10.2 对坐标的曲线积分

10.2.1 对坐标的曲线积分的概念

有向曲线

一条曲线通常有两个相反的走向, 如果指定了其中的一个走向作为曲线的“方向”, 则此曲线称为有向曲线.

对单位圆$C: x = \cos t, y = \sin t$, 若规定其方向为逆时针方向, 则$C$就成为一条有向曲线.

对非封闭曲线弧L, 如果规定它的两个端点中的一个(记作A)为起点, 另一个(记作B)为终点, 此时有向曲线L为$\overset{\frown}{AB}$.

在讨论有向曲线时, $\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{BA}$是两条不同的有向曲线.

对有向光滑曲线弧L, 规定L上任一点(x,y)处的切向量$\boldsymbol{\tau}$的指向与L的方向相一致.

变力沿曲线的做功问题

设在xOy面上一个质点在变力$\boldsymbol{F}(x,y)$的作用下, 从点A沿光滑曲线L移动到B, 已知

$$\boldsymbol{F}(x,y) = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j},$$

其中函数$P(x,y)$, $Q(x,y)$在L上连续. 计算质点在移动过程中变力$\boldsymbol{F}(x,y)$所做的功.

如果力$\boldsymbol{F}$是常力, 且质点沿直线从A移动到B, 则常力$\boldsymbol{F}$所做的功等于向量$\boldsymbol{F}$与$\overrightarrow{AB}$的数量积, 即

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}.$$

变力$\boldsymbol{F}$沿有向曲线L所做的功为

$$W = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i].$$

定义 2.1 (对坐标的平面曲线积分的定义). *设L是xOy面上从点A到点B的一条光滑的有向曲线弧, 函数$P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在L 上有界. 沿L的方向依次取分点$A = M_0, M_1, \cdots, M_n = B$, 把$L$分成$n$个有向小弧段$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}(i = 1,2,\cdots,n)$, 设$\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = \Delta x_i\boldsymbol{i} + \Delta y_i\boldsymbol{j}$, 并记$\lambda$为所有小弧段长度的最大值. 在$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$上任意取一点$(\xi_i,\eta_i)$, 如果极限*

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$$

存在, 则称此极限为函数$P(x,y)$在有向弧段L 上对坐标x的曲线积分, 记作$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x$.

类似地, 如果极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$$

存在, 则称此极限为函数$Q(x,y)$在有向弧段L 上对坐标y的曲线积分, 记作$\int_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y$.

即

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i,$$

$$\int_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i,$$

其中$P(x,y)$, $Q(x,y)$称为被积函数, $P(x,y)\,\mathrm{d}x$及$Q(x,y)\,\mathrm{d}y$称为被积表达式, L称为(有向) 积分弧.

在应用上经常出现

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

这种合并起来的形式. 为简单起见, 记为

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

由此, 变力沿曲线做的功可写成

$$W = \int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

对坐标的曲线积分也常称为第二类曲线积分.

如果L是分段光滑的, 则规定函数在L上对坐标的曲线积分等于在光滑的各弧段上对坐标的曲线积分之和.

当$P(x,y)$, $Q(x,y)$在L上连续时, 对坐标的曲线积分$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x$ 和$\int_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ 均存在.

定义 2.2 (**对坐标的空间曲线积分的定义**). 设L是空间中的一条光滑的有向曲线弧, 函数$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$在曲线L 上有界. 沿L的方向依次取分点$A = M_0$, M_1, $\cdots$, $M_n = B$, 把L分成n 个有向小弧段$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}(i = 1,2,\cdots,n)$, 设$\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = \Delta x_i\boldsymbol{i} + \Delta y_i\boldsymbol{j} + \Delta z_i\boldsymbol{k}$, 并记$\lambda$为所有小弧段长度的最大值. 在$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$上任意取一点$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$, 如果极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i$$

存在, 则称此极限为函数$P(x,y,z)$在有向弧段L 上对坐标x的曲线积分, 记作$\int_L P(x,y,z)\,\mathrm{d}x$, 即

$$\int_L P(x,y,z)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i.$$

类似地, 定义函数$Q(x,y,z)$在有向弧段L 上对坐标y的曲线积分

$$\int_L Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i,$$

函数$R(x,y,z)$在有向弧段L 上对坐标y的曲线积分

$$\int_L R(x,y,z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i.$$

10.2.2 对坐标的曲线积分的性质

性质 2.1 (**线性性质**). 若$\int_L P_i\,\mathrm{d}x+Q_i\,\mathrm{d}y\ (i=1,2,\cdots,k)$存在, 则$\int_L(\sum\limits_{i=1}^{k}c_iP_i)\,\mathrm{d}x+(\sum\limits_{i=1}^{k}c_iQ_i)\,\mathrm{d}y$也存在, 且

$$\int_L(\sum_{i=1}^{k}c_iP_i)\,\mathrm{d}x+(\sum_{i=1}^{k}c_iQ_i)\,\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{k}c_i\left(\int_L P_i\,\mathrm{d}x+Q_i\,\mathrm{d}y\right),$$

其中$c_i\ (i=1,2,\cdots,k)$为常数.

性质 2.2 (**对于有向曲线的可加性**). 若有向平面曲线L分成L_1和L_2, 则

$$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_{L_1}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+\int_{L_2}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y.$$

上式可推广到L由$L_1,L_2,\cdots,L_k$组成的情形.

若有向空间曲线L分成L_1和L_2, 则

$$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\int_{L_1}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z+\int_{L_2}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z.$$

上式可推广到L由$L_1,L_2,\cdots,L_k$组成的情形.

性质 2.3 (**方向性**). 设L为有向平面曲线, $-L$是与L方向相反的有向曲线, 则

$$\int_{-L}P(x,y)\,\mathrm{d}x=-\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_{-L}Q(x,y)\,\mathrm{d}y=-\int_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

设L为有向空间曲线, $-L$是与L方向相反的有向曲线, 则

$$\int_{-L}P(x,y,z)\,\mathrm{d}x=-\int_L P(x,y,z)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_{-L}Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y=-\int_L Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y,$$
$$\int_{-L}R(x,y,z)\,\mathrm{d}z=-\int_L R(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

10.2.3 对坐标的曲线积分的计算

设$P(x,y)$, $Q(x,y)$在有向光滑曲线弧L上连续, L的参数方程为

$$\begin{cases} x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}$$

当参数t单调地由α变到β时, 点$M(x,y)$从L的起点A沿L移动到终点B, 则有

$$\begin{aligned}&\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y\\=&\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

在上式右端的定积分中, 下限α对应于L的起点, 上限β对应于L的终点, α 未必小于β.

若L由$y=\varphi(x)$给出, 其中x由a变到b, 则

$$\begin{aligned}&\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y\\ =&\int_a^b\{P[x,\varphi(x)]+Q[x,\varphi(x)]\varphi'(x)\}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

若L由$x=\psi(y)$给出, 其中y由c变到d, 则

$$\begin{aligned}&\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y\\ =&\int_c^d\{P[\psi(y),y]\psi'(y)+Q[\psi(y),y]\}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

对于定义在空间的有向曲线弧L上的三元函数, 可以类似定义下列三个对坐标的曲线积分

$$\int_L P(x,y,z)\,\mathrm{d}x,\quad \int_L Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y,\quad \int_L R(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

并且若空间曲线L由参数方程

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\omega(t),\quad t\text{从}\alpha\text{变到}\beta$$

给出, 则有

$$\begin{aligned}&\int_L P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y+R(x,y,z)\,\mathrm{d}z\\ =&\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)\\ &\quad+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中下限α对应曲线的起点, 上限β对应曲线终点.

例 2.1. *计算$\int_L xy\,\mathrm{d}x$, 其中L为抛物线$y^2=x$上从点$A(1,-1)$到点$B(1,1)$的一段弧.*

解: 法一. 将所给曲线积分化为对x的定积分来计算. 为此把L 分为$\overset{\frown}{AO}$和$\overset{\frown}{OB}$两部分, 其中

$$\overset{\frown}{AO}: y=-\sqrt{x},\quad x\text{从}1\text{变到}0;$$

$$\overset{\frown}{OB}: y=\sqrt{x},\quad x\text{从}0\text{变到}1.$$

因此

$$\begin{aligned}\int_L xy\,\mathrm{d}x&=\int_{\overset{\frown}{AO}}xy\,\mathrm{d}x+\int_{\overset{\frown}{OB}}xy\,\mathrm{d}x\\ &=\int_1^0 x(-\sqrt{x})\,\mathrm{d}x+\int_0^1 x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{4}{5}.\end{aligned}$$

法二. 将所给曲线积分化为对y的定积分来计算. 由于

$$L: x = y^2, \quad y\text{从}-1\text{变到}1,$$

因此

$$\int_L xy\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} y^3 (y^2)'\,\mathrm{d}y = 2\int_{-1}^{1} y^4\,\mathrm{d}y = \frac{4}{5}.$$

例 2.2. 计算$\int_L x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$, 其中$L$为

(1) 按逆时针方向绕行的椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的上半部分;

(2) 从点$A(a,0)$ 到点$B(-a,0)$ 的线段.

解:

(1) 取L的参数方程$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ t从0变到π, 则

$$\begin{aligned}\int_L x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} [a\cos t\cdot b\cos t - a\sin t\cdot(-b\sin t)]\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi} ab\,\mathrm{d}t = \pi ab.\end{aligned}$$

(2) 由于L是有向线段$\overline{AB}: y=0$, x从a变到$-a$, 因此

$$\int_L x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \int_a^{-a} (x\cdot 0 - 0)\,\mathrm{d}x = 0.$$

例 2.3. 计算$\int_L x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x$, 其中$L$为

(1) 抛物线$y^2 = x$上从点$O(0,0)$到点$A(1,1)$的一段弧;

(2) 直线$y = x$上从点$O(0,0)$到点$A(1,1)$的线段;

(3) 从点$O(0,0)$沿x轴到点$B(1,0)$, 再由点$B(1,0)$垂直向上到点$A(1,1)$.

解:

(1)

$$\int_L x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}(y^2) = \int_0^1 3y^2\,\mathrm{d}y = 1.$$

(2)

$$\int_L x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2x\,\mathrm{d}x = 1.$$

(3)

$$\begin{aligned}\int_L x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x &= \int_{OB} x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x + \int_{BA} x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x\,\mathrm{d}(0) + 0\,\mathrm{d}x + \int_0^1 1\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}(1) = 1.\end{aligned}$$

尽管积分路径不同, 积分的值仍然有可能相等.

例 2.4. *计算$\oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中$L$为圆周$x^2+y^2=R^2$逆时针方向.*

解: L的参数方程$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases}$ t从0变到2π, 则

$$\begin{aligned}\oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} &= \frac{1}{R^2}\int_0^{2\pi} [R\cos t \cdot R\cos t - R\sin t \cdot (-R\sin t)]\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\,\mathrm{d}t = 2\pi.\end{aligned}$$

例 2.5. *计算$\int_L 2x\,\mathrm{d}x + 3y\,\mathrm{d}y + 4z\,\mathrm{d}z$, 其中$L$为从点$A(1,1,2)$到点$B(3,-1,4)$的有向线段.*

解: 有向线段$\overline{AB}$的参数方程为

$$x = 1+2t, \quad y = 1-2t, \quad z = 2+2t,$$

t从0变到1, 因此

$$\begin{aligned}\int_L 2x\,\mathrm{d}x + 3y\,\mathrm{d}y + 4z\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 (4+8t-6+12t+16+16t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (14+36t)\,\mathrm{d}t = 32.\end{aligned}$$

例 2.6. *设一个质点在$M(x,y)$处受到力$\boldsymbol{F}$的作用, $\boldsymbol{F}$的大小与M到原点O的距离成正比, $\boldsymbol{F}$的方向恒指向原点, 此质点由点$A(a,0)$沿椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$按逆时针方向移动到点$B(0,b)$, 求力$\boldsymbol{F}$所做的功$W$.*

解: $\overrightarrow{OM} = (x,y)$, $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2+y^2}$. 由假设有$\boldsymbol{F} = (-kx,-ky)$, 其中$k>0$是比例系数. 于是

$$\begin{aligned}W &= \int_{\overset{\frown}{AB}} -kx\,\mathrm{d}x - ky\,\mathrm{d}y = -k\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-a^2\cos t\sin t + b^2\sin t\cos t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{k}{2}(a^2-b^2).\end{aligned}$$

10.2.4 两类曲线积分的联系

设有向光滑曲线弧$L = \overset{\frown}{AB}$上任一点(x,y)处的单位切向量$\boldsymbol{t} = (\cos\alpha)\boldsymbol{i} + (\cos\beta)\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{t}$的指向与有向曲线L的方向相一致, 则有

$$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\,\mathrm{d}s.$$

两类空间曲线积分之间也有类似的关系式:

$$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}s,$$

其中$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$为L上任一点(x,y,z)处的切向量的方向余弦. 其向量形式为

$$\int_L \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_L \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}s,$$

其中$\boldsymbol{A} = (P,Q,R)$, $\boldsymbol{t} = (\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$称为有向曲线元.

例 2.7. 把对坐标的曲线积分$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$化为对弧长的曲线积分, 其中$L$为曲线$y = x^2$上从$(0,0)$到$(1,1)$的一段.

解: 与L曲线方向一致的切线向量为$(1,2x)$, 故

$$(\cos\alpha,\cos\beta) = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}(1,2x).$$

所以

$$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\,\mathrm{d}s = \int_L \frac{P+2xQ}{\sqrt{1+4x^2}}\,\mathrm{d}s.$$

10.2.5 思考与练习

练习 10.4. 计算$\int_L \left(1+\frac{1}{x}e^y\right)dx + e^y\ln x dy$, 其中$L$为从点$A(1,0)$ 到点$B(2,1)$ 的直线段.

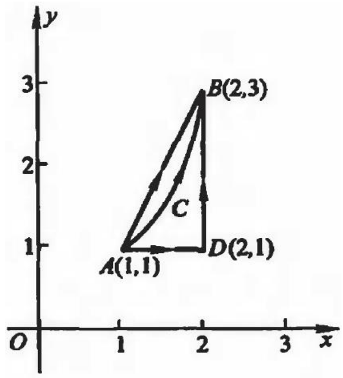
解: 由于L是有向线段$\overline{AB}: y = x-1$, x从1变到2, 因此

$$\int_L \left(1+\frac{1}{x}e^y\right)\mathrm{d}x + e^y\ln x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(1+\frac{1}{x}e^{x-1} + e^{x-1}\ln x\right)\mathrm{d}x = 1 + e\ln 2.$$

练习 10.5. 计算$\int_L xy\,\mathrm{d}x + (y-x)\,\mathrm{d}y$, 其中$L$分别沿图中路线:

(i) 直线AB;

(ii) ACB(抛物线: $y = 2(x-1)^2+1$);



(iii) $ADBA$(三角形周界).

解: (i) 直线AB的方程为$y = 2x - 1, x \in [1,2]$, 故

$$\int_{AB} xydx + (y - x)dy = \int_1^2 [x(2x-1) + 2(x-1)]dx = \frac{25}{6}.$$

(ii)

$$\int_{ACB} xydx + (y - x)dy = \int_1^2 (10x^3 - 32x^2 + 35x - 12)dx = \frac{10}{3}.$$

(iii)

$$\begin{aligned}&\int_{ADBA} xydx + (y - x)dy = \left(\int_{AD} + \int_{DB} + \int_{BA}\right) xydx + (y-x)dy \\ &= \int_{AD} xydx + \int_{DB} (y-x)dy - \int_{AB} xydx + (y-x)dy \\ &= \int_1^2 xdx + \int_1^3 (y-2)dy - \frac{25}{6} = \frac{3}{2} + 0 - \frac{25}{6} = -\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

练习 10.6. 计算$\int_\Gamma y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + xdz$, 其中$L$为从点$A(2,0,0)$到点$B(3,4,5)$再到$C(3,4,0)$的一条有向折线.

解: 有向线段$\overline{AB}$的参数方程为

$$x = 2 + t, \quad y = 4t, \quad z = 5t,$$

t从0变到1, 于是

$$\int_{\overline{AB}} y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z = \int_0^1 (4t + 20t + 5(2+t))\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (10 + 29t)\,\mathrm{d}t = \frac{49}{2}.$$

类似可得有向线段$\overline{BC}$的参数方程为

$$x = 3, \quad y = 4, \quad z = 5t,$$

t从1变到0, 于是

$$\int_{\overline{BC}} y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z = \int_1^0 15\,\mathrm{d}t = -15.$$

因此

$$\int_\Gamma y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z = \frac{49}{2} - 15 = \frac{19}{2}.$$

练习 10.7. 计算第二型曲线积分

$$I = \int_L xy\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z,$$

L是螺旋线: $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$从$t = 0$到$t = \pi$上的一段.

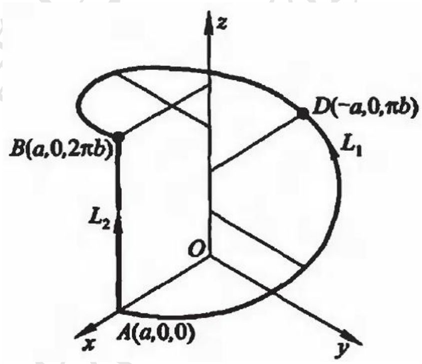
解:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} (-a^3\cos t\sin^2 t + a^2\cos^2 t - a^2\sin t\cos t + a^2 b\cos^2 t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{1}{3}a^3\sin^3 t - \frac{1}{2}a^2\sin^2 t + \frac{1}{2}a^2(1+b)\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\right]\Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2}a^2(1+b)\pi. \end{aligned}$$

练习 10.8. 求在力$\boldsymbol{F}(y, -x, x+y+z)$作用下,

(i) 质点由A沿螺旋线L_1到B所作的功, 其中$L_1: x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt,\ 0 \le t \le 2\pi$;

(ii) 质点由A沿直线L_2到B所作的功.



解: 在空间曲线L上力$\boldsymbol{F}$所作的功为

$$W = \int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_L y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y + (x+y+z)\,\mathrm{d}z.$$

(i)

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi} (-a^2\sin^2 t - a^2\cos^2 t + ab\cos t + ab\sin t + b^2 t)\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi(\pi b^2 - a^2). \end{aligned}$$

(ii)

$$W = \int_0^{2\pi b} (a+t)\,\mathrm{d}t = 2\pi b(a + \pi b).$$