8.5 方向导数与梯度

8.5.1 方向导数

定义 5.1. 设三元函数$f(x,y,z)$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$的某邻域$U(P_0)$内有定义，$\boldsymbol{l}$为从点P_0出发的射线. $P(x,y,z)$为$\boldsymbol{l}$上且含于$U(P_0)$内的任一点，以ρ表示P与P_0两点间的距离. 若极限

$$\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(P)-f(P_0)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\Delta f}{\rho}$$

存在，则称此极限为函数$f(x,y,z)$在点P_0处沿方向$\boldsymbol{l}$的方向导数，记作$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}$, $f'_l(P_0)$或$f'_l(x_0,y_0,z_0)$.

沿x轴、y轴和z轴的正向的方向分别为$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)$. 函数$f(x,y,z)$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$关于x (y或z)偏导数存在的充分必要条件是$f(x,y,z)$沿方向$\boldsymbol{e}_1$和$-\boldsymbol{e}_1$ ($\boldsymbol{e}_2$和$-\boldsymbol{e}_2$或$\boldsymbol{e}_3$和$-\boldsymbol{e}_3$)的方向导数都存在且为相反数，且$\left.\frac{\partial f}{\partial e_1}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$ $\left(\left.\frac{\partial f}{\partial e_2}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}\right.$或$\left.\left.\frac{\partial f}{\partial e_3}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}\right)$.

方向导数$\left.\frac{\partial f}{\partial e_1}\right|_{(x_0,y_0)}$存在，偏导数$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$不一定存在.

$f(x,y,z)=|x|$ 在$(0,0,0)$处沿$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_1$方向的方向导数$\left.\frac{\partial f}{\partial e_1}\right|_{(0,0,0)}=1$，但偏导数$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0,0)}$却不存在.

例 5.1. 设$f(x,y,z)=x+y^2+z^3$. 求函数$f(x,y,z)$在点$P_0(1,1,1)$处沿方向$\boldsymbol{l}=(2,-2,1)$的方向导数.

解: 过点$P_0(1,1,1)$, 以$\boldsymbol{l}=(2,-2,1)$为方向向量的直线为

$$x=2t+1,\quad y=-2t+1,\quad z=t+1,\quad t\geq 0.$$

由于$f(P_0)=3$,

$$f(P)=f(2t+1,-2t+1,t+1)=t^3+7t^2+t+3,$$
$$\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}=3t.$$

因此

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(P)-f(P_0)}{\rho}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t^3+7t^2+t}{3t}=\frac{1}{3}.$$

例 5.2. 设$f(x,y,z)=x+y^2+z^3$. 求函数$f(x,y,z)$在点$P_0(1,1,1)$处沿从点$(1,1,1)$到点$(2,-2,1)$的方向导数.

解: 过点$P_0(1,1,1)$, 以$\boldsymbol{l}=(1,-3,0)$为方向向量的直线为

$$x=t+1,\quad y=-3t+1,\quad z=1,\quad t\geq 0.$$

由于$f(P_0)=3$,

$$f(P)=f(t+1,-3t+1,1)=9t^2-5t+3,$$
$$\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}=\sqrt{10}t.$$

因此

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(P)-f(P_0)}{\rho}=\lim_{t\to 0^+}\frac{9t^2-5t}{\sqrt{10}t}=-\frac{5}{\sqrt{10}}.$$

方向导数与偏导数的关系

定理 5.1. 设函数$u=f(x,y,z)$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$可微, 则函数$f(x,y,z)$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$沿任意方向$\boldsymbol{l}$的方向导数都存在, 且

$$\begin{aligned}&\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}\\=&f'_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta+f'_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma.\end{aligned}$$

其中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$是方向$\boldsymbol{l}$的方向余弦. 记

$$\boldsymbol{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),$$

表示与$\boldsymbol{l}$同方向的单位向量.

可以类似定义一般n元函数的方向导数, 并有以上类似定理.

若函数$z = f(x, y, z)$不可偏导, 但可能有沿任意方向的方向导数.

函数$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$在点$(0,0)$处两个偏导数都不存在, 故不可微. 但在点$(0,0)$处沿任意方向的方向导数都存在,

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{f(P) - f(P_0)}{\rho} = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 1.$$

例 5.3. 设$f(x, y, z) = x^{y-z}$, 求f在点$(2,1,2)$处沿方向$\boldsymbol{l} = (2,1,-2)$ 的方向导数.

解: 由于

$$f'_x(2,1,2) = (y - z)x^{y-z-1}|_{(2,1,2)} = -\frac{1}{4},$$

$$f'_y(2,1,2) = x^{y-z} \ln x|_{(2,1,2)} = \frac{1}{2} \ln 2,$$

$$f'_z(2,1,2) = -x^{y-z} \ln x|_{(2,1,2)} = -\frac{1}{2} \ln 2,$$

$$\boldsymbol{e}_l = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}}(2,1,-2) = \frac{1}{3}(2,1,-2),$$

所以

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(2,1,2)} = -\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \ln 2 \times \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \ln 2 \times \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{1}{6}(3 \ln 2 - 1).$$

8.5.2 梯度

定义 5.2. 设函数$u = f(x, y, z)$在点$P_0(x_0, y_0, z_0)$处偏导数存在, 称向量

$$\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}, \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \right)$$

为函数$u = f(x, y, z)$在点$P_0(x_0, y_0, z_0)$处的梯度, 记作$\mathbf{grad} f(x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{grad} f|_{P_0}$ 或$\nabla f(x_0, y_0, z_0)$.

n元函数的梯度定义为

$$\mathbf{grad} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

由梯度概念, 方向导数计算公式可以写成

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = \mathbf{grad} f(x_0, y_0, z_0) \cdot \boldsymbol{e}_l = |\mathbf{grad} f(x_0, y_0, z_0)| \cos \theta,$$

其中θ为向量$\mathbf{grad} f(x_0,y_0,z_0)$与向量$\boldsymbol{l}$之间的夹角.

由此看出, 若函数$u=f(x,y,z)$在点(x_0,y_0,z_0)可微分, 则当$\boldsymbol{l}$ 与$\mathbf{grad} f(x_0,y_0,z_0)$ 方向一致时, 就有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=|\mathbf{grad} f(x_0,y_0,z_0)|.$$

于是得到下述结果:

设函数$u=f(x,y,z)$在点(x_0,y_0,z_0)可微分, 且$\mathbf{grad} f(x_0,y_0,z_0)$不是零向量, 则

(1) $f(x,y,z)$在点(x_0,y_0,z_0)处沿梯度$\mathbf{grad} f(x_0,y_0,z_0)$ 方向的方向导数最大, 最大值等于$|\mathbf{grad} f(x_0,y_0,z_0)|$; 而沿梯度反方向的方向导数最小, 最小值等于$-|\mathbf{grad} f(x_0,y_0,z_0)|$.

(2) $f(x,y,z)$在点(x_0,y_0,z_0)处沿与$\mathbf{grad} f(x_0,y_0,z_0)$垂直方向的方向导数等于零.

简单地说, 可微函数在一点处沿着梯度的方向具有最大的增长率, 最大增长率等于梯度的模.

说明梯度概念的例子

假设在平面的原点$O(0,0)$处有一个点热源, 于是在平面的每一点$P(x,y)$处都对应了确定的温度. 设温度T与该点到热源的距离r成反比, 比例系数为常数$k>0$, 即

$$T(x,y)=\frac{k}{r},\quad r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

由$T_x=-\frac{kx}{r^3}$, $T_y=-\frac{ky}{r^3}$, 得梯度

$$\mathbf{grad}T(x,y)=(T_x,T_y)=-\frac{k}{r^3}(x,y).$$

上式说明, $\mathbf{grad}T(x,y)$与向径$\boldsymbol{r}=(x,y)$的方向相反, 即梯度指向原点. 根据梯度的意义知, 温度沿着指向原点的方向上升最快; 反之, 沿着背离原点的方向下降得最快.

例 5.4. *已知函数$u=x^2+2y^2+3z^2$, 求*

(1) 函数在点$(1,1,1)$的梯度;

(2) 函数在点$(1,1,1)$处沿从点$(1,1,1)$到点$(2,3,2)$的直线方向的方向导数;

(3) 函数在点$(1,1,1)$处的增长率最大和最小的方向.

解:

(1) $\mathbf{grad} f=(2x,4y,6z)$, 故$\mathbf{grad} f|_{(1,1,1)}=(2,4,6)$.

(2) $\boldsymbol{l}=(1,2,1)$, $\boldsymbol{e}_l=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)$, 所以

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1,1)}=(2,4,6)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)=\frac{16}{\sqrt{6}}.$$

(3) 函数在点$(1,1,1)$处的增长率最大和最小的方向分别为

$$\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3),\quad -\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3).$$

8.5.3 数量场与向量场

如果对于空间区域G内的任一点M, 都一个确定的数量$f(M)$, 则称在这空间区域G内确定了一个数量场(数量场、密度场等). 一个数量场可用一个数量函数$f(M)$来确定.

如果与点M对应的是一个向量$\boldsymbol{F}(M)$, 则称在这空间区域G内确定了一个向量场(力场、速度场等). 一个向量场可用一个向量函数$\boldsymbol{F}(M)$来确定, 其中

$$\boldsymbol{F}(M) = P(M)\boldsymbol{i} + Q(M)\boldsymbol{j} + R(M)\boldsymbol{k},$$

其中$P(M), Q(M), R(M)$是点M的数量函数.

向量函数$\mathbf{grad} f(M)$确定了一个向量场 — 梯度场, 它是由数量场$f(M)$产生的. 通常称函数$f(M)$为这个向量场的势, 而这个向量场又称为势场. 任意一个向量场不一定是势场, 因为它不一定是某个数量函数的梯度场.

例 5.5. *试求数量场$\frac{m}{r}$所产生的梯度场, 其中常数$m > 0$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$为原点O与点$M(x,y,z)$间的距离.*

解:

$$\mathbf{grad}\frac{m}{r} = -\frac{m}{r^2}\left(\frac{x}{r}\boldsymbol{i} + \frac{y}{r}\boldsymbol{j} + \frac{z}{r}\boldsymbol{k}\right) = -\frac{m}{r^2}\boldsymbol{e}_r,$$

其中$\boldsymbol{e}_r = \left(\frac{x}{r}\boldsymbol{i} + \frac{y}{r}\boldsymbol{j} + \frac{z}{r}\boldsymbol{k}\right)$.

力学解释

- $-\frac{m}{r^2}\boldsymbol{e}_r$表示位于原点$O$质量为$m$的质点对位于点$M$质量为1的质点的引力.
- 这引力的大小与两质点的质量的乘积成正比、而与它们的距离平方成反比, 这引力的方向由点M 指向原点.
- 因此数量场$\frac{m}{r}$的势场即梯度场$\mathbf{grad}\frac{m}{r}$称为引力场, 而函数$\frac{m}{r}$称为引力势.

8.5.4 思考与练习

练习 8.22. *求$f(x,y) = x^2 + 2xy - y$在点$(2,1)$处沿方向$\boldsymbol{l} = (2,-1)$的方向导数.*

解: 由于

$$f_x = 2x + 2y, \quad f_y = 2x - 1,$$

所以

$$f_x(2,1) = 6, \quad f_y(2,1) = 3, \quad \boldsymbol{e}_l = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1).$$

故

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{2}{\sqrt{5}}f_x(2,1) - \frac{1}{\sqrt{5}}f_y(2,1) = \frac{9}{\sqrt{5}}.$$

练习 8.23. *求*$f(x,y)=\sin(x+y)$*在点*$(0,0)$*处沿方向*$\boldsymbol{e}_l=(\cos\theta,\sin\theta)$*的方向导数.*

解: 由于

$$f_x(0,0)=\cos(x+y)|_{(0,0)}=1,\quad f_y(0,0)=\cos(x+y)|_{(0,0)}=1,$$

所以

$$\frac{\partial f}{\partial l}=f_x(0,0)\cos\theta+f_y(0,0)\sin\theta=\cos\theta+\sin\theta.$$

练习 8.24. *求函数*$z=x^y$*在任意点处的梯度.*

解: 由于

$$z_x=yx^{y-1},\quad z_y=x^y\ln x,$$

所以

$$\nabla z=(yx^{y-1},x^y\ln x).$$

练习 8.25. *设*$z=f(x,y)=xe^y$*.*

(1) 求出f*在点*$P(2,0)$*处沿从*P*到*$Q\left(\frac{1}{2},2\right)$*方向的变化率;*

(2) f*在点*$P(2,0)$*处沿什么方向具有最大的增长率, 最大增长率为多少?*

解:

(1) 设$\boldsymbol{e}_l$是与$\overrightarrow{PQ}$同向的单位向量, 即$\boldsymbol{e}_l=\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$, 又$\mathbf{grad}f(x,y)=(e^y,xe^y)$, 所以

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(2,0)}=\mathbf{grad}f(2,0)\cdot\boldsymbol{e}_l=(1,2)\cdot\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)=1.$$

(2) $f(x,y)$在点$P(2,0)$处沿$\mathbf{grad}f(2,0)=(1,2)$方向具有最大的增长率, 最大增长率为

$$|\mathbf{grad}f(2,0)|=\sqrt{5}.$$

练习 8.26. *设*$f(x,y,z)=x\sin(yz)$*, 求*$\mathbf{grad}f(1,3,0)$*与*$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,3,0)}$*, 其中*$\boldsymbol{l}=(1,2,-1)$*.*

解: 由于

$$f_x=\sin(yz),\quad f_y=xz\cos(yz),\quad f_z=xy\cos(yz),$$

所以

$$\mathbf{grad}f(1,3,0)=(f_x,f_y,f_z)|_{(1,3,0)}=(0,0,3).$$

又因为

$$\boldsymbol{e}_l=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2-1),$$

于是

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,3,0)}=0\times\frac{1}{\sqrt{6}}+0\times\frac{2}{\sqrt{6}}+3\times\frac{-1}{\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{6}}{2}.$$