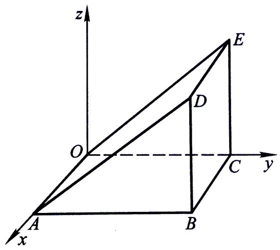
9.4 重积分的应用

9.4.1 曲面的面积

例 4.1. 长方体Ω的底面为xOy面上的矩形$OABC$，其中OA，OC分别位于x轴和y轴上. 如果Ω被一过x轴的平面所截得一矩形截面，且截面的法向量为$\boldsymbol{e}_n=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ $(\cos\gamma\neq 0)$，证明截面$OADE$的面积S与底面$OABC$的面积σ有如下的关系

$$S=\frac{1}{|\cos\gamma|}\sigma.$$



若Ω是母线平行于z轴的柱体，底面是xOy面上面积为σ的任意一个有界闭区域D，则以法向量为$\boldsymbol{e}_n=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ $(\cos\gamma\neq 0)$的平面截该柱体得到的截面面积为

$$S=\frac{1}{|\cos\gamma|}\sigma.$$

曲面的面积

设有界曲面S具有显式方程

$$z=z(x,y),\quad (x,y)\in D_{xy},$$

其中D_{xy}是S在xOy面上的投影区域，$z(x,y)$在D_{xy}上具有连续的偏导数.

对区域D_{xy}进行分划，在D_{xy}上任取一直径很小的矩形区域$\mathrm{d}\sigma$(其面积也用$\mathrm{d}\sigma$ 表示)，在$\mathrm{d}\sigma$ 上任取一点$M(x,y)$，对应地在曲面S上有一点$P(x,y,z(x,y))$. 曲面S在点P处有切平面Σ，切平面Σ的法向量$\boldsymbol{n}=(z'_x(x,y),z'_y(x,y),-1)$. 切平面$\Sigma$ 上与$\mathrm{d}\sigma$所对应的小块切平面的面积

$$\mathrm{d}S=\frac{1}{|\cos\gamma|}\,\mathrm{d}\sigma.$$

此时由于

$$|\cos\gamma|=\frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}},$$

从而得到曲面S的面积为

$$A=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}\,\mathrm{d}\sigma,$$

上式中的被积表达式称作曲面面积微元, 记作 $\mathrm{d}S$, 即

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + z_x'^2(x,y) + z_y'^2(x,y)}\,\mathrm{d}\sigma.$$

若曲面S的方程为$x = g(y,z)$, 则曲面面积为

$$A = \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1 + g_y'^2 + g_z'^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中D_{yz}是曲面S在yOz面上的投影区域.

若曲面S的方程为$y = h(z,x)$, 则曲面面积为

$$A = \iint\limits_{D_{zx}} \sqrt{1 + h_z'^2 + h_x'^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x,$$

其中D_{zx}是曲面S在zOx面上的投影区域.

例 4.2. 求由曲面$x^2 + y^2 = az$和$z = 2a - \sqrt{x^2+y^2}$ $(a > 0)$所围立体的表面积.

解: 解方程组$\begin{cases} x^2 + y^2 = az, \\ z = 2a - \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$得两曲面的交线为圆周$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = a. \end{cases}$故立体在$xOy$平面上的投影域为$D_{xy} : x^2 + y^2 \le a^2$. 由$z = \frac{1}{a}(x^2 + y^2)$得到$z_x' = \frac{2x}{a}$, $z_y' = \frac{2y}{a}$. 于是

$$\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{1 + \frac{4x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + 4x^2 + 4y^2}.$$

由$z = 2a - \sqrt{x^2+y^2}$得到$\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{2}$. 故

$$A = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + 4x^2 + 4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_{xy}} \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi a^2}{6}(6\sqrt{2} + 5\sqrt{5} - 1).$$

例 4.3. 求曲面$az = xy$包含在圆柱$x^2 + y^2 = a^2$内那部分的面积.

解: $z_x' = \frac{y}{a}$, $z_y' = \frac{x}{a}$. 因此所求曲面面积

$$A = \iint\limits_{x^2+y^2 \le a^2} \sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

应用广义极坐标变换得

$$A = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 a^2 r\sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2} - 1)a^2.$$

9.4.2 质心

平面物体的质心

设D是密度函数为$\rho(x,y)$的平面物体, $\rho(x,y)$在D上连续. D的质心坐标为

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint\limits_{D} x\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma, \quad \bar{y} = \frac{1}{M}\iint\limits_{D} y\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma,$$

其中$M = \iiint\limits_{D} \rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$.

空间物体的质心

设V是密度函数为$\rho(x,y,z)$的空间物体, $\rho(x,y,z)$在V上连续. V的质心坐标为

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iiint\limits_{V} x\rho\,\mathrm{d}V, \quad \bar{y} = \frac{1}{M}\iiint\limits_{V} y\rho\,\mathrm{d}V, \quad \bar{z} = \frac{1}{M}\iiint\limits_{V} z\rho\,\mathrm{d}V,$$

其中$M = \iiint\limits_{V} \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V$.

例 4.4. *求下列均匀密度物体的质心:*

(1) $z \le 1 - x^2 - y^2$, $z \ge 0$;

(2) *由坐标面及平面*$x + 2y - z = 1$*所围成的四面体.*

解:

(1) 设物体质心坐标为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$. 由对称性知$\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$. 应用柱面坐标变换得

$$\bar{z} = \frac{\iiint\limits_{V} z\,\mathrm{d}V}{\iiint\limits_{V}\,\mathrm{d}V} = \frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_0^{1-r^2} z\,\mathrm{d}z}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_0^{1-r^2}\mathrm{d}z} = \frac{1}{3}.$$

故质心为$(0,0,\frac{1}{3})$.

(2) 设四面体质心坐标为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$. 四面体与坐标轴的截距分别为$(1,0,0)$, $(0,\frac{1}{2},0)$和$(0,0,-1)$. 显然$\iiint\limits_{V}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{12}$. 因此

$$\bar{x} = \frac{1}{V}\iiint\limits_{V} x\,\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{2}}\mathrm{d}y\int_{x+2y-1}^{0}\mathrm{d}z = \frac{1}{4},$$

$$\bar{y} = \frac{1}{V}\iiint\limits_{V} y\,\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{2}} y\,\mathrm{d}y\int_{x+2y-1}^{0}\mathrm{d}z = \frac{1}{8},$$

$$\bar{z} = \frac{1}{V}\iiint\limits_{V} z\,\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{2}}\mathrm{d}y\int_{x+2y-1}^{0} z\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{4}.$$

故质心为$(\frac{1}{4},\frac{1}{8},-\frac{1}{4})$.

9.4.3 转动惯量

平面物体的转动惯量

设D是密度函数为$\rho(x,y)$的平面物体, $\rho(x,y)$在D上连续. 物体D对于x,y轴的转动惯量分别为

$$I_x = \iint_D y^2\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma, \quad I_y = \iint_D x^2\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

若转动轴为直线l, 则物体D对于l的转动惯量为

$$J_l = \iint_D r^2(x,y)\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma,$$

其中$r(x,y)$为D中点(x,y)到l的距离函数.

例 4.5. *求下列密度为常数ρ_0的平面薄板D的转动惯量:*

(1) 半径为R的圆关于其切线的转动惯量;

(2) 边长为a和b, 且夹角为φ的平行四边形, 关于底边b的转动惯量.

解:

(1) 设圆心在原点, 切线为$x=R$, 薄板上任一点(x,y)到$x=R$的距离为$R-x$. 从而

$$\begin{aligned} I &= \rho_0 \iint\limits_D (R-x)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \rho_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r(R^2-2Rr\cos\theta+r^2\cos^2\theta)\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{5}{4}\pi\rho_0R^4. \end{aligned}$$

(2) 设平行四边形为$0\le y\le a\sin\varphi$, $y\cot\varphi\le x\le b+y\cot\varphi$. 因此

$$I = \rho_0\iint\limits_D y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \rho_0\int_0^{a\sin\varphi} y^2\,\mathrm{d}y\int_{y\cot\varphi}^{b+y\cot\varphi}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\rho_0ba^3\sin^3\varphi.$$

9.4.4 引力

密度为$\rho(x,y,z)$的立体对立体外质量为1的质点$A(x_0,y_0,z_0)$的引力为

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k},$$

其中

$$F_x = k\iiint\limits_V \frac{x-x_0}{r^3}\rho\,\mathrm{d}V,\ \ F_y = k\iiint\limits_V \frac{y-y_0}{r^3}\rho\,\mathrm{d}V,\ \ F_z = k\iiint\limits_V \frac{z-z_0}{r^3}\rho\,\mathrm{d}V,$$

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

k为引力常量.

例 4.6. 求密度为常数ρ_0的正圆锥体(高为h, 底半径为R)对于在它的顶点处质量为m的质点的引力.

解: 设圆锥体为$\sqrt{x^2+y^2} \le R - \frac{R}{h}z$, 顶点坐标为$(0,0,h)$. 显然由对称性有$F_x = F_y = 0$.

$$\begin{aligned} F_z &= mk\rho_0 \iiint\limits_V \frac{z-h}{[x^2+y^2+(z-h)^2]^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}V \\ &= mk\rho_0 \int_0^h (z-h)\,\mathrm{d}z \iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{[x^2+y^2+(z-h)^2]^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

其中$D = \left\{(x,y) : \sqrt{x^2+y^2} \le R - \frac{R}{h}z\right\}$. 用柱坐标计算可得

$$\begin{aligned} F_z &= mk\rho_0 \int_0^h (z-h)\,\mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{R-\frac{R}{h}z} \frac{r}{[r^2+(z-h)^2]^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi mk\rho_0 \int_0^h \left(1 - \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\right) \mathrm{d}z = \frac{2\pi mk\rho_0 h(\sqrt{R^2+h^2}-h)}{\sqrt{R^2+h^2}}. \end{aligned}$$

故所求的引力为$\left(0, 0, \frac{2\pi mk\rho_0 h(\sqrt{R^2+h^2}-h)}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)$.

例 4.7. 求密度为常数ρ_0的均匀薄片$x^2+y^2 \le R^2$, $z=0$对于z轴上一点$(0,0,c)(c>0)$处单位质量的引力.

解: 由对称性有$F_x = F_y = 0$.

$$F_z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \frac{-k\rho_0 c}{(r^2+c^2)^{\frac{3}{2}}} r\,\mathrm{d}r = 2k\pi\rho_0 c\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+c^2}} - \frac{1}{c}\right).$$

9.4.5 思考与练习

练习 9.14. 求球面$x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$夹在$z=a$与$z=b(0<b<a)$之间的表面积.

解: 易知$z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$, 且在xOy面上的投影区域为$x^2+y^2 \le a^2-b^2$. 由于

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

从而

$$\sqrt{1+z'^2_x(x,y)+z'^2_y(x,y)} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

所以表面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint\limits_D \sqrt{1+z'^2_x(x,y)+z'^2_y(x,y)}\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\sqrt{a^2-b^2}} \frac{a\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\,\mathrm{d}\rho = \int_0^{\sqrt{a^2-b^2}} \frac{2\pi a\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\,\mathrm{d}\rho = 2\pi a(a-b). \end{aligned}$$

练习 9.15. 求锥面$z = \sqrt{x^2+y^2}$被平面$x+2z=3$所截下的有限部分的面积.

解: 首先求出曲面与平面的交线在xOy面上的投影. 将$z=\frac{1}{2}(3-x)$代入锥面方程, 得

$$(3-x)^2=4x^2+y^2.$$

化为标准方程

$$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.$$

因曲面方程为$z=\sqrt{x^2+y^2}$, 故

$$z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

从而

$$\sqrt{1+z'^2_x(x,y)+z'^2_y(x,y)}=\sqrt{2}.$$

于是曲面面积为

$$S=\iint\limits_D\sqrt{1+z'^2_x(x,y)+z'^2_y(x,y)}\,\mathrm{d}\sigma=\sqrt{2}\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma=2\sqrt{6}\pi.$$

练习 9.16. 求圆锥$z=\sqrt{x^2+y^2}$在圆柱体$x^2+y^2\le x$内那一部分的面积.

解: 按曲面面积公式,

$$S=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中D是$x^2+y^2\le x$. 又

$$z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

因此

$$\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}=\sqrt{2}.$$

故

$$S=\iint_D\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

练习 9.17. 求密度均匀的上半椭球体的质心.

解: 设椭球体由不等式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$$

表示. 由对称性知$\bar{x}=0$, $\bar{y}=0$. 又ρ为常数, 故

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_V z\rho\,\mathrm{d}V}{\iiint\limits_V\rho\,\mathrm{d}V}=\frac{\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\frac{2}{3}\pi abc}=\frac{3c}{8}.$$