# PHẦN ĐẠI SỐ

## Chương I. SỐ HỮU TỈ. SỐ THỰC

### §1. TẬP HỢP Q CÁC SỐ HỮU TỈ

#### A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

**1.** *Số hữu tỉ*

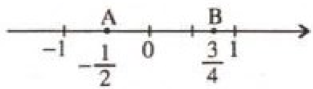
• Số hữu tỉ là số viết dưới dạng phân số $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0$.

• Tập hợp các số hữu tỉ được kí hiệu là **Q**.

**2.** *Biểu diễn các số hữu tỉ trên trục số* (h.1)

• Điểm A biểu diễn số hữu tỉ $-\frac{1}{2}$.

• Điểm B biểu diễn số hữu tỉ $\frac{3}{4}$.




Hình 1

**3.** *So sánh hai số hữu tỉ*

Để so sánh hai số hữu tỉ, ta viết chúng dưới dạng phân số rồi so sánh hai phân số đó.

• Số hữu tỉ lớn hơn 0 gọi là số hữu tỉ dương.

Số hữu tỉ nhỏ hơn 0 gọi là số hữu tỉ âm.

Số hữu tỉ 0, không là số hữu tỉ dương cũng không là số hữu tỉ âm.

• Số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ là số hữu tỉ dương nếu a và b cùng dấu, là số hữu tỉ âm nếu a, b khác dấu, bằng 0 nếu a = 0.

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

**Dạng 1.** SỬ DỤNG CÁC KÍ HIỆU $\in, \notin, \subset$, **N**, **Z**, **Q**.

### Phương pháp giải

Cần nắm vững ý nghĩa của từng kí hiệu :

- Kí hiệu $\subset$ đọc là "tập hợp con của".
- Kí hiệu **N** chỉ tập hợp các số tự nhiên.
- Kí hiệu **Z** chỉ tập hợp các số nguyên.
- Kí hiệu **Q** chỉ tập hợp các số hữu tỉ.

**Ví dụ 1.** Điền kí hiệu thích hợp vào ô trống :

a) $-\dfrac{3}{5}\ \square\ \mathbf{Z}$ ; $-\dfrac{3}{5} \in \square$ ; b) $\mathbf{N}\ \square\ \mathbf{Z} \subset \square$.

*Giải*

a) $-\dfrac{3}{5}\ \boxed{\notin}\ \mathbf{Z}$ ; $-\dfrac{3}{5} \in \boxed{\mathbf{Q}}$ ; b) $\mathbf{N}\ \boxed{\subset}\ \mathbf{Z}\ \boxed{\subset}\ \mathbf{Q}$.

**Ví dụ 2.** Khẳng định nào dưới đây là **sai** ?

(A) $\mathbf{Z} \subset \mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$ ; (B) $-47 \in \mathbf{Q}$ ;

(C) $-47 \in \mathbf{Z}$ ; (D) $\dfrac{2}{3} \notin \mathbf{Z}$.

*Giải*

Khẳng định sai là khẳng định (A) vì $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$ chứ không phải $\mathbf{Z} \subset \mathbf{N}$.

**Dạng 2.** SO SÁNH CÁC SỐ HỮU TỈ

### Phương pháp giải

- Viết các số hữu tỉ dưới dạng phân số có cùng mẫu dương rồi so sánh các tử số, phân số nào có tử số nhỏ hơn thì phân số đó nhỏ hơn.
- Có thể dùng tính chất bắc cầu.

**Ví dụ 1.** So sánh các số hữu tỉ sau :

a) $\dfrac{9}{70}$ và $\dfrac{5}{42}$ ; b) $\dfrac{-4}{27}$ và $\dfrac{10}{-63}$.

*Giải*

a) $\dfrac{9}{70}=\dfrac{27}{210}$ ; $\dfrac{5}{42}=\dfrac{25}{210}$

vì $\dfrac{27}{210}>\dfrac{25}{210}$ nên $\dfrac{9}{70}>\dfrac{5}{42}$.

b) $\dfrac{-4}{27}=\dfrac{-28}{189}$ ; $\dfrac{10}{-63}=\dfrac{-10}{63}=\dfrac{-30}{189}$

vì $\dfrac{-28}{189}>\dfrac{-30}{189}$ nên $\dfrac{-4}{27}>\dfrac{10}{-63}$.

**Ví dụ 2.** Sắp xếp các số hữu tỉ sau theo thứ tự tăng dần :

$$\frac{5}{-6};\ \frac{3}{4};\ \frac{-7}{12};\ \frac{5}{8}.$$

*Giải*

Viết các phân số đã cho dưới dạng cùng mẫu dương ta được

$$\frac{5}{-6}=\frac{-20}{24};\ \frac{3}{4}=\frac{18}{24};\ \frac{-7}{12}=\frac{-14}{24};\ \frac{5}{8}=\frac{15}{24}.$$

Vì $\dfrac{-20}{24}<\dfrac{-14}{24}<\dfrac{15}{24}<\dfrac{18}{24}$

nên $\dfrac{5}{-6}<\dfrac{-7}{12}<\dfrac{5}{8}<\dfrac{3}{4}$.

**Ví dụ 3.** So sánh các số hữu tỉ :

$$x=\frac{-2}{15};\ y=\frac{-10}{-11}.$$

*Giải*

Ta có $x=\dfrac{-2}{15}<0$ (vì tử số và mẫu số trái dấu),

$y=\dfrac{-10}{-11}>0$ (vì tử số và mẫu số cùng dấu).

Vậy $x<y$.

**Ví dụ 4.** So sánh các số hữu tỉ sau :

$$\frac{-16}{27};\ \frac{-16}{29};\ \frac{-19}{27}.$$

*Giải*

Ta có $\frac{16}{27} > \frac{16}{29}$ suy ra $\frac{-16}{27} < \frac{-16}{29}$. (1)

Mặt khác $\frac{-19}{27} < \frac{-16}{27}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{-19}{27} < \frac{-16}{27} < \frac{-16}{29}$.

**Dạng 3.** TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ MỘT SỐ HỮU TỈ : LÀ MỘT SỐ DƯƠNG, MỘT SỐ ÂM HAY LÀ MỘT SỐ NGUYÊN.

**Phương pháp giải**

- Muốn cho số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ là một số dương (hay âm) thì a và b phải có điều kiện cùng dấu (hay trái dấu).
- Muốn cho số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ là một số nguyên thì b phải là ước của a.

**Ví dụ 1.** Cho số hữu tỉ $x = \frac{a-5}{-7}$. Với giá trị nguyên nào của a thì :

a) x là số dương ;

b) x là số âm ;

c) x không là số dương và cũng không là số âm.

*Giải*

a) $x > 0 \Leftrightarrow a - 5 < 0$ (vì $-7 < 0$)

$\Leftrightarrow a < 5$ (và $a \in \mathbf{Z}$).

b) $x < 0 \Leftrightarrow a - 5 > 0$ (vì $-7 < 0$)

$\Leftrightarrow a > 5$ (và $a \in \mathbf{Z}$).

c) $x = 0 \Leftrightarrow a - 5 = 0$

$\Leftrightarrow a = 5$.

**Ví dụ 2.** Cho số hữu tỉ $x = \frac{a+11}{a}$ ($a \in \mathbf{Z}$ ; $a \neq 0$). Với giá trị nguyên nào của a thì x là một số nguyên ?

*Giải*

Ta có : $x = \dfrac{a+11}{a} = 1 + \dfrac{11}{a}$.

Ta có $x \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \dfrac{11}{a} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow a \in Ư(11) \Leftrightarrow a \in \{\pm 1 ; \pm 11\}$.

**Ví dụ 3.** Cho số hữu tỉ $x = \dfrac{3m-12}{6}$ với $m \in \mathbf{Z}$.

Tìm các giá trị của m để :

a) x là số hữu tỉ âm ;　　　　　　　　b) x là số nguyên.

*Giải*

a) Ta có : $x = \dfrac{3m-12}{6} = \dfrac{3(m-4)}{6} = \dfrac{m-4}{2}$.

Vậy $x < 0 \Leftrightarrow m - 4 < 0$ (vì $2 > 0$)

$\Leftrightarrow m < 4$ (và $m \in \mathbf{Z}$).

b) x là số nguyên $\Leftrightarrow \dfrac{m-4}{2}$ là số nguyên

$\Leftrightarrow m - 4$ là số chẵn

$\Leftrightarrow m$ là số chẵn.

## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**1.** Trong các phân số : $\dfrac{12}{27}, \dfrac{-1}{2}, \dfrac{-20}{-45}, \dfrac{16}{-36}$ phân số nào biểu diễn số hữu tỉ $\dfrac{-4}{9}$ ?

**2.** Trong các số hữu tỉ sau, số nào là số hữu tỉ âm ?

$$\frac{-3}{-8}, \frac{4}{5}, \frac{0}{-7}, \frac{-6}{13}.$$

**3.** Cho các số hữu tỉ sau :

$$x = \frac{-12}{30}, y = \frac{-3}{-7}, z = \frac{10}{-25}.$$

Khi đó trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

a) $x > y$ ;　　　　b) $y < z$ ;　　　　c) $x = z$ ;　　　　d) $z > x$.

**4.** a) Tìm số nhỏ nhất trong các số hữu tỉ sau :

$$\frac{3}{4}, \frac{-5}{7}, \frac{7}{-8}, \frac{0}{5}.$$

b) Tìm số lớn nhất trong các số hữu tỉ sau :

$$\frac{-6}{11}, \frac{6}{-13}, \frac{-9}{-17}, \frac{6}{11}.$$

**5*.** Cho $a \in \mathbf{Z}$ ; $b \in \mathbf{N}^*$, $n \in \mathbf{N}^*$. Chứng minh rằng :

a) Nếu $a < b$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+n}{b+n}$.

b) Nếu $a > b$ thì $\frac{a}{b} > \frac{a+n}{b+n}$.

c) Nếu $a = b$ thì $\frac{a}{b} = \frac{a+n}{b+n}$.

## HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**1.** $\frac{16}{-36}$.

**2.** $\frac{-6}{13}$.

**3.** a) sai ; b) sai ; c) đúng ; d) sai.

**4.** a) Số nhỏ nhất là số $\frac{7}{-8}$.

b) Số lớn nhất là số $\frac{6}{11}$.

**5.** a) $a < b \Rightarrow a.n < b.n$ (vì $n > 0$)

$$\Rightarrow an + ab < bn + ab \Rightarrow a(n + b) < b(n + a)$$

$$\Rightarrow \frac{a(n+b)}{b(n+b)} < \frac{b(n+a)}{b(n+b)} \text{ (vì } b(n + b) > 0)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+n}{b+n}.$$

b) Chứng minh tương tự.

c) Chứng minh tương tự.

# §2. CỘNG, TRỪ SỐ HỮU TỈ.
# §3. NHÂN, CHIA SỐ HỮU TỈ

## A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

**1.** Với $x = \dfrac{a}{m}$, $y = \dfrac{b}{m}$ $(a, b, m \in \mathbf{Z}, m > 0)$ ta có :

$$x + y = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m};$$

$$x - y = \frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}.$$

**2.** Với $x = \dfrac{a}{b}$, $y = \dfrac{c}{d}$ ta có :

$$x.y = \frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd};$$

$$x : y = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.c} \text{ (với } y \neq 0\text{)}.$$

**3.** Các phép toán trong **Q** cũng có những tính chất giao hoán, kết hợp và phân phối của phép nhân đối với phép cộng như trong tập hợp **Z**. Ngoài ra, các quy tắc bỏ dấu ngoặc, quy tắc chuyển vế cũng như trong tập hợp **Z**.

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### Dạng 1. CỘNG, TRỪ HAI SỐ HỮU TỈ

#### Phương pháp giải

- Viết hai số hữu tỉ dưới dạng hai phân số có cùng mẫu dương (quy đồng mẫu số).
- Cộng, trừ hai tử số và giữ nguyên mẫu chung.
- Rút gọn kết quả đến phân số tối giản.

**Ví dụ 1.** Tính :

a) $\dfrac{-3}{8} + \dfrac{-5}{12}$ ; b) $\dfrac{-3}{14} + \dfrac{4}{35}$.

*Giải*

a) $\frac{-3}{8}+\frac{-5}{12}=\frac{-9}{24}+\frac{-10}{24}=\frac{-19}{24}$ ;

b) $\frac{-3}{14}+\frac{4}{35}=\frac{-15}{70}+\frac{8}{70}=\frac{-7}{70}=\frac{-1}{10}$.

**Ví dụ 2.** Tính :

a) $\frac{11}{30}-\frac{19}{20}$ ;

b) $\frac{7}{15}-\frac{-9}{20}$.

*Giải*

a) $\frac{11}{30}-\frac{19}{20}=\frac{22}{60}-\frac{57}{60}=\frac{-35}{60}=\frac{-7}{12}$ ;

b) $\frac{7}{15}-\frac{-9}{20}=\frac{28}{60}+\frac{27}{60}=\frac{55}{60}=\frac{11}{12}$.

## Dạng 2. NHÂN, CHIA HAI SỐ HỮU TỈ

### Phương pháp giải

- Viết hai số hữu tỉ dưới dạng phân số.
- Áp dụng quy tắc nhân, chia các phân số.
- Rút gọn kết quả nếu có thể.

**Ví dụ 1.** Thực hiện phép nhân :

a) $\frac{-8}{15}.\frac{35}{-24}$ ;

b) $-30.\frac{4}{5}$.

*Giải*

a) $\frac{-18}{15}.\frac{35}{-24}=\frac{-8.35}{15.(-24)}=\frac{7}{9}$ ;

b) $-30.\frac{4}{5}=\frac{-30}{1}.\frac{4}{5}=\frac{-30.4}{1.5}=-24$.

**Ví dụ 2.** Thực hiện phép chia :

a) $\frac{42}{55}:\frac{-35}{22}$ ;

b) $\frac{9}{20}:(-18)$.

*Giải*

a) $\frac{42}{55}:\frac{-35}{22}=\frac{42}{55}.\frac{22}{-35}=-\frac{12}{25}$ ;

b) $\frac{9}{20}:(-18)=\frac{9}{20}.\frac{1}{-18}=-\frac{1}{40}$.

## Dạng 3. THỰC HIỆN CÁC PHÉP TÍNH VỚI NHIỀU SỐ HỮU TỈ

### Phương pháp giải

- Thực hiện các phép tính theo đúng quy ước thứ tự thực hiện các phép tính và theo đúng quy tắc cộng, trừ hoặc nhân, chia.
- Chú ý vận dụng các tính chất giao hoán, kết hợp, phân phối của phép nhân đối với phép cộng trong trường hợp có thể.

**Ví dụ 1.** Thực hiện các phép tính :

a) $\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{-6}{7}$ ;  b) $\frac{1}{2}+22\frac{1}{2}:\left(-\frac{3}{4}\right)$.

***Giải***

a) $\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{-6}{7}=\frac{-1}{2}+\frac{-3}{7}=\frac{-7}{14}+\frac{-6}{14}=\frac{-13}{14}$.

b) $\frac{1}{2}+22\frac{1}{2}:\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}+\frac{45}{2}.\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{2}+(-30)=-29\frac{1}{2}$.

**Ví dụ 2.** Thực hiện các phép tính :

a) $\frac{2}{15}.\frac{5}{8}-\frac{5}{6}.\frac{-2}{3}$ ;  b) $\left(\frac{41}{75}+\frac{17}{100}\right):\frac{-129}{80}$.

***Giải***

a) $\frac{2}{15}.\frac{5}{8}-\frac{5}{6}.\frac{-2}{3}=\frac{1}{12}+\frac{5}{9}=\frac{3}{36}+\frac{20}{36}=\frac{23}{36}$.

b) $\left(\frac{41}{75}+\frac{17}{100}\right):\frac{-129}{80}=\left(\frac{164}{300}+\frac{51}{300}\right).\frac{80}{-129}=\frac{215}{300}.\frac{-80}{129}=\frac{-4}{9}$.

**Ví dụ 3.** Rút gọn biểu thức $M=\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-2}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-2}$.

***Giải***

Ta có $M=\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-2}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-2}=\left(\frac{3}{12}-\frac{2}{12}-\frac{24}{12}\right):\left(\frac{4}{12}-\frac{3}{12}-\frac{24}{12}\right)$

$=\left(-\frac{23}{12}\right):\left(-\frac{23}{12}\right)=1$.

**Ví dụ 4.** Tính giá trị của các biểu thức sau bằng cách hợp lí nhất :

a) $A=\frac{7}{38}.\frac{9}{11}+\frac{7}{38}.\frac{4}{11}-\frac{7}{38}.\frac{2}{11}$ ;

b) $B=4x-4y+5xy$ với $x-y=\frac{5}{12}$ ; $xy=-\frac{1}{3}$.

*Giải*

a) Ta có $A = \frac{7}{38}.\frac{9}{11} + \frac{7}{38}.\frac{4}{11} - \frac{7}{38}.\frac{2}{11} = \frac{7}{38}.\left(\frac{9}{11} + \frac{4}{11} - \frac{2}{11}\right) = \frac{7}{38}.1 = \frac{7}{38}$.

b) $B = 4x - 4y + 5xy = 4(x - y) + 5xy = 4.\frac{5}{12} + 5.\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3} - \frac{5}{3} = 0$.

**Dạng 4.** TÌM SỐ CHƯA BIẾT TRONG MỘT ĐẲNG THỨC

**Phương pháp giải**

- Áp dụng quy tắc bỏ dấu ngoặc, quy tắc "chuyển vế".
- Vận dụng quan hệ giữa các thừa số với tích của chúng.

**Ví dụ 1.** Tìm x, biết :

a) $x - \frac{5}{18} = \frac{8}{27}$ ;

b) $\frac{-2}{3}x + 1 = -\frac{7}{9}$.

*Giải*

a) $x - \frac{5}{18} = \frac{8}{27}$

$x = \frac{8}{27} + \frac{5}{18}$

$x = \frac{31}{54}$ ;

b) $\frac{-2}{3}x + 1 = -\frac{7}{9}$

$\frac{-2}{3}.x = -\frac{7}{9} - 1$

$\frac{-2}{3}.x = -\frac{16}{9}$

$x = -\frac{16}{9} : \left(-\frac{2}{3}\right)$

$x = \frac{8}{3}$.

**Ví dụ 2.** Tìm x, biết :

a) $-\frac{7}{15}x + \frac{5}{6} = \frac{1}{4}$ ;

b) $\left(\frac{1}{4} - x\right)\left(x + \frac{2}{5}\right) = 0$.

*Giải*

a) $-\frac{7}{15}x+\frac{5}{6}=\frac{1}{4}$

$$-\frac{7}{15}x=\frac{1}{4}-\frac{5}{6}$$

$$-\frac{7}{15}x=-\frac{7}{12}$$

$$x=\left(-\frac{7}{12}\right):\left(-\frac{7}{15}\right)$$

$$x=\frac{5}{4}.$$

b) Ta có $\left(\frac{1}{4}-x\right)\left(x+\frac{2}{5}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{1}{4}-x=0\\ x+\frac{2}{5}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{4}\\ x=-\frac{2}{5}.\end{array}\right.$

**Ví dụ 3**. Tìm $x \in \mathbf{Z}$, biết :

$$\frac{11}{15}-\frac{9}{10}<x<\frac{11}{15}:\frac{9}{10}.$$

*Giải*

Ta có $\frac{11}{15}-\frac{9}{10}<x<\frac{11}{15}:\frac{9}{10}$

Suy ra $-\frac{1}{6}<x<\frac{22}{27}$.

Vì $x \in \mathbf{Z}$ nên $x = 0$.

## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**1.** Tính :

a) $\frac{6}{7}+\frac{-8}{9}$ ;  b) $\frac{-5}{21}-\frac{19}{28}$ ;  c) $\frac{13}{12}+\frac{-17}{36}-\frac{-13}{18}$.

**2.** Tính :

a) $\frac{-25}{28}.\frac{21}{100}$ ;  b) $\frac{7}{9}:\frac{-35}{12}$.

**3.** Thực hiện các phép tính sau (bằng cách hợp lí nếu có thể) :

a) $\frac{5}{31}.\frac{21}{25}+\frac{5}{31}.\frac{-7}{10}-\frac{5}{31}.\frac{9}{20}$;  b) $\left(\frac{13}{24}-\frac{29}{30}\right):\left(-\frac{51}{5}\right)$.

**4.** Tìm x, biết :

a) $\frac{10}{9}:x+\frac{7}{12}=-\frac{2}{3}$;  b) $\left(\frac{4}{15}-\frac{1}{6}\right).x=-\frac{3}{4}.\frac{8}{27}$.

**5*.** Tính : $A=\left(\frac{1}{10}-1\right)\left(\frac{1}{11}-1\right)\left(\frac{1}{12}-1\right)....\left(\frac{1}{99}-1\right)\left(\frac{1}{100}-1\right)$.

## HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**1.** a) $-\frac{2}{63}$ ;  b) $-\frac{11}{12}$ ;  c) $\frac{4}{3}$.

**2.** a) $\frac{-3}{16}$ ;  b) $\frac{-4}{15}$.

**3.** a) $-\frac{1}{20}$ ;  b) $\frac{1}{24}$.

**4.** a) $\frac{8}{9}$ ;  b) $\frac{-20}{9}$.

**5.** $A=\frac{-9}{10}.\frac{-10}{11}.\frac{-11}{12}\ ...\ \frac{-98}{99}.\frac{-99}{100}$ (tích này có 91 thừa số âm)

$=-\frac{9}{10}$.

# §4. GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ. CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA SỐ THẬP PHÂN

## A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

**1.** *Giá trị tuyệt đối* của số hữu tỉ x, kí hiệu $|x|$ là khoảng cách từ điểm x tới điểm 0 trên trục số.

Ta có : $$|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Với mọi $x \in \mathbf{Q}$, ta luôn có :

$$|x| \geq 0\ ; \quad |x| = |-x|\ ; \quad |x| \geq x.$$

**2.** Để cộng, trừ, nhân, chia các số thập phân, ta có thể viết chúng dưới dạng phân số thập phân rồi làm theo quy tắc các phép tính đã biết về phân số.

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### Dạng 1. CỘNG, TRỪ HAI SỐ THẬP PHÂN

**Phương pháp giải**

| |
|---|
| Có thể theo các quy tắc về giá trị tuyệt đối và về dấu tương tự như đối với số nguyên. |

**Ví dụ 1.** Tính :

a) $(-3,19) + (-5,21)$ ; b) $16,4 + (-20,7)$.

***Giải***

a) $(-3,19) + (-5,21) = -8,4$ ; b) $16,4 + (-20,7) = -4,3$.

**Ví dụ 2.** Tính :

a) $6,35 - 9,12$ ; b) $-25,3 - (-1,9)$

***Giải***

a) $6,35 - 9,12 = -2,77$ ; b) $-25,3 - (-1,9) = -25,3 + 1,9 = -23,4$.

## Dạng 2. NHÂN, CHIA HAI SỐ THẬP PHÂN

### Phương pháp giải

Để nhân (hoặc chia) số thập phân x với số thập phân y ta có thể lấy $|x|$ nhân (hoặc chia) với $|y|$ rồi đặt dấu "+" đằng trước nếu x và y cùng dấu, và đặt dấu "−" đằng trước nếu x và y khác dấu.

**Ví dụ 1.** Tính :

a) $(-7,13).(-2,5)$ ; b) $(-3,54).1,6$.

***Giải***

a) $(-7,13).(-2,5) = 17,825$ ; b) $(-3,54).1,6 = -5,664$.

**Ví dụ 2.** Tính :

a) $(-33,54) : 8,6$ ; b) $62,98 : (-9,4)$.

***Giải***

a) $(-33,54) : 8,6 = -3,9$ ; b) $62,98 : (-9,4) = -6,7$.

## Dạng 3. THỰC HIỆN CÁC PHÉP TÍNH VỚI NHIỀU SỐ THẬP PHÂN

### Phương pháp giải

- Thực hiện các phép tính theo đúng quy ước thứ tự thực hiện các phép tính.
- Nếu có thể thì vận dụng các tính chất giao hoán, kết hợp, phân phối của phép nhân đối với phép cộng để tính toán được hợp lí.

**Ví dụ 1.** Tính bằng cách hợp lí (nếu có thể) :

a) $(-35,8) + (+21,3) + (-17,9) + (-16,4) + (+4,6)$ ;

b) $(-49,6) + (+13,7) + (+29,6) + (-53,7)$.

***Giải***

a) $(-35,8) + (+21,3) + (-17,9) + (-16,4) + (+4,6)$

$= [(-35,8) + (-17,9) + (-16,4)] + [(+21,3) + (+4,6)]$

$= (-70,1) + (+25,9)$

$= -44,2$.

b) $(-49,6) + (+13,7) + (+29,6) + (-53,7)$

$= [(-49,6) + (+29,6)] + [(+13,7) + (-53,7)]$

$= (-20) + (-40)$

$= -60.$

**Ví dụ 2.** Tính bằng cách hợp lí :

a) $[0,25.5,2.(-4)] - [80.0,632.(-1,25)]$ ;

b) $-23,8.41,9 - 23,8.67,2 + 23,8.9,1.$

***Giải***

a) $[0,25.5,2.(-4)] - [80.0,632.(-1,25)]$

$= [0,25.(-4).5,2] - [80.(-1,25).0,632]$

$= [(-1).5,2] - [(-100).0,632]$

$= (-5,2) - (-63,2)$

$= 58.$

b) $-23,8.41,9 - 23,8.67,2 + 23,8.9,1$

$= -23,8(41,9 + 67,2 - 9,1)$

$= -23,8.100 = -2380.$

## Dạng 4. TÌM GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

### Phương pháp giải

Dựa vào định nghĩa : $|x| = \begin{cases} x \text{ nếu } x \geq 0 \\ -x \text{ nếu } x < 0. \end{cases}$

**Ví dụ 1.** Tìm giá trị tuyệt đối của các số sau :

$$\frac{-7}{9};\ 6\frac{1}{2};\ -0,481;\ 0.$$

***Giải***

$$\left|\frac{-7}{9}\right| = \frac{7}{9}\ ; \qquad \left|6\frac{1}{2}\right| = 6\frac{1}{2}\ ;$$

$$|-0,481| = 0,481\ ; \quad |0| = 0.$$

**Ví dụ 2.** Tính :

a) $\left|-\frac{2}{3}\right| - \left|-\frac{5}{3}\right|$ ; b) $|-7| + \left|\frac{2}{9}.\left(-\frac{3}{4}\right)\right|.$

*Giải*

a) $\left|-\dfrac{2}{3}\right|-\left|-\dfrac{5}{3}\right|=\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{3}=-1$ ;

b) $|-7|+\left|\dfrac{2}{9}.\left(-\dfrac{3}{4}\right)\right|=7+\dfrac{1}{6}=7\dfrac{1}{6}$.

## Dạng 5. TÌM SỐ CHƯA BIẾT TRONG ĐẲNG THỨC CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

### Phương pháp giải

> Nếu $|x| = a$ (với $a \geq 0$)
>
> thì $x = \pm a$.

**Ví dụ 1.** Tìm x, biết :

a) $|x|=\dfrac{4}{7}$ ;

b) $|x-0,9|=0,1$.

*Giải*

a) Vì $|x|=\dfrac{4}{7}$ nên $x=\pm\dfrac{4}{7}$.

b) Vì $|x-0,9|=0,1$.

Nên $x - 0,9 = \pm 0,1$.

- Xét $x - 0,9 = 0,1 \Rightarrow x = 0,1 + 0,9 \Rightarrow x = 1$.
- Xét $x - 0,9 = -0,1 \Rightarrow x = -0,1 + 0,9 \Rightarrow x = 0,8$.

Vậy $x \in \{1;\ 0,8\}$.

**Ví dụ 2.** Tìm x, biết :

a) $\left|5x+\dfrac{3}{4}\right|-\dfrac{5}{4}=2$ ;

b) $8-\left|x-\dfrac{1}{3}\right|=9$.

*Giải*

a) Ta có $\left|5x+\dfrac{3}{4}\right|-\dfrac{5}{4}=2$ suy ra $\left|5x+\dfrac{3}{4}\right|=2+\dfrac{5}{4}$,

hay $\left|5x+\dfrac{3}{4}\right|=\dfrac{13}{4}$.

• Xét $5x + \frac{3}{4} = \frac{13}{4} \Rightarrow 5x = \frac{13}{4} - \frac{3}{4} \Rightarrow 5x = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

• Xét $5x + \frac{3}{4} = \frac{-13}{4} \Rightarrow 5x = \frac{-13}{4} - \frac{3}{4} = -4 \Rightarrow x = \frac{-4}{5}$.

Vậy $x \in \left\{\frac{1}{2}; \frac{-4}{5}\right\}$.

b) Ta có $8 - \left|x - \frac{1}{3}\right| = 9$ suy ra $\left|x - \frac{1}{3}\right| = 8 - 9$,

hay $\left|x - \frac{1}{3}\right| = -1$.

Không tồn tại x để $\left|x - \frac{1}{3}\right| = -1$ (vì $|a| \geq 0$).

## Dạng 6. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

### Phương pháp giải

Dựa vào các tính chất : $|A| \geq 0$ ; $-|A| \leq 0$

(dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi A = 0).

**Ví dụ 1.** Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau :

a) $|x + 1,5|$ ;  b) $|x - 2| - \frac{9}{10}$.

***Giải***

a) Ta có $|x + 1,5| \geq 0$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|x + 1,5|$ là 0.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|x + 1,5|$ là 0 khi x + 1,5 = 0 hay x = −1,5.

Ta viết $\min|x + 1,5| = 0$ khi x = −1,5.

b) Ta có $|x - 2| \geq 0$.

Suy ra $|x - 2| - \frac{9}{10} \geq -\frac{9}{10}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|x - 2| - \frac{9}{10}$ là $-\frac{9}{10}$ khi $x = 2$.

**Ví dụ 2.** Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau :

a) $-|2x-1|$ ; b) $4-|5x+3|$.

***Giải***

a) Ta có $-|2x-1| \le 0$.

Do đó giá trị lớn nhất của biểu thức $-|2x-1|$ là 0.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $-|2x-1|$ là 0 khi $2x-1=0$ hay $x=\frac{1}{2}$.

Ta viết $\max\left(-|2x-1|\right)=0$ khi $x=\frac{1}{2}$.

b) Ta có $|5x+3| \ge 0$.

Suy ra $4-|5x+3| \le 4$.

Do đó $\max(4-|5x+3|)=4$ khi $x=-\frac{3}{5}$.

## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**1.** Tính :

a) $\frac{-25}{28}.0,21$ ; b) $\left(\frac{13}{24}-\frac{29}{30}\right):(-10,2)$.

**2.** Tính giá trị tuyệt đối của các số sau :

$0$ ; $-\frac{3}{7}$ ; $\frac{-4}{-9}$ ; $-7,2$.

**3.** Tìm x, biết :

a) $|x|=\frac{10}{13}$ ; b) $\left|x-\frac{5}{6}\right|=\frac{1}{2}$ ; c) $\left|x+\frac{4}{9}\right|-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

**4*.** Tìm x và y, biết rằng :

$$\left|x-\frac{4}{11}\right|+|5+y|=0.$$

**5.** a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|x-0,4|+9$ ;

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\frac{1}{8}-|x+3|$.

## HƯỚNG DẪN– ĐÁP SỐ

**1.** a) $-\frac{3}{16}$ ;  b) $\frac{1}{24}$.

**2.** $0 ; \frac{3}{7}; \frac{4}{9}; 7{,}2$.

**3.** a) $x = \pm\frac{10}{13}$ ;  b) $x \in \left\{\frac{4}{3} ; \frac{1}{3}\right\}$ ;  c) $x \in \left\{\frac{14}{9} ; -\frac{22}{9}\right\}$.

**4.** a) Ta có $\left|x - \frac{4}{11}\right| \geq 0$ ; $|5 + y| \geq 0$ mà $\left|x - \frac{4}{11}\right| + |5 + y| = 0$

nên $\left|x - \frac{4}{11}\right| = 0$ và $|5 + y| = 0$.

Suy ra $x = \frac{4}{11}$ và $y = -5$.

**5.** a) Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|x - 0{,}4| + 9$ là 9 khi $x = 0{,}4$.

b) Giá trị lớn nhất của biểu thức $\frac{1}{8} - |x + 3|$ là $\frac{1}{8}$ khi $x = -3$.

# §5, §6. LUỸ THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

## A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

**1.** *Luỹ thừa với số mũ tự nhiên*

$$x^n = \underbrace{x.x.....x}_{\text{n thừa số}} \quad (x \in \mathbf{Q} ; n \in \mathbf{N} ; n > 1).$$

*Quy ước :*
$$x^1 = x$$
$$x^0 = 1 \ (x \neq 0).$$

**2.** *Các phép tính về luỹ thừa*

- $x^m.x^n = x^{m+n}$
- $x^m : x^n = x^{m-n}$ $(x \neq 0; m \geq n)$
- $(x^m)^n = x^{m.n}$
- $(x.y)^n = x^n.y^n$
- $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$ $(y \neq 0)$.

## B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### Dạng 1. TÍNH GIÁ TRỊ CỦA MỘT LUỸ THỪA HOẶC VIẾT MỘT SỐ DƯỚI DẠNG LUỸ THỪA

**Phương pháp giải**

> Vận dụng định nghĩa của luỹ thừa :
>
> $x^n = \underbrace{x.x.....x}_{\text{n thừa số}}$ $(x \in \mathbf{Q}\ ;\ n \in \mathbf{N}\ ;\ n > 1)$.

**Ví dụ 1.** Tính :

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ ;  b) $(-0,5)^2$ ;  c) $\left(-1\frac{1}{4}\right)^3$.

***Giải***

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$ ;  b) $(-0,5)^2 = 0,25$ ;  c) $\left(-1\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{-5}{4}\right)^3 = \frac{-125}{64}$.

*Lưu ý :* • Luỹ thừa bậc chẵn của một số âm là một số dương.

• Luỹ thừa bậc lẻ của một số âm là một số âm.

**Ví dụ 2.** Tính :

a) $(-1).(-1)^2.(-1)^3.(-1)^4\ldots(-1)^9.(-1)^{10}$ ;

b) $\left[\frac{1}{100} - 1^2\right].\left[\frac{1}{100} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right].\left[\frac{1}{100} - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right]\ldots\left[\frac{1}{100} - \left(\frac{1}{20}\right)^2\right]$.

***Giải***

a) $(-1).(-1)^2.(-1)^3.(-1)^4\ldots(-1)^9.(-1)^{10}$

$= (-1).(+1).(-1).(+1)\ldots(-1).(+1)$ (tích này có 5 thừa số âm)

$= -1$.

b) $\left[\frac{1}{100} - 1^2\right].\left[\frac{1}{100} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right].\left[\frac{1}{100} - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right]\ldots\left[\frac{1}{100} - \left(\frac{1}{20}\right)^2\right]$

$= \left[\frac{1}{100} - 1^2\right].\left[\frac{1}{100} - \frac{1}{4}\right].\left[\frac{1}{100} - \frac{1}{9}\right]\ldots\left[\frac{1}{100} - \frac{1}{100}\right]\ldots\left[\frac{1}{100} - \frac{1}{400}\right] = 0.$

**Ví dụ 3.** Viết các số hữu tỉ sau dưới dạng luỹ thừa của một số :

a) $\frac{-27}{125}$ ;  b) $\frac{16}{81}$.

***Giải***

a) $\frac{-27}{125} = \left(-\frac{3}{5}\right)^3$ ;  b) $\frac{16}{81} = \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \left(-\frac{4}{9}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right)^4$.

## Dạng 2. TÍNH TÍCH, TÍNH THƯƠNG CỦA HAI LUỸ THỪA CÙNG CƠ SỐ VÀ TÍNH LUỸ THỪA CỦA MỘT LUỸ THỪA

### Phương pháp giải

Áp dụng các công thức :

(1) $x^m.x^n = x^{m+n}$

(2) $x^m : x^n = x^{m-n}$ $(x \neq 0, m \geq n)$

(3) $\left(x^m\right)^n = x^{m.n}$.

Có nhiều khi công thức (3) được dùng theo chiều ngược lại :

$$x^{m.n} = \left(x^m\right)^n.$$

**Ví dụ 1.** Tính :

a) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3.\left(-\frac{1}{3}\right)^2.\left(-\frac{1}{3}\right)$ ;  b) $2^7 : 2^4$ ; $2^4 : 2^7$ ;  c) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2$.

***Giải***

a) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3.\left(-\frac{1}{3}\right)^2.\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}$.

b) $2^7 : 2^4 = 2^3 = 8$ ;  $2^4 : 2^7 = 2^{4-7} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

c) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$.

**Ví dụ 2.** Có bao nhiêu cách biểu diễn số $5^{12}$ dưới dạng $(5^m)^n$ với m, n là các số tự nhiên khác 1?

*Giải*

Ta có $5^{12} = (5^2)^6 = (5^3)^4 = (5^4)^3 = (5^6)^2$.

Vậy có bốn cách biểu diễn số $5^{12}$ dưới dạng luỹ thừa của một luỹ thừa với các số mũ tự nhiên khác 1.

**Ví dụ 3.** Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\dfrac{8^5}{4^7}$ ;　　　　b) $\dfrac{49^2.7^8}{98.7^9}$.

*Giải*

a) $\dfrac{8^5}{4^7} = \dfrac{(2^3)^5}{(2^2)^7} = \dfrac{2^{15}}{2^{14}} = 2$ ;　　　b) $\dfrac{49^2.7^8}{98.7^9} = \dfrac{(7^2)^2.7^8}{2.7^2.7^9} = \dfrac{7^{12}}{2.7^{11}} = \dfrac{7}{2} = 3{,}5$.

**Ví dụ 4.** Chứng minh rằng :

a) Số $11^6 - 11^5 + 11^4$ chia hết cho 111 ;

b) Số $16^5 + 2^{19} - 8^6$ chia hết cho 10.

*Giải*

a) Ta có $11^6 - 11^5 + 11^4 = 11^4(11^2 - 11 + 1) = 11^4.111 \vdots 111$.

b) Ta có $16^5 + 2^{19} - 8^6 = (2^4)^5 + 2^{19} - (2^3)^6$

$= 2^{20} + 2^{19} - 2^{18} = 2^{18}(2^2 + 2 - 1)$

$= 2^{18}.5 = 2^{17}.10 \vdots 10$.

**Ví dụ 5.** Rút gọn biểu thức rồi viết kết quả dưới dạng luỹ thừa của một số :

$$M = 3^{-2}.\left[\left(\frac{2}{3}\right)^7 + \left(\frac{2}{3}\right)^7 + \left(\frac{2}{3}\right)^7 + \left(\frac{2}{3}\right)^7 + \left(\frac{2}{3}\right)^7 + \left(\frac{2}{3}\right)^7\right].$$

*Giải*

$$M = \frac{1}{3^2}.6.\left(\frac{2}{3}\right)^7 = \frac{2}{3}.\left(\frac{2}{3}\right)^7 = \left(\frac{2}{3}\right)^8.$$

## Dạng 3. TÍNH LUỸ THỪA CỦA MỘT TÍCH, LUỸ THỪA CỦA MỘT THƯƠNG

**Phương pháp giải**

Áp dụng các công thức :

- $(x.y)^n = x^n.y^n$
- $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$　$(y \neq 0)$.

Các công thức trên còn được sử dụng theo chiều ngược lại.

**Ví dụ 1**. Viết các luỹ thừa sau dưới dạng tích hoặc thương của các luỹ thừa :

a) $\left(5.\dfrac{3}{7}\right)^4$ ; b) $\left(\dfrac{2}{3}:\dfrac{5}{6}\right)^3$.

***Giải***

a) $\left(5.\dfrac{3}{7}\right)^4 = 5^4.\left(\dfrac{3}{7}\right)^4$ ; b) $\left(\dfrac{2}{3}:\dfrac{5}{6}\right)^3 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3:\left(\dfrac{5}{6}\right)^3$.

**Ví dụ 2**. Tính bằng cách hợp lí nhất :

a) $(0,125)^3.512$ ; b) $\dfrac{230^5}{23^5}$.

***Giải***

a) $(0,125)^3.512 = (0,125)^3.8^3 = (0,125.8)^3 = 1^3 = 1$.

b) $\dfrac{230^5}{23^5} = \left(\dfrac{230}{23}\right)^5 = 10^5 = 100000$.

**Ví dụ 3**. Viết biểu thức sau dưới dạng luỹ thừa của một số :

a) $\dfrac{21^{30}}{63^{15}}$ ; b) $\dfrac{28^9.30^9}{105^9}$.

***Giải***

a) Ta có $\dfrac{21^{30}}{63^{15}} = \dfrac{(3.7)^{30}}{\left(3^2.7\right)^{15}} = \dfrac{3^{30}.7^{30}}{3^{30}.7^{15}} = 7^{15}$.

b) $\dfrac{28^9.30^9}{105^9} = \left(\dfrac{28.30}{105}\right)^9 = \left(\dfrac{2^2.7.15.2}{7.15}\right)^9 = \left(2^3\right)^9 = 2^{27}$.

**Ví dụ 4.** Tính giá trị của các biểu thức sau :

a) $\dfrac{\left(5^5-5^4\right)^3}{50^6}$ ; b) $\dfrac{32^3.9^5}{8^3.6^6}$.

***Giải***

a) Ta có $\dfrac{\left(5^5-5^4\right)^3}{50^6} = \dfrac{\left[5^4(5-1)\right]^3}{\left(2.5^2\right)^6} = \dfrac{5^{12}.4^3}{2^6.5^{12}} = \dfrac{\left(2^2\right)^3}{2^6} = 1$.

b) Ta có $\dfrac{32^3.9^5}{8^3.6^6} = \dfrac{\left(2^5\right)^3.\left(3^2\right)^5}{\left(2^3\right)^3.(2.3)^6} = \dfrac{2^{15}.3^{10}}{2^9.2^6.3^6} = 3^4 = 81$.

## Dạng 4. TÌM CƠ SỐ, TÌM SỐ MŨ CỦA MỘT LUỸ THỪA

### Phương pháp giải

Có thể sử dụng các tính chất được thừa nhận dưới đây :

- Với $a \neq 0$; $a \neq \pm 1$, nếu $a^m = a^n$ thì $m = n$.
- Với $n \in \mathbf{N}$ ; $n \geq 1$, nếu $a^n = b^n$ thì :

$a = b$ nếu n lẻ;

$a = \pm b$ nếu n chẵn.

**Ví dụ 1.** Tìm số tự nhiên n, biết :

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{8}{27}$ ;  b) $3^{n+1} = 9^2$.

***Giải***

a) Ta có $\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{8}{27}$, suy ra $\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^3$.

Do đó $n = 3$.

b) Ta có $3^{n+1} = 9^2$, suy ra $3^{n+1} = \left(3^2\right)^2$ hay $3^{n+1} = 3^4$.

Do đó $n + 1 = 4 \Rightarrow n = 3$.

**Ví dụ 2.** Tìm số tự nhiên n, biết :

a) $\frac{625}{5^n} = 5^3$ ;  b) $\frac{(-2)^n}{-128} = 4$.

***Giải***

a) Ta có $\frac{625}{5^n} = 5^3$, suy ra $\frac{5^4}{5^n} = 5^3$.

Ta được $5^{4-n} = 5^3$.

Suy ra $4 - n = 3$ hay $n = 1$.

b) Ta có $\frac{(-2)^n}{-128} = 4$, suy ra $\frac{(-2)^n}{(-2)^7} = (-2)^2$.

Ta được $(-2)^{n-7} = (-2)^2$.

Do đó $n - 7 = 2$ hay $n = 9$.

**Ví dụ 3.** Cho biết $32 < 2^n < 512$ $(n \in \mathbf{N})$.

Tìm tập hợp các giá trị của n.

***Giải***

Ta có $32 < 2^n < 512$ $(n \in \mathbf{N})$,

suy ra $2^5 < 2^n < 2^9$.

Do đó $n \in \{6, 7, 8\}$.

**Ví dụ 4.** Tìm x, biết rằng $(x + 1)^3 = 216$.

***Giải***

Ta có $(x + 1)^3 = 216$,

suy ra $(x + 1)^3 = 6^3$.

Do đó $x + 1 = 6 \Rightarrow x = 5$.

**Ví dụ 5.** Tìm x, biết rằng $(x - 1)^4 = 16$.

***Giải***

Ta có $(x - 1)^4 = 16$ mà $16 = (\pm 2)^4$.

Nên $(x - 1)^4 = (\pm 2)^4$

- Xét $(x - 1)^4 = 2^4 \Rightarrow x - 1 = 2$ do đó $x = 3$ ;
- Xét $(x - 1)^4 = (-2)^4 \Rightarrow x - 1 = -2$ do đó $x = -1$.

Vậy $x \in \{-1 ; 3\}$.

## Dạng 5. SO SÁNH HAI LUỸ THỪA

### Phương pháp giải

| Có thể đưa về so sánh hai luỹ thừa cùng số mũ hoặc cùng cơ số. |
|---|

**Ví dụ 1.** So sánh $5^6$ và $(-2)^{14}$.

***Giải***

Ta có $5^6 = (5^3)^2 = 125^2$.

$(-2)^{14} = 2^{14} = (2^7)^2 = 128^2$.

Vì $125^2 < 128^2$ nên $5^6 < (-2)^{14}$.

**Ví dụ 2**. So sánh $9^5$ và $27^3$.

***Giải***

Ta có $9^5 = (3^2)^5 = 3^{10}$;

$27^3 = (3^3)^3 = 3^9$.

Vì $3^{10} > 3^9$ nên $9^5 > 27^3$.

*Nhận xét :* Khi cơ số $a > 1$ và $m > n > 0$ thì $a^m > a^n$.

**Ví dụ 3**. So sánh $\left(\frac{1}{8}\right)^6$ và $\left(\frac{1}{32}\right)^4$.

***Giải***

Ta có $\left(\frac{1}{8}\right)^6 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^{18}$;

$\left(\frac{1}{32}\right)^4 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$.

Vì $\left(\frac{1}{2}\right)^{18} > \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ nên $\left(\frac{1}{8}\right)^6 > \left(\frac{1}{32}\right)^4$.

*Nhận xét :* Khi $0 < a < 1$ và $m > n > 0$ thì $a^m < a^n$.

## C. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**1.** Tính : $\left(-2\frac{1}{3}\right)^2$; $(-0,75)^3$; $2^{-3}$.

**2.** Viết các số sau dưới dạng luỹ thừa của một số :

$$-\frac{8}{27};\quad \frac{81}{625}.$$

**3.** Tính :

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 . \left(-\frac{1}{2}\right)^2 . \frac{1}{2}$;  b) $(-5)^7 : (-5)^5$;  c) $(3^2)^3$.

**4.** Viết các tích sau dưới dạng luỹ thừa của một số :

a) $27.81$ ; b) $\frac{2}{5}.\frac{8}{125}.\frac{16}{625}$.

**5.** Tìm số tự nhiên n, biết :

a) $5^n = 125$ ; b) $\left(\frac{3}{7}\right)^n = \frac{81}{2401}$.

**6*.** Tìm x, biết :

a) $x^5 = x^3$ ; b) $\left(x - \frac{4}{11}\right)^3 = 343$.

**7*.** So sánh $2^{20}$ và $3^{12}$.

## HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**1.** $\frac{49}{9}$; $-\frac{27}{64}$; $\frac{1}{8}$.

**2.** $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$; $\left(\pm\frac{3}{5}\right)^4$.

**3.** a) $\frac{1}{64}$; b) 25 ; c) 729.

**4.** a) $3^7$ ; b) $\left(\frac{2}{5}\right)^8$.

**5.** a) $n = 3$ ; b) $n = 4$.

**6*.** a) $x^5 = x^3 \Leftrightarrow x^5 - x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x^2 - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$$

b) $x = 7\frac{4}{11}$.

**7*.** Ta có $2^{20} = (2^5)^4 = 32^4$; $3^{12} = (3^3)^4 = 27^4$.

Vì $32^4 > 27^4$ nên $2^{20} > 3^{12}$.

# §7. TỈ LỆ THỨC

## A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

**1.** *Định nghĩa*

Tỉ lệ thức là đẳng thức của hai tỉ số.

Dạng tổng quát : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ hoặc a : b = c : d.

Các số a và d gọi là ngoại tỉ ; các số b và c gọi là trung tỉ.

**2.** *Tính chất của tỉ lệ thức*

• Tính chất cơ bản : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \quad (b, d \neq 0)$.

• Tính chất hoán vị : Từ một tỉ lệ thức ta có thể :

– Đổi chỗ hai ngoại tỉ cho nhau ;

– Đổi chỗ hai trung tỉ cho nhau ;

– Vừa đổi chỗ hai ngoại tỉ, vừa đổi chỗ hai trung tỉ.

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

**Dạng 1.** THAY TỈ SỐ GIỮA CÁC SỐ HỮU TỈ BẰNG TỈ SỐ GIỮA CÁC SỐ NGUYÊN

### Phương pháp giải

• Viết các số hữu tỉ dưới dạng phân số.

• Thực hiện phép chia phân số.

**Ví dụ 1.** Thay tỉ số giữa hai số hữu tỉ bằng tỉ số giữa hai số nguyên :

a) 0,45 : 1,35 ; b) $\frac{3}{2} : \frac{9}{16}$.

*Giải*

a) $0{,}45 : 1{,}35 = \frac{45}{100} : \frac{135}{100} = \frac{1}{3}$. b) $\frac{3}{2} : \frac{9}{16} = \frac{3}{2} . \frac{16}{9} = \frac{8}{3}$.

**Ví dụ 2.** Thay các tỉ số sau bằng tỉ số giữa các số nguyên :

a) $5\frac{1}{4}:5\frac{5}{6}$ ; b) $25,5:1\frac{9}{42}$.

***Giải***

a) $5\frac{1}{4}:5\frac{5}{6}=\frac{21}{4}:\frac{35}{6}=\frac{9}{10}$. b) $25,5:1\frac{9}{42}=\frac{255}{10}:\frac{51}{42}=21:1$.

**Dạng 2.** LẬP TỈ LỆ THỨC TỪ CÁC SỐ CHO TRƯỚC

**Phương pháp giải**

> • Trước hết lập đẳng thức a.d = b.c.
>
> • Sau đó suy ra tỉ lệ thức $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ rồi có thể hoán vị thành ba tỉ lệ thức khác.
>
> Nếu đã cho trước các tỉ số thì ta chọn ra các cặp tỉ số bằng nhau để lập thành tỉ lệ thức rồi hoán vị thành những tỉ lệ thức khác.

**Ví dụ 1 :** Lập một tỉ lệ thức từ các tỉ số sau :

$$3:11\ ;\ 0,75:2\frac{1}{2}\ ;\ 4\frac{1}{5}:14.$$

***Giải***

$$3:11=\frac{3}{11}\ ;0,75:2\frac{1}{2}=\frac{3}{4}:\frac{5}{2}=\frac{3}{10};\ 4\frac{1}{5}:14=\frac{21}{5}:14=\frac{3}{10}.$$

Do đó ta có tỉ lệ thức $0,75:2\frac{1}{2}=4\frac{1}{5}:14$.

**Ví dụ 2.** Từ bốn số −2 ; 3 ; 4 ; −6 có thể lập được một tỉ lệ thức không? Nếu có, hãy lập tất cả các tỉ lệ thức từ bốn số đó.

***Giải***

Ta có (−2).(−6) = 3.4. Do đó $\frac{-2}{3}=\frac{4}{-6}$. (1)

Từ (1), hoán vị ta được ba tỉ lệ thức khác là :

$\frac{-6}{3}=\frac{4}{-2}$ (2) ; $\frac{-2}{4}=\frac{3}{-6}$ (3) ; $\frac{-6}{4}=\frac{3}{-2}$. (4)

**Ví dụ 3.** Cho năm số 3 ; 4 ; $4\frac{1}{2}$ ; 5 ; 6. Hãy chọn ra bốn số để lập thành tất cả các tỉ lệ thức có thể có.

*Giải*

Ta có 3.6 = 4.4,5 (= 18).

Từ bốn số này ta có thể lập thành các tỉ lệ thức sau :

$\frac{3}{4}=\frac{4,5}{6}$ (1) ; $\frac{6}{4}=\frac{4,5}{3}$ (2) ; $\frac{3}{4,5}=\frac{4}{6}$ (3) ; $\frac{6}{4,5}=\frac{4}{3}$ (4).

**Ví dụ 4.** Cho sáu số 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; $4\frac{1}{2}$ ; 6. Hãy lập bộ bốn số trong sáu số đó sao cho mỗi bộ bốn số này có thể lập thành một tỉ lệ thức. Với mỗi bộ bốn số hãy lập thành một tỉ lệ thức.

*Giải*

Ta có thể lập được tất cả ba bộ bốn số mà mỗi bộ bốn số này có thể lập thành một tỉ lệ thức.

Đó là : (1) $(1;2;3;6) \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ ;

(2) $(2;3;4;6) \Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ ;

(3) $(3;4;4\frac{1}{2};6) \Rightarrow \frac{3}{4}=\frac{4,5}{6}$.

## Dạng 3. TÌM SỐ HẠNG CHƯA BIẾT CỦA MỘT TỈ LỆ THỨC

### Phương pháp giải

- Muốn tìm một ngoại tỉ chưa biết, ta lấy tích các trung tỉ chia cho ngoại tỉ kia.
- Muốn tìm một trung tỉ chưa biết, ta lấy tích các ngoại tỉ chia cho trung tỉ kia.

**Ví dụ 1.** Tìm x trong các tỉ lệ thức sau :

a) $\frac{x}{0,9}=\frac{5}{6}$ ; b) $\frac{-6}{x}=\frac{9}{-15}$.

*Giải*

a) $\frac{x}{0,9}=\frac{5}{6}$ suy ra $x=\frac{0,9.5}{6}=0,75$.

b) $\frac{-6}{x}=\frac{9}{-15}$ suy ra $x=\frac{(-6).(-15)}{9}=10$.

**Ví dụ 2.** Tìm x trong các tỉ lệ thức sau :

a) $\frac{14}{15}:\frac{9}{10}=x:\frac{3}{7}$;  b) $1\frac{3}{5}:8=2,5:x$.

***Giải***

a) $\frac{14}{15}:\frac{9}{10}=x:\frac{3}{7}$ suy ra $x=\frac{14}{15}.\frac{3}{7}:\frac{9}{10}=\frac{4}{9}$.

b) $1\frac{3}{5}:8=2,5:x$ suy ra $x=8.2,5:\frac{8}{5}=12,5$.

**Ví dụ 3.** Tìm x, biết :

a) $\frac{x}{2}=\frac{8}{x}$;  b) $\frac{3x-7}{8}=\frac{5}{2}$.

***Giải***

Ta có $\frac{x}{2}=\frac{8}{x}$ suy ra $x^2=16$.

Vậy $x=\pm 4$.

b) $\frac{3x-7}{8}=\frac{5}{2}$ suy ra $3x-7=\frac{5.8}{2}=20$.

Do đó $3x = 20 + 7 = 27$.

Vậy $x = 27 : 3 = 9$.

## Dạng 4. CHỨNG MINH TỈ LỆ THỨC

### Phương pháp giải

Muốn chứng minh tỉ lệ thức $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ta có thể chứng minh ad = bc hoặc chứng minh hai tỉ số ở hai vế có cùng giá trị.

**Ví dụ 1**. Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$. Chứng minh rằng $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

(Giả thiết các tỉ số đều có nghĩa).

***Giải***

Ta có $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$ suy ra $a(c + d) = c(a + b)$.

Do đó $ac + ad = ac + bc$.

Vậy $ad = bc$, suy ra $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

**Ví dụ 2**. Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Chứng minh rằng $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

(Giả thiết các tỉ số đều có nghĩa).

***Giải***

Ta đặt $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$.

Suy ra a = kb ; c = kd.

Khi đó $\frac{a+b}{a-b}=\frac{kb+b}{kb-b}=\frac{b(k+1)}{b(k-1)}=\frac{k+1}{k-1}$. (1)

$\frac{c+d}{c-d}=\frac{kd+d}{kd-d}=\frac{d(k+1)}{d(k-1)}=\frac{k+1}{k-1}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**1.** Cho tỉ lệ thức $\frac{8}{3}=\frac{12}{4,5}$ (1). Hãy hoán vị tỉ lệ thức này để được ba tỉ lệ thức khác.

**2.** Lập tất cả các tỉ lệ thức có thể được :

a) Từ bốn số : 3 ; 4 ; 15 ; 20.

b) Từ bốn trong năm số : 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 9.

**3.** Tìm x trong các tỉ lệ thức sau :

a) $\frac{x}{1,2}=\frac{5}{6}$ ; b) $\frac{5}{9}:x=\frac{7}{4}:\frac{3}{10}$.

**4.** Tìm tỉ số $\frac{x}{y}$, biết $\frac{x-y}{x+2y}=\frac{3}{4}$.

**5*.** Chứng minh rằng nếu $\frac{a+b}{c+d}=\frac{b+c}{d+a}$ trong đó $a+b+c+d\neq 0$ thì a = c.

## HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**1.** $\frac{4,5}{3}=\frac{12}{8}$ (2); $\frac{8}{12}=\frac{3}{4,5}$ (3); $\frac{4,5}{12}=\frac{3}{8}$ (4).

2. a) Ta có 3.20 = 4.15, suy ra :

$\frac{3}{4}=\frac{15}{20}$ (1); $\frac{20}{4}=\frac{15}{3}$ (2); $\frac{3}{15}=\frac{4}{20}$ (3); $\frac{20}{15}=\frac{4}{3}$ (4).

b) Ta có 2.9 = 3.6, suy ra :

$\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$ (1); $\frac{9}{3}=\frac{6}{2}$ (2); $\frac{2}{6}=\frac{3}{9}$ (3); $\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$ (4).

3. a) $x = 1$ ; b) $x=\frac{2}{21}$.

4. $\frac{x-y}{x+2y}=\frac{3}{4} \Rightarrow 4x-4y=3x+6y$

$$\Rightarrow 4x-3x=6y+4y$$

$$\Rightarrow x=10y$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y}=10.$$

5. Ta có $\frac{a+b}{c+d}=\frac{b+c}{d+a}$.

Suy ra $\frac{a+b}{c+d}+1=\frac{b+c}{d+a}+1$.

Do đó $\frac{a+b+c+d}{c+d}=\frac{b+c+d+a}{d+a}$. (*)

Vì $a + b + c + d \neq 0$ nên từ (*) suy ra $c + d = d + a$ hay $a = c$.

# §8. TÍNH CHẤT CỦA DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

## A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Từ dãy tỉ số $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ ta suy ra :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{a-c+e}{b-d+f}.$$

(Giả thiết các tỉ số đều có nghĩa).

2. Khi có dãy tỉ số $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{5}$, ta nói các số a, b, c tỉ lệ với các số 2 ; 3 ; 5.

Ta cũng viết a : b : c = 2 : 3 : 5.

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### Dạng 1. TÌM CÁC SỐ HẠNG TRONG MỘT DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU BIẾT TỔNG, HIỆU CỦA CÁC SỐ HẠNG ĐÓ

**Phương pháp giải**

Nếu $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ và $x + y - z = M$

thì $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x+y-z}{a+b-c}=\frac{M}{a+b-c}$.

Từ đó tìm được x, y, z.

**Ví dụ 1.** Tìm x, y, z, biết :

$$\frac{x}{9}=\frac{y}{5}=\frac{z}{10} \text{ và } x - y + z = 70.$$

***Giải***

Ta có $\frac{x}{9}=\frac{y}{5}=\frac{z}{10}=\frac{x-y+z}{9-5+10}=\frac{70}{14}=5$.

Do đó $\frac{x}{9}=5 \Rightarrow x=45$ ;

$\frac{y}{5}=5 \Rightarrow y=25$ ;

$\frac{z}{10}=5 \Rightarrow z=50$.

**Ví dụ 2.** Cho biết $\frac{x}{8}=\frac{y}{5}=\frac{z}{12}$ và $-x + y - z = 60$.

Tính x, y, z.

***Giải***

Ta có $\frac{x}{8}=\frac{y}{5}=\frac{z}{12}=\frac{-x+y-z}{-8+5-12}=\frac{60}{-15}=-4$.

Do đó $\frac{x}{8} = -4 \Rightarrow x = -32$ ;

$\frac{y}{5} = -4 \Rightarrow y = -20$ ;

$\frac{z}{12} = -4 \Rightarrow z = -48$.

**Ví dụ 3.** Tìm x, y, z, biết :

$$\frac{x}{7} = \frac{y}{4} = \frac{z}{2} \text{ và } x - 3z = 9.$$

***Giải***

Ta có $\frac{x}{7} = \frac{y}{4} = \frac{z}{2}$ suy ra $\frac{x}{7} = \frac{y}{4} = \frac{3z}{6}$.

Do đó $\frac{x}{7} = \frac{y}{4} = \frac{3z}{6} = \frac{x - 3z}{7 - 6} = 9$.

Vậy

$$\frac{x}{7} = 9 \Rightarrow x = 63 \ ;$$

$$\frac{y}{4} = 9 \Rightarrow y = 36 \ ;$$

$$\frac{z}{2} = 9 \Rightarrow z = 18.$$

**Ví dụ 4**. Cho biết $\frac{x}{y} = \frac{7}{10}$; $\frac{y}{z} = \frac{10}{13}$ và $x + y + z = 120$.

Tính x, y, z.

***Giải***

Ta có $\frac{x}{y} = \frac{7}{10} \Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{y}{10}$. (1)

$\frac{y}{z} = \frac{10}{13} \Rightarrow \frac{y}{10} = \frac{z}{13}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x}{7} = \frac{y}{10} = \frac{z}{13} = \frac{x + y + z}{7 + 10 + 13} = \frac{120}{30} = 4$.

Do đó $\frac{x}{7} = 4 \Rightarrow x = 28$ ;

$\frac{y}{10} = 4 \Rightarrow y = 40$ ;

$\frac{z}{13} = 4 \Rightarrow z = 52$ .

**Ví dụ 5.** Tìm x, y, z, biết $3x = 4y = 5z$ và $x - y - z = -42$.

***Giải***

Ta có $3x = 4y = 5z = \frac{3x}{60} = \frac{4y}{60} = \frac{5z}{60}$ .

Do đó $\frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12} = \frac{x-y-z}{20-15-12} = \frac{-42}{-7} = 6$ .

Suy ra $\frac{x}{20} = 6 \Rightarrow x = 120$ ;

$\frac{y}{15} = 6 \Rightarrow y = 90$ ;

$\frac{z}{12} = 6 \Rightarrow z = 72$ .

*Nhận xét.* Từ đề bài, $3x = 4y = 5z$, muốn biến đổi thành một dãy tỉ số bằng nhau ta đã chia 3x, 4y, 5z cho BCNN (3, 4, 5) = 60.

## Dạng 2. TÌM CÁC SỐ HẠNG TRONG MỘT DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU BIẾT TÍCH CỦA CÁC SỐ HẠNG ĐÓ

### Phương pháp giải

Nếu $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ và $x.y.z = p$

thì ta đặt $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$ .

Suy ra $x = ka$ ; $y = kb$ ; $z = kc$.

Tìm k rồi suy ra x, y, z.

**Ví dụ 1.** Tìm x, y, z, biết :

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6} \text{ và } x.y.z = 288.$$

*Giải*

Ta đặt : $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6} = k$.

Suy ra : $x = 3k$ ; $y = 2k$ ; $z = 6k$.

Do đó $x.y.z = (3k).(2k).(6k) = 36k^3$.

Vậy $36k^3 = 288 \Rightarrow k^3 = 8 \Rightarrow k = 2$.

Từ đó, $x = 3.2 = 6$ ; $y = 2.2 = 4$ ; $z = 6.2 = 12$.

**Ví dụ 2.** Một khu vườn hình chữ nhật có diện tích là $960m^2$. Chiều dài và chiều rộng tỉ lệ với 5 và 3. Tính chiều dài và chiều rộng của khu vườn.

*Giải*

Gọi chiều dài của khu vườn là x (m),

chiều rộng của khu vườn là y (m).

Theo đề bài ta có : $\frac{x}{5} = \frac{y}{3}$ và $xy = 960$.

Ta đặt : $\frac{x}{5} = \frac{y}{3} = k > 0$, suy ra : $x = 5k$ ; $y = 3k$.

Do đó $x.y = (5k).(3k) = 15k^2$.

Vậy $15k^2 = 960 \Rightarrow k^2 = 64 \Rightarrow k = 8$ (vì $k > 0$).

Từ đó, $x = 40$ ; $y = 24$.

Vậy chiều dài khu vườn là 40m, chiều rộng khu vườn là 24m.

## Dạng 3. CHIA SỐ M THÀNH NHỮNG PHẦN x, y, z TỈ LỆ VỚI CÁC SỐ a, b, c CHO TRƯỚC

### Phương pháp giải

- Trước hết lập dãy tỉ số bằng nhau $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, trong đó $x + y + z = M$.
- Sau đó tìm x, y, z.

**Ví dụ 1.** Chu vi của một tam giác là 81cm. Các cạnh của nó tỉ lệ với 2, 3, 4. Tính độ dài mỗi cạnh.

*Giải*

Gọi độ dài ba cạnh của tam giác lần lượt là x, y, z.

Theo đề bài, ta có : $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ và $x + y + z = 81$.

Ta có : $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{81}{9} = 9.$

Suy ra $x = 2.9 = 18$ ; $y = 3.9 = 27$ ; $z = 4.9 = 36$.

Vậy độ dài ba cạnh của tam giác lần lượt là : 18cm ; 27cm ; 36cm.

**Ví dụ 2.** Chia số 69 thành ba phần tỉ lệ với các số $\frac{1}{2}$ ; $\frac{2}{3}$ và $\frac{3}{4}$.

*Giải*

Gọi ba phần cần tìm lần lượt là x, y, z.

Theo đề bài, ta có :

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{2}{3}} = \frac{z}{\frac{3}{4}} = \frac{x+y+z}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}} = \frac{69}{\frac{23}{12}} = 36.$$

Suy ra $x = \frac{1}{2}.36 = 18$ ; $y = \frac{2}{3}.36 = 24$ ; $z = \frac{3}{4}.36 = 27$.

## Dạng 4. CHỨNG MINH TỈ LỆ THỨC

### Phương pháp giải

Vận dụng các tính chất của tỉ lệ thức, của dãy tỉ số bằng nhau để biến đổi điều kiện đã cho thành tỉ lệ thức cần chứng minh.

**Ví dụ 1.** Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Chứng minh rằng $\frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2} = \frac{ac}{bd}$ (giả thiết các tỉ số đều có nghĩa).

*Giải*

Từ tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ suy ra $\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{ac}{bd}$. (1)

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2} = \frac{ac}{bd}$.

**Ví dụ 2.** Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Chứng minh rằng $\frac{a + 2c}{b + 2d} = \frac{a - 3c}{b - 3d}$ (giả thiết các tỉ số đều có nghĩa).

***Giải***

Ta có : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{2c}{2d} = \frac{a + 2c}{b + 2d}$. (1)

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{3c}{3d} = \frac{a - 3c}{b - 3d}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a + 2c}{b + 2d} = \frac{a - 3c}{b - 3d}$.

## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**1.** Tính x và y, biết $\frac{x}{y} = \frac{5}{9}$ và $x + y = 70$.

**2.** Tính x và y, biết $\frac{x}{15} = \frac{y}{7}$ và $x - 2y = 16$.

**3.** Cho biết $\frac{x}{5} = \frac{y}{2}$ và $xy = 1000$.

Tính x và y.

**4.** Tìm x, y, z, biết :

$$\frac{x}{13} = \frac{y}{7} = \frac{z}{5} \text{ và } x - y - z = 6.$$

**5*.** Tìm x, y, z, biết :

a) $\frac{x}{y} = \frac{8}{11}$ ; $\frac{y}{z} = \frac{11}{3}$ và $x + y - z = 80$ ;

b) $\frac{x}{4} = \frac{y}{3}$ ; $\frac{y}{6} = \frac{z}{11}$ và $x.y.z = -528$.

**6*.** Cho x, y, z là ba số dương phân biệt. Biết : $\frac{x - y}{z} = \frac{3y}{x - z} = \frac{x}{y}$.

Chứng minh rằng : $x = 2y$ và $y = 2z$.

## HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**1.** $x = 25$ ; $y = 45$.

**2.** $x = 240$ ; $y = 112$.

**3.** Đặt $\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = k$. Tìm được $k = \pm 10$.

Suy ra $x = 50$ ; $y = 20$ hoặc $x = -50$ ; $y = -20$.

**4.** $x = 79$ ; $y = 42$ ; $z = 30$.

**5*.** a) Biến đổi thành dãy : $\frac{x}{8} = \frac{y}{11} = \frac{z}{3}$.

*Đáp số* : $x = 40$ ; $y = 55$ ; $z = 15$.

b) Ta có $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{6}$. (1)

Mà $\frac{y}{6} = \frac{z}{11}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{x}{8} = \frac{y}{6} = \frac{z}{11} = k$.

Tính k được $k = -1$, suy ra $x = -8$ ; $y = -6$ ; $z = -11$.

**6.** $\frac{x-y}{z} = \frac{3y}{x-z} = \frac{x}{y} = \frac{x-y+3y+x}{z+x-z+y} = \frac{2(x+y)}{x+y} = 2$.

Vậy : $\frac{x}{y} = 2 \Rightarrow x = 2y$, từ đó tìm được $y = 2z$.

# §9. SỐ THẬP PHÂN HỮU HẠN. SỐ THẬP PHÂN VÔ HẠN TUẦN HOÀN. §10. LÀM TRÒN SỐ

## A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

**1.** Xét phép chia :

$$3 : 20 = 0{,}15$$

$$5 : 12 = 0{,}41666\ldots$$

Số 0,15 là số thập phân hữu hạn.

Số 0,41666... được viết gọn thành 0,41(6) là số thập phân vô hạn tuần hoàn có chu kì là 6.

2. Nếu một phân số tối giản với mẫu dương mà mẫu không có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì phân số đó viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn.

Nếu một phân số tối giản với mẫu dương mà mẫu có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì phân số đó viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

3. Mỗi số hữu tỉ được biểu diễn bởi một số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn. Ngược lại, mỗi số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn biểu diễn một số hữu tỉ.

4. *Quy ước làm tròn số*

• *Trường hợp 1.* Nếu chữ số đầu tiên trong các chữ số bị bỏ đi nhỏ hơn 5 thì ta giữ nguyên bộ phận còn lại. Trong trường hợp số nguyên thì ta thay các chữ số bị bỏ đi bằng các chữ số 0.

• *Trường hợp 2.* Nếu chữ số đầu tiên trong các chữ số bị bỏ đi lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cộng thêm 1 vào chữ số cuối cùng của bộ phận còn lại. Trong trường hợp số nguyên thì ta thay chữ số bị bỏ đi bằng các chữ số 0.

## B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### Dạng 1. NHẬN BIẾT MỘT PHÂN SỐ VIẾT ĐƯỢC DƯỚI DẠNG SỐ THẬP PHÂN HỮU HẠN HOẶC VÔ HẠN TUẦN HOÀN

#### Phương pháp giải

• Viết phân số dưới dạng phân số tối giản với mẫu dương.

• Phân tích mẫu số đó ra thừa số nguyên tố.

• Nếu mẫu này không có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì phân số viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn. Nếu mẫu này có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì phân số viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

**Ví dụ 1.** Trong ba phân số : $\frac{-49}{140}; \frac{100}{275}; \frac{11}{6}$.

Phân số nào viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn ?

Phân số nào viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn ?

*Giải*

• Xét phân số : $\dfrac{-49}{140} = \dfrac{-7}{20}$.

Ta thấy mẫu số $20 = 2^2.5$ (không có ước nguyên tố khác 2 và 5).

Vậy phân số $\dfrac{-7}{20}$ viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn.

• Xét phân số $\dfrac{100}{275} = \dfrac{4}{11}$.

Mẫu số 11 là số nguyên tố khác 2 và 5 nên phân số $\dfrac{4}{11}$ viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

• Xét phân số $\dfrac{11}{6}$ có mẫu số là $6 = 2.3$ (có ước nguyên tố khác 2 và 5).

Vậy phân số $\dfrac{11}{6}$ viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

**Ví dụ 2.** Trong bốn phân số dưới đây, có mấy phân số viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn ?

$$\frac{65}{30}\,;\,\frac{33}{150}\,;\,\frac{63}{140}\,;\,\frac{45}{36}.$$

*Giải*

$\dfrac{65}{30} = \dfrac{13}{6}$ ; mẫu số là $6 = 2.3$ (có chứa thừa số nguyên tố khác 2 và 5).

$\dfrac{33}{150} = \dfrac{11}{50}$ ; mẫu số là $50 = 2.5^2$ (không chứa thừa số nguyên tố khác 2 và 5).

$\dfrac{63}{140} = \dfrac{9}{20}$ ; mẫu số là $20 = 2^2.5$ (không chứa thừa số nguyên tố khác 2 và 5).

$\dfrac{45}{36} = \dfrac{5}{4}$ ; mẫu số là $4 = 2^2$ (không chứa thừa số nguyên tố khác 2 và 5).

Vậy có ba phân số viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn.

**Ví dụ 3.** Trong bốn phân số dưới đây, có mấy phân số viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn ?

$$\frac{8}{15}\,;\,\frac{21}{35}\,;\,\frac{12}{27}\,;\,\frac{26}{39}.$$

*Giải*

$\frac{8}{15}$ là phân số tối giản ; mẫu số là $15 = 3.5$.

$\frac{21}{35} = \frac{3}{5}$ ; mẫu số là 5.

$\frac{12}{27} = \frac{4}{9}$ ; mẫu số là $9 = 3^2$.

$\frac{26}{39} = \frac{2}{3}$ ; mẫu số là 3.

Vậy có tất cả ba mẫu số có chứa thừa số nguyên tố khác 2 và 5 nên có ba phân số viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

**Ví dụ 4.** Tìm số tự nhiên $x < 10$ sao cho phân số $\frac{x+4}{30}$ viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn.

*Giải*

Ta có mẫu số là $30 = 2.3.5$ (có chứa thừa số nguyên tố khác 2 và 5).

Vậy muốn cho phân số $\frac{x+4}{2.3.5}$ viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn thì $(x + 4) \vdots 3$.

Suy ra : $x + 4 = 6 \Rightarrow x = 2$ (chọn) ;

$x + 4 = 9 \Rightarrow x = 5$ (chọn) ;

$x + 4 = 12 \Rightarrow x = 8$ (chọn) ;

$x + 4 = 15 \Rightarrow x = 11$ (loại).

Vậy $x \in \{2, 5, 8\}$.

## Dạng 2. VIẾT MỘT PHÂN SỐ HOẶC MỘT TỈ SỐ DƯỚI DẠNG SỐ THẬP PHÂN

### Phương pháp giải

| |
|---|
| Ta chia tử số cho mẫu số. |

**Ví dụ 1.** Viết các phân số hoặc tỉ số sau dưới dạng số thập phân :

a) $\frac{-49}{140}$ ; b) 45 : 36.

*Giải*

a) $\dfrac{-49}{140} = \dfrac{-7}{20} = -0,35$ (chia $-7$ cho 20).

b) $45 : 36 = 1,25$.

**Ví dụ 2.** Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn :

a) $\dfrac{100}{275}$ ; b) $\dfrac{11}{6}$.

*Giải*

a) $\dfrac{100}{275} = \dfrac{4}{11} = 0,3636... = 0,(36)$ (ta chia 4 cho 11).

b) $\dfrac{11}{6} = 1,833... = 1,8(3)$ (ta chia 11 cho 6).

## Dạng 3. VIẾT SỐ THẬP PHÂN HỮU HẠN DƯỚI DẠNG PHÂN SỐ TỐI GIẢN

### Phương pháp giải

*Dựa vào nhận xét :*

Phần thập phân có n chữ số thì ở mẫu số của phân số là $10^n$.

Cuối cùng rút gọn phân số vừa lập được.

**Ví dụ 1.** Viết các số thập phân hữu hạn sau dưới dạng phân số tối giản :

a) 0,48 ; b) –0,375.

*Giải*

a) $0,48 = \dfrac{48}{100} = \dfrac{12}{25}$ ; b) $-0,375 = -\dfrac{375}{1000} = -\dfrac{3}{8}$.

**Ví dụ 2.** Viết các số thập phân hữu hạn sau dưới dạng phân số tối giản :

a) –0,0065 ; b) 18,92.

*Giải*

a) $-0,0065 = -\dfrac{65}{10000} = -\dfrac{13}{2000}$ ; b) $18,92 = \dfrac{1892}{100} = \dfrac{473}{25}$.

## Dạng 4. LÀM TRÒN CÁC SỐ ĐẾN MỘT HÀNG NÀO ĐÓ

### Phương pháp giải

| |
|---|
| Áp dụng quy tắc làm tròn số. |

**Ví dụ 1.** Làm tròn số 2,37 đến :

a) Hàng phần mười ; b) Hàng đơn vị.

***Giải***

a) Làm tròn số 2,37 đến hàng phần mười ta được 2,4.

b) Làm tròn số 2,37 đến hàng đơn vị ta được 2.

**Ví dụ 2.** Làm tròn số 4652 đến :

a) Hàng chục ; b) Hàng trăm ; c) Hàng nghìn.

***Giải***

a) Làm tròn số 4652 đến hàng chục ta được 4650 ;

b) Làm tròn số 4652 đến hàng trăm ta được 4700 ;

c) Làm tròn số 4652 đến hàng nghìn ta được 5000.

**Ví dụ 3.** Một số nguyên sau khi làm tròn đến hàng nghìn thì được 72 000. Hỏi số đó lớn nhất là bao nhiêu ? Nhỏ nhất là bao nhiêu ?

***Giải***

Số lớn nhất làm tròn đến hàng nghìn thành 72 000 là số 72 499 ;

Số nhỏ nhất làm tròn đến hàng nghìn thành 72 000 là số 71 500.

**Ví dụ 4.** Thực hiện phép chia 31 : 42 rồi làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

***Giải***

$$31 : 42 = 0,73809\ldots \approx 0,74.$$

**Ví dụ 5.** Tính giá trị của biểu thức $M = \dfrac{5,37.12,8}{24,56}$ rồi làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.

***Giải***

$$M = \frac{53,7.12,8}{24,56} = 27,9869... \approx 28,0.$$

**Ví dụ 6.** Tìm x trong tỉ lệ thức :

8,5 : x = 3,7 : 0,9 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

*Giải*

Ta có : $8,5 : x = 3,7 : 0,9$

Suy ra : $x = \dfrac{8,5.0,9}{3,7}$

$x = 2,0675\ldots \approx 2,1.$

## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**1.** Trong các phân số sau, phân số nào viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn ? Phân số nào viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn ?

$$\frac{13}{40};\frac{8}{15};\frac{30}{84};\frac{27}{150}.$$

**2.** Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn :

a) $\dfrac{56}{175};\dfrac{915}{120};$ b) $\dfrac{66}{36};\dfrac{135}{198}.$

**3.** Viết các số thập phân sau dưới dạng phân số tối giản :

$$0,475 ; -2,84 ; 7,375.$$

**4.** Làm tròn số 7068,524 đến :

a) Hàng phần mười ; b) Hàng đơn vị ; c) Hàng trăm.

**5.** Tính trung bình cộng của các số sau (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

$$8,5 ; 7 ; 9 ; 6,5 ; 8 ; 7,5 ; 8 ; 7 ; 9,5.$$

**6*.** Có bao nhiêu số nguyên sau khi làm tròn trăm cho kết quả là 3500 ?

## HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**1.** Các phân số viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn là :

$$\frac{13}{40};\frac{27}{150}.$$

Các phân số $\dfrac{8}{15};\dfrac{30}{84}$ viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

**2.** a) 0,32 ; 7,625 ; b) 1,8(3) ; 0,6(81).

3. $\frac{19}{40}$ ; $-2\frac{21}{25}$ ; $7\frac{3}{8}$.

4. a) 7068,5 ; b) 7069 ; c) 7100.

5. 7,9.

6*. Số nguyên lớn nhất làm tròn trăm thành 3500 là số 3549.

Số nguyên nhỏ nhất làm tròn trăm thành 3500 là số 3450.

Do đó số số nguyên làm tròn trăm thành 3500 là :

$$3549 - 3450 + 1 = 100 \text{ (số)}.$$

# §11. SỐ VÔ TỈ. KHÁI NIỆM VỀ CĂN BẬC HAI.
# §12. SỐ THỰC

## A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. *Số vô tỉ :* Số vô tỉ là số viết được dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn.

Tập hợp các số vô tỉ kí hiệu là **I**.

2. *Khái niệm về căn bậc hai*

Căn bậc hai của một số a không âm là số x sao cho $x^2 = a$.

• Số dương a có đúng hai căn bậc hai, một số dương kí hiệu là $\sqrt{a}$ và một số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$.

• Số 0 chỉ có một căn bậc hai là số 0, cũng viết $\sqrt{0} = 0$.

3. *Số thực*

Số vô tỉ và số hữu tỉ gọi chung là số thực.

Tập hợp các số thực kí hiệu là **R**.

• Cách so sánh hai số thực tương tự như so sánh hai số hữu tỉ viết dưới dạng số thập phân.

• Trong tập hợp các số thực cũng có các phép toán với các tính chất tương tự như các phép toán trong tập hợp các số hữu tỉ.

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### Dạng 1. TÌM CĂN BẬC HAI CỦA MỘT SỐ VÀ TÌM MỘT SỐ BIẾT CĂN BẬC HAI CỦA NÓ

**Phương pháp giải**

- Nếu $x^2 = a$ thì $x = \pm\sqrt{a}$ (với $a \geq 0$).

Khi viết $\sqrt{a}$ thì phải có $a \geq 0$ và $\sqrt{a} \geq 0$.

Khi viết $-\sqrt{a}$ thì phải có $a \geq 0$ và $-\sqrt{a} \leq 0$.

- Nếu $\sqrt{x} = a$ $(a \geq 0)$ thì $x = a^2$.

**Ví dụ 1.** Tìm căn bậc hai của 49 ; 0,25 ; –4.

***Giải***

- Căn bậc hai của 49 là $\pm 7$ vì $(\pm 7)^2 = 49$.
- Căn bậc hai của 0,25 là $\pm 0,5$ vì $(\pm 0,5)^2 = 0,25$.
- Số $-4 < 0$ không có căn bậc hai.

**Ví dụ 2.** Tính : $\sqrt{121}$ ; $\sqrt{(-8)^2}$ ; $-\sqrt{\dfrac{16}{81}}$.

***Giải***

Ta có $\sqrt{121} = 11$ (vì $11 > 0$ và $11^2 = 121$).

$\sqrt{(-8)^2} = \sqrt{64} = 8$ (vì $8 > 0$ và $8^2 = 64$).

$$-\sqrt{\frac{16}{81}} = -\frac{4}{9} \text{ vì } \left(-\frac{4}{9} < 0 \text{ và } \left(-\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}\right).$$

**Ví dụ 3.** Tính :

a) $\sqrt{\dfrac{25}{16} - 1}$ ; b) $\sqrt{13^2 - 5^2}$ ; c) $\sqrt{36} + \sqrt{225}$.

*Giải*

a) $\sqrt{\frac{25}{16} - 1} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ ;

b) $\sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ ;

c) $\sqrt{36} + \sqrt{225} = 6 + 15 = 21$.

**Ví dụ 4.** Một tấm bìa hình vuông có diện tích là $1296cm^2$. Tính độ dài cạnh hình vuông.

*Giải*

Gọi cạnh hình vuông là x.

Ta có $x^2 = 1296$ $(x > 0)$.

Suy ra : $x = \sqrt{1296} = 36$.

Vậy độ dài cạnh hình vuông là 36cm.

**Ví dụ 5.** Có bao nhiêu số nguyên lớn hơn $-\sqrt{6}$ nhưng nhỏ hơn $\sqrt{12}$ ?

*Giải*

$$-\sqrt{6} = -2,449... \; ; \; \sqrt{12} = 3,464...$$

Các số nguyên lớn hơn –2,449… nhưng nhỏ hơn 3,464… là :

$$-2 \; ; -1 \; ; 0 \; ; 1 \; ; 2 \; ; 3.$$

**Ví dụ 6.** Tìm x, biết :

a) $\sqrt{x} = 10$ ; b) $\sqrt{x} = \frac{1}{3}$.

*Giải*

a) Ta có $\sqrt{x} = 10 \Rightarrow x = 10^2 = 100$ ;

b) Ta có $\sqrt{x} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

**Ví dụ 7.** Tìm $x^2$, biết $\sqrt{x} = 9$.

*Giải*

Ta có $\sqrt{x} = 9 \Rightarrow x = 9^2 = 81$

$$\Rightarrow x^2 = 81^2 = 6561.$$

## Dạng 2. SỬ DỤNG KÍ HIỆU CỦA TẬP HỢP SỐ

### Phương pháp giải

> *Bạn cần nhớ :*
>
> - Tập hợp các số tự nhiên kí hiệu là **N** ;
> - Tập hợp các số nguyên kí hiệu là **Z** ;
> - Tập hợp các số hữu tỉ kí hiệu là **Q** ;
> - Tập hợp các số vô tỉ kí hiệu là **I** ;
> - Tập hợp các số thực kí hiệu là **R**.
>
> Quan hệ giữa các tập hợp số nói trên như sau :
>
> $$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \text{ và } \mathbf{I} \subset \mathbf{R}.$$

**Ví dụ 1.** Điền các kí hiệu $\in$, $\notin$, $\subset$ vào các ô trống :

$-0,(33)\ \square\ \mathbf{Q}$ ; $\qquad 0,52(41)\ \square\ \mathbf{I}$ ;

$1,4142135...\ \square\ \mathbf{R}$ ; $\qquad \mathbf{Q}\ \square\ \mathbf{R}$.

***Giải***

$-0,(33)\ \boxed{\in}\ \mathbf{Q}$ ; $\qquad 0,52(41)\ \boxed{\notin}\ \mathbf{I}$.

$1,4142135 ...\ \boxed{\in}\ \mathbf{R}$ ; $\qquad \mathbf{Q}\ \boxed{\subset}\ \mathbf{R}$.

**Ví dụ 2.** Điền kí hiệu thích hợp vào ô trống để được khẳng định đúng.

$$3\ \square\ \mathbf{I} \quad ; \quad \mathbf{I} \subset \square\ ;$$

***Giải***

$$3\ \boxed{\notin}\ \mathbf{I} \quad ; \quad \mathbf{I} \subset \boxed{\mathbf{R}}.$$

## Dạng 3. SO SÁNH CÁC SỐ THỰC

### Phương pháp giải

> Việc so sánh các số thực được làm tương tự như so sánh các số hữu tỉ viết dưới dạng số thập phân.
>
> Đặc biệt, với a, b là hai số thực dương thì :
>
> - $a \le b \Leftrightarrow \sqrt{a} \le \sqrt{b}$.
> - $a \le b \Leftrightarrow a^2 \le b^2$.

**Ví dụ 1.** So sánh số 1,7(32) với số $\sqrt{3}$.

*Giải*

Ta có $1,7(32) = 1,73232\ldots$

$\sqrt{3} = 1,73205\ldots$

Vì $1,7323 > 1,7320$ nên $1,7(32) > \sqrt{3}$.

**Ví dụ 2.** Tìm số lớn nhất trong các số sau :

$$\sqrt{(-8)^2}\ ;\ 8,32\ ;\ \sqrt{69}\ ;\ -\sqrt{100}.$$

*Giải*

Ta có $\sqrt{(-8)^2} = 8$ ; $\sqrt{69} = 8,3066\ldots$ ; $-\sqrt{100} < 0$.

Vậy số lớn nhất là 8,32.

**Ví dụ 3.** Không dùng máy tính, cho biết trong hai khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

a) $\sqrt{65} + 1 > \sqrt{63} - 1$ ; b) $\dfrac{1}{\sqrt{8}} < \dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

*Giải*

• Ta có $\sqrt{65} > \sqrt{63}$ ; $1 > -1$.

Suy ra $\sqrt{65} + 1 > \sqrt{63} - 1$. Vậy a) đúng.

• Ta có $\sqrt{8} > \sqrt{7} > 0$.

Suy ra $\dfrac{1}{\sqrt{8}} < \dfrac{1}{\sqrt{7}}$. Vậy b) đúng.

**Ví dụ 4.** So sánh (không dùng máy tính) : $\sqrt{34,9}$ và 6.

*Giải*

Ta có $34,9 < 36$ ra $\sqrt{34,9} < \sqrt{36}$ tức là $\sqrt{34,9} < 6$.

## Dạng 4. TÍNH GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC CÓ CHỨA DẤU CĂN

### Phương pháp giải

• Phối hợp thực hiện các phép tính theo đúng thứ tự quy ước.

• Nếu có thể thì vận dụng tính chất của các phép toán.

**Ví dụ 1.** Tính giá trị của biểu thức (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

$$A = 8(\sqrt{3} - 1) - 4(\sqrt{5} - 2).$$

***Giải***

*Cách thứ nhất :*

$$\begin{aligned} A &= 8(\sqrt{3} - 1) - 4(\sqrt{5} - 2) \\ &= 8(1{,}732\ldots - 1) - 4(2{,}236\ldots - 2) \\ &= 8.0{,}732\ldots - 4.0{,}236\ldots \\ &= 5{,}856\ldots - 0{,}944\ldots \\ &= 4{,}912\ldots \approx 4{,}91. \end{aligned}$$

*Cách thứ hai :*

$$\begin{aligned} A &= 8.(\sqrt{3} - 1) - 4.(\sqrt{5} - 2) \\ &= 8.\sqrt{3} - 8 - 4.\sqrt{5} + 8 \\ &= 13{,}856\ldots - 8{,}944\ldots \\ &= 4{,}912\ldots \approx 4{,}91. \end{aligned}$$

**Ví dụ 2.** Tính giá trị của biểu thức :

$$M = \left(\sqrt{\frac{1}{9}} + \sqrt{\frac{25}{36}} - \sqrt{\frac{49}{81}}\right) : \sqrt{\frac{441}{324}}.$$

***Giải***

Ta có : $M = \left(\sqrt{\frac{1}{9}} + \sqrt{\frac{25}{36}} - \sqrt{\frac{49}{81}}\right) : \sqrt{\frac{441}{324}}$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{6} - \frac{7}{9}\right) : \frac{21}{18}$$

$$= \frac{7}{18} . \frac{18}{21} = \frac{1}{3}.$$

## Dạng 5. TÌM SỐ CHƯA BIẾT TRONG MỘT ĐẲNG THỨC

### Phương pháp giải

- Sử dụng tính chất của các phép toán.
- Sử dụng quan hệ giữa các số trong một phép toán.
- Sử dụng quy tắc "dấu ngoặc", quy tắc "chuyển vế".

**Ví dụ 1.** Tìm x, biết : $\frac{1}{3}.\left(x-\frac{1}{4}\right)=\sqrt{2}$.

(Làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

***Giải***

Ta có : $\frac{1}{3}.\left(x-\frac{1}{4}\right)=\sqrt{2}$

$$x-\frac{1}{4}=\sqrt{2}:\frac{1}{3}$$

$$x=\sqrt{2}.3+\frac{1}{4}$$

$$x=3.1,414\ldots+0,25$$

$$x=4,492\ldots$$

$$x\approx 4,5.$$

**Ví dụ 2.** Tìm x, biết : $5\sqrt{x}-17=108$.

***Giải***

Ta có : $5\sqrt{x}-17=108$

$$5\sqrt{x}=108+17$$

$$5\sqrt{x}=125$$

$$\sqrt{x}=25$$

$$x=25^2=625.$$

**Ví dụ 3.** Tìm x, biết $(x^2-4)(x^2-3)=0$.

***Giải***

Ta có $(x^2-4)(x^2-3)=0$.

Suy ra : $x^2-4=0$ hoặc $x^2-3=0$.

Do đó : $x^2=4$ hoặc $x^2=3$.

Vậy $x=\pm 2$ hoặc $x=\pm\sqrt{3}$.

## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**1.** Tìm căn bậc hai của các số sau :

$$144 ; 0{,}25 ; \frac{4}{9}.$$

**2.** Tính : $\sqrt{169}$ ; $-\sqrt{\frac{49}{225}}$ ; $\sqrt{(-6)^2}$.

**3.** Tìm x ∈ **Q**, biết :

a) $\sqrt{x} = 4$ ; b) $\sqrt{x} = \frac{1}{7}$ ; c) $\sqrt{x} = 0$.

**4.** Tìm x ∈ **Q**, biết :

a) $x^2 = 400$ ; b) $x^2 - 64 = 0$ ; c) $5x^2 + 10 = 9$.

**5.** Dùng máy tính để so sánh $\sqrt{5}$ với 2,(23).

**6.** Không dùng máy tính, hãy so sánh $\sqrt{103{,}5}$ với 10.

## HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**1.** $\pm 12 ; \pm 0{,}5 ; \pm\frac{2}{3}$.

**2.** $13 ; -\frac{7}{15} ; 6$.

**3.** a) 16 ; b) $\frac{1}{49}$ ; c) 0.

**4.** a) ± 20 ; b) ± 8 ; c) Không có.

**5.** $\sqrt{5} > 2,(23)$.

**6.** Ta có $103{,}5 > 100$ nên $\sqrt{103{,}5} > \sqrt{100}$.

Do đó $\sqrt{103{,}5} > 10$.

# ÔN TẬP CHƯƠNG I

## A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. *Tập hợp các số hữu tỉ :* các phép tính cộng, trừ, nhân, chia và lũy thừa số hữu tỉ.
2. *Tỉ lệ thức :*

   – Định nghĩa và tính chất của tỉ lệ thức.

   – Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau.
3. *Số vô tỉ, số thực*

   – Số thập phân hữu hạn, số thập phân vô hạn tuần hoàn và không tuần hoàn.

   – Số vô tỉ, số thực.

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### **Dạng 1.** NHẬN BIẾT SỐ HỮU TỈ, SO SÁNH CÁC SỐ HỮU TỈ

**Phương pháp giải**

- Số hữu tỉ là số viết được dưới dạng phân số $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0$.
- Các số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn đều là số hữu tỉ.

**Ví dụ 1.** Trong các số $-\frac{4}{12}$ ; $\frac{-33}{99}$ ; $-0,3333$ ; $-\sqrt{\frac{1}{9}}$.

Số nào không biểu diễn số hữu tỉ $-\frac{1}{3}$ ?

***Giải***

Ta có : $-\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}$; $\frac{-33}{99} = -\frac{1}{3}$; $-\sqrt{\frac{1}{9}} = -\frac{1}{3}$; $-0,3333 = -\frac{3333}{10000} \neq -\frac{1}{3}$.

Vậy số $-0,3333$ không biểu diễn số hữu tỉ $-\frac{1}{3}$.

**Ví dụ 2.** Cho các tập hợp :

$M = \left\{\frac{0}{-7}; \frac{-2}{-5}; \frac{-1}{4}\right\}$; $\quad N = \left\{\frac{0}{-7}; \frac{5}{6}; \frac{-8}{13}\right\}$;

$P = \left\{\frac{-4}{9}; \frac{3}{-5}; -0,2\right\}$; $\quad Q = \left\{-9; \frac{-6}{-11}; -5,(3)\right\}$.

Tập hợp nào chỉ gồm có các số hữu tỉ âm ?

***Giải***

Các tập hợp M và N đều có phần tử 0 $\left(\text{đó là } \frac{0}{-7}\right)$.

Tập hợp Q có phần tử dương $\left(\text{đó là } \frac{-6}{-11}\right)$.

Chỉ có tập hợp P gồm toàn các số hữu tỉ âm (vì có tử số và mẫu số trái dấu).

**Ví dụ 3.** Gọi A là tập hợp các số hữu tỉ x sao cho : $\frac{4}{7} < x < \frac{5}{8}$.

Hỏi số hữu tỉ $\frac{11}{21}$; $\frac{17}{28}$ có là phần tử của tập hợp A không ?

***Giải***

Quy đồng mẫu số các phân số :

$$\frac{4}{7}; \frac{5}{8}; \frac{11}{21}; \frac{17}{28} \text{ ta được } \frac{96}{168}; \frac{105}{168}; \frac{88}{168}; \frac{102}{168}.$$

Vì $\frac{96}{168} < x < \frac{105}{168}$ mà $\frac{88}{168} < \frac{96}{168}$ nên $\frac{88}{168} \notin A$.

Còn $\frac{96}{168} < \frac{102}{168} < \frac{105}{168}$ nên $\frac{102}{168} \in A$.

Vậy $\frac{11}{21} \notin A$; $\frac{17}{28} \in A$.

## Dạng 2. CÁC PHÉP TÍNH VỀ SỐ HỮU TỈ

### Phương pháp giải

Dựa vào quy tắc thực hiện các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa.

**Ví dụ 1.** Tính giá trị của biểu thức :

$$A = \left(0,75 - \frac{5}{6}\right) : \left(-\frac{4}{7} + \frac{1}{3}\right).$$

***Giải***

Ta có : $A = \left(0,75 - \frac{5}{6}\right) : \left(-\frac{4}{7} + \frac{1}{3}\right)$

$$= \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right) : \left(-\frac{4}{7} + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{9}{12} - \frac{10}{12}\right) : \left(-\frac{12}{21} + \frac{7}{21}\right)$$

$$= \frac{-1}{12} : \frac{-5}{21} = \frac{7}{20}.$$

**Ví dụ 2.** Cho : $M = \left(1 + \frac{1}{2}\right).\left(1 + \frac{1}{3}\right).\left(1 + \frac{1}{4}\right)...\left(1 + \frac{1}{10}\right).\left(1 + \frac{1}{11}\right).$

Tính $M^{-1}$.

***Giải***

Ta có : $M = \left(1 + \frac{1}{2}\right).\left(1 + \frac{1}{3}\right).\left(1 + \frac{1}{4}\right)...\left(1 + \frac{1}{10}\right).\left(1 + \frac{1}{11}\right)$

$$= \frac{3}{2}.\frac{4}{3}.\frac{5}{4}...\frac{11}{10}.\frac{12}{11} = 6.$$

Do đó $M^{-1} = \frac{1}{6}.$

**Ví dụ 3.** Cho $A = -4 + (x-3)^2$ ; $B = \frac{1}{2} - (5x+1)^2$.

a) Tính giá trị nhỏ nhất của A ;

b) Tìm giá trị lớn nhất của B.

***Giải***

a) Ta có : $(x-3)^2 \geq 0$ nên $-4 + (x-3)^2 \geq -4$.

Do đó min $A = -4$ khi $x = 3$.

b) Ta có $-(5x+1)^2 \leq 0$ nên $\frac{1}{2} - (5x+1)^2 \leq \frac{1}{2}$.

Do đó $\max B = \frac{1}{2}$ khi $x = -\frac{1}{5}$.

**Ví dụ 4.** Cho $M = 125^7 - 625^5 - 25^9$.

Chứng minh rằng $M \vdots 99$.

***Giải***

Ta có : $M = 125^7 - 625^5 - 25^9$

$$= (5^3)^7 - (5^4)^5 - (5^2)^9$$

$$= 5^{21} - 5^{20} - 5^{18}$$

$$= 5^{18}(5^3 - 5^2 - 1)$$

$$= 5^{18}.99 \vdots 99.$$

**Ví dụ 5.** Tìm tập hợp các giá trị của $n \in \mathbf{N}$ sao cho :

$$81 \leq 3^n \leq 729.$$

***Giải***

Ta có $81 \leq 3^n \leq 729$.

Suy ra $3^4 \leq 3^n \leq 3^6$.

Do đó $4 \leq n \leq 6$.

Vậy $n \in \{4 ; 5 ; 6\}$.

**Ví dụ 6.** Rút gọn biểu thức : $M = \frac{9^4.3^5}{6^2.3^{11}}$.

***Giải***

Ta có : $M = \frac{9^4.3^5}{6^2.3^{11}} = \frac{(3^2)^4.3^5}{(2.3)^2.3^{11}} = \frac{3^8.3^5}{2^2.3^2.3^{11}} = \frac{1}{4}$.

## Dạng 3. GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

### Phương pháp giải

Dựa vào định nghĩa giá trị tuyệt đối của một số và tính chất $|a| \geq 0$ ; $-|a| \leq 0$.

**Ví dụ 1.** Tìm x, y, biết $\left|x-\dfrac{1}{2}\right|+|x-y|\le 0$.

***Giải***

Ta có : $\left|x-\dfrac{1}{2}\right|\ge 0$ ; $|x-y|\ge 0$.

Mà đề bài cho : $\left|x-\dfrac{1}{2}\right|+|x-y|\le 0$ nên $\left|x-\dfrac{1}{2}\right|=0$ và $|x-y|=0$.

Do đó $x-\dfrac{1}{2}=0$ và $x-y=0$.

Suy ra : $x=y=\dfrac{1}{2}$.

**Ví dụ 2.** Xét dấu của hai số hữu tỉ x và y, biết rằng $xy<0$ và $|x|<y^3$.

***Giải***

Ta có $\quad xy<0\Rightarrow$ x và y trái dấu. $\quad$ (1)

$\quad |x|<y^3\Rightarrow y^3>0$ do đó $y>0$. $\quad$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x<0$ và $y>0$.

**Ví dụ 3.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P=\left|x-\frac{3}{4}\right|+\frac{1}{4}.$$

***Giải***

Ta có : $\left|x-\dfrac{3}{4}\right|\ge 0$ nên $\left|x-\dfrac{3}{4}\right|+\dfrac{1}{4}\ge\dfrac{1}{4}$.

Do đó min $P=\dfrac{1}{4}$ khi $x=\dfrac{3}{4}$.

**Ví dụ 4.** Với giá trị nào của x và y thì biểu thức :

$Q=100-|x+1|-|y-2|$ có giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

***Giải***

Ta có : $-|x+1|\le 0$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=-1$).

$\quad -|y-2|\le 0$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y=2$).

Do đó $100 - |x + 1| - |y - 2| \leq 100$.

Vậy $Q \leq 100$, suy ra max $Q = 100$ khi $x = -1$ và $y = 2$.

## Dạng 4. TỈ LỆ THỨC VÀ DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

### Phương pháp giải

Dựa vào định nghĩa của tỉ lệ thức và tính chất của tỉ lệ thức, của dãy tỉ số bằng nhau.

**Ví dụ 1.** Cho năm số 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12. Có bao nhiêu bộ bốn số trong năm số đó có thể lập thành một tỉ lệ thức ?

***Giải***

- Vì $3.8 = 4.6$ nên bộ bốn số 3, 4, 6, 8 có thể lập thành một tỉ lệ thức.
- Vì $4.12 = 6.8$ nên bộ bốn số 4, 6, 8, 12 có thể lập thành một tỉ lệ thức.

Vậy có tất cả hai bộ bốn số trong năm số đã cho có thể lập thành tỉ lệ thức.

**Ví dụ 2.** Tìm x, biết :

$$\frac{x}{20^9} = \frac{3}{2^8.10^{10}}.$$

***Giải***

Ta có : $x = \dfrac{20^9.3}{2^8.10^{10}}$

$$x = \frac{(2^2.5)^9.3}{2^8.(2.5)^{10}} = \frac{2^{18}.5^9.3}{2^8.2^{10}.5^{10}}$$

$$x = \frac{3}{5}.$$

**Ví dụ 3.** Tìm $x, y \in \mathbf{Z}$, biết $\dfrac{1}{x} = \dfrac{y}{2}$.

***Giải***

Ta có : $\dfrac{1}{x} = \dfrac{y}{2} \Rightarrow xy = 2$.

Mặt khác $2 = 1.2 = 2.1 = (-1).(-2) = (-2).(-1)$.

Vậy $x = 1$ ; $y = 2$ hoặc $x = 2$ ; $y = 1$ hoặc $x = -1$ ; $y = -2$ hoặc $x = -2$ ; $y = -1$.

**Ví dụ 4.** Tìm x, y, z, biết : $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}$ và $5x^2 + y^2 - z^2 = 117$.

*Giải*

Ta đặt : $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6} = k$.

Suy ra : $x = 3k$ ; $y = 2k$ ; $z = 6k$.

Ta có $5x^2 + y^2 - z^2 = 117$.

Do đó : $5.(3k)^2 + (2k)^2 - (6k)^2 = 117$

$$13k^2 = 117$$

$$k^2 = 9 \Rightarrow k = \pm 3.$$

- Với $k = 3$ ta được $x = 9$ ; $y = 6$ ; $z = 18$.
- Với $k = -3$ ta được $x = -9$ ; $y = -6$ ; $z = -18$.

## Dạng 5. TÍNH CĂN BẬC HAI CỦA MỘT SỐ KHÔNG ÂM

**Phương pháp giải**

Dựa vào định nghĩa căn bậc hai của một số.

**Ví dụ 1.** Tìm x, biết : $x^2 - 113 = 83$.

*Giải*

Ta có : $x^2 - 113 = 83$.

Suy ra : $x^2 = 83 + 113$

$x^2 = 196$.

Do đó : $x = \pm\sqrt{196}$

$x = \pm 14$.

**Ví dụ 2.** Tìm x, biết : $\sqrt{x + 2,29} = 2,3$.

***Giải***

Ta có : $\sqrt{x + 2,29} = 2,3$.

Suy ra $x + 2,29 = 2,3^2 = 5,29$

$x = 5,29 - 2,29$

$x = 3$.

**Ví dụ 3.** Cho biết $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{x}$.

Hãy tính x (làm giá trị của x đến hàng phần mười).

***Giải***

Ta có : $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{x}$.

Suy ra : $x = \dfrac{\sqrt{3}.\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

$x = 1,095\ldots$

$x \approx 1,1$.

## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**1.** Trong các số sau : $\sqrt{\dfrac{4}{25}}$ ; $0,(6)$ ; $\dfrac{-6}{10}$ và $\dfrac{-9}{-15}$, số nào biểu diễn số hữu tỉ $\dfrac{3}{5}$ ?

**2.** Sắp xếp các số hữu tỉ sau theo thứ tự tăng dần :

$$\sqrt{\frac{4}{9}}\ ;\ \frac{5}{8}\ ;\ \frac{-9}{10}\ ;\ \frac{7}{12}\ ;\ \frac{-5}{6}.$$

**3.** Chứng minh đẳng thức :

$$\frac{3}{31} + \left(\frac{1}{6} + \frac{-5}{9}\right) : \left(\frac{7}{24} - \frac{13}{18}\right) = (2^3)^4 : 2^{12}.$$

**4.** Tìm $x \in \mathbf{Q}$, biết :

a) $\dfrac{25}{12}.x + \dfrac{11}{15} = \dfrac{9}{10}$ ;

b) $\left|x - \dfrac{4}{9}\right| - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{4}$.

5. Tìm số tự nhiên n, biết : $32 \le 2^n \le 256$.

6. Tìm $x \in \mathbf{Q}$, biết : $\sqrt{x} : \sqrt{4} = \sqrt{81} : \sqrt{36}$.

7*. Tìm x, y, z, biết : $42x = 60y = 35z$ và $x - y + z = 60$.

8*. Cho $A = |2x + 5| + 10$ ; $B = \frac{1}{3} - (x + 1)^2$.

a) Tính giá trị nhỏ nhất của A ; b) Tính giá trị lớn nhất của B.

## HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. $\frac{-9}{-15}$.

2. $\frac{-9}{10} < \frac{-5}{6} < \frac{7}{12} < \frac{5}{8} < \sqrt{\frac{4}{9}}$.

3. Mỗi vế đều bằng 1.

4. a) $x = \frac{2}{25}$ ; b) $x = \frac{31}{36}$ hoặc $x = \frac{1}{36}$.

5. $n \in \{5 ; 6 ; 7 ; 8\}$.

6. 9.

7*. Ta có : $42x = 60y = 35z$.

Suy ra : $\frac{42x}{420} = \frac{60y}{420} = \frac{35z}{420}$ hay $\frac{x}{10} = \frac{y}{7} = \frac{z}{12}$.

*Đáp số* : $x = 40$ ; $y = 28$ ; $z = 48$.

8*. a) min A = 10 khi $x = 2,5$ ;

b) $\max B = \frac{1}{3}$ khi $x = -1$.

# Chương II. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

## §1. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN.
## §2. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

### A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

**1.** *Định nghĩa :*

Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức y = kx (với k là hằng số khác 0) thì ta nói y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ k.

• Khi đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ k thì x cũng tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ $\frac{1}{k}$.

**2.** *Tính chất :*

Nếu đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ k thì :

• Tỉ số giữa hai giá trị tương ứng của chúng luôn không đổi :

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \ldots = k.$$

• Tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia :

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}.$$

**3.** Chia một số M cho trước thành những phần x, y, z tỉ lệ thuận với các số a, b, c. Điều này có nghĩa là tìm x, y, z sao cho :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \text{ và } x + y + z = M.$$

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### Dạng 1. CHO HAI ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN. TÌM GIÁ TRỊ CỦA MỘT ĐẠI LƯỢNG KHI BIẾT GIÁ TRỊ CỦA ĐẠI LƯỢNG KIA

**Phương pháp giải**

- Xác định hệ số tỉ lệ k giữa y và x ; $k = \frac{y}{x}$.
- Tìm y theo công thức $y = k.x$.

  Tìm x theo công thức $x = \frac{y}{k}$.

**Ví dụ 1.** Cho biết y và x là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | $x_1 = -4$ | $x_2 = -1$ | $x_3 = 2$ | |
| y | $y_1 = 20$ | | | $y_4 = -15$ |

*Giải*

Vì x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận nên :

$$k = \frac{y_1}{x_1} = \frac{20}{-4} = -5.$$

Suy ra : $y_2 = kx_2 = -5.(-1) = 5$ ;

$y_3 = kx_3 = -5.2 = -10$ ;

$x_4 = \frac{y_4}{k} = \frac{-15}{-5} = 3.$

**Ví dụ 2.** Cho biết đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ $k = -\frac{2}{5}$. Cặp giá trị nào dưới đây là cặp giá trị tương ứng của hai đại lượng nói trên :

a) $x = -4$ ; $y = 10$ ; b) $x = 10$ ; $y = -4$.

*Giải*

Vì y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ $-\frac{2}{5}$ nên $y = -\frac{2}{5}x$.

• a) Khi $x = -4$ thì $y = -\frac{2}{5}(-4) = 1{,}6 \neq 10$.

Vậy $x = -4$ ; $y = 10$ không phải là cặp giá trị tương ứng của hai đại lượng nói trên.

• b) Khi $x = 10$ thì $y = -\frac{2}{5}.10 = -4$.

Vậy $x = 10$ ; $y = -4$ là cặp giá trị tương ứng của hai đại lượng nói trên.

**Ví dụ 3.** Cho biết hai đại lượng y và x tỉ lệ thuận với nhau. Nếu $x = 5$ thì $y = -4$. Hai đại lượng y và x liên hệ với nhau theo công thức nào ?

***Giải***

Vì y và x tỉ lệ thuận với nhau nên : $k = \frac{y}{x} = \frac{-4}{5}$.

Do đó hai đại lượng y và x liên hệ với nhau bởi công thức : $y = -\frac{4}{5}x$.

## Dạng 2. NHẬN BIẾT HAI ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

### Phương pháp giải

• Nếu y liên hệ với x theo công thức $y = kx$ $(k \neq 0)$ thì y tỉ lệ thuận với x.

• Xét các tỉ số tương ứng của hai đại lượng, nếu các tỉ số bằng nhau thì hai đại lượng đó tỉ lệ thuận.

**Ví dụ 1.** Các giá trị tương ứng của y và x được cho trong bảng sau :

| x | 2 | 5 | 8 | 15 |
|---|---|---|---|---|
| y | 14 | 35 | 56 | 105 |

Hỏi hai đại lượng y và x có tỉ lệ thuận không ?

***Giải***

Ta có : $\frac{14}{2} = \frac{35}{5} = \frac{56}{8} = \frac{105}{15} = 7$.

Vậy hai đại lượng y và x tỉ lệ thuận với nhau.

**Ví dụ 2.** Các giá trị tương ứng của y và x được cho trong bảng sau :

| x | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| y | −12 | −16 | 20 | 24 |

Hỏi hai đại lượng y và x có tỉ lệ thuận không ?

*Giải*

Ta có : $\frac{-16}{4} \neq \frac{20}{5}$.

Vậy hai đại lượng y và x không tỉ lệ thuận với nhau.

**Ví dụ 3.** Các giá trị tương ứng của y và x được cho trong bảng sau :

| x | 2 | 4 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| y | –3 | –6 | –7,5 | –10,5 |

Xét các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

a) Đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ $-\frac{3}{2}$.

b) Đại lượng x tỉ lệ thuận với đại lượng y theo hệ số tỉ lệ $\frac{2}{3}$.

*Giải*

• Ta có : $\frac{y}{x} = \frac{-3}{2} = \frac{-6}{4} = \frac{-7,5}{5} = \frac{-10,5}{7} = -\frac{3}{2}$.

Vậy đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ $-\frac{3}{2}$.

Do đó a) đúng.

• Nếu đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ $-\frac{3}{2}$ thì đại lượng x tỉ lệ với đại lượng y theo hệ số tỉ lệ $\frac{-2}{3}$.

Vậy khẳng định b) sai (sai về hệ số tỉ lệ).

## Dạng 3. GIẢI BÀI TOÁN THỰC TẾ VỀ HAI ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

**Phương pháp giải**

• Xác định quan hệ tỉ lệ thuận giữa hai đại lượng y và x.

• Áp dụng tính chất tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia.

**Ví dụ 1.** Cứ xay xát 50 kg thóc thì được 36 kg gạo. Hỏi nếu xay xát 175 kg thóc thì được bao nhiêu ki-lô-gam gạo ?

***Giải***

Tóm tắt đề bài :

| Khối lượng thóc | Khối lượng gạo |
|---|---|
| 50 kg | 36 kg |
| 175 kg | x kg ? |

Khi xay xát thì khối lượng gạo thu được tỉ lệ thuận với khối lượng thóc đem xay xát.

Theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận ta có : $\frac{50}{175} = \frac{36}{x}$.

Suy ra : $x = \frac{175.36}{50} = 126$.

Vậy nếu xay xát 175 kg thóc thì được 126 kg gạo.

**Ví dụ 2.** Mua 6 gói kẹo thì hết 45 000 đồng. Khi đó với 60 000 đồng thì mua được mấy gói kẹo như thế ?

***Giải***

Tóm tắt đề bài :

| Số tiền | Số gói kẹo |
|---|---|
| 45 000 đ | 6 gói |
| 60 000 đ | x gói ? |

Số tiền và số gói kẹo mua được là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

Theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận, ta có : $\frac{45000}{60000} = \frac{6}{x}$.

Suy ra $x = \frac{60000.6}{45000} = 8$.

Vậy với 60 000 đ thì mua được 8 gói kẹo.

**Ví dụ 3.** Một ô tô chạy quãng đường 225 km trong 4,5 giờ. Với vận tốc đó thì xe chạy 150 km trong bao lâu ?

***Giải***

Tóm tắt đề bài :

| Quãng đường | Thời gian |
|---|---|
| 225 km | 4,5 giờ |
| 150 km | x giờ ? |

Với cùng một vận tốc thì quãng đường và thời gian xe chạy là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

Theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận, ta có : $\frac{225}{150} = \frac{4,5}{x}$.

Suy ra : $x = \frac{150.4,5}{225} = 3$.

Vậy xe chạy 150 km hết 3 giờ.

**Dạng 4.** CHIA MỘT SỐ M THÀNH NHỮNG PHẦN x, y, z TỈ LỆ THUẬN VỚI CÁC SỐ a, b, c CHO TRƯỚC

**Phương pháp giải**

- Lập dãy tỉ số bằng nhau : $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ trong đó $x + y + z = M$.
- Vận dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau để tìm x, y, z.

**Ví dụ 1.** Chia số 850 thành ba phần tỉ lệ thuận với 3, 5, 9.

***Giải***

Gọi ba phần cần tìm là x, y, z.

Theo đề bài ta có : $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{9} = \frac{x + y + z}{3 + 5 + 9} = \frac{850}{17} = 50$.

Do đó : $\frac{x}{3} = 50$ suy ra $x = 150$ ;

$\frac{y}{5} = 50$ suy ra $y = 250$ ;

$\frac{z}{9} = 50$ suy ra $z = 450$.

Vậy ba phần cần tìm là 150 ; 250 ; 450.

**Ví dụ 2.** Số đo các góc $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ của $\Delta ABC$ tỉ lệ thuận với 2, 3, 4. Hãy tính số đo mỗi góc của tam giác đó.

***Giải***

Ta có : $\frac{\widehat{A}}{2} = \frac{\widehat{B}}{3} = \frac{\widehat{C}}{4} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{2 + 3 + 4} = \frac{180^o}{9} = 20^o$.

Do đó : $\frac{\widehat{A}}{2} = 20^o \Rightarrow \widehat{A} = 40^o$ ;

$\frac{\widehat{B}}{3} = 20^o \Rightarrow \widehat{B} = 60^o$ ;

$\frac{\widehat{C}}{4} = 20^o \Rightarrow \widehat{C} = 80^o$.

**Ví dụ 3.** Độ dài các cạnh của một tam giác tỉ lệ thuận với 4, 7, 9. Biết cạnh nhỏ nhất dài 20 cm, tính độ dài của cạnh lớn nhất.

***Giải***

Gọi độ dài các cạnh của tam giác lần lượt là x, y, z.

Theo đề bài, ta có : $\frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{z}{9}$.

Khi x = 20 thì ta có : $\frac{20}{4} = \frac{z}{9}$.

Suy ra : $z = \frac{20.9}{4} = 45$.

Vậy độ dài lớn nhất là 45 cm.

**Ví dụ 4.** Chiều dài và chiều rộng của một hình chữ nhật tỉ lệ thuận với 5 và 3. Biết chu vi của hình chữ nhật là 144 m. Tính diện tích của hình chữ nhật đó.

***Giải***

Gọi chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là x, y.

Theo đề bài, ta có : $\frac{x}{5} = \frac{y}{3} = \frac{x+y}{5+3} = \frac{144:2}{8} = 9$.

Do đó : $\frac{x}{5} = 9$ suy ra $x = 45$ ;

$\frac{y}{3} = 9$ suy ra $y = 27$.

Vậy chiều dài là 45 m, chiều rộng là 27 m.

Diện tích của hình chữ nhật là : $45.27 = 1215$ ($m^2$).

## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**1.** Cho biết y và x là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Hãy điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | 3 | 6 | 9 | |
| y | 2 | | | 8 |

**2.** Các giá trị tương ứng của hai đại lượng y và x được cho trong các bảng sau.

a)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | 2,5 | 5 | 7,5 | –10 |

b)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | –2 | –1 | 1 | 3 |
| y | 8 | 4 | –4 | –12 |

Hỏi hai đại lượng y và x có tỉ lệ thuận không ?

**3.** Hai đơn vị vận tải cùng chuyên chở đất đến công trường xây dựng. Đơn vị I có 12 xe, đơn vị II có 15 xe, trọng tải các xe đều như nhau. Biết đơn vị I chở được 60 $m^3$ đất, hỏi đơn vị II chở được bao nhiêu mét khối đất ?

**4.** Chia số 455 thành ba phần tỉ lệ với :

a) 3, 4, 6 ;     b) $\frac{3}{5}$ ; $\frac{1}{4}$ ; $\frac{2}{3}$.

**5*.** Đoạn đường AB dài 275 km. Cùng một lúc, một ô tô chạy từ A và một xe máy chạy từ B, đi ngược chiều để gặp nhau. Vận tốc của ô tô là 60 km/h ; vận tốc của xe máy là 50 km/h. Tính xem đến khi gặp nhau thì mỗi xe đã đi được một quãng đường là bao nhiêu ?

## HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**1.** y = 4 ; y = 6 ; x = 12.

**2.** a) y và x không tỉ lệ thuận.

b) y và x tỉ lệ thuận.

3. $75\ m^3$.

4. a) 105 ; 140 ; 210 ; b) 180 ; 75 ; 200.

5*. Thời gian hai xe chạy là như nhau.

Trong cùng một thời gian, quãng đường và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

Gọi x là quãng đường ô tô chạy.

Gọi y là quãng đường xe máy chạy.

Ta có : $\dfrac{x}{60} = \dfrac{y}{50} = \dfrac{x+y}{60+50} = \dfrac{275}{110} = 2,5.$

Do đó : $x = 2,5.60 = 150$ ;

$y = 2,5.50 = 125$.

Vậy quãng đường ô tô đã đi là 150 km.

Quãng đường xe máy đã đi là 125 km.

# §3. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH.
# §4. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

## A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. *Định nghĩa :*

• Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức $y = \dfrac{a}{x}$ hay $xy = a$ (a là một hằng số khác 0) thì ta nói y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ a.

• Khi y tỉ lệ nghịch với x thì x cũng tỉ lệ nghịch với y (với cùng một hệ số tỉ lệ).

2. *Tính chất :*

Nếu đại lượng y tỉ lệ nghịch với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ a thì :

• Tích các giá trị tương ứng của chúng luôn không đổi (bằng hệ số tỉ lệ) :

$$x_1y_1 = x_2y_2 = x_3y_3 = \ldots = a.$$

• Tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng nghịch đảo của tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia.

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}.$$

3. Chia một số M thành những phần x, y, z tỉ lệ nghịch với các số a, b, c cho trước.

Điều này có nghĩa là tìm x, y, z sao cho :

$$ax = by = cz \text{ và } x + y + z = M.$$

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### Dạng 1. CHO HAI ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH. TÌM GIÁ TRỊ CỦA MỘT ĐẠI LƯỢNG KHI BIẾT GIÁ TRỊ CỦA ĐẠI LƯỢNG KIA

**Phương pháp giải**

- Xác định hệ số tỉ lệ a, với $a = xy$.
- Tìm y theo công thức $y = \dfrac{a}{x}$.

  Tìm x theo công thức $x = \dfrac{a}{y}$.

**Ví dụ 1.** Cho biết y và x là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Hãy điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau :

| x | $x_1 = 8$ | $x_2 = 6$ | |
|---|---|---|---|
| y | $y_1 = -9$ | | $y_3 = 18$ |

***Giải***

Vì y và x là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên : $a = xy = 8.(-9) = -72$.

Suy ra : $y_2 = \dfrac{-72}{x_2} = \dfrac{-72}{6} = -12.$

$$x_3 = \dfrac{-72}{y_3} = \dfrac{-72}{18} = -4.$$

**Ví dụ 2.** Cho biết hai đại lượng y và x tỉ lệ nghịch với nhau theo hệ số tỉ lệ $a = 6$. Cặp giá trị nào dưới đây là cặp giá trị tương ứng của hai đại lượng nói trên :

a) $x = 12$ ; $y = 2$ ;　　　　b) $x = 9$ ; $y = \dfrac{2}{3}$.

*Giải*

Vì y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ a = 6 nên $y = \frac{6}{x}$.

• Khi x = 12 thì $y = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \neq 2$.

Vậy x = 12 ; y = 2 không phải là cặp giá trị tương ứng của hai đại lượng nói trên.

• Khi x = 9 thì $y = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Vậy x = 9 ; $y = \frac{2}{3}$ là cặp giá trị tương ứng của hai đại lượng nói trên.

**Ví dụ 3.** Cho biết hai đại lượng y và x tỉ lệ nghịch với nhau. Nếu x = −3 thì y = 8. Hỏi hai đại lượng y và x liên hệ với nhau theo công thức nào ?

*Giải*

Vì y và x tỉ lệ nghịch với nhau nên a = xy = (−3).8 = −24.

Do đó y và x liên hệ với nhau bằng công thức :

$$xy = -24 \text{ hoặc } y = \frac{-24}{x}.$$

## Dạng 2. NHẬN BIẾT HAI ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

### Phương pháp giải

• Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức $y = \frac{a}{x}$ hay xy = a thì y tỉ lệ nghịch với x.

• Xét tích các giá trị tương ứng của hai đại lượng, nếu các tích này bằng nhau thì hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

**Ví dụ 1.** Các giá trị tương ứng của hai đại lượng y và x được cho trong bảng sau :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | 2 | 3 | 4 | 5 |
| y | 12 | 8 | 6 | 4,8 |

Hỏi hai đại lượng y và x có tỉ lệ nghịch với nhau không ?

*Giải*

Ta có : $2.12 = 3.8 = 4.6 = 5.4,8$ (= 24).

Vậy hai đại lượng y và x tỉ lệ nghịch với nhau theo hệ số tỉ lệ $a = 24$.

**Ví dụ 2.** Các giá trị tương ứng của hai đại lượng y và x được cho trong bảng sau :

| x | –2 | –3 | 6 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| y | 27 | 18 | –8 | 6 |

Hỏi hai đại lượng y và x có tỉ lệ nghịch với nhau không ?

*Giải*

Ta có : $-3.18 \neq 6.(-8)$.

Vậy hai đại lượng y và x không tỉ lệ nghịch với nhau.

**Ví dụ 3.** Bảng sau cho biết các giá trị tương ứng của y và x :

| x | 2 | 3 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| y | 6 | 4 | 3 | 2 |

Khi đó thì trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

a) Hai đại lượng y và x tỉ lệ nghịch với nhau theo hệ số tỉ lệ $a = \frac{1}{3}$.

b) Hai đại lượng y và x tỉ lệ nghịch với nhau theo hệ số tỉ lệ $a = 12$.

*Giải*

Ta có : $2.6 = 3.4 = 4.3 = 6.2 = 12$.

Vậy hai đại lượng y và x tỉ lệ nghịch với nhau theo hệ số tỉ lệ $a = 12$.

Do đó a) sai (sai về hệ số tỉ lệ) và b) đúng.

## Dạng 3. GIẢI BÀI TOÁN THỰC TẾ VỀ HAI ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

### Phương pháp giải

- Xác định quan hệ tỉ lệ nghịch giữa hai đại lượng y và x.
- Áp dụng tính chất tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng nghịch đảo của tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia.

**Ví dụ 1.** Một ô tô chạy từ A đến B với vận tốc 60 km/h thì hết 2,5 giờ. Lúc từ B về A, xe chạy với vận tốc 50 km/h thì mất bao lâu ?

***Giải***

Tóm tắt đề bài :

| Vận tốc | Thời gian |
|---|---|
| 60 km/h | 2,5 giờ |
| 50 km/h | x giờ ? |

Trên cùng một quãng đường, vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ nghịch, ta có : $\frac{60}{50} = \frac{x}{2,5}$.

Suy ra : $x = \frac{60.2,5}{50} = 3$.

Vậy thời gian xe chạy từ B về A là 3 giờ.

**Ví dụ 2.** Để hoàn thành một công việc cần 12 người làm trong 10 ngày. Nếu muốn làm xong sớm 2 ngày thì cần điều động thêm bao nhiêu người (với năng suất như nhau) ?

***Giải***

Tóm tắt đề bài :

| Số ngày làm | Số người làm |
|---|---|
| 10 ngày | 12 người |
| 8 ngày | x người ? |

Với cùng một công việc thì số ngày làm và số người làm là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ nghịch, ta có : $\frac{10}{8} = \frac{x}{12}$.

Suy ra : $x = \frac{10.12}{8} = 15$ (người).

Vậy số người cần điều động thêm là : 15 – 12 = 3 (người).

**Ví dụ 3.** Một ô tô chạy từ A đến B với vận tốc 50 km/h rồi chạy từ B và A với vận tốc 40 km/h. Cả đi lẫn về mất 4 giờ 30 phút. Tính thời gian đi và thời gian về.

*Giải*

Tóm tắt đề bài :

| Vận tốc | Thời gian |
|---|---|
| 50 km/h | x giờ |
| 40 km/h | y giờ |

($x + y = 4{,}5$ giờ).

Trên cùng một quãng đường, vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Theo tính chất của đại lượng tỉ lệ nghịch, ta có : $\dfrac{50}{40} = \dfrac{y}{x}$.

Suy ra : $\dfrac{x}{40} = \dfrac{y}{50} = \dfrac{x+y}{40+50} = \dfrac{4{,}5}{90} = \dfrac{1}{20}$.

Do đó : $\dfrac{x}{40} = \dfrac{1}{20} \Rightarrow x = 2$ ;

$\dfrac{y}{50} = \dfrac{1}{20} \Rightarrow y = 2{,}5$.

Vậy thời gian đi từ A đến B là 2 giờ ;

thời gian đi từ B về A là 2,5 giờ.

## Dạng 4. CHIA MỘT SỐ M CHO TRƯỚC THÀNH NHỮNG PHẦN x, y, z TỈ LỆ NGHỊCH VỚI CÁC SỐ a, b, c CHO TRƯỚC

### Phương pháp giải

- Lập dãy tỉ số bằng nhau : $\dfrac{x}{\frac{1}{a}} = \dfrac{y}{\frac{1}{b}} = \dfrac{z}{\frac{1}{c}}$ (hoặc $ax = by = cz$), trong đó $x + y + z = M$.
- Vận dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau để tìm x, y, z.

**Ví dụ 1.** Chia số 200 thành ba phần tỉ lệ nghịch với 7, 4, 2.

*Giải*

Gọi ba phần cần tìm là x, y, z.

Vì x, y, z tỉ lệ nghịch với 7, 4, 2 nên ta có : $7x = 4y = 2z$.

Do đó : $\dfrac{x}{\frac{1}{7}} = \dfrac{y}{\frac{1}{4}} = \dfrac{z}{\frac{1}{2}} = \dfrac{x+y+z}{\frac{1}{7}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = \dfrac{200}{\frac{25}{28}} = 224.$

Vậy : $x = \frac{1}{7}.224 = 32$ ;

$y = \frac{1}{4}.224 = 56$ ;

$z = \frac{1}{2}.224 = 112.$

Ba phần cần tìm là 32 ; 56 ; 112.

*Chú ý* : Từ $7x = 4y = 2z$ ta có thể tìm x, y, z bằng cách khác như sau :

Ta có : $\dfrac{7x}{28} = \dfrac{4y}{28} = \dfrac{2z}{28}.$

Suy ra : $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{7} = \dfrac{z}{14} = \dfrac{x+y+z}{4+7+14} = \dfrac{200}{25} = 8.$

Từ đó ta được $x = 32$ ; $y = 56$ ; $z = 112$.

**Ví dụ 2.** Chia số 116 thành ba phần tỉ lệ nghịch với $\frac{1}{2}$ ; $\frac{2}{5}$ và 3.

***Giải***

Gọi ba phần cần tìm là x, y, z.

Theo đề bài ta có : $\frac{1}{2}x = \frac{2}{5}y = 3z.$

Do đó : $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{\frac{5}{2}} = \dfrac{z}{\frac{1}{3}} = \dfrac{x+y+z}{2+\frac{5}{2}+\frac{1}{3}} = \dfrac{116}{\frac{29}{6}} = 24.$

Vậy : $x = 2.24 = 48$ ;

$y = \frac{5}{2}.24 = 60$ ;

$z = \frac{1}{3}.24 = 8.$

Ba phần cần tìm là 48 ; 60 ; 8.

**Ví dụ 3.** Ba người A, B, C mua tất cả 5,75 m vải để may áo cỡ như nhau. Khổ vải mà A, B, C đã mua lần lượt là 0,8m ; 0,9m và 1,2m. Hỏi mỗi người đã mua mấy mét vải ?

***Giải***

Gọi số mét vải mà A, B, C đã mua lần lượt là x, y, z.

Với cùng một cỡ áo thì chiều dài của mảnh vải tỉ lệ nghịch với khổ rộng của mảnh vải.

Do đó, ta có : $0,8x = 0,9y = 1,2z$.

Suy ra : $\dfrac{0,8x}{7,2} = \dfrac{0,9y}{7,2} = \dfrac{1,2z}{7,2}$

hay $\dfrac{x}{9} = \dfrac{y}{8} = \dfrac{z}{6} = \dfrac{x+y+z}{9+8+6} = \dfrac{5,75}{23} = \dfrac{1}{4}$.

Do đó : $x = 9.\dfrac{1}{4} = 2,25$.

$y = 8.\dfrac{1}{4} = 2$.

$z = 6.\dfrac{1}{4} = 1,5$.

Vậy A mua 2,25 m ; B mua 2 m và C mua 1,5 m.

## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**1.** Biết y và x là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Hãy điền vào ô trống trong bảng sau :

| x | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|
| y | 18 | | | –6 |

**2.** Các giá trị tương ứng của hai đại lượng y và x được cho trong các bảng sau. Hỏi hai đại lượng y và x có tỉ lệ nghịch không ?

a)

| x | 2 | –3 | 4 | 24 |
|---|---|---|---|---|
| y | –12 | 8 | 6 | –1 |

b)

| x | 1 | 2 | 4 | –5 |
|---|---|---|---|---|
| y | 10 | 5 | 2,5 | –2 |

**3.** 20 công nhân cùng làm một công việc thì hết 6 giờ. Nếu có thêm 4 công nhân nữa cùng làm thì sẽ xong sớm được mấy giờ ?

**4.** Chia số 7567 thành ba phần tỉ lệ nghịch với :

a) 4 ; 7 ; 6 ; b) $\frac{2}{3};\frac{5}{6};\frac{3}{8}$.

**5.*** Một ô tô đi từ A đến B, với vận tốc 50 km/h. Lúc từ B về A xe chạy với vận tốc 60 km/h. Biết thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút. Tính thời gian đi và thời gian về.

## HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**1.** y = 12 ; y = 9 ; x = –6.

**2.** a) y và x không tỉ lệ nghịch.

b) y và x tỉ lệ nghịch.

**3.** 1 giờ.

**4.** a) x = 3381 ; y = 1932 ; z = 2254.

b) x = 2115 ; y = 1692 ; z = 3760.

**5*.** 

| Vận tốc | Thời gian |
|---|---|
| 50 km/h | x giờ |
| 60 km/h | y giờ. |

Ta có : $\frac{50}{60}=\frac{y}{x}$.

Suy ra : $\frac{x}{60}=\frac{y}{50}=\frac{x-y}{60-50}=\frac{0,5}{10}=\frac{1}{20}$.

Do đó : $x = 60.\frac{1}{20} = 3$ ;

$y = 50.\frac{1}{20} = 2,5$.

Vậy thời gian lúc đi là 3 giờ ; thời gian lúc về là 2,5 giờ.

# §5. HÀM SỐ

## A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được *chỉ một* giá trị tương ứng của y thì y *được gọi là hàm số của* x và x *gọi là biến số.*

*Chú ý* :

- Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị thì y được gọi là *hàm hằng.*
- Hàm số có thể được cho bằng bảng, bằng công thức,...
- Khi y là hàm số của x ta có thể viết $y = f(x)$, $y = g(x)$,...

Chẳng hạn với hàm số được cho bởi công thức $y = 2x + 3$ ta còn có thể viết $y = f(x) = 2x + 3$.

Khi $x = 3$ thì $y = 9$, ta viết $f(3) = 9$.

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

### Dạng 1. XÁC ĐỊNH XEM ĐẠI LƯỢNG y CÓ PHẢI LÀ HÀM SỐ CỦA ĐẠI LƯỢNG x KHÔNG ?

#### Phương pháp giải

Cần kiểm tra điều kiện : mỗi giá trị của đại lượng x được tương ứng với *một* và *chỉ một* giá trị của đại lượng y.

**Ví dụ 1.** Các giá trị tương ứng của hai đại lượng x và y được cho trong bảng sau :

| x | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 6 | 4 | 2 | 0 | 0 |

Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không ?

***Giải***

Trong bảng ta thấy mỗi giá trị của x đều được tương ứng với một và chỉ một giá trị của y nên y là hàm số của x.

**Ví dụ 2.** Các giá trị tương ứng của hai đại lượng x và y được cho trong hai bảng sau :

**Bảng 1**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | –5 | 0 | 3 | 4 |
| y | 7 | 2 | 1 | |

**Bảng 2**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | 8 | 10 | 12 | 8 |
| y | 5 | 13 | –1 | –5 |

Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không ?

***Giải***

• Xét bảng 1, ta thấy giá trị x = 4 của đại lượng x không được tương ứng với một giá trị nào của đại lượng y nên đại lượng y không phải là hàm số của đại lượng x.

• Xét bảng 2, ta thấy giá trị x = 8 của đại lượng x được tương ứng với hai giá trị khác nhau của đại lượng y là 5 và –5 nên đại lượng y không phải là hàm số của đại lượng x.

**Ví dụ 3.** Các giá trị tương ứng của hai đại lượng x và y được cho trong hai bảng sau :

**Bảng 3**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | 20 | 20 | 20 | 20 |

**Bảng 4**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | –1 | –2 | –3 | –4 | | |
| y | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 |

Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không ?

***Giải***

Xét *bảng 3* và *bảng 4*, ta đều thấy với mỗi giá trị của x đều được tương ứng với một và chỉ một giá trị của y nên y là hàm số của x.

## Dạng 2. TÌM GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT GIÁ TRỊ CHO TRƯỚC CỦA BIẾN SỐ VÀ NGƯỢC LẠI

### Phương pháp giải

• Nếu hàm số được cho bằng bảng thì cặp giá trị tương ứng của x và y nằm trong cùng một cột.

• Nếu hàm số được cho bằng công thức thì ta thay giá trị đã cho vào công thức, từ đó tìm được giá trị tương ứng của đại lượng kia.

**Ví dụ 1.** Cho hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 7$.

a) Tính $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ; f(3) ;                b) Biết f(x) = 93, tìm x.

***Giải***

a) Ta có : $y = f(x) = 4x^2 - 7$.

Do đó : $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7 = 1 - 7 = -6$.

$f(3) = 4.3^2 - 7 = 36 - 7 = 29$.

b) Ta có : $f(x) = 93 \Leftrightarrow 4x^2 - 7 = 93 \Leftrightarrow 4x^2 = 100 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm 5$.

**Ví dụ 2.** Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

a) $f(-2) = 2$ ;                b) $f(-1) = \frac{1}{2}$ ;

c) $f(0) = \frac{1}{2}$ ;                d) $f(-3) = f(3)$.

***Giải***

- Ta có : $f(-2) = \frac{1}{2}.(-2)^2 = 2$. Vậy a) đúng.
- $f(-1) = \frac{1}{2}.(-1)^2 = \frac{1}{2}$. Vậy b) đúng.
- $f(0) = \frac{1}{2}.0^2 = 0$. Vậy c) sai.
- $f(-3) = \frac{1}{2}.(-3)^2 = \frac{9}{2}$ ; $f(3) = \frac{1}{3}.3^2 = \frac{9}{2}$.

  Do đó $f(-3) = f(3)$. Vậy d) đúng.

**Ví dụ 3.** Hàm số $y = f(x) = 4x + b$.

Biết $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, tính b.

*Giải*

Thay $x = \frac{1}{2}$ vào hàm số đã cho, ta được : $4.\frac{1}{2} + b = 1$.

Suy ra : $2 + b = 1$, do đó $b = -1$.

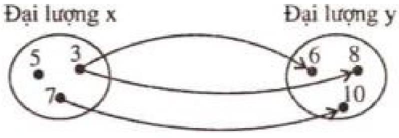
## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**1.** Các giá trị tương ứng của hai đại lượng x và y được cho trong bảng sau :

| x | –5 | –2 | 0 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | –7 | –1 | | 6 | 9 |

Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không ?

**2.** Các giá trị của hai đại lượng x và y được cho bởi *sơ đồ mũi tên* như hình 2 dưới đây.




Hình 2

Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không ?

**3.*** Các giá trị tương ứng của hai đại lượng x và y được cho trong bảng sau :

| x | –5 | 0 | 5 | 12,7 |
|---|---|---|---|---|
| y | 5 | 0 | 5 | 12,7 |

Hỏi y có phải là hàm số của x không ? Nếu y là hàm số của x, hãy viết công thức của hàm số đó.

**4.** Cho hàm số $y = f(x) = -2x^2 + 3$.

a) Tính $f(-1)$ ; $f(2)$.

b) Biết $f(x) = \frac{5}{2}$, tìm x.

## HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**1.** y không phải là hàm số của x.

**2.** y không phải là hàm số của x vì có một giá trị của x ($x = 3$) tương ứng với hai giá trị khác nhau của y ($y = 6$ ; $y = 8$) hoặc giá trị $x = 5$ không được tương ứng với giá trị nào của y.

**3*.** y làm hàm số của x.

Công thức : $y = |x|$ với $x \in \{-5 ; 0 ; 5 ; 12,7\}$.

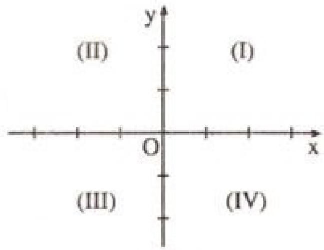
**4.** a) $f(-1) = 1$ ; $f(2) = -5$ ; b) $x = \pm\frac{1}{2}$.

# §6. MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ.
# §7. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax$ $(a \neq 0)$

## A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

**1.** *Mặt phẳng toạ độ*

Trên mặt phẳng ta vẽ hai trục số Ox và Oy vuông góc với nhau tại gốc O của mỗi trục số. Khi đó ta có hệ trục toạ độ Oxy. Các trục Ox và Oy gọi là *các trục toạ độ*.



Hình 3

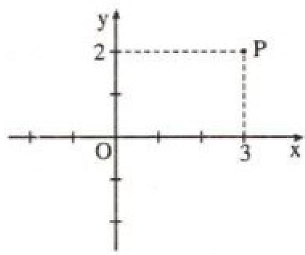
Trục Ox gọi là *trục hoành*, trục Oy gọi là *trục tung*.

Điểm O biểu diễn số 0 của cả hai trục gọi là *gốc toạ độ*.

Hai trục toạ độ chia mặt phẳng thành bốn góc vuông : góc phần tư thứ I, II, III, IV (h.3).

**2.** *Toạ độ của một điểm trong mặt phẳng toạ độ*

Từ một điểm P trong một mặt phẳng toạ độ Oxy ta vẽ các đường vuông góc với các trục toạ độ. Giả sử các đường vuông góc này cắt trục hoành tại điểm 3, cắt trục tung tại điểm 2. Khi đó cặp số (3 ; 2) gọi là toạ độ của điểm P và kí hiệu là P(3 ; 2) (h.4).



Hình 4

Số 3 gọi là hoành độ, số 2 gọi là tung độ của điểm P.

*Nhận xét :* Trong mặt phẳng toạ độ, mỗi điểm P xác định một cặp số. Ngược lại, mỗi cặp số xác định một điểm P.

3. *Đồ thị của hàm số*

Đồ thị của hàm số y = f(x) là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng (x ; y) trên mặt phẳng toạ độ.

4. *Đồ thị của hàm số $y = ax$ $(a \neq 0)$.*

Là một đường thẳng đi qua gốc toạ độ.

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### Dạng 1. TÌM TOẠ ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM CHO TRƯỚC VÀ NGƯỢC LẠI, VẼ MỘT ĐIỂM CÓ TOẠ ĐỘ CHO TRƯỚC

**Phương pháp giải**

- Muốn tìm toạ độ của điểm M cho trước, từ M ta vẽ những đường thẳng vuông góc với hai trục toạ độ.
- Ngược lại, muốn vẽ điểm M có toạ độ $(x_0 ; y_0)$ trên mặt phẳng toạ độ thì từ điểm $x_0$ trên trục hoành vẽ một đường thẳng vuông góc với trục hoành ; từ điểm $y_0$ trên trục tung vẽ đường thẳng vuông góc với trục tung, chúng cắt nhau tại điểm M cần tìm.

**Ví dụ 1.** Xác định toạ độ của các điểm M, N, P, Q trong hình 5.

***Giải.*** (h.5)

Đường thẳng qua M và vuông góc với Ox cắt Ox tại điểm có hoành độ là 2.

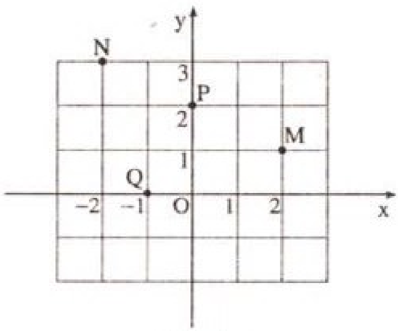
Đường thẳng qua M và vuông góc với Oy cắt Oy tại điểm có tung độ là 1.

Vậy toạ độ của điểm M là M(2 ; 1).

Tương tự, toạ độ của điểm N là N(−2 ; 3) ;

toạ độ của điểm P là P(0 ; 2) ;

toạ độ của điểm Q là Q(−1 ; 0).




Hình 5

*Nhận xét* : Điểm nằm trên trục tung thì có hoành độ bằng 0 ; điểm nằm trên trục hoành thì có tung độ bằng 0.

**Ví dụ 2.** Vẽ tam giác ABC biết A(–1 ; 2) ; B(–2 ; –1) ; C(3 ; 0).

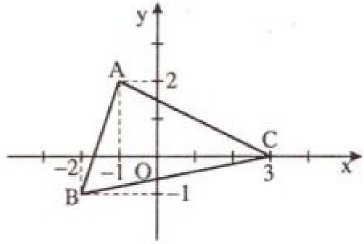
***Giải.*** (h.6)

Để vẽ điểm A(–1 ; 2) ta làm như sau :

Tại điểm –1 trên trục hoành vẽ đường vuông góc với trục hoành.

Tại điểm 2 trên trục tung vẽ đường vuông góc với trục tung, hai đường vuông góc cắt nhau tại A.

Đối với điểm B, điểm C : vẽ tương tự.



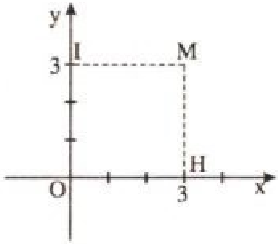
Hình 6

**Ví dụ 3.** Trên mặt phẳng toạ độ Oxy (trong góc phần tư thứ I), vẽ hình vuông OHMI có cạnh dài 3 đơn vị, điểm H thuộc tia Ox và điểm I thuộc tia Oy. Hãy tìm toạ độ của điểm M.

***Giải.*** (h.7)

Điểm H nằm trên tia Ox cách gốc 3 đơn vị.

Điểm I nằm trên tia Oy cách gốc 3 đơn vị nên toạ độ của điểm M là M(3 ; 3).



Hình 7

**Dạng 2.** VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax$ $(a \neq 0)$.

**Phương pháp giải**

- Xác định một điểm A thuộc đồ thị (khác gốc O) bằng cách cho x một giá trị khác 0 rồi tìm giá trị tương ứng của y.
- Vẽ điểm A(x ; y).
- Vẽ đường thẳng OA ta được đồ thị của hàm số đã cho.

**Ví dụ 1.** Vẽ trên cùng một hệ trục toạ độ, đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = 3x$ ; b) $y = 0,5x$.

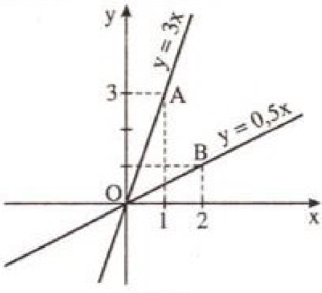
***Giải.*** (h.8)

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = 3x$.

Cho $x = 1$ thì $y = 3$.

Vẽ điểm A(1 ; 3).

Đường thẳng OA là đồ thị của hàm số $y = 3x$.



Hình 8

b) Vẽ đồ thị của hàm số $y = 0,5x$.

Cho $x = 2$ thì $y = 1$.

Vẽ điểm $B(2 ; 1)$.

Đường thẳng OB là đồ thị của hàm số $y = 0,5x$.

**Ví dụ 2.** Vẽ trên cùng một hệ trục toạ độ, đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = -2x$ ;      b) $y = -1\frac{1}{3}x$.

***Giải.*** (h.9)

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = -2x$.

Cho $x = 1$ thì $y = -2$.

Vẽ điểm $A(1 ; -2)$.

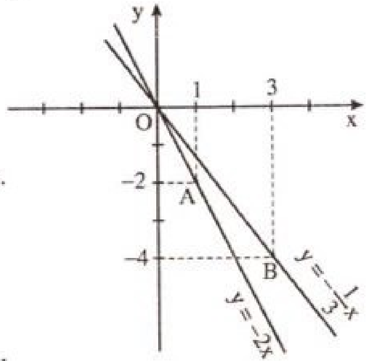
Đường thẳng OA là đồ thị của hàm số $y = -2x$.

b) Vẽ đồ thị của hàm số $y = -1\frac{1}{3}x$.

Cho $x = 3$ thì $y = -4$.

Vẽ điểm $B(3 ; -4)$.

Đường thẳng OB là đồ thị của hàm số $y = -1\frac{1}{3}x$.



Hình 9

***Lưu ý :*** Đối với hàm số $y = -1\frac{1}{3}x$ nếu ta cho $x = 1$ thì $y = -1\frac{1}{3}$. Điểm $\left(1 ; -1\frac{1}{3}\right)$ rất khó vẽ chính xác vì toạ độ không nguyên. Vì thế ta cho $x = 3$ để được $y = -4$. Điểm $B(3 ; -4)$ dễ vẽ hơn.

**Ví dụ 3.** Đường thẳng OM trong hình 10 là đồ thị của hàm số nào dưới đây ?

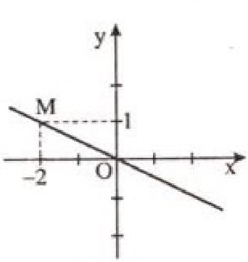
(A) $y = 2x$ ;      (B) $y = \frac{1}{2}x$ ;

(C) $y = -x$ ;      (D) $y = -\frac{1}{2}x$.

***Giải.*** (h.10)

Xét hàm số $y = -\frac{1}{2}x$.

Khi $x = -2$ thì $y = 1$.



Hình 10

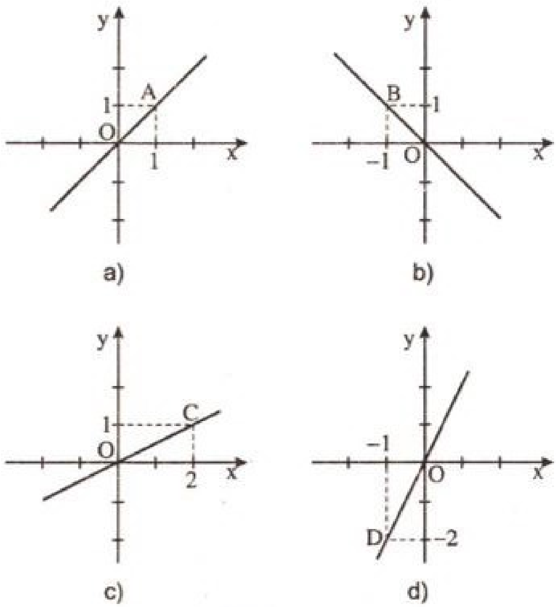
Vậy đường thẳng OM là đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x$. Suy ra chọn (D).

**Ví dụ 4.** Đồ thị nào trong hình 11 là đồ thị của hàm số y = x ?

*Giải.* (h.11)

Xét đồ thị ở *hình 11a).*

Điểm A có hoành độ đúng bằng tung độ nên đồ thị ở *hình 11a)* là đồ thị của hàm số y = x.




Hình 11

**Dạng 3.** XÉT XEM ĐIỂM $M(x_0 ; y_0)$ CHO TRƯỚC CÓ THUỘC ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ y = ax KHÔNG ?

**Phương pháp giải**

Ta thay $x = x_0$ ; $y = y_0$ vào hàm số y = ax.

- Nếu được một đẳng thức đúng thì điểm $M(x_0 ; y_0)$ thuộc đồ thị của hàm số y = ax.
- Nếu được một đẳng thức sai thì điểm $M(x_0 ; y_0)$ không thuộc đồ thị của hàm số y = ax.

**Ví dụ 1.** Điểm nào dưới đây thuộc đồ thị của hàm số : $y = -\frac{2}{3}x$.

A(1 ; 2) ; B(3 ; –2).

***Giải***

a) Thay x = 1 ; y = 2 vào hàm số $y = -\frac{2}{3}x$, ta được : $2 \neq -\frac{2}{3}.1$.

Đẳng thức này sai nên điểm A(1 ; 2) không thuộc đồ thị của hàm số $y = -\frac{2}{3}x$.

b) Thay x = 3 ; y = –2 vào hàm số $y = -\frac{2}{3}x$, ta được : $-2 = -\frac{2}{3}.3$.

Đẳng thức này đúng nên điểm B(3 ; –2) thuộc đồ thị của hàm số $y = -\frac{2}{3}x$.

**Ví dụ 2.** Điểm M(–6 ; 3) thuộc đồ thị của hàm số nào dưới đây ?

(A) $y = \frac{1}{2}x$ ; (B) $y = -\frac{1}{2}x$ ; (C) $y = -3x$ ; (D) $y = -2x$.

***Giải***

Xét hàm số $y = -\frac{1}{2}x$. Thay x = –6 và y = 3 vào hàm số, ta được :

$$3 = -\frac{1}{2}.(-6).$$

Đẳng thức này đúng nên điểm M(–6 ; 3) thuộc đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x$.

**Ví dụ 3.** Cho hàm số y = 4x. Ba điểm nào trong bốn điểm dưới đây thẳng hàng (vì cùng nằm trên đồ thị của hàm số y = 4x) ?

$A\left(-\frac{1}{2} ; -2\right)$ ; $B\left(\frac{1}{2} ; 2\right)$ ; C(2 ; –6) ; D(–2 ; –8).

***Giải***

• Thay $x = -\frac{1}{2}$ ; y = –2 vào hàm số y = 4x ta được đẳng thức đúng $-2 = 4.\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Vậy điểm $A\left(-\frac{1}{2} ; -2\right)$ thuộc đồ thị của hàm số y = 4x.

• Thay $x = \frac{1}{2}$ ; y = 2 vào hàm số y = 4x ta được đẳng thức đúng $2 = 4.\frac{1}{2}$.

Vậy điểm $B\left(\frac{1}{2} ; 2\right)$ thuộc đồ thị của hàm số y = 4x.

• Thay x = 2 ; y = –6 vào hàm số y = 4x ta được đẳng thức sai (–6 ≠ 4.2).

Vậy điểm C(2 ; –6) không thuộc đồ thị của hàm số y = 4x.

• Thay $x = -2$ ; $y = -8$ vào hàm số $y = 4x$ ta được đẳng thức đúng $-8 = 4.(-2)$.

Vậy điểm $D(-2 ; -8)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = 4x$.

Từ các kết quả trên ta suy ra ba điểm A, B, D thẳng hàng vì cùng thuộc đồ thị của hàm số $y = 4x$.

## Dạng 4. XÁC ĐỊNH HỆ SỐ a CỦA HÀM SỐ $y = ax$ BIẾT ĐỒ THỊ CỦA NÓ ĐI QUA ĐIỂM $M(x_0 ; y_0)$.

### Phương pháp giải

• Thay $x = x_0$ ; $y = y_0$ vào hàm số $y = ax$.

• Suy ra $a = \frac{y_0}{x_0}$.

**Ví dụ 1.** Đồ thị của hàm số $y = ax$ đi qua điểm $M(5 ; -2)$. Tính hệ số a.

***Giải***

Thay $x = 5$, $y = 2$ vào hàm số $y = ax$ ta được : $-2 = a.5 \Rightarrow a = \frac{-2}{5}$.

**Ví dụ 2.** Tìm số k biết đồ thị của hàm số $y = (k - 1)x$ đi qua điểm $N(6 ; -4)$.

***Giải***

Thay $x = 6$ ; $y = -4$ vào hàm số $y = (k - 1)x$, ta được : $-4 = (k - 1).6$.

Suy ra : $-4 = 6k - 6 \Rightarrow 6k = 6 - 4 = 2$.

Do đó $k = \frac{1}{3}$.

## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**1.** Vẽ trên cùng một hệ trục toạ độ, đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = 2,5x$ ; b) $y = -\frac{3}{4}x$.

**2.** Cho hàm số $y = 2x$. Điểm nào dưới đây thuộc đồ thị của hàm số đó : $A(1 ; 2)$ ; $B(2 ; 3)$ ; $C(3 ; 6)$.

3. Đồ thị của hàm số $y = ax$ đi qua điểm $M(-4 ; 6)$. Tính hệ số a.

4*. Cho ba điểm $A(1 ; -2)$ ; $B(-2 ; 4)$ ; $C(-2,5 ; 5)$. Chứng tỏ rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng.

## HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. a) Vẽ điểm $A(2 ; 5)$ rồi vẽ đường thẳng OA.

   b) Vẽ điểm $B(4 ; -3)$ rồi vẽ đường thẳng OB.

2. Điểm A, điểm C thuộc đồ thị.

3. $a = -1,5$.

4*. Xét hàm số $y = -2x$. Cả ba điểm A, B, C đều thuộc đồ thị của hàm số này.

# ÔN TẬP CHƯƠNG II

## A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. *Đại lượng tỉ lệ*

   • *Định nghĩa :*

   – Đại lượng tỉ lệ thuận : $y = kx$ $(k \neq 0)$.

   – Đại lượng tỉ lệ nghịch : $y = \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$.

   • Tính chất :

   – Hai đại lượng tỉ lệ thuận : $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \ldots$ ; $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$.

   – Hai đại lượng tỉ lệ nghịch : $x_1y_1 = x_2y_2 = x_3y_3 = \ldots$ ; $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$.

2. *Định nghĩa hàm số :* $y = f(x)$.

3. *Mặt phẳng toạ độ. Đồ thị của hàm số $y = ax$ $(a \neq 0)$.*

   • Hệ trục toạ độ Oxy, các khái niệm trục hoành và trục tung.

   • Cách xác định toạ độ của một điểm cho trước và ngược lại, cách xác định một điểm khi biết toạ độ của nó.

   • Đồ thị của hàm số $y = ax$ : Hình dạng và cách vẽ.

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### Dạng 1. NHẬN BIẾT QUAN HỆ TỈ LỆ THUẬN, TỈ LỆ NGHỊCH GIỮA HAI ĐẠI LƯỢNG

**Phương pháp giải**

- Dựa vào sự liên hệ giữa hai đại lượng theo công thức $y = kx$ $(k \neq 0)$ hoặc $y = \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$.
- Xem tỉ số các giá trị tương ứng hoặc tích các giá trị tương ứng của hai đại lượng có phải là hằng số không.

**Ví dụ 1.** Các giá trị tương ứng của hai đại lượng x và y được cho trong bảng sau :

| x | 1 | 3 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| y | 5 | 15 | 25 | 35 |

Hỏi :

a) Đại lượng y có tỉ lệ thuận với đại lượng x không ?

b) Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không ?

Nếu y là hàm số của x, hãy viết công thức của hàm số đó.

***Giải***

a) Ta có : $\frac{5}{1} = \frac{15}{3} = \frac{25}{5} = \frac{35}{7} = 5$.

Do đó đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x.

b) Mỗi giá trị của đại lượng x đều được tương ứng với một giá trị của đại lượng y nên đại lượng y là hàm số của đại lượng x.

Công thức : $y = 5x$ với $x \in \{1 ; 3 ; 5 ; 7\}$.

**Ví dụ 2.** Cho biết đại lượng x tỉ lệ thuận với đại lượng y theo hệ số tỉ lệ k. Đại lượng y tỉ lệ nghịch với đại lượng z theo hệ số tỉ lệ k. Khi đó, xét các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

a) Đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ k.

b) Đại lượng x tỉ lệ nghịch với đại lượng z theo hệ số tỉ lệ k.

c) Đại lượng x tỉ lệ nghịch với đại lượng z theo hệ số tỉ lệ 2k.

d) Đại lượng x tỉ lệ nghịch với đại lượng z theo hệ số tỉ lệ $k^2$.

*Giải*

• Đại lượng x tỉ lệ thuận với đại lượng y theo hệ số tỉ lệ k thì đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x theo hệ số tỉ lệ $\frac{1}{k}$. Vậy a) sai.

• Ta có x tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ k nên x = k.y. (1)

Đại lượng y tỉ lệ nghịch với đại lượng z theo hệ số tỉ lệ k, nên :

$$y = \frac{k}{z} \Rightarrow z = \frac{k}{y}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có : $x.z = k.y.\frac{k}{y} = k^2$.

Do đó x và z tỉ lệ nghịch theo hệ số tỉ lệ $k^2$.

Vậy d) đúng ; b) và c) sai.

**Ví dụ 3.** Xét các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ? Khẳng định nào sai ?

a) Với vận tốc không đổi thì quãng đường xe đi được tỉ lệ thuận với thời gian.

b) Với lãi suất không đổi thì trong một kì hạn nhất định, số tiền lãi tỉ lệ thuận với số tiền gửi tiết kiệm.

c) Với một số tiền không đổi thì số lượng hàng mua được tỉ lệ nghịch với giá hàng.

*Giải*

Cả a), b), c) đều đúng.

## Dạng 2. TÌM GIÁ TRỊ CỦA MỘT ĐẠI LƯỢNG KHI BIẾT GIÁ TRỊ CỦA ĐẠI LƯỢNG KIA

### Phương pháp giải

• Viết công thức liên hệ giữa hai đại lượng.

• Thay giá trị đã biết vào công thức để tìm giá trị của đại lượng kia.

**Ví dụ 1.** Cứ xay xát 100 kg thóc thì được 74 kg gạo. Muốn được 185 kg gạo thì phải xay xát bao nhiêu ki-lô-gam thóc ?

*Giải*

Tóm tắt đề bài :

| | |
|---|---|
| Gạo | Thóc |
| 74 kg | 100 kg |
| 185 kg | x kg ? |

Vì khối lượng gạo tỉ lệ thuận với khối lượng thóc, nên theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận, ta có :

$$\frac{74}{185} = \frac{100}{x}.$$

Suy ra : $x = \frac{185.100}{74} = 250.$

Vậy muốn được 185 kg gạo thì phải xay xát 250 kg thóc.

**Ví dụ 2.** 10 công nhân làm xong một công việc trong 18 ngày. Hỏi muốn làm xong công việc đó trong 12 ngày thì cần bao nhiêu công nhân ?

*Giải*

Tóm tắt đề bài :

| | |
|---|---|
| Thời gian | Số công nhân |
| 18 ngày | 10 công nhân |
| 12 ngày | x công nhân ? |

Với cùng một công việc thì thời gian làm và số người làm là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ nghịch, ta có : $\frac{18}{12} = \frac{x}{10}$.

Suy ra : $x = \frac{18.10}{12} = 15.$

Vậy muốn hoàn thành công việc trong 12 ngày thì cần 15 công nhân.

## Dạng 3. CHIA MỘT SỐ M CHO TRƯỚC THÀNH NHỮNG PHẦN TỈ LỆ THUẬN (HAY NGHỊCH) VỚI CÁC SỐ CHO TRƯỚC

### Phương pháp giải

Lập dãy tỉ số bằng nhau rồi vận dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau để tìm các số chưa biết.

**Ví dụ 1.** Chia số 1316 thành ba phần :

a) Tỉ lệ thuận với : $\frac{2}{3}$ ; $\frac{5}{4}$ và 2.

b) Tỉ lệ nghịch với : $\frac{2}{3}$ ; $\frac{5}{4}$ và 2.

*Giải*

a) Gọi ba phần cần tìm là x, y, z.

Vì x, y, z tỉ lệ thuận với : $\frac{2}{3}$ ; $\frac{5}{4}$ và 2 nên ta có :

$$\frac{x}{\frac{2}{3}} = \frac{y}{\frac{5}{4}} = \frac{z}{2} = \frac{x+y+z}{\frac{2}{3}+\frac{5}{4}+2} = \frac{1316}{\frac{47}{12}} = 336.$$

Do đó : $x = \frac{2}{3}.336 = 224$ ;

$y = \frac{5}{4}.336 = 420$ ;

$z = 2.336 = 672.$

b) Gọi ba phần cần tìm là x, y, z.

Vì x, y, z tỉ lệ nghịch với $\frac{2}{3}$ ; $\frac{5}{4}$ và 2 nên ta có :

$$\frac{2}{3}.x = \frac{5}{4}.y = 2z.$$

Suy ra : $\frac{x}{\frac{3}{2}} = \frac{y}{\frac{4}{5}} = \frac{z}{\frac{1}{2}} = \frac{x+y+z}{\frac{3}{2}+\frac{4}{5}+\frac{1}{2}} = \frac{1316}{\frac{14}{5}} = 470.$

Do đó : $x = \frac{3}{2}.470 = 705$ ;

$y = \frac{4}{5}.470 = 376$ ;

$z = \frac{1}{2}.470 = 235.$

**Ví dụ 2.** Trong một phân xưởng may, ba tổ nhận may một số hàng như sau. Tổ I có 10 người, tổ II có 12 người, tổ III có 15 người. Biết năng suất lao động của mỗi người là như nhau và số ngày làm của tổ I hơn số ngày làm của tổ II là 3 ngày. Tính số ngày làm của mỗi tổ.

*Giải*

Gọi số ngày làm của ba tổ lần lượt là x, y, z.

Với cùng một công việc thì số người làm tỉ lệ nghịch với số ngày làm.

Do đó ta có : $10x = 12y = 15z$, trong đó $x - y = 3$.

Suy ra : $\dfrac{x}{\frac{1}{10}} = \dfrac{y}{\frac{1}{12}} = \dfrac{z}{\frac{1}{15}} = \dfrac{x-y}{\frac{1}{10}-\frac{1}{12}} = \dfrac{3}{\frac{1}{60}} = 180.$

Do đó : $x = \dfrac{1}{10}.180 = 18$ ;

$y = \dfrac{1}{12}.180 = 15$ ;

$z = \dfrac{1}{15}.180 = 12.$

Vậy số ngày làm của ba tổ I, II, II lần lượt là : 18, 15, 12 (ngày).

## Dạng 4. VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax$ $(a \neq 0)$. XÁC ĐỊNH ĐIỂM THUỘC ĐỒ THỊ HOẶC KHÔNG THUỘC ĐỒ THỊ

### Phương pháp giải

• Cách vẽ đồ thị của hàm số $y = ax$ $(a \neq 0)$ :

Vẽ một điểm A khác gốc O. Đồ thị là đường thẳng OA.

• Nếu thay $x = x_0$ ; $y = y_0$ vào hàm số $y = ax$ $(a \neq 0)$ mà được một đẳng thức đúng (hoặc sai) thì điểm $(x_0 ; y_0)$ thuộc (hoặc không thuộc) đồ thị của hàm số $y = ax$.

**Ví dụ 1.** Cho các hàm số $y = 1,5x$ và $y = -3x$.

a) Vẽ đồ thị của các hàm số này trên cùng một hệ trục toạ độ.

b) Điểm $M(-12 ; -18)$ thuộc đồ thị của hàm số nào trong hai hàm số đã cho ?

*Giải.* (h.12)

a) • Xét hàm số $y = 1,5x$.

Cho $x = 2$ thì $y = 3$.

Vẽ điểm A(2 ; 3).

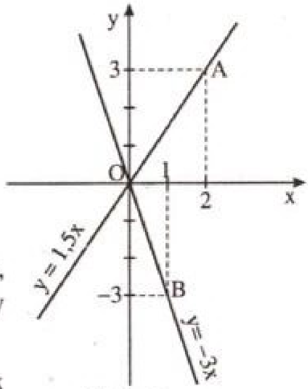
Đường thẳng OA là đồ thị của hàm số $y = 1,5x$.

• Xét hàm số $y = -3x$.

Cho $x = 1$ thì $y = -3$.

Vẽ điểm B(1 ; –3).

Đường thẳng OB là đồ thị của hàm số $y = -3x$.




Hình 12

b) • Thay $x = -12$ ; $y = -18$ vào hàm số $y = 1,5x$, ta được : $-18 = 1,5.(-12)$. Đẳng thức này đúng, vậy điểm M(–12 ; –18) thuộc đồ thị của hàm số $y = 1,5x$.

• Thay $x = -12$ ; $y = -18$ vào hàm số $y = -3x$ ta được $-18 \neq -3.(-12)$.

Đẳng thức này sai, vậy điểm M(–12 ; –18) không thuộc đồ thị của hàm số $y = -3x$.

**Ví dụ 2.** Cho hàm số $y = -2,5x$. Hai điểm P và Q thuộc đồ thị của hàm số này. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

a) Đường thẳng PQ đi qua gốc toạ độ.

b) Nếu hoành độ của P là 4 thì tung độ của P là 10.

c) Nếu tung độ của Q là 15 thì hoành độ của Q là –6.

***Giải***

a) Đúng vì đồ thị của hàm số $y = -2,5x$ là một đường thẳng đi qua gốc toạ độ.

b) Sai vì khi thay $x = 4$ ; $y = 10$ vào hàm số $y = -2,5x$ ta được một đẳng thức sai.

c) Đúng vì khi thay $x = -6$ ; $y = 15$ vào hàm số $y = -2,5x$ ta được một đẳng thức đúng là : $15 = -2,5.(-6)$.

**Ví dụ 3.** Đồ thị của hàm số $y = ax$ đi qua điểm M(–3 ; 4,5). Hỏi N(8 ; –12) có thuộc đồ thị của hàm số $y = ax$ không ?

***Giải***

Thay $x = -3$ ; $y = 4,5$ vào hàm số $y = ax$ ta được :

$$4,5 = a.(-3) \Rightarrow a = -1,5.$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số $y = -1,5x$.

Thay $x = 8$ ; $y = -12$ vào hàm số $y = -1,5x$ ta được một đẳng thức đúng :

$$-12 = -1,5.8.$$

Vậy điểm N(8 ; –12) thuộc đồ thị của hàm số đã cho.

## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**1.** Cho y và x là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Biết rằng khi x = 3 thì y = 5.

a) Hỏi y và x liên hệ với nhau theo công thức nào ?

b) Tìm x khi y = 7,5.

**2.** Cho y và x là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Biết rằng khi x = –2 thì y = 3.

a) Hỏi y và x liên hệ với nhau theo công thức nào ?

b) Tìm y khi x = 5.

**3.** Chia số 351 thành ba phần :

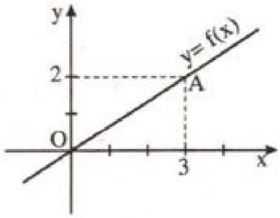
a) Tỉ lệ thuận với 3 ; 4 ; 6.

b) Tỉ lệ nghịch với 3 ; 4 ; 6.

**4.** Chia số M thành ba phần tỉ lệ thuận với các số 5 ; 2 ; 4. Biết số nhỏ nhất bằng 10. Tính số M.

**5.** Cho hàm số $y = f(x) = ax$ $(a \neq 0)$.

Biết $f(2) = -5$, tính $f(-1)$ ; $f\left(\frac{2}{3}\right)$.



Hình 13

**6.*** Hình 13 là đồ thị của hàm số y = f(x).

a) Hỏi hàm số này được cho bởi công thức nào ?

b) Tính f(6) ; f(–4,5).

## HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**1.** a) $y = \frac{5}{3}x$ ; b) x = 4,5.

**2.** a) $y = \frac{-6}{x}$ ; b) y = –1,2.

**3.** a) 81 ; 108 ; 162 ; b) 156 ; 117 ; 78.

**4.** 55.

**5.** $f(-1) = \frac{5}{2}$ ; $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{5}{3}$.

**6*.** a) $y = \frac{2}{3}x$ ; b) f(6) = 4 ; f(–4,5) = –3.

# PHẦN HÌNH HỌC

## Chương I. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

### §1. HAI GÓC ĐỐI ĐỈNH

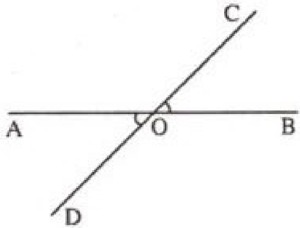
#### A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

**1.** Hai góc đối đỉnh là hai góc mà mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh của góc kia.

Trong *hình 14* thì góc AOD đối đỉnh với góc BOC.

**2.** Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau :

$$\widehat{AOD} = \widehat{BOC} \text{ (h.14).}$$



Hình 14

#### B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

**Dạng 1.** NHẬN BIẾT HAI GÓC ĐỐI ĐỈNH

**Phương pháp giải**

| |
|---|
| Xét xem mỗi cạnh của góc này có phải là tia đối của một cạnh của góc kia không ? |

**Ví dụ 1.** Cho hai góc kề bù AOM và BOM trong đó $\widehat{AOM} = 120^o$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa tia OM ta vẽ tia ON sao cho $\widehat{AON} = 60^o$. Hỏi hai góc AON và BOM có phải là hai góc đối đỉnh không ? Vì sao ?

*Giải.* (h.15)

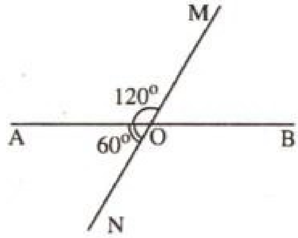
Xét hai góc kề AOM và AON, ta có :

$\widehat{AOM} + \widehat{AON} = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$.

Vậy hai góc AOM và AON là hai góc kề bù.

Suy ra hai tia OM, ON đối nhau.

Mặt khác hai tia OA, OB đối nhau nên hai góc AON và BOM là hai góc đối đỉnh.



Hình 15

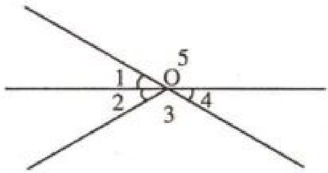
**Ví dụ 2.** Xem hình 16 rồi cho biết trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ?

(A) Hai góc $O_1$ và $O_2$ là hai góc đối đỉnh.

(B) Hai góc $O_2$ và $O_4$ là hai góc đối đỉnh.

(C) Hai góc $O_1$ và $O_4$ là hai góc đối đỉnh.

(D) Hai góc $O_3$ và $O_5$ là hai góc đối đỉnh.



Hình 16

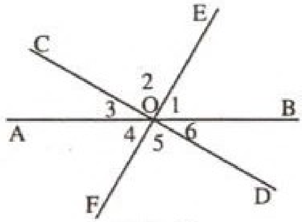
*Giải.* (h.16)

Hai góc $O_1$ và $O_4$ là hai góc đối đỉnh vì mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh góc kia. Các khẳng định khác đều sai. Chọn (C).

**Ví dụ 3.** Ba đường thẳng AB, CD, EF cắt nhau tại điểm O, chúng tạo thành mấy cặp góc đối đỉnh (không kể góc bẹt) ?

*Giải.* (h.17)

- Trước hết xét các góc "đơn", ta có :
  - Góc $O_1$ đối đỉnh với góc $O_4$.
  - Góc $O_2$ đối đỉnh với góc $O_5$.
  - Góc $O_3$ đối đỉnh với góc $O_6$.
- Xét các góc "đôi", ta có :
  - Góc BOC đối đỉnh với góc AOD.
  - Góc AOE đối đỉnh với góc BOF.
  - Góc COF đối đỉnh với góc DOE.



Hình 17

**Dạng 2.** TÍNH SỐ ĐO GÓC

### Phương pháp giải

> Có thể sử dụng các tính chất :
> - Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.
> - Hai góc kề bù có tổng bằng $180^\circ$.

**Ví dụ 1.** Cho hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại O tạo thành bốn góc không kể góc bẹt. Biết $\widehat{AOC} = 55^o$, tính số đo ba góc còn lại.

***Giải.*** (h.18)

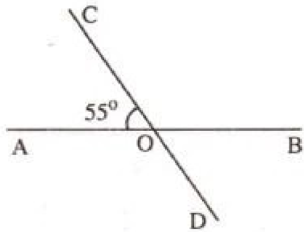
Hai góc AOC và BOC kề bù nhau nên :

$$\widehat{AOC} + \widehat{BOC} = 180^o.$$

Suy ra : $\widehat{BOC} = 180^o - 55^o = 125^o$.

Ta có : $\widehat{AOD} = \widehat{BOC} = 125^o$ (đối đỉnh).

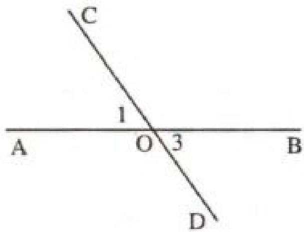
$\widehat{BOD} = \widehat{AOC} = 55^o$ (đối đỉnh).



Hình 18

**Ví dụ 2.** Cho hình 19, biết $\widehat{O}_1 + \widehat{O}_3 = 130^o$. Tính số đo của bốn góc AOC, COB, BOD và DOA.

***Giải.*** (h.19)



Hình 19

Ta có : $\widehat{O}_1 + \widehat{O}_3 = 130^o$ mà $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_3$ (đối đỉnh)

nên : $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_3 = 130^o : 2 = 65^o$, do đó :

$$\widehat{AOC} = \widehat{BOD} = 65^o.$$

Hai góc BOC và AOC là hai góc kề bù nên $\widehat{BOC} = 180^o - 65^o = 115^o$.

Suy ra : $\widehat{AOD} = \widehat{BOC} = 115^o$ (đối đỉnh).

**Ví dụ 3.** Hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại O tạo thành bốn góc không kể góc bẹt. Biết tổng của ba trong bốn góc này bằng $250^o$, tính số đo của bốn góc đó.

***Giải.*** (h.20)

Giả sử : $\widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 = 250^o$.

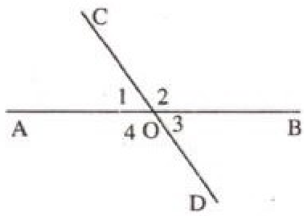
Vì $\widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 = 180^o$ (hai góc kề bù)

nên : $\widehat{O}_3 = 250^o - 180^o = 70^o$.

Do đó $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_3 = 70^o$ (đối đỉnh).

Ta có : $\widehat{O}_2 = 180^o - 70^o = 110^o$.

Suy ra : $\widehat{O}_4 = \widehat{O}_2 = 110^o$ (đối đỉnh).



Hình 20

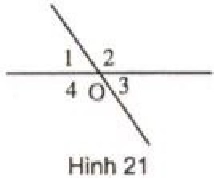
**Ví dụ 4.** Cho hình 21, giả sử góc $O_2$ lớn hơn góc $O_3$ là $30^o$. Tính góc $O_1$.

***Giải.*** (h.21)

Ta có : $\widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 180^o$ (kề bù),

mà $\widehat{O_2} - \widehat{O_3} = 30^o$ nên $\widehat{O_3} = (180^o - 30^o) : 2 = 75^o$.

Suy ra : $\widehat{O_1} = \widehat{O_3} = 75^o$ (đối đỉnh).



Hình 21

**Ví dụ 5.** Cho hình 22, tia OM là tia phân giác của góc BOD. Biết $\widehat{AOC} = 70^o$, tính số đo của góc COM.

***Giải.*** (h.22)

Ta có : $\widehat{BOD} = \widehat{AOC} = 70^o$ (đối đỉnh).

Vì tia OM là tia phân giác của góc BOD nên :

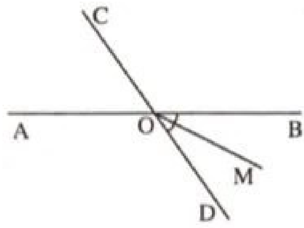
$$\widehat{BOM} = 70^o : 2 = 35^o.$$

Hai góc AOC và COB kề bù nên :

$$\widehat{COB} = 180^o - 70^o = 110^o.$$

Tia OB nằm giữa hai tia OC và OM nên :

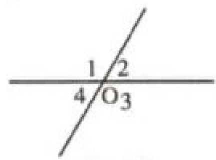
$$\widehat{COM} = \widehat{COB} + \widehat{BOM} = 110^o + 35^o = 145^o.$$



Hình 22

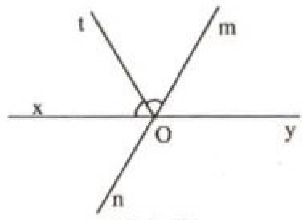
## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**1.** Cho hình 23, biết $\widehat{O_1} = 3\widehat{O_2}$. Tính số đo các góc $\widehat{O_1}, \widehat{O_2}, \widehat{O_3}, \widehat{O_4}$.



Hình 23

**2.** Hai đường thẳng xy và mn cắt nhau tại O. Vẽ tia phân giác Ot của góc xOm. Biết $\widehat{yOt} = 125^o$, tính số đo các góc xOm và yOn (xem hình 24).



Hình 24

**3*.** Cho hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại O. Vẽ các tia OM, ON lần lượt là các tia phân giác của các góc BOC và AOD. Tính số đo của góc MON.

## HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. *Đáp số* : $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_3 = 135^o$ ; $\widehat{O}_2 = \widehat{O}_4 = 45^o$.

2. Tính được $\widehat{xOt} = 55^o$ suy ra $\widehat{xOm} = 110^o$, do đó $\widehat{yOn} = 110^o$.

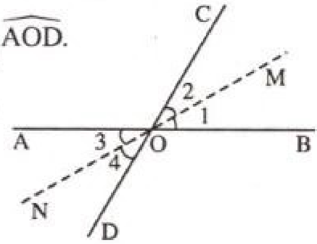
3. (h.25). Ta có : $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$ ; $\widehat{O}_3 = \widehat{O}_4 = \frac{1}{2}\widehat{AOD}$.

Mặt khác, $\widehat{BOC} = \widehat{AOD}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{O}_3 = \widehat{O}_1$.

Vậy ta có : $\widehat{MON} = \widehat{O}_2 + \widehat{AOC} + \widehat{O}_3$

$= \widehat{O}_2 + \widehat{AOC} + \widehat{O}_1$

$= \widehat{AOB} = 180^o$.



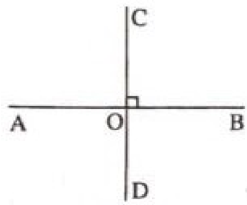
Hình 25

# §2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

## A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Hai đường thẳng vuông góc là hai đường thẳng cắt nhau và trong các góc tạo thành có một góc vuông (h.26).

$$AB \perp CD \Leftrightarrow \begin{cases} AB \text{ và } CD \text{ cắt nhau tại } O, \\ \widehat{O} = 90^o. \end{cases}$$

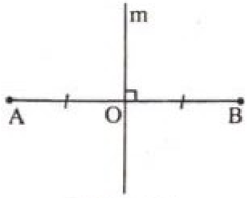


Hình 26

2. Có một và chỉ một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

3. Đường trung trực của một đoạn thẳng là đường thẳng vuông góc với đoạn thẳng ấy tại trung điểm của nó (h.27).

$$m \text{ là đường trung trực của } AB \Leftrightarrow \begin{cases} m \perp AB, \\ OA = OB. \end{cases}$$



Hình 27

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### **Dạng 1.** NHẬN BIẾT HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

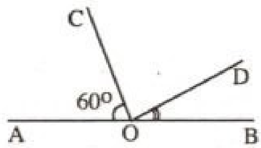
**Phương pháp giải**

| Xét xem góc tạo bởi hai đường thẳng có bằng $90^o$ không ? |
|---|

**Ví dụ 1.** Cho góc bẹt AOB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tia OC và OD sao cho $\widehat{AOC} = 60^o$ ; $\widehat{BOD} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$. Chứng tỏ rằng hai tia OC và OD vuông góc với nhau.

*Giải.* (h.28)

Hai góc AOC và BOC kề bù nên $\widehat{AOC} + \widehat{BOC} = 180^o$.



Hình 28

Suy ra : $\widehat{BOC} = 180^o - 60^o = 120^o$.

Mặt khác, ta có : $\widehat{BOD} = \frac{1}{2}\widehat{AOC} = 60^o : 2 = 30^o$.

Tia OD nằm giữa hai tia OB và OC nên :

$$\widehat{BOD} + \widehat{DOC} = \widehat{BOC}.$$

Hay là : $30^o + \widehat{DOC} = 120^o$.

Suy ra : $\widehat{DOC} = 120^o - 30^o = 90^o$.

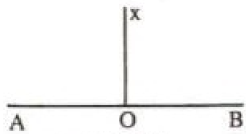
Do đó OC $\perp$ OD.

**Ví dụ 2.** Trên đường thẳng AB lấy một điểm O. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ tia Ox so cho $\widehat{AOx} = \widehat{BOx}$. Hãy cho biết vị trí của tia Ox đối với đường thẳng AB.

*Giải.* (h.29)

Hai góc AOx và BOx kề bù nên :

$$\widehat{AOx} + \widehat{BOx} = 180^o.$$



Hình 29

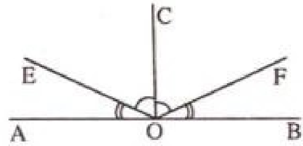
Mặt khác $\widehat{AOx} = \widehat{BOx}$ nên :

$$\widehat{AOx} = 180^o : 2 = 90^o.$$

Do đó : Ox $\perp$ AB.

**Ví dụ 3.** Cho hình 30 có $\widehat{AOB}$ là góc bẹt, $\widehat{AOE} = \widehat{BOF}$ và $\widehat{COE} = \widehat{COF}$. Giải thích tại sao $OC \perp AB$.

***Giải.*** (h.30)



Hình 30

Ta có : $\widehat{AOE} = \widehat{BOF}$ ; $\widehat{COE} = \widehat{COF}$ (đề bài).

Suy ra : $\widehat{AOE} + \widehat{COE} = \widehat{BOF} + \widehat{COF}$ (*).

Mặt khác, tia OE nằm giữa hai tia OC, OA ;

tia OF nằm giữa hai tia OC, OB

nên từ (*) suy ra : $\widehat{AOC} = \widehat{BOC}$.

Mặt khác : $\widehat{AOC} + \widehat{BOC} = 180^o$ nên :

$$\widehat{AOC} = 180^o : 2 = 90^o.$$

Do đó : $OC \perp AB$.

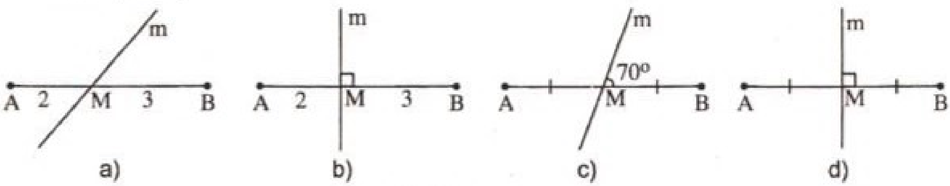
## Dạng 2. NHẬN BIẾT MỘT ĐƯỜNG THẲNG LÀ ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA MỘT ĐOẠN THẲNG

### Phương pháp giải

> Nếu $xy \perp AB$ tại M và MA = MB thì xy là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

**Ví dụ 1.** Trong các hình 31 dưới đây, hình nào có đường thẳng m là đường trung trực của đoạn thẳng AB ?

***Giải.*** (h.31)



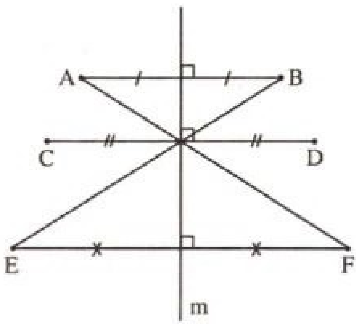
Hình 31

Ở *hình 31d)* có $m \perp AB$ tại M và MA = MB nên đường thẳng m là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

**Ví dụ 2.** Cho hình 32, đường thẳng m là đường trung trực của những đoạn thẳng nào ?

*Giải.* (h.32)

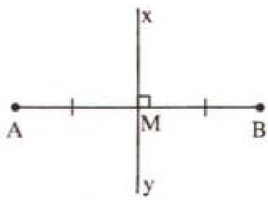
Đường thẳng m là đường trung trực của các đoạn thẳng AB, CD, EF vì đường thẳng m vuông góc với các đoạn thẳng này tại trung điểm của chúng.



Hình 32

**Ví dụ 3.** Cho đoạn thẳng AB = 4cm. Lấy điểm M nằm giữa A và B sao cho AM = 2cm. Qua M vẽ đường thẳng xy sao cho $\widehat{AMx} = \widehat{AMy}$. Chứng tỏ rằng đường thẳng xy là đường trung trực của AB.

*Giải.* (h.33)



Hình 33

Ta có điểm M nằm giữa hai điểm A và B nên :

$$AM + MB = AB$$
$$2 + MB = 4$$
$$MB = 2 \text{ (cm)}.$$

Do đó : MA = MB (= 2 cm). (1)

Mặt khác, $\widehat{AMx} + \widehat{AMy} = 180^o$ (kề bù),

mà $\widehat{AMx} = \widehat{AMy}$ nên $\widehat{AMx} = 180^o : 2 = 90^o$.

Vậy $xy \perp AB$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra đường thẳng xy là đường trung trực của AB.

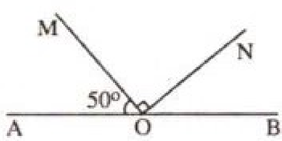
## Dạng 3. TÍNH SỐ ĐO GÓC

### Phương pháp giải

| |
|---|
| Góc tạo thành bởi hai đường thẳng vuông góc bằng $90^o$. |

**Ví dụ 1.** Cho hai góc kề bù AOM và BOM trong đó $\widehat{AOM} = 50^o$. Vẽ tia ON ở trong góc BOM sao cho $ON \perp OM$. Tính số của đo góc BON.

*Giải.* (h.34)



Hình 34

Hai góc AOM và BOM kề bù nên :

$$\widehat{AOM} + \widehat{BOM} = 180^o.$$

Suy ra : $\widehat{BOM} = 180^o - 50^o = 130^o$.

Tia ON nằm giữa hai tia OB và OM nên :

$$\widehat{BON} + \widehat{NOM} = \widehat{BOM}.$$

Vậy $\widehat{BON} = 130^o - 90^o = 40^o$ (góc $\widehat{NOM} = 90^o$ vì $OM \perp ON$).

**Ví dụ 2.** Cho hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau tại O. Tia OM là tia phân giác của góc BOC. Tính số đo của góc AOM.

***Giải.*** (h.35)

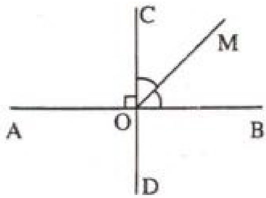
Vì $AB \perp CD$ nên $\widehat{BOC} = 90^o$.

Mặt khác, tia OM là tia phân giác của góc BOC

nên $\widehat{BOM} = 90^o : 2 = 45^o$.

Hai góc AOM và BOM kề bù nên :

$$\widehat{AOM} = 180^o - 45^o = 135^o.$$



Hình 35

**Ví dụ 3.** Cho góc AOB có số đo là $150^o$. Vẽ vào trong góc này các tia OM và ON sao cho $OM \perp OA$, $ON \perp OB$.

a) Chứng tỏ rằng $\widehat{AON} = \widehat{BOM}$ ; b) Tính số đo của góc $\widehat{MON}$.

***Giải.*** (h.36)

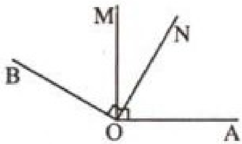
a) Ta có $OM \perp OA$, $ON \perp OB$ nên :

$$\widehat{AOM} = 90^o\ ;\ \widehat{BON} = 90^o.$$

Tia ON nằm giữa hai tia OA, OB nên :

$$\widehat{AON} + \widehat{NOB} = \widehat{AOB}\text{, do đó :}$$

$$\widehat{AON} = \widehat{AOB} - \widehat{NOB} = 150^o - 90^o = 60^o. \quad (1)$$



Hình 36

Tia OM nằm giữa hai tia OA, OB nên :

$$\widehat{AOM} + \widehat{BOM} = \widehat{AOB}\text{, do đó :}$$

$$\widehat{BOM} = \widehat{AOB} - \widehat{AOM} = 150^o - 90^o = 60^o. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra : $\widehat{AON} = \widehat{BOM}$ $(= 60^o)$.

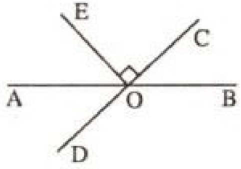
b) Tia ON nằm giữa hai tia OA, OM nên :

$$\widehat{AON} + \widehat{MON} = \widehat{AOM}.$$

Suy ra : $\widehat{MON} = 90^o - 60^o = 30^o$.

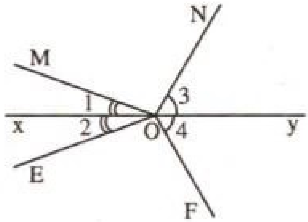
## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho hình 37, hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại O và OE ⊥ CD. Biết $\widehat{BOE} = 135^o$, chứng tỏ rằng tia OA là tia phân giác của góc DOE.



Hình 37

2. Cho hình 38, biết đường thẳng xy lần lượt chứa các tia phân giác của các góc MOE và NOF. Muốn cho OE ⊥ OF thì góc MON phải có số đo bằng bao nhiêu độ ?



Hình 38

## HƯỚNG DẪN – ĐÁP ÁN

1. Bạn tính được $\widehat{AOE} = 45^o$ ; $\widehat{BOC} = 45^o$. Sau đó dùng góc BOC làm trung gian để chứng tỏ $\widehat{AOE} = \widehat{AOD}$.
2. Ta có : $\widehat{O}_1 + \widehat{O}_3 + \widehat{MON} = \widehat{O}_2 + \widehat{O}_4 + \widehat{EOF} = 180^o$,

   mà $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ ; $\widehat{O}_3 = \widehat{O}_4$ nên $\widehat{MON} = \widehat{EOF}$.

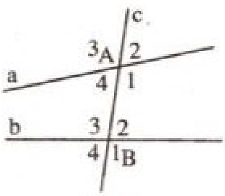
   Muốn cho OE ⊥ OF thì ta phải có $\widehat{EOF} = 90^o$, do đó $\widehat{MON} = 90^o$.

# §3. CÁC GÓC TẠO BỞI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CẮT HAI ĐƯỜNG THẲNG.
# §4. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

## A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. *Các góc tạo bởi một đường thẳng cắt hai đường thẳng* (h.39)

   • Hai góc $A_1$ và $B_3$ cũng như hai góc $A_4$ và $B_2$ gọi là *cặp góc so le trong*.



Hình 39

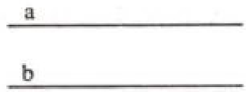
• Hai góc $A_1$ và $B_2$ cũng như hai góc $A_4$ và $B_3$ gọi là *cặp góc trong cùng phía.*

• Các cặp góc $A_1$ và $B_1$ ; $A_2$ và $B_2$ ; $A_3$ và $B_3$ ; $A_4$ và $B_4$ được gọi là *các cặp góc đồng vị.*

**2.** *Hai đường thẳng song song* (h.40)

Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng không có điểm chung.

Kí hiệu : a // b.




Hình 40

**3.** *Dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song*

Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có :

– hoặc một cặp góc so le trong bằng nhau ;

– hoặc một cặp góc đồng vị bằng nhau ;

– hoặc một cặp góc trong cùng phía bù nhau thì a và b song song với nhau.

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### Dạng 1. XÁC ĐỊNH CẶP GÓC SO LE TRONG, CẶP GÓC TRONG CÙNG PHÍA, CẶP GÓC ĐỒNG VỊ

**Phương pháp giải**

| |
|---|
| Phải căn cứ vào vị trí của hai góc so với hai đường thẳng và đường thứ ba cắt chúng (cát tuyến). |

**Ví dụ 1.** Cho hình 41.

– Góc nào so le trong với góc $A_1$ ?

– Góc nào đồng vị với góc $A_1$ ?

– Góc nào trong cùng phía với góc $A_1$ ?

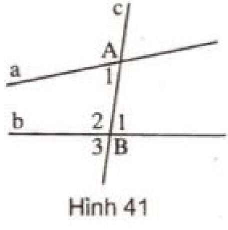
***Giải.*** (h.41)

Xét hai đường thẳng a và b cùng với cát tuyến c thì :

– Góc $B_1$ so le trong với góc $A_1$ ;

– Góc $B_3$ đồng vị với góc $A_1$ ;

– Góc $B_2$ trong cùng phía với góc $A_1$.



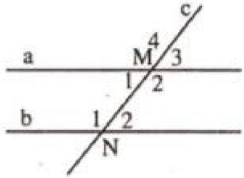

Hình 41

**Ví dụ 2.** Cho hình 42, hãy kể tên :

– Góc so le trong với góc $N_1$ ;

– Góc đồng vị với góc $N_2$ ;

– Góc trong cùng phía với góc $M_1$.



Hình 42

***Giải.*** (h.42)

Xét hai đường thẳng a, b cùng với cát tuyến c thì :

– Góc $M_2$ so le trong với góc $N_1$ ;

– Góc $M_3$ đồng vị với góc $N_2$ ;

– Góc $N_1$ trong cùng phía với góc $M_1$.

**Ví dụ 3.** Xem hình 43 rồi cho biết :

a) Cặp góc so le trong của hai đường thẳng AB và CD đối với cát tuyến AD.

b) Cặp góc so le trong của hai đường thẳng AC và BD đối với cát tuyến AD.

c) Cặp góc trong cùng phía của hai đường thẳng AB và CD đối với cát tuyến AC.

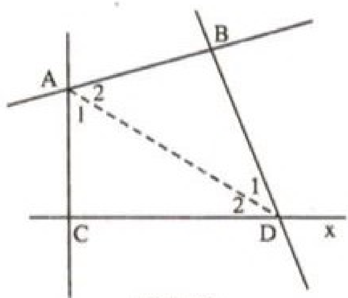
d) Cặp góc đồng vị của hai đường thẳng AC và BD đối với cát tuyến Cx.

***Giải.*** (h.43)

a) Cặp góc $A_2$ và $D_2$ là cặp góc so le trong của hai đường thẳng AB và CD đối với cát tuyến AD.

b) Cặp góc $\widehat{A}_1$ và $\widehat{D}_1$ là cặp góc so le trong của hai đường thẳng AC và BD đối với cát tuyến AD.

c) Cặp góc CAB và ACD là cặp góc trong cùng phía của hai đường thẳng AB và CD đối với cát tuyến AC.



Hình 43

d) Cặp góc ACD và BDx là cặp góc đồng vị của hai đường thẳng AC và BD đối với cát tuyến Cx.

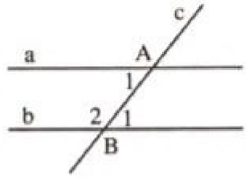
**Dạng 2.** NHẬN BIẾT HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

### Phương pháp giải

| |
|---|
| Cần chứng tỏ cặp góc so le trong bằng nhau, hoặc cặp góc đồng vị bằng nhau, hoặc cặp góc trong cùng phía bù nhau. |

**Ví dụ 1.** Cho hình 44, biết : $\widehat{A_1} = 60^o$ ; $\hat{B_1} = \dfrac{1}{2}\hat{B_2}$. Chứng tỏ rằng a // b.

***Giải.*** (h.44)




Hình 44

Ta có : $\hat{B_1} + \hat{B_2} = 180^o$ (kề bù), mà

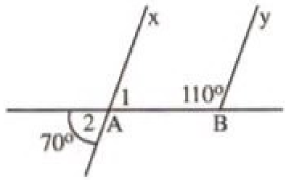
$$\hat{B_1} = \frac{1}{2}\hat{B_2} \text{ nên } \hat{B_1} = 180^o : 3 = 60^o.$$

Suy ra : $\widehat{A_1} = \hat{B_1}$ (= $60^o$).

Do đó a // b (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

**Ví dụ 2.** Cho hình 45, biết : $\widehat{A_2} = 70^o$ ; $\hat{B} = 110^o$. Chứng tỏ rằng Ax // By.

***Giải.*** (h.45)




Hình 45

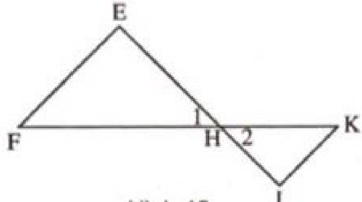
Ta có : $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = 70^o$ (đối đỉnh).

Do đó : $\widehat{A_1} + \hat{B} = 70^o + 110^o = 180^o$.

Suy ra Ax // By (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau).

**Ví dụ 3.** Cho hình 46, biết : $\hat{F} = \widehat{H_1}$ ; $\widehat{K} = \widehat{H_2}$. Chứng tỏ rằng EF // IK.

***Giải.*** (h.46)




Hình 46

Ta có : $\hat{F} = \widehat{H_1}$ ; $\widehat{K} = \widehat{H_2}$ mà $\widehat{H_1} = \widehat{H_2}$ (đối đỉnh), nên $\hat{F} = \widehat{K}$.

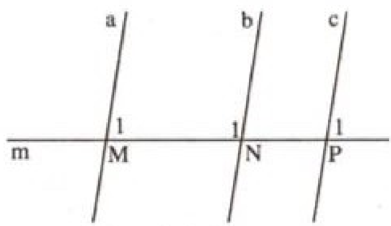
Suy ra : EF // IK (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

**Ví dụ 4.** Cho hình 47, biết :

$\widehat{M_1} = 75^o$ ; $\widehat{N_1} = 105^o$ ; $\hat{P_1} = 75^o$.

Hãy kể tên các cặp đường thẳng song song.

***Giải.*** (h.47)




Hình 47

• Ta có : $\widehat{M_1} + \widehat{N_1} = 75^o + 105^o = 180^o$.

Suy ra a // b (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau).

• Ta có : $\widehat{M_1} = \hat{P_1}$ (= 75°).

Suy ra a // c (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

• Ta có $\widehat{bNP}$ kề bù với góc $N_1$, do đó :

$$\widehat{bNP} = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ.$$

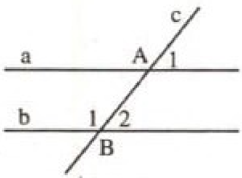
Vậy : $\widehat{bNP} = \hat{P_1}$ (= 70°).

Suy ra b // c (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

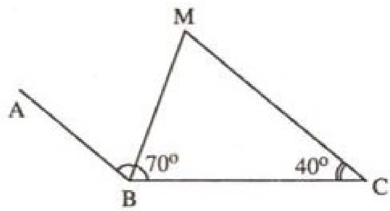
## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**1.** Cho hình 48, biết : $\widehat{A_1} = 72^\circ$ ; $\hat{B_2} = \frac{2}{3}\hat{B_1}$. Chứng tỏ rằng a // b.

**2.** Cho hình 49, biết tia BM là tia phân giác của góc ABC, $\widehat{MBC} = 70^\circ$, $\widehat{MCB} = 40^\circ$. Chứng tỏ rằng AB // MC.



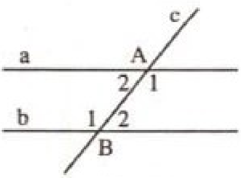
Hình 48



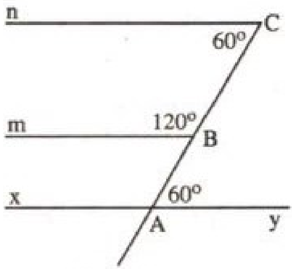
Hình 49

**3*.** Cho hình 50, biết : $\widehat{A_1} - \widehat{A_2} = \hat{B_1} - \hat{B_2}$. Chứng tỏ rằng a // b.

**4.** Tìm trong hình 51 các cặp đường thẳng song song.



Hình 50



Hình 51

## HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**1.** Bạn tính được $\hat{B}_2 = 72^o \Rightarrow \widehat{A}_1 = \hat{B}_2 \Rightarrow a \,//\, b$.

**2.** Bạn tính được $\widehat{ABC} = 140^o \Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{C} = 180^o \Rightarrow AB \,//\, MC$.

**3*.** Ta có : $\widehat{A}_1 - \widehat{A}_2 = \hat{B}_1 - \hat{B}_2$ (đề bài),

và $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180^o$ (kề bù).

Suy ra : $\widehat{A}_1 - \widehat{A}_2 + \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \hat{B}_1 - \hat{B}_2 + \hat{B}_1 + \hat{B}_2$,

hay $2\widehat{A}_1 = 2\hat{B}_1 \Rightarrow \widehat{A}_1 = \hat{B}_1$.

Do đó a // b (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

**4.** n // xy ; n // m ; m // xy.

# §5. TIÊN ĐỀ Ơ-CLIT VỀ ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

## A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

**1.** *Tiên đề Ơ-clit*

Qua một điểm ở ngoài một đường thẳng chỉ có một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

**2.** *Tính chất của hai đường thẳng song song*

Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì :

a) Hai góc so le trong bằng nhau ;

b) Hai góc đồng vị bằng nhau ;

c) Hai góc trong cùng phía bù nhau.

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

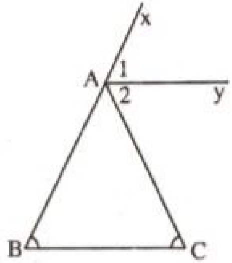
### Dạng 1. CHỨNG TỎ HAI GÓC BẰNG NHAU, BÙ NHAU

**Phương pháp giải**

Sử dụng tính chất của hai đường thẳng song song. Có thể dùng góc thứ ba làm trung gian.

**Ví dụ 1.** Trong hình 52 có : $\hat{B} = \hat{C}$ và Ay // BC.

Chứng tỏ rằng tia Ay là tia phân giác của góc CAx.



Hình 52

***Giải.*** (h.52)

Ta có Ay // BC (đề bài).

Suy ra : $\widehat{A_1} = \hat{B}$ (cặp góc đồng vị) ;

$\widehat{A_2} = \hat{C}$ (cặp góc so le trong).

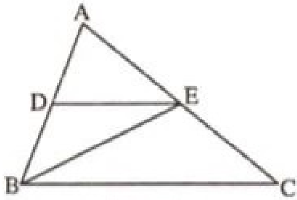
Mặt khác, $\hat{B} = \hat{C}$ (đề bài) nên $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$. (1)

Tia Ay nằm giữa hai tia Ax và AC. (2)

Từ (1) và (2) suy ra tia Ay là tia phân giác của góc CAx.

**Ví dụ 2.** Trong hình 53 có DE // BC. Hãy kể tên các cặp góc bằng nhau.

***Giải.*** (h.53)



Hình 53

Ta có DE // BC (đề bài).

Suy ra : $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$ ; $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$

(cặp góc đồng vị) ;

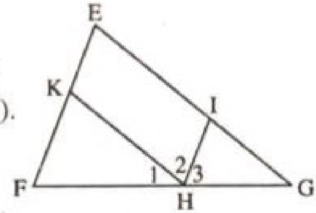
$\widehat{DEB} = \widehat{EBC}$ (cặp góc so le trong).

**Ví dụ 3.** Trong hình 54 có : HI // EF, HK // EG.

a) Hãy kể tên những góc bằng góc E.

b) Nếu $\hat{F} - \hat{G} = 25^o$ thì hiệu $\widehat{H_3} - \widehat{H_1}$ bằng bao nhiêu độ ?

***Giải.*** (h.54)



Hình 54

a) Ta có HI // EF nên $\hat{E} = \widehat{HIG}$ (cặp góc đồng vị) ;

HK // EG nên $\hat{E} = \widehat{FKH}$ (cặp góc đồng vị).

Mặt khác, $\widehat{FKH} = \widehat{H_2}$ (cặp góc so le trong).

Do đó : $\hat{E} = \widehat{HIG} = \widehat{FKH} = \widehat{H_2}$.

b) Ta có : $\hat{F} = \widehat{H_3}$ (cặp góc đồng vị của HI // EF) ;

$\hat{G} = \widehat{H_1}$ (cặp góc đồng vị của HK // EG).

Do đó $\hat{F} - \hat{G} = \widehat{H_3} - \widehat{H_1}$.

Vì $\hat{F} - \hat{G} = 25^o$ nên $\widehat{H_3} - \widehat{H_1} = 25^o$.

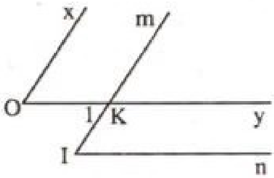
**Ví dụ 4.** Cho các góc $\widehat{xOy}$ và $\widehat{mIn}$ là hai góc có cạnh tương ứng song song cùng nhọn : Ox // Im ; Oy // In (xem hình 55). Chứng minh rằng $\widehat{O} = \widehat{I}$.

*Giải.* (h.55)

Ta có Ox // Im nên $\widehat{O} = \widehat{K_1}$ (cặp góc so le trong). (1)

Oy // In nên $\widehat{K_1} = \widehat{I}$ (cặp góc so le trong). (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\widehat{O} = \widehat{I}$.



Hình 55

*Nhận xét :* Bài toán trên vẫn đúng nếu hai góc O và I cùng là góc tù. Nếu có một góc vuông thì góc kia cũng vuông.

## Dạng 2. TÍNH SỐ ĐO GÓC

### Phương pháp giải

| |
|---|
| Dùng tính chất của hai đường thẳng song song. Nếu biết số đo của một góc thì tính được số đo của góc kia. |

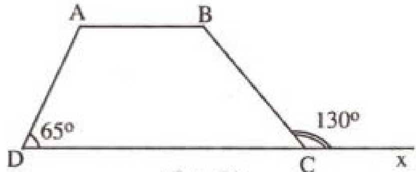
**Ví dụ 1.** Cho hình 56, biết : AB // CD, $\widehat{D} = 65^o$ ; $\widehat{BCx} = 130^o$. Tính số đo của góc A, góc B.

*Giải.* (h.56)

Ta có AB // CD (đề bài).

Suy ra : $\widehat{A} + \widehat{D} = 180^o$ (cặp góc trong cùng phía).

Do đó : $\widehat{A} = 180^o - 65^o = 115^o$.



Hình 56

Ta có : $\widehat{B} = \widehat{BCx} = 130^o$ (cặp góc so le trong).

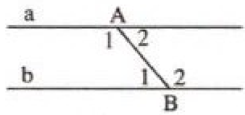
**Ví dụ 2.** Cho hình 57, biết : a // b và $\widehat{A_1} - \widehat{B_1} = 50^o$. Tính số đo các góc $A_2$ và $B_2$.

*Giải.* (h.57)

Ta có : a // b nên $\widehat{A_1} + \widehat{B_1} = 180^o$ (cặp góc trong cùng phía).

Mặt khác : $\widehat{A_1} - \widehat{B_1} = 50^o$ nên

$\widehat{A_1} = (180^o + 50^o) : 2 = 115^o$.



Hình 57

Từ đó ta có : $\widehat{B}_1 = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$.

Suy ra : $\widehat{A}_2 = \widehat{B}_1 = 65^\circ$ ; $\widehat{B}_2 = \widehat{A}_1 = 115^\circ$ (các cặp góc so le trong).

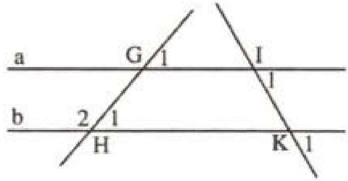
**Ví dụ 3.** Cho hình 58, biết : $\widehat{G}_1 = 50^\circ$ ; $\widehat{I}_1 = 60^\circ$ ; $\widehat{K}_1 = 60^\circ$. Tính số đo của góc $H_2$.

***Giải.*** (h.58)

Ta có : $\widehat{I}_1 = \widehat{K}_1$ $(= 60^\circ)$.

Suy ra a // b (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

Do đó : $\widehat{H}_1 = \widehat{G}_1 = 50^\circ$ (cặp góc đồng vị của hai đường thẳng song song).



Hình 58

Suy ra : $\widehat{H}_2 = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.

**Ví dụ 4.** Cho hình 59, biết rằng tia Cx là tia phân giác của góc ACy. Chứng tỏ rằng :

a) Cx // AB ; b) Tính số đo của góc A.

***Giải.*** (h.59)

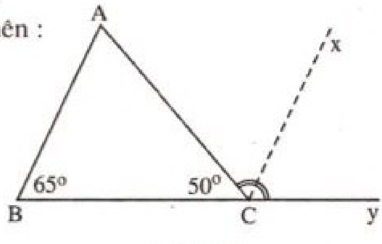
a) Ta có góc ACy và ACB là hai góc kề bù, nên :

$\widehat{ACy} = 180^\circ - \widehat{ACB} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.

Tia Cx là tia phân giác của góc ACy nên :

$$\widehat{xCy} = 130^\circ : 2 = 65^\circ.$$

Do đó $\widehat{xCy} = \widehat{B}$ $(= 65^\circ)$.



Hình 59

Suy ra : Cx // AB (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

b) Ta có : $\widehat{A} = \widehat{ACx}$ (cặp góc so le trong của hai đường thẳng song song).

Mà $\widehat{ACx} = \widehat{xCy} = 65^\circ$ nên $\widehat{A} = 65^\circ$.

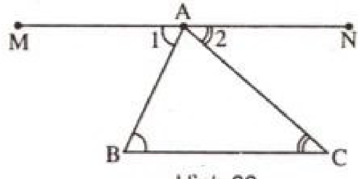
## Dạng 3. CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

### Phương pháp giải

| |
|---|
| Dựa vào tiên đề Ơ-clit. |

**Ví dụ.** Trong hình 60 có $\widehat{A_1} = \widehat{B}$ ; $\widehat{A_2} = \widehat{C}$ và AM, AN cùng bằng BC. Chứng tỏ rằng A là trụng điểm của MN.

*Giải.* (h.60)



Hình 60

Ta có : $\widehat{A_1} = \widehat{B}$ ; $\widehat{A_2} = \widehat{C}$ (đề bài cho).

Suy ra AM // BC và AN // BC

(vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

Do đó ba điểm M, A, N thẳng hàng

(vì theo tiên đề Ơ-clit, qua điểm A chỉ vẽ được một đường thẳng song song với BC). (1)

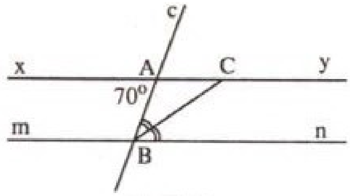
Mặt khác AM = AN (vì cùng bằng BC). (2)

Từ (1) và (2) suy ra A là trung điểm của MN.

## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**1.** Qua điểm O ở ngoài đường thẳng xy ta vẽ 10 đường thẳng. Hỏi ít nhất phải có mấy đường thẳng cắt xy ?

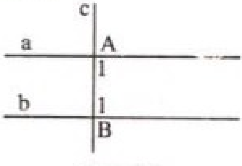
**2.** Trong hình 61 có xy // mn. Tia BC là tia phân giác của góc ABn. Biết $\widehat{BAx} = 70^\circ$, tính góc ACB.



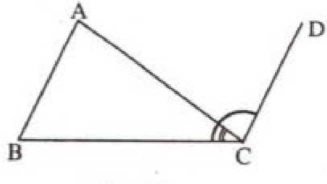
Hình 61

**3.** Trong hình 62 có a // b và $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$. Chứng tỏ rằng $c \perp a$ và $c \perp b$.

**4.** Trong hình 63 có $\widehat{BCD} = 115^\circ$ ; $\widehat{BCA} = 40^\circ$ và CD // AB. Tính số đo của góc A, góc B.



Hình 62



Hình 63

## HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. 9 đường thẳng.
2. $35^o$.
3. Tính được $\widehat{A_1} = 90^o$ ; $\widehat{B_1} = 90^o$ suy ra $c \perp a$ và $c \perp b$.
4. Ta có $\widehat{ACD} = 115^o - 40^o = 75^o$.

   Mặt khác, $AB // CD \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{ACD} = 75^o$.

   Ta lại có $\widehat{B} + \widehat{BCD} = 180^o \Rightarrow \widehat{B} = 180^o - 115^o = 65^o$.

# §6. TỪ VUÔNG GÓC ĐẾN SONG SONG.
# §7. ĐỊNH LÍ

## A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. *Quan hệ giữa tính vuông góc với tính song song*

   • Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường song song thì nó vuông góc với đường thẳng kia.

   • Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thứ ba thì song song với nhau.

   • Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thứ ba thì song song với nhau.

2. *Định lí*

   • Định lí là một khẳng định suy ra từ những khẳng định được coi là đúng.

   • Một định lí có thể phát biểu dưới dạng : "Nếu có A thì có B", trong đó A là phần giả thiết, B là phần kết luận.

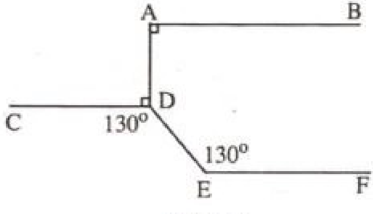
## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

**Dạng 1.** CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

### Phương pháp giải

| |
|---|
| Ngoài những dấu hiệu đã biết trước đây, bạn có thể dựa vào hai dấu hiệu mới : cùng vuông góc hoặc cùng song song với một đường thứ ba. |

**Ví dụ 1.** Trong hình 64 có AB $\perp$ AD ; CD $\perp$ AD, $\widehat{CDE} = 130^o$ và $\widehat{E} = 130^o$. Chứng minh rằng AB // EF.



Hình 64

***Giải.*** (h.64)

Ta có : AB $\perp$ AD ; CD $\perp$ AD (gt).

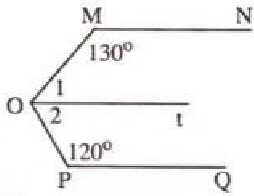
Suy ra AB // CD (vì cùng vuông góc với AD) (1)

Ta lại có : $\widehat{CDE} = \widehat{E} = 130^o$ (gt).

Suy ra : EF // CD (vì có cặp góc so le trong bằng nhau). (2)

Từ (1) và (2) suy ra AB // EF (vì cùng song song với CD).

**Ví dụ 2.** Trong hình 65 có $\widehat{M} = 130^o$, $\widehat{P} = 120^o$ và $\widehat{MOP} = 110^o$. Biết tia Ot // MN. Chứng minh rằng MN // PQ.



Hình 65

***Giải.*** (h.65)

• Ta có : Ot // MN nên $\widehat{M} + \widehat{O}_1 = 180^o$ (cặp góc trong cùng phía).

Suy ra : $\widehat{O}_1 = 180^o - 130^o = 50^o$.

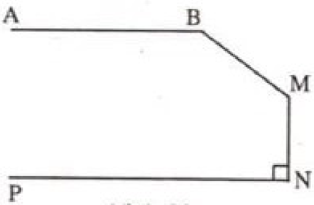
Mặt khác, $\widehat{MOP} = 110^o$ nên $\widehat{O}_2 = 110^o - 50^o = 60^o$.

• Ta có : $\widehat{O}_2 + \widehat{P} = 60^o + 120^o = 180^o$.

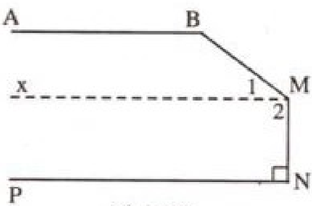
Suy ra : Ot // PQ (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau).

Do đó MN // PQ (vì cùng song song với Ot).

**Ví dụ 3.** Trong hình 66 có MN $\perp$ NP, $\widehat{ABM} = \widehat{BMN} = 135^o$. Chứng minh rằng AB // NP.



Hình 66



Hình 67

***Giải.*** (h.67)

Vẽ tia Mx ở trong góc BMN sao cho Mx // AB.

Ta có : $\widehat{ABM} + \widehat{M}_1 = 180^o$ (cặp góc trong cùng phía).

Suy ra : $\widehat{M_1} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.

Do đó : $\widehat{M_2} = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$.

Vậy $Mx \perp MN$.

Mặt khác $NP \perp MN$ (gt), suy ra $Mx \parallel NP$ (vì cùng vuông góc với MN), dẫn tới $AB \parallel NP$ (vì cùng song song với Mx).

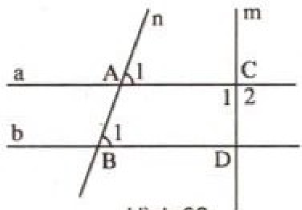
## Dạng 2. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

### Phương pháp giải

> Ngoài định nghĩa ra, bạn có thể dựa vào :
>
> • Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng kia.
>
> • Hai tia phân giác của hai góc kề bù thì vuông góc với nhau.

**Ví dụ 1.** Cho hình 68, biết : $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ và $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$. Chứng minh rằng $m \perp b$.

***Giải.*** (h.68)



Hình 68

Ta có : $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ (gt).

Suy ra $a \parallel b$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

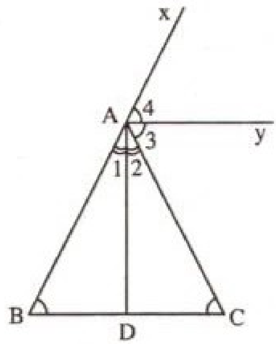
Mặt khác, $\widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 180^\circ$ (kề bù), mà

$\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ (gt) nên $\widehat{C_1} = 180^\circ : 2 = 90^\circ$.

Vậy $m \perp a$.

Ta lại có $a \parallel b$ (chứng minh trên) nên $m \perp b$.

**Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = \widehat{C}$. Tia phân giác của góc BAC cắt BC tại D. Vẽ tia Ay nằm trong nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C sao cho $Ay \parallel BC$. Chứng minh rằng $Ay \perp AD$.



Hình 69

***Giải.*** (h.69)

Vẽ tia Ax là tia đối của tia AB.

Kí hiệu các góc như trong hình 69.

Ta có : $Ay \parallel BC$ (gt).

Suy ra : $\widehat{A_4} = \widehat{B}$ (cặp góc đồng vị) ;

$\widehat{A}_3 = \widehat{C}$ (cặp góc so le trong), mà : $\widehat{B} = \widehat{C}$ (gt) nên $\widehat{A}_3 = \widehat{A}_4$. (1)

Tia Ay nằm giữa hai tia Ax và AC. (2)

Từ (1) và (2) suy ra tia Ay là tia phân giác của góc CAx.

Mặt khác tia AD là tia phân giác của góc BAC (gt).

Suy ra $Ay \perp AD$ (tính chất hai tia phân giác của hai góc kề bù).

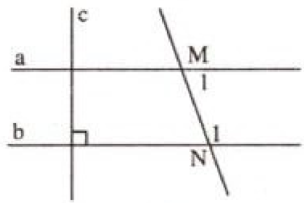
**Ví dụ 3.** Xem hình 70 rồi cho biết hai góc $\widehat{M}_1$ và $\widehat{N}_1$ phải có điều kiện gì để cho $c \perp a$ ?

***Giải.*** (h.70)

Nếu : $\widehat{M}_1 + \widehat{N}_1 = 180^\circ$ thì a // b

(vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau).

Khi đó thì $c \perp a$ (vì $c \perp b$).



Hình 70

**Dạng 3.** TÍNH SỐ ĐO GÓC

**Phương pháp giải**

| |
|---|
| Trước tiên chứng minh hai đường thẳng song song rồi dùng tính chất về góc của hai đường thẳng song song để tính. |

**Ví dụ 1.** Cho hình 71, biết : $a \perp PQ$ ; $b \perp PQ$ và $\widehat{N} = 75^\circ$. Tính số đo x của góc M.

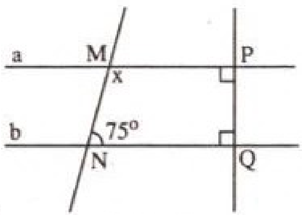
***Giải.*** (h.71)

Ta có : $a \perp PQ$ ; $b \perp PQ$ (gt).

Suy ra a // b (vì cùng vuông góc với PQ).

Do đó : $x + 75^\circ = 180^\circ$ (cặp góc trong cùng phía)

$$x = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ.$$

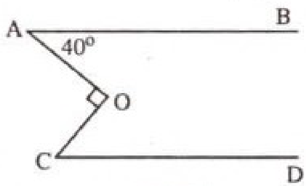


Hình 71

**Ví dụ 2.** Cho hình 72, biết : AB // CD ; $\widehat{A} = 40^\circ$ ; $OA \perp OC$. Tính số đo của góc C.

***Giải.*** (h.73)

Trong góc AOC ta vẽ tia Ox // AB thì Ox // CD (vì cùng song song với AB).

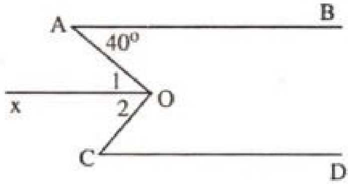


Hình 72

Ta có : $\widehat{O}_1 = \widehat{A} = 40^o$ (cặp góc so le trong).

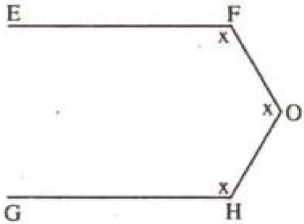
Suy ra : $\widehat{O}_2 = 90^o - 40^o = 50^o$.

Do đó : $\widehat{C} = \widehat{O}_2 = 50^o$ (cặp góc so le trong của Ox // CD).




Hình 73

**Ví dụ 3.** Cho hình 74, biết EF // GH và $\widehat{F} = \widehat{O} = \widehat{H} = x$. Tính giá trị của x.




Hình 74

***Giải.*** (h.75)

Trong góc FOH ta vẽ tia Ox // EF thì Ox // GH (vì cùng song song với EF).

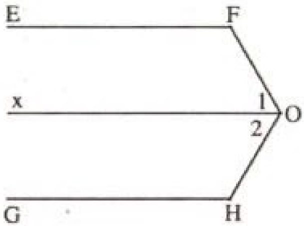
Ta có : $\widehat{F} + \widehat{O}_1 = 180^o$ ; $\widehat{H} + \widehat{O}_2 = 180^o$

(các cặp góc trong cùng phía).

Do đó : $\widehat{F} + \widehat{O}_1 + \widehat{H} + \widehat{O}_2 = 360^o$.

Suy ra : $\widehat{F} + \widehat{H} + (\widehat{O}_1 + \widehat{O}_2) = 360^o$.

Hay $x + x + x = 360^o$. Vậy $x = 120^o$.




Hình 75

## Dạng 4. VIẾT GIẢ THIẾT, KẾT LUẬN CỦA MỘT ĐỊNH LÍ VÀ NGƯỢC LẠI, BIẾT GIẢ THIẾT KẾT LUẬN CỦA MỘT ĐỊNH LÍ, DIỄN ĐẠT ĐỊNH LÍ ĐÓ BẰNG LỜI

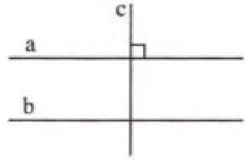
### Phương pháp giải

Phải xác định xem đâu là điều đã cho, đâu là điều cần chứng minh. Điều đã cho là phần giả thiết, điều cần chứng minh là phần kết luận. Nếu định lí được phát biểu dưới dạng "Nếu... thì...", thì phần nằm giữa từ "nếu" và từ "thì" là phần giả thiết, phần sau từ "thì" là phần kết luận.

**Ví dụ 1.** Vẽ hình rồi ghi giả thiết, kết luận của định lí: "Nếu một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng kia".

***Giải.*** (h.76)

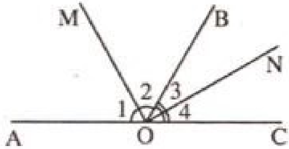
| | |
|---|---|
| GT | a // b<br>c $\perp$ a. |
| KL | c $\perp$ b. |



Hình 76

**Ví dụ 2.** Phát biểu định lí được diễn tả bởi giả thiết, kết luận và hình 77 :

| | |
|---|---|
| GT | $\widehat{AOB}$ và $\widehat{BOC}$ kề bù,<br>$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ ; $\widehat{O}_3 = \widehat{O}_4$ . |
| KL | OM $\perp$ ON. |



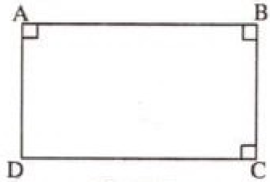
Hình 77

***Giải.*** (h.77)

Hai tia phân giác của hai góc kề bù vuông góc với nhau.

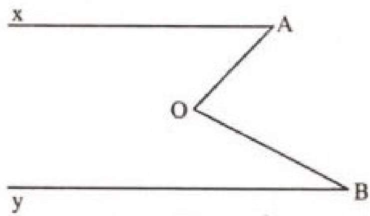
## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**1.** Cho góc vuông xOy. Trên tia Ox lấy điểm A. Qua A vẽ đường thẳng mn // Oy. Trên các tia Am và An lần lượt lấy các điểm B và C sao cho AB = AC. Hỏi đường thẳng Ox có phải là đường trung trực của BC không ?



Hình 78

**2.** Trong hình 78 có : $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ$. Chứng tỏ rằng $\widehat{D} = 90^\circ$.

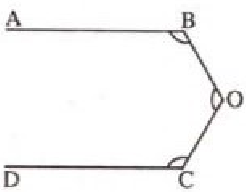


Hình 79

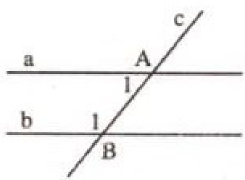
**3.** Trong hình 79 có Ax // By. Chứng minh rằng $\widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{AOB}$.

**4.** Trong hình 80 có : $\widehat{B} = \widehat{O} = \widehat{C} = 120^\circ$. Chứng minh rằng AB // CD.

**5.** Diễn đạt bằng lời định lí sau (h.81) :



Hình 80



Hình 81

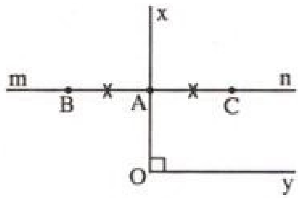
## HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**1.** (h.82) Ta có Mn // Oy mà Ox $\perp$ Oy,

nên Ox $\perp$ mn. (1)

Mặt khác, AB = AC. (2)

Từ (1) và (2) suy ra Ox là đường trung trực của BC.




Hình 82

**2.** Chứng minh AB // CD mà AB $\perp$ AD nên CD $\perp$ AD.

Suy ra : $\widehat{D} = 90^o$.

**3.** Ở trong góc AOB vẽ tia Ot // Ax thì Ot // By.

Dùng cách cộng góc suy ra điều phải chứng minh.

**4.** Ở trong góc BOC vẽ tia Ot // AB. Tính số đo của các góc BOt và Cot, từ đó suy ra Ot // CD, dẫn tới AB // CD (vì cùng song song với Ot).

**5.** Nếu hai đường thẳng bị một đường thẳng thứ ba cắt và chúng tạo thành một cặp góc trong cùng phía bù nhau thì hai đường thẳng đó song song với nhau.

# ÔN TẬP CHƯƠNG I

## A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

**1.** Các khái niệm về hai góc đối đỉnh, hai đường thẳng vuông góc, hai đường thẳng song song, định lí.

**2.** Các dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song, các tính chất của hai đường thẳng song song trong đó có tiên đề Ơ-clít.

**3.** Quan hệ giữa tính chất vuông góc và song song.

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### Dạng 1. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

**Phương pháp giải**

- Chứng minh góc giữa hai đường thẳng bằng $90^o$.
- Nếu a // b và c $\perp$ a thì c $\perp$ b.
- Hai tia phân giác của hai góc kề bù vuông góc với nhau.

**Ví dụ 1.** Hai đường thẳng cắt nhau tạo thành bốn góc (không kể góc bẹt). Khi đó trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

a) Nếu bốn góc đó bằng nhau thì hai đường thẳng vuông góc.

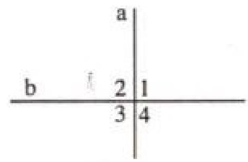
b) Nếu ba trong bốn góc đó bằng nhau thì hai đường thẳng vuông góc.

c) Nếu hai góc kề bằng nhau thì hai đường thẳng vuông góc.

***Giải.*** (h.83)

a) đúng, vì nếu bốn góc bằng nhau thì số đo của mỗi góc là $360^\circ : 4 = 90^\circ$, do đó hai đường thẳng vuông góc.

b) đúng, vì nếu ba góc bằng nhau thì có một cặp góc kề bù bằng nhau, do đó một góc có số đo là $180^\circ : 2 = 90^\circ$. Suy ra hai đường thẳng vuông góc.




Hình 83

c) đúng, vì hai góc kề trong trường hợp này là hai góc kề bù, chúng bằng nhau nên số đo của mỗi góc là $180^\circ : 2 = 90^\circ$, do đó hai đường thẳng vuông góc.

**Ví dụ 2.** Cho góc MON có số đo là $130^\circ$. Vẽ tia OA ở trong góc đó sao cho $\widehat{MOA} = 50^\circ$. Vẽ tia OB là tia đối của tia ON và tia OC là tia phân giác của góc AON. Chứng minh rằng :

a) Tia OM là tia phân giác của góc AOB ; b) $OM \perp OC$.

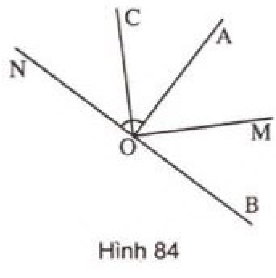
***Giải.*** (h.84)

a) Hai góc MON và MOB kề bù nên :

$\widehat{MOB} = 180^\circ - \widehat{MON} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$.

Suy ra : $\widehat{MOB} = \widehat{MOA}$ $(= 50^\circ)$.

Mặt khác, tia OM nằm giữa hai tia OA và OB nên tia OM là tia phân giác của góc AOB.



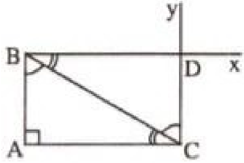

Hình 84

b) Ta có tia OC là tia phân giác của góc AON (gt).

Hai góc AON và AOB là hai góc kề bù nên hai tia phân giác của chúng vuông góc với nhau, do đó $OM \perp OC$.

**Ví dụ 3.** Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^\circ$. Từ B vẽ tia Bx sao cho góc CBx bằng và so le trong với góc ACB. Từ C vẽ tia Cy sao cho góc BCy bằng và so le trong với góc ABC. Hãy kể tên các cặp đường thẳng vuông góc.

*Giải.* (h.85)



Hình 85

• Ta có, $\widehat{A} = 90^o$ nên $AB \perp AC$. (1)

• Ta có, $\widehat{CBx} = \widehat{ACB}$, nên Bx // AC (2)

(vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

Từ (1) và (2) suy ra $AB \perp Bx$. (3)

• Ta có, $\widehat{BCy} = \widehat{ABC}$ nên AB // Cy. (4)

(vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

Từ (3) và (4) suy ra $Cy \perp Bx$. (5)

• Ta có AB // Cy (chứng minh trên) mà $AB \perp AC$ nên $Cy \perp AC$.

Tóm lại, có bốn cặp đường thẳng vuông góc với nhau là :

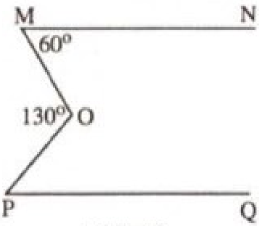
$$AC \perp AB \; ; \; AB \perp Bx \; ; \; Bx \perp Cy \; ; \; Cy \perp AC.$$

## Dạng 2. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

### Phương pháp giải

> Dựa vào quan hệ bằng nhau hoặc bù nhau giữa các góc do hai đường thẳng tạo với một cát tuyến hoặc dùng một đường thẳng thứ ba làm trung gian.

**Ví dụ 1.** Trong hình 86 có $\widehat{MOP} = 130^o$ ; $\widehat{M} = 60^o$. Tính số đo của góc P để MN // PQ.



Hình 86

*Giải.* (h.87)

Trong góc MOP vẽ tia Ox sao cho Ox // MN.

Ta được : $\widehat{O}_1 = \widehat{M} = 60^o$ (cặp góc so le trong).

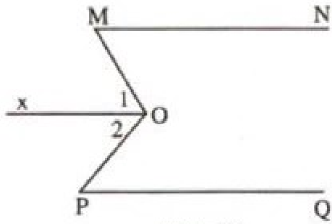
Suy ra : $\widehat{O}_2 = 130^o - 60^o = 70^o$.

Muốn cho PQ // MN thì PQ // Ox (vì Ox // MN).

Muốn vậy, cặp góc so le trong phải bằng nhau, do đó ta phải có : $\widehat{P} = \widehat{O}_2 = 70^o$.

Với $\widehat{P} = 70^o$ thì bạn dễ dàng chứng minh được

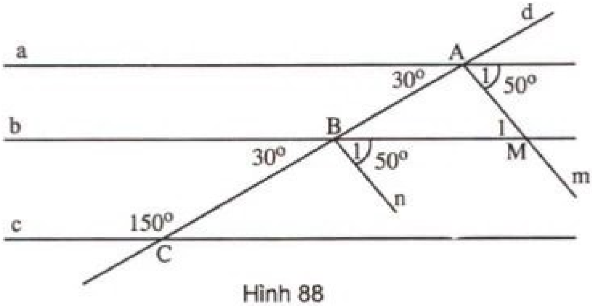
PQ // MN.



Hình 87

**Ví dụ 2.** Hãy kể tên các cặp đường thẳng song song trong hình 88.

***Giải.*** (h.88)




Hình 88

Ta có a // b (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

b // c (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau).

a // c (vì cùng song song với đường thẳng b).

Xét a // b có $\widehat{M_1} = \widehat{A_1} = 50^o$ (so le trong).

Suy ra : $\widehat{B_1} = \widehat{M_1}$ (= $50^o$).

Do đó Am // Bn (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

Tóm lại trong hình có bốn cặp đường thẳng song song là :

a // b ; b // c ; c // a và Am // Bn.

## Dạng 3. TÍNH SỐ ĐO GÓC

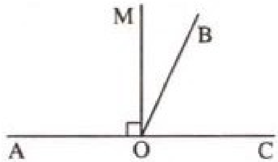
### Phương pháp giải

| |
|---|
| Dùng tính chất về góc do hai đường thẳng song song tạo thành với một cát tuyến hoặc góc do hai đường thẳng vuông góc tạo thành là $90^o$. |

**Ví dụ 1.** Cho hình 89, biết : số đo của góc AOB lớn hơn số đo của góc BOC là $40^o$ và OM ⊥ AC.

Tính số đo của góc MOB.

***Giải.*** (h.89)




Hình 89

Ta có : $\widehat{AOB}$ và $\widehat{BOC}$ kề bù, nên :

$$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 180^o.$$

Mặt khác, $\widehat{AOB} - \widehat{BOC} = 40^o$ (gt), nên $\widehat{BOC} = (180^o - 40^o) : 2 = 70^o$.

Vì OM ⊥ AC nên $\widehat{MOC} = 90^o$.

Tia OB nằm giữa hai tia OC, OM nên :

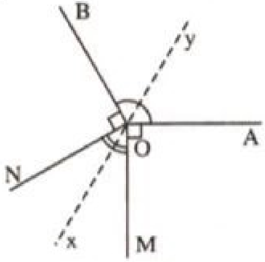
$$\widehat{MOB} = \widehat{MOC} - \widehat{BOC} = 90^o - 70^o = 20^o.$$

**Ví dụ 2.** Cho góc AOB có số đo bằng $130^o$. Vẽ ra ngoài góc đó các tia OM và ON sao cho OM ⊥ OA, ON ⊥ OB.

a) Tính số đo của góc MON.

b) Vẽ các tia Ox và Oy lần lượt là các tia phân giác của các góc MON và AOB. Chứng minh rằng Ox và Oy là hai tia đối nhau.

***Giải.*** (h.90)



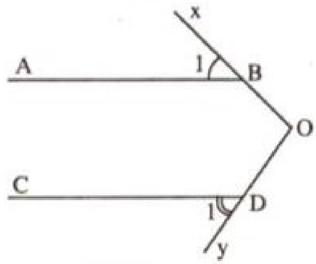

Hình 90

a) Ta có : OM ⊥ OA ; ON ⊥ OB nên :
$\widehat{AOM} = 90^o$ ; $\widehat{BON} = 90^o$. Do đó,
$\widehat{MON} = 360^o - (\widehat{AOB} + \widehat{AOM} + \widehat{BON})$
$= 360^o - (130^o + 90^o + 90^o) = 50^o$.

b) Vì Ox là tia phân giác của góc MON ;
Oy là phân giác của góc AOB, nên :
$\widehat{MOx} = 50^o : 2 = 25^o$ ; $\widehat{AOy} = 130^o : 2 = 65^o$.

Ta có $\widehat{xOy} = \widehat{xOM} + \widehat{AOM} + \widehat{AOy}$
$= 25^o + 90^o + 65^o = 180^o$.

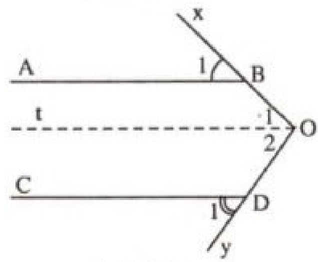
Vậy $\widehat{xOy}$ là góc bẹt, suy ra hai tia Ox, Oy đối nhau.




Hình 91

**Ví dụ 3.** Trong hình 91 có $\widehat{B}_1 = 45^o$ ; $\widehat{D}_1 = 55^o$ và AB // CD. Tính số đo của góc xOy.

***Giải.*** (h.92)




Hình 92

Trong góc xOy ta vẽ tia Ot // AB thì Ot // CD (vì cùng song song với AB).

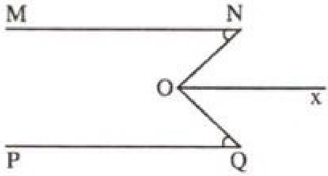
Ta có : $\widehat{O}_1 = \widehat{B}_1 = 45^o$ ; $\widehat{O}_2 = \widehat{D}_1 = 55^o$.
(các cặp góc đồng vị).

Do đó, $\widehat{xOy} = \widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 = 45^o + 55^o$.

Vậy $\widehat{xOy} = 100^o$.

## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

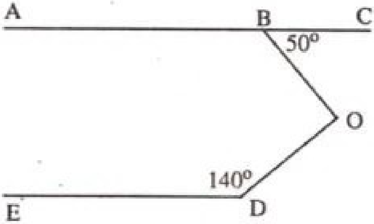
**1.** Cho hình 93, biết : MN // PQ // Ox và $\widehat{N} = \widehat{Q}$. Chứng minh rằng tia Ox là tia phân giác của góc NOQ.



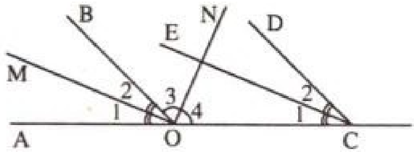
Hình 93

**2.** Cho hình 94, biết : AB // DE, $\widehat{OBC} = 50^o$ ; $\widehat{ODE} = 140^o$.

Chứng minh rằng OB ⊥ OD.



Hình 94



Hình 95

**3.** Cho hình 95, biết : hai góc AOB và BOC kề bù, CD // OB. Các tia OM, ON, CE lần lượt là các tia phân giác của các góc AOB, BOC và OCD. Chứng minh rằng :

a) OM // CE ;   b) ON ⊥ CE.

## HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**1.** Bạn chứng minh $\widehat{NOx} = \widehat{N}$ ; $\widehat{QOx} = \widehat{Q}$, từ đó suy ra $\widehat{NOx} = \widehat{QOx}$.

**2.** Trong góc BOD vẽ tia Ox // AB rồi tính góc BOD.

**3.** a) Ta có : OB // CD $\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{OCD} \Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{C}_1 \Rightarrow$ OM // CE.

b) Ta có : $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$, $\widehat{O}_3 = \widehat{O}_4 \Rightarrow$ OM ⊥ ON.

Mặt khác OM // CE nên ON ⊥ CE.

Chương II. **TAM GIÁC**

# §1. TỔNG BA GÓC CỦA MỘT TAM GIÁC

## A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

**1.** *Tổng ba góc của một tam giác*

Tổng ba góc của một tam giác bằng $180^o$.

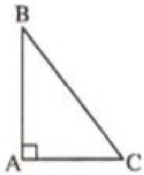
$\Delta ABC \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^o$

**2.** *Áp dụng vào tam giác vuông*

a) *Định nghĩa.* Tam giác vuông là tam giác có một góc vuông (h.96).

b) *Tính chất.* Trong tam giác vuông, hai góc nhọn phụ nhau.

$$\begin{cases} \Delta ABC \\ \widehat{A} = 90^o \end{cases} \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 90^o.$$



Hình 96

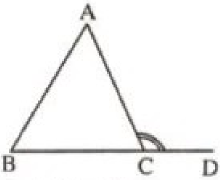
**3.** *Góc ngoài của tam giác*

a) *Định nghĩa.* Góc ngoài của tam giác là góc kề bù với một góc của tam giác.

b) *Tính chất*

* Mỗi góc ngoài của một tam giác bằng tổng của hai góc trong không kề với nó.

$$\widehat{ACD} = \widehat{A} + \widehat{B} \text{ (h.97).}$$



Hình 97

* Góc ngoài của tam giác lớn hơn mỗi góc trong không kề với nó.

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### Dạng 1. TÍNH SỐ ĐO GÓC CỦA MỘT TAM GIÁC

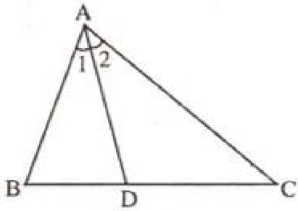
**Phương pháp giải**

*Sử dụng tính chất :*

- Tổng ba góc của một tam giác bằng $180^o$.
- Trong tam giác vuông, hai góc nhọn phụ nhau.
- Góc ngoài của một tam giác bằng tổng hai góc trong không kề với nó.

**Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 70^o$ ; $\hat{C} = 40^o$. Tia phân giác của góc A cắt BC tại D. Tính $\widehat{ADC}$ ; $\widehat{ADB}$.

***Giải.*** (h.98)




Hình 98

Tam giác ABC ta có : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o$

nên $\hat{A} + 70^o + 40^o = 180^o$.

Suy ra $\hat{A} = 70^o$.

AD là đường phân giác nên $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \dfrac{\hat{A}}{2} = 35^o$.

Tam giác ABD có $\widehat{ADC} = \hat{B} + \hat{A}_1 = 70^o + 35^o = 105^o$ (góc ngoài của tam giác).

Suy ra $\widehat{ADB} = 180^o - \widehat{ADC} = 180^o - 105^o = 75^o$.

**Ví dụ 2.** Cho $\Delta ABC$ có $\hat{A} - \hat{B} = 20^o$ ; $\hat{B} - \hat{C} = 20^o$. Tính số đo góc $\hat{A}$.

***Giải***

Ta có : $\hat{A} - \hat{B} = 20^o$ hay $\hat{A} = \hat{B} + 20^o$ ; $\hat{B} - \hat{C} = 20^o$ hay $\hat{C} = \hat{B} - 20^o$.

Mặt khác, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o$ nên $\hat{B} + 20^o + \hat{B} + \hat{B} - 20^o = 180^o$.

Suy ra : $\hat{B} = 60^o$. Vậy $\hat{A} = \hat{B} + 20^o = 80^o$.

**Ví dụ 3.** Tính số đo các góc của tam giác ABC, biết : $20.\hat{A} = 15.\hat{B} = 12.\hat{C}$.

***Giải***

Từ $20.\hat{A} = 15.\hat{B} = 12.\hat{C}$, ta có : $\dfrac{20.\hat{A}}{60} = \dfrac{15.\hat{B}}{60} = \dfrac{12.\hat{C}}{60}$.

Hay $\dfrac{\hat{A}}{3} = \dfrac{\hat{B}}{4} = \dfrac{\hat{C}}{5}$.

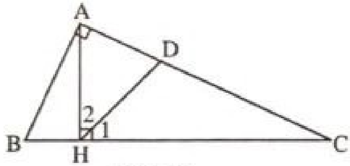
Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{\widehat{A}}{3}=\frac{\widehat{B}}{4}=\frac{\widehat{C}}{5}=\frac{\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}}{3+4+5}=\frac{180^o}{12}=15^o.$$

Suy ra $\widehat{A}=3.15^o=45^o$ ; $\widehat{B}=4.15^o=60^o$ ; $\widehat{C}=5.15^o=75^o$.

**Ví dụ 4.** Cho $\Delta ABC$ vuông tại A. Kẻ $AH \perp BC$, tia phân giác của $\widehat{AHC}$ cắt AC tại D. Biết $\widehat{ABC}=65^o$. Tính số đo $\widehat{ADH}$.

***Giải.*** (h.99)



Hình 99

$\Delta ABC$ có $\widehat{A}=90^o$ nên $\widehat{B}+\widehat{C}=90^o$ ;

tức là $65^o+\widehat{C}=90^o$ hay $\widehat{C}=25^o$.

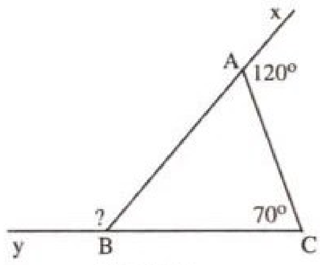
Mặt khác, HD là tia phân giác của góc AHC,

nên $\widehat{H_1}=\widehat{H_2}=\frac{1}{2}.\widehat{H}=45^o$.

$\Delta HCD$ có $\widehat{ADH}=\widehat{H_1}+\widehat{C}=45^o+25^o=70^o$.

**Ví dụ 5.** Cho hình 100, biết : $\widehat{C}=70^o$ ; $\widehat{CAx}=120^o$. Tính số đo góc $\widehat{ABy}$.

***Giải.*** (h.100)



Hình 100

$\Delta ABC$ có $\widehat{CAx}=\widehat{C}+\widehat{ABC}$

hay $70^o+\widehat{ABC}=120^o \Rightarrow \widehat{ABC}=50^o$.

Ta có : $\widehat{ABy}+\widehat{ABC}=180^o$ nên $\widehat{ABy}=130^o$.

**Dạng 2.** TÌM MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁC GÓC

**Phương pháp giải**

- Ghép các góc cần xét vào các tam giác, sau đó tìm mối liên quan giữa các góc.
- So sánh các góc hoặc tìm sự liên hệ giữa chúng.

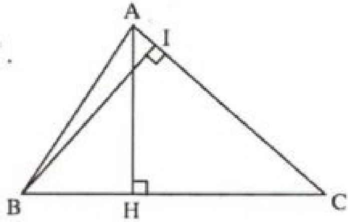
**Ví dụ 1.** Cho tam giác nhọn ABC. Vẽ $AH \perp BC$ ; $BI \perp AC$. Chứng minh $\widehat{IBC}=\widehat{HAC}$.

*Giải.* (h.101)

Tam giác HAC có $\widehat{H} = 90^o$ nên $\widehat{HAC} + \widehat{C} = 90^o$.

Tam giác IBC có $\widehat{I} = 90^o$ nên $\widehat{IBC} + \widehat{C} = 90^o$.

Do đó $\widehat{IBC} = \widehat{HAC}$.



Hình 101

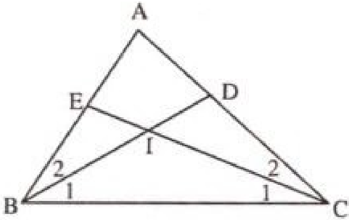
**Ví dụ 2.** Góc nhọn tạo bởi các tia phân giác của các góc $\widehat{B}$ ; $\widehat{C}$ của tam giác ABC có số đo bằng $45^o$. Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông.

*Giải.* (h.102)

Gọi BD ; CE là các đường phân giác của $\widehat{B}$ ; $\widehat{C}$, chúng cắt nhau tại I ta có : $\widehat{DIC} = 45^o$.

Tam giác BIC có $\widehat{DIC} = \widehat{B_1} + \widehat{C_1}$ (tính chất góc ngoài) nên $\widehat{B_1} + \widehat{C_1} = 45^o$.

Mà $\widehat{B_1} = \dfrac{\widehat{B}}{2}$ ; $\widehat{C_1} = \dfrac{\widehat{C}}{2}$ nên $\dfrac{\widehat{B}}{2} + \dfrac{\widehat{C}}{2} = 45^o$.



Hình 102

Do đó $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^o$. Vậy tam giác ABC vuông tại A.

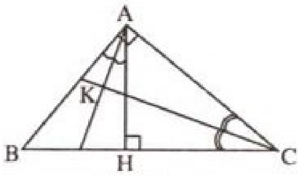
**Ví dụ 3.** Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ AH $\perp$ BC. Các tia phân giác của các góc $\widehat{C}$ và $\widehat{BAH}$ cắt nhau tại K. Chứng minh AK $\perp$ CK.

*Giải.* (h.103)

Xét tam giác ABH và tam giác ABC vuông tại H và A, ta có :

$$\widehat{BAH} = 90^o - \widehat{B} \;;\; \widehat{ACB} = 90^o - \widehat{B},$$

nên $\widehat{BAH} = \widehat{ACB}$.



Hình 103

Ta có : $\widehat{BAK} = \dfrac{1}{2}.\widehat{BAH}$ ; $\widehat{HCK} = \dfrac{1}{2}.\widehat{ACB}$

nên $\widehat{BAK} = \widehat{ACK}$.

Xét tam giác AKC, ta có : $\widehat{KAC} + \widehat{ACK} = \widehat{KAC} + \widehat{BAK} = 90^o$.

Do đó tam giác AKC vuông tại K hay AK $\perp$ CK.

**Ví dụ 4.** Cho tam giác ABC có AD là đường phân giác. Chứng minh rằng $\widehat{ADC} - \widehat{ADB} = \hat{B} - \hat{C}$.

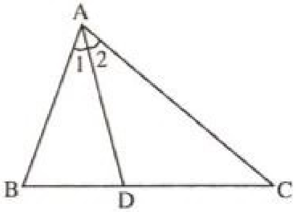
*Giải.* (h.104)

Tam giác ABD có : $\hat{B} + \widehat{ADB} = 180^o - \hat{A}_1$.

Tam giác ADC có : $\hat{C} + \widehat{ADC} = 180^o - \hat{A}_2$.

Mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ nên $\hat{B} + \widehat{ADB} = \hat{C} + \widehat{ADC}$.

Suy ra $\hat{B} - \hat{C} = \widehat{ADC} - \widehat{ADB}$.



Hình 104

**Dạng 3.** SỬ DỤNG GÓC NGOÀI CỦA TAM GIÁC ĐỂ SO SÁNH GÓC

**Phương pháp giải**

| |
|---|
| Sử dụng tính chất : Góc ngoài của tam giác lớn hơn mỗi góc trong không kề với nó. |

**Ví dụ.** Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là điểm nằm bên trong của tam giác đó. Chứng tỏ $\widehat{BMC}$ là góc tù.

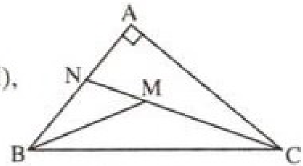
*Giải.* (h.105)

Kẻ CM cắt AB tại N.

Ta có : $\widehat{BMC} > \widehat{BNC}$ (góc ngoài của tam giác BNM),

$\widehat{BNC} > \widehat{BAC}$ (góc ngoài của tam giác ANC).

Do đó : $\widehat{BMC} > \widehat{BAC}$, suy ra $\widehat{BMC} > 90^o$.



Hình 105

## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho tam giác ABC biết $\hat{A} - \hat{B} = \hat{B} - \hat{C} = 10^o$. Tính số đo các góc $\hat{A}$ ; $\hat{B}$ ; $\hat{C}$.

2. Cho $\Delta ABC$ có $\hat{A} = 70^o$ ; $\hat{B} - \hat{C} = 20^o$. Tính số đo các góc $\hat{B}$ ; $\hat{C}$.

3. Cho $\Delta ABC$ có $\hat{B} = 80^o$, $\hat{C} = 40^o$. Tia phân giác của $\hat{B}$ cắt AC tại D. Tính số đo $\widehat{ADB}$.

4. Cho tam giác ABC có điểm M nằm trong tam giác đó. Chứng minh :

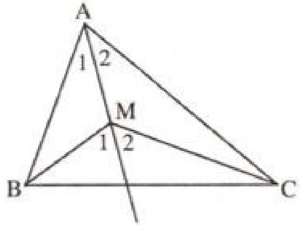
$$\widehat{BMC} = \widehat{ABM} + \widehat{ACM} + \widehat{BAC}.$$

5. Cho tam giác ABC có $\hat{B} - \hat{C} = 20^o$. Tia phân giác của $\hat{A}$ cắt BC tại D. Kẻ AH $\perp$ BC. Tính $\widehat{HAD}$.

## HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

1. Từ $\hat{A} - \hat{B} = \hat{B} - \hat{C} = 10^o$, ta có : $\hat{A} = \hat{B} + 10$ ; $\hat{C} = \hat{B} - 10^o$ mà $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o$ nên $\hat{B} + 10^o + \hat{B} + \hat{B} - 10^o = 180^o \Rightarrow 3.\hat{B} = 180^o$ hay $\hat{B} = 60^o$.

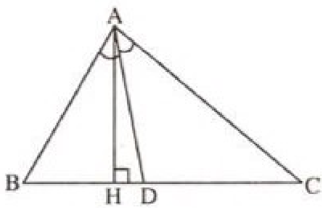
   Suy ra $\hat{A} = 70^o$ ; $\hat{C} = 50^o$.



Hình 106

2. $\hat{B} = 65^o$ ; $\hat{C} = 45^o$.
3. $\widehat{ADB} = 80^o$.
4. (h.106) Áp dụng tính chất góc ngoài của tam giác, ta có : $\widehat{M_1} = \widehat{A_1} + \widehat{ABM}$ ; $\widehat{M_2} = \widehat{A_2} + \widehat{ACM}$.

   Nên $\widehat{BMC} = \widehat{M_1} + \widehat{M_2} = \widehat{BAC} + \widehat{ABM} + \widehat{ACM}$.



Hình 107

5. (h.107) Theo Ví dụ 4, ta có : $\widehat{ADC} - \widehat{ADB} = \hat{B} - \hat{C}$.

   Do đó $\widehat{ADC} - \widehat{ADB} = 20^o$.

   Suy ra $\widehat{ADB} = (180^o - 20^o) : 2 = 80^o$.

   Mặt khác, $\widehat{HAD} = 90^o - \widehat{ADH}$, suy ra $\widehat{HAD} = 10^o$.

# §2. HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU.
# §3. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ NHẤT CỦA TAM GIÁC : CẠNH - CẠNH - CẠNH (C.C.C)

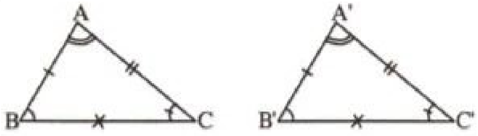
## A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. *Định nghĩa hai tam giác bằng nhau*

   Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có các cạnh tương ứng bằng nhau, các góc tương ứng bằng nhau.

$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (h.108)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \widehat{C} = \widehat{C'} \\ AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C'. \end{cases}$$



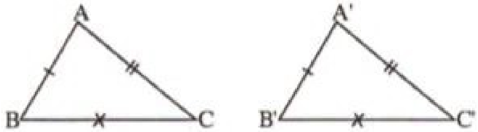
Hình 108

2. *Trường hợp bằng nhau thứ nhất của tam giác : cạnh-cạnh-cạnh (c.c.c)*

Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (c.c.c) (h.109).



Hình 109

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### Dạng 1. XÁC ĐỊNH CÁC CẠNH BẰNG NHAU, CÁC GÓC BẰNG NHAU CỦA HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

**Phương pháp giải**

| |
|---|
| Căn cứ vào cách viết các đỉnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau theo đúng thứ tự, ta viết được các góc bằng nhau, các đoạn thẳng bằng nhau. |

**Ví dụ 1.** Cho $\Delta ABC = \Delta DEF = \Delta MNP$ và $AC = 5cm$, $DE = 6cm$, $NP = 7cm$. Xác định độ dài các cạnh còn lại của mỗi tam giác.

***Giải***

$\Delta ABC = \Delta DEF = \Delta MNP$, suy ra :

$$AB = DE = MN = 6cm\ ;$$
$$BC = EF = NP = 7cm\ ;$$
$$AC = DF = MP = 5cm.$$

**Ví dụ 2.** Cho $\Delta ABC = \Delta HIK = \Delta MNP$ có $\widehat{A} = 70^o$ ; $\widehat{I} = 50^o$. Xác định các góc còn lại của mỗi tam giác.

***Giải***

$\Delta ABC = \Delta HIK = \Delta MNP$, suy ra :

$$\widehat{A} = \widehat{H} = \widehat{M} = 70^o,$$

$$\widehat{B} = \widehat{I} = \widehat{N} = 50^o.$$

Tam giác ABC có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^o$ nên $70^o + 50^o + \widehat{C} = 180^o$, do đó $\widehat{C} = 60^o$.

$\Delta ABC = \Delta HIK = \Delta MNP$, suy ra :

$$\widehat{C} = \widehat{K} = \widehat{P} = 60^o.$$

**Ví dụ 3.** Cho $\Delta ABC = \Delta DEF$. Biết AB + DE = 10cm, EF = 6cm, AC = 7cm. Tính chu vi $\Delta ABC$.

***Giải***

$\Delta ABC = \Delta DEF$ nên AB = DE ; BC = EF = 6cm ; AC = DF = 7cm.

Mà AB + DE = 10cm do đó AB = 5cm.

Vậy chu vi $\Delta ABC$ là : AB + BC + CA = 5 + 6 + 7 = 18 (cm).

**Ví dụ 4.** Cho $\Delta ABC = \Delta DEF$ ; biết $\widehat{B} - \widehat{C} = 10^o$ ; $\widehat{E} + \widehat{F} = 120^o$.

Tính số đo các góc của hai tam giác.

***Giải***

$\Delta ABC = \Delta DEF$ nên $\widehat{B} = \widehat{E}$ ; $\widehat{C} = \widehat{F}$, do đó $\widehat{E} - \widehat{F} = \widehat{B} - \widehat{C} = 10^o$.

Mặt khác, $\widehat{E} + \widehat{F} = 120^o$ suy ra : $\widehat{E} = (120^o + 10^o) : 2 = 65^o$ ;

$$\widehat{F} = (120^o - 10^o) : 2 = 55^o.$$

Vậy $\widehat{D} = 180^o - (65^o + 55^o) = 60^o$.

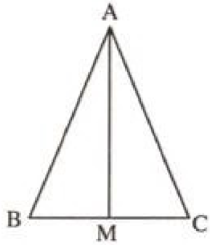
Tam giác ABC có số đo các góc là : $\widehat{B} = 65^o$ ; $\widehat{C} = 55^o$ ; $\widehat{A} = 60^o$.

## **Dạng 2.** CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

### Phương pháp giải

- Xét hai tam giác ;
- Kiểm tra ba điều kiện bằng nhau : cạnh - cạnh - cạnh ;
- Kết luận hai tam giác đó bằng nhau.

**Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC có AB = AC. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh $\Delta ABM = \Delta ACM$.



Hình 110

*Giải.* (h.110)

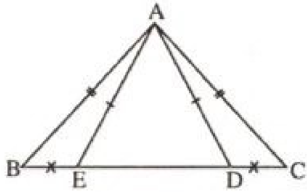
Xét tam giác ABM và tam giác ACM có :

AB = AC, BM = CM, AM là cạnh chung,

suy ra $\Delta ABM = \Delta ACM$ (c.c.c).

**Ví dụ 2**. Tìm các cặp tam giác bằng nhau trong hình vẽ 111.

*Giải*



Hình 111

Dựa vào các cặp cạnh bằng nhau, cạnh chung, ta có :

$\Delta AEB = \Delta ADC$ (c.c.c ) ;

$\Delta ABD = \Delta ACE$ (c.c.c) .

*Nhận xét.* Khi chứng minh hai tam giác bằng nhau, bạn nên nhớ yếu tố cạnh chung.

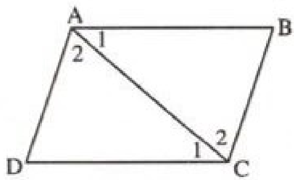
## Dạng 3. SỬ DỤNG CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA HAI TAM GIÁC ĐỂ CHỨNG MINH HAI GÓC BẰNG NHAU

### Phương pháp giải

- Chọn hai tam giác có hai góc cần chứng minh bằng nhau.
- Chứng minh hai tam giác ấy bằng nhau theo trường hợp c.c.c.
- Suy ra hai góc tương ứng bằng nhau.

**Ví dụ 1.** Cho hình vẽ 112, biết : AB = CD ; AD = BC. Chứng minh AB // CD ; AD // BC.

*Giải*



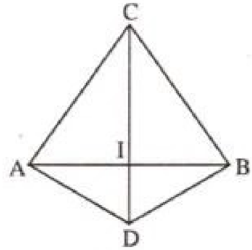
Hình 112

Xét tam giác ABC và tam giác CDA, ta có :
AB = CD ; BC = DA ; AC là cạnh chung,
suy ra $\Delta ABC = \Delta CDA$ (c.c.c).
Do vậy $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ ; $\widehat{C_2} = \widehat{A_2}$ .

$\widehat{A_1}$ ; $\widehat{C_1}$ là cặp góc so le trong bằng nhau nên AB // CD.

$\widehat{C_2}$ ; $\widehat{A_2}$ là cặp góc so le trong bằng nhau nên AD // CB.

**Ví dụ 2.** Cho đoạn thẳng AB, hai điểm C và D cách đều hai điểm A, B (C và D khác phía đối với AB). CD cắt AB tại I. Chứng minh CD là tia phân giác của góc ACB.



Hình 113

***Giải.*** (h.113)

Xét $\Delta ACD$ và $\Delta BCD$ có AC = BC, AD = BD, CD là cạnh chung $\Rightarrow \Delta ACD = \Delta BCD$ (c.c.c).

Vậy $\widehat{ACD} = \widehat{BCD}$ hay CD là tia phân giác của $\widehat{ACB}$.

## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**1.** Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$. Biết $\widehat{A} = 42^o$ ; $\widehat{P} = 54^o$. Tính số đo góc N.

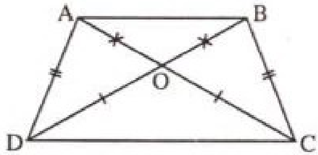
**2.** Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$, biết AC = 6cm ; AB + BC = 8cm ; MN – NP = 2cm. Tính số đo các cạnh của $\Delta MNP$.

**3.** Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$. Biết AB = 4cm, AC = 6cm, NP = 7cm. Tính chu vi của tam giác MNP.

**4.** Cho hình 114.

a) Tìm các cặp tam giác bằng nhau theo trường hợp cạnh - cạnh - cạnh.

b) Chứng minh : AB // CD.



Hình 114

**5.** Cho góc xOy. Trên Ox lấy điểm A, trên Oy lấy B sao cho OA = OB. Lấy hai điểm M, N đều thuộc miền trong của góc xOy, sao cho MA = MB, NA = NB. Chứng minh rằng :

a) OM là tia phân giác của góc xOy ; b) Ba điểm O, M, N thẳng hàng.

## HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**1.** *Đáp số :* $\widehat{N} = 84^o$.

**2.** Ta có : AB + BC = MN + NP = 8cm và MN – NP = 2cm.

Suy ra : MN = (8 + 2) : 2 = 5cm,

NP = (8 – 2) : 2 = 3cm,

PM = CA = 6cm.

**3.** *Đáp số :* Chu vi của $\Delta MNP$ là 17cm.

4. a) Dựa vào các cặp cạnh bằng nhau, cạnh chung, ta có :
$\Delta AOD = \Delta BOC$ ; $\Delta ABD = \Delta BAC$ ; $\Delta ACD = \Delta BDC$.

b) Ta có : $\Delta ACD = \Delta BDC$ nên $\widehat{ACD} = \widehat{BDC}$ ; (1)

$\Delta ABD = \Delta BAC$ nên $\widehat{ABD} = \widehat{BAC}$. (2)

Mặt khác, $\Delta ABO$ có $\widehat{ABD} + \widehat{BAC} + \widehat{AOB} = 180^o$ ;

$\Delta COD$ có $\widehat{ACD} + \widehat{BDC} + \widehat{COD} = 180^o$.

Ta lại có $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ (đối đỉnh).

Do đó $\widehat{ABD} + \widehat{BAC} = \widehat{ACD} + \widehat{BDC}$.

Kết hợp với (1), (2), ta có $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ mà hai góc ở vị trí so le trong nên AB // CD.

*Nhận xét :*

Bài này dễ sót hai tam giác bằng nhau.

Cạnh chung của hai tam giác chính là một yếu tố cạnh bằng nhau.

Chú ý kí hiệu bằng nhau của hai tam giác.

5. (h.115) a) Ta có : $\Delta OMA = \Delta OMB$ (c.c.c).

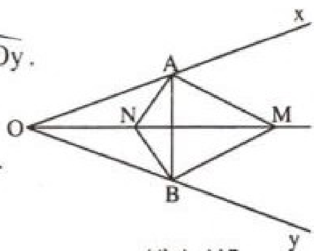
Suy ra $\widehat{MOA} = \widehat{MOB} \Rightarrow$ OM là tia phân giác của $\widehat{xOy}$.

b) Tương tự câu a), ta có : $\Delta ONA = \Delta ONB$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{AON} = \widehat{BON}$ hay ON là tia phân giác của $\widehat{xOy}$.

Do đó M, N cùng thuộc tia phân giác của $\widehat{xOy}$.

Vậy ba điểm O, M, N thẳng hàng.




Hình 115

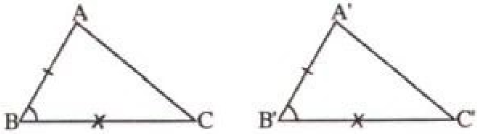
# §4. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ HAI CỦA TAM GIÁC : CẠNH - GÓC - CẠNH (C.G.C)

## A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. *Trường hợp bằng nhau thứ hai của tam giác : cạnh - góc - cạnh (c.g.c)*

Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ BC = B'C' \end{array}\right\}$$




$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (c.g.c) (h.116).

Hình 116

2. *Hệ quả.* Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### Dạng 1. CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

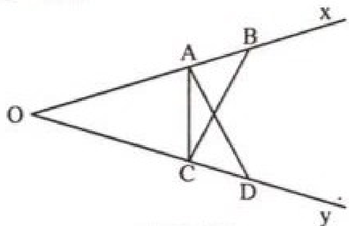
#### Phương pháp giải

- Xét hai tam giác ;
- Kiểm tra ba điều kiện bằng nhau : cạnh - góc - cạnh ;
- Kết luận hai tam giác bằng nhau.

**Ví dụ.** Cho góc xOy khác góc bẹt. Trên cạnh Ox lấy hai điểm A và B, trên cạnh Oy lấy hai điểm C và D, sao cho OA = OC ; OB = OD.

a) Chứng minh $\Delta OAD = \Delta OCB$.

b) Chứng minh $\Delta ACD = \Delta CAB$.




Hình 117

***Giải.*** (h.117)

a) Xét tam giác OAD và tam giác OCB, ta có : OA = OC, $\widehat{AOC}$ chung, OD = OB.

Suy ra $\Delta OAD = \Delta OCB$ (c.g.c).

b) Ta có : OA = OC ; OB = OD nên AB = CD.

$\Delta OAD = \Delta OCB$ suy ra AD = CB ; $\hat{D} = \hat{B}$.

Xét tam giác ACD và tam giác CAB có AB = CD ; $\hat{D} = \hat{B}$ ; AD = CB nên

$$\Delta ACD = \Delta CAB \text{ (c.g.c)}.$$

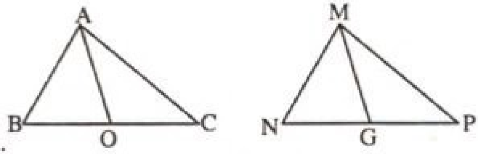
## Dạng 2. SỬ DỤNG CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA HAI TAM GIÁC ĐỂ CHỨNG MINH HAI GÓC BẰNG NHAU, HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU

**Phương pháp giải**

- Chọn hai tam giác có cạnh (góc) là hai đoạn thẳng (góc) cần chứng minh bằng nhau.
- Chứng minh hai tam giác ấy bằng nhau theo trường hợp (c.g.c ).
- Suy ra hai cạnh (góc) tương ứng bằng nhau.

**Ví dụ 1.** Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$. Gọi O và G lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và NP. Chứng minh AO = MG.

*Giải.* (h.118)



Hình 118

$\Delta ABC = \Delta MNP$ thì AB = MN, $\hat{B} = \hat{N}$, BC = NP,...

O là trung điểm BC nên $BO = \frac{1}{2}BC$ ;

G là trung điểm NP nên $NG = \frac{1}{2}NP$. Từ đó suy ra BO = NG.

Xét tam giác ABO và MNG, ta có :

AB = MN, $\hat{B} = \hat{N}$, BO = NG nên $\Delta ABO = \Delta MNG$ (c.g.c), suy ra AO = MG.

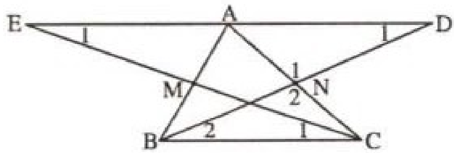
**Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC có M và N lần lượt là trung điểm của cạnh AB và AC. Trên tia đối của tia NB lấy điểm D sao cho ND = NB. Trên tia đối của tia MC lấy điểm E sao cho ME = MC. Chứng minh :

a) AD = BC.

b) AE // BC.

c) A là trung điểm của DE.

*Giải.* (h.119)



Hình 119

a) Xét $\Delta AND$ và $\Delta CNB$, ta có :

AN = NC ; $\widehat{N_2} = \widehat{N_1}$ (đối đỉnh) ; ND = NB nên $\Delta AND = \Delta CNB$ (c.g.c).

Do đó AD = BC.

b) Tương tự ta có $\Delta AME = \Delta BMC$ (c.g.c), nên $\widehat{E_1} = \widehat{C_1}$ mà $\widehat{E_1}$ và $\widehat{C_1}$ ở vị trí so le trong, do đó $AE // BC$.

c) $\Delta AND = \Delta CNB$ nên $\widehat{D_1} = \widehat{B_2}$ mà $\widehat{D_1}$ và $\widehat{B_2}$ ở vị trí so le trong, do đó $AD // BC$ mà $AE // BC$, suy ra D, A, E thẳng hàng. (*)

$\Delta AEM = \Delta BCM$ nên $AE = BC$ mà $AD = BC$.

Do đó $AE = AD$, kết hợp với (*) suy ra A là trung điểm của ED.

**Ví dụ 3.** Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 2.\hat{C}$. Tia phân giác của góc B cắt AC tại D. Trên tia đối của tia BD lấy điểm N sao cho BN = AC. Trên tia đối của tia CB lấy điểm P sao cho CP = AB.

a) Chứng minh AN = AP.

b) Tìm điều kiện của góc ACB để $AN \perp AP$.

***Giải.*** (h.120)

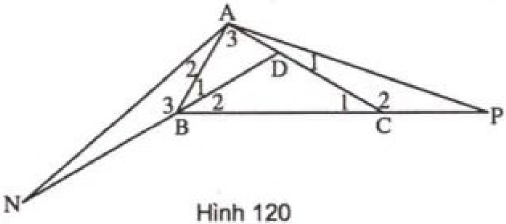
Ta có $\widehat{B_1} = \widehat{B_2} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$

$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{C_1}$

Mà $\widehat{B_1} + \widehat{B_3} = 180^\circ$;

$\widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 180^\circ$.

Từ đó suy ra $\widehat{B_3} = \widehat{C_2}$.



Hình 120

Xét $\Delta ABN$ và $\Delta PCA$ có $AB = CP$; $\widehat{B_3} = \widehat{C_2}$; $BN = CA$

$$\Rightarrow \Delta ABN = \Delta PCA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AN = AP.$$

b) $\Delta ABN = \Delta PCA \Rightarrow \widehat{A_1} = \hat{N}$.

Vậy $\widehat{NAP} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{N} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} = 90^\circ$

$$\Leftrightarrow \widehat{B_1} + \widehat{A_3} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{ADB} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{C_1} = 45^\circ.$$

**Ví dụ 4.** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Vẽ đoạn thẳng $AM \perp AB$; $AM = AB$ sao cho M và C khác phía đối với đường thẳng AB. Vẽ đoạn thẳng $AN \perp AC$ và $AN = AC$ sao cho N và B khác phía đối với đường thẳng AC. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BN và CM. Chứng minh :

a) $\Delta AMC = \Delta ABN$.

b) $MC = BN$ và $MC \perp BN$

c) $AI = AK$ và $AI \perp AK$.

*Giải.* (h.121)

a) Ta có : $\widehat{MAC} = \widehat{BAN}$ $\left(= 90^o + \widehat{BAC}\right)$

nên $\Delta MAC = \Delta BAN$ (c.g.c).

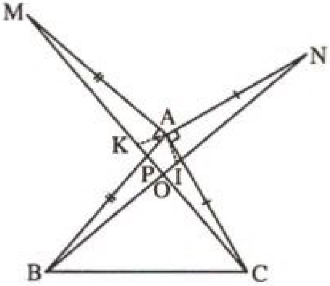
b) $\Delta MAC = \Delta BAN$ suy ra BN = MC

và $\widehat{AMC} = \widehat{ABN}$.

Gọi P là giao điểm AB và CM.

Ta có : $\widehat{AMC} + \widehat{APM} = 90^o$ (vì $\Delta AMP$ vuông)

$\Rightarrow \widehat{ABN} + \widehat{BPO} = 90^o \Rightarrow BN \perp CM$.



Hình 121

c) $CM = BN \Rightarrow MK = BI$, mà $\widehat{AMK} = \widehat{ABN}$, AM = AB

nên $\Delta AMK = \Delta ABI$ (c.g.c) $\Rightarrow AK = AI$

$\Rightarrow \widehat{MAK} = \widehat{BAI}$ ; mà $\widehat{MAK} + \widehat{KAB} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{BAI} + \widehat{KAB} = 90^o$ hay $AI \perp AK$.

## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**1.** Cho $\Delta ABC$ có AB = AC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, AB. Chứng minh rằng : BM = CN.

**2.** Cho tam giác nhọn ABC có M là trung điểm của BC. Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Trên tia đối của tia HA lấy điểm E sao cho HE = HA. Trên tia đối của tia MA lấy điểm F sao cho MF = MA. Chứng minh rằng :

a) BE = CF ; b) ME = MF.

**3.** Cho tam giác ABC vuông tại A. Tia phân giác của góc B cắt AC tại D. Trên BC lấy M sao cho BM = BA. Chứng minh : $DM \perp BC$.

**4.** Qua trung điểm M của đoạn AB kẻ đường thẳng xx' vuông góc với AB. Trên tia Mx lấy C và D sao cho MC < MD. Trên tia Mx' lấy E. Chứng minh :

a) AC = BC ; b) $\Delta ACD = \Delta BCD$ ; c) $\widehat{EAD} = \widehat{EBD}$.

**5.** Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ $AH \perp BC$. Kẻ HP vuông góc với AB và kéo dài để có PE = PH. Kẻ HQ vuông góc với AC và kéo dài để có QF = QH. Chứng minh rằng :

a) $\Delta APE = \Delta APH$, $\Delta AQH = \Delta AQF$ ;

b) Ba điểm E, A, F thẳng hàng và A là trung điểm của EF ;

c) BE // CF.

# HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

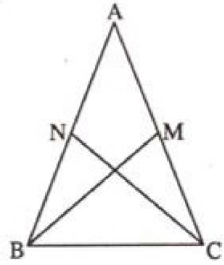
**1.** (h.122) Xét $\Delta ABM$ và $\Delta ACN$ có

$AB = AC$ ; $\widehat{A}$ chung ;

$AM = AN\left(=\frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AB\right)$ nên

$\Delta ABM = ACN$ (c.g.c)

Suy ra $BM = CN$.



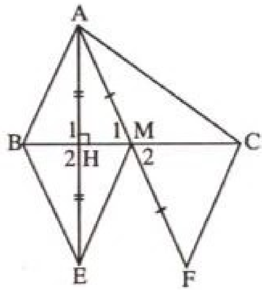
Hình 122

**2.** (h.123) a) $\Delta AHB = \Delta EHB$ (c.g.c) do đó $AB = EB$. (1)

$\Delta AMB = \Delta FMC$ (c.g.c), do đó $AB = FC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BE = CF$.

b) $\Delta AMH = \Delta EMH$ (c.g.c), do đó $AM = ME$ mà $AM = MF$ suy ra $ME = MF$.



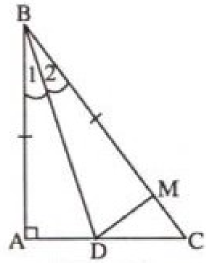
Hình 123

**3.** (h.124) $\Delta ABD = \Delta MBD$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{BMD} = \widehat{BAC}$ hay

$$\widehat{BMD} = 90^0 \Rightarrow DM \perp BC.$$

***Nhận xét*** : Để chứng minh một góc vuông, ta có thể chứng minh góc đó bằng góc vuông sẵn có, bằng cách chứng minh hai tam giác bằng nhau.



Hình 124

**4.** (h.125) a) $\Delta MAC = \Delta MBC$ (c.g.c), suy ra $AC = BC$.

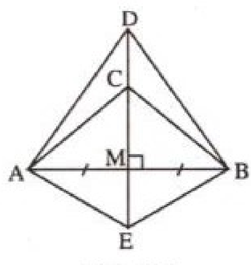
b) Tương tự câu a), ta có $\Delta MAD = \Delta MBD$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = BD$.

Xét $\Delta ACD$ và $\Delta BCD$ có $AD = BD$ ; $AC = BC$ ; $CD$ là cạnh chung $\Rightarrow \Delta ACD = \Delta BCD$ (c.c.c).

c) Xét $\Delta ADE$ và $\Delta BDE$ có $AD = BD$ ; $\widehat{ADE} = \widehat{BDE}$ (vì $\Delta ADC = \Delta BDC$) ; $DE$ chung.

Từ đó suy ra $\Delta ADE = \Delta BDE$ (c.g.c).

Vậy $\widehat{EAD} = \widehat{EBD}$.



Hình 125

5. (h.126) a) $\Delta APE = \Delta APH$ (c.g.c).

Tương tự ta có : $\Delta AQH = \Delta AQF$ (c.g.c)

b) Ta có : $\Delta APE = \Delta APH$ (cmt),

suy ra $AE = AH$ ; $\widehat{EAP} = \widehat{PAH}$.

Mặt khác, $\Delta AQH = \Delta AQF$ (cmt),

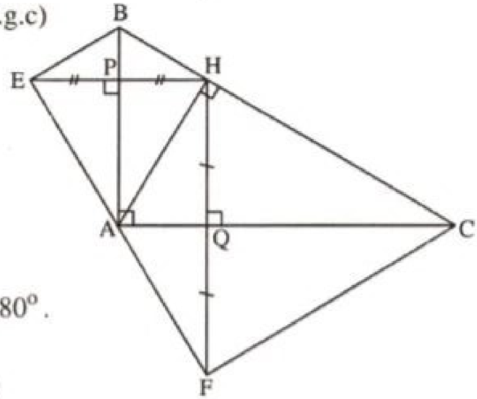
suy ra $AF = AH$ ; $\widehat{FAQ} = \widehat{HAQ}$.

Ta lại có : $\widehat{EAH} + \widehat{HAF}$

$= 2.\widehat{PAH} + 2.\widehat{HAQ} = 2.\widehat{BAC} = 180^o$.

Suy ra ba điểm E, A, F thẳng hàng.

Mặt khác, AE = AF (= AH) do đó A là trung điểm của EF.



Hình 126

c) Xét $\Delta ABE = \Delta ABH$ có $AE = AH$ ;

$\widehat{EAB} = \widehat{BAH}$ ; AB là cạnh chung.

Từ đó suy ra $\Delta AEB = \Delta AHB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{AHB} \Rightarrow \widehat{AEB} = 90^o$.

Tương tự, ta có $\Delta AHC = \Delta AFC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AFC} = 90^o$.

Do đó BE // CF.

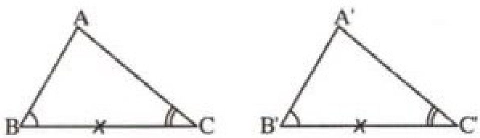
# §5. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ BA CỦA TAM GIÁC : GÓC - CẠNH - GÓC (G.C.G)

## A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. *Trường hợp bằng nhau thứ ba của tam giác : góc - cạnh - góc (g.c.g)*

Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B} = \hat{B}' \\ BC = B'C' \\ \hat{C} = \hat{C}'\end{array}\right\}$$

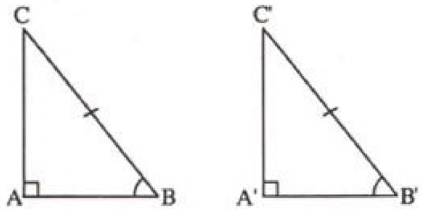



$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (g.c.g) (h.127).

Hình 127

**2.** *Trường hợp bằng nhau cạnh huyền - góc nhọn của tam giác vuông*

Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.



Hình 128

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A} = \widehat{A'} = 90^{o} \\ BC = B'C' \\ \widehat{B} = \widehat{B'}\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (cạnh huyền - góc nhọn) (h.128).

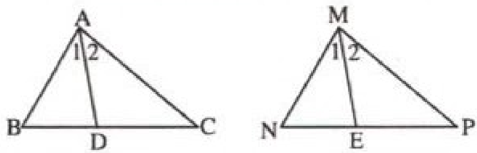
## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### Dạng 1. CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

**Phương pháp giải**

- Xét hai tam giác ;
- Kiểm tra ba điều kiện bằng nhau : góc - cạnh - góc ;
- Kết luận hai tam giác bằng nhau.

**Ví dụ 1.** Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$. Gọi AD là đường phân giác góc A của tam giác ABC. Gọi ME là đường phân giác góc M của tam giác MNP. Chứng minh $\Delta ABD = \Delta MNE$.



Hình 129

***Giải.*** (h.129)

$\Delta ABC = \Delta MNP$ suy ra $\widehat{B} = \widehat{N}$ ; $\widehat{A} = \widehat{M}$ ; $AB = MN$.

Mặt khác, AD là đường phân giác của $\widehat{A}$ nên $\widehat{A_1} = \frac{1}{2}.\widehat{A}$ ;

ME là đường phân giác của $\widehat{M}$ nên $\widehat{M_1} = \frac{1}{2}.\widehat{M}$.

Do đó $\widehat{A_1} = \widehat{M_1}$.

Xét tam giác ABD và tam giác MNE có $\widehat{B} = \widehat{N}$, $AB = MN$, $\widehat{A_1} = \widehat{M_1}$.

Suy ra $\Delta ABD = \Delta MNE$ (g.c.g).

**Ví dụ 2.** Cho góc nhọn xOy có tia Oz là tia phân giác. Qua điểm A thuộc tia Ox, vẽ đường thẳng song song với Oy cắt Oz tại M. Qua M kẻ đường thẳng song song với Ox cắt Oy tại B.

a) Chứng minh $\Delta OAM = \Delta MBO$.

b) Từ M vẽ $MH \perp Ox$ ; $MK \perp Oy$. Chứng minh MH = MK.

*Giải.* (h.130)

a) Xét $\Delta OAM$ và $\Delta MBO$, ta có :

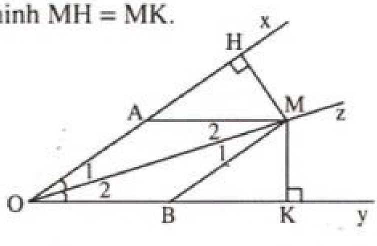
$\widehat{O_1} = \widehat{M_1}$ ; OM chung ; $\widehat{M_2} = \widehat{O_2}$

$\Rightarrow \Delta OAM = \Delta MBO$ (g.c.g).

b) Xét $\Delta OMH$ và $\Delta OMK$, ta có :

$\widehat{H} = \widehat{K} = 90^o$ ; $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ ; OM chung

$\Rightarrow \Delta OMH = \Delta OMK$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow MH = MK$.



Hình 130

**Dạng 2.** SỬ DỤNG CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA HAI TAM GIÁC ĐỂ CHỨNG MINH HAI GÓC BẰNG NHAU, HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU

**Phương pháp giải**

- Chọn hai tam giác có cạnh (góc) là hai đoạn thẳng (góc) cần chứng minh bằng nhau.
- Chứng minh hai tam giác ấy bằng nhau theo trường hợp g.c.g. Suy ra hai cạnh (góc) tương ứng bằng nhau.

**Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC có : AB = AC và M là trung điểm của BC.

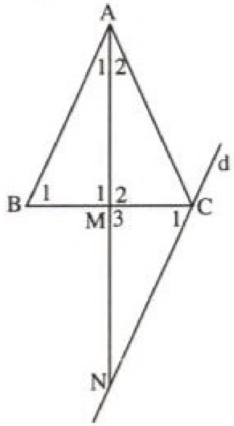
a) Chứng minh AM là tia phân giác của góc BAC.

b) Chứng minh $AM \perp BC$.

c) Qua C kẻ đường thẳng d song song với AB cắt tia AM tại N. Chứng minh M là trung điểm của AN.

*Giải.* (h.131)

a) Xét tam giác ABM và tam giác ACM, ta có : AB = AC, BM = MC, AM là cạnh chung, suy ra $\Delta ABM = \Delta ACM$ (c.c.c) nên $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ hay AM là tia phân giác của góc BAC.



Hình 131

b) Ta có $\Delta ABM = \Delta ACM$ nên $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$, mà $\widehat{M_1} + \widehat{M_2} = 180^o$, do đó $\widehat{M_1} = \widehat{M_2} = 90^o$. Hay AM $\perp$ BC.

c) Ta có CN // AB suy ra $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$.

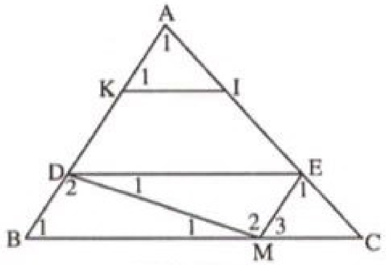
Xét hai tam giác ABM và tam giác NCM, ta có $\widehat{M_1} = \widehat{M_3}$ ; MB = MC ; $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ suy ra $\Delta ABM = \Delta NCM$ (g.c.g) do đó AM = MN.

**Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC có BC = 5cm. Trên tia AB lấy hai điểm K và D sao cho AK = BD.

Vẽ : KI // BC ; DE // BC (I ; E $\in$ AC).

a) Chứng minh AI = CE ; b) Tính độ dài DE + KI.

***Giải.*** (h.132)



Hình 132

a) Kẻ EM // AB ( M $\in$ BC).

Tam giác DEM và tam giác MBD có $\widehat{D_1} = \widehat{M_1}$ ; DM chung ; $\widehat{D_2} = \widehat{M_2}$ nên $\Delta DEM = \Delta MBD$ (g.c.g), suy ra BD = ME ; DE = BM.

Ta có AB // EM nên $\widehat{A_1} = \widehat{E_1}$ ; $\widehat{B_1} = \widehat{M_3}$ ;

KI // BC nên $\widehat{K_1} = \widehat{B_1}$.

Tam giác AKI và tam giác EMC có $\widehat{A_1} = \widehat{E_1}$ ; AK = EM (= BD) ; $\widehat{M_3} = \widehat{K_1}$ $\left(= \widehat{B_1}\right)$ nên $\Delta AKI = \Delta EMC$ ( g.c.g).

Suy ra AI = EC và KI = MC.

b) Ta có KI = MC ; DE = BM suy ra KI + DE = MC + BM = BC = 5cm.

## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho $\Delta ABC$ (AB < AC ) có M là trung điểm của BC. Vẽ BI và CK vuông góc với đường thẳng AM. Chứng minh rằng :

   a) BI = CK ; b) CI // BK.

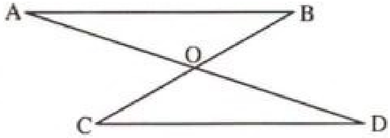
2. Cho $\Delta ABC$ có $\widehat{A} = 60^o$. Tia phân giác của góc B và góc C cắt cạnh AC, AB lần lượt tại D, E và cắt nhau tại O. Chứng minh rằng BE + CD = BC.

3. Cho hình 133, trong đó AB // CD, AB = CD.

Chứng minh rằng : OA = OD ; OB = OC.

4. Cho $\Delta$ABC vuông tại A có AB = AC. Lấy M thuộc BC (BM > MC). Kẻ BD và CE vuông góc với đường thẳng AM. Chứng minh rằng :

a) $\Delta ABD = \Delta CAE$ ; b) BD – CE = DE.



Hình 133

5. Cho hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn. Lấy I bất kì trên AD. Tia IO cắt BC tại K. Chứng minh DI = CK ; OI = OK.

6. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của AB. Qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt AC tại N, qua N kẻ đường thẳng song song với AB cắt BC tại E.

Chứng minh rằng : AM = NE ; AN = NC.

## HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

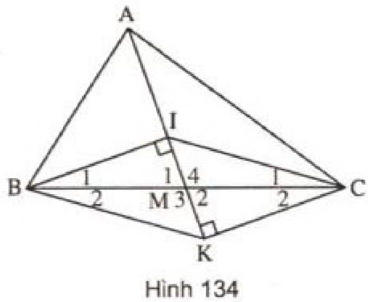
1. (h.134)

a) $\Delta BMI = \Delta CMK$ (cạnh huyền - góc nhọn).

Suy ra BI = CK .

b) Xét $\Delta$BMK và $\Delta$CMI có : MB = MC, $\widehat{M_3} = \widehat{M_4}$ , MI = MK (do $\Delta BMI = \Delta CMK$) nên $\Delta BMK = \Delta CMI$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{C_1} = \widehat{B_2}$ hay CI // BK.



Hình 134

2. (h.135)

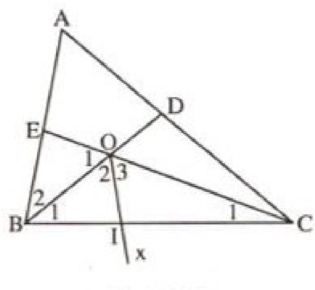
$\Delta$ABC có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^o$.

Mà $\widehat{A} = 60^o$ nên $\widehat{B} + \widehat{C} = 120^o$.

Ta lại có $\widehat{B_1} + \widehat{C_1} = \frac{1}{2}.\widehat{B} + \frac{1}{2}.\widehat{C} = 60^o$.

$\Delta$BOC có $\widehat{BOC} + \widehat{B_1} + \widehat{C_1} = 180^o$

nên $\widehat{BOC} = 120^o$ và $\widehat{O_1} = 60^o$.



Hình 135

Kẻ Ox là tia phân giác của góc BOC, Ox cắt BC tại I.

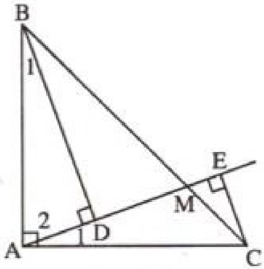
$\Delta BEO = \Delta BIO$ (g.c.g). Suy ra BE = BI.

Chứng minh tương tự, ta có $\Delta COD = \Delta COI$ nên CD = CI.

Vậy BE + CD = BC.

3. $\Delta OAB = \Delta ODC$ (g.c.g) suy ra OA = OD ; OB = OC.

4. (h.136)



Hình 136

a) Xét $\Delta ABD$ và $\Delta CAE$ có $\widehat{BDA} = \widehat{AEC} = 90^\circ$,

AB = AC (giả thiết), $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ (cùng phụ với $\widehat{A_2}$)

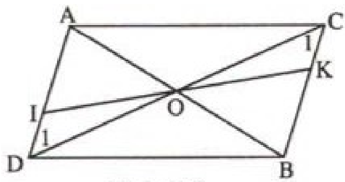
do đó $\Delta ABD = \Delta CAE$ (cạnh huyền - góc nhọn).

b) $\Delta ABD = \Delta CAE$ nên BD = AE ; AD = CE,

do đó BD – CE = AE – AD.

Vậy BD – CE = DE.

***Nhận xét :*** Để chứng minh một đoạn bằng tổng hay một hiệu hai đoạn thẳng, ta thường biến đổi đoạn thẳng đó thành hai đoạn cùng nằm trên một đường thẳng và sử dụng phép toán cộng, trừ đoạn thẳng.



Hình 137

5. (h.137) $\Delta AOD = \Delta BOC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{C_1}$.

Từ đó, suy ra $\Delta ODI = \Delta OCK$ ( g.c.g)

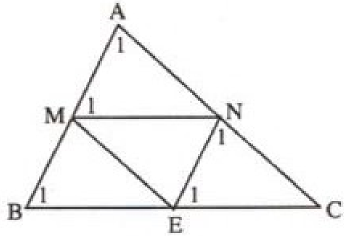
$\Rightarrow$ DI = CK ; OI = OK.

6. (h.138) $\Delta MEB = \Delta EMN$ (g.c.g)

$\Rightarrow MB = NE \Rightarrow AM = NE$.

Ta có $\widehat{M_1} = \widehat{E_1} \left(= \widehat{B_1}\right)$ ; AM = NE ; $\widehat{A_1} = \widehat{N_1}$

$\Rightarrow \Delta AMN = \Delta NEC$ (g.c.g) $\Rightarrow$ AN = NC.



Hình 138

# §6. TAM GIÁC CÂN

## A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

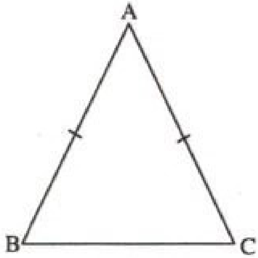
**1.** *Tam giác cân*

a) *Định nghĩa.* Tam giác cân là tam giác có hai cạnh bằng nhau.

$\Delta ABC$ cân tại $A \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta ABC \text{ có} \\ AB = AC \end{cases}$ (h.139).

b) *Tính chất.* Trong tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau.

$\Delta ABC$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C}$.



Hình 139

c) *Dấu hiệu nhận biết*

- Theo định nghĩa.
- Nếu một tam giác có hai góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

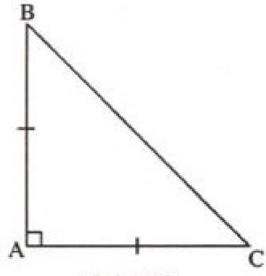
**2.** *Tam giác vuông cân*

a) *Định nghĩa.* Tam giác vuông cân là tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau.

$\Delta ABC$ vuông cân tại $A \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta ABC \\ \widehat{A} = 90^o \\ AB = AC \end{cases}$ (h.140).

b) *Tính chất.* Mỗi góc nhọn của tam giác vuông cân bằng $45^o$.

$\Delta ABC$ vuông cân tại $A \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = 45^o$.



Hình 140

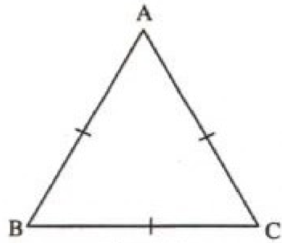
**3.** *Tam giác đều*

a) *Định nghĩa.* Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau.

$\Delta ABC$ đều $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta ABC \text{ có} \\ AB = BC = CA. \end{cases}$ (h.141).

b) *Tính chất.* Trong tam giác đều, mỗi góc bằng $60^o$.

$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^o$.



Hình 141

c) *Dấu hiệu nhận biết*

• Theo định nghĩa ;

• Nếu một tam giác có ba góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều ;

• Nếu một tam giác cân có một góc bằng $60^\circ$ thì tam giác đó là tam giác đều.

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### Dạng 1. SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA TAM GIÁC CÂN, TAM GIÁC ĐỀU, TAM GIÁC VUÔNG CÂN ĐỂ TÍNH SỐ ĐO GÓC

**Phương pháp giải**

| |
|---|
| Sử dụng tính chất về hai góc ở đáy tam giác cân bằng nhau, mỗi góc của tam giác đều bằng $60^\circ$, góc nhọn của tam giác vuông cân là $45^\circ$. |

**Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC cân tại A có $\hat{B} = 50^\circ$. Tính số đo các góc $\widehat{C}$ ; $\widehat{A}$.

***Giải***

Tam giác ABC cân tại A thì $\hat{B} = \widehat{C}$ nên $\widehat{C} = 50^\circ$.

Tam giác ABC có $\widehat{A} + \hat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ nên $\widehat{A} + 50^\circ + 50^\circ = 180^\circ$ suy ra $\widehat{A} = 80^\circ$.

**Ví dụ 2.** Cho $\Delta ABC$ có AB = AC, $\hat{B} = 2.\widehat{A}$. Tính số đo các góc của tam giác ABC.

***Giải***

Ta có $\Delta ABC$ cân tại A nên $\hat{B} = \widehat{C}$,

mà $\widehat{A} + \hat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$

nên $\widehat{A} + 2.\widehat{A} + 2.\widehat{A} = 180^\circ$, suy ra $5\widehat{A} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{A} = 36^\circ$, $\hat{B} = \widehat{C} = 2.\widehat{A} = 72^\circ$.

**Ví dụ 3.** Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Vẽ tam giác đều ABD ở phía ngoài tam giác ABC . Tính số đo các góc của tam giác BDC.

***Giải.*** (h.142)

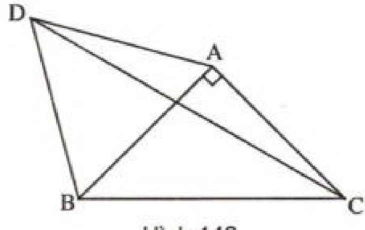
Ta có : AB = AC = AD nên tam giác ADC cân tại A.

Ta lại có : $\widehat{DAC} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC}$

$= 60^o + 90^o = 150^o$.

Mặt khác, tam giác ADC cân tại A thì :

$\widehat{DCA} = \widehat{CDA} = \dfrac{180^o - 150^o}{2} = 15^o$.



Hình 142

Tam giác ABC vuông cân tại A nên $\widehat{ACB} = 45^o$.

Do vậy $\widehat{BCD} = \widehat{ACB} - \widehat{ACD} = 45^o - 15^o = 30^o$.

Tam giác ABD đều nên $\widehat{ADB} = 60^o$.

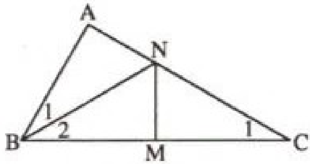
Do vậy $\widehat{BDC} = \widehat{ADB} - \widehat{ADC} = 60^o - 15^o = 45^o$ ;

$\widehat{CBD} = 180^o - \widehat{BCD} - \widehat{BDC} = 180^o - 30^o - 45^o = 105^o$.

**Ví dụ 4.** Cho $\Delta ABC$ biết $\hat{B} = 2.\hat{C}$ và BC = 2.AB. Tính số đo các góc của tam giác ABC.

***Giải.*** (h.143)

Vẽ BN là phân giác của góc ABC ; Gọi M là trung điểm của BC.



Hình 143

Suy ra $\widehat{B_1} = \widehat{B_2} = \widehat{C_1}$ ; AB = BM = MC.

Do vậy $\Delta BNC$ cân tại N suy ra $NM \perp BC$.

Xét $\Delta ABN$ và $\Delta MBN$ có $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ ; AB = BM ; BN chung.

Suy ra $\Delta ABN = \Delta MBN$ (c.g.c) hay $\widehat{A} = \widehat{M} = 90^o$.

Xét $\Delta ABC$ có $\widehat{A} = 90^o$ nên $\hat{B} + \hat{C} = 90^o \Rightarrow 2.\hat{C} + \hat{C} = 90^o$

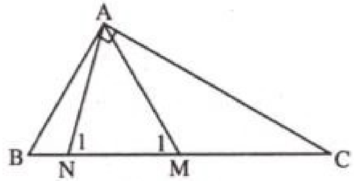
$\Rightarrow \hat{C} = 30^o$; $\hat{B} = 2.\hat{C} = 60^o$; $\widehat{A} = 90^o$.

**Ví dụ 5.** Cho $\Delta ABC$ vuông tại A. Trên cạnh BC lấy hai điểm M và N sao cho BM = BA, CN = CA. Tính số đo của góc $\widehat{MAN}$.

*Giải.* (h.144)

BA = BM nên $\Delta ABM$ cân tại B,

suy ra $\widehat{M_1} = \dfrac{180^\circ - \hat{B}}{2}$.



Hình 144

CA = CN nên $\Delta CAN$ cân tại C,

suy ra $\widehat{N_1} = \dfrac{180^\circ - \hat{C}}{2}$.

Xét $\Delta MNA$, ta có : $\widehat{MAN} = 180^\circ - \left(\widehat{M_1} + \widehat{N_1}\right)$

$$\widehat{MAN} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \hat{B} + 180^\circ - \hat{C}}{2}$$

$$= 180^\circ - \frac{360^\circ - \left(\hat{B} + \hat{C}\right)}{2} = 180^\circ - \frac{360^\circ - 90^\circ}{2}.$$

Vậy : $\widehat{MAN} = 45^\circ$.

## Dạng 2. SỬ DỤNG TÍNH CHẤT TAM GIÁC CÂN ĐỂ SUY RA HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU, HAI GÓC BẰNG NHAU

### Phương pháp giải

| |
|---|
| Sử dụng định nghĩa, tính chất của tam giác cân để suy ra hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau.<br>Góc ngoài ở đỉnh tam giác cân bằng hai lần góc ở đáy. |

**Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC có các tia phân giác trong của các góc B và C cắt nhau tại I. Qua I kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại M, N.

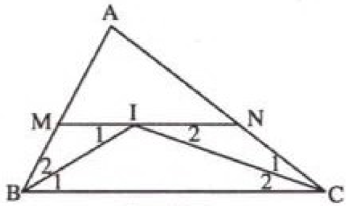
Chứng minh MN = MB + NC.

*Giải.* (h.145)

MN // BC nên $\widehat{I_1} = \widehat{B_1}$; $\widehat{I_2} = \widehat{C_2}$.

Mà $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ (vì BI là tia phân giác của góc B) ;

$\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ (vì CI là tia phân giác của góc C).



Hình 145

Suy ra $\widehat{I_1} = \widehat{B_2}$; $\widehat{I_2} = \hat{C}_1$.

Do vậy tam giác MIB và tam giác NCI là các tam giác cân đỉnh M và N nên :

$$MI = MB \; ; \; NI = NC.$$

Vậy MN = MI + NI = MB + NC.

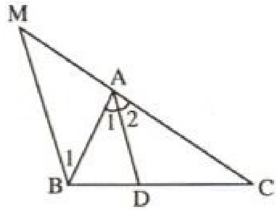
***Nhận xét***. Từ bài toán này, bạn có thể giải được một lớp bài toán sau :

• Cho tam giác ABC. Nêu cách vẽ điểm M thuộc cạnh AB, điểm N thuộc cạnh AC sao cho MN = MB + NC.

• Cho tam giác ABC. Nêu cách vẽ điểm M thuộc đường thẳng AB, điểm N thuộc đường thẳng AC sao cho BC = MB + NC.

• Cho tam giác ABC. Nêu cách vẽ điểm M thuộc cạnh AB, điểm N thuộc cạnh AC sao cho MN = MB – NC.

**Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC có tia phân giác góc A cắt BC tại D. Trên tia đối của tia AC lấy điểm M sao cho AM = AB. Chứng tỏ AD // BM.



Hình 146

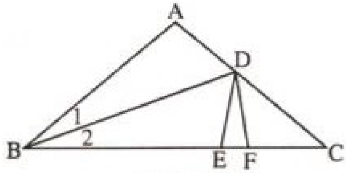
***Giải.*** (h.146)

AB = AM nên tam giác BAM cân tại A, do vậy góc ngoài $\widehat{BAC} = 2.\widehat{B_1}$.

Suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$, mà hai góc ở vị trí so le trong nên AD // BM.

**Ví dụ 3*.** Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = \widehat{C} = 40^o$. Kẻ BD là tia phân giác của góc B ($D \in AC$). Chứng minh AD + BD = BC.

***Giải*** (h.147)



Hình 147

Tam giác ABC có $\widehat{B} = \widehat{C} = 40^o$ nên $\widehat{A} = 100^o$.

Trên BC lấy hai điểm E và F sao cho BE = BA, BF = BD.

Ta có $\Delta BAD = \Delta BED$ (c.g.c) nên :

$\widehat{BED} = \widehat{A} = 100^o$ suy ra $\widehat{DEF} = 80^o$. (1)

Tam giác BDF cân tại B nên $\widehat{B_2} = 20^o$ nên $\widehat{DFE} = 80^o$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra tam giác DEF cân $\Rightarrow$ DE = DF.

Tam giác DFC có $\widehat{C} = 40^o$ ; $\widehat{DFE} = 80^o$ nên $\widehat{FDC} = 40^o$ hay tam giác DFC cân tại F suy ra DF = FC.

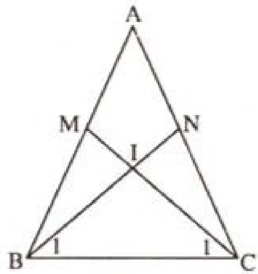
Vậy AD + BD = BF + FC = BC.

## Dạng 3. NHẬN BIẾT MỘT TAM GIÁC CÂN, MỘT TAM GIÁC ĐỀU

### Phương pháp giải

> Dựa vào dấu hiệu nhận biết một tam giác là tam giác cân, một tam giác là tam giác đều trong phần trọng tâm kiến thức.

**Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh AB, AC lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho AM = AN. Gọi giao điểm BN và CM là I. Chứng minh tam giác BIC cân.



Hình 148

***Giải.*** (h.148)

Ta có : AB = AC ; AM = AN nên BM = CN.

Xét tam giác BMC và tam giác CNB có :

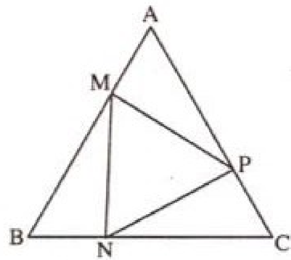
BM = CN, BC là cạnh chung, $\widehat{MBC} = \widehat{NCB}$ (tính chất tam giác cân ABC).

Suy ra $\Delta BMC = \Delta CNB$ (c.g.c) do vậy $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$.

Hay tam giác BIC cân tại I.

**Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC đều. Trên cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy M, N, P sao cho AM = BN = CP. Chứng minh tam giác MNP là tam giác đều.

***Giải.*** (h.149)



Hình 149

Tam giác đều ABC thì AB = BC = CA mà AM = BN = CP nên BM = CN = AP.

Xét tam giác AMP, tam giác BNM và tam giác CPN, ta có :

AM = BN = CP ;

$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$ (do tam giác ABC đều) ;

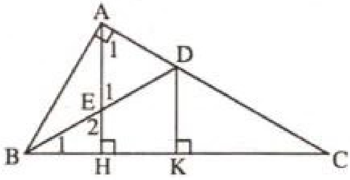
BM = CN = AP.

Do đó $\Delta AMP = \Delta BNM = \Delta CPN$ (c.g.c).

Suy ra MP = NM = PN hay tam giác MNP là tam giác đều.

**Ví dụ 3.** Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^{o}$ ; $\widehat{B} > \widehat{C}$. K là trung điểm của BC, đường trung trực của cạnh BC cắt AC tại D. Kẻ AH ⊥ BC tại H, AH cắt BD tại E. Chứng minh tam giác ADE cân.

*Giải.* (h.150)



Hình 150

DK là đường trung trực của cạnh BC suy ra $\Delta DKB = \Delta DKC$ (c.g.c) $\Rightarrow DB = DC$.

Tam giác BCD cân nên $\widehat{B_1} = \widehat{C}$.

Tam giác AHC, tam giác BEH là các tam giác vuông tại H.

Nên $\widehat{A_1} + \widehat{C} = 90^o$ ; $\widehat{B_1} + \widehat{E_2} = 90^o$.

Suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{E_2}$.

Mà $\widehat{E_2} = \widehat{E_1}$ (đối đỉnh), do đó $\widehat{A_1} = \widehat{E_1}$ hay tam giác ADE cân.

**Ví dụ 4.** Cho hình 151, biết AM = MN = NO = OP và $\widehat{MAN} = 20^o$. Chứng minh tam giác ONP là tam giác đều.

*Giải*

Áp dụng tính chất góc ngoài của tam giác, ta có :

$\Delta$MAN cân tại M

$\Rightarrow \widehat{OMN} = \widehat{A} + \widehat{MNA} = 20^o + 20^o = 40^o$.

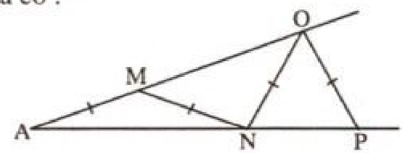
$\Delta$MNO cân tại O

$\Rightarrow \widehat{MON} = \widehat{OMN} = 40^o$.

$\Delta$OAN có $\widehat{ONP} = \widehat{A} + \widehat{AON} = 20^o + 40^o = 60^o$.

$\Delta$ONP có ON = OP ; $\widehat{ONP} = 60^o$.

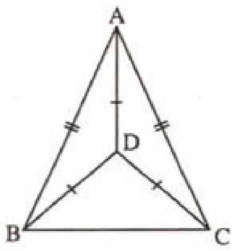
Vậy $\Delta$ONP là tam giác đều.



Hình 151

## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Kể tên các tam giác cân có trong hình 152.
2. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh AB và AC lần lượt lấy hai điểm D, E sao cho AD = AE. Chứng minh DE // BC.
3. Cho $\Delta$ABC cân tại A, có $\widehat{B} = \widehat{A} + 30^o$. Tính số đo của góc $\widehat{A}$.



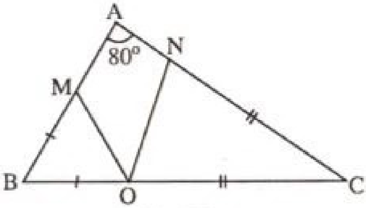
Hình 152

4. Cho $\Delta$ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 50^o$. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho BD = BA ; CE = CA. Tính góc $\widehat{DAE}$.

5. Cho $\Delta ABC$ đều. Vẽ bên ngoài tam giác này hai tam giác vuông cân : $\Delta ABD$ vuông cân tại B, $\Delta ACE$ vuông cân tại C. Tính số đo góc nhọn của $\Delta ADE$.

6. Cho tam giác ABC như hình 153, có $\widehat{A} = 80^o$. Biết rằng BO = BM, CO = CN.

Tính số đo $\widehat{MON}$ ?



Hình 153

7. Cho tam giác ABC có BC = 2.AB. Gọi M là trung điểm của BC và D là trung điểm của BM. Chứng minh rằng AC = 2.AD.

## HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

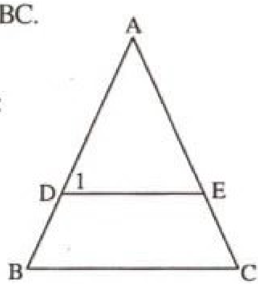
1. Các tam giác cân là : $\Delta ABC$, $\Delta ABD$, $\Delta ADC$, $\Delta DBC$.

Vậy có bốn tam giác cân.

2. (h.154) Vận dụng tính chất của tam giác cân, ta có :

$$\widehat{B} = \frac{180^o - \widehat{A}}{2} \; ; \; \widehat{D_1} = \frac{180^o - \widehat{A}}{2}.$$

Do đó $\widehat{B} = \widehat{D_1}$ suy ra DE // BC.



Hình 154

3. $\widehat{A} = 40^o$.

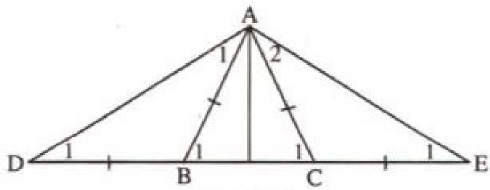
4. (h.155) $\Delta ABC$ cân tại A nên :

$$\widehat{B_1} = \widehat{C_1} = \frac{180^o - 50^o}{2} = 65^o.$$

$\Delta ABD$ cân tại B, suy ra :

$$\widehat{D_1} = \widehat{A_1} = \frac{1}{2}.\widehat{B_1}.$$

Tương tự, ta có $\widehat{E_1} = \widehat{A_2} = \frac{1}{2}.\widehat{C_1}$.



Hình 155

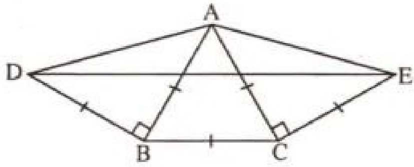
Từ đó ta có : $\widehat{D_1} + \widehat{E_1} = \frac{1}{2}.\widehat{B_1} + \frac{1}{2}\widehat{C_1} = \widehat{B_1} = 65^o$.

$\Delta ADE$ có $\widehat{D_1} + \widehat{E_1} + \widehat{DAE} = 180^o$

nên $\widehat{DAE} = 180^o - (\widehat{D_1} + \widehat{C_1}) = 180^o - 65^o = 115^o$.

**5.** (h.156) Ta có $\Delta ABD = \Delta ACE$ (c.g.c).

Suy ra AD = AE, $\widehat{DAB} = \widehat{CAE} = 45^o$.



Hình 156

Xét $\Delta ADE$ cân tại A, ta có :

$$\widehat{DAE} = 45^o + 60^o + 45^o = 150^o.$$

Suy ra $\widehat{ADE} = \widehat{AED} = \dfrac{180^o - 150^o}{2} = 15^o$.

**6.** Tam giác ABC có $\widehat{A} = 80^o$ nên $\widehat{B} + \widehat{C} = 100^o$.

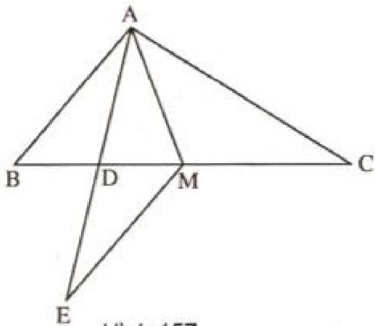
Ta có : $\widehat{BOM} = \dfrac{180^o - \widehat{B}}{2}$ ; $\widehat{CON} = \dfrac{180^o - \widehat{C}}{2}$.

Vậy : $\widehat{MON} = 180^o - \left(\widehat{BOM} + \widehat{CON}\right) = 180^o - \dfrac{360^o - \widehat{B} - \widehat{C}}{2} = \dfrac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} = 50^o$.

**7.** (h.157) Trên tia đối của tia DA lấy điểm E sao cho DA = DE.

Ta có $\Delta ABD = \Delta EMD$ (c.g.c) suy ra AB = ME ; $\widehat{ABD} = \widehat{EMD}$ hay

$$ME = MC = \frac{1}{2}BC$$



Hình 157

Mà $\widehat{EMA} = \widehat{EMB} + \widehat{BMA}$ ;

$\widehat{CMA} = \widehat{BAM} + \widehat{ABM}$.

Và $\widehat{BAM} = \widehat{BMA}$ (tam giác BAM cân tại B), $\widehat{ABM} = \widehat{EMB}$

nên $\Delta AEM = \Delta ACM$ (c.g.c).

Vậy AE = AC suy ra AC = 2.AD.

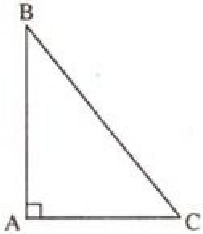
# §7. ĐỊNH LÍ PY-TA-GO

## A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

**1.** *Định lí Py-ta-go*

Trong một tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng các bình phương của hai cạnh góc vuông.

$\Delta ABC$ vuông tại A $\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$ (h.158).



Hình 158

**2.** *Định lí Py-ta-go đảo*

Nếu một tam giác có bình phương của một cạnh bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia thì tam giác đó là tam giác vuông.

$\Delta ABC$ có : $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ$.

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

**Dạng 1.** TÍNH ĐỘ DÀI MỘT CẠNH CỦA TAM GIÁC VUÔNG

### Phương pháp giải

| |
|---|
| Xét tam giác vuông và vận dụng định lí Py-ta-go. |

**Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC có các góc B, C nhọn. Kẻ AH vuông góc với BC. Biết AB = 20cm, BH = 16cm, HC = 5cm. Tính AH ; AC.

*Giải.* (h.159)

Tam giác ABH vuông tại H nên theo định lí Py-ta-go, ta có :

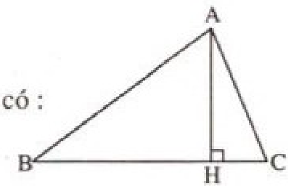
$AH^2 + BH^2 = AB^2 \Rightarrow AH^2 + 16^2 = 20^2$.

Vậy $AH^2 = 144$ do đó AH = 12cm.

Tam giác AHC vuông tại H, theo định lí Py-ta-go, ta có :

$AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow AC^2 = 12^2 + 5^2$.

Vậy $AC^2 = 169$ do đó AC = 13cm.



Hình 159

**Ví dụ 2.** Từ điểm A người ta không thể đi thẳng đến C mà phải đi từ A đến D rồi từ D đến C hoặc là đi từ A đến B, rồi từ B đến C. Biết rằng $\Delta ABC$ vuông tại B ; $\Delta ACD$ vuông tại C như hình 160. Theo bạn đường đi $A \to B \to C$ và đường đi $A \to D \to C$, đường đi nào ngắn hơn ?

***Giải***

Áp dụng định lí Py-ta-go cho $\Delta ABC$ vuông tại B ; $\Delta ACD$ vuông tại C, ta có :

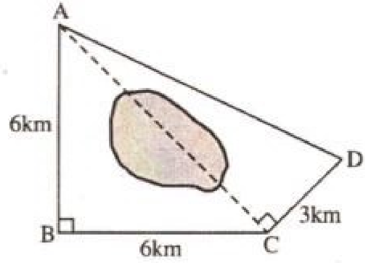
$AC^2 = AB^2 + AC^2 = 36 + 36 = 72$ ;

$AD^2 = AC^2 + CD^2 = 72 + 9 = 81$.

Vậy $AD = 9$ (km).

Suy ra AB + BC = 6 + 6 = 12 (km) ;

AD + CD = 9 + 3 = 12 (km)




Hình 160

Vậy đường đi $A \to B \to C$ và đường đi $A \to D \to C$ bằng nhau.

**Ví dụ 3.** Độ dài các cạnh góc vuông của một tam giác vuông tỉ lệ với 8 và 15, cạnh huyền dài 51cm. Tính độ dài hai cạnh góc vuông.

***Giải***

Giả sử $\Delta ABC$ có $\widehat{A} = 90^o$ ; $\dfrac{AB}{8} = \dfrac{AC}{15}$ và BC = 51 (cm).

Ta có : $\dfrac{AB^2}{64} = \dfrac{AC^2}{225} = \dfrac{AB^2 + AC^2}{64 + 225} = \dfrac{BC^2}{289} = \dfrac{2601}{289} = 9$.

Suy ra $AB^2 = 9.64 \Rightarrow AB = 3.8 = 24$ (cm) ;

$AC^2 = 9.225 \Rightarrow AC = 3.15 = 45$ (cm).

## Dạng 2. SỬ DỤNG ĐỊNH LÍ PY-TA-GO ĐẢO ĐỂ NHẬN BIẾT TAM GIÁC VUÔNG

### Phương pháp giải

- Tính bình phương các độ dài ba cạnh của tam giác.
- So sánh bình phương của cạnh lớn nhất với tổng các bình phương của hai cạnh kia.
- Nếu hai kết quả bằng nhau thì đó là tam giác vuông, cạnh lớn nhất là cạnh huyền.

**Ví dụ.** Trong các độ dài sau, ba số đo nào là số đo ba cạnh của một tam giác vuông ?

a) 6cm, 10cm, 8cm ; b) 6cm, 9cm, 11cm.

***Giải***

a) Ta có : $6^2 = 36$ ; $10^2 = 100$ ; $8^2 = 64$.

Mà 36 + 64 = 100 nên $6^2 + 8^2 = 10^2$, suy ra tồn tại một tam giác vuông có độ dài ba cạnh là 6cm, 10cm, 8cm.

b) Ta có : $6^2 = 36$ ; $9^2 = 81$ ; $11^2 = 121$.

Mà $36 + 81 \neq 121$ nên không tồn tại tam giác vuông có độ dài ba cạnh là 6cm, 9cm, 11cm.

## Dạng 3. SỬ DỤNG ĐỊNH LÍ PY -TA -GO ĐỂ CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

### Phương pháp giải

- Tính từng vế của đẳng thức theo định lí Py-ta-go.
- Hoặc biến đổi một vế theo định lí Py-ta-go rồi suy ra vế kia của đẳng thức.

**Ví dụ 1.** Cho hai đoạn AC và BD vuông góc với nhau và cắt nhau tại O. Chứng minh rằng $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

***Giải.*** (h.161)

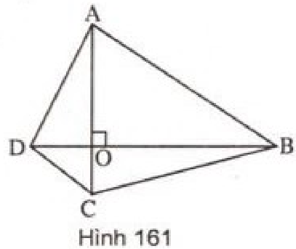
Áp dụng định lí Py-ta-go cho các tam giác vuông AOB, BOC, COD, DOA vuông tại O, ta có :

$AB^2 = AO^2 + OB^2$. (1)

$BC^2 = BO^2 + OC^2$. (2)

$CD^2 = CO^2 + OD^2$. (3)

$DA^2 = DO^2 + OA^2$. (4)



Hình 161

Cộng từng vế của (1) với (3), ta có : $AB^2 + CD^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$.

Cộng từng vế của (2) với (4), ta có : $BC^2 + AD^2 = OB^2 + OC^2 + OD^2 + OA^2$.

Suy ra $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

**Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC (AB = AC) $\widehat{A} < 90^\circ$. Kẻ BH vuông góc với AC. Chứng minh rằng $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 3.BH^2 + 2.AH^2 + CH^2$.

*Giải.* (h.162)

Áp dụng định lí Py-ta-go cho các tam giác vuông ABH, BCH vuông tại H, ta có :

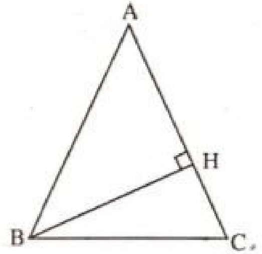
$AB^2 = BH^2 + AH^2$. (1)

$BC^2 = BH^2 + CH^2$. (2)

$AC^2 = BH^2 + AH^2$ (vì AB = AC). (3)

Cộng từng vế của (1), (2), (3), ta có :

$$AB^2 + AC^2 + BC^2 = 3.BH^2 + 2.AH^2 + CH^2.$$



Hình 162

## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**1.** Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^o$. Gọi M là trung điểm của cạnh AC. Chứng minh rằng $BM^2 = BC^2 - \frac{3}{4}.AC^2$.

**2.** Cho tam giác ABC có các góc B, C nhọn. Kẻ AH vuông góc với BC, biết AC = 15cm, HB = 5cm, HC = 9cm. Tính độ dài cạnh AB.

**3.** Cho $\Delta$ABC vuông tại A có AB + AC = 17cm, AB − AC = 7cm. Tính độ dài cạnh BC.

**4*.** Cho tam giác đều ABC có điểm M nằm bên trong của tam giác đó thoả mãn $MA^2 = MB^2 + MC^2$. Tính số đo góc BMC.

**5.** **(Toán cổ Ấn Độ)**

Một cây sồi mọc thẳng đứng trên mặt đất bị sét đánh gãy. Chỗ bị gãy cách gốc cây 3 "phút", ngọn cây đổ xuống cách gốc cây 4 "phút". Hỏi độ cao cây sồi là bao nhiêu "phút" ?

## HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

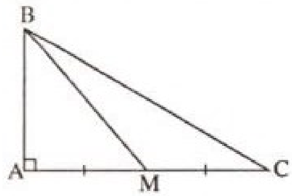
**1.** (h.163) Áp dụng định lí Py-ta-go cho các $\Delta$BAM, $\Delta$BAC vuông tại A, ta có :

$BM^2 = AB^2 + AM^2$.

Suy ra $BM^2 = BC^2 - AC^2 + AM^2$.

Vậy $BM^2 = BC^2 - AC^2 + \frac{AC^2}{4}$,

hay $BM^2 = BC^2 - \frac{3}{4}AC^2$.



Hình 163

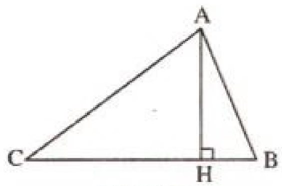
*Nhận xét.* Từ kết quả trên, bạn có thể làm được bài toán hay và khó sau : Chứng minh rằng trong tam giác vuông, tổng các bình phương khoảng cách từ đỉnh tam giác đến trung điểm cạnh đối diện bằng $\frac{3}{2}$ bình phương cạnh huyền.

**2.** (h.164) Áp dụng định lí Py-ta-go vào các tam giác vuông ABH, ACH vuông tại H, ta có :

$AB^2 - BH^2 = AC^2 - HC^2 = AH^2$

$\Rightarrow AB^2 - 5^2 = 15^2 - 9^2.$

Vậy AB = 13cm.



Hình 164

**3.** Ta có AB + AC = 17cm, AB − AC = 7cm nên AB = (17 + 7) : 2 = 12 (cm),

AC = (17 − 7) : 2 = 5 (cm).

Áp dụng định lí Py-ta-go, ta tính được : BC = 13cm.

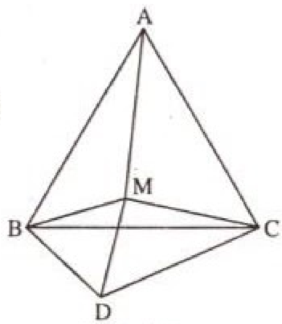
**4*.** Dựng $\Delta$BMD đều (h.165) $\Rightarrow \Delta BAM = \Delta BCD$ (c.g.c)

$\Rightarrow AM = CD.$

Do vậy $CD^2 = MB^2 + MC^2$

$\Rightarrow CD^2 = MD^2 + MC^2 \Rightarrow \Delta CDM$ vuông tại M,

$\Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{BMD} + \widehat{DMC} = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ.$



Hình 165

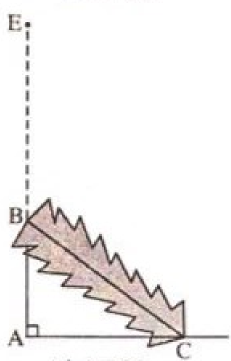
**5.** (h.166) Áp dụng định lí Py-ta-go cho tam giác ABC vuông tại A, ta có :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25.$

Vậy BC = 5 "phút".

Mặt khác, BC = BE, nên chiều cao cây sồi là :

AE = AB + BC = 3 + 5 = 8 "phút".



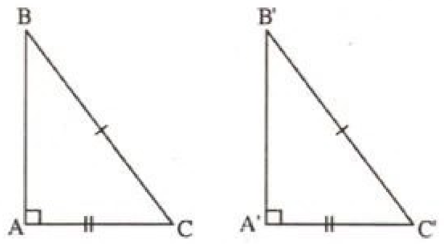
Hình 166

# §8. CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC VUÔNG

## A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

Ngoài các trường hợp bằng nhau đã biết của hai tam giác vuông, còn có trường hợp bằng nhau theo cạnh huyền - cạnh góc vuông.

Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó bằng nhau (h.167).




Hình 167

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A}=\widehat{A}'=90^{\circ}\\ BC=B'C'\\ AC=A'C'\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta ABC=\Delta A'B'C' \text{ (cạnh huyền - cạnh góc vuông).}$$

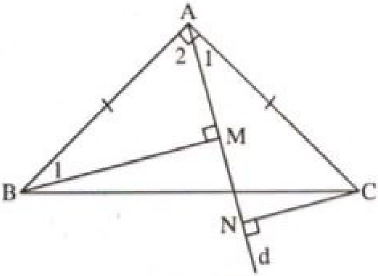
## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

**Dạng 1.** CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC VUÔNG BẰNG NHAU

### Phương pháp giải

- Xét hai tam giác vuông.
- Kiểm tra điều kiện bằng nhau : cạnh - góc - cạnh ; góc - cạnh - góc, cạnh huyền - cạnh góc vuông ; cạnh huyền - góc nhọn.
- Kết luận hai tam giác bằng nhau.

**Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC vuông cân đỉnh A. Qua A kẻ đường thẳng d cắt BC. Vẽ BM, CN cùng vuông góc với d. Chứng minh rằng : $\Delta BAM = \Delta ACN$.



Hình 168

***Giải.*** (h.168)

Ta có : $\left.\begin{array}{l}\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 90^o \\ \widehat{B_1} + \widehat{A_2} = 90^o\end{array}\right\}$ nên $\widehat{B_1} = \widehat{A_1}$.

Xét $\Delta BAM$ và $\Delta ACN$, ta có :

$\widehat{AMB} = \widehat{CNA} = 90^o$ ; $\widehat{B_1} = \widehat{A_1}$ ; AB = AC.

Nên $\Delta AMB = \Delta CNA$ (cạnh huyền - góc nhọn).

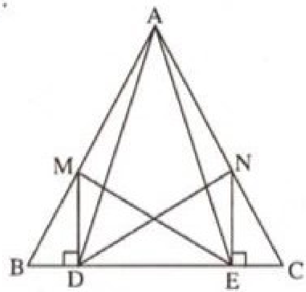
**Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC lấy hai điểm D và E sao cho $BD = CE < \dfrac{BC}{2}$.

Đường thẳng kẻ từ D vuông góc với BC cắt AB ở M, đường thẳng kẻ từ E vuông góc với BC cắt AC tại N. Chứng minh rằng :

a) $\Delta DBM = \Delta ECN$ ;

b) $\Delta DME = \Delta END$ ;

c) Tam giác ADE cân.



Hình 169

***Giải.*** (h.169)

a) Xét $\Delta DBM$ và $\Delta ECN$, ta có :

$\widehat{BDM} = \widehat{CEN} = 90^o$ ; BD = CE ; $\widehat{B} = \widehat{C}$.

Vậy $\Delta DBM = \Delta ECN$ (g.c.g).

b) Xét $\Delta DME$ và $\Delta END$ có : $\widehat{EDM} = \widehat{DEN} = 90^o$ ; MD = ME ; DE là cạnh chung.

Từ đó suy ra : $\Delta DME = \Delta END$ (c.g.c).

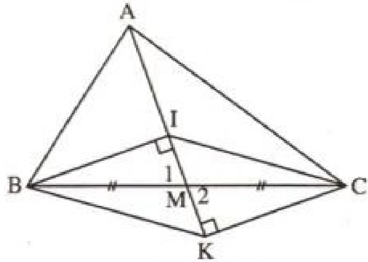
c) Ta có $\Delta ABD = \Delta ACE$ (c.g.c) $\Rightarrow$ AD = AE $\Rightarrow$ $\Delta ADE$ cân tại A.

**Dạng 2.** SỬ DỤNG TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC VUÔNG ĐỂ CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU, HAI GÓC BẰNG NHAU

**Phương pháp giải**

- Chọn hai tam giác vuông có cạnh là hai đoạn thẳng (hoặc có góc là hai góc) cần chứng minh bằng nhau.
- Chứng minh hai tam giác ấy bằng nhau.
- Suy ra điều phải chứng minh.

**Ví dụ 1.** Gọi M là trung điểm của cạnh BC của $\Delta ABC$. Vẽ BI, CK vuông góc với đường thẳng AM. Chứng minh BI = CK.



Hình 170

***Giải.*** (h.170)

Xét $\Delta BMI$ và $\Delta CMK$, ta có :

$\widehat{BIM} = \widehat{CKM} = 90^o$ ; $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ ; BM = CM.

Suy ra $\Delta BMI = \Delta CMK$ (cạnh huyền - góc nhọn).

Vậy BI = CK.

**Ví dụ 2.** Cho góc nhọn xOy, lấy điểm A thuộc Ox, điểm B thuộc Oy sao cho OA = OB. Vẽ AC vuông góc với Oy ($C \in Oy$), BD vuông góc với Ox ($D \in Ox$).

a) Chứng minh AC = BD.

b) Gọi I là giao điểm AC và BD. Chứng tỏ OI là tia phân giác của $\widehat{xOy}$.

***Giải.*** (h.171)

a) Xét $\Delta ACO$ và $\Delta BDO$, ta có : $\widehat{ACO} = \widehat{BDO} = 90^o$,

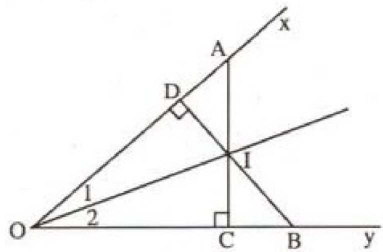
OA = OB, $\widehat{AOB}$ chung.

Vậy $\Delta ACO = \Delta BDO$ suy ra AC = BD.

b) $\Delta ACO = \Delta BDO$ nên OC = OD.

Xét $\Delta DIO$ và $\Delta CIO$ có $\widehat{ODI} = \widehat{OCI} = 90^o$,

OD = OC, OI cạnh chung.



Hình 171

Nên $\Delta ICO = \Delta IDO$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông), từ đó suy ra $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ hay OI là tia phân giác của $\widehat{xOy}$.

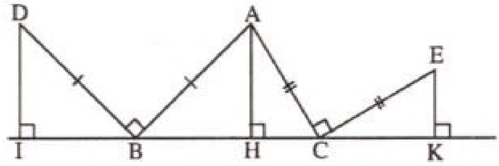
**Ví dụ 3.** Cho $\Delta ABC$ có AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Vẽ BD vuông góc và bằng AB, vẽ CE vuông góc và bằng AC. Vẽ DI, EK vuông góc với đường thẳng BC như hình bên 172.

Chứng minh rằng :

a) BI = AH.

b) BI = CK.

c) DI + EK = BC.



Hình 172

***Giải*** (h.172)

a) Ta có : $\widehat{DBI} = \widehat{BAH}$ (cùng phụ với $\widehat{ABH}$) mà DB = AB ; $\widehat{DIB} = \widehat{AHB} = 90^o$ nên $\Delta DBI = \Delta BAH$ ( cạnh huyền - góc nhọn) suy ra BI = AH.

b) Tương tự, ta có : $\Delta AHC = \Delta CKE$ suy ra CK = AH.

Do đó BI = CK (vì cùng bằng AH).

c) $\Delta DBI = \Delta BAH$ suy ra DI = BH ;

$\Delta AHC = \Delta CKE$ suy ra EK = CH.

Từ đó suy ra DI + EK = BH + CH = BC.

## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**1.** Cho tam giác ABC cân tại A ; $\widehat{A} < 90^o$. Kẻ : $BH \perp AC$ ($H \in AC$), $CK \perp AB$ ($K \in AB$). BH cắt CK tại O. Chứng minh rằng :

a) AH = AK.

b) $\Delta BKO = \Delta CHO$.

c) AO là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.

**2.** Cho tam giác ABC vuông cân tại đỉnh A. Qua A kẻ đường thẳng xy bất kì không cắt đoạn BC. Kẻ BM và CN vuông góc với xy.

a) Chứng minh $\Delta ACN = \Delta BAM$.

b) Chứng minh CN + BM = MN.

c) Chứng tỏ $BM^2 + CN^2$ không phụ thuộc vào vị trí của xy.

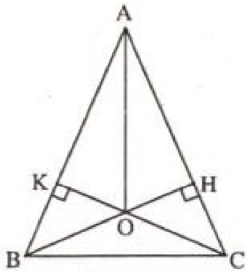
3. Cho tam giác ABC. Dựng ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác ABD và ACE là các tam giác vuông cân tại đỉnh A. Kẻ $AH \perp BC$. Đường thẳng AH cắt DE tại M. Vẽ DI và EK cùng vuông góc với AH. Chứng minh rằng :

a) DI = EK = AH ;  b) M là trung điểm của DE.

4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có O là trung điểm của cạnh BC. Qua O kẻ đường thẳng d bất kỳ không qua đỉnh của tam giác. Kẻ BI, AH, CK vuông góc với d. Tính $BI^2 + CK^2 + 2.AH^2$, biết rằng BC = 10cm.

5. (h.177) Cho $\Delta ABC$ cân tại A, Kẻ $CH \perp AB$ $(H \in AB)$. Kẻ đường thẳng d qua C vuông góc với AC. Kẻ $BK \perp d$ $(K \in d)$. Chứng minh CK = CH.

## HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ



Hình 173

1. (h.173) a) $\Delta ABH = \Delta ACK$ (cạnh huyền - góc nhọn) suy ra AH = AK.

b) $\Delta ABH = \Delta ACK$ nên AH = AK ;

mà AC = AB do đó CH = BK.

Từ đó suy ra $\Delta BOK = \Delta COH$ (g.c.g).

c) $\Delta AHO = \Delta AKO$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông).

Do đó $\widehat{KAO} = \widehat{HAO}$ hay AO là tia phân giác của góc A.

2. (h.174) a) Ta có : $\widehat{B_1} + \widehat{A_2} = 90^o$ ; $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 90^o$ nên $\widehat{B_1} = \widehat{A_1}$.

Vậy $\Delta ACN = \Delta BAM$ (cạnh huyền - góc nhọn).

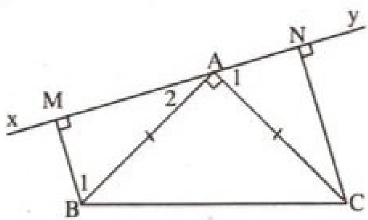
b) $\Delta BMA = \Delta ANC$

nên BM = AN ; AM = CN

suy ra BM + CN = AN + AM = MN.

c) Áp dụng định lí Py-ta-go, ta có :

$BM^2 + AM^2 = AB^2$ hay $BM^2 + CN^2 = AB^2$



Hình 174

suy ra $BM^2 + CN^2$ không phụ thuộc vào vị trí của xy.

3. (h.175) a) Tam giác DIA và tam giác AHB có :

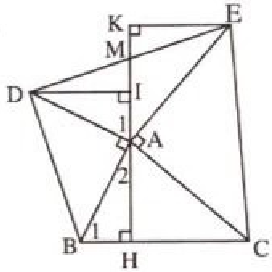
$\widehat{DIA} = \widehat{AHB} = 90^o$ ; AD = AB ; $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ (cùng phụ với góc $\widehat{A_2}$).

Do đó $\Delta DIA = \Delta AHB$ (cạnh huyền - góc nhọn), suy ra DI = AH.

Chứng minh tương tự, ta có EK = AH.

Vậy DI = EK = AH.

b) $\Delta DIM = \Delta EKM$ (g.c.g) suy ra DM = EM hay M là trung điểm của DE.



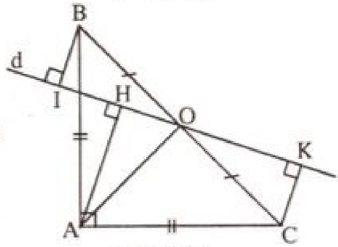
Hình 175

4. (h.176) Ta có $\Delta ABO = \Delta ACO$ (c.c.c), suy ra $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 90^o$.

Mà $\widehat{ABC} = 45^o$ nên tam giác ABO vuông cân tại O, do đó BO = AO.

$\Delta BIO = \Delta CKO$ (cạnh huyền - góc nhọn) suy ra BI = CK.

Ta có : $\widehat{BOI} + \widehat{HOA} = 90^o$ ; $\widehat{HAO} + \widehat{HOA} = 90^o$ nên $\widehat{BOI} = \widehat{HAO}$.



Hình 176

$\Delta BIO = \Delta OHA$ (cạnh huyền - góc nhọn) suy ra BI = OH.

Áp dụng định lí Py-ta-go, ta có :

$BI^2 + CK^2 + 2.AH^2 = BI^2 + BI^2 + 2.AH^2$

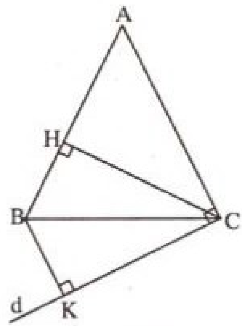
$= 2.\left(OH^2 + AH^2\right) = 2.AO^2 = 2.25 = 50$ (cm).

5. (h.177) Ta có BK // AC (vì cùng vuông góc với KC)

$\Rightarrow \widehat{CBK} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{CBK}$

$\Rightarrow \Delta BHC = \Delta BKC$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$\Rightarrow CK = CH$.



Hình 177

# ÔN TẬP CHƯƠNG II

## A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Tổng ba góc trong của một tam giác*

$$\Delta ABC \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^o.$$

2. *Hai tam giác bằng nhau : định nghĩa và tính chất.*

3. *Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác*

(c.c.c) ; (c.g.c) ; (g.c.g) ; (cạnh huyền - góc nhọn) ; (cạnh huyền - cạnh góc vuông).

4. *Tam giác đặc biệt : Tam giác cân, tam giác đều, tam giác vuông cân.*

5. *Định lí Py-ta-go*

$$\Delta ABC \text{ vuông tại } A \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

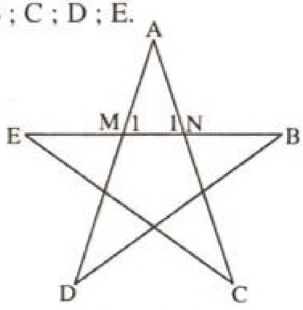
## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### Dạng 1. TÍNH SỐ ĐO GÓC

#### Phương pháp giải

> *Vận dụng tính chất :*
> - Tổng ba góc trong của một tam giác, góc ngoài của tam giác.
> - Tam giác cân, tam giác đều, tam giác vuông, tam giác vuông cân.

**Ví dụ 1.** Cho hình 178. Tính tổng của các góc $\widehat{A}$ ; $\widehat{B}$ ; $\widehat{C}$ ; $\widehat{D}$ ; $\widehat{E}$.



Hình 178

***Giải***

Áp dụng tính chất góc ngoài của các tam giác :

$\Delta MBD$ có $\widehat{M_1} = \widehat{B} + \widehat{D}$ ;

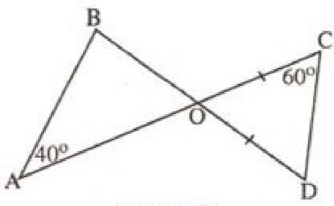
$\Delta NCE$ có $\widehat{N_1} = \widehat{C} + \widehat{E}$.

Mặt khác $\Delta AMN$ có $\widehat{A} + \widehat{M_1} + \widehat{N_1} = 180^o$

$\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{D} + \widehat{C} + \widehat{E} = 180^o$.

**Ví dụ 2.** Cho hình 179, biết $\widehat{A} = 40^o$ ; $\widehat{C} = 60^o$ ; OC = OD. Tính số đo góc $\widehat{B}$.

***Giải***



Hình 179

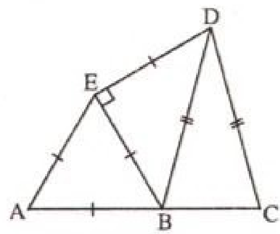
$\Delta OCD$ có OC = OD, $\widehat{C} = 60^o \Rightarrow \Delta OCD$ đều

$\Rightarrow \widehat{COD} = 60^o \Rightarrow \widehat{BOA} = 60^o$.

$\Delta OAB$ có : $\widehat{A} + \widehat{AOB} + \widehat{B} = 180^o$

$\Rightarrow 40^o + 60^o + \widehat{B} = 180^o \Rightarrow \widehat{B} = 80^o$.

**Ví dụ 3.** Cho hình 180, biết $AB = BE = EA = ED$ ; $BD = DC$ ; $\widehat{BED} = 90^o$. Tính số đo góc $\widehat{BDC}$?



Hình 180

*Giải*

Ta có : $\widehat{ABE} + \widehat{EBD} + \widehat{DBC} = 180^o$

$\Rightarrow 60^o + 45^o + \widehat{DBC} = 180^o$

$\Rightarrow \widehat{DBC} = 75^o$.

$\Delta BDC$ cân tại D ($BD = CD$) nên $\widehat{BCD} = \widehat{DBC} = 75^o$.

Do đó $\widehat{BDC} = 180^o - 75^o - 75^o = 30^o$.

**Dạng 2.** CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

**Phương pháp giải**

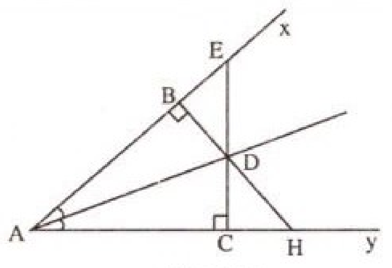
- Dùng dấu hiệu nhận biết hai tam giác bằng nhau : (c-c-c) ; (c-g-c) ; (g-c-g).
- Dùng dấu hiệu nhận biết hai tam giác vuông bằng nhau.

**Ví dụ 1.** Cho hình 181, biết : $\widehat{EAD} = \widehat{HAD}$, $HB \perp AE$, $EC \perp AH$. Chứng minh rằng :

a) $\Delta ABD = \Delta ACD$.

b) $\Delta DBE = \Delta DCH$.

c) $\Delta ABH = \Delta ACE$.



Hình 181

*Giải*

a) $\Delta ABD$ và $\Delta ACD$ có : $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^o$ ;

AD là cạnh chung ; $\widehat{BAD} = \widehat{CAD} \Rightarrow \Delta ABD = \Delta ACD$ (cạnh huyền - góc nhọn).

b) Xét $\Delta BDE$ và $\Delta CDH$ có $\widehat{DBE} = \widehat{DCH}$ $(= 90^o)$ ;

$BD = CD$ (vì $\Delta ABD = \Delta ACD$) ; $\widehat{BDE} = \widehat{CDH}$ (đối đỉnh).

Từ đó suy ra $\Delta BDE = \Delta CDH$ (g.c.g).

c) Xét $\Delta ABH$ và $\Delta ACE$, ta có $\widehat{ABH} = \widehat{ACE}$ $(= 90^o)$;

$AB = AC$ (vì $\Delta ABD = \Delta ACD$) ; $\widehat{EAH}$ chung.

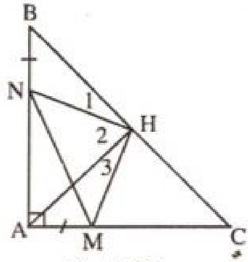
Vậy $\Delta ABH = \Delta ACE$ (g.c.g).

**Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Kẻ tia phân giác của góc A cắt BC tại H. Trên cạnh AB, AC lấy N, M sao cho BN = AM. Chứng minh rằng :

a) $\Delta AHN = \Delta CHM$.

b) $\Delta AHM = \Delta BHN$.

c) Tam giác MHN vuông cân.



Hình 182

***Giải.*** (h.182)

a) $\Delta ABC$ vuông cân tại A $\Rightarrow AB = AC$,

mà $BN = AM \Rightarrow AN = CM$.

Mặt khác, AH là đường phân giác của góc A nên

$\Delta AHC$ có $\widehat{CAH} = \widehat{ACH} = 45^o$, do đó $\Delta AHC$ vuông cân tại H.

Suy ra $AH = HC$ và $\widehat{AHC} = 90^o$.

Xét $\Delta AHN$ và $\Delta CHM$, ta có : $AN = CM$ ; $\widehat{HAN} = \widehat{MCH}$ ;

$HA = HC$ nên $\Delta AHN = \Delta CHM$ (c.g.c).

b) Xét $\Delta AHM$ và $\Delta BHN$, ta có : $BN = AM$ ; $\widehat{HBN} = \widehat{HAM}$ ;

$HA = HB$ nên $\Delta AHM = \Delta BHN$ (c.g.c).

c) Ta có $\Delta AHM = \Delta BHN$ nên $\widehat{H_1} = \widehat{H_3}$ ; $HM = HN$ ; mà $\widehat{H_1} + \widehat{H_2} = 90^o$ nên $\widehat{H_3} + \widehat{H_2} = 90^o \Rightarrow \widehat{NHM} = 90^o$.

Do đó $\Delta HMN$ vuông cân tại H.

## Dạng 3. CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU, HAI GÓC BẰNG NHAU

### Phương pháp giải

- Ghép hai đoạn thẳng hoặc hai góc vào hai tam giác và chứng minh hai tam giác đó bằng nhau.
- Để chứng minh hai góc bằng nhau, bạn có thể chứng tỏ hai góc đó cùng phụ hoặc cùng bù với góc thứ ba.

**Ví dụ 1.** Cho $\widehat{xOy}$ (khác góc bẹt). Trên tia Ox lấy điểm A, trên tia Oy lấy điểm B sao cho OA = OB. Tia phân giác Oz của góc xOy cắt AB tại C.

a) Chứng minh $\Delta AOC = \Delta BOC$, từ đó suy ra $OC \perp AB$.

b) Trên tia đối của tia CO lấy điểm D sao cho CD = CO. Chứng minh AD = BO và AD // BO.

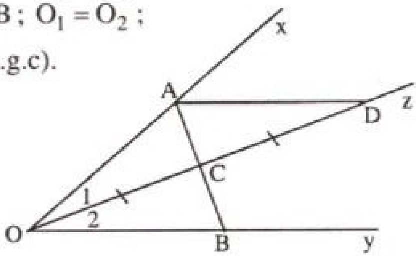
***Giải.*** (h.183)

a) Xét $\Delta AOC$ và $\Delta BOC$, ta có : OA = OB ; $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ ; OC là cạnh chung, suy ra $\Delta AOC = \Delta BOC$ (c.g.c).

Do đó $\widehat{ACO} = \widehat{BCO}$.

Mà $\widehat{ACO} + \widehat{BCO} = 180^o$ (kề bù)

nên $\widehat{ACO} = \widehat{BCO} = 90^o$ hay $OC \perp AB$.



Hình 183

b) Xét $\Delta ACD$ và $\Delta BCO$, ta có :

AC = BC ; $\widehat{ACD} = \widehat{BCD}$ (đối đỉnh) ; CD = CO.

Suy ra $\Delta ACD = \Delta BCO$ (c.g.c).

Do đó AD = BO và $\widehat{ADC} = \widehat{BOC}$, mà hai góc ở vị trí so le trong nên AD // BO.

**Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC, gọi D và E lần lượt là trung điểm của AB và AC. Trên tia đối của tia ED lấy điểm F sao cho DE = EF. Chứng minh rằng :

a) BD = CF và BD // CF ; b) $\Delta BCD = \Delta FDC$ ;

c) DE // BC và $DE = \frac{1}{2}BC$ ; d) $\widehat{BDC} = \widehat{DAF}$.

***Giải.*** (h.184)

a) Xét $\Delta AED$ và $\Delta CEF$, ta có :

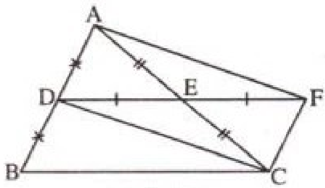
AE = CE ; $\widehat{AED} = \widehat{CEF}$ ; ED = EF

$\Rightarrow \Delta AED = \Delta CEF$ (c.g.c)

$\Rightarrow CF = AD \Rightarrow CF = BD$

$\Rightarrow \widehat{EAD} = \widehat{ECF}$ mà hai góc ở vị trí so le trong

$\Rightarrow$ AD // CF hay BD // CF.



Hình 184

b) Xét $\Delta BCD$ và $\Delta FDC$, ta có : BD = CF ; $\widehat{BDC} = \widehat{FCD}$ ;

CD là cạnh chung $\Rightarrow \Delta BCD = \Delta FDC$ (c.g.c).

c) $\Delta BCD = \Delta FDC \Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{FDC}$ mà hai góc ở vị trí so le trong nên DE // BC.

$\Delta BCD = \Delta FDC \Rightarrow DF = BC$.

Mà $DE = \frac{1}{2}DF$ suy ra $DE = \frac{1}{2}BC$.

d) Xét $\Delta BDC$ và $\Delta DAF$, ta có :

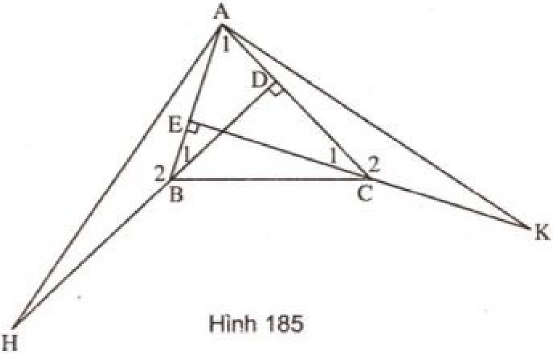
$BD = DA$ ; $\widehat{DBC} = \widehat{ADF}$ ; $BC = DF$.

Nên $\Delta BDC = \Delta DAF$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{DAF}$.

**Ví dụ 3.** Cho tam giác ABC nhọn. Kẻ $BD \perp AC$ $(D \in AC)$, $CE \perp AB$ $(E \in AB)$. Trên tia đối của tia BD lấy điểm H sao cho BH = AC. Trên tia đối của tia CE lấy điểm K sao cho CK = AB. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{ABH} = \widehat{ACK}$.

b) AH = AK.



Hình 185

***Giải.*** (h.185)

a) $\Delta ABD$ vuông tại D nên

$\widehat{B_1} + \widehat{A_1} = 90^o$.  (1)

$\Delta ACE$ vuông tại E nên

$\widehat{C_1} + \widehat{A_1} = 90^o$.  (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$.

Mặt khác, $\widehat{B_1} + \widehat{B_2} = 180^o$ ; $\widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 180^o$ nên $\widehat{B_2} = \widehat{C_2}$ hay $\widehat{ABH} = \widehat{ACK}$.

b) Xét $\Delta ABH$ và $\Delta KCA$, ta có :

$AB = CK$ ; $\widehat{ABH} = \widehat{ACK}$ ; $BH = CA$.

Suy ra $\Delta ABH = \Delta KCA$ (c.g.c) $\Rightarrow AH = AK$.

**Dạng 4.** CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

### Phương pháp giải

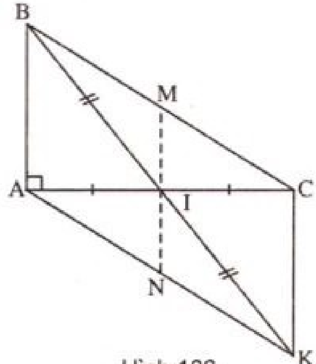
| |
|---|
| Chứng tỏ rằng ba điểm đó tạo thành một góc có số đo $180^o$. |

**Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi I là trung điểm của AC. Trên tia đối của tia IB lấy điểm K sao cho IK = IB.

a) Chứng minh $IC \perp CK$.

b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và AK. Chứng minh ba điểm M, I, N thẳng hàng.

*Giải.* (h.186)



Hình 186

a) Xét $\Delta ABI$ và $\Delta CKI$, ta có :

$IA = IC$ ; $\widehat{AIB} = \widehat{CIK}$ ; $IB = IK$.

Suy ra $\Delta ABI = \Delta CKI$ (c.g.c).

Do đó $\widehat{BAI} = \widehat{KCI}$.

Mà $\widehat{BAI} = 90^o \Rightarrow \widehat{KCI} = 90^o$ hay $IC \perp CK$.

b) Xét $\Delta AIK$ và $\Delta CIB$, ta có :

$AI = CI$ ; $\widehat{AIK} = \widehat{CIB}$ ; $IB = IK$.

Suy ra $\Delta AIK = \Delta CIB$ (c.g.c).

Do đó $\widehat{AKI} = \widehat{CBI}$ ; $AK = BC \Rightarrow KN = BM$.

Xét $\Delta KIN$ và $\Delta BIM$, ta có :

$BI = KI$ ; $\widehat{IBM} = \widehat{IKN}$ ; $KN = BM$.

Suy ra $\Delta KIN = \Delta BIM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BIM} = \widehat{KIN}$.

Mà $\widehat{KIN} + \widehat{NIB} = 180^o$ nên $\widehat{BIM} + \widehat{BIN} = 180^o$.

Do đó ba điểm M, I, N thẳng hàng.

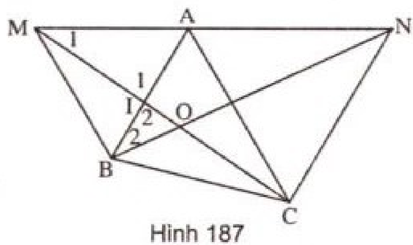
**Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^o$. Dựng ra phía ngoài tam giác đó các tam giác đều ABM và ACN.

a) Chứng minh ba điểm M, A, N thẳng hàng.

b) Chứng minh BN = CM.

c) Gọi giao điểm của BN và CM là O. Tính $\widehat{BOC}$.

*Giải.* (h.187)



Hình 187

a) Tam giác ABM và ACN là các tam giác đều nên $\widehat{MAB} = 60^o$ ; $\widehat{NAC} = 60^o$.

Suy ra $\widehat{MAB} + \widehat{BAC} + \widehat{NAC} = 180^o$,

do đó ba điểm M, N, A thẳng hàng.

b) Xét $\Delta ABN$ và $\Delta AMC$, ta có :

$AM = AB$ ; $\widehat{MAC} = \widehat{BAN}\ (= 120^o)$ ; $AC = AN$.

Suy ra $\Delta ABN = \Delta AMC$ (c.g.c) $\Rightarrow BN = CM$.

c) Gọi I là giao điểm AB và CM.

$\Delta AMI$ có $\widehat{IAM} = 60^o$ nên $\widehat{M_1} + \widehat{I_1} = 120^o$.

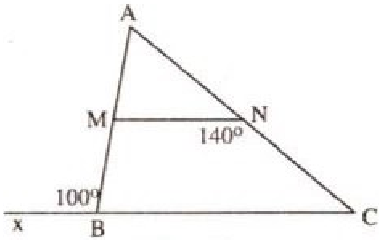
Mặt khác $\widehat{M_1} = \widehat{B_2}$ (vì $\Delta AMC = \Delta ABN$) và $\widehat{I_1} = \widehat{I_2}$

$$\Rightarrow \widehat{B_2} + \widehat{I_2} = \widehat{M_1} + \widehat{I_1} = 120^o.$$

Ta có : $\widehat{BOC} = \widehat{B_2} + \widehat{I_2}$ (góc ngoài của tam giác BIO) $\Rightarrow \widehat{BOC} = 120^o$.

## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**1.** Cho $\Delta ABC$, dựng $MN \parallel BC$ như hình 188. Biết rằng $\widehat{ABx} = 100^o$, $\widehat{MNC} = 140^o$. Tính số đo góc $\widehat{BAC}$.



Hình 188

**2.** Cho $\Delta ABC$, biết rằng $\widehat{A} : \widehat{B} : \widehat{C} = 2:3:5$. Tính số đo góc các góc của tam giác ABC.

**3.** Cho tam giác ABC có AB < AC và phân giác AD ($D \in BC$). Trên AC lấy điểm E sao cho AE = AB. Trên tia AB lấy điểm F sao cho AF = AC.

a) Chứng minh DB = DE ; BF = CE.

b) Chứng minh ba điểm F, D, E thẳng hàng.

c) Chứng minh $BE \parallel FC$ và $AD \perp FC$.

d) Chứng minh $\widehat{ADC}$ là góc tù.

**4.** Cho tam giác ABC có $\widehat{C} = 40^o$ ; $\widehat{B} = 70^o$. Kẻ $AH \perp BC$ $(H \in BC)$. Tia phân giác của góc C cắt AH tại E. Trên CA lấy điểm K sao cho CK = CH.

a) Chứng minh $\Delta HCE = \Delta KCE$.

b) Chứng minh $HK \parallel AB$.

c) Tính các góc của tam giác CKE.

d) Trên tia đối của tia AH lấy điểm F sao cho AF = BH. Trên nửa mặt phẳng bờ BA không chứa C lấy điểm D sao cho $BD \perp AB$, BD = BA. Chứng minh BF = DH.

**5.** Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm M trên cạnh BC (MB < MC) trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho BM = CN. Đường thẳng qua M vuông góc với BC cắt AB tại E. Đường thẳng qua N vuông góc với BC cắt tia AC tại F.

a) Chứng minh EM = FN.

b) Qua E kẻ ED // AC ($D \in AC$). Chứng minh MB = MD.

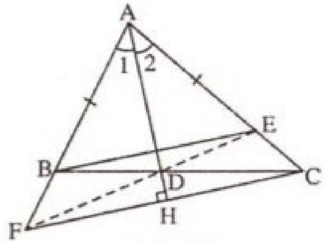
c) EF cắt BC tại O. Chứng minh OE = OF.

**6.** Cho $\Delta ABC$ cân tại A, $\hat{A} = 100^o$. Trên tia AC lấy điểm D sao cho AD = BC. Tính góc CBD.

## HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

**1.** *Đáp số :* $\widehat{BAC} = 60^o$.

**2.** *Đáp số :* $\widehat{A} = 36^o$ ; $\widehat{B} = 54^o$ ; $\widehat{C} = 90^o$.



Hình 189

**3.** (h.189) a) $\Delta ABD = \Delta AED$ (c.g.c) $\Rightarrow BD = DE$.

Lại có AF = AC mà AB = AE nên BF = CE.

b) $\Delta ABD = \Delta AED$ nên $\widehat{ABD} = \widehat{AED}$,

mà $\widehat{ABD} + \widehat{DBF} = 180^o$ ;

Mặt khác, $\widehat{AED} + \widehat{CED} = 180^o \Rightarrow \widehat{DBF} = \widehat{DEC}$.

Xét $\Delta BDF$ và $\Delta EDC$, ta có : BD = ED ; $\widehat{DBF} = \widehat{DEC}$ ;

BF = EC nên $\Delta BDF = \Delta EDC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BDF} = \widehat{EDC}$.

Mà $\widehat{EDC} + \widehat{EDB} = 180^o \Rightarrow \widehat{BDF} + \widehat{EDB} = 180^o$, suy ra ba điểm F, D, E thẳng hàng.

c) $\Delta ABE$ cân (AB = AE) nên $\widehat{AEB} = \dfrac{180^o - \widehat{A}}{2}$ ;

$\Delta AFC$ cân (AF = AC) nên $\widehat{ACF} = \dfrac{180^o - \widehat{A}}{2}$.

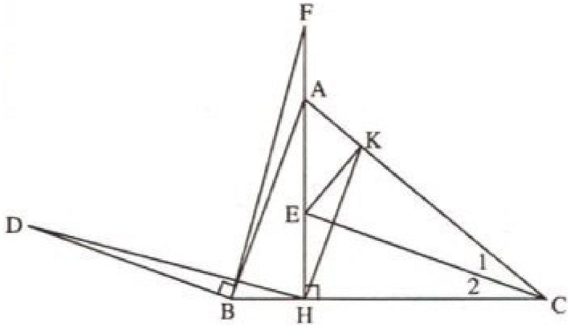
Từ đó suy ra $\widehat{AEB} = \widehat{ACF}$, mà hai góc ở vị trí đồng vị nên BE // FC.

d) Gọi H là giao điểm của AD và FC.

Ta có $\Delta AFH = \Delta ACH$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AHF} = \widehat{AHC}$ mà $\widehat{AHF} + \widehat{AHC} = 180^o$ nên $\widehat{AHF} = 90^o$. Suy ra $AH \perp CF$, hay $AD \perp FC$.

Vậy $\widehat{ADC} = \widehat{DHC} + \widehat{HCD} = 90^o + \widehat{HCD} > 90^o$ hay góc $\widehat{ADC}$ là góc tù.

**4.** (h.190)




Hình 190

a) $\Delta ABC$ có $\widehat{C} = 40^o$ ; $\widehat{B} = 70^o \Rightarrow \widehat{A} = 70^o$.

Dễ thấy $\Delta HCE = \Delta KCE$ (c.g.c).

b) $\Delta CHK$ cân (CH = CK) ; $\widehat{C} = 40^o$ nên $\widehat{CKH} = \widehat{CHK} = \dfrac{180^o - \widehat{C}}{2} = 70^o$

$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{KHC}\ (= 70^o)$, mà hai góc ở vị trí đồng vị, suy ra HK // AB.

c) CE là tia phân giác của $\widehat{C} \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{C_2} = \dfrac{1}{2}\widehat{C} = 20^o$.

$\Delta CKE = \Delta CHE \Rightarrow \widehat{CKE} = \widehat{CHE} \Rightarrow \widehat{CKE} = 90^o$.

$\Delta KCE$ có $\widehat{CKE} = 90^o$ ; $\widehat{C_1} = 20^o \Rightarrow \widehat{CEK} = 70^o$.

d) $\widehat{HBD} = 90^o + \widehat{HBA} = 90^o + 90^o - \widehat{HAB} = 180^o - \widehat{HAB} \Rightarrow \widehat{HBD} = \widehat{FAB}$.

Xét $\Delta BHD$ và $\Delta AFB$, ta có : AF = BH ; $\widehat{FAB} = \widehat{HBD}$ ;

AB = BD nên $\Delta AFB = \Delta BHD$ (c.g.c) $\Rightarrow$ BF = DH.

**5.** (h.191) a) $\Delta BEM = \Delta CFN$ (g.c.g) $\Rightarrow ME = NF$.

b) Xét $\Delta BME$ và $\Delta DME$, ta có :

$\widehat{BME} = \widehat{DME}\ (= 90^o)$ ; $\widehat{B_1} = \widehat{BDE}\ (= \widehat{C_1})$;

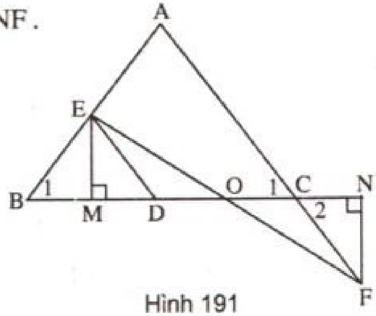
EM là cạnh chung.

Suy ra $\Delta BME = \Delta DME$ (g.c.g).

Do đó $BM = MD$.

c) $\Delta OME = \Delta ONF$ (g.c.g).

Suy ra $OE = OF$.




Hình 191

**6.** (h.192) Dựng tam giác đều ACE ra phía ngoài $\Delta ABC$.

Xét $\Delta ABC$, ta có : $AB = AC$ ; $\widehat{BAC} = 100^o$

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 40^o$

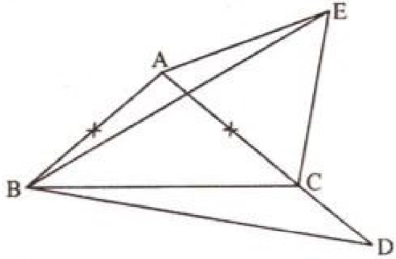
$\Rightarrow \widehat{BCE} = 100^o$.

Từ đó suy ra $\Delta ABD = \Delta CEB$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{D} = \widehat{CBE}$.

$\Delta ABE$ cân tại A có $\widehat{BAE} = 160^o \Rightarrow \widehat{ABE} = 10^o$

$\Rightarrow \widehat{CBE} = 30^o \Rightarrow \widehat{D} = 30^o \Rightarrow \widehat{CBD} = 10^o$.




Hình 192

# MỤC LỤC