7.7.4 思考与练习

练习 7.11. 求曲线$\begin{cases} z = x^2, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ 在各坐标面上的投影曲线的方程.

解: 曲面$z = x^2$为平行于y的抛物柱面, 曲面向无限延伸, 而曲面$x^2 + y^2 = 1$为半径等于1的圆柱面, 因而在$z = 0$上的投影曲线为圆, 即投影曲线方程:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

在xOz面上, 投影曲线为

$$\begin{cases} z = x^2(-1 \le x \le 1), \\ y = 0. \end{cases}$$

同理可得曲线在yOz面上的投影曲线为

$$\begin{cases} z + y^2 = 1(-1 \le y \le 1), \\ x = 0. \end{cases}$$

7.8 二次曲面

- 三元二次方程$F(x, y, z) = 0$所表示的曲面称为二次曲面.
- 三元一次方程$F(x, y, z) = 0$所表示的曲面称为一次曲面, 即平面.

对曲面$F(x, y, z) = 0$的形状的探讨, 可以采用截痕法——即根据所给曲面的方程, 用坐标面和特殊的平面与曲面相截, 考察其截痕的形状, 然后对所得截痕加以综合, 从而得到曲面的全貌.

7.8.1 柱面

椭圆柱面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

所表示的曲面称为椭圆柱面.

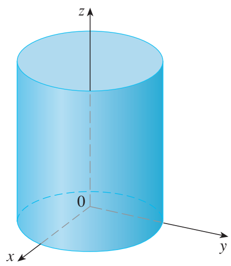
用平行于坐标面xOy的平面$z = z_0$截此椭圆柱面所得截痕为中心在z轴上的椭圆

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = z_0. \end{cases}$$

实际上, 可以看成将椭圆

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

上下平移而成.



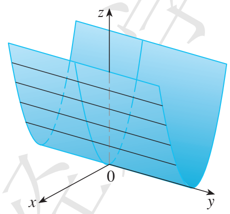
当$a = b$时, $x^2 + y^2 = a^2$称为圆柱面.

抛物柱面

由方程

$$x^2 = 2z$$

所表示的曲面称为抛物柱面.



双曲柱面

由方程

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

所表示的曲面称为双曲柱面.

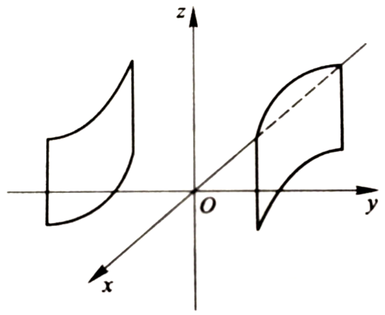
7.8.2 椭球面

椭球面

方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0) \tag{7.8.1}$$

表示的曲面叫作椭球面.



椭球面形状的探讨

由方程, 得各变量的取值范围:

$$|x| \le a, \quad |y| \le b, \quad |z| \le c.$$

由方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, 当$z=z_0$为常数, 则截痕为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z_0^2}{c^2}=\frac{c^2-z_0^2}{c^2}, \\ z=z_0 \end{cases}$$

为$z=z_0$平面上的一个椭圆.

同理, 用$y=y_0$与曲面相截, 截痕为平面$y=y_0$上的椭圆

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{b^2-y_0^2}{b^2}, \\ y=y_0. \end{cases}$$

相仿, 用$x=x_0$与曲面相截, 截痕为$x=x_0$平面上的椭圆.

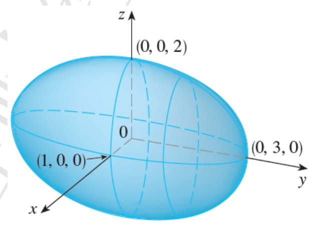


图 7.1: 椭球面$x^2+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$

如果$a=b$, 则方程(7.8.1)变为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

它表示zOx面上的椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$或$yOz$面上的椭圆$\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$绕轴旋转一周而成的旋转椭球面.

如果$a=b=c$, 则方程(7.8.1)变为$x^2+y^2+z^2=a^2$, 即球心在原点, 半径为a的球面.

7.8.3 双曲面

单叶双曲面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0) \tag{7.8.2}$$

所表示的曲面称为单叶双曲面.

用平行于坐标面xOy的平面$z = z_0$截曲面(7.8.3)所得截痕为中心在z轴上的椭圆

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z_0^2}{c^2}, \\ z = z_0, \end{cases}$$

它的两个半轴分别为$\frac{a}{c}\sqrt{c^2 + z_0^2}$及$\frac{b}{c}\sqrt{c^2 + z_0^2}$.

用平行于坐标面zOx的平面$y = y_0$截曲面(7.8.3)所得截痕为中心在y轴上的双曲线

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y_0^2}{b^2}, \\ y = y_0, \end{cases}$$

它的两个半轴的平方分别为$\frac{a^2}{b^2}|b^2 - y_0^2|$及$\frac{c^2}{b^2}|b^2 - y_0^2|$.

- 若$y_0^2 < b^2$, 则双曲线的实轴平行于x轴, 虚轴平行于z轴.
- 若$y_0^2 > b^2$, 则双曲线的实轴平行于z轴, 虚轴平行于x轴.
- 若$y_0 = \pm b$, 则平面$y = \pm b$截曲面(7.8.3)所得截痕为一对相交于点$(0, \pm b, 0)$的直线

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0, \\ y = \pm b, \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0, \\ y = \pm b. \end{cases}$$

类似地, 用平行于坐标面yOz的平面$x = x_0$截曲面(7.8.3)所得截痕也是双曲线. 特别地, 两平面$x = \pm a$截曲面(7.8.3)所得截痕是两对相交的直线.

(a) 单叶双曲面$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (b) 双叶双曲面$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

由方程

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0,b>0,c>0) \tag{7.8.3}$$

所表示的曲面称为双叶双曲面.

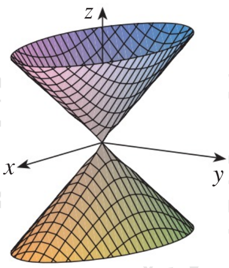
7.8.4 锥面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$$

所表示的曲面称为椭圆锥面.

用平行于xOy的平面$z=z_0$截此面, 当$z_0=0$时得一点$(0,0,0)$; 当$z_0\neq 0$时, 得平面$z=z_0$上的椭圆$\frac{x^2}{(az_0)^2}+\frac{y^2}{(bz_0)^2}=1$.



当$a=b$时, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$称为圆锥面.

7.8.5 抛物面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z \quad (\text{或}-z)$$

所表示的曲面称为椭圆抛物面.

对上述椭圆抛物面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$, 以$z=z_0$与曲面相截, 则截面曲线为平面$z=z_0$上的椭圆

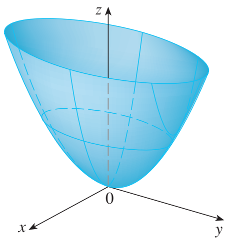
$$\frac{x^2}{z_0a^2}+\frac{y^2}{z_0b^2}=1.$$

以$y=y_0$与曲面相截, 则截面曲线为一开口向上、平行于zOx平面的抛物线

$$x^2=a^2\left(z-\frac{y_0^2}{b^2}\right).$$

以$x=x_0$与曲面相截, 则截面曲线为一开口向上、平行于yOz平面的抛物线

$$y^2=b^2\left(z-\frac{x_0^2}{a^2}\right).$$



当$a=b$时，方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=z$称为旋转抛物面．它可以看成是由$xOz$平面上的抛物线$x^2=a^2z$绕$z$轴旋转而成．

方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z \quad (\text{或} -z)$$

所表示的曲面称为双曲抛物面，也称为马鞍面(或鞍形面)．