**解**: 由平行四边形的面积公式知所求距离

$$d = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}.$$

由于$\overrightarrow{AB} = (0, -2, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 0, 0)$, 因此

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}.$$

故$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{5}$. 又$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5}$, 所以$d = 1$.

**练习 7.6.** 设向量$\boldsymbol{a} = (3, 2, 2)$, $\boldsymbol{b} = (18, -22, -5)$. 已知$\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$, $|\boldsymbol{c}| = 14$, 且$\boldsymbol{c}$与$y$轴正向的夹角为钝角, 求$\boldsymbol{c}$.

**解**: 由题意知$\boldsymbol{c} \parallel \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, 又

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 2 & 2 \\ 18 & -22 & -5 \end{vmatrix} = 34\boldsymbol{i} + 51\boldsymbol{j} - 102\boldsymbol{k},$$

故可取$\boldsymbol{c} = \lambda(2, 3, -6)$. 因为$|\boldsymbol{c}| = 7|\lambda| = 14$, 所以$\lambda = \pm 2$. 又由$\cos\beta < 0$知$\lambda = -2$, 于是

$$\boldsymbol{c} = (-4, -6, 12).$$

## 7.4 空间平面及其方程

### 7.4.1 平面的点法式和一般方程

#### 法向量

与平面垂直的直线称为该平面的法线. 垂直于平面的非零向量叫作该平面的法向量, 记作$\boldsymbol{n}$.

由于过空间一点可以作且只能作一个平面垂直于已知直线, 因此当给定平面上的一点及其法向量时, 该平面的位置就完全确定了.

#### 平面的点法式和一般方程

设$M_0(x_0, y_0, z_0)$是平面$\Pi$上的一点, $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$是$\Pi$的法向量, 则该平面的方程为

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{7.4.1}$$

平面方程(7.4.1)是由平面上的点及法向确定的, 故方程(7.4.1)又称为平面的点法式方程.

在平面方程(7.4.1)中, 将常数合并, 得到方程

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{7.4.2}$$

这里$\boldsymbol{n} = (A, B, C)$为平面的法向. 方程(7.4.2)称为平面的一般方程.

**例 4.1.** *求过点$A(1,1,2)$, $B(2,-1,1)$和$C(3,2,5)$的平面方程.*

**解**: 先求平面的法向量$\boldsymbol{n}$. 显然$\boldsymbol{n} \parallel \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. 由于

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -5\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k},$$

故可取$\boldsymbol{n} = (1, 1, -1)$. 根据点法式方程(7.4.1)得所求平面的方程为

$$x - 1 + y - 1 - (z - 2) = 0,$$

即

$$x + y - z = 0.$$

**例 4.2.** *将平面$2x + 3y + 5z + 1 = 0$化为点法式.*

**解**: 显然法向量$\boldsymbol{n} = (2, 3, 5)$. 取平面上一点$(1, -1, 0)$, 则得平面的点法式方程

$$2(x - 1) + 3(y + 1) + 5(z - 0) = 0.$$

**一些特殊位置的平面所具有的特征**

利用平面的一般方程, 可得到一些特殊位置的平面所具有的特征.

(1) 平面$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$过原点等价于$D = 0$.

(2) 平面$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$平行于$z$轴等价于$C = 0$.

(3) 平面$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$过$z$轴等价于$C = D = 0$.

(4) 平面$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$垂直于$z$轴等价于$A = B = 0$.

**例 4.3.** *设平面过原点$O$及点$M_0(6, -3, 2)$, 且与平面$4x - y + 2z = 8$垂直, 求此平面方程.*

**解**: 由题意知, 所求平面与另一平面的法向$(4,-1,2)$平行. 又$\overrightarrow{OM_0}=(6,-3,2)$, 故平面法向

$$\boldsymbol{n}=(4,-1,2)\times(6,-3,2)=(4,4,-6).$$

因此平面方程为

$$2x+2y-3z=0.$$

**例 4.4.** *设平面与$x$轴、$y$轴及$z$轴分别交于三点$P_1(a,0,0)$, $P_2(0,b,0)$ 与$P_3(0,0,c)$, 其中$a,b,c$均不为零, 求该平面的方程.*

**解**: 设所求平面的一般方程为

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

根据条件, 把点$P_1,P_2,P_3$的坐标分别代入方程得

$$aA+D=0,\quad bB+D=0,\quad cC+D=0.$$

解得

$$A=-\frac{D}{a},\quad B=-\frac{D}{b},\quad C=-\frac{D}{c}.$$

以此代入一般方程并消去$D$, 得所求平面的方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

该方程称为平面的截距式方程. $a,b,c$依次称作平面在$x,y,z$轴上的截距.

### 7.4.2 两平面的夹角以及点到平面的距离

#### 1. 两平面的夹角

两平面的法向量的夹角(通常不取钝角)称为两平面的夹角.

设两平面$\Pi_1$和$\Pi_2$的法向量分别为$\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ 和$\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$, 由于两平面的夹角$\theta$是$\boldsymbol{n}_1$和$\boldsymbol{n}_2$的夹角且又为锐角, 故由两向量的夹角余弦公式得

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

由两个向量垂直、平行的充要条件可知

- 平面$\Pi_1$和$\Pi_2$相互垂直的充要条件是$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.
- 平面$\Pi_1$和$\Pi_2$相互平行的充要条件是$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

**例 4.5.** *求平面$x - y + 2z - 6 = 0$与平面$2x + y + z = 5$的夹角.*

**解**:

$$\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|} = \frac{|1 \times 2 + (-1) \times 1 + 2 \times 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}.$$

故两平面的夹角$\theta = \frac{\pi}{3}$.

**例 4.6.** *研究以下各组两平面的位置关系:*

*1.* $-x + 2y - z + 1 = 0$*与*$y + 3z - 1 = 0$*;*

*2.* $2x - y + z - 1 = 0$*与*$-4x + 2y - 2z - 1 = 0$*;*

*3.* $2x - y - z + 1 = 0$*与*$-4x + 2y + 2z - 2 = 0$*.*

**解**:

1. $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{60}}$, 故相交, 夹角$\theta = \arccos\frac{1}{\sqrt{60}}$;
2. $\boldsymbol{n}_2 = -2\boldsymbol{n}_1$, 但$-1 \neq -2(-1)$, 故平行;
3. $\boldsymbol{n}_2 = -2\boldsymbol{n}_1$, 但$-2 = -2(1)$, 故重合.

**例 4.7.** *求通过$z$轴, 且与平面$2x + y - \sqrt{5}z - 7 = 0$的夹角为$\frac{\pi}{3}$的平面方程.*

**解**: 因平面过$z$轴, 故可设平面方程为$Ax + By = 0$. 由题意知

$$\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|} = \frac{|2A + B|}{\sqrt{10}\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{2}.$$

化简得

$$3A^2 + 8AB - 3B^2 = 0.$$

解得$3A = B$或$A = -3B$. 故得平面方程为

$$x + 3y = 0$$

或

$$3x - y = 0.$$

**2. 点到平面的距离**

设$P_0(x_0,y_0,z_0)$是平面$\Pi: Ax+By+Cz+D=0$外一点, 则$P_0$到平面$\Pi$的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

**证明**: 任取$\Pi$上一点$P_1(x_1,y_1,z_1)$, 并作向量$\overrightarrow{P_1P_0}$. 设$\overrightarrow{P_1P_0}$与平面法向量$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$的夹角为$\theta$, 则$P_0$ 到平面$\Pi$ 的距离为

$$d=|\overrightarrow{P_1P_0}|\cos\theta=|\overrightarrow{P_1P_0}|\frac{|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{P_1P_0}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}.$$

又

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{n}=&A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)\\=&Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)\\=&Ax_0+By_0+Cz_0+D.\end{aligned}$$

由上两式即可知结论成立.

**例 4.8.** 求点$P(2,1,1)$到平面$x+y-z+1=0$的距离.

**解**:

$$d=\frac{|2+1-1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

**例 4.9.** 试推导两平行平面$\Pi_1: Ax+By+Cz+D_1=0$ 与$\Pi_2: Ax+By+Cz+D_2=0$之间的距离公式; 并计算平行平面$19x-4y+8z+21=0$与$19x-4y+8z+42=0$之间的距离.

**解**: 设点$P_1(x_1,y_1,z_1)$在平面$\Pi_1$上, 则两平面的距离记为点$P_1$到平面$\Pi_2$的距离. 故两平行平面$\Pi_1$与$\Pi_2$之间的距离公式为

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

由此得到两已知平行平面的距离为

$$d=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|21-42|}{\sqrt{19^2+4^2+8^2}}=1.$$