



Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

Дудка Игорь Олегович

608 группа

## **Приближённое решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в криволинейной области**

Москва

2023

## 1 Введение

Требуется приближённо решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона в криволинейной области. Задание необходимо выполнить на ПВС Московского университета IBM Polus.

## 2 Математическая постановка задачи

В области  $D \subset \mathbb{R}^2$ , ограниченной контуром  $\gamma$ , рассматривается дифференциальное уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f(x, y), \quad (1)$$

в котором оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

функция  $f(x, y)$  считается известной. Для выделения единственного решения уравнение дополняется граничным условием Дирихле (см. [1]):

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \gamma. \quad (2)$$

Требуется найти функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую уравнению (1) в области  $D$  и краевому условию (2) на ее границе.

## 3 Метод фиктивных областей

Для приближенного решения задачи (1),(2) предлагается воспользоваться методом фиктивных областей [2].

Пусть область  $D$  принадлежит прямоугольнику  $\Pi = \{(x, y) : A_1 < x < B_1, A_2 < y < B_2\}$ . Обозначим через  $\overline{D}$ ,  $\overline{\Pi}$  замыкание области  $D$  и прямоугольника  $\Pi$  соответственно, через  $\Gamma$  – границу прямоугольника. Разность множеств

$$\hat{D} = \Pi \setminus \overline{D}$$

называется фиктивной областью. Выберем и зафиксируем малое  $\varepsilon > 0$ .

В прямоугольнике  $\Pi$  рассматривается задача Дирихле

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, y) \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( k(x, y) \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= F(x, y), \\ v(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in \Gamma \end{aligned} \quad (3)$$

с кусочно-постоянным коэффициентом

$$k(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D, \\ 1/\varepsilon, & (x, y) \in \hat{D} \end{cases} \quad (4)$$

и правой частью

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \in \hat{D}. \end{cases} \quad (5)$$

Требуется найти непрерывную в  $\overline{\Pi}$  функцию  $v(x, y)$ , удовлетворяющую дифференциальному уравнению задачи (3) всюду в  $\Pi \setminus \gamma$ , равную нулю на границе  $\Gamma$  прямоугольника, и такую, чтобы вектор потока

$$W(x, y) = -k(x, y) \left( \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

имел непрерывную нормальную компоненту на общей части криволинейной границы области  $D$  и прямоугольника  $\Pi$ . Последнее означает, что в каждой точке  $(x_0, y_0) \in \gamma \cap \Pi$  должно выполняться равенство

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0), \\ (x,y) \in D}} (W(x,y), n(x_0,y_0)) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0), \\ (x,y) \in \hat{D}}} (W(x,y), n(x_0,y_0)), \quad (6)$$

где  $n(x,y)$  – вектор единичной нормали к границе  $\gamma$  в точке  $(x,y)$ , определенный всюду или почти всюду на кривой.

Известно [2], что функция  $v(x,y)$  равномерно приближает решение  $u(x,y)$  задачи (1),(2) в области  $D$ , а именно,

$$\max_{P \in \bar{D}} |v(x,y) - u(x,y)| < C\varepsilon, \quad C > 0. \quad (7)$$

В частности,  $|v(x,y)| < C\varepsilon$  во всех точках кривой  $\gamma$ . Этот результат позволяет получить искомую функцию  $u(x,y)$  с любой наперед заданной точностью  $\varepsilon > 0$ , решая задачу (3),(6) вместо задачи (1),(2). Тем самым, задача Дирихле в криволинейной области приближенно заменяется задачей Дирихле в прямоугольнике с кусочно-постоянным коэффициентом  $k(x,y)$ .

## 4 Разностная схема решения задачи

Краевые задачу (3),(6) предлагается решать численно методом конечных разностей [3]. В замыкании прямоугольника  $\bar{\Pi}$  определяется равномерная прямоугольная сетка  $\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$ , где

$$\bar{\omega}_1 = \{x_i = A_1 + ih_1, i = \overline{0, M}\}, \quad \bar{\omega}_2 = \{y_j = A_2 + jh_2, j = \overline{0, N}\}.$$

Здесь  $h_1 = (B_1 - A_1)/M$ ,  $h_2 = (B_2 - A_2)/N$ . Через  $\omega_h$  обозначим множество внутренних узлов сетки  $\bar{\omega}_h$ , т.е. множество узлов сетки прямоугольника, не лежащих на границе  $\Gamma$ .

Рассмотрим линейное пространство  $H$  функций, заданных на сетке  $\omega_h$ . Обозначим через  $w_{ij}$  значение сеточной функции  $w \in H$  в узле сетки  $(x_i, y_j) \in \omega_h$ . Будем считать, что в пространстве  $H$  задано скалярное произведение и евклидова норма

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} h_1 h_2 u_{ij} v_{ij}, \quad \|u\|_E = \sqrt{(u, u)}. \quad (8)$$

В методе конечных разностей дифференциальная задача математической физики заменяется конечно-разностной операторной задачей вида

$$Aw = B, \quad (9)$$

где  $A : H \rightarrow H$  – оператор, действующий в пространстве сеточных функций,  $B \in H$  – известная правая часть. Задача (9) называется разностной схемой. Решение этой задачи считается численным решением исходной дифференциальной задачи.

При построении разностной схемы следует аппроксимировать (приближенно заменить) все уравнения краевой задачи их разностными аналогами – сеточными уравнениями, связывающими значения искомой сеточной функции в узлах сетки. Полученные таким образом уравнения должны быть функционально независимыми, а их общее количество – совпадать с числом неизвестных, т.е. с количеством узлов сетки.

Дифференциальное уравнение задачи (3) во всех внутренних точках сетки аппроксимируется разностным уравнением

$$-\frac{1}{h_1} \left( a_{i+1j} \frac{w_{i+1j} - w_{ij}}{h_1} - a_{ij} \frac{w_{ij} - w_{i-1j}}{h_1} \right) - \frac{1}{h_2} \left( b_{ij+1} \frac{w_{ij+1} - w_{ij}}{h_2} - b_{ij} \frac{w_{ij} - w_{ij-1}}{h_2} \right) = F_{ij},$$

$$i = \overline{1, M-1}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad (10)$$

в котором коэффициенты

$$a_{ij} = \frac{1}{h_2} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} k(x_{i-1/2}, t) dt, \quad b_{ij} = \frac{1}{h_1} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} k(t, y_{j-1/2}) dt \quad (11)$$

при всех  $i = \overline{1, M}$ ,  $j = \overline{1, N}$ . Здесь полуцелые узлы

$$x_{i\pm 1/2} = x_i \pm 0.5h_1, \quad y_{j\pm 1/2} = y_j \pm 0.5h_2.$$

Правая часть разностного уравнения

$$F_{ij} = \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{\Pi_{ij}} F(x, y) dx dy, \quad \Pi_{ij} = \{(x, y) : x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}, y_{j-1/2} \leq y \leq y_{j+1/2}\} \quad (12)$$

при всех  $i = \overline{1, M-1}$ ,  $j = \overline{1, N-1}$ .

Введем обозначения правой и левой разностных производных по переменным  $x$ ,  $y$  соответственно:

$$w_{x,ij} = \frac{w_{i+1,j} - w_{i,j}}{h_1}, \quad w_{\bar{x},ij} = w_{x,i-1,j} = \frac{w_{i,j} - w_{i-1,j}}{h_1},$$

$$w_{y,ij} = \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{h_2}, \quad w_{\bar{y},ij} = w_{y,i,j-1} = \frac{w_{i,j} - w_{i,j-1}}{h_2}.$$

С учетом принятых обозначений разностное уравнение (10) можно представить в более компактном и удобном виде:

$$-(aw_{\bar{x}})_{x,ij} - (bw_{\bar{y}})_{y,ij} = F_{ij}, \quad i = \overline{1, M-1}, \quad j = \overline{1, N-1} \quad (13)$$

Краевые условия Дирихле задачи (3),(6) аппроксимируются точно равенством

$$w_{ij} = w(x_i, y_j) = 0, \quad (x_i, y_j) \in \Gamma. \quad (14)$$

Переменные  $w_{ij}$ , заданные равенством (14), исключаются из системы уравнений (13). В результате остаются неизвестными значения  $w_{ij}$  при  $i = \overline{1, M-1}$ ,  $j = \overline{1, N-1}$  и их количество совпадает с числом уравнений. Система является линейной относительно неизвестных величин и может быть представлена в виде (9) с самосопряженным и положительно определенным оператором

$$Aw = -(aw_{\bar{x}})_x - (bw_{\bar{y}})_y$$

и правой частью  $F$ , определенной равенством (12). Таким образом, построенная разностная схема (13),(14) линейна и имеет единственное решение при любой правой части (см. [5]).

**Замечание.** Интегралы (11) от кусочно-постоянной функции  $k(x, y)$  следует вычислять аналитически. Нетрудно видеть, что если отрезок, соединяющий точки  $P_{ij} = (x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$  и  $P_{ij+1} = (x_{i-1/2}, y_{j+1/2})$ , целиком расположен в области  $D$ , то  $a_{ij} = 1$ . Если же указанный отрезок находится в фиктивной области  $\hat{D}$ , то  $a_{ij} = 1/\varepsilon$ . В противном случае

$$a_{ij} = h_2^{-1}l_{ij} + (1 - h_2^{-1}l_{ij})/\varepsilon,$$

где  $l_{ij}$  – длина той части отрезка  $[P_{ij}, P_{ij+1}]$ , которая принадлежит области  $D$ . Аналогичным образом вычисляются коэффициенты  $b_{ij}$ .

Очевидно, правая часть схемы  $F_{ij}$  равна нулю при всех  $(i, j) : \Pi_{ij} \subset \hat{D}$ . Если  $\Pi_{ij} \subset D$ , то правую часть предлагается приближенно заменить значением  $f(x_i, y_j)$ . В противном случае, когда прямоугольник  $\Pi_{ij}$  содержит точки оригинальной области  $D$  и фиктивной области  $\hat{D}$ , величина  $F_{ij}$  может быть вычислена приближенно как произведение

$$(h_1 h_2)^{-1} S_{ij} f(x_i^*, y_j^*),$$

где  $(x_i^*, y_j^*)$  – любая точка пересечения  $\Pi_{ij} \cap D$ ,  $S_{ij} = \text{mes}(\Pi_{ij} \cap D)$  – площадь пересечения областей.

## 5 Метод решения системы линейных алгебраических уравнений

Приближенное решение разностной схемы (10),(14) может быть получено итерационным методом наименьших невязок [4]. Этот метод позволяет получить последовательность сеточных функций  $w^{(k)} \in H$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , сходящуюся по норме пространства  $H$  к решению разностной схемы, т.е.

$$\|w - w^{(k)}\|_E \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty.$$

Начальное приближение  $w^{(0)}$  можно выбрать любым способом, например, равным нулю во всех точках расчетной сетки.

Метод является одношаговым. Итерация  $w^{(k+1)}$  вычисляется по итерации  $w^{(k)}$  согласно равенствам:

$$w_{ij}^{(k+1)} = w_{ij}^{(k)} - \tau_{k+1} r_{ij}^{(k)}, \quad (15)$$

где невязка  $r^{(k)} = Aw^{(k)} - B$ , итерационный параметр

$$\tau_{k+1} = \frac{(Ar^{(k)}, r^{(k)})}{\|Ar^{(k)}\|_E^2}.$$

В качестве условия останова итерационного процесса следует использовать неравенство

$$\|w^{(k+1)} - w^{(k)}\|_E < \delta,$$

где  $\delta$  – положительное число, определяющее точность итерационного метода. Оценку точности приближенного решения можно проводить в других нормах пространства сеточных функций, например, в максимум норме

$$\|w\|_C = \max_{x \in \bar{\omega}_h} |w(x)|. \quad (16)$$

Константу  $\delta$  для данной задачи предлагается взять равной  $10^{-6}$ .

**Замечание.** По согласованию с преподавателем, принимающим задание, метод наименьших невязок может быть заменен любым другим методом, пригодным для решения систем линейных алгебраических уравнений с симметричной положительно определенной матрицей, таких как метод скорейшего спуска, метод сопряженных градиентов, метод Рундсона с чебышевским набором итерационных параметров [4].

## 6 Задание практикума

Требуется приближённо найти решение задачи (1), (2) для случая, когда  $f(x, y) = 1$  при всех  $(x, y) \in D$ . В моём варианте дана трапеция с вершинами в точках A(0, 0), B(3, 0), C(2, 3), D(0, 3).

Для успешного выполнения задания требуется:

1. разработать последовательный код программы, вычисляющий приближенное решение разностной схемы методом наименьших невязок, выполнить расчеты на сгущающихся сетках

$$(M, N) = (10, 10), (20, 20), (40, 40);$$

2. используя средства OpenMP, разработать параллельный код программы, вычисляющий приближенное решение разностной схемы, проверить качество работы алгоритма, выполнив расчеты на сетке  $(M, N) = (40, 40)$  на одном, четырех и шестнадцати нитях, провести сравнение с последовательным вариантом алгоритма.
3. заполнить таблицу 1 с результатами расчетов OpenMP-программы;

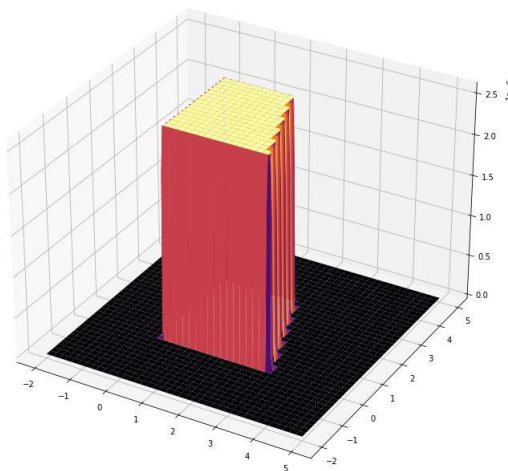
## 7 Краткое описание проделанной работы

Был реализован последовательный алгоритм и проверена его работа на сгущающихся сетках  $(M, N) = (10, 10), (20, 20), (40, 40)$ . Затем код был дополнен директивами OpenMP для распараллеливания вычислений и запущен на 1, 4 и 16 нитях. Затем было проведено тестирование на сетках  $(80, 80)$  и  $(160, 160)$  на разном количестве нитей. Результаты времени работы приведены в таблице 1.

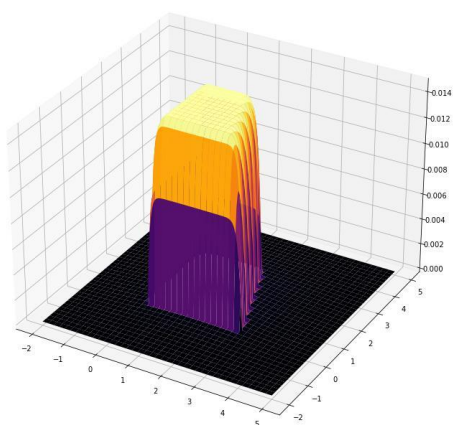
Таблица 1: Результаты расчётов на ПВС IBM Polus (последовательный и OpenMP код)

Число OpenMP-нитей	Сетка	Время решения	Ускорение
2	(80, 80)	262,68 сек	1
4	(80, 80)	149,76 сек	1,75
8	(80, 80)	80,82 сек	3,25
16	(80, 80)	46,45 сек	5,66
4	(160, 160)	793,17 сек	1
8	(160, 160)	420,98 сек	1,88
16	(160, 160)	227,72 сек	3,48
32	(160, 160)	141,97 сек	5,59

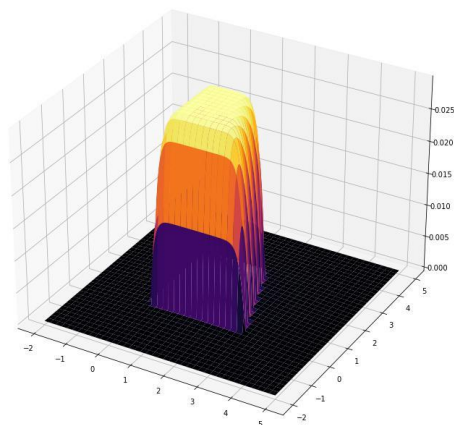
### Графики приближённого решения для сетки (160,160) на первой, промежуточных и конечной итерации



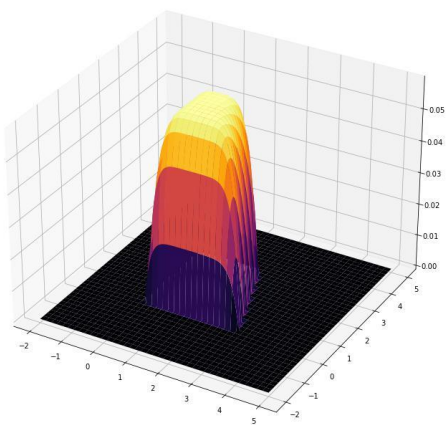
1 итерация



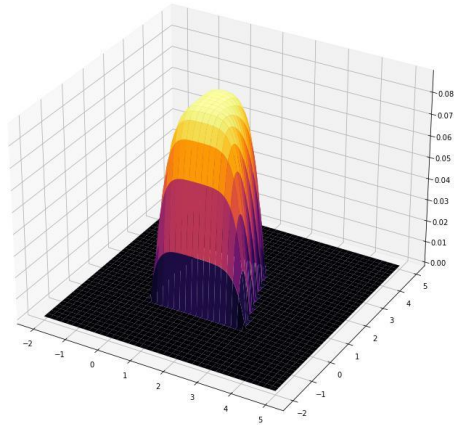
17000 итераций



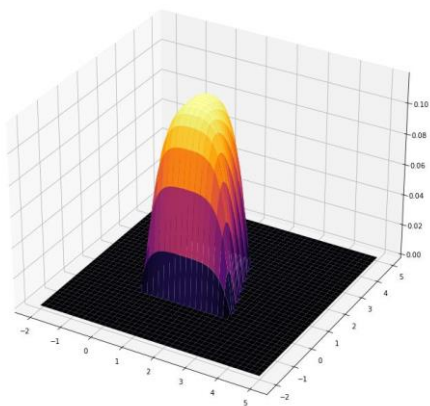
34000 итераций



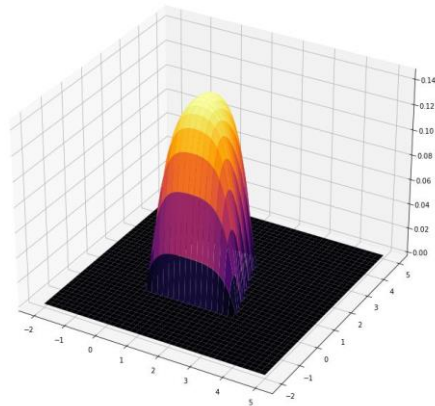
51000 итераций



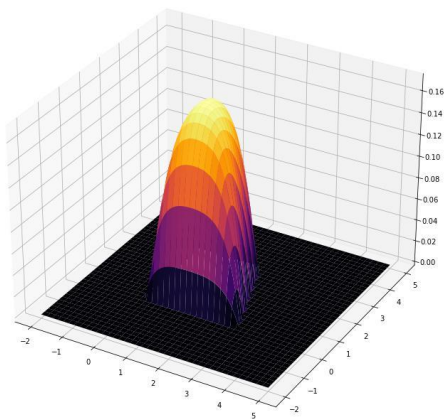
68000 итераций



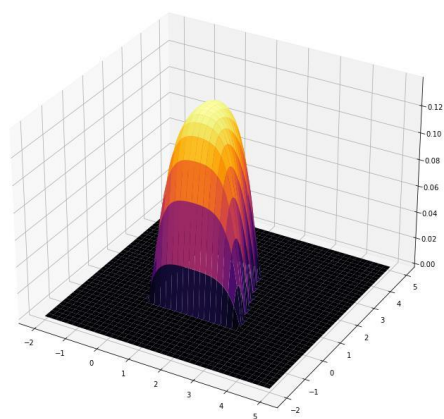
85000 итераций



102000 итераций

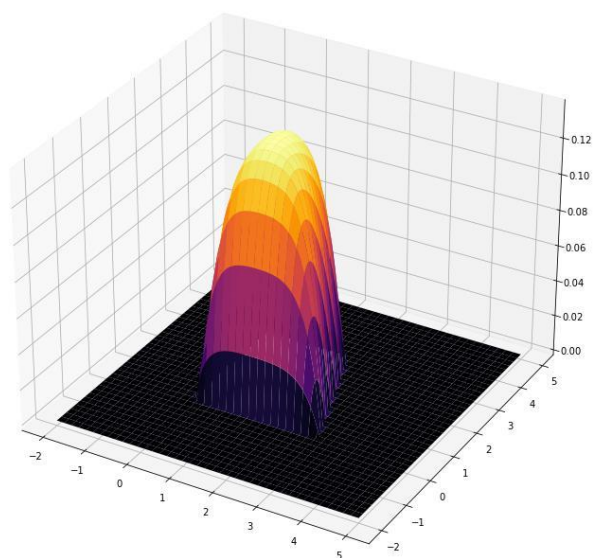


119000 итераций



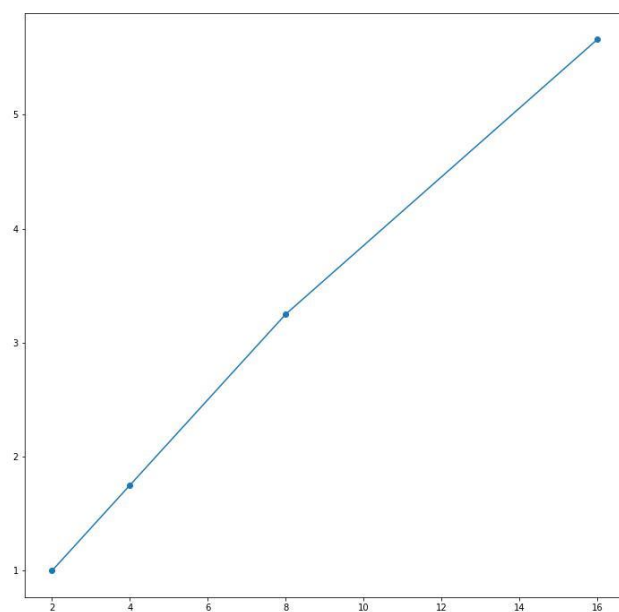
136000 итераций

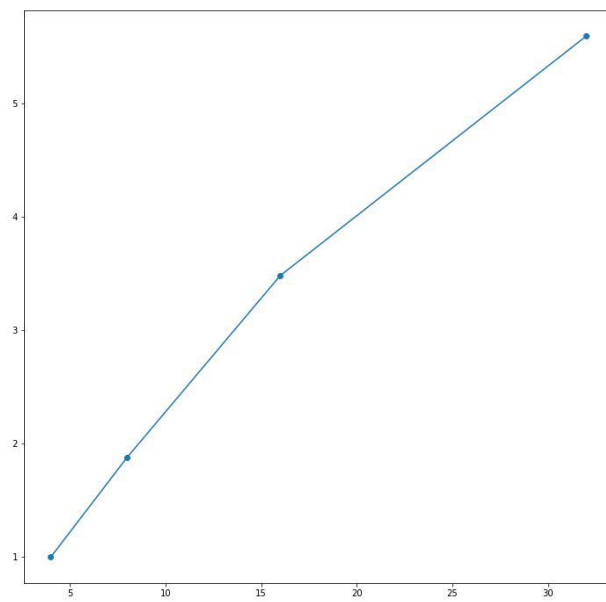




153000 итераций, окончательный вариант

**Графики ускорений для сеток (80,80) и (160, 160) соответственно**





**Графики изменения нормы невязки и нормы отклонения от правильного ответа соответственно**

