# Phân tích dữ liệu

Nguyễn Công Thịnh - 20170924

Ngày 7 tháng 3 năm 2021

**Bài 1.** Cho ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

1. $A$ có xác định dương không?
2. Tìm trị riêng và vectơ riêng, sau đó viết khai triển phổ của $A$.
3. Tìm nghịch đảo của $A$. Tìm trị riêng và vectơ riêng của ma trận đó.

**Lời giải.**

1. Ta có:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = \det[9] = 9 > 0$; $\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} = 50 > 0.$

$\Rightarrow A$ xác định dương.

2. Ta giải phương trình:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \lambda_1 = 10; \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = 5; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array} \right. \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \lambda_1 = 10; \quad e_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = 5; \quad e_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Khai triển phổ của $A$ là:

$$
\begin{aligned}
A &= \sum_{i=1}^{d} \lambda_i e_i e_i^T \\
&= \lambda_1 e_1 e_1^T + \lambda_2 e_2 e_2^T \\
&= 10 \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

3. Nghịch đảo của ma trận $A$ là:

$$
B = A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.12 & 0.04 \\ 0.04 & 0.18 \end{bmatrix}
$$

Giải phương trình:

$$
\det(B - \lambda I) = \lambda^2 - 0.3\lambda + 0.02 = 0
$$

$$
\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{1}{10}; \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = \frac{1}{5}; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array} \right.
$$

**Bài 2.** Cho ma trận:

$$
B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}
$$

1. $B$ có xác định dương không?
2. Tìm trị riêng và vectơ riêng, sau đó viết khai triển phổ của $B$.
3. Tìm nghịch đảo của $B$. Tìm trị riêng và vectơ riêng của ma trận đó.

**Lời giải.**

1. Ta có:

$$
B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}
$$

$\Delta_1 = \det [1] = 1 > 0$; $\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = -6 < 0.$

$\Rightarrow B$ không xác định dương.

2. Ta giải phương trình:

$$\det(B-\lambda I) = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 2; \quad\ \ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = -3; \ \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 2; \quad\ \ e_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = -3; \ \ e_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

Khai triển phổ của $B$ là:

$$\begin{aligned} B &= \sum_{i=1}^{d} \lambda_i e_i e_i^T \\ &= \lambda_1 e_1 e_1^T + \lambda_2 e_2 e_2^T \\ &= 2 \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} + (-3) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.6 & 1.2 \\ 1.2 & -2.4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. Nghịch đảo của ma trận $B$ là:

$$P = B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} \end{bmatrix}$$

Giải phương trình:

$$\det(P-\lambda I) = \lambda^2 - 0.3\lambda + 0.02 = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{1}{2}; \quad\ \ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = -\frac{1}{3}; \ \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

**Bài 3.** Cho ma trận

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Tính trị riêng và vectơ riêng của $C^TC$.

2. Tìm trị kỳ dị của $C$.

3. Làm lại câu a và b cho ma trận

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix}$$

**Lời giải.**

1.

$$P = C^T C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Ta giải phương trình:

$$\det(P - \lambda I) = \lambda^2 - 18\lambda + 80 = 0$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \lambda_1 = 8; \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = 10; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \lambda_1 = 2; \quad e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = -3; \quad e_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

2. Trị kỳ dị của $C$ là trị riêng của ma trận $P = C^T C = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \lambda_1 = 8 \\ \lambda_2 = 10 \end{array} \right.$$

3. Ta có ma trận

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix}$$

$$Q = D^T D = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \\ 8 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 50 & 5 \\ 50 & 100 & 10 \\ 5 & 10 & 145 \end{bmatrix}$$

Ta giải phương trình:

$$\det(Q - \lambda I) = -\lambda^3 + 270\lambda^2 - 18000\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 0; \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = 120; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \lambda_3 = 150; \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

Trị kỳ dị của $D$ là trị riêng của ma trận $Q = D^T D = \begin{bmatrix} 25 & 50 & 5 \\ 50 & 100 & 10 \\ 5 & 10 & 145 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 120 \\ \lambda_3 = 150 \end{array}\right.$$

**Bài 4.** Dạng toàn phương sau có xác định dương:

$$3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2$$

**Lời giải.**

Ma trận trong cơ sở chính tắc của dạng toàn phương là:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Theo định lý Sylvester, $A$ xác định dương khi và chỉ khi các định thức con góc trái của $A$ luôn dương.

Mà $\Delta_1 = \det [3] = 3 > 0$; $\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = 8 > 0$

Suy ra, dạng toàn phương xác định dương.

**Bài 5.** Cho X có phân phối chuẩn $N_d\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\right)$.

1. Viết tường minh $(X - \mu)^T \Sigma^{-1} (X - \mu)$.
2. Xác định đường đẳng trị mật độ ứng với xác suất 50%.

**Lời giải.**

1. Theo đề bài, ta có:

$$\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{23} & \frac{5}{23} \\ \frac{5}{23} & \frac{-2}{23} \end{bmatrix}$$

Với $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, khi đó:

$$\begin{aligned}
(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{23} & \frac{5}{23} \\ \frac{5}{23} & \frac{-2}{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{-2}{23}\left\{\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x_2-2}{1}\right)^2 - 5\sqrt{2}\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x_2-2}{1}\right)\right\} \\
&= \frac{-2}{23}\left\{\frac{x_1^2}{2} + (x_2-2)^2 - 5x_1(x_2-2)\right\}
\end{aligned}$$

2. Phương trình đẳng trị mật độ ứng với xác suất 50% thỏa mãn

$$P\left[(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu) \leq \chi_2^2(0.5)\right] = 0.5$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu) \leq \chi_2^2(0.5) = 1.39 = c^2 \\
&\Leftrightarrow \frac{-2}{23}\left\{\frac{x_1^2}{2} + (x_2-2)^2 - 5x_1(x_2-2)\right\} \leq 1.39
\end{aligned}$$

**Bài 6.** $X_1, X_2, X_3, X_4$ là các vectơ ngẫu nhiên $d$ chiều độc lập và cùng phân phối chuẩn với các tham số $\mu$ và $\Sigma$.

1. Tìm các phân phối của

$$V_1 = \frac{1}{4}X_1 - \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3 - \frac{1}{4}X_4$$

$$V_2 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{4}X_2 - \frac{1}{4}X_3 - \frac{1}{4}X_4$$

2. Tìm phân phối đồng thời của $V_1$ và $V_2$.

**Lời giải.**

1. 

Xét tổ hợp $V_1$:

$$V_1 = \frac{1}{4}X_1 - \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3 - \frac{1}{4}X_4$$

Kỳ vọng là

$$(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4})\mu = 0\mu = 0$$

Ma trận hiệp phương sai là

$$\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)\Sigma = \frac{1}{4}\Sigma$$

Xét tổ hợp $V_2$:

$$V_2 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{4}X_2 - \frac{1}{4}X_3 - \frac{1}{4}X_4$$

Kỳ vọng là

$$(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4})\mu = 0\mu = 0$$

Ma trận hiệp phương sai là

$$\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)\Sigma = \frac{1}{4}\Sigma$$

2. Ma trận hiệp phương sai của hai tổ hợp tuyến tính là

$$\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)\Sigma = 0\Sigma$$

Vậy hai vectơ $V_1$ và $V_2$ có phân phối chuẩn đồng thời $2d$ chiều và hai vectơ này độc lập.