12.5 线性微分方程解的结构

n阶线性微分方程的一般形式为

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x). \tag{12.5.1}$$

当$f(x) \neq 0$时, 方程(12.5.1)称为非齐次线性微分方程. 当$f(x) = 0$时, 方程(12.5.1), 即

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \tag{12.5.2}$$

称为齐次线性微分方程. 当$a_1(x), a_2(x), \cdots, a_n(x)$均为常数时, 方程(12.5.1)称为常系数线性微分方程.

二阶线性微分方程的一般形式为

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x). \tag{12.5.3}$$

微分方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{12.5.4}$$

是对应于二阶非齐次线性微分方程(12.5.3)的齐次线性微分方程

定理 5.1 (**齐次线性微分方程的叠加原理**)**.** *设函数$y = y_1(x)$及$y = y_2(x)$是齐次线性微分方程(12.5.4)的解, 则对于任何常数C_1和C_2, $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 也是方程(12.5.4)的解.*

定义 5.1. *设$y_1, y_2, \cdots, y_n$为定义在区间(a, b)内的n个函数. 如果存在n个不全为零的常数$k_1, k_2, \cdots, k_n$, 使得当$x \in (a, b)$时恒等式*

$$k_1y_1 + k_2y_2 + \cdots + k_ny_n = 0$$

成立, 则称这n个函数在区间(a, b)内线性相关; 否则称为线性无关.

例如, $1, \cos^2 x, \sin^2 x$在任何区间(a, b)内都是线性相关的.
$1, x, x^2$在任何区间(a, b)内都是线性无关的.

定理 5.2. *设$y_1(x)$及$y_2(x)$是二阶齐次线性微分方程(12.5.4)的两个线性无关的特解, 则$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 是方程(12.5.4)的通解(其中C_1, C_2 是任意常数).*

例如, 方程$y'' + y = 0$有特解$y_1 = \cos x$和$y_2 = \sin x$, 且$\frac{y_1}{y_2} = \tan x \neq$常数, 故方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

定理 5.3. 设y^*是二阶非齐次线性微分方程(12.5.3)

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

的一个特解, Y是齐次线性微分方程(12.5.4)的通解, 则

$$y = Y + y^*$$

是二阶非齐次线性微分方程(12.5.3)的通解.

例如, 方程$y'' + y = x$有特解$y^* = x$, 对应的齐次方程$y'' + y = 0$有通解

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

因此所给方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x.$$

定理 5.4. 设二阶非齐次线性微分方程(12.5.3)右端$f(x)$是几个函数之和, 如

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x),$$

而y_1^*和y_2^*分别是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$$

与

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$$

的特解, 则$y_1^* + y_2^*$是方程(12.5.3)的特解.

例如, 考察方程$y'' + y = x + \cos 2x$.

方程$y'' + y = x$有特解$y_1^* = x$, 方程$y'' + y = \cos 2x$有特解$y_2^* = -\frac{1}{3}\cos 2x$, 所以方程$y'' + y = x + \cos 2x$有特解$y^* = x - \frac{1}{3}\cos 2x$.

例 5.1. 设y_1, y_2, y_3是二阶非齐次线性微分方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

的解, 且$\frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} \neq k$. 证明: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + (1 - C_1 - C_2) y_3$是该方程的通解, 其中$C_1, C_2$ 为任意常数.

例 5.2. 已知$y_1 = 3$, $y_2 = x^2 + 3$, $y_3 = e^x + x^2 + 3$都是二阶非齐次线性方程$(x^2 - 2x)y'' - (x^2 - 2)y' + (2x - 2)y = 6x - 6$的解, 其中$C_1, C_2$是任意常数, 则该方程的通解是(　　).

(A) $C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_1$

(B) $C_1(y_1 - y_2) + C_2(y_1 - y_3) + y_2 + y_3$

(C) $C_1(y_1 + y_2) + C_2(y_1 + y_3) + y_1$

(D) $C_1(y_1 - y_2) + C_2(y_1 - y_3) + \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$

D

例 5.3. 已知微分方程$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$有三个特解$y_1 = x$, $y_2 = e^x$, $y_3 = e^{2x}$, 求此方程满足初值条件$y(0) = 1$, $y'(0) = 3$的特解.

解: $y_2 - y_1$与$y_3 - y_1$是对应齐次方程的解, 且

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{e^x - x}{e^{2x} - x} \neq \text{常数}.$$

因而$y_2 - y_1$与$y_3 - y_1$线性无关. 故原方程的通解为

$$y = C_1(e^x - x) + C_2(e^{2x} - x) + x.$$

代入初值条件$y(0) = 1$, $y'(0) = 3$, 得$C_1 = -1$, $C_2 = 2$. 所以所求特解为$y = 2e^{2x} - e^x$.