

Bestemmelse av luftmotstand og terminalhastighet av muffinsform i fritt fall

A. G. Strand^a, J. Å. Sagild^a, K. Saastad^a, A. M. Sambanis^a, C. R. MacDonald^a

^aInstitutt for fysikk, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 7491 Trondheim.

Sammendrag

Målet med forsøket var å finne luftmotstand og terminalhastighet til et legeme i fritt fall. En muffinsform på $0,005 \pm 0,001 \text{ kg}$ ble sluppet $1,8 \pm 0,2 \text{ m}$ over bakken. Terminalhastigheten ble funnet til å være $1,854 \pm 0,01 \text{ m/s}$ ved at fallet ble filmet og deretter analysert med programmet Tracker. Dette ble også regnet ut ved hjelp av Eulers metode, noe som resulterte i et avvik på $7,2 \pm 0,01\%$ fra de numeriske beregningene. Etter å ha funnet dragkoeffisienten, med en usikkerhet på 0,001, ble luftmotstanden regnet ut til å være $0,0426 \pm 0,001 \text{ N}$ ved terminalhastigheten.

1. Introduksjon

Fysikere har i alle år konstruert idealiserte modeller ved hjelp av antagelser og forenklinger, slik at beregninger rundt ulike eksperimenter skal være enklere å løse. En av de første dokumenterte tilfellene der en idealisert modell ble brukt var Gallileo Gallilei som undersøkte legemer i fritt fall og neglisjerte luftmotstand.

Målet ved dette forsøket er å finne en mer nøyaktig beskrivelse av dette fenomenet. Dermed ble det undersøkt hvordan en muffinsform oppfører seg når man slipper den fra en gitt høyde over bakken. Farten til legemet avhenger av flere faktorer som ble tatt med i betraktning, blant annet luftmotstanden, som igjen avhenger av dragkoeffisienten. Rapporten beskriver hvordan det kvasikvalitative eksperimentet ble utført og hvordan numerisk analyse og Tracker ble brukt til å finne eksakte verdier.

2. Teori

viser et objekt (muffinsform) med masse m . Det virker to krefter på objektet. En gravitasjonskraft G ,

$$G = mg \quad (1)$$

og en luftmotstand F_D

$$F_D = bv \quad (2)$$

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho_{\text{luft}} A v^2 \quad (3)$$

$$C_D = \frac{2mg}{A \rho_{\text{luft}} v_T^2} \quad (4)$$

hvor A og v er hennholdsvis tverrsnittsarealet og farten til objektet, ρ_{luft} er tettheten til luften og b og C_D er dimensjonsløse konstanter for dragkoeffisienten, som varierer med reynoldstallet (Re) og formen på objektet. Luftmotstand har to forskjellige formler, en lineær (2) for $Re < 2300$ og en kvadratisk (3) for $Re > 2300$. Over 2300 vil det oppstå

turbulente strømnings bak objektet og en kan da bruke (3). Denne grensen er ikke absolutt men en veiledning for bruk av de to funksjonene. Reynoldstallet (Re) er gitt ved

$$Re = \frac{VD}{\nu_{\text{luft}}} \quad (5)$$

hvor V er farten og D er diameteren til objektet, og K er den kinetiske viskositeten til luft, som er konstant, $K = 1,460 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. Ved å bruke (4) kan farten som er skille mellom linær (laminaer) og kvadratisk (turbulent) luftmotstand regnes ut.

$$V = \frac{Re \nu_{\text{luft}}}{D} = \frac{2300 \cdot 1,460 \cdot 10^{-5} [\frac{\text{m}^2}{\text{s}}]}{0,045} = 0,746 [\text{m/s}] \quad (6)$$

Dette gir at (3) skal brukes ved fart over $0,746 \text{ m/s}$ mens (2) brukes for fart under $0,746 \text{ m/s}$. Ettersom terminalfarten er mer interessant i dette eksperimentet, og objektet når en fart på over $0,746 \text{ m/s}$ før den treffer det målte området. I (3) er luftmotstanden proporsjonal med C_D . Ettersom F_D og C_D er ukjente kan ikke luftmotstanden regnes direkte ut fra (3). viser at de virker to krefter på objektet

$$\sum F_z = F_D - G \quad (7)$$

Ved terminalhastigheten er akselerasjonen lik null. Newtons 2. lov gir da

$$F_D = G \quad (8)$$

som fører til

$$\frac{1}{2} C_D \rho_{\text{luft}} A v^2 = mg \quad (9)$$

C_D er den eneste ukjente i (8) og ligningen kan dermed løses. Når C_D er funnet kan (3) brukes til å regne ut luftmotstanden for objektet ved en fart over $0,746 \text{ m/s}$.

Eulers metode kan brukes til å analytisk komme frem til en tilnærming. Den er gitt ved

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{n+1} = \left(\frac{dr}{dt}\right)_n + \Delta \frac{dr}{dt} = \left(\frac{dr}{dt}\right)_n + \frac{d^2 r_n}{dt^2} \Delta t \quad (10)$$

Resultatene fra det fysiske eksperimentet og de analytiske resultatene vil bli sammenlignet og diskutert i del 4. Fysiske målinger er alltid usikre i fysisk eksperimenter. Det kan ikke bevises at en målt meter er en meter etc. Forskjell i temperatur kan påvirke tettheten til lufta som igjen påvirker luftmotstanden. En forskjell på bare et par kelvin ved romtemperatur kan gi nesten en prosent forskjell i tetthet, og dermed en prosent i luftmotstand. Bevegelse i lufta vil påvirke objektets fall. Hovedsaklig vil luftstrømmninger være iforhold til horisontal planet, som kan sørge for at objektet ikke faller rett ned. Men strømmninger i vertikal planet, selv om som regel ikke like sterke, vil gi større utslag på eksperimentet ettersom målingene er fart i vertikal retningen. Perspektivet som kameraet har iforhold til fallbanen kan føre til utslag i farten. Den største usikkerheten kommer i ustødheter i objektet. Det vil si at bunnen av muffinsformen ikke står rett på fallretningen. Dette gir forskjellige tverrsnittsareal, som gir ulik luftmotstand som igjen bidrar til en unøyaktig terminalfart. At objektet har ustødheter og roterer smått i forhold til fartsretningen vil føre til at forskjellige deler av objektet vil ha forskjellig fart. Dette kan føre til unøyaktigheter ved bruk av Tracker.

Usikkerheten til dragkoeffisienten er beregnet ved å anvende Gauss' feilforplantningslov. Denne formelen sjekker den deriverte i forhold til alle de andre elementene og multipliserer med usikkerheten til disse verdiene. På denne måten sjekkes usikkerheten til elementene og man kommer frem til den endelige usikkerheten som ønskes. Dette gjøres fordi det er flere elementer, som alle har hver sin usikkerhet, som inngår i formelen for luftmotstand. Dermed må alle disse bli tatt hensyn til, slik at den endelige usikkerheten blir så nøyaktig som mulig.

$$\Delta f(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2 + \dots} \quad (11)$$

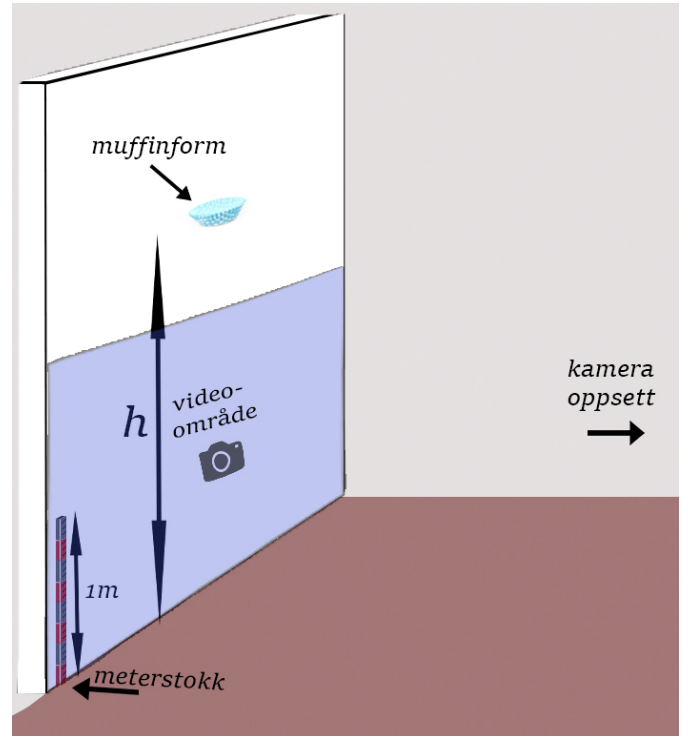
3. Eksperimentell metode

Den opprinnelige planen var å slippe en tennisball, og bruke en fallskjerm for å øke luftmotstanden. Da eksperimentet ble utført, viste det seg at tennisballen ikke nådde terminalfarten og utførelsen av forsøket ble endret. Det ble bestemt at det skulle slippes en muffinsform uten fallskjerm. Det eksperimentelle oppsettet vises i figur 1.

Muffinsformen veide $0,005 \pm 0,0001 \text{ kg}$, og var betydelig mye lettere enn ballen, som veide $0,0585 \pm 0,0001 \text{ kg}$. Dermed ble terminalfarten nådd. Radiusen til muffinsformen var $0,045 \pm 0,001 \text{ m}$, den hadde form som en avkuttet kjegle og var laget av bakepapir. Siden fallobjektet hadde en slik form, ble den mer aerodynamisk enn en flat form, og fallet ble mer stabilt.

Muffinsformen ble plassert med en høyde på $1,8 \pm 0,2 \text{ m}$ over gulvet. Den ble deretter sluppet av en person som holdt den med begge hender og den falt i fritt fall til den traff gulvet. Hele fallet ble filmet av et kamera som sto $1,5 \pm 0,1 \text{ m}$ fra slippbane som vist i figur 1. Det ble plassert en menterstokk i hjørnet av videobildet slik at Tracker kunne estimere høyden. Vi filmet og analyserte tre fall.

Verdiene ble målt ved hjelp av programmet Tracker, som ble brukt på filmen av fallet. Ved å legge inn akser, legge inn en målestokk som referanse på høyde og legge inn en punktmasse, kunne vi tracke bevegelsen av punktmassen per frame. Vi brukte 100 frames per sekund. Disse verdiene ble brukt til å finne resultatene ved hjelp av numeriske beregninger i MatLab. Vi brukte gauss 11, euler 10 og standardavvik for å komme frem til resultatene våre.



Figur 1: Skisse av oppsettet på forsøket. Det ble sluppet en muffinsform fra en høyde h over gulvet. Muffinsformen slippes, og fallet filmes og analyseres i Tracker. Man behøver også en meterstokk som høydereferanse til analyseringen.

4. Resultater

Terminalhastigheten ble regnet ut for alle målingene, og dette ble brukt for å finne den gjennomsnittlige terminalhastigheten for alle forsøkene. Under er en tabell over de endelige resultatene (usikkerheter blir tatt for seg senere).

Terminalhastigheten er hastigheten til legemet når $G = F_D$, altså når objektet har sluttet å akselerere. Som forklart i del 3 har datasettene verdier fra start til slutt, og da blir

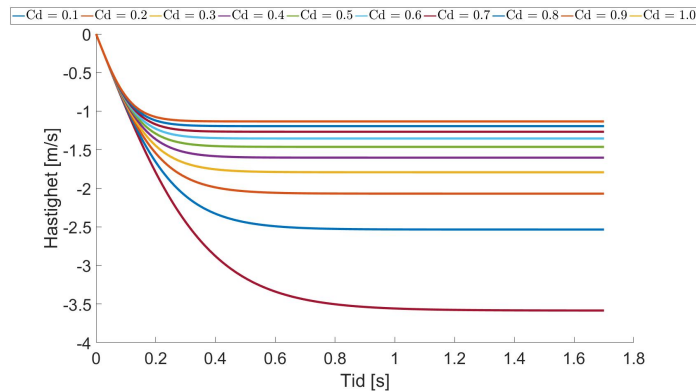
Tabell 1: Oversikt over variablenes resultater. Usikkerhetene er grunnlaget for å ta i bruk Gauss' feilforplantningslov(10) til å regne ut usikkerheten for dragkoeffisienten C_D . Usikkerheten til terminalfarten, regnet ut fra tracker, fant vi ved å regne ut standardavviket. Disse usikkerhetene gjelder for alle verdiene brukt i denne seksjonen.

Variable	Verdi
C_D	$0.325 \pm 0,001$
$V_{T_{Tracker}}$	$1,85 \pm 0.01 \text{ m/s}$
$V_{T_{Euler}}$	$1,9877 \text{ m/s}$
m	$0,005 \pm 0.0001 \text{ g}$
A	$0,006 \pm 0.017 \text{ m}^2$
ρ	$1,2 \pm 0.0078 \text{ kg/m}^3$
r	$0,0045 \pm 0,0001 \text{ m}$
h	$1,8 \pm 0,2 \text{ m}$

$v = 1,85 \text{ m/s}$. Usikkerheten $\Delta v = 0,01$ ble funnet ved å regne ut standardavviket til den målte farten.

Dragkoeffisienten C_D er en konstant som er nødvendig for å regne ut luftmotstanden (3). For å regne ut dragkoeffisienten (se Equation 4) ble dataene fra målingene brukt. Da alle verdier brukt til å finne C_D har usikkerheter, er det viktig at disse blir tatt i betraktning for å vite hvor pålitelig vår beregning var. For dette ble Gauss' feilforplantningslov (11) brukt, og vi finner ΔC . Gauss' forplantningslov er forklart i teoridelen under seksjon 2, og resultatet ga $\Delta C = 0,001$, altså blir $C_D = 0,325$.

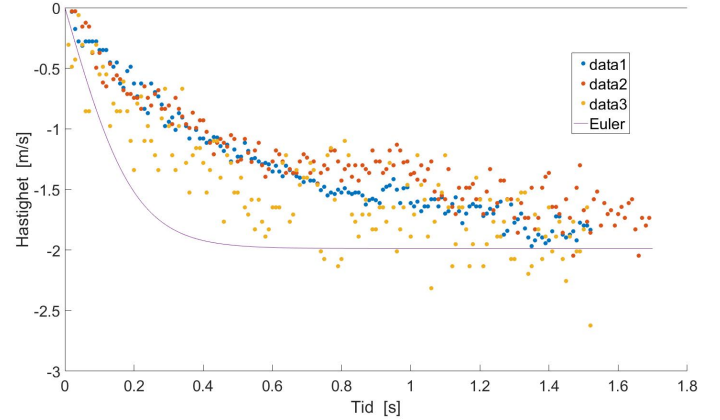
Målet for forsøket er å finne luftmotstanden ved terminalhastighet. Etter å ha beregnet dragkoeffisienten finner vi luftmotstanden, regnet ut ved å bruke formel (3), som ga oss resultatet: $F_D = 0,0426 \text{ N}$.



Figur 2: I figuren kan vi se et plot av målt fart fra tracker (punktvis plot fra liste med verdier) og farten illustrert ved Euler's metode (sammenhengene graf).

Oppgaven ber oss ta for oss en ren numerisk analyse ved bruk av Euler's metode (10). Da beregning av terminalfarten er ett av målene for forsøket, har vi valgt å sette opp Euler's metode for denne variablen ved å variere på verdien til dragkoeffisienten mellom 0,1-1,0. Vi ser fra figur 2 at for en dragkoeffisient på 0,4, ville Euler's metode

gitt oss en mer passende verdi. Vi fant en dragkoeffisient på $0,325 \pm 0,001$ da vi brukte vår beregnet gjennomsnittlige terminalfart. I figur 3 har vi plottet måleverdiene sammen med Euler's metode for vår beregnet terminalfart for å se hvordan den numeriske analysen av eksperimentet stemte med våre faktiske resultater vist i plottet på figur 3. Resultatet viser at Euler gir en raskere terminalfart enn de målte dataene. Likevel er Euler's metode en god fremstilling av objektets fartsbane.



Figur 3: I figuren kan vi se et plot av målt fart fra tracker (punktvis plot fra liste med verdier) og farten illustrert ved Euler's metode (sammenhengene graf).

5. Diskusjon

Av figur 3 ser vi at det faktiske fallet tar ganske mye lengre tid før den når terminalfart. Dette kommer stort av samme usikkerheter og faktorerer beskrevet over om forskjellen i F_D og G . Våre beregninger i Euler's metode er kun basert på vår kalkulasjon av dragkoeffisienten C_D , altså vil alle feil og usikkerheter i terminalfarten påvirke vår analyse.

Varmeforskjeller fører til trykkforskjeller, noe som er en usikkerhet å betrakte. Da det var en omtrent forskjell på 2K fra slippunkt til bakken, og temperaturen er direkte proporsjonal med trykket, blir det en feil på forholdet mellom gravitasjonen og luftmotstanden. Dette kan også bli sett fra grafen sammenlignet med euler, da terminalhastigheten stort sett er lavere enn det Euler's metode viser (se figur 3).

Dragkoeffisienten vil variere med strømningene i luften og objektets fart. Ved separert ustabil strømning ($Re < 10^4$) vil dragkoeffisienten være større enn ved terminalfarten, og for turbulent strømning ($Re > 10^4$) vil den være mindre. Vi ønsker en dragkoeffisient for laminær strømning ($Re = 10^4$), da dette indikerer om beregnet terminalfart og dragkoeffisient stemmer. Vi har regnet ut at Reynold's tallet ved vår terminalfart (6) til å bli $0,925 \cdot 10^4$. Attså har vi laminær strømning og dette gir oss en meget god tilnærming for at både farten og dragkoeffisient er stemmer.

Tracker viser at objektet når terminalfart i løpet av målingene, som betyr at akselerasjonen er lik null. Dette

skulle egentlig føre til at $G = F_D$, men dette viser ikke beregningene som ble gjort. Utregning av C_D ble gjort ved bruk av (4) og målt terminalfart, og deretter ble F_D kalkulert utfra (3). I begge disse brukes V^2 , og bare en liten feil i V vil da gi store utslag i F_D . I mål datatene som ble gjort, så varier farten mye mellom punktene, terminalhastigheten ble satt til gjennomsnittet av disse punktene. Dette gir ikke en helt korrekt svar, og målt terminalfart kan da variere en del fra den egentlige farten. Variasjonen mellom punktene kommer på grunn av støy. Støyet er en sum av forandringer i miljøet, det vil si temperatur forandringer, trykkforskjeller, bevegelser i lufta, ustødigheter og rotasjon i objektet og målefeil fra tracker sin side. Ettersom målt v ikke er helt nøyaktig i forhold til virkelig v er det naturlig at beregninger med v er forskjellig fra beregninger uten. Tar man dette i betraktning i tillegg til alle andre feilkilder så kan forskjellen mellom F_D og G forklares.

Menneskelige feil kan også forekomme. Siden det var en person som slapp muffinsformen med begge hender, kan dette slippet ha blitt gjort mer nøyaktig. Dersom personen ikke slapp begge hender samtidig, vil muffinsformen få et forsinket fall på den ene siden. Dette fører til vringling i horisontal retning, noe som gjør at arealen endres i luften. Dette har betydning for luftmotstanden, da det er dette arealet som blir truffet av luft. Selv om kun de stødigste slippene ble målt, kan likevel luftstrømningerstrømninger fra ventilasjonssystemet gi samme effekt, og vi velger derfor å inkludere dette som en feilkilde.

En annen eventuell menneskelig svikt er selve programmeringen av de numeriske beregningene. Selv om all kode er gjennomgått flere ganger, kan det være at en liten, men betydelig feil, er blitt oversett. Dette kan føre til at resultatet blir feil, siden formlene da ikke vil være implementert riktig.

6. Konklusjon

I starten av forsøket ble det antatt at $G = F_D$ men beregningene som ble gjort viste at F_D var noe mindre. Ved hjelp et videokamera og programmet Tracker, ble den gjennomsnittlige terminalhastigheten til en muffinsform under fritt fall målt til $(1,85 \pm 0,01)$ m/s. Programmert inn i Matlab, regnet vi oss frem til at verdien gitt ved eulers metode vil være 1,987 m/s, som gir et avvik på 7,40 %. Dragkoeffisienten ble utregnet til å bli $(0,325 \pm 0,001)$. Feilmarginen som ble regnet ut ved hjelp av Gauss' feilforplantningslov endte opp liten (0,001), derimot er feilmarginen på den målte terminalhastigheten stor der en liten feil i terminalhastigheten vil utgjøre en stor forskjell på alle verdier, noe som vil føre til at selv om vi har oppnådd terminalhastighet, vil ikke $G = F_D$.

- [2] Albert Einstein. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*. (German) [*On the electrodynamics of moving bodies*]. Annalen der Physik, 322(10):891–921, 1905.
- [3] Knuth: Computers and Typesetting, <http://www-cs-faculty.stanford.edu/~uno/abcde.html>

[1] Michel Goossens, Frank Mittelbach, and Alexander Samarin. *The L^AT_EX Companion*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1993.