§1 VÉC-TƠ VÀ MA TRẬN

1.1 Véc tơ (*vector*)

$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_d \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$

$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_d + y_d \end{bmatrix}$ $c\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_d \end{bmatrix}$

$x_i, i = 1,2, \dots, d$, *toạ độ* trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^d$.

- *Chuyển vị*: $\boldsymbol{x}^t = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_d]$
- *Tích vô hướng* (*nội tích*):

  $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_dy_d = \boldsymbol{x}^t\boldsymbol{y}$.
- *Chuẩn* sinh ra từ tích vô hướng:

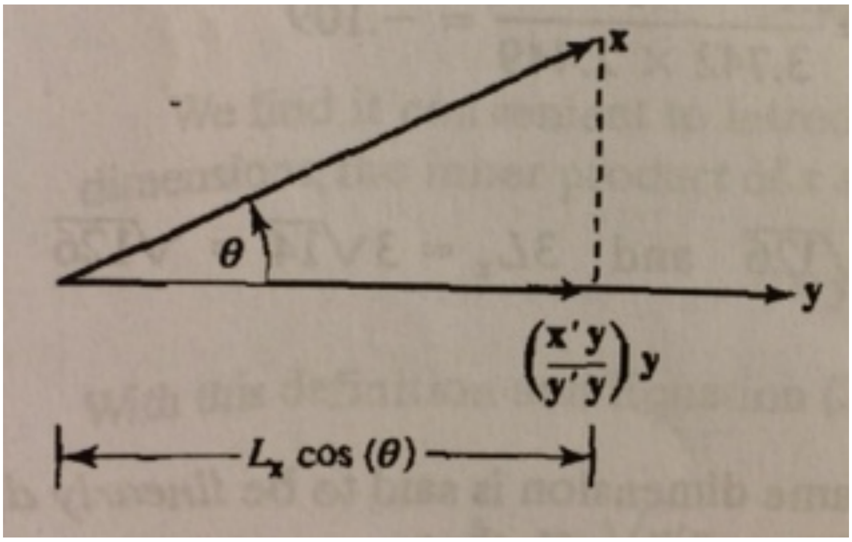
$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \sqrt{\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2}.$$

- *Hai véc tơ trực giao*: $\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{y} = 0$.
- *Độ dài* của véc tơ $\boldsymbol{x}$: $L_{\boldsymbol{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2}$ $(= \|\boldsymbol{x}\|)$

  Co dãn véc tơ: $L_{c\boldsymbol{x}} = |c|L_{\boldsymbol{x}}$ (co $|c| < 1$, *dãn* $|c| > 1$)

  Véc tơ đơn vị: $L_{\boldsymbol{x}}^{-1}\boldsymbol{x}$
- *Góc* của 2 véc tơ: $cos\theta = \boldsymbol{x}^t\boldsymbol{y}/(L_{\boldsymbol{x}}L_{\boldsymbol{y}})$

- *Chiếu* (vuông góc) của $\boldsymbol{x}$ lên $\boldsymbol{y}$: $\dfrac{|\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{y}|}{\boldsymbol{y}^t\boldsymbol{y}}\boldsymbol{y} = \dfrac{\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{y}}{L_{\boldsymbol{y}}}\dfrac{\boldsymbol{y}}{L_{\boldsymbol{y}}}$



Độ dài của chiếu trên: $\dfrac{|\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{y}|}{L_{\boldsymbol{y}}} = |cos\theta| L_{\boldsymbol{x}}$

- *Độc lập tuyến tính*:

$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ *phụ thuộc tuyến tính* nếu $\exists c_1$ và c_2 không đồng thời $= 0$

sao cho $c_1\boldsymbol{x} + c_2\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$.

$*$ ***Thí dụ 1.1*** Các véc tơ độc lập tuyến tính:

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad \blacksquare$$

1.2 Ma trận (*matrix*)

Ma trận $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{d\times p} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dp} \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]_{d\times p}$

- *Tổng ma trận* $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = [a_{ij} + b_{ij}]_{d\times p}$

- *Tích ma trận với hằng số c*: $c\boldsymbol{A} = [ca_{ij}]_{d\times p}$

- *Chuyển vị*: $\boldsymbol{A}^t = [a_{ji}]_{p\times d} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{d1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{d2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \cdots & a_{dp} \end{bmatrix}$

  Để ý: Véc tơ là trường hợp riêng của ma trận: $\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{y}$

  Ngoại tích của 2 véc tơ $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^t = [x_i y_j]_{d\times d}$

- *Tích ma trận*: Cho $\boldsymbol{P} = [p_{ij}]_{d\times m}$ $\boldsymbol{Q} = [q_{ji}]_{m\times p}$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{PQ} = \boldsymbol{C} = [c_{ij}]_{d\times p},\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} p_{ik}q_{kj}$$

- *Ma trận vuông*: $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{d\times d}$

  Từ đó, với kích cỡ phù hợp, có thể định nghĩa:

$$\boldsymbol{Ax} \quad \boldsymbol{x}^t\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{x}^t\boldsymbol{Ax} \ldots$$

∗ ***Thí dụ 1.2*** Cho $\boldsymbol{P}_{(2\times 3)} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{Q}_{(3\times 1)} = \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{PQ} = \boldsymbol{C} = \boldsymbol{c} = [c_{ij}]_{2\times 1} \text{ với}$$

$$c_{11} = 3.(-2) + (-1).7 + 2.4 = -5;$$

$$c_{21} = 1.(-2) + 5.7 + 4.4 = 49. \qquad \blacksquare$$

- *Ma trận đối xứng*: $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{d\times d} = \boldsymbol{A}^t$

- *Định thức ma trận:* $det\,\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|$ - hạng rank$(\boldsymbol{A})$ = cấp d

$$det\,\boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^{d} a_{ij}\,\left|\boldsymbol{A}_{ij}\right|(-1)^{i+j}\ (|\boldsymbol{A}| = a_{11} \text{ nếu } d = 1).$$

- *Ma trận đơn vị*: $\boldsymbol{I} = \text{diag}\{1,1,\dots 1\}$ - ma trận chéo
- *Ma trận nghịch đảo*: $\boldsymbol{A}^{-1}$ $\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$

  $\boldsymbol{A}$ *khả nghịch* nếu các cột (hoặc các hàng) độc lập tuyến tính

  hoặc có $det\,\boldsymbol{A} = 0$ (suy biến).

* **<u>Mệnh đề 1.1</u>** Cho $\boldsymbol{A}$ và $\boldsymbol{B}$ là các ma trận vuông cấp d. Khi đó:

(a) $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^t|$

(b) $(\boldsymbol{A}^{-1})^t = (\boldsymbol{A}^t)^{-1}$

(c) $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$

(d) $|c\boldsymbol{B}| = c^d|\boldsymbol{B}|$

(e) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

- *Vết* của ma trận vuông $\quad \text{tr}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{d} a_{ii}$.

* **<u>Mệnh đề 1.2</u>** Cho $\boldsymbol{A}$ và $\boldsymbol{B}$ là các ma trận vuông cấp d. Khi đó:

(a) $\text{tr}(\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}) = \text{tr}(\boldsymbol{A}) \pm \text{tr}(\boldsymbol{B})$

(b) $\text{tr}(c\boldsymbol{B}) = c\,\text{tr}(\boldsymbol{B})$

(c) $\text{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \text{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$

(d) $\text{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^t) = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} a_{ij}^2$.

- *Ma trận trực giao*: $\boldsymbol{A}^t = \boldsymbol{A}^{-1}$

  Tính chất ma trận trực giao:

  1. Tổng bình phương một cột (hàng) bằng 1.
  2. Tổng các tích các phần tử 2 cột (hàng) khác nhau bằng không, tức là hai cột (hàng) trực giao.

- *Trị riêng và véc tơ riêng*: $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$

  Nếu chuẩn hoá véc tơ riêng ($\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{x} = 1$) thì ký hiệu là $\boldsymbol{e}$.

* **<u>Mệnh đề 1.3</u>** Nếu ma trận $\boldsymbol{A}$ cấp d đối xứng, khi đó $\boldsymbol{A}$ có d cặp trị riêng và véc tơ riêng trực chuẩn $(\lambda_i, \boldsymbol{e}_i)$, $i = \overline{1, d}$.

Để ý: $\text{tr}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i$, λ_i là các trị riêng của $\boldsymbol{A}$.

$*$ ***Thí dụ 1.3*** Cho $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$. Giải $det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0$

$\Longrightarrow \quad \lambda_1 = -4$; $\boldsymbol{e}_1^t = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$;

$\lambda_2 = 6$; $\boldsymbol{e}_2^t = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$. ■

- *Trị kỳ dị* (*singular value*) của ma trận chữ nhật $\boldsymbol{B}$ nào đó là trị riêng của ma trận $\boldsymbol{BB}^t$ hoặc $\boldsymbol{B}^t\boldsymbol{B}$.

- *Khai triển phổ* (*Spectral decomposition*) Cho ma trận $\boldsymbol{A}$ cấp d đối xứng. Khi đó $\boldsymbol{A}$ có thể biểu diễn theo $(\lambda_i, \boldsymbol{e}_i)$, $i = \overline{1, d}$

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i^t.$$

∗ ***Thí dụ 1.4*** Cho $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 2{,}8 \end{bmatrix}$.

Giải $det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$\Longrightarrow \quad \lambda_1 = 3$; $\boldsymbol{e}_1^t = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$;

$\lambda_2 = 2$; $\boldsymbol{e}_2^t = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$.

Từ đó $\boldsymbol{A} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_1^t + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_2^t = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 1{,}2 \\ 1{,}2 & 2{,}4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1{,}6 & -0{,}8 \\ -0{,}8 & 0{,}4 \end{bmatrix}$. ■

- *Ma trận xác định dương* $\boldsymbol{A}$ (đối xứng): $\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} > 0 \ \forall \boldsymbol{x} \neq 0$

hoặc các trị riêng dương, ...

∗ ***Thí dụ 1.5*** Cho $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$. $\boldsymbol{A}$ xác định dương vì có hai trị riêng $\lambda_1 = 4$ và $\lambda_2 = 1$ đều dương; hoặc dạng toàn phương là

$$\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 2\sqrt{2}x_1x_2 = 4\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_1^t \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^t \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_2^t \boldsymbol{x}$$

$$= 4y_1^2 + y_2^2 > 0,$$

trong đó $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1^t \\ \boldsymbol{e}_2^t \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{E}$ trực giao). ■

- *Khoảng cách*:

+ Khoảng cách Euclid $d(\mathrm{O{,}P}) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}$, $\mathrm{P}(x_1, \dots, x_d)$; đường đẳng trị $x_1^2 + \cdots + x_d^2 = c^2$ (cầu). Khi các toạ độ là các biến ngẫu nhiên thì các x_i khác thứ nguyên.

+ Quy chuẩn $x_i^* = \dfrac{x_i}{\sqrt{\sigma_{ii}}} \Longrightarrow d(\mathrm{O,P}) = \sqrt{x_1^{*2} + \cdots + x_d^{*2}}$;

đường đẳng trị $\dfrac{x_1^2}{\sigma_{11}} + \ldots + \dfrac{x_d^2}{\sigma_{dd}} = c^2$ (ellipsoid).

+ Khoảng cách tổng quát (có trọng):

(khoảng cách)$^2 = \boldsymbol{x}^t \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$ (đến gốc O);

(khoảng cách)$^2 = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{A} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})$ (đến trung bình).

- *Ma trận căn hai*: $\boldsymbol{A}^{1/2}$
- Cho $\boldsymbol{A}$ là ma trận xác định dương với các trị riêng – véc tơ riêng $(\lambda_i, \boldsymbol{e}_i)$, $i = \overline{1, d}$:

$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i^t = \boldsymbol{P\Lambda P}^t$, $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\}$, $\boldsymbol{P}$ trực giao

$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{P\Lambda}^{-1}\boldsymbol{P}^t$

$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{A}^{1/2} = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{\lambda_i} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i^t = \boldsymbol{P\Lambda}^{1/2}\boldsymbol{P}^t$.

Để ý: $(\boldsymbol{A}^{1/2})^t = \boldsymbol{A}^{1/2}$; $\boldsymbol{A}^{1/2}\boldsymbol{A}^{1/2} = \boldsymbol{A}$; $(\boldsymbol{A}^{1/2})^{-1} = \boldsymbol{P\Lambda}^{-1/2}\boldsymbol{P}^t$;

$(\boldsymbol{A})^{-1/2} = (\boldsymbol{A}^{1/2})^{-1}$.

- *Bất đẳng thức Cauchy – Schwatz*:

$(\boldsymbol{a}^t \boldsymbol{b})^2 \leq (\boldsymbol{a}^t \boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}^t \boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^d$.

BĐT Cauchy – Schwatz mở rộng:

$(\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b})^2 \leq (\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{C}\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{C}$ xác định dương.

- *Bổ đề cực đại hoá*:

***Bổ đề 1.1** Cho $\boldsymbol{B}$ ma trận xác định dương cấp d, khi đó $\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$

$$\max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{(\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{a})^2}{\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a}^t\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}, \text{ dấu bằng đạt tại } \boldsymbol{x} = c\,\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}.$$

- *Cực đại dạng toàn phương trên hình cầu đơn vị*:

  Cho $\boldsymbol{B}$ ma trận xác định dương cấp d, có các cặp $(\lambda_i, \boldsymbol{e}_i)$, $i = \overline{1, d}$, với $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_d \geq 0$; khi đó:

$$\max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{x}} = \lambda_1 \text{ tại } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1;$$

$$\min_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{x}} = \lambda_d \text{ tại } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_d.$$

Ngoài ra $\displaystyle\max_{\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_k} \frac{\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{x}} = \lambda_{k+1}$ tại $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_{k+1}$, $k = 1,2,\dots,d-1$.

§2 BIẾN NGẪU NHIÊN NHIỀU CHIỀU

2.1 Véc tơ và ma trận ngẫu nhiên (*random vector and matrix*)

- *Ma trận ngẫu nhiên*: $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1p} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{d1} & X_{d2} & \cdots & X_{dp} \end{bmatrix}$ cỡ $d \times p$.

- *Véc tơ ngẫu nhiên*: $\boldsymbol{X} = [X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_d]^t \in \mathbb{R}^d$.

- *Kỳ vọng (véc tơ kỳ vọng)*: $E\boldsymbol{X} = [EX_1 \quad EX_2 \quad \dots \quad EX_d]^t = \boldsymbol{\mu}$

$$E(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}) = E(\boldsymbol{X}) + E(\boldsymbol{Y})$$

$$E(\boldsymbol{AXB}) = \boldsymbol{A}E(\boldsymbol{X})\boldsymbol{B}.$$

Nhắc lại:

Kỳ vọng (biên)

$$EX_i = \mu_i = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x f_i(x)dx, X_i \text{ liên tục} \\ \sum_{\forall x} x\, p_i(x), \ \ X_i \text{ rời rạc.} \end{cases}$$

Phương sai (biên)

$$VX_i = \sigma_{ii} = \sigma_i^2 = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_i)^2 f_i(x)dx, X_i \text{ liên tục} \\ \sum_{\forall x} (x-\mu_i)^2\, p_i(x), \ \ X_i \text{ rời rạc.} \end{cases}$$

Hiệp phương sai $cov(X_i, X_j) = \sigma_{ij} = E\big[(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)\big] = \sigma_{ji}$

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_i)\big(y-\mu_j\big) f_{ij}(x,y)dxdy, X_i, X_j \text{ liên tục} \\ \sum_{\forall x} (x-\mu_i)(y-\mu_j)\, p_{ij}(x,y), \ \ X_i, X_j \text{ rời rạc.} \end{cases}$$

Tương quan (hệ số tương quan) $\rho_{ij} = \dfrac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}}\sqrt{\sigma_{jj}}} = \dfrac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$.

- *Ma trận hiệp phương sai (covariance matrix)*

$$\boldsymbol{\Sigma} = \{\sigma_{ij}\} = E[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^t] = cov(\boldsymbol{X}).$$

- *Ma trận tương quan (correlation matrix)*

$\boldsymbol{\rho} = \{\rho_{ij}\} = corr(\boldsymbol{X})$.

- *Ma trận độ lệch chuẩn* (*standard deviation matrix*)

$\boldsymbol{V}^{1/2} = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_d\}$

Dễ thấy: $\boldsymbol{V}^{1/2}\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{V}^{1/2} = \boldsymbol{\Sigma}$; $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{V}^{-1/2}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{-1/2}$.

$*$ ***Thí dụ 2.1*** Cho hai biến ngẫu nhiên X, Y có hàm xác suất đồng thời dưới đây:

$x \backslash y$	0	1	$p_1(x)$
-1	0,24	0,06	0,3
0	0,16	0,14	0,3
1	0,40	0,00	0,4
$p_2(y)$	0,8	0,2	1

Ta đi tìm ma trận hiệp phương sai của X, Y. Dễ thấy $\mu_1 = 0{,}1$; $\mu_2 = 0{,}2$ và ta có $\boldsymbol{\Sigma} = \{\sigma_{ij}\} = \begin{bmatrix} 0{,}69 & -0{,}08 \\ -0{,}08 & 0{,}16 \end{bmatrix}$. ■

$*$ ***Thí dụ 2.2*** Cho ma trận

$$\boldsymbol{\Sigma} = \{\sigma_{ij}\} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 25 \end{bmatrix}. \text{ Tìm } \boldsymbol{V}^{1/2} \text{ và } \boldsymbol{\rho}.$$

Ở đây dễ thấy các σ_i là 2, 3 và 5, từ đó

$$\boldsymbol{V}^{1/2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ và } \boldsymbol{V}^{-1/2} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

Suy ra $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{V}^{-1/2}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{-1/2} = \begin{bmatrix} 1 & 1/6 & 1/5 \\ 1/6 & 1 & -1/5 \\ 1/5 & -1/5 & 1 \end{bmatrix}$. ■

- *Chia khối ma trận hiệp phương sai*

Xét véc tơ khối $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \\ \dots\dots \\ X_{p+1} \\ \vdots \\ X_d \end{bmatrix}$ chứa 2 véc tơ con cỡ p và $d-p$. Ta viết lại $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}^{(1)} \\ \dots\dots \\ \boldsymbol{X}^{(2)} \end{bmatrix}$ và đặt $\boldsymbol{\mu} = E\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^{(1)} \\ \dots\dots \\ \boldsymbol{\mu}^{(2)} \end{bmatrix}$ với hai véc tơ kỳ vọng con tương ứng ($\boldsymbol{\mu}^{(i)} = E\boldsymbol{X}^{(i)}$). Tương tự có thể chia

$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}$, với $\boldsymbol{\Sigma}_{ij} = E\left[(\boldsymbol{X}^{(i)} - \boldsymbol{\mu}^{(i)})(\boldsymbol{X}^{(j)} - \boldsymbol{\mu}^{(j)})^t\right]$ và để ý $\boldsymbol{\Sigma}_{12} = \boldsymbol{\Sigma}_{21}^t$. Ở đây chú ý ký hiệu $\boldsymbol{\Sigma}_{12} = cov(\boldsymbol{X}^{(1)}, \boldsymbol{X}^{(2)})$.

- *Tổ hợp tuyến tính của các biến ngẫu nhiên*

Cho $\boldsymbol{X}$ và $\boldsymbol{c}$ là các véc tơ d chiều. Ta có tổ hợp tuyến tính của các thành phần của véc tơ ngẫu nhiên $\boldsymbol{X}$

$$Z = c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_dX_d = \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{X}.$$

Dễ dàng chứng tỏ: $E(\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{\mu}$; $V(\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{c}$, với $\boldsymbol{\mu}$ và $\boldsymbol{\Sigma}$ là kỳ vọng và ma trận hiệp phương sai của $\boldsymbol{X}$. Có thể xét tổng quát: $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}$ với $\boldsymbol{C}$ là ma trận hằng nào đó và

$$E\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{X}}; V\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{C}^t.$$

∗ ***Thí dụ 2.2*** Cho $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ và $\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} X_1 - X_2 \\ X_1 + X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}$. Rõ ràng $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Z}} = E\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu_2 \\ \mu_1 + \mu_2 \end{bmatrix}$;

$$V\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{C}^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} - 2\sigma_{12} + \sigma_{22} & \sigma_{11} - \sigma_{22} \\ \sigma_{11} - \sigma_{22} & \sigma_{11} + 2\sigma_{12} + \sigma_{22} \end{bmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Để ý nếu $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ thì hai biến X_1 và X_2 không tương quan.

2.2 Phân phối chuẩn nhiều chiều (*multivariate normal distribution*)

- *Hàm mật độ chuẩn một chiều*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\{-(x-\mu)^2/2\sigma^2\}, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$$

$$P(|X - \mu| \leq \sigma) = 0.68;$$

$$P(|X - \mu| \leq 2\sigma) = 0,95.$$

- *Hàm mật độ chuẩn nhiều chiều*

Để ý $(x-\mu)^2/\sigma^2 = (x-\mu)(\sigma^2)^{-1}\,(x-\mu) \Longrightarrow$ nhiều chiều

$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^t\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})$ - khoảng cách thống kê, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$.

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\{-\ \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^t\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})}{2}\}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{\Sigma})$ hoặc $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{\Sigma})$.

$*$ ***Thí dụ 2.3*** Cho $d = 2$, $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{bmatrix}$ và do $\rho_{12} = \dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2} = \rho$

suy ra $\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \dfrac{1}{\sigma_{11}\sigma_{22}-\sigma_{12}^2}\begin{bmatrix}\sigma_{22} & -\sigma_{12}\\ -\sigma_{12} & \sigma_{11}\end{bmatrix} \quad \Longrightarrow$

$$f(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)^{1/2}} \times$$

$$\exp\left\{\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\ \frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right]\right\}.$$

Nếu $\rho = 0 \Longrightarrow\ f(x_1,x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2) \Leftrightarrow X_1, X_2$ độc lập.

- *Đường đẳng trị mật độ*

$\{\forall\boldsymbol{x}$ sao cho $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^t\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\ = c^2\}$ là các siêu ellipsoid

có tâm ở $\boldsymbol{\mu}$ và các bán trục $\pm\, c\sqrt{\lambda_i}\,\boldsymbol{e}_i$, $i = \overline{1,d}$.

$*$ ***Thí dụ 2.4*** (*Đường đẳng trị mật độ của biến 2 chiều*)

Để tìm các bán trục của đường đẳng trị mật độ 2 chiều trường hợp $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ ta giải

$$|\boldsymbol{\Sigma} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{11} - \lambda \end{vmatrix} = (\sigma_{11} - \lambda)^2 - \sigma_{12}^2.$$

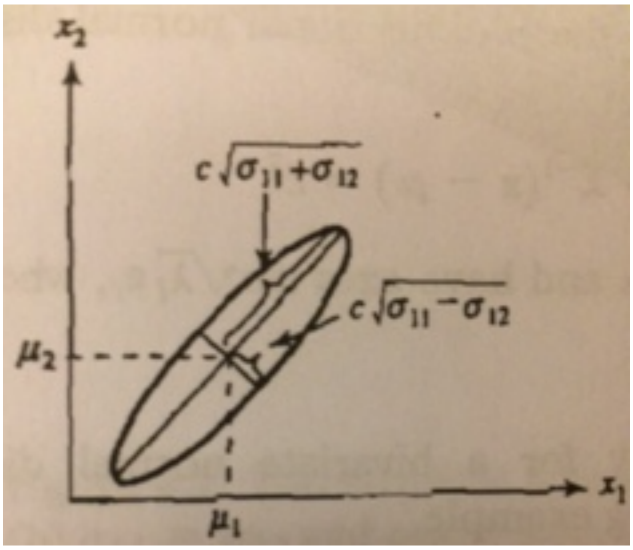
Các trị riêng của $\boldsymbol{\Sigma}$ là:

$\lambda_1 = \sigma_{11} + \sigma_{12}$ và $\lambda_2 = \sigma_{11} - \sigma_{12}$;

với hai véc tơ riêng tương ứng

$\boldsymbol{e}_1 = \left[1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2}\right]^t$ và $\boldsymbol{e}_2 = \left[1/\sqrt{2} \quad -1/\sqrt{2}\right]^t$.

Nếu tương quan $\rho > 0$, $\lambda_1 = \sigma_{11} + \sigma_{12}$ là trị riêng lớn nhất và véc tơ riêng $\boldsymbol{e}_1$ nằm trên đường đi qua điểm (μ_1, μ_2) tạo góc 45^0 với các trục toạ độ. Các bán trục được cho bởi $\pm c\sqrt{\lambda_i}\boldsymbol{e}_i$. Tóm lại trong



trường hợp $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ các bán trục của ellipsoid đẳng trị mật độ:

$\pm c\sqrt{\sigma_{11} + \sigma_{22}}\left[1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2}\right]^t$; $\pm c\sqrt{\sigma_{11} - \sigma_{22}}\left[1/\sqrt{2} \quad -1/\sqrt{2}\right]^t$ ■

Cuối cùng ta có

$P[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^t\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}) \le \chi_d^2(1-\alpha)] = 1-\alpha.$

- *Tính chất của phân phối chuẩn nhiều chiều*:

Cho véc tơ ngẫu nhiên $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{\Sigma})$, khi đó

(1) Tổ hợp tuyến tính các thành phần của $\boldsymbol{X}$ có phân phối chuẩn;

(2) Mọi tập con các thành phần của $\boldsymbol{X}$ có phân phối chuẩn;

(3) $Cov(X_i, X_j) = 0 \Longrightarrow X_i$ và X_j độc lập;

(4) Phân phối có điều kiện của các thành phần của $\boldsymbol{X}$ cũng có phân phối chuẩn.

* **<u>Mệnh đề 2.1</u>** Nếu $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{\Sigma})$, thì tổ hợp tuyến tính $c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_dX_d = \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{X}$ có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{c})$. Cũng vậy, nếu $\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{c})\ \forall\boldsymbol{c}$, thì $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{\Sigma})$.

Để ý nếu chọn $\boldsymbol{c}^t = (1,0,\dots,0)$, thì $\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{\mu} = \mu_1$ và $\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{c} = \sigma_{11}$; nghĩa là $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1;\sigma_{11})$, tức là $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i;\sigma_{ii})\ \forall i$.

* **<u>Mệnh đề 2.2</u>** Nếu $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{\Sigma})$, thì p tổ hợp tuyến tính

$$\boldsymbol{AX} = \begin{bmatrix} a_{11}X_1 + \cdots + a_{1d}X_d \\ a_{21}X_1 + \cdots + a_{2d}X_d \\ \vdots \\ a_{p1}X_1 + \cdots + a_{pd}X_d \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{A\mu};\boldsymbol{A\Sigma A}^t).$$

Cũng thế, $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{c} \sim \mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu}+\ \boldsymbol{c};\boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{c}$ là véc tơ hằng.

∗ ***Thí dụ 2.5*** (*Phân phối của hai tổ hợp tuyến tính các thành phần của véc tơ ngẫu nhiên chuẩn*). Cho $\boldsymbol{X}\sim\mathcal{N}_3(\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{\Sigma})$, tìm phân phối của

$$\begin{bmatrix} X_1 - X_2 \\ X_2 - X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{AX}.$$

Theo mệnh đề 2.2 phân phối của $\boldsymbol{AX}$ là chuẩn nhiều chiều với trung bình

$$\boldsymbol{A\mu} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu_2 \\ \mu_2 - \mu_3 \end{bmatrix}$$

và ma trận hiệp phương sai

$$\boldsymbol{A\Sigma A}^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} - 2\sigma_{12} + \sigma_{22} & \sigma_{12} + \sigma_{23} - \sigma_{22} - \sigma_{13} \\ \sigma_{12} + \sigma_{23} - \sigma_{22} - \sigma_{13} & \sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33} \end{bmatrix}. \qquad \blacksquare$$

* <u>**Mệnh đề 2.3**</u> Nếu $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{\Sigma})$, thì mọi tập con các thành phần của véc tơ $\boldsymbol{X}$ có phân phối chuẩn.

∗ ***Thí dụ 2.5*** (*Phân phối của tập con của véc tơ ngẫu nhiên chuẩn*)

Cho $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{\Sigma})$, tìm phân phối của $\begin{bmatrix} X_2 \\ X_4 \end{bmatrix}$. Có thể thấy véc tơ $\begin{bmatrix} X_2 \\ X_4 \end{bmatrix}$ có phân phối $\mathcal{N}_2(.\,;.) = \mathcal{N}_2\left(\begin{bmatrix} \mu_2 \\ \mu_4 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{24} \\ \sigma_{24} & \sigma_{44} \end{bmatrix}\right)$.

* <u>**Mệnh đề 2.4**</u>

(a) Nếu $\boldsymbol{X}_1$ p chiều và $\boldsymbol{X}_2$ q chiều có phân phối chuẩn và độc lập, thì $cov(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2) = \boldsymbol{0}$, ma trận cấp $p \times q$ gồm các số 0.

(b) Nếu $\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \cdots\cdots \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix}$ là $\mathcal{N}_{p+q}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \ldots\ldots \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \vdots & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \ldots\ldots & \vdots & \ldots\ldots \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \vdots & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}\right)$, thì $\boldsymbol{X}_1$và $\boldsymbol{X}_2$ độc lập khi và chỉ khi $\boldsymbol{\Sigma}_{12} = \boldsymbol{0}$.

(c) Nếu $\boldsymbol{X}_1$ và $\boldsymbol{X}_2$ độc lập và có phân phối tương ứng $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}_1; \boldsymbol{\Sigma}_{11})$ và $\mathcal{N}_q(\boldsymbol{\mu}_2; \boldsymbol{\Sigma}_{22})$, thì $\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \cdots\cdots \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix}$ có $\mathcal{N}_{p+q}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \ldots\ldots \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \vdots & \boldsymbol{0} \\ \ldots\ldots & \vdots & \ldots\ldots \\ \boldsymbol{0}^t & \vdots & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}\right)$.

* ***Thí dụ 2.6*** Cho $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}_3(\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\Sigma})$ với $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Do X_1 và X_2 có hiệp phương sai $\sigma_{12} = 1$, nên chúng không độc lập. Ngoài ra do X_3 và $[X_1 \quad X_2]^t$ có ma trận hiệp phương sai $= [0 \quad 0]$ nên chúng độc lập; X_3 độc lập với X_1 và cả X_2. ■

* <u>**Mệnh đề 2.5**</u> Cho $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \cdots\cdots \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix}$ có phân phối là $\mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\Sigma})$ với $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \ldots\ldots \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix}$ và $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \vdots & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \ldots\ldots & \vdots & \ldots\ldots \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \vdots & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}$, $|\boldsymbol{\Sigma}_{22}| > 0$. Khi đó phân phối có điều kiện của $\boldsymbol{X}_1$, biết $\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{x}_2$, là chuẩn và có:

Kỳ vọng $= E(\boldsymbol{X}_1|\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)$

Hiệp phương sai $= \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}$.

$*$ ***Thí dụ 2.7*** (*Mật độ có điều kiện của phân phối chuẩn hai chiều*)

$\varphi(x_1|x_2) =$ {Mật độ có điều kiện của $X_1|(X_2 = \boldsymbol{x}_2)$} $= \dfrac{f(x_1,x_2)}{f_2(x_2)}$,

trong đó $f_2(x_2)$ là mật độ biên của X_2. Nếu $f(x_1, x_2)$ là mật độ chuẩn hai chiều, ta có thể chỉ ra $\varphi(x_1|x_2)$ là

$$\mathcal{N}\left(\mu_1 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}(x_2 - \mu_2), \sigma_{11} - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{22}}\right).$$

Ở đây để ý $\sigma_{11} - \sigma_{12}^2/\sigma_{22} = \sigma_{11}(1 - \rho_{12}^2)$. ■

* <u>**Mệnh đề 2.8**</u> Cho $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\Sigma})$ với $|\boldsymbol{\Sigma}| > 0$. Khi đó

(a) $(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})^t\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi_d^2$;

(b) $P[(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})^t\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}) \le \chi_d^2(1-\alpha)] = 1 - \alpha$.

* <u>**Mệnh đề 2.9**</u> Cho $\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n$ độc lập từng đôi với $\boldsymbol{X}_i \sim \mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu}_i; \boldsymbol{\Sigma})$ (cùng ma trận hiệp phương sai $\boldsymbol{\Sigma}$). Khi đó

$$\boldsymbol{V}_1 = c_1\boldsymbol{X}_1 + c_2\boldsymbol{X}_2 + \dots + c_n\boldsymbol{X}_n \sim \mathcal{N}_d\left(\textstyle\sum_{j=\mathbf{1}}^n c_j\boldsymbol{\mu}_j\,; \left(\sum_{j=\mathbf{1}}^n c_j^2\right)\boldsymbol{\Sigma}\right).$$

Hơn nữa $\boldsymbol{V}_1$ và $\boldsymbol{V}_2 = b_1\boldsymbol{X}_1 + b_2\boldsymbol{X}_2 + \dots + b_n\boldsymbol{X}_n$ là chuẩn đồng thời với ma trận hiệp phương sai

$$\begin{bmatrix} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right)\boldsymbol{\Sigma} & (\boldsymbol{b^t c})\boldsymbol{\Sigma} \\ (\boldsymbol{b^t c})\boldsymbol{\Sigma} & \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right)\boldsymbol{\Sigma} \end{bmatrix}.$$

Hệ quả là $\boldsymbol{V}_1$ và $\boldsymbol{V}_2$ độc lập nếu $\boldsymbol{b^t c} = \sum_{j=1}^{n} c_j b_j = 0$.

$*$ ***Thí dụ 2.8*** (*Tổ hợp tuyến tính các véc tơ ngẫu nhiên*) Cho $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3$ và $\boldsymbol{X}_4$ là các véc tơ ngẫu nhiên 3 chiều độc lập và cùng phân phối với $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ và $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Tổ hợp tuyến tính $\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{X}_1$ các thành phần của $\boldsymbol{X}_1$ là biến ngẫu nhiên một chiều (vô hướng) có trung bình $\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{\mu} = 3a_1 - a_2 + a_3$

và phương sai $\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{\Sigma a} = 3a_1^2 + a_2^2 + 2a_3^2 - 2a_1a_2 + 2a_1a_3$.

Tình thế sẽ khác cho tổ hợp tuyến tính các véc tơ ngẫu nhiên

$$c_1\boldsymbol{X}_1 + c_2\boldsymbol{X}_2 + c_3\boldsymbol{X}_3 + c_4\boldsymbol{X}_4$$

sẽ là một véc tơ ngẫu nhiên.

Ta xét hai tổ hợp tuyến tính

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{X}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{X}_2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{X}_3 + \frac{1}{2}\boldsymbol{X}_4 \text{ và } \boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{X}_3 - 3\boldsymbol{X}_4.$$

Tổ hợp đầu có kỳ vọng $(c_1 + c_2 + c_3 + c_4)\boldsymbol{\mu} = 2\boldsymbol{\mu} = [6 \quad -2 \quad 2]^t$

và ma trận hiệp phương sai

$$(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2)\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Đối với tổ hợp thứ hai ta có véc tơ ngẫu nhiên với kỳ vọng $(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)\boldsymbol{\mu} = 0.\boldsymbol{\mu} = [0 \quad 0 \quad 0]^t$ và ma trận hiệp phương sai

$$(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2)\boldsymbol{\Sigma} = 12.\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 36 & -12 & 12 \\ -12 & 12 & 0 \\ 12 & 0 & 24 \end{bmatrix}.$$

Cuối cùng, ma trận hiệp phương sai của hai tổ hợp tuyến tính là

$$(c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3 + c_4b_4)\boldsymbol{\Sigma} = 0.\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Như vậy hai véc tơ tổ hợp tuyến tính có phân phối chuẩn đồng thời 6 chiều và hai véc tơ đó độc lập. ■

BÀI TẬP

1. Cho $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.
2. Cho $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$