

Bestemmelse av luftmotstand og terminalhastighet av muffinsform i fritt fall

A. G. Strand^a, J. Å. Sagild^a, K. Saastad^a, A. M. Sambanis^a, C. R. MacDonald^a

^aInstitutt for fysikk, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 7491 Trondheim.

Sammendrag

Målet med forsøket var å finne luftmotstand og terminalhastighet til et legeme i fritt fall. En muffinsform på 0,005 kg ble sluppet 1,8 m over bakken. Terminalhastigheten ble funnet til å være 1,854 m/s ved at fallet ble filmet og deretter analysert med programmet Tracker. Dette ble også regnet ut ved hjelp av Eulers metode, noe som resulterte i et avvik på 13,37% fra de numeriske beregningene. Etter å ha funnet dragkoeffisienten, med en usikkerhet på 0,001, ble luftmotstanden regnet ut til å være 0,0436 N. Resultatene er innenfor en relativt god feilmargin selv om de ikke var nøyaktig som ønsket.

1. Introduksjon

Fysikere har i alle år konstruert idealiserte modeller ved hjelp av antagelser og forenklinger, slik at beregninger rundt ulike eksperimenter skal være enklere å løse. En av de første dokumenterte tilfellene der en idealisert modell ble brukt, var Galileo Galilei som undersøkte legemer i fritt fall og neglisjerte luftmotstand.

Målet ved dette forsøket er å finne en mer nøyaktig beskrivelse av dette fenomenet. Dermed ble det undersøkt hvordan en muffinsform oppfører seg når man slipper den fra en gitt høyde over bakken. Farten til legemet avhenger av flere faktorer som ble tatt med i betraktning, blant annet luftmotstanden, som igjen avhenger av dragkoeffisienten. Rapporten beskriver hvordan det kvasikvalitative eksperimentet ble utført og hvordan numerisk analyse og Tracker ble brukt til å finne eksakte verdier.

2. Teori

figur 1 viser et objekt (muffinsform) med masse m . Det virker to krefter på objektet. En gravitasjonskraft G ,

$$G = mg \quad (1)$$

og en luftmotstand F_D

$$F_D = bv \quad (2)$$

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho_{\text{luft}} A v^2 \quad (3)$$

$$C_D = \frac{2mg}{A \rho_{\text{luft}} v_T^2} \quad (4)$$

hvor A og v er hennholdsvis tverrsnittsarealet og farten til objektet, ρ_{luft} er tettheten til luften og b og C_D er dimensjonsløse konstanter for dragkoeffisienten, som varierer med reynoldstallet (Re) og formen på objektet. Luftmotstand har to forskjellige formler, en lineær (2) for $Re < 2300$ og

en kvadratisk (3) for $Re > 2300$. Over 2300 vil det oppstå turbulente strømnings bak objektet og en kan da bruke (3). Denne grensen er ikke absolutt men en veiledning for bruk av de to funksjonene. Reynoldstallet (Re) er gitt ved

$$Re = \frac{VD}{\nu_{\text{luft}}} \quad (5)$$

hvor V er farten og D er diameteren til objektet, og K er den kinetiske viskositeten til luft, som er konstant, $K = 1,460 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. Ved å bruke (5) kan farten som er skille mellom linær (laminaer) og kvadratisk (turbulent) luftmotstand regnes ut.

$$V = \frac{Re \nu_{\text{luft}}}{D} = \frac{2300 \cdot 1.460 \cdot 10^{-5}}{0.045} \left[\frac{\text{m}^2/\text{s}}{\text{m}} \right] = 0.746 [\text{m/s}] \quad (6)$$

Dette gir at (3) skal brukes ved fart over 0,746 m/s mens (2) brukes for fart under 0,746 m/s. Ettersom terminalfarten er mer interessant i dette eksperimentet, og objektet når en fart på over 0,746 m/s før den treffer det målte området. I (3) er luftmotstanden proporsjonal med C_D . Ettersom F_D og C_D er ukjente kan ikke luftmotstanden regnes direkte ut fra (3).

figur 1 viser at de virker to krefter på objektet

$$\sum F_z = F_D - G \quad (7)$$

Ved terminalhastigheten er akselerasjonen lik null. Newtons 2. lov gir da

$$F_D = G \quad (8)$$

som fører til

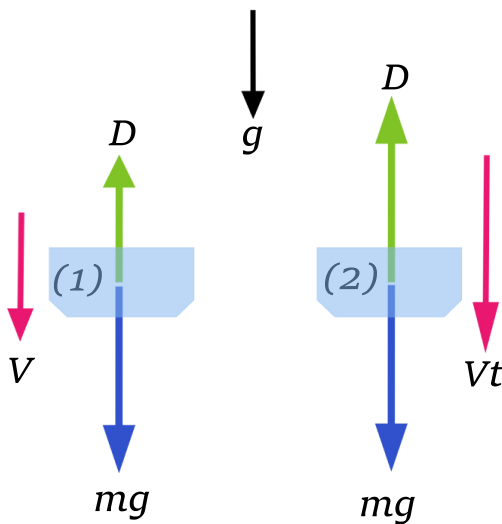
$$\frac{1}{2} C_D \rho_{\text{luft}} A v^2 = mg \quad (9)$$

C_D er den eneste ukjente i (9) og ligningen kan dermed løses. Når C_D er funnet kan (3) brukes til å regne ut luftmotstanden for objektet ved en fart over 0,746 m/s.

Uavhengig fra det fysiske forsøket skal det også gjøres analytiske beregninger. Dette gjøres ved å bruke Eulers metode, gitt ved

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{n+1} = \left(\frac{dr}{dt}\right)_n + \Delta \frac{dr}{dt} = \left(\frac{dr}{dt}\right)_n + \frac{d^2r_n}{dt^2} \Delta t \quad (10)$$

Resultatene fra det fysiske eksperimentet og de analytiske resultatene vil bli sammenlignet og diskutert i del 4. Fysiske målinger er alltid usikre i fysisk eksperimenter. Det kan ikke bevises at en målt meter er en meter etc. Forskjell i temperatur kan påvirke tettheten til lufta som igjen påvirker luftmotstanden. En forskjell på bare et par kelvin ved romtemperatur kan gi nesten en prosent forskjell i tetthet, og dermed en prosent i luftmotstand. Bevegelse i lufta vil påvirke objektets fall. Hovedsaklig vil luftstrømmninger være iforhold til horisontal planet, som kan sørge for at objektet ikke faller rett ned. Men strømmninger i vertikal planet, selv om som regel ikke like sterke, vil gi større utslag på eksperimentet ettersom målingene er fart i vertikal retningen. Perspektivet som kameraet har iforhold til fallbanen kan føre til utslag i farten. Den største usikkerheten kommer i ustødheter i objektet. Det vil si at bunnen av muffinsformen ikke står rett på fallretningen. Dette gir forskjellige tversnittsareal, som gir ulik luftmotstand som igjen bidrar til en unøyaktig terminalfart. At objektet har ustødheter og roterer smått iforhold til fartsretningen vil føre til at forskjellige deler av objektet vil ha forskjellig fart. Dette kan blant annet føre til unøyaktigheter ved bruk av Tracker.



Figur 1: Skisse av muffinsform med masse m i 2 ulike situasjoner mens den befinner seg i fritt fall:

- 1) formens tyngde mg er større enn luftmotstanden D , det vil si at formen akselererer og hastigheten V vil øke med tiden.
- 2) formens tyngde er lik luftmotstanden, som betyr at den ikke har akselerasjon og terminalhastigheten er nådd Vt .

Usikkerheten til drakoeffisienten er beregnet ved å an-

vende Gauss' feilforplantningslov. Denne formelen sjekker den deriverte i forhold til alle de andre elementene og multipliserer med usikkerheten til disse verdiene. På denne måten sjekkes usikkerheten til elementene og man kommer frem til den endelige usikkerheten som ønskes. Dette gjøres fordi det er flere elementer, som alle har hver sin usikkerhet, som inngår i formelen for luftmotstand. Dermed må alle disse bli tatt hensyn til, slik at den endelige usikkerheten blir så nøyaktig som mulig.

$$\Delta f(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2 + \dots} \quad (11)$$

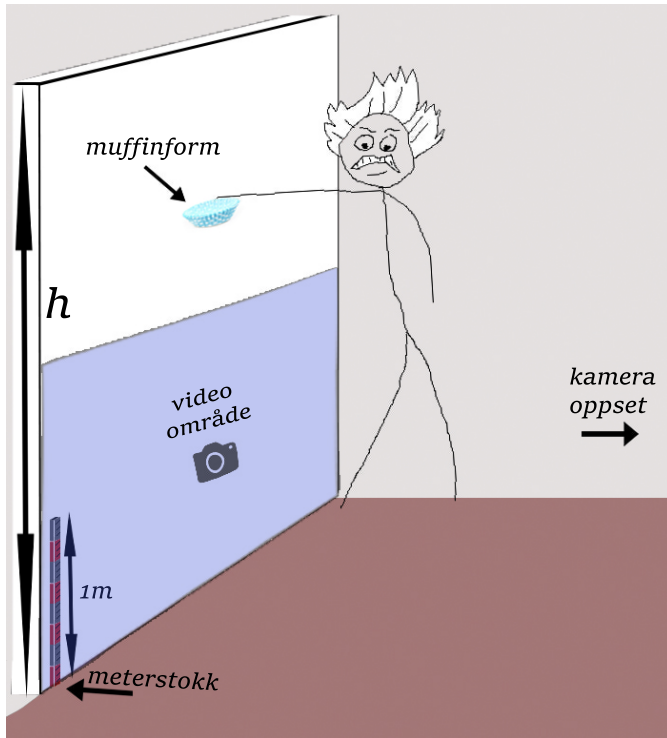
3. Eksperimentell metode

Den opprinnelige planen var å slippe et tyngre objekt, nærmere bestemt en tennisball, og bruke en fallskjerm for å øke luftmotstanden. Da eksperimentet ble utført, viste det seg at tennisballen ikke nådde terminalfarten og utførelsen av forsøket ble endret. Det ble bestemt at det skulle slippes en muffinsform, uten fallskjerm. Det eksperimentelle oppsettet vises i figur 2.

Muffinsformen veide $0,005 \text{ kg}$ og var betydelig mye lettere enn ballen, som veide $0,0585 \text{ kg}$. Dermed ble terminalfarten nådd. Radiusen til muffinsformen var $0,045 \text{ m}$, den hadde form som en avkuttet kjegle og var laget av bakepapir. Siden fallobjektet hadde en slik form, ble den mer aerodynamisk enn en flat form, og fallet ble mer stabilt.

Muffinsformen ble plassert med en høyde på $1,8 \text{ m}$ over gulvet. Den ble deretter sluppet av en person som holdt den med begge hender og den falt i fritt fall til den traff gulvet. Hele fallet ble filmet av et kamera som sto $1,5 \text{ m}$ fra slippbane (se figur 2). Det ble plassert en menterstokk hjørnet av videobildet, slik at Tracker kunne estimere høyde. Data fra filmene ble analysert i Tracker, og muffinsformens terminalhastighet ble funnet. Det ble regnet ut hvor stor drakoeffisienten var og deretter luftmotstanden muffinsformen var utsatt for gjennom fallet.

Verdiene ble målt ved hjelp av programmet Tracker, som ble brukt på filmen av fallet. Disse verdiene ble brukt for å finne resultatene ved hjelp av numeriske beregninger i MatLab. For alle MatLab-filene ble datasettene analysert og gjennomsnittsverdiene til alle variabler funnet. Disse ble brukt til å regne ut drakoeffisienten, luftmotstanden, gjennomsnittsterminalhastigheten og andre usikkerheter. For å regne ut terminalhastighetene, ble kun de siste 20 punktene i hvert datasett brukt. De første punktene var ikke relevante, da muffinsformen ikke hadde nådd terminalhastighet da. Dersom disse målingene hadde blitt inkludert, ville det gitt resultatene en større usikkerhet.



Figur 2: Skisse av oppsettet på forsøket. Det ble sluppet en muffinform fra en høyde h over gulvet. Muffinformen slippes, og fallet filmes og analyseres i Tracker. Man behøver også en metersokk som høydereferanse til analyseringen.

4. Resultater og diskusjon

Terminalhastigheten ble regnet ut for alle målingene, og ved dette brukt for å funnet den gjennomsnittlige terminalhastigheten for alle forsøkene. Under er en tabell over de endelige resultatene (usikkerheter blir tatt for seg senere).

Tabell 1: En oversikt over resultatene. Resultatet som oppgis her er regnet ut ved hjelp av gjennomsnittsverdiene fra all våre måleresultater fra tracker. I tillegg ser man farten Euler's metode (??) har gitt oss.

| C_D | F_D | G | $V_{Tracker}$ | V_{Euler} |
|-------|---------|--------|---------------|-------------|
| 0,325 | 0,0426N | 0,049N | 1,854 m/s | 1,9877 m/s |

Terminalhastigheten er hastigheten til legemet når $G = F_D$, altså når objektet har sluttet å akselerere. Som forklart i del 3 har datasettene verdier fra start til slutt, og da blir $v = (1,85 \pm 0,01) \text{ m/s}$. Som alle verdier er det alltid en usikkerhet rundt et resultat. Usikkerheten $\Delta v = 0,01$ ble funnet ved å regne ut standardavviket til den målte farten.

Generelt for usikkerhetene, vil disse diskuteres senere i rapporten. Variablene med usikkerheter er oppgitt i tabell 2.

Dragkoeffisienten C_D er en konstant som er nødvendig for å regne ut luftmotstanden (3). For å regne ut dragkoeffisienten (se 5) ble dataene fra målingene brukt. Da alle verdier brukt til å finne C_D har usikkerheter, er det viktig

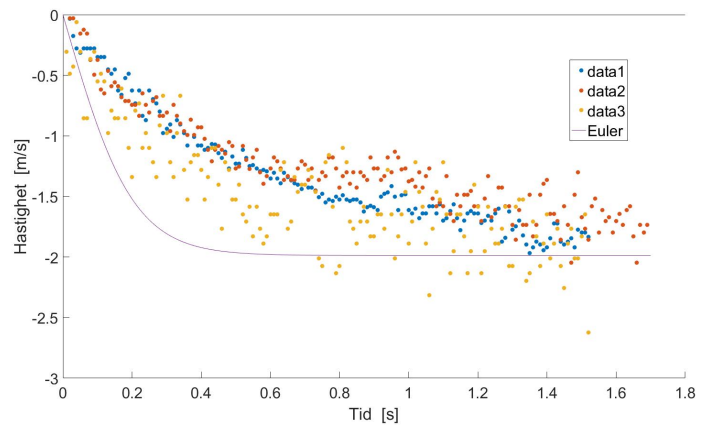
at disse blir tatt i betraktning for å vite hvor pålitelig vår beregning var. For dette ble Gauss' feilforplantningslov ?? brukt, og fant ΔC . Gauss' forplantningslov er forklart i metodeseksjonen over 3, og resultatet ga $\Delta C = 0,001$, altså blir $C_D = 0,325 \pm 0,001$.

Som sagt er dragkoeffisienten nødvendig for å finne luftmotstanden, som er, sammen med terminalhastighet, målet med forsøket. Luftmotstanden regnes ut ved å bruke formel (3) og ga resultatet $F_D = 0,0426 \text{ N}$.

Tabell 2: Oversikt over variablene med usikkerhet. Dette er viktig informasjon da mange av våre utregninger er avhengige av usikkerhetene. Disse usikkerhetene ble brukt for å ta i bruk Gauss' feilforplantning (??).

| Variable | Verdi |
|----------|---|
| C_D | $0.325 \pm 0,001$ |
| v_T | $1,85 \frac{\text{m}}{\text{s}} \pm 0.01$ |
| m | $0,005 \text{ g} \pm 0.0001$ |
| A | $0,006 \text{ m}^2 \pm 0.017$ |
| ρ | $1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \pm 0.0078$ |

Varmeforskjeller fører til trykkforskjeller, noe som er en usikkerhet å betrakte. Da det var en omtrent forskjell på 2K fra slippunkt til bakken, og temperaturen er direkte proporsjonal med trykket, blir det en feil på forholdet mellom gravitasjonen og luftmotstanden. Dette kan også bli sett fra grafen sammenlignet med euler, da terminalhastigheten stort sett er lavere enn det Euler's metode viser (se figur 2).

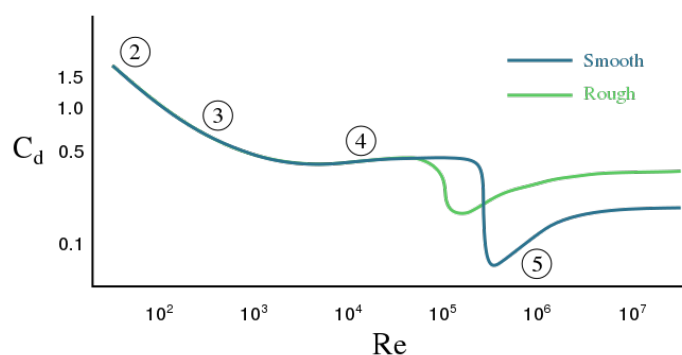


Figur 3: Her kommenterer vi resultatet

Oppgaven ber oss ta for oss en ren numerisk analyse ved bruk av Euler's metode (??). Da terminalfarten er det som var målet, har vi valgt å sette opp Euler's metode for denne variablen. Vi ønsket en illustrasjon (et plot) av hvordan den numeriske analysen av eksperimentet stemte med våre faktiske resultater (se figur 3). Resultatet viser at Euler gir en raskere terminalfart enn de målte dataene, men det vil likevel si at resultatet er en god fremstilling av formens fartsbane. Av grafen ser vi at det faktiske fallet tar

ganske mye lengre tid før den når terminalfart. Dette kommer stort av samme usikkerheter og faktorerer beskrevet over om forskjellen i F_D og G . Våre beregninger i Euler's metode er kun basert på vår kalkulasjon av dragkoeffisienten C_D , altså vil alle feil og usikkerheter i terminalfarten påvirke vår analyse.

Dragkoeffisienten vil variere med tanke på forholdet i strømmingene, som vist på bildet under (4), og dette påvirkes også av farten. Vi kan bruke denne grafen som en pekepin for å se om beregningene er innenfor riktigheten grenser. Ved at dragkoeffisienten ligger innenfor område 4 på figuren (ved $Re = 10^4$), vet vi at det er terminalfart, og dragkoeffisienten er konstant. Da figuren gjelder en total sfærisk overflate, er ikke tallene for C_D her helt korrekte, men vi kan anta at siden Euler's metode stemte såpass med våre målte data, at kravet oppfylles.



Figur 4: Punkt 2 og 3 gjelder for separert ustabil strømming. Punkt 4 for laminære strømming, og terminalfart. Punkt 5 for turbulent strømming. Kilde: https://en.wikipedia.org/wiki/Drag_coefficient

Tracker viser at objektet når terminalfart i løpet av målingene, som betyr at akselerasjonen er lik null. Dette skulle egentlig føre til at $G = F_D$, men dette viser ikke beregningene som ble gjort. Utrekning av C_D ble gjort ved bruk av (4) og målt terminalfart, og deretter ble F_D kalkulert utfra (3). I begge disse brukes V^2 , og bare en liten feil i V vil da gi store utslag i F_D . I mål datatene som ble gjort, så varier farten mye mellom punktene, terminalhastigheten ble satt til gjennomsnittet av disse punktene. Dette gir ikke en helt korrekt svar, og målt terminalfart kan da variere en del fra den egentlige farten. Variasjonen mellom punktene kommer på grunn av støy. Støyet er en sum av forandringer i miljøet, det vil si temperatur forandringer, trykkforskjeller, bevegelser i lufta, ustødigheter og rotasjon i objektet og målefeil fra tracker sin side. Ettersom målt v ikke er helt nøyaktig i forhold til virkelig v er det naturlig at beregninger med v er forskjellig fra beregninger uten. Tar man dette i betraktning i tillegg til alle andre feilkilder så kan forskjellen mellom F_D og G forklares.

Menneskelige feil kan også forekomme. Siden det var en person som slapp muffinsformen med begge hender, kan dette slippet ha blitt gjort mer nøyaktig. Dersom personen ikke slapp begge hender samtidig, vil muffinsformen få et

forsinket fall på den ene siden. Dette fører til vringling i horisontal retning, noe som gjør at arealen endres i lufta. Dette har betydning for luftmotstanden, da det er dette arealet som blir truffet av luft. Selv om kun de stødigste slippene ble målt, kan likevel luftstrømningerstrømninger fra ventilasjonssystemet gi samme effekt, og vi velger derfor å inkludere dette som en feilkilde.

En annen eventuell menneskelig svikt er selve programmeringen av de numeriske beregningene. Selv om all kode er gjennomgått flere ganger, kan det være at en liten, men betydelig feil, er blitt oversett. Dette kan føre til at resultatet blir feil, siden formlene da ikke vil være implementert riktig.

5. Konklusjon

I starten av forsøket var det antatt at $G = F_D$ men beregningene som ble gjort viste at F_D . Det ble også antatt at bevegelsen ville ligne på resultatet fra Euler's metode, som viste seg å være en ganske god tilnærming. Den gjennomsnittlige terminalhastigheten etter plottingen i tracker ble målt til å bli $1,85 \pm 0,01 m/s$ noe som ga et avvik på 13,37% fra verdien fra Euler's metode på $1,987 m/s$. Dragkoeffisienten ble utregnet til å bli $(0,325 \pm 0,001)$. Feilmarginen som ble regnet ut ved hjelp av Gauss' feilforplantningslov endte opp liten, derimot er feilmarginen på den målte terminalfarten stor da en liten feil i terminalfarten vil utgjøre en større effekt på alle verdier. Dette er grunnen til og utgjør forskjellen mellom utregnet G og F_D .