\,\mathrm{d}y=0$的通解.

解: $P(x,y)=2ye^{2x}$, $Q(x,y)=1+e^{2x}$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2e^{2x},$$

所以这是全微分方程. 将$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)=2ye^{2x}$两边对$x$积分得

$$u(x,y)=\int 2ye^{2x}\,\mathrm{d}x=ye^{2x}+\varphi(y).$$

将上式两边对y求偏导, 得

$$e^{2x}+\varphi'(y)=1+e^{2x}\quad\Rightarrow\quad\varphi'(y)=1.$$

解得$\varphi(y)=y$, 所以

$$u(x,y)=ye^{2x}+y.$$

于是原方程的通解为

$$ye^{2x}+y=C.$$

定义 3.1. 如果存在函数$I(x,y)$, 使得方程(12.3.1)乘上$I(x,y)$后成为全微分方程

$$I(x,y)P(x,y)\,\mathrm{d}x+I(x,y)Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0,$$

则函数$I(x,y)$称为方程(12.3.1)的积分因子.

二元函数全微分公式举例

(1) $x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}(x+y)$;

(2) $\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{y^2}=\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)$;

(3) $\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2}=\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)$;

(4) $\frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\mathrm{d}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$;

(5) $\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\left(\arctan\frac{x}{y}\right)$;

(6) $\frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\ln(x^2+y^2)$.

例 3.4. 求$y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y=0$的通解.

解:

$$y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y=0\quad\Rightarrow\quad\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{y^2}=0\quad\Rightarrow\quad\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)=0.$$

所以原方程的通解为

$$y=Cx.$$

此外还有特解$x=0$.

例 3.5. 求$(x+x^2+y^2)\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x=0$的通解.

解:

$$(x+x^2+y^2)\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x=0 \;\Rightarrow\; (x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y=0,$$

从而有

$$\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}+\mathrm{d}y=0 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}\left(\arctan\frac{y}{x}+y\right)=0.$$

所以原方程的通解为

$$\arctan\frac{y}{x}+y=C.$$

例 3.6. 求$(1+xy)y\,\mathrm{d}x+(1-xy)x\,\mathrm{d}y=0$的通解.

解:

$$(1+xy)y\,\mathrm{d}x+(1-xy)x\,\mathrm{d}y=0 \;\Rightarrow\; (y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)+xy(y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y)=0,$$

从而有

$$\mathrm{d}(xy)+xy(y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y)=0 \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}(xy)}{x^2y^2}+\frac{\mathrm{d}x}{x}-\frac{\mathrm{d}y}{y}=0.$$

所以原方程的通解为

$$-\frac{1}{xy}+\ln|x|-\ln|y|=C_1 \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{y}=Ce^{\frac{1}{xy}} \quad (C=\pm e^{C_1}).$$